

Department of Electrical Engineering

National Taiwan University

Probability and Statistics, Spring 2013

Final Examination

15:30-18:30, Thursday, June 20, 2013

1. (10%) The complementary CDF $Q(z)$ of a standard normal distribution is defined as follows:

$$Q(z) = \int_z^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx.$$

Approximation of the $Q(z)$ function is sometimes very important in deriving analytical results involving Gaussian random variables.

- (a) (5%) Use the Chernoff bound to show that

$$Q(z) \leq e^{-z^2/2}, \quad z \geq 0.$$

- (b) (5%) Show that the bound derived in (a) can be further tightened as follows:

$$Q(z) \leq \frac{1}{2} e^{-z^2/2}, \quad z \geq 0.$$

Hint: Consider two independent standard normal random variables U and V . What is $P[U > z, V > z]$? Proceed with the proof by providing an upper bound to this probability.

2. (12%) Consider two random variables X and Y and their random samples X_1, X_2, \dots, X_n and Y_1, Y_2, \dots, Y_n for $n = 1, 2, \dots$

- (a) (2%) It is often desirable to have a sequence of estimates that are *unbiased* and *consistent*. What are the nice properties of such an estimator that enables us to estimate the target parameter correctly?

- (b) (5%) To estimate correlation $r = E[XY]$, the following sample correlation is used:

$$\hat{R}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i Y_i.$$

Show that if XY has a finite variance, then $\hat{R}_1, \hat{R}_2, \dots$ is an unbiased and consistent sequence of estimates of r .

- (c) (5%) To estimate covariance $v = \text{Cov}[X, Y]$, it is observed that $\text{Cov}[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$. Hence, the following sample covariance is used:

$$\widehat{V}_n = \widehat{R}_n - M_n(X)M_n(Y),$$

where \widehat{R}_n is the sample correlation defined in (b) while $M_n(X)$ and $M_n(Y)$ are sample means of X and Y respectively. Show that \widehat{V}_n is a biased estimate of v and explain how an unbiased estimate of v can be constructed.

3. (14%) U and V are two independent standard normal random variables. Let $X = aU + bV$ and $Y = cU + dV$, where a, b, c and d are non-zero constants and $ad \neq bc$.

- (a) (3%) Find the PDFs $f_X(x)$ and $f_Y(y)$ of random variables X and Y respectively.
- (b) (5%) Find the joint PDF $f_{X,Y}(x, y)$ of random variables X and Y .
- (c) (2%) Show that X and Y are jointly Gaussian (bivariate Gaussian) random variables based on (b).
- (d) (2%) X and Y are derived from the same set of random variables U and V . Could X and Y be independent? If yes, under what condition? If no, why?
- (e) (2%) Describe how X and Y are jointly distributed if $ad = bc$. (A joint PDF may help, but it is not a must for this sub-problem.)

4. (7%) Suppose you participate in a tournament in which you play a series of games until you lose a game. Assume that you win or lose in a game with probability p and $1 - p$ respectively ($0 \leq p \leq 1$), independently of any other games. At the end of each game, you are rewarded depending on its outcome: you earn i dollars (for that game) if it is your i^{th} win ($i \in \mathbb{N}$) and you get 0 if you lose. Let Y be the total amount of money (in dollars) that you have earned in the tournament. Find $E[Y]$ and $\text{Var}[Y]$.

5. (7%) Each time a particle experiences a collision, it is split into two parts with each part a random fraction of the particle. Suppose that we obtain a fraction of a particle after n independent collisions as follows:

$$Y_n = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdots X_n,$$

where X_j , $1 \leq j \leq n$, is uniformly distributed between 0 and 1. Find the PDF of random variable Y_n .

6. (50%) 瓊博的奇幻旅程

2013 夏，Dr. Jones (簡稱瓊博) 受 Prof. Hey (老葉) 之邀，再次到東鯤太學訪問。一年不見，瓊博發覺太學周圍似乎多了數家「米必勤」速食店。好奇之餘，在地圖上標出幾家店的位置，驚見一個魔法五星陣。五星陣的中心，竟是校中神秘的湖心亭。

當夜，瓊博把老葉拉去湖邊，隱約發現亭下湖水中藏有一石，七彩的光芒不時耀現。兩人下水把那石撈了上來。其石形樸，但有一面甚為平滑，上以小篆刻有「天問」二字。老葉驚呼：「莫非這就是傳說中的天問石？！」

瓊博不曾看過布袋戲，不知此石之奇，竟拿出考古小槌敲擊該石，老葉不及阻止。一時間天旋地轉，兩人如墜五里深淵，不省人事。兩人悠然醒轉之際，發現身處華麗的宮宇中的布幔之後。殿中有一老婦，對著大王模樣的人哭哭啼啼：「魯君啊，老身苦啊！！」

