Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

МНОГОМЕРНЫЙ АНАЛИЗ, ИНТЕГРАЛЫ И РЯДЫ

II СЕМЕСТР

Лектор: *Редкозубов Вадим Витальевич*

Автор: *Головко Денис*, *Фёдор Стуров*
Проект на Github

весна 2023

Содержание

0.1 Преобразование Абеля

Определение 0.1. Пусть $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ — (комлексные) последовательности, $m \in \mathbb{N}$, и пусть $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда $a_k = A_k - A_{k-1}$ $(A_0 = 0)$, и, значит,

$$\sum_{k=m}^n a_k b_k = \sum_{k=m}^n (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=m}^n A_k b_k - \sum_{k=m-1}^{n-1} A_k b_{k+1}.$$

Справедливо *преобразование Абеля*:

$$\sum_{k=m}^n a_k b_k = A_n b_n - A_{m-1} b_m - \sum_{k=m}^{n-1} A_k (b_{k+1} - b_k).$$

Лемма 0.1 (Абель)**.** *Пусть $\{a_n\}$ — (комплексная) последовательность, $\{b_n\}$ — монотонная последовательность, и пусть $\forall k$ $|A_k| \leqslant M$. Тогда:*

$$\left|\sum_{k=m}^n a_k b_k\right| \leqslant 2M(|b_m| + |b_n|).$$

Доказательство. По монотонности $\{b_n\}$ знаки $b_{k+1} - b_k$ сохраняются, поэтому: [1]

$$\left|\sum_{k=m}^n a_k b_k\right| \leqslant M \left(|b_n| + |b_m| + \left|\sum_{k=m}^{n-1}(b_{k+1} - b_k)\right|\right) = M\left(|b_n| + |b_m| + |b_n - b_m|\right).$$

□

Замечание. Пусть $\{b_n\}$ нестрого убывает и неотрицательна, $\widetilde{M} \leqslant A_k \leqslant M$, тогда при $m = 1$ неравенство можно усилить:

$$\widetilde{M} b_1 \leqslant \sum_{k=1}^n a_k b_k \leqslant M b_1.$$

Лемма 0.2 (Абель)**.** *Пусть $f \in \mathcal{R}[a,b]$, g монотонна на $[a,b]$, и пусть $\forall x \in [a,b]$ $\left|\int_a^x f(t)dt\right| \leqslant M$. Тогда:*

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leqslant 2M(|g(a)| + |g(b)|).$$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Положим $I = \int_a^b f(x)dx$. Тогда $\exists \delta > 0$ $\forall (T,\xi)$ $(|T| < \delta \to |\sigma_T(f,\xi) - I| < \frac{\varepsilon}{2})$.

Выберем одно такое разбиение $T = \{x_i\}_{i=0}^n$.

Пусть $T_k = \{x_i\}_{i=0}^k$ — соответствующее разбиение $[x_0, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$. Числа $\sigma_{T_k}(f, \xi_k)$ и $\int_{x_0}^{x_k} f(x)dx$ лежат[2] на отрезке $[s_{T_k}(f), S_{T_k}(f)]$, и верно $S_{T_k}(f) - s_{T_k}(f) \leqslant S_T(f) - s_T(f)$.

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < \sigma_T(f,\xi) < I + \frac{\varepsilon}{2},$$

[1] Сумма телескопируется.
[2] По критерию Дарбу.

$$I - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant s_T(f) \leqslant S_T(f) \leqslant I + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left|\sigma_{T_k}(f, \xi_k) - \int_{x_0}^{x_k} f(x)dx\right| \leqslant \varepsilon.$$

Положим $A_k = \sum_{i=1}^{k} f(c_i)\Delta x_i$. Тогда $A_k = \sigma_{T_k}(f, \xi_k)$ и, значит, из последнего неравенства $|A_k| \leqslant M + \varepsilon$. Применим лемму 0.1 для $a_k = f(c_k)\Delta x_k, b_k = g(c_k)$, получим

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(c_k)g(c_k)\Delta x_k\right| \leqslant 2(M+\varepsilon)(|g(c_1)| + |g(c_n)|).$$

Неравенство верно для любого набора отмеченных точек, в том числе и $c_1 = a$, $c_n = b$. □

Замечание. Предельным переходом по мелкости разбиения в случае $c_1 = a, c_n = b$ получим оценку:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leqslant 2(M+\varepsilon)\left(|g(a)| + |g(b)|\right).$$

Перейдём к $\varepsilon \to 0$:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leqslant 2M\left(|g(a)| + |g(b)|\right).$$

Задача (формула Бонне)**.** *Пусть* $f \in R[a,b]$, g *нестрого убывает и неотрицательна на* $[a,b]$. *Доказать, что* $\exists c \in [a,b]$, *такое, что выполняется*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^c f(x)dx.$$

Выбором a из формулы Бонне можно получить *вторую интегральную теорему о среднем.*

1 Несобственный интеграл Римана

1.1 Основные понятия

Определение 1.1. Функция f называется *локально интегрируемой по Риману на промежутке* I, если $\forall [a,c] \subset I \hookrightarrow f \in \mathcal{R}[a,c]$.

Пример. Всякая непрерывная на промежутке функция локально интегрируема на этом промежутке.

Определение 1.2. Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, и f локально интегрируема на $[a,b)$. Предел

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{c\to b-0}\int_a^c f(x)dx$$

называется *несобственным интегралом (Римана) от* f *на* $[a,b)$.

Если предел существует и конечен, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется *сходящимся*, иначе — *расходящимся*.

Замечание. Пусть $b \in \mathbb{R}$, функция f локально интегрируема и *ограничена* на $[a, b)$. Тогда по свойствам определённого интеграла $f \in \mathcal{R}[a, b]$ (при любом доопределении в точке b). В силу непрерывности интеграла с переменным верхним пределом:

$$\lim_{c \to b-0} \int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Следовательно, несобственный интеграл совпадает с определённым интегралом.

Поэтому новая ситуация может возникать лишь если:

- $b = +\infty$,
- $b \in \mathbb{R}$, f неограничена на $[a, b)$.

Аналогично определяется несобственный интеграл от f по $(a, b]$, $-\infty \leqslant a < b < +\infty$.

Некоторые свойства переносятся предельным переходом из аналогичных свойств определённого интеграла:

Свойство 1.1 (принцип локализации)**.** *Пусть f локально интегрируема на $[a, b)$, $a^* \in (a, b)$. Тогда интегралы $\int_{a^*}^b f(x)dx$ и $\int_a^b f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно, и если сходятся, то*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a^*} f(x)dx + \int_{a^*}^b f(x)dx$$

Доказательство. Если $c \in (a, b)$, то по свойству аддитивности определённого интеграла верно:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^{a^*} f(x)dx + \int_{a^*}^c f(x)dx.$$

Поэтому пределы $\lim_{c \to b-0} \int_{a^*}^c f(x)dx = \int_{a^*}^b f(x)dx$ и $\lim_{c \to b-0} \int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ существуют (конечны) одновременно. Равенство 1.1 получается из равенства для определённых интегралов переходом к пределу $c \to b - 0$. $\square$

Следующие три свойства доказываются аналогично.

Свойство 1.2 (линейность)**.** *Пусть несобственные интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся, и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда сходится интеграл $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx$ и*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

Свойство 1.3 (формула Ньютона-Лейбница)**.** *Пусть f локально интегрируема на $[a, b)$ и F — первообразная f на $[a, b)$. Тогда*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b - 0) - F(a) = F\big|_a^{b-0}.$$

Свойство 1.4 (интегрирование по частям)**.** *Пусть F, G дифференцируемы, а их производные f, g локально интегрируемы на $[a, b)$. Тогда*

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(x)G(x)\big|_a^{b-0} - \int_a^b G(x)f(x)dx.$$

Существование двух из трёх конечных пределов влечёт существование третьего и выполнение равенства.

Свойство 1.5 (замена переменной)**.** *Пусть f непрерывна на $[a, b)$, φ дифференцируема и строго монотонна на $[\alpha, \beta)$, причем φ' локально интегрируема на $[\alpha, \beta)$, $\varphi(\alpha) = a$, $\lim\limits_{t\to\beta-0}\varphi(t) = b$. Тогда*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Если существует один из интегралов, то существует и другой, и равенство выполняется.

Доказательство. Рассмотрим частичный интеграл $F(c) = \int_a^c f(x)dx$ на $[a, b)$, $\Phi(\gamma) = \int_\alpha^\gamma f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$. По свойству замены переменной в определенном интеграле $F(\varphi(\gamma)) = \Phi(\gamma)\ \forall\gamma \in [\alpha, \beta)$. Пусть (в $\overline{\mathbb{R}}$) определен интеграл $I = \int_a^b f(x)dx$. По свойству предела композиции существует $\lim_{\gamma\to\beta-0}\Phi(\gamma) = \lim_{c\to b-0}F(c) = I$. Следовательно, определен $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = I$.

Из условия следует, что существует обратная функция φ^{-1} и $\gamma = \varphi^{-1}(c) \to \beta$ при $c \to b-0$. Делая соответствующую замену переменной, получим, что $\lim_{\gamma\to\beta-0}\Phi(\gamma)$ влечет существование равного $\lim_{c\to b-0}F(c)$, то есть интеграл в правой части влечет существование интеграла в левой и их равенство. □

Пример. Исследовать на сходимость $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}\ \forall\alpha \in \mathbb{R}$.

Решение. 1. $\alpha \neq 1$:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_1^{+\infty} = \begin{cases}\frac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1;\\ +\infty, & \alpha < 1.\end{cases}$$

2. $\alpha = 1$:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \ln x\big|_1^{+\infty} = +\infty.$$

Следовательно, интеграл сходится тогда и только тогда, когда $\alpha > 1$ и равен $\frac{1}{\alpha-1}$.

Пример. Исследовать на сходимость $\int_0^1\frac{dx}{x^\alpha}\ \forall\alpha \in \mathbb{R}$.

Решение. Интеграл рассмотрим как несобственный на $(0, 1]$. Сделав замену $x = \frac{1}{t}$, получим

$$\int_0^1\frac{dx}{x^\alpha} = \int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{2-\alpha}}\ \text{сходится}\ \Leftrightarrow 2-\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha < 1.$$

Следовательно, интеграл сходится тогда и только тогда, когда $\alpha < 1$.

Теорема 1.1 (критерий Коши)**.** *Пусть f локально интегрируема на $[a, b)$. Для сходимости интеграла $\int_a^b f(x)dx$ необходимо и достаточно выполнения условия Коши:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists b_\varepsilon \in [a, b) \ \forall \xi, \eta \in (b_\varepsilon, b) \ \left(\left| \int_\xi^\eta f(x)dx \right| < \varepsilon \right).$$

Доказательство. Положим $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in [a, b)$. Поскольку $\int_\xi^\eta f(x)dx = F(\eta) - F(\xi)$, то доказательство утверждения является переформулировкой критерия Коши существования предела F при $x \to b - 0$. □

Определение 1.3. Пусть f локально интегрируе ма на $[a, b)$. Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$. Если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, но не сходится абсолютно, то он называется *условно сходящимся.*

Следствие. Абсолютно сходящийся интеграл сходится.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $\int_a^b |f(x)|dx$ сходится, то по критерию Коши $\exists b_\varepsilon \in [a, b) \ \forall [\xi, \eta] \subset (b_\varepsilon, b) \ \left(\int_\xi^\eta |f(x)|dx < \varepsilon \right)$. Но тогда тем более $\left| \int_\xi^\eta f(x)dx \right| \leqslant \int_\xi^\eta |f(x)|dx < \varepsilon$. Следовательно, по критерию Коши, интеграл сходится. □

Замечание. Из последнего неравенства следует, что если $\int_a^b f(x)dx$ абсолютно сходится, то

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.$$

1.2 Несобственные интегралы от неотрицательных функций

Лемма 1.1. *Пусть f локально интегрируема и неотрицательна на $[a, b)$. Тогда сходимость интеграла $\int_a^b f(x)dx$ равносильна ограниченности функции $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ на $[a, b)$.*

Доказательство. Функция F нестрого возрастает на $[a, b)$, так как

$$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \geqslant 0.$$

По теореме о пределах монотонной функции существует $\lim_{x \to b-0} F(x) = \sup_{[a,b)} F(x)$. Отсюда, учитывая неотрицательность, заключаем, что ограниченность F равносильна наличию конечного предела, то есть сходимости интеграла. □

Замечание. Несобственный интеграл от неотрицательной функции либо сходится, либо расходится к $+\infty$.

Теорема 1.2 (признак сравнения)**.** *Пусть функции f, g локально интегрируемы на $[a, b)$, и $0 \leqslant f \leqslant g$ на $[a, b)$.*

1. *Если $\int_a^b g(x)dx$ сходится, то $\int_a^b f(x)dx$ сходится.*

2. *Если $\int_a^b f(x)dx$ расходится, то $\int_a^b g(x)dx$ расходится.*

Доказательство. Для любого $x \in [a, b)$ выполнено $0 \leqslant \int_a^x f(t)dt \leqslant \int_a^x g(t)dt$. Если $\int_a^b g(x)dx$ сходится, то по лемме 1.1 функция $\int_a^x g(t)dt$ ограничена на $[a, b)$. Но тогда на $[a, b)$ ограничена и функция $\int_a^x f(t)dt$ и, значит, по лемме 1.1 интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится.

Второе доказываемое утверждение является контрапозицией первого. □

Следствие. Пусть f, g локально интегрируемы и неотрицательны на $[a, b)$. Если $f(x) = O(g(x))$, то справедливо заключение теоремы 1.2.

Доказательство. По определению и неотрицательности функции

$$\exists C > 0 \; \exists a^* \in [a, b) \; \forall x \in [a^*, b) \, (f(x) \leqslant Cg(x)) \, .$$

Если $\int_a^b g(x)dx$ сходится, то сходится интеграл $\int_{a^*}^b Cg(x)dx$. Тогда по признаку сравнения сходится интеграл $\int_{a^*}^b f(x)dx$ и, значит, сходится интергал $\int_a^b f(x)dx$.

□

Следствие. Пусть f, g локально интегрируемы и положительны на $[a, b)$. Если существует $\lim_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, +\infty)$, то интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. По условию также существует $\lim_{x \to b-0} \frac{g(x)}{f(x)} \in (0, +\infty)$. Поскольку существование конечного предела влечёт ограниченность функции в некоторой окрестности предельной точки, то утверждение вытекает из следствия 1.2. □

Пример. Исследовать на сходимость

1. $\int_1^{+\infty} x^{2023} e^{-x} dx$;

2. $\int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{arctg}(x)}$.

Доказательство.

1. По правилу Лопиталя $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{2025}}{e^x} = 0$, то есть $x^{2025} = o(e^x)$ или $x^{2023} e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ при $x \to +\infty$. Так как $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится, то $\int_1^{+\infty} x^{2023} e^{-x} dx$ сходится по признаку сравнения.

2. Так как $\operatorname{arctg}(x) \sim x$ при $x \to +0$, и $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ расходится, то по следствию 1.2 расходится $\int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{arctg}(x)}$.

□

1.3 Несобственные интегралы от знакопеременных функций

Лемма 1.2 (метод выделения главной части)**.** *Пусть функции f, g локально интегрируемы на $[a, b)$.*

1. *Если $\int_a^b g(x)dx$ сходится, то интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b (f(x) + g(x))dx$ сходятся или расходятся одновременно.*

2. *Если $\int_a^b g(x)dx$ абсолютно сходится, то интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b (f(x)+g(x))dx$ либо одновременно расходятся, либо одновременно сходятся условно, либо одновременно сходятся абсолютно.*

Доказательство. Первый пункт вытекает из линейности несобственных интегралов. Одновременная расходимость вытекает из первого пункта по неравенствам $|f+g| \leqslant |f|+|g|$, $|f| \leqslant |f+g|+|g|$ и признаку сравнения. $\square$

Пример. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость

$$I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin kx}{x^\alpha}\, dx, \alpha \in \mathbb{R}. \quad (k \neq 0)$$

Решение. Можно считать, что $k = 1$ (иначе сделаем замену). Рассмотрим различные значения α:

- $\triangleright$ $\alpha > 1$. Поскольку $\forall x \geqslant 1 \hookrightarrow \frac{|\sin x|}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{x^\alpha}$ и интеграл $\frac{1}{x^\alpha}$ сходится, то по признаку сравнения интеграл от $\frac{|\sin x|}{x^\alpha}$ также сходится, следовательно, $I(\alpha)$ сходится абсолютно.

- $\triangleright$ $\alpha \leqslant 0$. Интеграл $I(\alpha)$ расходится, так как удовлетворяет отрицанию условия Коши:

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \Delta \geqslant 1\ \exists \xi, \eta > \Delta,\ \begin{matrix} \xi = 2\pi n, \\ \eta = \pi + 2\pi n \end{matrix}, n \in \mathbb{N},$$

$$\left| \int_\xi^\eta \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx \right| = \int_\xi^\eta x^{-\alpha} \sin x\, dx > \underbrace{(2\pi n)^{-\alpha}}_{\geqslant 1} \underbrace{\int_{2\pi n}^{\pi+2\pi n} \sin x\, dx}_{=2} \geqslant 2.$$

  По критерию Коши $I(\alpha)$ расходится.

- $\triangleright$ $0 < \alpha \leqslant 1$. $I(\alpha)$ сходится, так как

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx = \underbrace{\frac{-\cos x}{x^\alpha}\Bigg|_1^{+\infty}}_{=\cos 1} - \alpha \cdot \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}}\, dx}_{\text{сходится абсолютно}}.$$

  Однако

$$\int_{\pi n}^{2\pi n} \frac{|\sin x|}{x^\alpha}\, dx \geqslant \int_{\pi n}^{2\pi n} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \geqslant \frac{1}{2\pi n} \int_{\pi n}^{2\pi n} |\sin x|\, dx = \frac{n}{2\pi n} \int_0^\pi |\sin x|\, dx = \frac{1}{\pi}.$$

  По критерию Коши этот интеграл расходится. Следовательно, $I(\alpha)$ сходится условно.

