Vitesse d'invasion pour un modèle de reproduction et dispersion

Augustin Lenormand Basile Bruneau

26 juin 2014

1 Grandes déviations d'une marche aléatoire

Question 1.1

- Soit $\alpha \in [0,1]$ et λ_1, λ_2 dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{(\alpha\lambda_1+(1-\alpha)\lambda_2)X}) = & \ \mathbb{E}((e^{\lambda_1 X})^{\alpha}(e^{\lambda_2 X})^{1-\alpha}) \\ & \leqslant (\mathbb{E}(e^{\lambda_1 X}))^{\alpha}(\mathbb{E}(e^{\lambda_2 X}))^{1-\alpha}\end{aligned}$$

  Ici la dernière inégalité est l'inégalité de Hölder. En passant au logarithme il vient donc naturellement :

$$\Lambda((\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2)X) \leqslant \alpha\Lambda(\lambda_1 X) + (1-\alpha)\Lambda(\lambda_2 X)$$

  $\boxed{\text{Donc } \Lambda \text{ est convexe.}}$
- De même les fonctions f_λ telles que $f_\lambda(x) = \lambda x - \Lambda(\lambda)$ sont toutes convexes. Donc par définition leurs épigraphes sont convexes.
  Or l'épigraphe du supremum pour λ dans $\mathbb{R}$ de ces fonctions est l'intersection des épigraphes de toutes ces fonctions. Comme intersection d'ensemble convexes , il est donc convexe lui aussi. Donc l'épigraphe de Ψ est convexe.
  $\boxed{\text{Donc } \Psi \text{ est convexe.}}$
- $\Lambda(0) = 0$ donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sup_{\lambda\in\mathbb{R}}(\lambda x - \Lambda(\lambda)) \geqslant 0 \cdot x - \Lambda(0) = 0$$

  <u>Donc $\Psi \geqslant 0$.</u>
  Soit λ dans $\mathbb{R}$.

$$e^{f_\lambda(m))} = \frac{e^{\lambda\mathbb{E}(X)}}{\mathbb{E}(e^{\lambda X})}$$

Or la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ est convexe, donc d'après l'inégalité de Jensen, $\mathrm{e}^{\lambda \mathbb{E}(X)} \leqslant \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda X})$. Ainsi $\mathrm{e}^{f_\lambda(m)} \leqslant 1$ et $\lambda \mathbb{E}(X) - \Lambda(\lambda) \leqslant 0$.
Donc $\Psi(\mathbb{E}(X)) \leqslant 0$. Or $\Psi \geqslant 0$.
$\boxed{\text{Donc } \Psi \text{ admet un minimum en } m \text{ et } \Psi(m) = 0.}$

- Soit $x \geqslant m$ et $\lambda < 0$. Alors on peut écrire :

$$\begin{aligned} \lambda x - \Lambda(\lambda) &\leqslant \lambda m - \Lambda(\lambda) = 0 \\ \lambda x - \Lambda(\lambda) &\leqslant 0 \leqslant \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \{\lambda x - \Lambda(\lambda)\} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc prendre le supremum des } f_\lambda \text{ pour } \lambda \geqslant 0 \text{ est suffisant pour définir } \Psi}$

Question 1.2

$$\mathbb{P}(S_n \geqslant nx) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{S_n - nx \geqslant 0})$$

Comme $S_n - nx \geqslant 0$ alors pour tout λ positif, $\mathrm{e}^{\lambda(S_n - nx)} \geqslant 1$ et

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{S_n - nx \geqslant 0}) \leqslant \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda(S_n - nx)} \mathbb{1}_{S_n - nx \geqslant 0}) \leqslant \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda(S_n - x)})$$

On a donc :

$$\mathbb{P}(S_n \geqslant nx) \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda nx} \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda S_n})$$

Comme les variables $(X_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont des v.a indépendantes de même loi on peut écrire que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda S_n}) = (\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda X}))^n = \mathrm{e}^{n\Lambda(\lambda)}$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n \geqslant nx) &\leqslant \mathrm{e}^{-\lambda nx} \mathrm{e}^{n\Lambda(\lambda)} \\ \log \mathbb{P}(S_n \geqslant nx) &\leqslant -\lambda nx + n\Lambda(\lambda) \\ -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n \geqslant nx) &\geqslant \lambda x - \Lambda(\lambda) \qquad (1) \end{aligned}$$

1 est vrai pour tout λ positif et pour tout n. Donc le passage au supremum pour λ positif et à la limite inférieure pour n est possible et ne modifie pas l'inégalité.