魯君：「曾媽，妳在苦啥啊！」

曾媽：「大王啊，有三個傢伙在街頭大喊我家阿參殺了人，阿參不是這種人啊！」

魯君：「唉，人言可畏啊。上次寡人說好要幫他安排的教職，可能就沒辦法...」

曾媽：「大王啊，教職不好找的啊，您上次已經說好的，不能反悔啊！難道要他步上他指導教授的後塵，浪跡天涯找工作嗎？」

魯君：「可是怪獸家長很可怕啊！寡人惹不起啊...」

曾媽一聽，益發哭的不可收拾。

老葉聽了，決心出來圓場，與瓊博掀幔走出。未料，殿中眾人大駭：「金...金毛人？！」，瓊博驚呼：「Holy cow!」說也奇怪，此言一出，眾人竟回復平常，見異國人而不怪。老葉趁此空檔，進前跟魯君建議：「不如我們來做個調查，如果七成以上的家長都覺得曾參是好人，那大王就聘他吧？」

魯君：「請問先生，該如何做？」

老葉：「派軍士到各處人家探詢家長認為曾參是否為好人，是或否？」

魯君：「為免日後家長鬧事，兩位先生敢以項上擔保此調查結果正確？」

老葉：「我對調查結果的正確性有九成以上的信心！」

魯君：「那寡人該如何配合兩位先生？」

老葉：「敢問大王，您的軍士做事是否嚴謹？」

魯君：「慚愧啊，軍士中行事敷衍之人，百中有三。」(謎之聲：調查誤差百分之三以內)

a. (5%) 已知春秋時期通訊技術落後，怪獸家長不易串連生端，各家家長獨立不受其他家長影響。若你為老葉，請問應向魯君請求軍士探詢多少位家長才能達到九成以上的信心？

b. (5%) 若魯君表示，要探詢多戶家長有困難，最多只能探詢千戶家長。經詢問之後，恰恰六成人認為曾參是好人，誤差正負百分之三以內。請問老葉對這樣調查的信心度有多少？

老葉與魯君應對之際，瓊博百般無聊，取出天問石端詳。未料魯君見此奇石，眼露兇光。佔有之心，溢於言表。魯君一手便要搶，瓊博竟反射性的取皮鞭鞭答之。魯君受此大辱，怒命眾兵擊殺瓊博。說時遲那時快，刀劍及身之際，瓊博虎軀一震，拉了老葉閃過刀劍，反手取出小槌敲擊天問石。一陣天旋地轉後，發現身處某大宅中，堂上有一匾，書寫「來燕堂」。

堂中坐有一位風流瀟灑，衣冠磊落之中年人，正細品茗茶。旁邊跪有一軍裝打扮青年將領，長相雄奇英偉。只見那青年將領開口：「啟稟安相，侄兒已於淝水佈置萬全，只待時機一到，奇襲必定功成！惟萬事俱全，侄兒仍有一憂。」

謝安：「玄侄不妨直說！」

謝玄：「我晉軍多世家子弟，近來時興一惡習。部隊每到一處，軍士便忙於自繪個人形象與該地風情。繪畢便相互傳閱，見好友畫便以拇指沾朱砂，捺印於圖上以示讚賞。世家子弟皆以收集讚印為好，致軍務不顧。侄兒甚為苦惱！」

老葉心想：「怪怪，這不是跟現代臉書自拍打卡相彷彿嗎？原來社群行為源於東晉？！」

謝安：「這可不成，玄侄，你怎麼處理呢？」

謝玄：「侄兒已令下，將所有軍士之自繪圖沒入。眾軍士見要割捨自身百讚之圖，莫不涕泗縱橫。特別是收集讚數越多的人，士氣受影響越大。侄兒不知如何是好？」

謝安沉吟踱步，片晌，擊掌笑曰：「有了！玄侄速速吩咐下去，公告諸軍士，自繪圖均會保全，待淝水大勝便發還，並將依各圖讚數行賞。大勝後，每讚發與一兩金。如此必能戰勝！」

謝玄：「安叔此計妙極！如此多讚者士氣必然大振，淝水之戰必勝！安叔，我速速回軍部署！」

c. (10%) 若已知東晉世家子弟有每人皆有自繪嗜好。東晉軍中共有一千世家子弟，每人戰後存活機率為 0.5，每人存活與否為獨立事件。若已知每人收集讚數彼此獨立，且每人收集讚數從 1 讚、2 讚、...、到 200 讚都機會均等 ($1/200$)。請問，謝安戰後犒賞黃金總兩數之 MGF 為何？

d. (5%) 承上，犒賞黃金總兩數之期望值與標準差為何？

聽畢，瓊博、老葉方知淝水之戰晉軍能以寡擊眾，此中竟有此內幕！適時有一莽燕高速飛入堂中，直擊瓊博，瓊博痛叫一聲。謝玄倏然變色：「哪裡來的奸細？咦？金...金毛人？！」瓊博見狀不對，忙與老葉忙逃出大宅，直衝烏衣巷。未料在