Ответ: $I(\alpha)$ сходится $\Leftrightarrow \alpha > 0$,
$I(\alpha)$ сходится абсолютно $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

Теорема 1.3 (признак Дирихле)**.** *Пусть f, g локально интегрируемы на $[a, b)$, причём*

1. $F(x) = \int_\alpha^x f(t)\, dt$ *ограничена на* $[a, b)$;
2. g *монотонна на* $[a, b)$;
3. $\lim\limits_{x \to b-0} g(x) = 0$.

Тогда несобственный интеграл $\int_a^b f(x)g(x)\, dx$ *сходится.*

Доказательство. Покажем, что интеграл $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ удовлетворяет условию Коши.

Пусть $|F| < M$ на $[a,b)$, тогда для любого $\xi \in [a,b)$ выполнено:

$$\left|\int_\xi^x f(t)\,dt\right| = |F(x) - F(\xi)| < 2M.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда, по определению предела для $g(x)$, $\exists b' \in [a,b)\, \forall x \in (b',b)\ \left(|g(x)| < \frac{\varepsilon}{8M}\right)$. Тогда по лемме Абеля (0.1) для любого $[\xi,\eta] \subset (b',b)$:

$$\left|\int_\xi^\eta f(t)g(t)\,dt\right| \leqslant 2\cdot 2M\,(|g(\xi)| + |g(\eta)|) < 4M\left(\frac{\varepsilon}{8M} + \frac{\varepsilon}{8M}\right) = \varepsilon.$$

По критерию Коши интеграл $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ сходится. □

Замечание. Условия последней теоремы выполнены, если f непрерывна и имеет ограниченную первообразную на $[a,b)$, g дифференцируема, g' сохраняет знак на $[a,b)$, $g(x) \to 0$ при $x \to b-0$.

Теорема 1.4 (признак Абеля). *Пусть f, g локально интегрируемы на $[a,b)$, причём*

1. $\int_a^b f(x)\,dx$ *сходится;*
2. g *монотонна на* $[a,b)$*;*
3. g *ограничена на* $[a,b)$.

Тогда несобственный интеграл $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ сходится.

Доказательство. Так как g монотонна и ограничена на $[a,b)$, то $\exists \lim\limits_{x\to b-0} g(x) = c \in \mathbb{R}$.

Функции f и $g - c$ удовлетворяют условиям признака Дирихле (1.3), поэтому $\int_a^b f(x)\,(g(x) - c)\,dx$ сходится. Тогда $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b f(x)(g(x)-c)\,dx + c\int_a^b f(x)\,dx$ сходится как сумма сходящихся интегралов. □

Следствие. Пусть f локально интегрируема на $[a,b)$, g монотонна на $[a,b)$ и $\lim\limits_{x\to b-0} g(x) = c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Тогда интеграл $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ и $\int_a^b f(x)\,dx$ либо одновременно расходятся, либо одновременно сходятся условно, либо одновременно сходятся абсолютно.

Доказательство. Покажем, что интегралы сходятся одновременно. Действительно, если $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится, то сходится и $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ по признаку Абеля (1.4).

Так как $c \neq 0$, то $\exists a^* \in [a,b)$, такое что g сохраняет знак на $[a^*,b)$. Следовательно, на $[a^*,b)$ определена $h = \frac{1}{g}$, которая является монотонной на нём.

Поскольку $\forall x \in [a^*,b) \hookrightarrow f(x) = f(x)g(x)h(x)$, то по признаку Абеля сходимость $\int_{a^*}^b f(x)g(x)\,dx$ влечёт сходимость $\int_{a^*}^b f(x)\,dx$, и, значит, сходимость $\int_a^b f(x)\,dx$.

Так как g и h имеют конечные пределы при $x \to b-0$, то $|f\cdot g| \underset{x\to b-0}{=} O(|f|)$, $|f| \underset{x\to b-0}{=} O(|f\cdot g|)$.

По признаку сравнения $\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx$ и $\int_a^b |f(x)|\,dx$ сходятся одновременно и, значит, $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ и $\int_a^b f(x)\,dx$ одновременно сходятся абсолютно. □

Пример.

$$I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \operatorname{arctg}^\alpha \frac{1}{x} \sin\sqrt{x}\, dx, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Решение. Функция под интегралом знакопеременна в любой окрестности бесконечности.

$$I(\alpha) = 2\int_1^{+\infty} \sqrt{x} \operatorname{arctg}^\alpha \frac{1}{x} \sin\sqrt{x} \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx \overset{t=\sqrt{x}}{=} 2\int_a^{+\infty} t \operatorname{arctg}^\alpha \frac{1}{t^2} \cdot \sin t\, dt = 2J(\alpha).$$

Перемишем подынтегральную функцию в виде

$$\frac{\sin t}{t^{2\alpha-1}} g(t), \ g(t) = \left(t^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{t^2}\right)^\alpha.$$

Пусть $h(u) = u \operatorname{arctg} \frac{1}{u}$, $h'(u) = \operatorname{arctg} \frac{1}{u} + \frac{u}{1+\frac{1}{u^2}} \cdot \left(-\frac{1}{u^2}\right) = \frac{1}{u} - \frac{1}{3u^3} + o\left(\frac{1}{u^3}\right) - \frac{1}{u}\left(1 - \frac{1}{u^2} + o\left(\frac{1}{u^2}\right)\right) = \frac{1}{u^3}\left(\frac{2}{3} + o(1)\right), \ u \to \infty.$

Следовательно, $g(t) = \left(h(t^2)\right)^\alpha$ монотонна на $[t_0, +\infty)$, $g(t) \to 1$ при $t \to +\infty$.

По следствию из признака Абеля (1.4) $J(\alpha)$ имеет тот же тип сходимости, что и $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{2\alpha-1}}\, dt$.

Ответ: $I(\alpha)$ сходится $\Leftrightarrow 2\alpha - 1 > 0 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}$,
$I(\alpha)$ сходится абсолютно $\Leftrightarrow 2\alpha - 1 > 1 \Leftrightarrow \alpha > 1$.

Определение 1.4. Пусть $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ и функция f определена на (a, b), кроме, быть может, конечного множества точек.

Точка $c \in (a, b)$ называется *особенностью* f, если $f \notin \mathcal{R}[\alpha, \beta]$ для любого $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, $\alpha < c < \beta$.

Точка b называется *особенностью* f, если $b = +\infty$, или $b \in \mathbb{R}$ и $f \notin \mathcal{R}[\alpha, \beta]$, для любого $[\alpha, \beta]$.

Аналогично вводится особенность a.

Замечание. Если на (c, d) нет особенностей функции f, то f локально интегрируема на (c, d).

Доказательство. Пусть $[u, v] \subset (c, d)$. По условию $\forall x \in (u_x, v_x)$ и $f \in \mathcal{R}[u_x, v_x]$.

Тогда $\{(u_x, v_x)\}_{x \in [u,v]}$ образуют открытое покрытие $[u, v]$. По лемме Гейне-Бореля из открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Объединяя элементы этого подпокрытия и пользуясь аддитивностью интеграла, заключаем, что f интегрируема на отрезке, содержащем $[u, v]$, и, значит, f локально интегрируема на (c, d), так как $[u, v]$ выбирался произвольным. $\square$

Определение 1.5. Пусть $c_1 < c_2 < \ldots < c_{N-1}$ – все особенности функции f на (a, b), $c_0 = a$, $c_N = b$. Пусть $\xi_k \in (c_{k-1}, c_k)$, $k = 1, \ldots, N$. *Несобственным интегралом функции f по* (a, b) называется

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^N \left(\int_{c_{k-1}}^{\xi_k} f(x)dx + \int_{\xi_k}^{c_k} f(x)dx\right),$$

если все интегралы в правой части (понимаются как несобственные) и их сумма имеет смысл в $\mathbb{R}$.

При этом $\int_a^b f(x)dx$ называется *сходящимся*, если все интегралы в правой части сходятся, иначе – *расходящимся*.

Замечание. Корректность (независимость от выбора ξ_k) следует из принципа локализации.

Задача. *Пусть* $f : [1;+\infty) \to \mathbb{R}$ *непрерывна и неотрицательна. Известно, что* $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ *сходится. Верно ли, что* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$*? А при дополнительном условии, что* f *равномерно непрерывна на* $[1,+\infty)$*?*

2 Числовые ряды

2.1 Сумма числового ряда

Определение 2.1. Пусть $\{a_n\}$ – последовательность действительных (комплексных) чисел. Выражение

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots$$

называется *числовым рядом* с n-ым членом a_n.

Число

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + \dots + a_N$$

называется *N-ой частичной суммой ряда 2.1.*

Предел

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{N\to+\infty} S_N$$

называется *суммой ряда 2.1*. Если предел конечен, то ряд называется *сходящимся*, иначе – *расходящимся*.

Замечание (Телескопический ряд)**.** С каждой последовательностью $\{s_n\}$ связан ряд, для которого s_n является n-ой частичной суммой. Достаточно положить $a_1 = s_1$, $a_n = s_n - s_{n-1}$, $n > 1$.

Отметим, что нумерация членов ряда может начинаться с любого $m \in \mathbb{Z}$.

Пример. Исследуем сходимость

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, $z \in \mathbb{C}$ (геометрический ряд).
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Решение. 1. $S_N = \begin{cases} \frac{1-z^{N+1}}{1-z}, & z \neq 1 \\ N+1, & z = 1 \end{cases}$. Пусть $|z| < 1$. Тогда $z^N \to 0$ и, значит, $S_N \to \frac{1}{1-z}$, ряд сходится и его сумма равна $\frac{1}{1-z}$. Пусть $|z| < 1$. Тогда S_N не имеет конечного предела, иначе $z^N = S_N - S_{N-1} \to 0$. Так, $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ сходится $\Leftrightarrow |z| < 1$.

2. $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}$. Следовательно, ряд сходится и его сумма равна 1.

Лемма 2.1 (Принцип локализации)**.** *Для каждого $m \in \mathbb{N}$ ряды $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n$ сходятся или расходятся одновременно, и если сходятся, то*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n.$$

Доказательство. Если $N > m$, то $\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{N} a_n$. Поэтому пределы последовательностей $\sum_{n=1}^{m} a_n$ и $\sum_{n=m+1}^{N} a_n$ при $N \to +\infty$ существуют (конечны) одновременно. □

Замечание. Ряд $r_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n$ называется *N-ым остатком* ряда 2.1.

Принцип локализации можно переформулировать так: если ряд сходится, то сходится и любой его остаток. И если сходится некоторый остаток ряда, то и весь ряд сходится.

Лемма 2.2 (Линейность)**.** *Пусть ряды $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ сходятся, и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$, причем верно равенство*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.$$

Доказательство. Вытекает из линейности предела последовательности. □

Лемма 2.3 (Необходимое условие сходимости ряда)**.** *Если $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, то $a_n \to 0$.*

Доказательство. Пусть $S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Так как $a_n = S_n - S_{n-1}$ (считаем, что $S_0 = 0$), то $a_n \to (S - S) = 0$. □

Сходимость n-го члена к нулю не является достаточным условием сходимости ряда.

Пример. *Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$* расходится.

Решение. Пусть $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, тогда $H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2} \not\to 0$, однако $\frac{1}{n} \to 0$.

Определение 2.2. Пусть дана строго возрастающая последовательность целых чисел $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$

Ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$, где $b_k = a_{n_{k-1}+1} + \ldots + a_{n_k}$ называется *группировкой* ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Лемма 2.4.

1. *Если ряд сходится, то сходится и любая его группировка, причем к той же сумме.*
2. *Пусть $\exists L\ \forall k\ (n_k - n_{k-1} \leqslant L)$. Если $a_n \to 0$ и группировка $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$, где $b_k = \sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} a_j$, сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, причем к той же сумме.*

Доказательство. Пусть S_N обозначает N-ую частичную сумму 2.1, S_N^* – N-ую частичную сумму группировки.

1. Пусть $S_N \to S$. Так как $S_N^* = S_{n_N}$, то $S_N^* \to S$ как подпоследовательность.
2. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем такие $K, M \in \mathbb{N}$, что $\forall k \geqslant K \hookrightarrow |S_k^* - S| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\forall m \geqslant M \hookrightarrow |a_m| < \frac{\varepsilon}{2L}$. Положим $N = \max\{n_K, M + L\}$. Если $n \geqslant N$, то $n_k \leqslant n < n_{k+1}$, где $k \geqslant K$. Значит,

$$|S_n - S| = |S_{n_k} + a_{n_k+1} + \cdots + a_n - S| \leqslant |S_k^* - S| + |a_{n_k+1}| + \cdots + |a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + L\frac{\varepsilon}{2L} = \varepsilon.$$

□

Применяя критерий Коши для последовательности частичных сумм получаем критерий Коши сходимости числового ряда.

Теорема 2.1. *Для сходимости ряда* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *необходимо и достаточно выполнения условия Коши*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n, m \in \mathbb{N}, \ N \leqslant m \leqslant n \left(\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Установим утверждение, связывающее несобственные интегралы и числовые ряды.

Определение 2.3. С действительным рядом 2.1 свяжем функцию $f_a : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = a_{[x]}$.

Лемма 2.5. *Ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *и* $\int_1^{+\infty} f_a(x)dx$ *сходятся или расходятся одновременно, и если сходятся, то к одному значению.*

Доказательство. Пусть $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Так как $S_n = \int_1^{n+1} f_a(x)dx$, то сходимость интеграла влечет сходимость ряда. Обратное утверждение следует из оценки

$$\left| S_n - \int_1^x f_a(x)dx \right| \leqslant |a_n| \to 0$$

и необходимого условия сходимости ряда. □

2.2 Ряды с неотрицательными членами

Лемма 2.6. *Пусть* $a_n \geqslant 0$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда сходимость ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *равносильна ограниченности последовательности частичных сумм* $\{S_n\}$.

Доказательство. Все $S_n \geqslant 0$ и нестрого возрастают, так как $S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geqslant 0$. Следовательно, $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = \sup S_n$. □

Теорема 2.2 (признак сравнения)**.** *Пусть* $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$.

1. *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится, то сходится и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;
2. *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится, то расходится и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Доказательство. Вытекает из леммы (2.5) и признака сравнения несобственных интегралов. □

Следствие. Пусть $a_n, b_n \geqslant 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $a_n = O(b_n)$ при $n \to \infty$. Тогда справедливо заключение предыдущей теоремы.

Следствие. Пусть $a_n, b_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и существует $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0, +\infty)$. Тогда ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Теорема 2.3 (интегральный признак сходимости)**.** *Пусть функция* f *нестрого убывает и неотрицательна на* $[1, +\infty)$. *Тогда ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *и интеграл* $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. Положим $u, v : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $u|_{[n,n+1)} = f(n)$, $v|_{[n,n+1)} = f(n+1)$.

Так как f нестрого убывает, то $v \leqslant f \leqslant u$ на $[1, +\infty)$.

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится, тогда по лемме (2.5) сходится $\int_1^{+\infty} u(x)\,dx$. Следовательно, по признаку сравнения для интегралов $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ также сходится.

Пусть $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, тогда по признаку сравнения сходится $\int_1^{+\infty} v(x)\,dx$. Следовательно, по лемме (2.5) сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n+1)$. □

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Если $\alpha \leqslant 0$, то $\frac{1}{n^\alpha} \not\to 0$ и ряд расходится по необходимому условию.

Если $\alpha > 0$, то функция $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ строго убывает и положительна на $[1, +\infty)$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ и $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходятся или расходятся одновременно по интегральному признаку.

Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится, что равносильно $\alpha > 1$. □

Замечание. В условиях теоремы (2.3) последовательность $\alpha_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f(x)\,dx$ сходится.

Доказательство. Так как $\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \underbrace{(f(k) - f(x))}_{\geqslant 0}\,dx$,

то $\alpha_n \geqslant 0$ и $\{\alpha_n\}$ нестрого возрастает.

Далее,

$$\alpha_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} (f(k) - f(k-1)) = f(1) - f(n+1) \leqslant f(1).$$

По теореме о пределе монотонной последовательности $\{\alpha_n\}$ сходится. □

Пример. По замечанию существует

$$\gamma \coloneqq \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right),$$

(*константа Эйлера-Маскерони*, $\gamma = 0{,}5772\ldots$).

Следовательно, $H_n = \ln n + \gamma + o(1), n \to \infty$.

Следующие теоремы основаны на сравнении с геометрическим рядом.

Теорема 2.4 (признак Коши). *Пусть $a_n \geqslant 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $q = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.*

1. *Если $q < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;*

2. *Если $q > 1$, то $a_n \not\to 0$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.*

Доказательство.
1. Пусть $q_0 \in (q, 1)$. Выберем N так, что $\sup_{n\geqslant N} \sqrt[n]{a_n} < q_0$ при всех $n \geqslant N$ и, значит, $a_n < q_0^n$. Следовательно, ряд сходится по признаку сравнения с геометрическим рядом.

2. Так как q — частичный предел, то $\exists \{n_k\}$ $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \to q$. Поэтому $\exists k_0\, \forall k \geqslant k_0$ $(a_{n_k} > 1)$, следовательно, $a_n \not\to 0$ и ряд расходится.

□

Теорема 2.5 (признак Даламбера)**.** *Пусть $a_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Если $\overline{r} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;*
2. *Если $\underline{r} = \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то $a_n \not\to 0$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.*

Доказательство. 1. Пусть $r \in (\overline{r}, 1)$. Выберем N так, что $\sup_{n\geqslant N} \frac{a_{n+1}}{a_n} < r$ при всех $n \geqslant N$, и, значит,

$$\forall n > N \; a_{n+1} < ra_n < \ldots < r^{n+1-N} a_N = r^{1-N} a_N r^n,$$

и, значит, ряд сходится по признаку сравнения с геометрическим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$.

2. Пусть $\underline{r} > 1$. Тогда $\exists N \left(\inf_{n\geqslant N} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1\right)$ и, значит, $a_{n+1} > a_n > \ldots > a_N > 0$ для всех $n > N$. Следовательно, $a_n \not\to 0$ и ряд расходится.

$\square$

Замечание. Если в теореме (2.4) $q = 1$ или в теореме (2.5) $\overline{r} \geqslant 1$, $\underline{r} \leqslant 1$, то в общем случае о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ничего нельзя сказать.

Пример. Пусть $a_n = 1$, $b_n = \frac{1}{n^2}$. Для рядов $q = \overline{r} = \underline{r} = 1$. Однако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, а $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится.

