

Vitesse d'invasion pour un modèle de reproduction et dispersion

Augustin Lenormand Basile Bruneau

25 juin 2014

1 Grandes déviations d'une marche aléatoire

Question 1.1

- Soit $\alpha \in [0, 1]$ et λ_1, λ_2 dans \mathbb{R} .

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{(\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2)X}) &= \mathbb{E}((e^{\lambda_1 X})^\alpha (e^{\lambda_2 X})^{1-\alpha}) \\ &\leq (\mathbb{E}(e^{\lambda_1 X}))^\alpha (\mathbb{E}(e^{\lambda_2 X}))^{1-\alpha}\end{aligned}$$

Ici la dernière inégalité est l'inégalité de Hölder. En passant au logarithme il vient donc naturellement :

$$\Lambda((\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2)X) \leq \alpha\Lambda(\lambda_1 X) + (1-\alpha)\Lambda(\lambda_2 X)$$

Donc Λ est convexe.

- De même les fonctions f_λ telles que $f_\lambda(x) = \lambda x - \Lambda(\lambda)$ sont toutes convexes. Donc par définition leurs épigraphes sont convexes.

Or l'épigraphe du supremum pour λ dans \mathbb{R} de ces fonctions est l'intersection des épigraphes de toutes ces fonctions. Comme intersection d'ensemble convexes, il est donc convexe lui aussi. Donc l'épigraphe de Ψ est convexe.

Donc Ψ est convexe.

- $\Lambda(0) = 0$ donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} (\lambda x - \Lambda(\lambda)) \geq 0 \cdot x - \Lambda(0) = 0$$

Donc $\Psi \geq 0$.

Soit λ dans \mathbb{R} .

$$e^{f_\lambda(m)} = \frac{e^{\lambda \mathbb{E}(X)}}{\mathbb{E}(e^{\lambda X})}$$

Or la fonction $x \mapsto e^{\lambda x}$ est convexe, donc d'après l'inégalité de Jensen, $e^{\lambda \mathbb{E}(X)} \leq \mathbb{E}(e^{\lambda X})$. Ainsi $e^{f_{\lambda}(m)} \leq 1$ et $\lambda \mathbb{E}(X) - \Lambda(\lambda) \leq 0$.

Donc $\Psi(\mathbb{E}(X)) \leq 0$. Or $\Psi \geq 0$.

Donc Ψ admet un minimum en m et $\Psi(m) = 0$.

- Soit $x \geq m$ et $\lambda < 0$. Alors on peut écrire :

$$\begin{aligned} \lambda x - \Lambda(\lambda) &\leq \lambda m - \Lambda(\lambda) = 0 \\ \lambda x - \Lambda(\lambda) &\leq 0 \leq \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \{\lambda x - \Lambda(\lambda)\} \end{aligned}$$

Donc prendre le supremum des f_{λ} pour $\lambda \geq 0$ est suffisant pour définir Ψ

Question 1.2

$$\mathbb{P}(S_n \geq nx) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{S_n - nx \geq 0})$$

Comme $S_n - nx \geq 0$ alors pour tout λ positif, $e^{\lambda(S_n - nx)} \geq 1$ et

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_{S_n - nx \geq 0}) \leq \mathbb{E}(e^{\lambda(S_n - nx)} \mathbf{1}_{S_n - nx \geq 0}) \leq \mathbb{E}(e^{\lambda(S_n - x)})$$

On a donc :

$$\mathbb{P}(S_n \geq nx) \leq e^{-\lambda nx} \mathbb{E}(e^{\lambda S_n})$$

Comme les variables $(X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ sont des v.a indépendantes de même loi on peut écrire que $\mathbb{E}(e^{\lambda S_n}) = (\mathbb{E}(e^{\lambda X}))^n = e^{n\Lambda(\lambda)}$.

Par le calcul on obtient alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n \geq nx) &\leq e^{-\lambda nx} e^{n\Lambda(\lambda)} \\ \log \mathbb{P}(S_n \geq nx) &\leq -\lambda nx + n\Lambda(\lambda) \\ -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n \geq nx) &\geq \lambda x - \Lambda(\lambda) \end{aligned} \tag{2.1}$$

2.1 est vrai pour tout λ positif et pour tout n . Donc le passage au supremum pour λ positif et à la limite inférieure pour n est possible et ne modifie pas l'inégalité.