On obtient bien alors :

$$\boxed{\liminf_{n \to \infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n \geqslant nx) \geqslant \sup_{\lambda \geqslant 0} \{\lambda x - \Lambda(\lambda)\}} \qquad (2)$$

Question 1.3

- Montrons tout d'abord l'égalité proposée par l'énoncée. Soit Φ une fonction mesurable bornée. Alors, en prenant $\mathit{\Pi}$ la loi de probabilité du vecteur $(X_1, \cdots, X_n)$,

$$\mathbb{E}(\Phi(X_1, \cdots, X_n)) = \int_R \cdots \int_R \Phi(x_1, \cdots, x_n) \mathit{\Pi}(\mathrm{d}x_1, \cdots, \mathrm{d}x_n) \tag{3}$$

  Or les v.a. $(X_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont i.i.d. donc si on note $\mathbb{P}_X$ leur loi de probabilité, on peut écrire $\mathit{\Pi}(\mathrm{d}x_1, \cdots, \mathrm{d}x_n) = \prod_{i=0}^{n} \mathbb{P}_X(\mathrm{d}x_i) = \prod_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X \in \mathrm{d}x_i)$.
  On peut alors réécrire 3 et utiliser la relation fournie par l'énoncé ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\Phi(X_1, \cdots, X_n)) &= \int_R \cdots \int_R \Phi(x_1, \cdots, x_n) \prod_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X \in \mathrm{d}x_i) \\
&= \int_R \cdots \int_R \Phi(x_1, \cdots, x_n) \prod_{i=0}^{n} \left(\frac{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\tau X})}{\mathrm{e}^{\tau x_i}} \mathbb{P}(\tilde{X} \in \mathrm{d}x_i) \right) \\
&= \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\tau X})^n \int_R \cdots \int_R \Phi(x_1, \cdots, x_n) \mathrm{e}^{-\tau \tilde{S_n}} \prod_{i=0}^{n} \mathbb{P}(\tilde{X} \in \mathrm{d}x_i) \\
&= \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\tau X})^n \int_R \cdots \int_R \Phi(x_1, \cdots, x_n) \mathrm{e}^{-\tau \tilde{S_n}} \tilde{\mathit{\Pi}}(\mathrm{d}x_1, \cdots, \mathrm{d}x_n)
\end{aligned}$$

  Ici, $\tilde{S_n} = \sum_{i=0}^{n} \tilde{X_i}$ et $\tilde{\mathit{\Pi}}$ est la loi de probabilité du vecteur $(\tilde{X}_1, \cdots, \tilde{X}_n)$ car les $(\tilde{X}_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont aussi i.i.d. et donc $\prod_{i=0}^{n} \mathbb{P}(\tilde{X} \in \mathrm{d}x_i) = \tilde{\mathit{\Pi}}(\mathrm{d}x_1, \cdots, \mathrm{d}x_n)$ de la même manière que pour les X_i.
  On reconnaît alors donc bien l'expression souhaitée :

$$\boxed{\mathbb{E}(\Phi(X_1, \cdots, X_n)) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\tau X})^n \mathbb{E}\left(\Phi(\tilde{X}_1, \cdots, \tilde{X}_n) \mathrm{e}^{-\tau \tilde{S_n}}\right)} \tag{4}$$