Задача. *Пусть $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n > 0$. Покажите, что*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Замечание. Из последней цепочки неравенств следует, что если к ряду применим признак Даламбера, то к нему применим признак Коши, но обратное неверно.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = 2^{-n+(-1)^n}$. Так как $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$, то ряд сходится по признаку Коши.

Однако $\forall k \in \mathbb{N}$ $\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{2^{-2k-2}}{2^{-2k+1}} = \frac{1}{8}$, $\frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}} = \frac{2^{-2k-1}}{2^{-2k-2}} = 2$.

Следовательно, $\overline{r} \geqslant 2, \underline{r} \leqslant \frac{1}{8}$, к ряду неприменим признак Даламбера.

Теорема 2.6 (признак Гаусса)**.** *Пусть $a_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и существуют такие $s > 1$ и ограниченная последовательность $\{\alpha_n\}$, что для всех n выполнено*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{A}{n} + \frac{\alpha_n}{n^s}.$$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится при $A > 1$ и расходится иначе.

Доказательство. При $n > 1$ имеем

$$a_n = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} = a_1 \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{A}{k} + \frac{\alpha_k}{k^s}\right) = a_1 \cdot \exp\left(\sum_{k=1}^{n-1} \ln(1 - \frac{A}{k} + \frac{\alpha_k}{k^s})\right).$$

Так как $\ln(1+t) = t + O(t^2)$, $t \to 0$, имеем

$$a_n = a_1 \cdot \exp\left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{A}{k} + \frac{\alpha_k}{k^s} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\right).$$

Воспользуемся равенством $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ и сходимостью рядов $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p}$ при $p > 1$. Тогда

$$a_n = a_1 \cdot \exp\left(-A \ln n + O(1)\right) = a_1 \frac{e^{O(1)}}{n^A}.$$

Теперь утверждение следует по признаку сравнения с рядом $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^A}$. □

2.3 Ряды с произвольными членами

Вернемся к изучению рядов с произвольными (в общем случае комплексными) членами.

Определение 2.4. Ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$.

Если ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, но не сходится абсолютно, то он называется *условно сходящимся.*

Следствие. Абсолютно сходящийся ряд сходится.

Доказательство. Для любых $m, n \in \mathbb{N}, m \leqslant n$,

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=m}^{n} |a_k|.$$

Поэтому, если ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ удовлетворяет условию Коши, то условию Коши удовлетворяет ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. □

Замечание. Если ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится абсолютно, то

$$\left|\sum_{k=1}^{+\infty} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|.$$

Лемма 2.7.

1. *Если $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ сходится, то $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходятся или расходятся одновременно.*

2. *Если $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ абсолютно сходится, то $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ либо одновременно расходятся, либо одновременно сходятся условно, либо одновременно сходятся абсолютно.*

Доказательство.

1. Следует из свойства линейности. Для всех $n \in \mathbb{N}$ верно

$$|a_n + b_n| \leqslant |a_n| + |b_n|, \ \ |a_n| \leqslant |a_n + b_n| + |b_n|.$$

Следовательно, по признаку сравнения ряды $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ одновременно абсолютно сходятся.

2. Вытекает из пункта 1.

□

Теорема 2.7 (признак Дирихле). *Пусть $\{a_n\}$ – комплексная последовательность, $\{b_n\}$ – действительная последовательность, причем*

1. *Последовательность $A_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ ограничена,*
2. *$\{b_n\}$ монотонна,*
3. *$\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$.*

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ сходится.

Задача. *Доказать признак Дирихле.*

В следующих параграфах признак будет доказан в общности. Это относится и к следующему утверждению, которое можно сформулировать как следствие признака Дирихле.

Теорема 2.8 (признак Абеля). *Пусть $\{a_n\}$ – комплексная последовательность, $\{b_n\}$ – действительная последовательность, причем*

1. *Ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится,*
2. *$\{b_n\}$ монотонна,*
3. *$\{b_n\}$ ограничена.*

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ сходится.

Полезно для практики выделить частные случаи признака Дирихле, в которых ограниченность частичных сумм (условие 1) выполняется автоматически.

Следствие (признак Лейбница). Пусть последовательность $\{\alpha_n\}$ монотонна и $\alpha_n \to 0$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\alpha_n$ сходится, причем

$$|S - S_n| \leqslant |\alpha_{n+1}|.$$

Доказательство. Сходимость вытекает из признака Дирихле. Докажем ее прямо. Пусть для определенности $\{\alpha_n\}$ нестрого убывает, и, значит, все $\{\alpha_n\} \geqslant 0$.

$S_{2n+2} - S_{2n} = \alpha_{2n+1} - \alpha_{2n+2} \geqslant 0 \Rightarrow \{S_{2n}\}$ нестрого возрастает.

$S_{2n+1} - S_{2n-1} = -\alpha_{2n} + \alpha_{2n+1} \leqslant 0 \Rightarrow \{S_{2n-1}\}$ нестрого убывает.

Кроме того, $S_{2n} - S_{2n-1} = -\alpha_{2n} \leqslant 0$. Поэтому для любых $m, n \in \mathbb{N}$ имеем

$$S_{2n} \leqslant S_{2k} \leqslant S_{2k-1} \leqslant S_{2m-1},$$

где $k = \max\{m, n\}$. Следовательно, последовательности $\{S_{2n}\}$ и $\{S_{2n-1}\}$ сходятся, $S_{2n} \to S'$, $S_{2n-1} \to S''$, и, в частности,

$$S_{2n} \leqslant S' \leqslant S'' \leqslant S_{2n-1}.$$

Поскольку $S_{2n} - S_{2n-1} = -\alpha_{2n} \to 0$, то $S' = S'' = S$. □

Следствие. Пусть $\{\alpha_n\}$ монотонна и $\alpha_n \to 0$, $x \neq 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. Тогда ряды $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos(nx)$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \sin(nx)$ сходятся.

Доказательство. Положим $s_N = \sum_{n=1}^{N} e^{inx}$. По формуле суммы геометрической прогрессии с $q = e^{ix}$ имеем

$$s_N = \frac{e^{ix}(1-e^{iNx})}{1-e^{ix}}.$$

Поэтому, так как $|e^{ikx}| = 1$, $|s_N| \leqslant \frac{2}{\sqrt{(1-\cos(x))^2+\sin^2(x)}} = \frac{2}{\sqrt{2-2\cos(x)}} = \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}$.

Ограниченность сумм $C_N = \sum_{n=1}^{N} \cos(nx)$ и $S_N = \sum_{n=1}^{N} \sin(nx)$ следует из ограниченности $\{s_N\}$ и равенств $C_N = Re(s_N)$, $S_N = Im(s_N)$.

Сходимость указанных рядов теперь следует из признака Дирихле. □

Пример. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Решение.

$$S_{2m} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2m} = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2m-1}+\frac{1}{2m}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2m}\right) =$$

$$= H_{2m} - H_m = (\ln 2m + \gamma + o(1)) - (\ln m + \gamma + o(1)) = \ln 2 + o(1),\ m \to +\infty.$$

Значит искомая сумма равна $\ln 2$.

2.4 Перестановки рядов

Определение 2.5. Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ и биекция $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Тогда $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\varphi(n)}$ называется *перестановкой* ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Пример. Рассмотрим следующую перестановку ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$:

$$1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{8}, +\frac{1}{5}, -\frac{1}{10}, \ldots$$

Найдем сумму этой перестановки

$$S_p = (1-\frac{1}{2}) - \frac{1}{4} + (\frac{1}{3}-\frac{1}{6}) - \frac{1}{8} + (\frac{1}{5}-\frac{1}{10}) + \ldots = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots) = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Заметим, что мы корректно нашли сумму, однако она отличается от ответа прошлой задачи. Это следует из условной сходимости ряда.

Теорема 2.9. *Если ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится абсолютно, то любая его перестановка $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\varphi(n)}$ сходится абсолютно, причем к той же сумме.*

Доказательство. Абсолютная сходимость перестановки следует из оценки

$$\sum_{n=1}^{N} |a_{\varphi(n)}| \leqslant \sum_{n=1}^{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant N}\{\varphi(k)\}} |a_n| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем номер m так, что $\sum_{n=m+1}^{+\infty} |a_n| < \varepsilon$. Выберем M так, что $\{1, \ldots, m\} \subset \{\varphi(1), \ldots, \varphi(M)\}$ (достаточно положить $M = \max_{1\leqslant j\leqslant m} \varphi^{-1}(j)$). Тогда для любого $N \geqslant M$ имеем $\{1, \ldots, m\} \subset \{\varphi(1), \ldots, \varphi(N)\}$ и $\left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \sum_{n=1}^{N} a_{\varphi(n)}\right| \leqslant \sum_{n=m+1}^{+\infty} |a_n| < \varepsilon$. Таким образом, частичные суммы перестановки сходятся у сумме исходного ряда. □

Задача (Теорема Римана)**.** *Если ряд с действительными членами* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *сходится условно, то для любого* $L \in \overline{\mathbb{R}}$ *существует такая перестановка* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\varphi(n)}$*, что её сумма равна* L*.*

2.5 Произведение числовых рядов

Теорема 2.10 (Коши)**.** *Пусть ряды* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *сходятся абсолютно к* A *и* B *соответственно. Тогда ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{i_n} b_{j_n}$ *из всевозможных попарных произведений, занумерованных в произвольном порядке (то есть, с* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$*,* $\varphi(n) = (i_n, j_n)$ *– биекция) сходится абсолютно к* AB*.*

Доказательство. Покажем абсолютную сходимость ряда из произведений:

$$\sum_{n=1}^{N} |a_{i_n} b_{j_n}| \leqslant \sum_{i=1}^{\max_{1\leqslant k\leqslant N} i_k} \sum_{j=1}^{\max_{1\leqslant k\leqslant N} j_k} |a_i| \cdot |b_j| = \left(\sum_{i=1}^{\max_{1\leqslant k\leqslant N} i_k} |a_i| \right) \left(\sum_{j=1}^{\max_{1\leqslant k\leqslant N} j_k} |b_j| \right) \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |a_i| \right) \left(\sum_{j=1}^{+\infty} |b_j| \right).$$

По теореме (2.9) любая перестановка ряда из произведений сходится к той же сумме. Рассмотрим перестановку «по квадратам» и её частичную сумму $S_{N^2} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a_i b_j$. Так как $S_{N^2} = \left(\sum_{i=1}^{N} a_i \right) \left(\sum_{j=1}^{N} b_j \right) \to AB$ и если последовательность сходится, то и любая подпоследовательность сходится к тому же пределу, то заключаем, что перестановка «по квадратам», а значит, и $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{i_n} b_{j_n}$, имеет сумму AB. □

Определение 2.6. Ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$, где $c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}$, называется *произведением по Коши* рядов $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Замечание. В развёрнутом виде

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots) \cdot (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots) = a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \ldots$$

Следовательно, произведение по Коши соответствует перестановке по диагонали с последующей группировкой элементов, стоящих на одной диагонали.

Следствие. Если ряды $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ сходятся абсолютно, то их произведение по Коши сходится абсолютно к произведению сумм рядов.

Пример. Доказать, что $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ сходится условно.

Решение. Рассмотрим произведение по Коши этого ряда на себя:

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n+1-k}} = (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(n+1-k)}}.$$

Так как $|c_n| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(n+1-k)}} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{nn}} = 1$. Следовательно, $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ расходится.

2.6 Неупорядоченные ряды

Пусть $\{a_j\}_{j\in J}$ – семейство действительных чисел, индексированное элементами множества J (возможно, несчётного).

Обозначим через $\mathcal{F}(J)$ множество всех конечных подмножеств J.

Определение 2.7. Говорят, что неупорядоченный ряд $\sum_{j\in J} a_j$ *сходится и его сумма равна* s, если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists F_0\in\mathcal{F}(J)\ \forall F\in\mathcal{F}(J), F\supset F_0\ \left(\left|\sum_{j\in F} a_j - s\right|<\varepsilon\right).$$

Говорят, что неупорядоченный ряд $\sum_{j\in J} a_j$ *расходится к* $+\infty$, если

$$\forall M>0\ \exists F_0\in\mathcal{F}(J)\ \forall F\in\mathcal{F}(J), F\supset F_0\ \left(\sum_{j\in F} a_j > M\right).$$

Свойство 2.1 (линейность)**.** *Если* $\sum_{j\in J} a_j$ *и* $\sum_{j\in J} b_j$ *сходятся и* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, *то сходится* $\sum_{j\in J}(\alpha a_j+\beta b_j)$, *причём*

$$\sum_{j\in J}(\alpha a_j+\beta b_j)=\alpha\sum_{j\in J} a_j+\beta\sum_{j\in J} b_j.$$

Доказательство. Достаточно взять $F_0=F_a\cup F_b$ из определений сходимости $\sum_{j\in\mathcal{J}} a_j$ и $\sum_{j\in\mathcal{J}} b_j$. □

Свойство 2.2. *Если* $\forall j\in J\ a_j\geqslant 0$, *то* $\sum_{j\in J} a_j$ *либо сходится, либо расходится к* $+\infty$, *и*

$$\sum_{j\in J} a_j=\sup_{F\in\mathcal{F}(J)}\sum_{j\in F} a_j s,\ \ s\in\mathbb{R}.$$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon>0$. Пусть $s\in R$. По определению супремума $\exists F_0\in\mathcal{F}(J)$ $\left(\sum_{j\in F_0} a_j>s-\varepsilon\right)$. Тогда

$$\forall F\in\mathcal{F}(J), F\supset F_0\ \left(s-\varepsilon<\sum_{j\in F_0} a_j\leqslant\sum_{j\in F} a_j\leqslant s\right).$$

Случай $s=+\infty$ рассматривается аналогично. □

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\frac{1}{(m+n)^p}$.

Решение. Пусть $T=\{(m,n)\,|\,1\leqslant m+n\leqslant N\}$.

$$\sum_T\frac{1}{(m+n)^p}=\sum_{k=2}^{N}\sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{k^p}=\sum_{k=2}^{N}\frac{k-1}{k^p}.$$

Если $p\leqslant 2$, то $\sum_{(m,n)}\frac{1}{(m+n)^p}$ расходится.

Пусть $p > 2$. Рассмотрим конечное $F \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Тогда $\exists T \supset F$ и, значит,

$$\sum_F \frac{1}{(m+n)^p} \leqslant \sum_T \frac{1}{(m+n)^p} = \sum_{k=2}^{N} \frac{k-1}{k^p} < \underbrace{\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{k^p}}_{\text{сход.}}.$$

Определение 2.8. $\forall x \in \mathbb{R}$ обозначим $x^+ = \max\{x, 0\}$, $x^- = \max\{-x, 0\}$.

Теорема 2.11. *Неупорядоченный ряд* $\sum_{j \in J} a_j$ *сходится тогда и только тогда, когда сходится* $\sum_{j \in J} |a_j|$.

Доказательство.

($\Leftarrow$) $\forall x \in \mathbb{R}$ $(x^\pm \leqslant |x|)$, тогда сходимость ряда $\sum_{j \in J} |a_j|$ влечёт сходимость рядов $\sum_{j \in J} a_j^+$ и $\sum_{j \in J} a_j^-$. По свойству линейности и равенства $x = x^+ - x^-$ следует сходимость $\sum_{j \in J} a_j$.

($\Rightarrow$) Пусть $\sum_{j \in J} a_j$ сходится. Тогда $\exists F_0 \in \mathcal{F}(J)$ $\forall F \in \mathcal{F}(J), F \supset F_0$ $\left(\left|\sum_{j \in F} a_j - s\right| < 1\right)$ и, значит,

$$\left|\sum_{j \in F} a_j\right| < 1 + |s|.$$

Пусть $E \subset J$ конечно. Тогда

$$\sum_{j \in E} a_j = \sum_{j \in E \cup F_0} a_j - \sum_{j \in F_0 \setminus E} a_j \leqslant 1 + |s| + \sum_{j \in F_0} a_j^-,$$

так как $\forall x \in \mathbb{R}$ $-x \leqslant x^-$.

Положим $P = \{j \in J \,|\, a_j \geqslant 0\}$. Тогда

$$\sum_{j \in E} a_j^+ = \sum_{j \in E \cap P} a_j \leqslant 1 + |s| + \sum_{j \in F_0} a_j^-.$$

Следовательно, $\sum_{j \in J} a_j^+$ сходится. Аналогично $\sum_{j \in J} a_j^-$ сходится. По линейности ввиду равенства $|x| = x^+ + x^-$ следует сходимость $\sum_{j \in J} |a_j|$. □

Следствие. Пусть $\sum_{j \in J} a_j$ сходится. Тогда $S = \{j \in J \,|\, a_j \neq 0\}$ не более чем счётно.

Доказательство. Если $\sum_{j \in J} a_j$ сходится, то $\sum_{j \in J} |a_j| =: M < +\infty$.

Рассмотрим $S_n = \left\{j \in J \,\middle|\, |a_j| > \frac{1}{n}\right\}$, следовательно, S_n конечно ($|S_n| \leqslant nM$). Следовательно, $S = \bigcup_{n=1}^{+\infty} S_n$ не более чем счётно. □

Теорема 2.12. *Пусть* $\{J_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *— разбиение* J*, то есть* $\bigcup_{n=1}^{+\infty} J_n = J$ *и* $J_k \cap J_i = \varnothing$.

Ряд $\sum_{j \in J} a_j$ *сходится тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j \in J_n} |a_j| < +\infty.$$

В этом случае

$$\sum_{j \in J} a_j = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j \in J_n} a_j.$$

Доказательство. ($\Leftarrow$) Пусть выполнено (2.12). Если $\underbrace{F}_{\text{конечно}} \subset J$, то $\exists N\ F \subset \bigcup_{n=1}^{N} J_n$. Поэтому

$$\sum_{j\in F} |a_j| = \sum_{n=1}^{N} \sum_{j\in F\cap J_n} |a_j| \leqslant \sum_{n=1}^{N} \sum_{j\in J_n} |a_j| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j\in J_n} |a_j|.$$

Следовательно, ряд $\sum_{j\in J} |a_j|$ сходится и, значит, сходится $\sum_{j\in J} a_j$.