朱雀橋頭遭前後追兵夾擊，情急之際，瓊博急忙槌擊天問石，兩人又墮入虛無空間之中。待一切靜止，發現身處鬧市之中。此處男子多虬髯，女子多體寬且衣著暴露。

忽而身旁眾小販驚呼：「金...金毛人？」瓊博：「Holy cow! Not again lah...Orz」眾人竟又恢復常態。瓊、葉二人方知，此秘語可開啟天問石之「入境隨俗模式」，非常好用！此時飢腸轆轆，兩人遂入一酒肆飽餐一頓。

酒肆中除瓊葉外，另有一桌，坐有一白面書生與慈祥老者。只見老者看著手中詩作，頻頻擊桌讚嘆：「妙極！妙極！此乃仙人之作。太白，你乃天上謫仙人啊！」

太白：「賀翁，您太抬舉我了啊！」

賀翁：「太白，你堪稱詩仙，勿要謙虛啊！」

只見兩人相談甚歡，相互進酒。酒過三巡後，瓊葉發現此兩人講話漸漸粗魯起來，原先的文雅之風，全然不見。料想李白跟賀知章二人酒品應是不佳。酒仙之說，怕是後人過譽。沒想到李、賀二人竟開始為了誰的酒量大，爭論不休，講話越來越大聲，最後竟然開始以番文相互 battle：

太白：「Please, you are as useless as the “t” in “pitch”!」

賀翁：「I can't be mean to you, it's “love animals” week!」

太白：「You are like the first slice of the bread in the bread. Everyone touches you, but nobody really like you!」

賀翁：「You are so fake, Barbie is jealous!」

老葉心中讚嘆，不愧是大唐盛世，國際化程度如此之高，更沒想到後世黑人街頭的 trash talk battle 竟是源自大唐！見李賀二人 battle 的面紅耳赤，老葉遂起身做公道伯：「兩位可否聽丙紳一言？如此爭執不是辦法，不如由我做公道，兩位開始比賽。看何者喝的多為勝？」李賀二人稱是，酒仙大戰於焉展開。已知李白喝酒非常神勇，不管之前已經喝了多少，對於之後還能喝多少，似乎完全沒有影響。賀知章喝酒的模式也是一樣。李白平均每次酒聚喝的總量是二升。賀知章因年長，平均每次酒聚飲酒總量是一升。

e. (5%) 若李、賀二人飲酒總量相互獨立，不受對方影響，請問在酒仙大賽中，李白總酒量 X 與賀知章總酒量 Y 的 joint PDF 為何？

f. (5%) 李、賀二人總共喝的酒量，期望值為多少升？標準差又是多少？

g. (5%) 瓊博跟老葉酒足飯飽，決定投注酒仙大賽結果為樂。瓊博押李太白勝出，老葉押賀知章勝出。請問最後是李太白勝出的機率為何？

h. (10%) 瓊葉二人決定投注賠率 $W = \text{「酒仙大賽贏家飲酒量」} / \text{「酒仙大賽輸家飲酒量」}$ 。請問 W 的機率分布為何？

酒仙大賽後，李賀二人均醉倒，店掌櫃前來索酒錢。瓊博、老葉这才發現身上無開元通寶可支付。掌櫃氣急，欲綑綁報官。瓊葉無奈之餘，只得再拿出天問石槌擊烙跑。這次，他們會在哪醒轉呢？又會碰到什麼事呢？

一切留待 2014 再續...

注意事項：

- 所有同學請在答案卷上標註自己所屬的班級
- 不得使用計算機，過於複雜的計算（如開根號等）僅列式即可，無需算出詳細數字，但算式化簡（如積分等）需化簡至最簡形式
- 期末考成績預定公告時間：6/25（二）中午 12:00 前公告於電機系助教公布欄
- 期末考預定看考卷時間：6/25（三）下午 14:30-16:00 於電二 143
- 如有更改，將另行公告於電機系二館助教公布欄與 ptt 電機系功課板，請各位同學密切注意。
- 祝各位學弟妹們期末考順利，暑假愉快！

國立台灣大學電機工程學系
網路與多媒體實驗 兼任工程數學-微分方程/機率與統計 專任助教
趙式隆 敬上