On obtient bien alors :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n \geq nx) \geq \sup_{\lambda \geq 0} \{\lambda x - \Lambda(\lambda)\} \tag{2.2}$$

Question 1.3

- Montrons tout d'abord l'égalité proposée par l'énoncée. Soit Φ une fonction mesurable bornée. Alors, en prenant Π la loi de probabilité du vecteur (X_1, \dots, X_n) ,

$$\mathbb{E}(\Phi(X_1, \dots, X_n)) = \int_R \cdots \int_R \Phi(x_1, \dots, x_n) \Pi(dx_1, \dots, dx_n) \quad (3.1)$$

Or les v.a. $(X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ sont i.i.d. donc si on note \mathbb{P}_X leur loi de probabilité, on peut écrire $\Pi(dx_1, \dots, dx_n) = \prod_{i=0}^n \mathbb{P}_X(dx_i) = \prod_{i=0}^n \mathbb{P}(X \in dx_i)$.

On peut alors réécrire 3.1 et utiliser la relation fournie par l'énoncé ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\Phi(X_1, \dots, X_n)) &= \int_R \cdots \int_R \Phi(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=0}^n \mathbb{P}(X \in dx_i) \\ &= \int_R \cdots \int_R \Phi(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=0}^n \left(\frac{\mathbb{E}(e^{\tau X})}{e^{\tau x_i}} \mathbb{P}(\tilde{X} \in dx_i) \right) \\ &= \mathbb{E}(e^{\tau X})^n \int_R \cdots \int_R \Phi(x_1, \dots, x_n) e^{-\tau \tilde{S}_n} \prod_{i=0}^n \mathbb{P}(\tilde{X} \in dx_i) \\ &= \mathbb{E}(e^{\tau X})^n \int_R \cdots \int_R \Phi(x_1, \dots, x_n) e^{-\tau \tilde{S}_n} \tilde{\Pi}(dx_1, \dots, dx_n) \end{aligned}$$

Ici, $\tilde{S}_n = \sum_{i=0}^n \tilde{X}_i$ et $\tilde{\Pi}$ est la loi de probabilité du vecteur $(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n)$ car les $(\tilde{X}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ sont aussi i.i.d. et donc $\prod_{i=0}^n \mathbb{P}(\tilde{X} \in dx_i) = \tilde{\Pi}(dx_1, \dots, dx_n)$ de la même manière que pour les X_i .

On reconnaît alors donc bien l'expression souhaitée :

$$\boxed{\mathbb{E}(\Phi(X_1, \dots, X_n)) = \mathbb{E}(e^{\tau X})^n \mathbb{E}(\Phi(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n) e^{-\tau \tilde{S}_n})} \quad (3.2)$$

- On calcule l'espérance de \tilde{X} ce qui sera utile plus bas.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\tilde{X}) &= \int_{\mathbb{R}} u \mathbb{P}(\tilde{X} \in du) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{u e^{\tau u}}{\mathbb{E}(e^{\tau X})} \mathbb{P}(X \in du) \\ &= \frac{\mathbb{E}(X e^{\tau X})}{\mathbb{E}(e^{\tau X})} \\ \boxed{\mathbb{E}(\tilde{X}) = x} & \end{aligned} \quad (3.3)$$

- Grâce à 3.2 et 3.3 on peut alors écrire :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(nx \leq S_n \leq ny) &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_{S_n \in [nx, ny]}) \\ &= \mathbb{E}(e^{\tau X})^n \mathbb{E}(e^{-\tau \tilde{S}_n} \mathbf{1}_{\tilde{S}_n \in [nx, ny]}) \\ &\geq \mathbb{E}(e^{\tau X})^n e^{-\tau ny} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\tilde{S}_n \in [nx, ny]})\end{aligned}$$

On pose $\text{Var}(\tilde{X}) = \tilde{\sigma}$. On peut alors écrire que :

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\tilde{S}_n \in [nx, ny]}) = \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\theta_n \in \left[0, \frac{\sqrt{n}}{\tilde{\sigma}}(y-x)\right]}\right), \theta_n = \frac{\sqrt{n}}{\tilde{\sigma}} \left(\frac{\tilde{S}_n}{n} - x\right)$$

Or $\mathbb{E}(\tilde{X}) = x$, donc pour n grand $\theta_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $\frac{\sqrt{n}}{\tilde{\sigma}}(y-x) \rightarrow \infty$. En limite, on peut donc écrire :