($\Rightarrow$) Пусть ряд $\sum_{j\in J} a_j$ сходится. Тогда $\sum_{j\in J} |a_j| < +\infty$ и, значит, $\sum_{j\in J_n} |a_j| < +\infty$ для любого n. Пусть $\varepsilon > 0$. Для любого n $\underbrace{\exists F_n}_{\text{конечно}} \subset J_n$ $\sum_{j\in F_n} |a_j| > \sum_{j\in J_n} |a_j| - \frac{\varepsilon}{2^n}$.

Зафиксируем N и пусть $F = \bigcup_{n=1}^{N} F_n$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{j\in J_n} |a_j| < \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{j\in F_n} |a_j| + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) = \sum_{j\in F} |a_j| + \sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2^n} \leqslant \sum_{j\in J} |a_j| + \varepsilon.$$

Так как N произвольно, то $\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j\in J_n} |a_j| \leqslant \sum_{j\in J} |a_j|$.

Таким образом (2) верно и для $a_j \geqslant 0$. В частности, (2.12) верно для $a_j^{\pm}$. Поскольку $a_j = a_j^+ - a_j^-$, то (2.12) в общем случае следует по свойству линейности. $\square$

Следствие. Ряд $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится $\sum_{n=a}^{+\infty} |a_n|$.

В этом случае $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Следствие (теорема Фубини)**.** Пусть $\{a_{nm}\}_{n,m=1}^{+\infty}$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} a_{nm} = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} a_{nm} = \sum_{n,m\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{nm}$$

при условии, что хотя бы один из рядов сходится при замене a_{nm} на $|a_{nm}|$.

3 Функциональные ряды

3.1 Равномерная сходимость

Пусть $f_n, f : E \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), $n \in \mathbb{N}$.

Определение 3.1. Последовательность $\{f_n\}$ *поточечно сходится* к f на E, если $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ для всех $x \in E$.

Пишут $f_n \to f$ на E и f называют *предельной функцией* последовательности $\{f_n\}$.

Воспользуемся определением предела последовательности. $f_n \to f$ на E тогда и только тогда, когда $\forall x \in E\, \forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geqslant N\ \ (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$.

Пример. Пусть $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$. Тогда $f_n \to f$ на $[0,1]$, где

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Зафиксируем $\varepsilon \in (0,1)$. $x^n < \varepsilon \Rightarrow N(x) \geqslant \frac{\ln\varepsilon}{\ln x} \Rightarrow N(x) \to +\infty$ при $x \to 1-0$.

Если $N(x)$ удаётся выбрать одним для всех $x \in E$ (при фиксированном ε), то приходим к следующему понятию:

Определение 3.2. Последовательность $\{f_n\}$ *равномерно сходится* к f на E, если

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \geqslant N \, \forall x \in E \ \ (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon) \, .$$

Пишут $f_n \rightrightarrows f$ на E или $f_n \rightrightarrows_E f$ при $n \to +\infty$.

Замечание. Равномерная сходимость, очевидно, влечёт поточечную, но поточечная сходимость не влечёт равномерную в общем случае, как показывает предыдущий пример.

Лемма 3.1 (супремум-критерий)**.** *$f_n \rightrightarrows f$ на E тогда и только тогда, когда $\lim_{n\to+\infty} \rho_n = 0$, где $\rho_n = \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|$.*

Доказательство.

$$(\forall x \in E \ \ (|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon)) \Leftrightarrow \left(\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \right) .$$

□

Задача. *Пусть $f_n \rightrightarrows f$ на E. Покажите, что $\forall \{x_n\} \subset E \ \lim_{n\to+\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = 0$.*

Рассмотрим функциональный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$, где $f_n : E \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$)

Определение 3.3. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ *поточечно сходится* на E, если числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ сходится для любого $x \in E$. В этом случае $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$, $x \in E$, называется *суммой* ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ *равномерно сходится* на E, если последовательность частичных сумм $S_N = \sum_{n=1}^{N} f_n$ равномерно сходится на E.

Свойство 3.1 (линейность)**.** 1. *Пусть $f_n \rightrightarrows f$ на E, $g_n \rightrightarrows g$ на E и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$). Тогда $\alpha f_n + \beta g_n \rightrightarrows \alpha f + \beta g$ на E.*

2. *Пусть $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ равномерно сходятся на E. Тогда $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha f_n + \beta g_n$ также равномерно сходится на E и $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha f_n + \beta g_n = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} f_n + \beta \sum_{n=1}^{+\infty} g_n$.*

Доказательство. Пусть $x \in E$. По неравенству треугольника

$$|(\alpha f_n(x) + \beta g_n(x)) - (\alpha f(x) + \beta g(x))| \leqslant |\alpha| \cdot |f_n(x) - f(x)| + |\beta| \cdot |g_n(x) - g(x)|.$$

Далее по лемме (3.1).

Второй пункт вытекает из первого применением его к последовательности частичных сумм ряда. □

Следствие. Если $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ равномерно сходится на E, то $f_n \rightrightarrows 0$ на E.

Доказательство. $f_n = S_n - S_{n-1} \rightrightarrows S - S = 0$. □

Свойство 3.2. *Пусть $g : E \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) ограничена.*

1. *Если $f_n \rightrightarrows f$ на E, то $g f_n \rightrightarrows g f$ на E.*

2. *Если* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ *равномерно сходится на* E, *то* $\sum_{n=1}^{+\infty} gf_n$ *также равномерно сходится на* E *и*
$$\sum_{n=1}^{+\infty} gf_n = g\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$$

Доказательство.

1. Пусть $|g(x)| \leqslant M$ для всех $x \in E$. Тогда
$$\sup_{x\in E} |g(x)f_n(x) - g(x)f(x)| \leqslant M \underbrace{\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|}_{\to 0}.$$
Значит, по супремум-критерию (3.1) $gf_n \rightrightarrows gf$ на E.

2. Вытекает из пункта 1 применением его к последовательности частичных сумм.

□

Теорема 3.1 (критерий Коши равномерной сходимости)**.** *Для равномерной сходимости* $\{f_n\}$ *на* E *необходимо и достаточно выполнения условия Коши:*
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geqslant N\ \forall x \in E\, (|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon).$$

Доказательство.
($\Rightarrow$) Пусть $\varepsilon > 0$. Из условия равномерной сходимости:
$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N\ \forall x \in E \left(|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\right).$$
Тогда для всех $n, m \geqslant N$ и $x \in E$ имеем:
$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

($\Leftarrow$) Пусть $\{f_n\}$ удовлетворяет (3.1). Тогда для каждого $x \in E$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ фундаментальна и, значит, сходится. Положим $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in E$. Пусть $\varepsilon > 0$ и номер N из условия (3.1). Зафиксируем $n \geqslant N$ в неравенстве и перейдем к пределу при $m \to \infty$. Получим, что $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$ и $x \in E$. Так как $\varepsilon > 0$ – любое, то $f_n \rightrightarrows f$ на E. □

Следствие. Для равномерной сходимости $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ на E необходимо и достаточно выполнения условия Коши:
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geqslant N\ \forall x \in E \left(\left|\sum_{k=m}^{n} f_k(x)\right| < \varepsilon\right).$$

Следствие. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, f_n непрерывна на $\overline{E}$. Если $\{f_n\}$ равномерно сходится на E, то она равномерно сходится на $\overline{E}$.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По критерию Коши:

$$\exists N\ \forall n, m \geqslant N\ \forall x \in E\left(|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\right).$$

Пусть $x_0 \in \overline{E}$. Тогда $\exists\{x_n\} \subset E(x_k \to x_0)$. Пользуясь $|f_n(x_k) - f_m(x_k)| < \varepsilon$ и непрерывностью f_n, f_m, при $k \to \infty$ получим:

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, $\{f_n\}$ удовлетворяет условию (3.1) на $\overline{E}$. По критерию Коши $\{f_n\}$ равномерно сходится на $\overline{E}$. □

Равномерная сходимость позволяет "перебрасывать" некоторые свойства приближающих функций на приближаемую (предельную). Приведем соответствующие теоремы для непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости.

Теорема 3.2 (о непрерывности предельной функции)**.** *Пусть $E \subset \mathbb{R}$ и $f_n \rightrightarrows f$ на E. Если все f_n непрерывны в точке $a \in E$ (на E), то функция f также непрерывна в точке a (на E).*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Из условия равномерной сходимости:

$$\exists N\, \forall n \geqslant N\, \forall x \in E\ \left(|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Тогда для $x \in E$:

$$|f(x) - f(a)| \leqslant |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| < |f_N(x) - f_N(a)| + \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Так как f_N непрерывна в точке a, то

$$\exists \delta > 0\, \forall x \in B_\delta(a) \cap E\ \left(|f_N(x) - f_N(a)| < \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Следовательно, $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ для всех $x \in B_\delta(a) \cap E$. □

Следствие (о непрерывности суммы ряда)**.** Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ равномерно сходится на $E \subset \mathbb{R}$ и все f_n непрерывны в точке $a \in E$. Тогда сумма ряда непрерывна в точке a (на E).

Замечание. Если a – предельная точка на E, то в условиях теоремы (3.2)

$$\lim_{x \to a} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to a} f_n(x).$$

Теорема 3.3 (об интегрируемости предельной функции)**.** *Пусть $f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$ и $f_n \in \mathcal{R}[a, b]\ \forall n$. Тогда $f \in \mathcal{R}[a, b]$ и $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.*

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Из условия равномерной сходимости:

$$\exists N\ \forall n \geqslant N\ \forall x \in [a, b]\left(|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}\right).$$

Тогда на $[a, b]$:

$$f_N(x) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} < f(x) < f_N(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

Поскольку f_N интегрируема, то она ограничена на $[a,b]$, значит на $[a,b]$ ограничена f.

Пусть T – произвольное разбиение $[a,b]$. Тогда для верхних сумм Дарбу имеем:

$$S_T(f) = S_T(f - f_N + f_N) \leqslant S_T(f - f_N) + S_T(f_N) \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + S_T(f_N).$$

(так как $\sup_I (g(x) + h(x)) \leqslant \sup_I g(x) + \sup_I h(x)$ при $I \subset [a,b]$)
Аналогично для нижних сумм Дарбу $s_T(f) \geqslant s_T(f_N) - \frac{\varepsilon}{4}$. Так как $f_N \in \mathcal{R}[a,b]$, то существует T – разбиение $\left(S_T(f_N) - s_T(f_N) < \frac{\varepsilon}{2}\right)$, для такого T имеем

$$S_T(f) - s_T(f) \leqslant S_T(f_N) - s_T(f_N) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

По критерию Дарбу $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Для $n \geqslant N$ имеем

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leqslant (b-a)\cdot\frac{\varepsilon}{(b-a)} < \varepsilon.$$

Следовательно, $\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$. □

Следствие (о почленном интегрировании ряда)**.** Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ равномерно сходится на $[a,b]$, и все функции $f_n \in \mathcal{R}[a,b]$, то сумма ряда интегрируема на $[a,b]$ и

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b f_n(x)dx\right).$$

Замечание. В условиях теоремы (3.3)

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

Задача. *Верно ли, что утверждение теоремы (3.3) верно для несобственных интегралов?*

Теорема 3.4 (о дифференцировании предельной функции)**.** *Если*

1. $\exists x_0 \in [a,b] \hookrightarrow \{f_n(x_0)\}$ *– сходится.*
2. $\forall n \in \mathbb{N}$ *функция* $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ *дифференцируема;*
3. $f_n' \rightrightarrows g$ *на* $[a,b]$.

Тогда $f_n \rightrightarrows f$ *на* $[a,b]$ *и* f *дифференцируема на* $[a,b]$*, причем* $f' = g$ *на* $[a,b]$.

Доказательство. Докажем, что $\{f_n\}$ равномерно сходится на $[a,b]$. Применяя к разности $f_n - f_m$ теорему Лагранжа о среднем, получим $(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(x_0) - f_m(x_0)) = (f_n'(c) - f_m'(c))(x - x_0)$ для некоторой точки c между x и x_0. Тогда имеет место оценка

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + |f_n'(c) - f_m'(c)|\cdot(b-a).$$

Так как последовательность $\{f_n'\}$ удовлетворяет условию Коши равномерной сходимости на $[a,b]$, ф $\{f_n(x_0)\}$ фундаментальна, то и последовательность f_n удовлетворяет условию Коши равномерной сходимости на $[a,b]$. По теореме (3.1) $\{f_n\}$ равномерно сходится на $[a,b]$ к некоторой функции f.

Докажем дифференцируемость функции f. Зафиксируем x. Рассмотрим последовательность
$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \frac{f_n(t)-f_n(x)}{t-x},\ t \neq x; \\ f_n'(x),\ t = x. \end{cases}$$
Тогда $\varphi_n \to \varphi$ на $[a, b]$, где
$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{f(t)-f(x)}{t-x},\ t \neq x; \\ g(x),\ t = x. \end{cases}$$
Покажем, что сходимость равномерная. При $t \neq x$ по теореме Лагранжа:
$$\varphi_n(t) - \varphi_m(t) = \frac{(f_n(t) - f_m(t)) - (f_n(x) - f_m(x))}{t - x} = f_n'(\xi) - f_m'(\xi)$$
для некоторой точки ξ, лежащей между t и x. Поскольку $\{f_n'\}$ равномерно сходится на $[a, b]$, то $\{f_n'\}$ удовлетворяет условию Коши равномерной сходимости, и, значит, $\{\varphi_n\}$ удовлетворяет условию Коши. Следовательно, $\{\varphi_n\}$ равномерно сходится на $[a, b]$. Поскольку f_n дифференцируема в точке x, то φ_n непрерывна в точке x. По теореме (3.2) φ непрерывна в точке x. Тогда $\lim_{t\to x} \varphi(t) = \varphi(x)$, то есть $\exists f'(x) = g(x)$. □

Замечание. В условиях теоремы (3.4) имеем следующее:
$$\forall x \in [a, b] \hookrightarrow \frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} f_n(x).$$

Следствие (о почленном дифференцировании ряда)**.** Пусть

1. $\exists x_0 \in [a, b] \hookrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ сходится на $[a, b]$;
2. $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ дифференцируема $\forall n$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ равномерно сходится на $[a, b]$.

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится равномерно на $[a, b]$, его сумма дифференцируема и для каждой точки $x \in [a, b]$ выполнено
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Замечание. В теореме (3.4) условие равномерной сходимости производных нельзя заменить на равномерную сходимость самих функций.

Пример. $f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$. Имеем:
$$f_n \rightrightarrows f(x) = |x| \text{ на } [-1, 1], \text{ т.к.}$$
$$|f_n(x) - f(x)| \ \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}.$$
Все f_n дифференцируемы на $[-1, 1]$, однако f не дифференцируема в точке 0.

3.2 Признаки равномерной сходимости функциональных рядов

Теорема 3.5 (признак Вейерштрасса). *Пусть* $f_n : E \to \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{R}$ $\forall n$. *Пусть*

1. $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in E\ (|f_n(x)| \leqslant a_n)$;

2. *числовой ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*

Тогда функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *сходится равномерно и абсолютно на* E.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Пользуясь критерием Коши как необходимым условием, найдем N, что $\sum_{k=m}^{n} a_k < \varepsilon$ при всех $n \geqslant m \geqslant N$. Тогда для таких n, m и всех $x \in E$ справедлива оценка:

$$\left|\sum_{k=m}^{n} f_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=m}^{n} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=m}^{n} a_k < \varepsilon.$$

Пользуясь теперь критерием Коши как достаточным условием, получаем, что $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ равномерно сходятся на E. □

Замечание. В условиях теоремы (3.5) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *мажорантным* для $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$.

Получим более тонкие признаки сходимости функциональных рядов – признаки Дирихле и Абеля.

Напоминание. Напомним *преобразование Абеля.* Пусть $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ – числовые последовательности, $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда $a_k = A_k - A_{k-1}$ $(A_0 = 0)$, и, значит,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}).$$

Напоминание (лемма Абеля). Пусть $\{a_n\}$ – (комплексная) последовательность, $\{b_n\}$ — монотонная последовательность, $k = m, \ldots, n$. Пусть $\forall k$ $|A_k| \leqslant M$, где $A_k = \sum_{j=m}^{k} a_j$. Тогда:

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k\right| \leqslant 2M(|b_m| + |b_n|).$$

Доказательство. Полагая $a_k = 0$ при $k < m$, получим:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=m}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}).$$

Следовательно,

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k\right| \leqslant M\left(|b_n| + |b_m| + \left|\sum_{k=m}^{n-1}(b_{k+1} - b_k)\right|\right) = M\left(|b_n| + |b_m| + |b_n - b_m|\right) \leqslant 2M(|b_m| + |b_n|).$$

□

Определение 3.4. Последовательность g_n называется *равномерно ограниченной* на E, если найдется такое $C > 0$, что $|g_n(x)| \leqslant C$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $x \in E$.

Теорема 3.6 (признак Дирихле)**.** *Пусть* $a_n : E \to \mathbb{R}$ *(или* $\mathbb{C}$*),* $b_n : E \to \mathbb{R}$ $\forall n$ *такие, что:*

1. $A_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ *равномерно ограничена на* E*;*
2. $\{b_n(x)\}$ *монотонна при каждом* $x \in E$*;*
3. $b_n \rightrightarrows 0$ *на* E.

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *равномерно сходится на* E.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Отметим, что при $n \geqslant m$

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k(x)\right| = |A_n(x) - A_{m-1}(x)| \leqslant 2C$$

для всех $x \in E$.

Из равномерной сходимости $\{b_n\}$ следует, что

$$\exists N \, \forall n \geqslant N \, \forall x \in E \, \left(|b_n(x)| < \frac{\varepsilon}{8C}\right).$$

Тогда при $n \geqslant m \geqslant N$ и $x \in E$ по лемме Абеля

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k(x) b_k(x)\right| \leqslant 2 \cdot 2C \left(|b_m(x)| + |b_n(x)|\right) < \varepsilon.$$

По критерию Коши $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится равномерно на E. □

Следствие (признак Лейбница)**.** Пусть задан $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \alpha_n(x)$ на E.

Если $\{\alpha_n(x)\}$ монотонна при каждом $x \in E$ и $\alpha_n \rightrightarrows 0$ на E, то $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \alpha_n$ равномерно сходится на E.

Следствие. Пусть I – отрезок, не содержащий точки вида $2\pi m, \ m \in \mathbb{Z}$.

Если $\{\alpha_n(x)\}$ монотонна при каждом $x \in I$ и $\alpha_n \rightrightarrows 0$ на I, то $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x) \cos(nx)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x) \sin(nx)$ равномерно сходятся на I.