- On calcule l'espérance de $\tilde{X}$ ce qui sera utile plus bas.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\tilde{X}) &= \int_{\mathbb{R}} u \, \mathbb{P}(\tilde{X} \in \mathrm{d}u) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{u \mathrm{e}^{\tau u}}{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\tau X})} \mathbb{P}(X \in \mathrm{d}u) \\
&= \frac{\mathbb{E}(X \mathrm{e}^{\tau X})}{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\tau X})}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(\tilde{X}) = x} \tag{5}$$

- Grâce à 4 et 5 on peut alors écrire :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(nx \leqslant S_n \leqslant ny) &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{S_n \in [nx,ny]}) \\ &= \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\tau X})^n \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\tau \tilde{S_n}} \mathbb{1}_{\tilde{S_n} \in [nx,ny]}\right) \\ &\geqslant \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\tau X})^n \mathrm{e}^{-\tau n y} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\tilde{S_n} \in [nx,ny]})\end{aligned}$$

On pose $\mathrm{Var}(\tilde{X}) = \tilde{\sigma}$. On peut alors écrire que :

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\tilde{S_n} \in [nx,ny]}\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\theta_n \in \left[0, \frac{\sqrt{n}}{\tilde{\sigma}}(y-x)\right]}\right), \theta_n = \frac{\sqrt{n}}{\tilde{\sigma}}\left(\frac{\tilde{S_n}}{n} - x\right)$$

Or $\mathbb{E}(\tilde{X}) = x$, donc pour n grand $\theta_n \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $\frac{\sqrt{n}}{\tilde{\sigma}}(y-x) \to \infty$. En limite, on peut donc écrire :

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\tilde{S_n} \in [nx,ny]}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}} \mathrm{d}x = 1/2.$$

Donc pour n suffisamment grand il existe $1/2 > \varepsilon > 0$ tel que :

$$\begin{aligned}\log \mathbb{P}(nx \leqslant S_n \leqslant ny) \quad &\geqslant n(\Lambda(\tau) - \tau y) + \log(1/2 - \varepsilon) \\ -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(nx \leqslant S_n \leqslant ny) &\leqslant \tau y - \Lambda(\tau) - \underbrace{\frac{\log(1/2-\varepsilon)}{n}}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0}\end{aligned}$$

Un passage à la limite suffit alors à montrer que :

$$\boxed{\limsup_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(nx \leqslant S_n \leqslant ny) \leqslant \tau y - \Lambda(\tau)} \tag{6}$$

Question 1.4

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n \geqslant nx) &\geqslant \mathbb{P}(nx \leqslant S_n \leqslant ny) \\ \log \mathbb{P}(S_n \geqslant nx) &\geqslant \log \mathbb{P}(nx \leqslant S_n \leqslant ny) \\ -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n \geqslant nx) &\leqslant -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(nx \leqslant S_n \leqslant ny) \\ \limsup_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n \geqslant nx) &\leqslant \limsup_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(nx \leqslant S_n \leqslant ny)\end{aligned} \tag{7}$$

En combinant les inégalités 2, 6 et 7 on obtient que pour tout $m \leqslant x < y$:

$$\Psi(x) \leqslant \liminf_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\mathbb{P}(S_n \geqslant nx) \leqslant \limsup_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\mathbb{P}(S_n \geqslant nx) \leqslant \tau y - \Lambda(\tau)$$

On peut alors faire tendre y vers x et utiliser la majoration $\tau x - \Lambda(\tau) \leqslant \Psi(x)$ pour obtenir :

$$\Psi(x) \leqslant \liminf_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\mathbb{P}(S_n \geqslant nx) \leqslant \limsup_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\mathbb{P}(S_n \geqslant nx) \leqslant \Psi(x)$$

Ce qui démontre bien l'identité voulue :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\mathbb{P}(S_n \geqslant nx) = \Psi(x)} \tag{8}$$

Question 1.5

2 Densité locale pour le modèle d'invasion

Question 2.1

Démontrons que $\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(N)^n$

- La génération 0 ne comporte qu'un individu, donc à la génération 1, $Z_1 \sim N$. Donc $\mathbb{E}(Z_1) = \mathbb{E}(N)^1$
- Soit $n \geqslant 0$. On suppose que $\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(N)^n$.
  Or $Z_{n+1} \sim N \cdot Z_n$. Donc $\mathbb{E}(Z_{n+1}) = \mathbb{E}(N \cdot Z_n)$.
  Comme les variables Z_n et N sont indépendantes, on peut écrire que :
  $\mathbb{E}(Z_{n+1}) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(N)^{n+1}$.
- Par récurrence, pour tout $n \geqslant 0$, $\boxed{\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(N)^n}$.

