Vitesse d'invasion pour un modèle de reproduction et dispersion

Augustin Lenormand Basile Bruneau

24 juin 2014

1 Grandes déviations d'une marche aléatoire

1

- Soit $\alpha \in [0,1]$ et λ_1, λ_2 dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathrm{e}^{(\alpha\lambda_1+(1-\alpha)\lambda_2)X}) = & \quad \mathbb{E}((\mathrm{e}^{\lambda_1 X})^{\alpha}(\mathrm{e}^{\lambda_2 X})^{1-\alpha} \\ & \leqslant (\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda_1 X}))^{\alpha}(\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda_2 X}))^{1-\alpha}\end{aligned}$$

  Ici la dernière inégalité est l'inégalité de Hölder. En passant au logarithme il vient donc naturellement :

$$\Lambda((\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2)X) \leqslant \alpha\Lambda(\lambda_1 X) + (1-\alpha)\Lambda(\lambda_2 X)$$

  $\boxed{\text{Donc } \Lambda \text{ est convexe.}}$
- De même les fonctions f_λ telles que $f_\lambda(x) = \lambda x - \Lambda(\lambda)$ sont toutes convexes. Donc par définition leurs épigraphes sont convexes.
  Or l'épigraphe du supremum pour λ dans $\mathbb{R}$ de ces fonctions est l'intersection des épigraphes de toutes ces fonctions. Comme intersection d'ensemble convexes , il est donc convexe lui aussi. Donc l'épigraphe de Ψ est convexe.
  $\boxed{\text{Donc } \Psi \text{ est convexe.}}$
- $\Lambda(0) = 0$ donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sup_{\lambda\in\mathbb{R}}(\lambda x - \Lambda(\lambda)) \geqslant 0 \cdot x - \Lambda(0) = 0$$

  Donc $\Psi \geqslant 0$.
  Soit λ dans $\mathbb{R}$.

$$\mathrm{e}^{f_\lambda(m))} = \frac{\mathrm{e}^{\lambda\mathbb{E}(X)}}{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda X})}$$

Or la fonction $x \mapsto e^{\lambda x}$ est convexe, donc d'après l'inégalité de Jensen, $e^{\lambda \mathbb{E}(X)} \leqslant \mathbb{E}(e^{\lambda X})$. Ainsi $e^{f_\lambda(m))} \leqslant 1$ et $\lambda \mathbb{E}(X) - \Lambda(\lambda) \leqslant 0$.
Donc $\Psi(\mathbb{E}(X)) \leqslant 0$. Or $\Psi \geqslant 0$.
$\boxed{\text{Donc } \Psi \text{ admet un minimum en } m \text{ et } \Psi(m) = 0.}$

- Soit $x \geqslant m$ et $\lambda < 0$. Alors on peut écrire :

$$\lambda x - \Lambda(\lambda) \leqslant \lambda m - \Lambda(\lambda) = 0$$
$$\lambda x - \Lambda(\lambda) \leqslant 0 \leqslant \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \{\lambda x - \Lambda(\lambda)\}$$

$\boxed{\text{Donc prendre le supremum des } f_\lambda \text{ pour } \lambda \geqslant 0 \text{ est suffisant pour définir } \Psi}$

2

$$\mathbb{P}(S_n \geqslant nx) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{S_n - nx \geqslant 0})$$

Comme $S_n - nx \geqslant 0$ alors pour tout λ positif, $e^{\lambda(S_n - nx)} \geqslant 1$ et

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{S_n - nx \geqslant 0}) \leqslant \mathbb{E}(e^{\lambda(S_n - nx)} \mathbb{1}_{S_n - nx \geqslant 0}) \leqslant \mathbb{E}(e^{\lambda(S_n - x)})$$

On a donc :

$$\mathbb{P}(S_n \geqslant nx) \leqslant e^{-\lambda nx} \mathbb{E}(e^{\lambda S_n})$$

Comme les variables $(X_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont des v.a indépendantes de même loi on peut écrire que $\mathbb{E}(e^{\lambda S_n}) = (\mathbb{E}(e^{\lambda X}))^n = e^{n\Lambda(\lambda)}$.

Par le calcul on obtient alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n \geqslant nx) &\leqslant e^{-\lambda nx} e^{n\Lambda(\lambda)} \\ \log \mathbb{P}(S_n \geqslant nx) &\leqslant -\lambda nx + n\Lambda(\lambda) \\ -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n \geqslant nx) &\geqslant \lambda x - \Lambda(\lambda) \end{aligned} \tag{1}$$

1 est vrai pour tout λ positif et pour tout n. Donc le passage au supremum pour λ positif et à la limite inférieure pour n est possible et ne modifie pas l'inégalité.

On obtient bien alors :

$$\boxed{\liminf_{n \to \infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n \geqslant nx) \geqslant \sup_{\lambda \geqslant 0} \{\lambda x - \Lambda(\lambda)\}} \tag{2}$$