Доказательство. Известно, что $\forall N$:

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \sin(nx)\right| \leqslant \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}.$$

Так как $\int_{x \in I} |\sin(\frac{x}{2})| > 0$, то $\{\sum_{n=1}^{N} \sin(nx)\}$ равномерно ограничена на I. Следовательно, по признаку Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x) \sin(nx)$ равномерно сходится.

Аналогично, для $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x) \cos(nx)$. □

Пример. Исследовать сходимость и равномерную сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$ на $E_1 = (0, 2\pi)$, $E_2 = [\delta, 2\pi - \delta]$, $\delta \in (0, \pi)$ при всех $\alpha \in \mathbb{R}$.

Решение. $\left|\sum_{n=1}^{N} \sin(nx)\right| \leqslant \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}$ $\forall N$ $\forall x \in E_1$.

$$\frac{1}{n^\alpha} \to \begin{cases} 0, \ \alpha > 0 \\ 1, \ \alpha = 0 \\ +\infty, \ \alpha < 0. \end{cases}$$

Исследуем сходимость.

1. $\alpha > 0$: Ряд сходится по признаку Дирихле для числовых рядов на E_1.

2. $\alpha \leqslant 0$: Покажем, что $\{\sin(nx)\}$ – бесконечно малая.

$$\sin((n+1)x) = \sin(nx)\cos(x) + \cos(nx)\sin(c) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \{cos(nx)\}$ – бесконечно малая, противоречие с основным тригонометрическим тождеством.

Кроме того, $n^{-\alpha}\sin(nx) \not\to 0$. Следовательно, ряд расходится (по необходимому условию сходимости).

Исследуем равномерную сходимость.

1. $\alpha > 1$: $\frac{|\sin(nx)|}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$, следовательно ряд сходится на E_1 (по признаку Вейерштрасса).

2. $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$:

а) $E_2 = [\delta, 2\pi - \delta]$ $\left|\sum_{n=1}^N \sin(nx)\right| \leqslant \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}$. Следовательно, ряд сходится равномерно на E_2 (по признаку Дирихле или сл. 2);

б) $E_1 = (0, 2\pi)$. Покажем, что ряд удовлетворяет определению условия равномерной сходимости

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall N \ \exists n \geqslant N \ \exists p \in \mathbb{N} \ \exists x_N \in E_1$$
$$\left(\left|\sum_{k=N+1}^{2N} \frac{\sin(kx_N)}{k^\alpha}\right| \geqslant \varepsilon_0\right),$$

$n = N$, $p = N$, $x_N = \frac{\pi}{4N} \in E_1 \Rightarrow \frac{\pi}{4} < kx_N \leqslant \frac{\pi}{2}$, $k = N+1, \ldots, 2N:$

$$\left|\sum_{k=N+1}^{2N} \frac{\sin(kx_N)}{k^\alpha}\right| = \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{\sin(kx_N)}{k^\alpha} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \varepsilon_0.$$

По критерию Коши ряд не сходится равномерно на E_1.

Задача. *Исследовать равномерную сходимость* $\sum_{n=1}^\infty \frac{e^{|x-n|}}{n}$ *на* $E = \mathbb{R}$.

Теорема 3.7 (признак Абеля). *Пусть* $a_n : E \to \mathbb{R}$ *(или* $\mathbb{C}$*),* $b_n : E \to \mathbb{R}$*, такие, что*

1. $\sum_{n=1}^\infty a_n$ *равномерно сходится на* E*;*

2. $\{b_n(x)\}$ *монотонна при любом* $x \in E$*;*

3. $\{b_n\}$ *равномерно ограничена на* E $(\exists C > 0 \, \forall n \, \forall x \in E \ (|b_n(x)| \leqslant C))$.

Тогда $\sum_{n=1}^\infty a_n b_n$ *равномерно сходится на* E.

Доказательство. Из равномерной сходимости ряда

$$\exists N \, \forall n, m \, (n \geqslant m \geqslant N) \, \forall x \in E \, \left(\left| \sum_{k=m}^{n} a_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{4C} \right).$$

Тогда при всех $x \in E$ и $n \geqslant m \geqslant N$ по лемме Абеля

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k(x) b_k(x) \right| \leqslant 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4C} \left(|b_m(x)| + |b_n(x)| \right) \leqslant 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4C} (C + C) = \varepsilon.$$

Доказательство завершается ссылкой на критерий Коши (3.1). $\square$

Замечание. Характер монотонности $\{b_n(x)\}$ в теоремах (3.6) и (3.7) может быть различным в разных точках x.

Теорема 3.8 (признак Дини)**.** *Пусть $f_n \to f$ на $[a, b]$, f и все функции f_n непрерывны на $[a, b]$ и $\{|f_n(x) - f(x)|\}$ нестрого убывает для всякого $x \in [a, b]$.*

Тогда $f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$.

Доказательство. Достаточно доказать, что $g_n := |f_n - f| \rightrightarrows 0$ на $[a, b]$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда для всякого $x_0 \in [a, b]$ найдётся $N = N(x_0)$, такая, что $0 \leqslant g_N(x_0) < \varepsilon$. Так как g_N непрерывна, то $\exists \delta = \delta(x_0) \, \forall x \in B_\delta(x_0) \cap [a, b] \; (0 \leqslant g_N(x) < \varepsilon)$.

В силу монотонности $0 \leqslant g_n(x) < \varepsilon$ для всех $x \in B_\delta(x_0) \cap [a, b]$ и $n \geqslant N$.

Семейство $\{B_{\delta(x)}(x)\}_{x \in [a,b]}$ образует открытое покрытие $[a, b]$. По теореме Гейне-Бореля $\exists x_1, \ldots, x_m \in [a, b] \; ([a, b] \subset B_{\delta(x_1)} \cup \ldots \cup B_{\delta(x_m)})$.

Положим $N^* = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} N(x_i)$. Тогда $a \leqslant g_n(x) < \varepsilon$ для всех $x \in [a, b]$ и $n \geqslant N^*$, что завершает доказательство. $\square$

Следствие. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ поточечно сходится к S на $[a, b]$, функция S и все f_n непрерывны на $[a, b]$ и пусть $f_n \geqslant 0$ на $[a, b]$.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ равномерно сходится на $[a, b]$.

Равномерная сходимость может использоваться для построения функций с нужными свойствами:

Пример (ван-дер-Варден)**.** Существует $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, непрерывная на $\mathbb{R}$, но не дифференцируемая ни в одной точке.

Доказательство. Пусть $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \varphi(x \pm 2) = \varphi(x), \varphi|_{[-1,1]}(x) = |x|$. Отметим, что если $(x, y) \cap \mathbb{Z} = \varnothing$, то φ кусочно-линейная с угловым коэффициентом ± 1, поэтому

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |x - y|.$$

Положим $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), f_n(x) = \frac{1}{4^n} \varphi(4^n x)$. Функция f непрерывна как сумма равномерно сходящегося ряда (по признаку Вейерштрасса) из непрерывных функций.

Пусть $a \in \mathbb{R}$. Покажем $\{h_k\}, 0 < h_k \to 0$, что $\frac{f(a+h_k) - f(a)}{h_k}$ не имеет конечного предела. Если $\left(4^k a, 4^k a + \frac{1}{2}\right) \cap \mathbb{Z} \neq \varnothing \Rightarrow \left(4^k a - \frac{1}{2}, 4^k a\right) \cap \mathbb{Z} \neq \varnothing$ и наоборот. Поэтому $\exists h_k = \pm \frac{1}{2} 4^{-k}$, что на интервале с концами $4^k a$ и $4^k (a + h_k)$ нет целых чисел. Кроме того, на интервале с концами $4^n a$ и $4^n (a + h_k)$ при $n > k$, также нет целых точек (иначе, домножив соответствующее неравенство на 4^{k-n}, получаем целую точку между $4^k a$ и $4^k (a + h_k)$).

Следовательно, по (3.2) $|\varphi(4^n(a+h_k)) - \varphi(4^n a)| = 4^n|h_k|, 1 \leqslant n \leqslant k$, и, в силу 2-периодичности φ $|\varphi(4^n(a+h_k)) - \varphi(4^n a)| = 0$ при $n > k$.

Поэтому $|f_n(a+h_k) - f_n(a)| = \begin{cases} |h_k|, & 1 \leqslant n \leqslant k \\ 0, & n > k \end{cases}$, и, значит, разностное отношение

$$\frac{f(a+h_k) - f(a)}{h_k} = \sum_{n=1}^{k} \pm 1 \text{ (чётность совпадает с чётностью } k)$$

Следовательно, разностное отношение не имеет конечного предела при $k \to \infty$. □

4 Степенные ряды

4.1 Свойства степенных рядов

Определение 4.1. *Степенным рядом* называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

где $a_n, x_0 \in \mathbb{R}$ и x — действительная переменная, или $a_n, x_0 \in \mathbb{C}$ и x — комплексная переменная *(комплексный степенной ряд)*.

Теорема 4.1 (формула Коши-Адамара). *Пусть* $R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Тогда:

1. *при* $|x - x_0| < R$ *ряд (4.1) сходится, причём абсолютно;*

2. *при* $|x - x_0| > R$ *ряд (4.1) расходится;*

3. *если* $r \in (0, R)$, *то ряд (4.1) равномерно сходится на* $\overline{B_r}(x_0) = \{x | |x - x_0| \leqslant r\}$.

Доказательство. Пусть $x \neq x_0$, тогда

$$q := \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} = |x - x_0| \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x - x_0|}{R}.$$

Если $|x - x_0| < R$, то $q < 1$ и, значит, по признаку Коши $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x - x_0)^n|$ сходится, то есть, ряд (4.1) сходится абсолютно.

Если $|x - x_0| > R$, то $q > 1$ и, значит, по признаку Коши n-й член ряда не стремится к нулю, ряд (4.1) расходится и *абсолютно расходится* (то есть, расходится ряд из модулей членов).

Пусть $r \in (0, R)$. По доказанному ряд (4.1) абсолютно сходится в точке $x = x_0 + r$, то есть сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$. Если $|x - x_0| \leqslant r$, то $|a_n(x - x_0)^n| \leqslant |a_n| r^n$. Тогда по признаку Вейерштрасса ряд (4.1) равномерно сходится на $B_r(x_0)$. □

Определение 4.2. Величина R из теоремы (4.1) называется *радиусом сходимости* ряда (4.1).

$B_R(x_0) = \{x \mid |x - x_0| < R\}$ называется *интервалом сходимости* (*кругом сходимости* в комлексной плоскости).

Из теоремы (4.1) получаем:

Следствие. Пусть для $R \in [0, +\infty]$ выполнено следующее: при $|x - x_0| < R$ ряд абсолютно сходится и при $|x - x_0| > R$ ряд абсолютно расходится, то R — радиус сходимости.

Пример. Найти радиус сходимости $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} x^{2n}$.

Решение. Обозначим n-й член ряда как $u_n(x)$, тогда при $z \neq 0$ имеем

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}(x)^2 = (1 - \frac{1}{n})x^2 \to \frac{x^2}{e}.$$

Если $\frac{x^2}{e} < 1 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{e}$, то ряд сходится абсолютно по признаку Даламбера (2.5).
Если $\frac{x^2}{e} > 1 \Leftrightarrow |x| > \sqrt{e}$, то ряд абсолютно расходится по признаку Даламбера (2.5).
Значит, $R = \sqrt{e}$.

Упражнение. *Исследовать на сходимость при $x = \pm\sqrt{e}$.*

Теорема 4.2 (Абель). *Если степенной ряд (4.1) сходится в точке $x_1 \neq x_0$, то он сходится равномерно на отрезке с концами x_1, x_0.*

Доказательство. По условию ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ сходится. Рассмотрим последовательность $\{t^n\}$: она монотонна при любом $t \in [0, 1]$ и равномерно ограниченна. По признаку Абеля (3.7) ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n t^n$ равномерно сходится на $[0, 1]$. Сделав замену $t = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$, получим, что ряд (4.1) равномерно сходится на $\{x : x = x_0 + t(x_1 - x_0)\}$. □

Замечание. Если $x_1 \in B_R(x_0)$, то предыдущая теорема вытекает из теоремы Коши–Адамара (4.1), поэтому интерес представляет случай, когда x_1 лежит на границе круга сходимости.

Применяя следствие о непрерывности суммы ряда (3.1), получаем:

Следствие. Сумма степенного ряда является непрерывной функцией на множестве сходимости.

Задача. *Пусть $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ сходятся к A и B соответственно, а ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$, где $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, сходится к C.*
Покажите, что $A \cdot B = C$.

Лемма 4.1. *Если ряд (4.1) имеет радиус сходимости R, то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}$ также имеет радиус сходимости R.*

Доказательство. Так как $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, то последовательности $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ и $\{\sqrt[n]{n|a_n|}\}$ имеют одинаковое множество частичных пределов, значит $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ и $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n|a_n|}$ равны. Тогда по формуле Коши–Адамара ряды $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x - x_0)^n$ имеют одинаковые радиусы сходимости.

Ряды $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x - x_0)^n$ отличаются при $x \neq x_0$ ненулевым множителем (при $x = x_0$ оба сходятся). Следовательно, эти ряды сходятся одновременно. Тогда, радиусы сходимости этих рядов также совпадают. □

Теорема 4.3. *Если $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ – сумма степенного ряда с радиусом сходимости $R > 0$, то функция f бесконечно дифференцируема в $B_R(x_0)$, и для всякого $n \in \mathbb{N}$ выполнено:*

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{+\infty} n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)a_n(x-x_0)^{n-m}.$$

Доказательство. По лемме (4.1) при дифференцировании радиус сходимости ряда не меняется, поэтому нам достаточно доказать утверждение для $m = 1$, после чего применить индукцию. Без потери общности можно также считать, что $x_0 = 0$.

Пусть $t \in B_R(0)$. Покажем, что производная $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ в точке t равна $l = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1}$.

Зафиксируем такое r, что $|t| < r < R$. Для $x \neq t$ с $|x| < r$ составим разность

$$\frac{f(x)-f(t)}{x-t} - l = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(\frac{x^n - t^n}{x-t} - nt^{n-1}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(x^{n-1} + tx^{n-2} + \ldots + t^{n-1} - nt^{n-1}\right).$$

Выражение в скобках перепишем в следующем виде:

$$(x^{n-1}-t^{n-1}) + t(x^{n-2}-t^{n-2}) + \ldots + t^{n-2}(x-t) =$$
$$= (x-t)\left[(x^{n-2}+tx^{n-3}+\ldots+t^{n-2}) + t(x^{n-3}+tx^{n-4}+\ldots+t^{n-3}) + \ldots + t^{n-2}\right]$$

(в квадратных скобках в первой сумме $(n-2)$ слагаемых, во второй – $(n-2)$ слагаемых, и т.д.).

Поскольку $(n-1)+(n-2)+\ldots+1 = \frac{n(n-1)}{2}$, справедлива оценка

$$|a_n||x^{n-1} + tx^{n-2} + \ldots + t^{n-1} - nt^{n-1}| \leqslant |x-t||a_n| \cdot \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2}.$$

Ряд $\sum_{n=2}^{+\infty} |a_n| \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2}$ сходится, т.к. $r < R$, и в круге сходимости дважды продифференцированный ряд сходится абсолютно. Следовательно,

$$\left|\frac{f(x)-f(t)}{x-t} - l\right| \leqslant |x-t| \sum_{n=2}^{+\infty} |a_n| \cdot \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2} \to 0,\ x \to t.$$

Значит, существует $\lim_{x\to t} \frac{f(x)-f(t)}{x-t} = l$. □

Следствие (теорема о единственности)**.** Если степенные ряды $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ и $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(x-x_0)^n$ сходятся в круге $B_\delta(x_0)$, и их суммы там совпадают, то $a_n = b_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Следствие. Сумма степенного ряда с радиусом сходимости $R > 0$ имеет первообразную $F(x) = C + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$ при $|x-x_0| < R$.

4.2 Ряды Тейлора

Определение 4.3. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 и в точке x_0 имеет производные любого порядка. Тогда $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ называется *рядом Тейлора* функции f с центром в точке x_0. Для $x_0 = 0$ ряд называют *рядом Маклорена.*

Покажем, что ряд Тейлора может сходиться к сумме, отличной от $f(x_0)$.

Пример. Рассмотрим $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0. \end{cases}$$

Существование производных любого порядка в точке $x \neq 0$ следует из теоремы о дифференцировании композиции. Более того, $f^{(n)}(x) = 0$ при $x < 0$ и $f^{(n)}(x) = p_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}$, где $p_n(t)$ – многочлен степени $2n$. последнее утверждение можно установить по индукции: $p_0(t) = 1$ и дифференцирование $f^{(n)}$ дает соотношение $p_{n+1}(t) = t^2[p_n(t) - p_n'(t)]$.

Индукцией по n покажем, что $f^{(n)}(0) = 0$. Для $n = 0$ это верно по условию. Если предположить, что $f^{(n)}(0) = 0$, то $(f^{(n)})'_-(0) = 0$ и

$$(f^{(n)})'_+(0) = \lim_{h \to +0} \frac{f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{p_n(\frac{1}{h})e^{-\frac{1}{h}}}{h} = \lim_{t \to +\infty} \frac{tp_n(t)}{e^t} = 0,$$

поскольку по правилу Лопиталя $\lim_{t \to +\infty} \frac{t^m}{e^t} = 0$ для всех $m \in \mathbb{N}_0$. Это доказывает, что $f^{(n+1)}(0) = 0$.

Таким образом, ряд Маклорена функции f нулевой, но он не сходится к f ни в какой окрестности нуля.

Задача. *Покажите, что сумма $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n^2 x)}{2^n}$ бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$, однако её ряд Маклорена имеет нулевой ряд сходимости.*

Приведем достаточное условие представимости функции степенным рядом.

Лемма 4.2. *Если на $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ функция f имеет производные всех порядков и*

$$\exists C > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}_0 \ \forall x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \left(\left| f^{(n)}(x) \right| \leqslant \frac{Cn!}{\rho^n} \right),$$

то

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

для всех $x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$.