Considérons un individu à la génération n. Sa position est distribuée comme la variable $X_0 + X_0 + \cdots + X_n = S_n$. Ainsi la probabilité que cette individu se trouve dans un intervalle I est donc $\mathbb{P}(S_n \in I)$.

La loi de probabilité du nombre d'individus présents dans l'intervalle I à la génération n est donc égale à $\#\{i : X_n^i \in I\} \sim Z_n\mathbb{P}(S_n \in I)$.

Donc $u_n(I) = \mathbb{E}(\#\{i : X_n^i \in I\}) = \mathbb{E}(Z_n\mathbb{P}(S_n \in I))$. Or $\mathbb{P}(S_n \in I) \in \mathbb{R}$ et $\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(N)^n$.

On a donc bien :

$$\boxed{u_n(I) = \mathbb{E}(N)^n\,\mathbb{P}(S_n \in I)} \tag{9}$$

Question 2.2

Soit $\varepsilon > 0$.

- D'après 9 on peut écrire :

$$\frac{u_n([(\mathbb{E}(X)-\varepsilon)n, (\mathbb{E}(X)+\varepsilon)n])}{\mathbb{E}(N)^n} = \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(X)\right| \leqslant \varepsilon\right)$$

  Or la loi des grands nombres nous affirme que, pour un ε positif donné, il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(X)\right| \leqslant \varepsilon$.
  Ainsi :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(X)\right| \leqslant \varepsilon\right) = 1$$

$$\text{et } \boxed{\frac{u_n([(\mathbb{E}(X)-\varepsilon)n, (\mathbb{E}(X)+\varepsilon)n])}{\mathbb{E}(N)^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1} \tag{10}$$

- On pose $I_\varepsilon(n) = [(\mathbb{E}(X)-\varepsilon)n, (\mathbb{E}(X)+\varepsilon)n]$

$$1 = \mathbb{E}\left(\frac{\#\{i : X_n^i \in I_\varepsilon(n)\} + \#\{i : X_n^i \notin I_\varepsilon(n)\}}{\mathbb{E}(N)^n}\right)$$
$$= \mathbb{E}\left(\frac{\#\{i : X_n^i \in I_\varepsilon(n)\}}{\mathbb{E}(N)^n}\right) + \mathbb{E}\left(\frac{\#\{i : X_n^i \notin I_\varepsilon(n)\}}{\mathbb{E}(N)^n}\right)$$

  Donc, d'après 10 on peut écrire :

$$\mathbb{E}\left(\frac{\#\{i : X_n^i \notin I_\varepsilon(n)\}}{\mathbb{E}(N)^n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\text{Or } \mathbb{E}\left(\frac{\#\{i : X_n^i \geqslant (\mathbb{E}(X)-\varepsilon)n\}}{\mathbb{E}(N)^n}\right) \leqslant \mathbb{E}\left(\frac{\#\{i : X_n^i \notin I_\varepsilon(n)\}}{\mathbb{E}(N)^n}\right)$$

$$\text{Donc} \qquad \mathbb{E}\left(\frac{\#\{i : X_n^i \geqslant (\mathbb{E}(X)-\varepsilon)n\}}{\mathbb{E}(N)^n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

  On a donc bien montré que en moyenne, et donc en probabilité,

$$\boxed{\frac{\#\{i : X_n^i \geqslant (\mathbb{E}(X)-\varepsilon)n\}}{\mathbb{E}(N)^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0} \tag{11}$$

Question 2.3

Question 2.4