

Vitesse d'invasion pour un modèle de reproduction et dispersion

Augustin Lenormand Basile Bruneau

24 juin 2014

1 Grandes déviations d'une marche aléatoire

1

- Soit $\alpha < 1$ et λ_1, λ_2 dans \mathbb{R} .

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{(\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2)X}) &= \mathbb{E}((e^{\lambda_1 X})^\alpha (e^{\lambda_2 X})^{1-\alpha}) \\ &\leq (\mathbb{E}(e^{\lambda_1 X}))^\alpha (\mathbb{E}(e^{\lambda_2 X}))^{1-\alpha}\end{aligned}$$

Ici la dernière inégalité vient de l'inégalité de Hölder. En passant au logarithme il vient donc naturellement :

$$\Lambda((\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2)X) \leq \alpha\Lambda(\lambda_1 X) + (1-\alpha)\Lambda(\lambda_2 X)$$

Donc Λ est convexe.

- De même les fonctions f_λ telles que $f_\lambda(x) = \lambda x - \Lambda(\lambda)$ sont toutes convexes. Donc par définition leurs épigraphes sont convexes.

Or l'épigraphe du supremum pour λ dans \mathbb{R} de ces fonctions est l'intersection des épigraphes de toutes ces fonctions. Comme intersection d'ensemble convexe, il est donc convexe lui aussi. Donc l'épigraphe de Ψ est convexe.

Donc Ψ est convexe.

- $\Lambda(0) = 0$ donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} (\lambda x - \Lambda(\lambda)) \geq 0x - \Lambda(0) = 0$$

Donc $\Psi \geq 0$.

Soit λ dans \mathbb{R} .

$$e^{f_\lambda(m)} = \frac{e^{\lambda \mathbb{E}(X)}}{\mathbb{E}(e^{\lambda X})}$$

Or la fonction $x \mapsto e^{\lambda x}$ est convexe, donc d'après l'inégalité de Jensen, $e^{\lambda \mathbb{E}(X)} \leq \mathbb{E}(e^{\lambda X})$. Ainsi $e^{f_{\lambda}(m)} \leq 1$ et $\lambda \mathbb{E}(X) - \Lambda(\lambda) \leq 0$.

Donc $\Psi(\mathbb{E}(X)) \leq 0$. Or $\Psi \geq 0$.

Donc Ψ admet un minimum en m et $\Psi(m) = 0$.

- Soit $x \geq m$ et $\lambda < 0$. Alors on peut écrire :

$$\begin{aligned}\lambda x - \Lambda(\lambda) &\leq \lambda m - \Lambda(\lambda) = 0 \\ \lambda x - \Lambda(\lambda) &\leq 0 \leq \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} (\lambda x - \Lambda(\lambda))\end{aligned}$$

Donc prendre le supremum des f_{λ} pour $\lambda \geq 0$ est suffisant pour définir Ψ