Доказательство. Так как $\sqrt[n]{\frac{f^{(n)}(x)}{n!}} \leqslant \frac{C^{\frac{1}{n}}}{\rho} \to \frac{1}{\rho}$, то по формуле Коши-Адамара (4.1) для $x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ найдется c между x_0 и x, что

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right|.$$

Поскольку $|f^{(n+1)}(c)| \leqslant C$, то справедлива оценка:

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)} \right| \leqslant C \left| \frac{x - x_0}{\rho} \right|^{n+1} \to 0,$$

что завершает доказательство. □

Следствие. Если на $x \in (x_0-\rho, x_0+\rho)$ функция f имеет производные всех порядков и

$$\exists M > 0\ \forall n \in \mathbb{N}_0\ \forall x \in (x_0-\rho, x_0+\rho)\ \left(|f^{(n)}(x)| \leqslant M\right),$$

то f на $(x_0-\rho, x_0+\rho)$ разлагается в ряд по степеням $(x-x_0)$.

Доказательство. $\{\frac{n!}{\rho^n}\}$ – бесконечно большая, значит условия леммы выполнены. □

Следствие. Ряды Маклорена функций $\exp, \sin, \cos$ сходятся на $\mathbb{R}$ к самим функциям, то есть $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!},$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

Доказательство. Все указанные функции бесконечно дифференцируемы на $\mathbb{R}$, причем $(e^x)^{(n)} = e^x$, $\sin^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{\pi n}{2})$, $\cos^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{\pi n}{2})$.

Пусть $\delta > 0$ и $|x| < \delta$. Тогда $(e^x)^{(n)} \leqslant e^\delta$, $|\sin^{(n)}(x)| \leqslant 1$, $|\cos^{(n)}(x)| \leqslant 1$.

Следовательно, по следствию 1 ряды Маклорена этих функций сходятся к самим функциям на $(-\delta, \delta)$. Так как $\delta > 0$ – любое, то предположение верно и на $\mathbb{R}$. □

Теорема 4.4 (биномиальный ряд). *Если $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ и $C_\alpha^n = \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}$, $C_\alpha^0 = 1$, то*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} C_\alpha^n x^n,\ \ |x| < 1.$$

Доказательство. Пусть $f(x) = (1+x)^\alpha$. Тогда $f^{(n)}(x) = \alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)\cdot(1+x)^{\alpha-1}$ и, значит, $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = C_\alpha^n$. При $x \neq 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|C_\alpha^{n+1}x^{n+1}|}{|C_\alpha^n x^n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|\alpha-n||x|}{n+1} = |x|.$$

Если $|x| < 1$, то ряд абсолютно сходится по признаку Даламбера. Если $|x| > 1$, то ряд абсолютно расходится по признаку Даламбера. Следовательно, $R_{\text{сх}} = 1$.

Обозначим $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_\alpha^n x^n$, и покажем, что $g \equiv f$ на $(-1,1)$, т.е. $(1+x)^{-\alpha}g(x) = 1$ при $x \in (-1,1)$. Для этого найдем производную функции $(1+x)^{-\alpha}g(x)$. По теореме (4.3) имеем

$$((1+x)^{-\alpha}g(x))' = (1+x)^{-\alpha}\sum_{n=1}^{+\infty} nC_\alpha^n x^{n-1} - \alpha(1+x)^{-\alpha-1}\sum_{n=0}^{+\infty} C_\alpha^n x^n =$$

$$= (1+x)^{-\alpha-1}\left[\sum_{n=1}^{+\infty} nC_\alpha^n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} nC_\alpha^n x^n - \alpha\sum_{n=0}^{+\infty} C_\alpha^n x^n\right].$$

В первой сумме произведем замену индекса суммирования. После приведения подобных слагаемых получим

$$((1+x)^{-\alpha}g(x))' = (1+x)^{-\alpha-1}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)C_\alpha^{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha-n)C_\alpha^n x^n\right] = 0.$$

Отсюда следует, что $(1+x)^{-\alpha}g(x)$ постоянна на $(-1,1)$. Из условия $g(0)=1$ получаем, что $(1+x)^{-\alpha}g(x)=1$ для всех $x \in (-1,1)$. $\square$

Замечание. При $\alpha > 0$ биномиальный ряд сходится к $(1+x)^\alpha$ равномерно на $[-1,1]$. Действительно, при $n > \alpha$

$$\frac{|C_\alpha^{n+1}|}{|C_\alpha^n|} = \frac{n-\alpha}{n+1} = 1 - \frac{\alpha+1}{n} + O(\frac{1}{n^2}).$$

По признаку Гаусса ряд $\sum |C_\alpha^n|$ сходится. Следовательно, по признаку Вуейерштрасса ряд $\sum C_\alpha^n x^n$ сходится равномерно на $[-1,1]$.

Пример. Так как $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}$ при $|x|<1$, то по (4.1)

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n},\ |x|<1.$$

Ряд в правой части сходится при $x=1$, поэтому его сумма непрерывна на $(-1,1]$ и, значит, равенство имеет место при $x=1$. Получаем известный нам результат, что $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

Задача. *Разложите функцию* arctg *в ряд по степеням* x. *С помощью полученного разложения найдите сумму ряда* $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

5 Метрические пространства

Определение 5.1. Пусть $X \neq \varnothing$. Функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ называется *метрикой* на X, если для любых $x, y, z \in X$ выполнено:

1. $\rho(x,y) \geqslant 0,\ \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$;
3. $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y)$ (*неравенство треугольника*).

Пара (X,ρ) называется *метрическим пространством.*

В дальнейшем часто под метрическим пространтвом будем понимать само множество X, предполагая наличие связанной с ним метрики.

Пример. Пусть $X \neq \varnothing$, $\rho(x,y)=1$ при $x \neq y$, $\rho(x,y)=0$ при $x=y$. Тогда ρ – метрика на X, называемая *дискретной.* Неравенство $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z)+\rho(z,y)$ выполняется, т.к. левая часть не больше 1. Если левая часть равна 1, то $x \neq z$ или $y \neq z$, откуда следует, что правая часть не меньше 1.

Важные примеры метрических пространств возникают из других конструкций.

Определение 5.2. Пусть V – линейное пространство. Функция $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ называется *нормой*, если для любых $x, y \in V$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ выполнено:

1. $\|x\| \geqslant 0,\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|;$
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (*неравенство треугольника*).

Пара $(V, \|\cdot\|)$ называется *нормированным пространством.*

Лемма 5.1. *Всякое нормированное пространство является метрическим с* $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Доказательство. Проверка свойств метрики тривиальна. Например, для установления неравенства треугольника достаточно применить свойство 3 нормы для векторов $x - y$ и $y - z$. □

Пример. $X = \mathbb{R}^n,\ x = (x_1, \dots, x_n)^T,\ y = (y_1, \dots, y_n)^T$.

1. $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$, $\rho_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$.
2. $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$, $\rho_p(x, y) = (\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$, $p \geqslant 1$.
3. $\|x\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$, $\rho_\infty(x, y) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i - y_i|$.

Доказательство. Покажем, что $\|\cdot\|_p$ — норма на $\mathbb{R}^n$.

Проверим сначала, что если $\|x\|_p \leqslant 1, \|y\|_p \leqslant 1, \alpha+\beta = 1, \alpha \geqslant 0, \beta \geqslant 0$, то $\|\alpha x+\beta y\|_p \leqslant 1$.

Функция $\varphi(s) = s^p$ — выпуклая на $[0, +\infty)$, следовательно $|\alpha x_i + \beta y_i|^p \leqslant \alpha|x_i|^p + \beta|x_i|^p$.

Просуммируем по $i = 1, \dots, n$. $\|\alpha x + \beta y\|_p^p \leqslant \alpha\|x\|_p^p + \beta\|y\|_p^p \leqslant \alpha + \beta = 1$.

Пусть x, y произвольны. Если $x = 0$ или $y = 0$, то неравенство выполняется. Будем предполагать, что $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Покажем, что $\|x + y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$ (индекс p будем опускать)

Введём обозначения $\alpha = \frac{\|x\|}{\|x\|+\|y\|}, \beta = \frac{\|y\|}{\|x\|+\|y\|}, \hat{x} = \frac{x}{\|x\|}, \hat{y} = \frac{y}{\|y\|}$. Тогда, учитывая, что $\|\alpha\hat{x} + \beta\hat{y}\| \leqslant 1$, имеем

$$\|x + y\| = (\|x\| + \|y\|) \left\| \frac{x}{\|x\| + \|y\|} + \frac{y}{\|x\| + \|y\|} \right\| = (\|x\| + \|y\|) \|\alpha\hat{x} + \beta\hat{y}\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

Проверка, что $\|\cdot\|_\infty$ является нормой, легко следует из свойств модуля числа. □

Определение 5.3. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $x \in X$.

Множество $B_r(x) = \{y \in X \mid \rho(y, x) < r\}, r > 0$ называется *открытым шаром* с центром в точке x и радиуса r.

Множество $\overline{B}_r(x) = \{y \in X \mid \rho(y, x) \leqslant r\}$ называется *замкнутым шаром* с центром в точке x и радиуса r.

Определение 5.4. Пусть $E \subset X$. Множество E называется *ограниченным*, если

$$\exists a \in X\, \exists r > 0\ (E \subset B_r(a)).$$

Определение 5.5. Пусть $\{x_n\} : n \mapsto x_n \in X$.

Последовательность $\{x_n\}$ *сходится* к a (в X), если $\rho(x_n, a) \to 0$ при $n \to \infty$.

Пишут $x_n \to a$ или $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Замечание.

$$x_n \to a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists N \, \forall n \geqslant N \; (x_n \in B_\varepsilon(a)).$$

Свойство 5.1. *Если $x_n \to a$, $x_n \to b$, то $a = b$.*

Доказательство. $0 \leqslant \rho(a, b) \leqslant \rho(a, x_n) + \rho(x_n, b) \to 0$. □

Свойство 5.2. *Если $x_n \to a$, то $\{x_n\}$ ограничена.*

Доказательство. $\rho(x_n, a) \to 0$, следовательно $\{\rho(x_n, a)\}$ ограничена. Тогда существует $R > \sup\{\rho(x_n, a)\}$, значит $x_n \in B_R(a)$. □

Свойство 5.3. *Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — последовательности в нормированном пространстве $(V, \|\cdot\|)$, $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{R}$. Тогда, если $x_n \to a$, $y_n \to b$ и $\alpha_n \to \alpha \in \mathbb{R}$, то $x_n + y_n \to a + b$, $\alpha_n x_n \to \alpha a$.*

Доказательство. Вытекает из неравенств

$$\|(x_n + y_n) - (a + b)\| \leqslant \|x_n - a\| + \|y_n - b\| \to 0.$$

$$\|\alpha_n x_n - \alpha a\| = \|\alpha_n x_n - \alpha x_n + \alpha x_n - \alpha a\| \leqslant \underbrace{|\alpha_n - \alpha|}_{\text{б.м.}} \underbrace{\|x_n\|}_{\text{огр.}} + \underbrace{|\alpha|}_{\text{огр.}} \underbrace{\|x_n - a\|}_{\text{б.м.}} \to 0.$$

□

5.1 Топология метрических пространств

Определение 5.6. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $E \subset X$ и $x \in X$.

1. Точка x называется *внутренней точкой* множества E, если $\exists \varepsilon > 0 \; (B_\varepsilon(x) \subset E)$.
2. Точка x называется *внешней точкой* множества E, если $\exists \varepsilon > 0 \; (B_\varepsilon(x) \subset X \setminus E)$.

   Обозначим $\operatorname{ext} E$ — множество внешних точек E. Очевидно, $\operatorname{ext} E = \operatorname{int}(X \setminus E)$.
3. Точка x называется *граничной точкой* множества E, если

$$\forall \varepsilon > 0 \begin{cases} B_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing \\ B_\varepsilon(x) \cap (X \setminus E) \neq \varnothing \end{cases}$$

   Обозначим ∂E — множество граничных точек E.

Замечание. $X = \operatorname{int} E \cup \operatorname{ext} E \cup \partial E$, причём $\operatorname{int} E, \operatorname{ext} E, \partial E$ попарно не пересекаются.

Определение 5.7. Множество $G \subset X$ называется *открытым*, если все точки G являются внутренними (то есть $G = \operatorname{int} G$).

Множество $F \subset X$ называется *замкнутым*, если $X \setminus F$ открыто.

Пример. 1. Открытый шар — открытое множество.

Доказательство. Пусть $x \in B_r(a)$. Положим $\varepsilon = r - \rho(x, a)$. Покажем, что $B_\varepsilon(x) \subset B_r(a)$.

Пусть $y \in B_\varepsilon(x)$. Тогда $\rho(y, a) \leqslant \rho(y, x) + \rho(x, a) < \varepsilon + \rho(x, a) = r$. □

2. Замкнутый шар — замкнутое множество.

Доказательство. Пусть $x \in X \setminus \overline{B}_r(a)$. Положим $\varepsilon = \rho(x, a) - r$. Аналогично устанавливается, что $B_\varepsilon(x) \subset X \setminus \overline{B}_r(a)$. Следовательно, $X \setminus \overline{B}_r(a)$ открыто. □

3. $\operatorname{int} E$ — открытое множество.

Доказательство. Из $x \in \operatorname{int} E$ следует, что $\exists \underbrace{B_\varepsilon(x)}_{\text{откр.}} \subset E$, следовательно, каждая точка $y \in B_\varepsilon(x)$ является внутренней для $B_\varepsilon(x)$, а, значит, и для E, то есть $\exists B_\delta(y) \subset E$. Следовательно, $B_\varepsilon(x) \subset \operatorname{int} E$. □

Аналогично случаю $X = \mathbb{R}$ доказывается следующая лемма.

Лемма 5.2. *Объединение произвольного семейства открытых множеств и пересечение* конечного *семейства открытых множеств являются открытыми множествами.*

Объединение конечного *семейства замкнутых множеств и пересечение произвольного семейства замкнутых множеств являются замкнутыми множествами.*

Проверять замкнутость множеств «по определению» не всегда удобно. Получим критерий замкнутости.

Определение 5.8. Точка x называется *предельной точкой* множества E, если $\forall \varepsilon > 0$ $(\mathring{B}_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing)$. Здесь и далее $\mathring{B}_\varepsilon(x) = B_\varepsilon(x) \setminus \{x\}$.

Определение 5.9. Точка x называется *изолированной точкой* множества E, если $x \in E$ и x не предельная.

Теорема 5.1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *E замкнуто;*
2. *E содержит все свои граничные точки;*
3. *E содержит все свои предельные точки;*

Доказательство.

(1 ⇒ 2) $x \in \underbrace{X \setminus E}_{\text{откр.}} \Rightarrow \exists B_\varepsilon(x) \subset X \setminus E \Rightarrow x \neq \partial E \Rightarrow \partial E \subset E$.

(2 ⇒ 3) Любая предельная точка является внутренней или граничной, значит E содержит все предельные точки.

(3 ⇒ 1) Пусть $x \in X \setminus E$. Точка x не является предельной для E, т.е. $\exists \varepsilon > 0$ $(\mathring{B}_\varepsilon(x) \cap E = \varnothing) \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset X \setminus E$. Значит, $X \setminus E$ открыто.

□

Определение 5.10. $\overline{E} = E \cup \partial E$ — *замыкание* E.

Лемма 5.3. *Множество $\overline{E}$ замкнуто. В частности, E замкнуто $\Leftrightarrow E = \overline{E}$.*

Доказательство. Отметим, что поскольку $\operatorname{int} E \subset E \subset \operatorname{int} E \cup \partial E$, то $\overline{E} = \operatorname{int} E \cup \partial E$.

Пусть $x \in X \setminus \overline{E}$. Точка x является внешней для E, т.е. $\exists B_\varepsilon(x) \subset X \setminus E$. Шар $B_\varepsilon(x)$ не содержит граничных точек (иначе $B_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing$), поэтому $B_\varepsilon(x) \subset X \setminus \overline{E}$. Значит, $X \setminus \overline{E}$ открыто.

По критерию замкнутости, E замкнуто $\Leftrightarrow E = \overline{E}$. $\square$

Замечание. $x \in \overline{E} \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset E \ \ (x_n \to x)$.

Доказательство. Если $x \in E \cup \partial E$, то $\forall \varepsilon > 0$ $(B_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing)$. Выберем точку $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap E$. Так как $\rho(x_n, x) < \frac{1}{n}$, то $x_n \to x$.

Обратно, если $x \in X \setminus \overline{E}$, то x – внешняя точка E и, значит, x не может быть пределом последовательности точек из E. $\square$

Следствие. Множество E замкнуто $\Leftrightarrow \forall \{x_n\},\ x_n \in E \ \ (x_n \to x \Rightarrow x \in E)$.

Задача. 1. *Докажите, что* $\overline{E} = \bigcap \{F \mid F \text{ замкнуто}, F \supset E\}$;

2. *Докажите, что* $\operatorname{int} E = \bigcup \{G \mid G \text{ открыто}, G \subset E\}$.

5.2 Подпространства метрического пространства

Определение 5.11. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $E \subset X, E \neq \varnothing$. Сужение $\rho|_{E\times E}$ является метрикой на E. Пара $(E, \rho|_{E\times E})$ называется *подпространством* (X, ρ), а функция $\rho|_{E\times E}$ — *индуцированной метрикой.*

Рассмотрим $B_r^E(x) = \{y \in E \mid \rho(x, y) < r\} = B_r^X(x) \cap E$.

Лемма 5.4. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $E \subset X$.*

$$\underbrace{U}_{\text{откр. в } E} \Leftrightarrow \exists \underbrace{V}_{\text{откр. в } X} \quad (U = V \cap E).$$

Доказательство. *(⇒)* Пусть U открыто в E. Тогда $\forall x \in U\, \exists B_{\varepsilon_x}^E(x) \subset U$ и, значит, $U = \bigcup_{x\in U} B_{\varepsilon_x}^E(x)$. Положим $V = \bigcup_{x\in U} B_{\varepsilon_x}^X(x)$. Тогда V открыто в X и $V \cap E = \bigcup_{x\in U}(B_{\varepsilon_x}^X(x) \cap E) = \bigcup_{x\in U} B_{\varepsilon_x}^E(x) = U$.