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\tilde{S}_n \in [nx, ny]}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1/2.$$

Donc pour n suffisamment grand il existe $1/2 > \varepsilon > 0$ tel que :

$$\begin{aligned}\log \mathbb{P}(nx \leq S_n \leq ny) &\geq n(\Lambda(\tau) - \tau y) + \log(1/2 - \varepsilon) \\ -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(nx \leq S_n \leq ny) &\leq \tau y - \Lambda(\tau) - \underbrace{\frac{\log(1/2 - \varepsilon)}{n}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}\end{aligned}$$

Un passage à la limite suffit alors à montrer que :

$$\boxed{\limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(nx \leq S_n \leq ny) \leq \tau y - \Lambda(\tau)} \quad (3.4)$$

Question 1.4

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(S_n \geq nx) \geq \mathbb{P}(nx \leq S_n \leq ny) \\
& \log \mathbb{P}(S_n \geq nx) \geq \log \mathbb{P}(nx \leq S_n \leq ny) \\
& -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n \geq nx) \leq -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(nx \leq S_n \leq ny) \\
& \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n \geq nx) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(nx \leq S_n \leq ny) \tag{4.1}
\end{aligned}$$

En combinant les inégalités 2.2, 3.4 et 4.1 on obtient que pour tout $m \leq x < y$:

$$\Psi(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n \geq nx) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n \geq nx) \leq \tau y - \Lambda(\tau)$$

On peut alors faire tendre y vers x et utiliser la majoration $\tau x - \Lambda(\tau) \leq \Psi(x)$ pour obtenir :

$$\Psi(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n \geq nx) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n \geq nx) \leq \Psi(x)$$

Ce qui démontre bien l'identité voulue :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n \geq nx) = \Psi(x)} \tag{4.2}$$

Question 1.5

2 Densité locale pour le modèle d'invasion

Question 2.1

Démontrons que $\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(N)^n$

- La génération 0 ne comporte qu'un individu, donc à la génération 1, $Z_1 \sim N$.
Donc $\mathbb{E}(Z_1) = \mathbb{E}(N)^1$
- Soit $n \geq 0$. On suppose que $\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(N)^n$.
Or $Z_{n+1} \sim N \cdot Z_n$. Donc $\mathbb{E}(Z_{n+1}) = \mathbb{E}(N \cdot Z_n)$.
Comme les variables Z_n et N sont indépendantes, on peut écrire que :
 $\mathbb{E}(Z_{n+1}) = \mathbb{E}(N) \mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(N)^{n+1}$.
- Par récurrence, pour tout $n \geq 0$, $\boxed{\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(N)^n}$.

Considérons un individu à la génération n . Sa position est distribuée comme la variable $X_0 + X_0 + \dots + X_n = S_n$. Ainsi la probabilité que cette individu se trouve dans un intervalle I est donc $\mathbb{P}(S_n \in I)$.

La loi de probabilité du nombre d'individus présents dans l'intervalle I à la génération n est donc égale à $\#\{i : X_n^i \in I\} \sim Z_n \mathbb{P}(S_n \in I)$.

Donc $u_n(I) = \mathbb{E}(\#\{i : X_n^i \in I\}) = \mathbb{E}(Z_n \mathbb{P}(S_n \in I))$. Or $\mathbb{P}(S_n \in I) \in \mathbb{R}$ et $\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(N)^n$.

On a donc bien :

$$\boxed{u_n(I) = \mathbb{E}(N)^n \mathbb{P}(S_n \in I)} \quad (1.3)$$

Question 2.2

- Soit $\varepsilon > 0$. D'après 1.3 on peut écrire :

$$\frac{u_n([(\mathbb{E}(X) - \varepsilon)n, (\mathbb{E}(X) + \varepsilon)n])}{\mathbb{E}(N)^n} = \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(X)\right| \leq \varepsilon\right)$$

Or la loi des grands nombres nous affirme que, pour un ε positif donné, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(X)\right| \leq \varepsilon$.

Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(X)\right| \leq \varepsilon\right) = 1$$

et $\boxed{\frac{u_n([(\mathbb{E}(X) - \varepsilon)n, (\mathbb{E}(X) + \varepsilon)n])}{\mathbb{E}(N)^n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1} \quad (2.1)$

•