(⇐) Пусть $x \in U$ и $U = \underbrace{V}_{\text{откр. в } X} \cap E$, тогда $x \in V \Rightarrow \exists B_\varepsilon^X(x) \subset V \Rightarrow B_\varepsilon^E(x) = B_\varepsilon^X(x) \cap E \subset V \cap E = U$, то есть U открыто в E. $\square$

Следствие.

$$\underbrace{Z}_{\text{замк. в } E} \Leftrightarrow \exists \underbrace{F}_{\text{замк. в } X} \quad (Z = F \cap E).$$

Пример. $X = \mathbb{R}, E = (0, 10], A = (0, 1], B = (2, 3], C = (9, 10]$.

- ▷ A замкнуто в E, $A = [-1, 1] \cap E$;
- ▷ C открыто в E, $C = (9, 11) \cap E$;
- ▷ B не открыто и не замкнуто в E.

5.3 Компакты в метрических пространствах

Определение 5.12. Пусть X — множество, $Y \subset X$. Семейство $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ подмножеств X называется *покрытием* Y, если $Y \subset \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$.

Если $B \subset A$ и $\{X_\alpha\}_{\alpha \in B}$ также является покрытием Y, то оно называется *подпокрытием.*

Определение 5.13. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $K \subset X$. K называется *компактом* (в X), если из любого его открытого покрытия $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ можно выделить конечное подпокрытие, то есть $\exists \lambda_1, \ldots \lambda_m \in \Lambda$ $(K \subset G_{\lambda_1} \cup \ldots \cup G_{\lambda_m})$.

Пример. $X = \mathbb{R} \Rightarrow [a, b]$ — компакт по теореме Гейне-Бореля.

Замечание. K — компакт в X тогда и только тогда, когда K — компакт «в себе», то есть в (K, ρ).

Лемма 5.5. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $K \subset X$. Если K — компакт, то K ограничено и замкнуто в X.*

Доказательство. Пусть $a \in K$. Так как $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(a) = X$, то $\{B_n(a)\}_{n \in \mathbb{N}}$ — открытое покрытие K. Следовательно, $K \subset B_{n_1}(a) \cup \ldots \cup B_{n_m}(a) = B_N(a)$, где $N = \max_{1 \leqslant i \leqslant m}\{n_i\}$, и, значит, K ограничено.

Пусть $a \in X \setminus K$. Так как $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(X \setminus \overline{B}_{\frac{1}{n}}(a)\right) = X \setminus \{a\}$, то $\{X \setminus \overline{B}_{\frac{1}{n}}(a)\}_{n \in \mathbb{N}}$ — открытое покрытие K. Следовательно, $K \subset \left(X \setminus \overline{B}_{\frac{1}{n_1}}(a)\right) \cup \ldots \cup \left(X \setminus \overline{B}_{\frac{1}{n_m}}(a)\right) = X \setminus \overline{B}_{\frac{1}{N}}(a)$, где $N = \max_{1 \leqslant i \leqslant m}\{n_i\}$. Тогда $\overline{B}_{\frac{1}{N}}(a) \subset X \setminus K$ и, значит, $X \setminus K$ открыто, а значит, K – замкнуто. □

Лемма 5.6. *Замкнутое подмножество компакта — компакт.*

Доказательство. Пусть K — компакт в X, $\underbrace{F}_{\text{замк. в } X} \subset K$. Покажем, что F – компакт. Рассмотрим открытое покрытие $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ множества F, тогда $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \cup \{X \setminus F\}$ — открытое покрытие K, так как $\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda\right) \cup (X \setminus F) = X$. Поскольку K — компакт, то $K \subset G_{\lambda_1} \cup \ldots \cup G_{\lambda_m} \cup (X \setminus F) \overset{F \subseteq K}{\Rightarrow} F \subset G_{\lambda_1} \cup \ldots \cup G_{\lambda_m}$. Значит, F – компакт. □

Задача. *Пусть $\{F_n\}$ — непустые компакты в X, $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$. Покажите, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing$.*

Теорема 5.2. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $K \subset X$. K — компакт тогда и только тогда, когда из любой последовательности элементов K можно выделить сходящуюся в K подпоследовательность.*

Доказательство. *$(\Rightarrow)$* Пусть $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \in K$. Предположим, что из $\{x_n\}$ нельзя выделить сходяющуюся подпоследовательность в K. Тогда $\forall a \in K$ $\exists \delta_a > 0$ $\exists N_a$ $\forall n \geqslant N_a$ $(x_n \notin B_{\delta_a}(a))$.

Рассмотрим $\{B_{\delta_a}(a)\}_{a \in K}$ — открытое покрытие K. Следовательно, $K \subset B_{\delta_{a_1}}(a_1) \cup \ldots \cup B_{\delta_{a_m}}(a_m)$.

Положим $N = \max_{1 \leqslant i \leqslant m}\{N_{a_i}\}$. Так как $N \geqslant N_{a_i}$, то $x_N \notin B_{\delta_{a_i}}(a_i)$ $i = 1, \ldots, m \Rightarrow x_N \notin K$ — противоречие.

$(\Leftarrow)$ Пусть из любой последовательности элементов K можно выделить сходящуюся в K подпоследовательность *(секвенциальная компактность)*.

1. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ K можно покрыть конечным набором открытых шаров радиуса ε.

   Докажем от противного – пусть нельзя покрыть. Индуктивно построим последовательность $\{x_n\}$, $x_1 \in K, x_n \in K \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B_\varepsilon(x_i)$.

   По построению $\rho(x_i, x_j) \geqslant \varepsilon$, и, значит, из $\{x_n\}$ нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность – противоречие.

2. Пусть $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — открытое покрытие K, тогда $\exists \varepsilon > 0 \, \forall x \in K \, \exists \lambda \in \Lambda \; (B_\varepsilon(x) \subset G_\lambda)$. Предположим, что это не выполняется, тогда $\forall n \in \mathbb{N} \, \exists x_n \in K \, \forall \lambda \in \Lambda \left(B_{\frac{1}{n}}(x_n) \not\subset G_\lambda\right)$.

   Имеем $\{x_n\} \subset K \Rightarrow \exists x_{n_k} \to x \in K$, следовательно, $\exists \lambda_0 \in \Lambda(x \in \underbrace{G_{\lambda_0}}_{\text{откр.}}) \Rightarrow \exists B_\alpha(x) \subset G_{\lambda_0}$.

   Выберем k так, чтобы $x_{n_k} \in B_{\frac{\alpha}{2}}(x)$ и $\frac{1}{n_k} < \frac{\alpha}{2}$. Если $z \in B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k}) \Rightarrow \rho(z, x) \leqslant \rho(z, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x) < \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$.

   Следовательно, $z \in B_\alpha(x)$, $B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k}) \subset B_\alpha(x) \subset G_{\lambda_0}$ — противоречие.

3. Пусть $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ – открытое покрытие K. Тогда по (2):

   $$\exists \varepsilon > 0 \; \forall x \in K \; \exists \lambda \in \Lambda \; (B_\varepsilon(x) \subset G_\lambda)$$

   По (1) $\exists x_1, x_2, ..., x_m \in K$, что $K \subset B_\varepsilon(x_i) \cup ... \cup B_\varepsilon(x_m) \subset G_{\lambda_1} \cup ... \cup G_{\lambda_m}$, где λ_i удовлетворяет условию $B_\varepsilon(x_i) \subset G_{\lambda_i}$.

   Следовательно, K – компакт.

□

Опишем компакты в Евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Пример. Замкнутый брус $R = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ является компактом в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Метод математической индукции по n.

- ▷ База: $n = 1$ – компакт по лемме Гейне–Бореля.
- ▷ Предположение: Пусть верно для n.
- ▷ Переход: $R = \underbrace{[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]}_{R'} \times [a_{n+1}, b_{n+1}]$ в $\mathbb{R}^{n+1}$.

  Пусть $\{x_k\} \subset R$, $x_k = (\underbrace{x_{1,k}, \ldots, x_{n,k}}_{y_k}, x_{n+1,k})^T$. Тогда $\{y_k\} \subset R'$ и R' – компакт $\Rightarrow$ $\exists \{y_{k_i}\} : \; y_{k_i} \to y_0 \in R'$. Рассмотрим последовательность $\{x_{n+1,k_i}\} \subset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ – компакт $\Rightarrow \exists \{x_{n+1}, k_{i_j}\} : \; x_{n+1,k_{i_j}} \to x_{n+1,0} \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$.

  Тогда $y_{k_{i_j}} \to y_0 = (x_{1,0}, \ldots, x_{n,0})^T$ как подпоследовательность сходящейся последовательности. Пусть $a = (x_{1,0}, \ldots, x_{n,0}, x_{n+1,0})^T \in R$. Тогда $x_{k_{i_j}} \to a$ и, значит, R компакт по теореме (5.2).

□

Следствие. Множество K является компактом в $\mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow$ K ограничено и замкнуто

Доказательство. $\Rightarrow$ лемма (5.5).

$\Leftarrow$ Если K ограничено, то $K \subset B_r(x)$ для некоторой точки $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ и $r > 0$. Рассмотрим замкнутый брус $[x_1 - r, x_1 + r] \times \ldots \times [x_n - r, x_n + r]$. Этот брус содержит $B_r(x)$, а значит, и K.

Тогда K – компакт по лемме (5.6). □

Следствие (теорема Больцано–Вейерштрасса)**.** Из любой ограниченной последовательности в $\mathbb{R}^n$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Если последовательность ограничена, то она лежит в некотором замкнутом шаре. Этот шар – компакт по следствию (5.3). Осталось применить теорему (5.2). □

Замечание. В общих метрических пространствах из ограниченности и замкнутости не следует компактность.

Пример. $X = \mathbb{R}$ с дискретной метрикой, $K = [0, 1]$ – ограничено, замкнуто. Рассмотрим $\bigcup\limits_{x \in K} B_{\frac{1}{2}}(x) = K$. Из этого покрытия нельзя выделить конечное подпокрытие.

5.4 Полные метрические пространства

Пусть (X, ρ) – метрическое пространство.

Определение 5.14. Последовательность $\{x_n\}$ в X называется *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n, m \geqslant N \ (\rho(x_n, x_m) < \varepsilon).$$

Лемма 5.7. *Всякая сходящаяся последовательность фундаментальна.*

Доказательство. $x_n \in X$, $x_n \to a$. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда $\exists N \ \forall n \geqslant N$ $(\rho(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2})$. Следовательно, $\forall n, m \geqslant N$:

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, a) + \rho(x_m, a) < \varepsilon.$$

□

Обратное утверждение неверно.

Пример. $X = (0, 1)$, $\rho(x, y) = |x - y|$. $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ – фундаментальна, однако не имеет предела в X.

Определение 5.15. Метрическое пространство называется *полным*, если всякая фундаментальная последовательность в нем сходится.

Теорема 5.3. *Евклидово пространство* $\mathbb{R}^n$ *– полное.*

Доказательство.

Пусть $\{x_k\}$ – фундаментальная последовательность в $\mathbb{R}^n$, $x_k = (x_{1,k}, \ldots, x_{n,k})^T$. Так как $|x_{i,k} - x_{i,m}| \leqslant \rho_2(x_k, x_m)$, то из фундаментальности $\{x_k\}$ следует фундаментальность $\{x_{i,k}\}$ в $\mathbb{R}$ для $i = 1, \ldots, n$. По критерию Коши для числовых последовательностей $x_{i,k} \to a_k \in \mathbb{R}$. Рассмотрим $a = (a_1, \ldots, a_n)^T$. $\rho_2(x_k, a) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{k,i} - a_i)^2} \to 0$ при $k \to \infty$. Значит, $x_k \to a \Rightarrow \mathbb{R}^n$ – полное метрическое пространство. □

Пример. $B(E)$ – линейное пространство всех *ограниченных* функций $f : E \to \mathbb{R}$.

$B(E)$ является нормированным пространством относительно $\|f\| = \sup_{x\in E}|f(x)|$. Имеем $\sup|f(x)+g(x)| \leqslant \sup|f(x)| + \sup|g(x)|$. Имеем $f_n \to f$ в $B(E) \Leftrightarrow \|f_n - f\| \to 0 \Leftrightarrow \sup_{x\in E}|f_n(x) - f(x)| \to 0 \Leftrightarrow f_n \rightrightarrows f$ на E.

Теорема 5.4. $B(E)$ *– полное.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ фундаментальна в $B(E)$, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists N\ \forall n, m \geqslant N\ (\sup_{x\in E}|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon).$$

По критерию Коши равномерной сходимости $\exists f : f_n \rightrightarrows f$ на E. Осталось доказать, что равномерный предел ограниченных функций – ограниченная функция. Для $\varepsilon = 1$ $\exists N : |f_N(x) - f(x)| \leqslant 1\ \forall x \in E \Rightarrow |f(x)| \leqslant |f_N(x)| + 1 \Rightarrow f \in B(E) \Rightarrow B(E)$ – полное. □

Следствие. $C([a, b])$ – линейное пространство всех непрерывных $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ – полное.

Доказательство. $C([a, b]) \subset B(E)$ (теорема Вейерштрасса). $C([a, b])$ – полное как замкнутое подпространство (подмножество) полного пространства $B(E)$. □

Задача. *Покажите, что* $\overline{B_1}(\Theta)$ *в* $C([0, 1])$ *не является компактом (*Θ *– нулевая функция).*

6 Непрерывные функции

6.1 Предел функции в точке

Пусть $(X, \rho_x), (Y, \rho_y)$ – метрические пространства, a – предельная точка X, и задана функция $f : X \setminus \{a\} \to Y$.

Определение 6.1 (Коши)**.** Точка $b \in Y$ называется *пределом* функции f в точке a, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in X(0 < \rho_X(x, a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), b) < \varepsilon)$$

или, что эквивалентно,

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in X(x \in \mathring{B}_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b).$$

Определение 6.2 (Гейне)**.** Точка $b \in Y$ называется *пределом* функции f в точке a, если

$$\forall\{x_n\}, x_n \in X \setminus \{a\}(x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to b).$$

Как и в случае числовых функций, доказывается равносильность определений по Коши и по Гейне, поэтому в обоих случаях пишут $\lim_{x\to a} f(x) = b$, или $f(x) \to b$ при $x \to a$.

Свойство 6.1 (единственность)**.** *Если* $\lim_{x\to a} f(x) = b$ *и* $\lim_{x\to a} f(x) = c$, *то* $b = c$.

Доказательство. Пусть $x_n \to a$ и $x_n \neq a$. По определению Гейне $f(x_n) \to b$ и $f(x_n) \to c$. Так как последовательность в метрическом пространстве имеет не более одного предела, то $b = c$. □

Замечание. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, a – предельная точка E, функция $f : E \to \mathbb{R}^m$. Если $x \in E$, то $f(x) = (y_1, \dots, y_m)$, и значит, для каждого $i = 1, \dots, m$ определена i*-я координатная функция* $f_i : E \to \mathbb{R}$, $f_i(x) = y_i$. Пишут $f = (f_1, \dots, f_m)$.

Лемма 6.1 (о покоординатной сходимости)**.** $\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f_i(x) = b_i$.

Доказательство. Следует из неравенств $|x_i - b_i| \leqslant \rho_2(x, b) \leqslant \sqrt{m} \max_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i - b_i|$. □

Пример. 1. $f(x, y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

$|f(x, y) - 0| = \frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2} \leqslant \frac{|x^3|+|y^3|}{x^2+y^2} \leqslant 2 \cdot \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}{x^2+y^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon \Rightarrow \rho_2((x, y),(0, 0)) < \frac{\varepsilon}{2}$. $(\delta = \frac{\varepsilon}{2})$.

2. $f(x, y) = \frac{xy+y^2}{x^2+y^2}$.

   $f(x, 0) = 0,\ f(0, y) = 1 \Rightarrow$ предела в $(0, 0)$ нет.

Свойство 6.2. *$f, g : X \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ и $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$. Тогда $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = b + c$, $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = bc$.*

Доказательство. $x_n \in X \setminus \{a\}$, $x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to b$, $g(x_n) \to c \Rightarrow f(x_n) + g(x_n) \to b + c$, $f(x_n)g(x_n) \to bc$. Утверждение следует по определению Гейне. □

В дальнейшем, говоря о «пределе по подможеству», всегда будем иметь в виду подпространство с индуцированной метрикой.

Свойство 6.3 (предел по подмножеству)**.** *Пусть $E \subset X$, a – предельная точка множества E. Если $\lim_{x\to a} f(x) = b$, то $\lim_{x\to a}(f|_E)(x) = b$.*

Доказательство. Пусть $x_n \subset E$, $x_n \to a$ и $x_n \neq a$. Тогда $(f|_E)(x_n) = f(x_n) \to b$. По определению Гейне $\lim_{x\to a}(f|_E)(x) = b$. □

Пусть $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $a, u \in \mathbb{R}^n$ и $|u| = 1$. $\{a + tu : 0 < t < \Delta\} \subset D$ для некоторого $\Delta > 0$. Тогда $\lim_{t\to+0} f(a + tu)$ называется *пределом f в точке a по направлению u*. По свойству (6.3) $\lim_{t\to+0} f(a) = b \Rightarrow \lim_{t\to+0} f(a + tu) = b$. Обратное утверждение неверно.

Пример. $f(x, y) = \begin{cases} 1, y = x^2, x \geqslant 0. \\ 0, \text{иначе.} \end{cases}$ Рассмотрим $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}) = 1$, $f(\frac{1}{n}, 0) = 0 \Rightarrow$ нет предела.

Свойство 6.4 (локальная ограниченность)**.** *Если существует $\lim_{x\to a} f(x)$, то $\exists \delta > 0 :$ $f(\mathring{B}_\delta(a))$ ограничено.*

Доказательство. Достаточно положить в определении Коши $\varepsilon = 1$. □

Задача. *Пусть X, Y – метрические пространства, причем Y полное, a – предельная точка X, и $f : X \setminus \{a\} \to Y$. Покажите, что $\lim_{x\to a} f(x)$ существует тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, x' \in X (x, x' \in \mathring{B}_\delta(a) \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon).$$

Положим $a = (x_0, y_0), f : \mathring{B}_\Delta(x_0, y_0) \to \mathbb{R}$.

Определение 6.3. Пусть $\exists\sigma > 0\ \forall x \in (x_0 - \sigma, x_0 + \sigma) \setminus \{x_0\}$ существует $\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \varphi(x)$. Предел функции φ в точке x_0 называется *повторным пределом*:

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x,y).$$

Лемма 6.2. *Пусть* $f : \mathring{B}_\Delta(x_0, y_0) \to \mathbb{R}$, *такая что*

1. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = b$;
2. $\exists\sigma > 0\ \forall x \in (x_0 - \sigma, x_0 + \sigma) \setminus \{x_0\}$ *существует* $\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \varphi(x)$ *(конечный).*

Тогда $\lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x,y) = b$.

Доказательство. Положим $\delta_0 = \min\{\Delta, \sigma\}$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists\delta \in (0, \delta_0)\ \forall(x,y)\ \mathring{B}_\delta(x_0, y_0) \left(|f(x,y) - b| < \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ существует $\varphi(x)$. Перейдем к пределу при $y \to y_0$:

$$|\varphi(x) - b| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Это доказывает, что $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = b$, что и требовалось доказать. $\square$

6.2 Непрерывные функции

Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) – метрические пространства и задана функция $f : X \to Y$.

Определение 6.4. Функция f *непрерывна в точке* $a \in X$, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in X\ (\rho_X(x,a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon)$$

или, что эквивалентно,

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in X\ (x \in B_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(f(a)))\,.$$

Пример. Координатная функция $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, непрерывна в каждой точке $\mathbb{R}^n$. Это следует из неравенства $|x_i - a_i| \leqslant \rho_2(x,a)$.

Лемма 6.3. *Пусть* $f : X \to Y$, $a \in X$. *Следующие условия эквивалентны:*

1. *функция* f *непрерывна в точке* a;
2. $\forall\{x_n\}$, $x_n \in X\ (x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a))$;
3. a *– изолированная точка множества* X *или* a *– предельная точка* X *и* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) Выберем $\varepsilon > 0$ и соответствующее $\delta > 0$ из определения непрерывности. Если $x_n \to a$ (в X), то существует такой номер N, что $\rho_X(x_n, a) < \delta$ при всех $n \geqslant N$, но тогда $\rho_Y(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$ при $n \geqslant N$. Это означает, что $f(x_n) \to f(a)$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Если a – предельная точка X, то из условия $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ по определению Гейне.

(3) $\Rightarrow$ (1) Если a изолирована, то $B_{\delta_0}(a) \cap X = \{a\}$ для некоторого $\delta_0 > 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ определение непрерывности в точке a выполняется при $\delta = \delta_0$. Пусть a предельная для X. По определению предела по Коши $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E\,(0 < \rho_X(x, a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon)$. Но последняя импликация верна и для $x = a$. Значит, функция f непрерывна в точке a. $\square$

Теорема 6.1 (о непрерывности композиции)**.** *Пусть (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) и (Z, ρ_Z) – метрические пространства. Если функция $f : X \to Y$ непрерывна в точке $a \in X$, и функция $g : Y \to Z$ непрерывна в точке $f(a) \in Y$, то их композиция $g \circ f : X \to Z$ непрерывна в точке a.*

Доказательство. Пусть $x_n \to a$, тогда $f(x_n) \to f(a)$ и, значит, $g(f(x_n)) \to g(f(a))$. $\square$

Следствие. Если функции $f, g : X \to \mathbb{R}$ непрерывны в точке a, то в этой точке также непрерывны функции $f + g$, $fg : X \to \mathbb{R}$.

Определение 6.5. Функция $f\ X \to Y$ *непрерывна* (на X), если f непрерывна в каждой точке X.

Пример. *Многочленом* называется функция $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $P(x) = \sum_{(k_1,\dots,k_n)} a_{k_1\dots k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$, где суммирование ведется по конечному множеству наборов $(k_1, \dots, k_n)$ целых неотрицательных чисел. Многочлен P непрерывен как линейная комбинация непрерывных функций $p_1^{i_1} \dots p_n^{i_n}$, где $p_i(x) = x_i$.

Пример. Пусть $A \subset X$, $A \neq \varnothing$. Функция $d_A : X \to \mathbb{R}$, $d_A(x) = \inf\limits_{a\in A} \rho_X(x, a)$ непрерывна (на X).

Доказательство. Покажем, что d_A непрерывна в точке $y \in X$. Для $x \in X$, $a \in A$ по неравенству треугольника имеем $\rho_X(y, a) \geqslant \rho_X(x, a) - \rho_X(x, y) \geqslant d_A(x) - \rho_X(x, y)$. Переходя к инфимуму по всем $a \in A$, получим $d_A(y) \geqslant d_A(x) - \rho_X(x, y)$ или $d_A(x) - d_A(y) \leqslant \rho_X(x, y)$. Неравенство симметрично относительно x, y, поэтому $|d_A(x) - d_A(y)| \leqslant \rho_X(x, y)$. $\square$

Теорема 6.2 (критерий непрерывности)**.** *Функция $f : X \to Y$ непрерывна $\Leftrightarrow$ для любого открытого $V \subset Y$ множество $f^{-1}(V)$ открыто в X.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть V открыто в Y. Если $x \in f^{-1}(V)$, то $f(x) \in V$ и, значит, существует такое $\varepsilon > 0$, что $B_\varepsilon(f(x)) \subset V$. Функция f непрерывна в точке x, поэтому найдется такое $\delta > 0$, что $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$. Отсюда следует, что $B_\delta(x) \subset f^{-1}(V) \Rightarrow f^{-1}(V)$ открыто в X.

($\Leftarrow$) Пусть $x \in X$, и $\varepsilon > 0$. Шар $B_\varepsilon(f(x))$ открыт в Y, поэтому множество $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ открыто в X и, значит, существует $\delta > 0$, что $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$, или $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$. Так как $\varepsilon > 0$ – любое, то f непрерывна в точке x. $\square$

Следствие. Функция $f : X \to Y$ непрерывна на $X \Leftrightarrow$ для каждого замкнутого множества $F \subset Y$ множество $f^{-1}(F)$ замкнуто в X.

Доказательство. Следует из теоремы в силу равенства $X \setminus f^{-1}(F) = f^{-1}(Y \setminus F)$, верного для любого $F \subset Y$. □

Задача. *Приведите пример разрывной функции $f : X \to Y$, такой что $F(U)$ открыто для любого открытого $U \subset X$.*

6.3 Непрерывные функции на компактах

Теорема 6.3. *Если функция $f : K \to Y$ непрерывна, и K компакт, то $f(K)$ – компакт в Y.*

Доказательство. Пусть $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ – открытое покрытие $f(K)$. Если $x \in K$, то существует такое $\lambda_0 \in \Lambda$, что $f(x) \in G_{\lambda_0}$ и, значит, $x \in f^{-1}(G_{\lambda_0})$. Следовательно, семейство $\{f^{-1}(G_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ образует открытое покрытие K. Это покрытие открыто по критерию непрерывности. Поскольку K компакт, то $K \subset f^{-1}(G_{\lambda_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(G_{\lambda_m})$.

Покажем, что $f(K) \subset G_{\lambda_1} \cup \ldots \cup G_{\lambda_m}$. Действительно, если $y \in f(K)$, то $y = f(x)$ для некоторого $x \in K$. Найдем такое k, что $x \in f^{-1}(G_{\lambda_k})$, тогда, в свою очередь, $y = f(x) \in G_{\lambda_k}$. Следовательно, $f(K)$ – компакт. □

Следствие (теорема Вейерштрасса)**.** Если функция $f : K \to \mathbb{R}$ непрерывна, и K компакт, то существуют точки $x_m, x_M \in K$, такие что $f(x_M) = \sup\limits_{x\in K} f(x)$ и $f(x_m) = \inf\limits_{x\in K} f(x)$.

Доказательство. $f(K)$ — компакт в $\mathbb{R}$, следовательно, $f(K)$ замкнуто и ограничено.

Так как $f(K)$ ограничено, то $M = \sup_K f(x) \in \mathbb{R}$. M — граничная точка $f(K)$, следовательно, $M \in f(K)$ и, значит, $\exists x_M \in K\ f(x) = M$.

Доказательство для $\inf_K f$ аналогично. □

Определение 6.6. Пусть V – линейное пространство, $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|^*$ нормы на V. Нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|^*$ называются *эквивалентными*, если существуют такие $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, что

$$\forall x \in V\ \ (\alpha\|x\| \leqslant \|x\|^* \leqslant \beta\|x\|)\,.$$

Следствие. На конечномерном пространстве V все нормы эквивалентны.

Доказательство. Покажем сначала, что все нормы на $\mathbb{R}^n$ эквивалентны. Достаточно показать, что любая норма $\|\cdot\|$ эквивалентна евклидовой $\|\cdot\|_2$.

Пусть $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ — разложение по стандартному базису. Тогда по неравенствам треугольника и Коши-Буняковского-Шварца

$$\|x\| \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|e_i\| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} =: \beta \cdot \|x\|_2.$$

В частности, $\|\cdot\|$ непрерывна на $(\mathbb{R}, \|\cdot\|_2)$. Рассмотрим $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$ — компакт в $\mathbb{R}^n$. Тогда по (6.3) функция $\|\cdot\|$ достигает $\alpha > 0$ — инфимума значений.

Пусть $x \neq 0 \Rightarrow \left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\| \geqslant \alpha$ и, значит, $\|x\| \geqslant \alpha\|x\|_2$ (очевидно и для $x = 0$). Тогда $\|\cdot\|$ эквивалентны $\|\cdot\|_2$.

V — конечномерное линейное пространство и $(v_i)_{i=1}^n$ — базис V, $x = \sum_{i=1}^n x_iv_i$ — разложение. Отображение $\varphi(x) = (x_1, \ldots, x_n)^T$ задаёт изоморфизм между V и $\mathbb{R}^n$. Пусть $\|\cdot\|_V$ и $\|\cdot\|_V^*$ — нормы на V.

Определим $\|y\| = \|\varphi^{-1}(y)\|_V$, $\|y\|^* = \|\varphi^{-1}(y)\|_V^*$ — нормы на $\mathbb{R}^n$. Так как на $\mathbb{R}^n$ они эквивалентны, то $\|\cdot\|_V$ и $\|\cdot\|_V^*$ также эквивалентны. □

Определение 6.7. Функция $f : X \to Y$ называется *равномерно непрерывной* (на X), если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, x' \in X\ (\rho_X(x, x') < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon).$$

Теорема 6.4 (Кантор)**.** *Если функция $f : K \to Y$ непрерывна, и K компакт, то f равномерно непрерывна.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. По определению непрерывности

$$\forall a \in K\ \exists \delta_a > 0\ \forall x \in X\ \left(\rho_X(x, a) < \delta_a \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

Семейство $\{B_{\frac{\delta_a}{2}}\}_{a \in K}$ — открытое покрытие K. Так как K — компакт, то $K \subset B_{\frac{\delta_{a_1}}{2}}(a_1) \cup \ldots \cup B_{\frac{\delta_{a_m}}{2}}(a_m)$.

Положим $\delta = \min_{1 \leqslant i \leqslant m} \left\{\frac{\delta_{a_i}}{2}\right\}$. Покажем, что δ будет удовлетворять определению равномерной непрерывности для ε.

Пусть $\rho_K(x, x') < \delta_i$. Найдётся $i, 1 \leqslant i \leqslant m$, что $x \in B_{\frac{\delta_{a_i}}{2}}(a_i)$. Тогда

$$\rho_K(x', a_i) \leqslant \rho_K(x', x) + \rho_K(x, a_i) < \frac{\delta_{a_i}}{2} + \frac{\delta_{a_i}}{2} = \delta_{a_i},$$

и, значит, $x, x' \in B_{\delta_{a_i}}(a_i)$. Поэтому

$$\rho_Y(f(x), f(x')) \leqslant \rho_Y(f(x), f(a_i)) + \rho_Y(f(a_i), f(x')) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\square$

Определение 6.8. Пусть X, Y – метрические пространства. Функция $f : X \to Y$ называется *гомеоморфизмом*, если f биекция и функции f и f^{-1} непрерывны.

Теорема 6.5. *Если $f : K \to Y$ непрерывная биекция, и K компакт, то f – гомеоморфизм.*

Доказательство. Покажем, что функция $f^{-1} : Y \to K$ непрерывна. Достаточно показать, что множество $(f^{-1})^{-1}(F)$ замкнуто для всякого замкнутого $F \subset K$. Это так, поскольку $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ – компакт, как непрерывный образ компакта. $\square$

6.4 Связные множества

Определение 6.9. Метрическое пространство X называется *несвязным*, если существуют непустые открытые $U, V \subset X$, что $X = U \cup V$ и $U \cap V = \varnothing$.

Метрическое пространство X называется *связным*, если оно не является несвязным.

Множество $E \subset X$ называется *несвязным (связным)*, если оно несвязно (связно) как подпространство X.

Пример. $\{x\}$ – связное множество.

Замечание. Согласно устройству открытых множеств подпространства получаем, что $E \subset X$ несвязно, если существуют открытые $U, V \subset X$, такие что $E \subset U \cup V$ и $E \cap U \neq \varnothing$, $E \cap V \neq \varnothing$, $U \cap V \cap E = \varnothing$.

Покажем, что U и V можно всегда выбрать непересекающимися.

Лемма 6.4. *Множество $E \subset X$ несвязно $\Leftrightarrow$ существуют открытые $U, V \subset X$, такие что $E \subset U \cup V$ и $E \cap U \neq \varnothing$, $E \cap V \neq \varnothing$, $U \cap V = \varnothing$.*

Доказательство. Достаточность очевидна. Для доказательства необходимости предположим, что множество E несвязно. Тогда существуют непустые открытые $U_E, V_E \subset E$, такие что $E = U_E \cup V_E$, $U_E \cap V_E = \varnothing$.

Для каждого $x \in U_E$ найдется такое $\delta_x > 0$, что $B_{\delta_x}(x) \cap E \subset U_E$ и, значит, $B_{\delta_x}(x) \cap V_E = \varnothing$. Аналогично, для каждого $y \in V_E$ найдется такое $\delta_y > 0$, что $B_{\delta_y}(y) \cap E \subset V_E$ и $B_{\delta_y}(y) \cap U_E = \varnothing$.

Положим $U = \bigcup\limits_{x \in U_E} B_{\frac{\delta_x}{2}}(x), V = \bigcup\limits_{y \in V_E} B_{\frac{\delta_y}{2}}(y)$. Если существует $z \in U \cap V$, то $z \in B_{\frac{\delta_x}{2}}(x)$ и $z \in B_{\frac{\delta_y}{2}}(y)$ для некоторых $x \in U_E$ и $y \in V_E$, тогда

$$\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y) < \frac{\delta_x + \delta_y}{2} \leqslant max\{\delta_x, \delta_y\}.$$

Если $max\{\delta_x, \delta_y\} = \delta_x$, то $y \in B_{\delta_x}(x)$; если же $max\{\delta_x, \delta_y\} = \delta_y$, то $x \in B_{\delta_y}(y)$. Обе эти ситуации невозможны. Следовательно, $U \cap V = \varnothing$. □

Задача. 1. *Докажите, что если $E \subset X$ связно, то $\overline{E}$ также связно.*

2. *Докажите, что если E_i связно для любого $i \in I$ и $\bigcap\limits_{i \in I} E_i \neq \varnothing$, то $\bigcup\limits_{i \in I} E_i$ также связно.*

Теорема 6.6. *Множество $I \subset \mathbb{R}$ связно $\Leftrightarrow$ I – промежуток.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Если I не является промежутком, то существуют $x, y \in I$ и $z \in \mathbb{R}$, такие что $x < z < y$ и $z \notin I$. Рассмотрим $(-\infty, z) \cap I$ и $(z, +\infty) \cap I$. Это непустые (содержат соответственно точки x, y), непересекающиеся, открытые в I множества, объединение которых совпадает с I. Значит, множество I несвязно.

($\Leftarrow$) Предположим, что промежуток I не является связным множеством. Тогда найдутся открытые (в $\mathbb{R}$) множества U и V, такие что $I \subset U \cup V$, $I \cap U \neq \varnothing$, $I \cap V \neq \varnothing$ и $U \cap V \cap I \neq \varnothing$. Пусть $x \in I \cap U$ и $y \in I \cap V$. Без ограничения общности можно считать, что $x < y$ (тогда $[x,y] \subset I$).

Положим $S = \{z \in [x,y] : z \in U\}$. Так как S не пусто и ограничено, то существует $c = \sup S$. В силу замкнутости отрезка $c \in [x,y]$. Отрезок $[x,y] \subset I \subset U \cup V$, поэтому $c \in U$ или $c \in V$.

Если $c \in U$, то $c \neq y$, и значит, найдется $\varepsilon > 0$, что полуинтервал $[c, c+\varepsilon)$ лежит одновременно в U и $[x,y]$. Но тогда $[c, c+\varepsilon) \subset S$, что противоречит $c = \sup S$.

Если $c \in V$, то $c \neq x$, и значит, найдется $\varepsilon > 0$, что полуинтервал $(c-\varepsilon, c]$ лежит одновременно в V и $[x,y]$. В частности, отрезок $[c - \frac{\varepsilon}{2}, c]$ не пересекается с S, что противоречит $c = \sup S$.

Значит, I связно. □

Теорема 6.7. *Если функция $f : S \to Y$ непрерывна, и множество S связно, то множество $f(S)$ связно в Y.*

Доказательство. Предположим, что $f(S)$ несвязно, тогда существют открытые в Y множества U и V, такие что $f(S) \subset U \cup V$, $f(S) \cap U \neq \varnothing$, $f(S) \cap V \neq \varnothing$ и $f(S) \cap U \cap V = \varnothing$. Множества $f^{-1}(U)$ и $f^{-1}(V)$ не пусты, не пересекаются, открыты в S (по критерию непрерывности) и $S = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ (так как U, V образуют покрытие $f(S)$). Это противоречит связности S. □

Следствие (Теорема о промежуточных значениях)**.** Если функция $f : S \to \mathbb{R}$ непрерывна, и множество S связно, то f принимает все промежуточные значения (то есть если $u, v \in f(S)$ и $u < v$, то $[u, v] \subset f(S)$).

Доказательство. По теореме (6.7) множество $f(S)$ связно в $\mathbb{R}$ и, значит, по теореме (6.6) является промежутком. □

Определение 6.10. Открытое связное множество в метрическом пространстве называется *областью.*

Пример. Выясним, является ли $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : e^{x^2+y^2} < 1 + z^2\}$ областью.

Решение. Функция $f(x, y, z) = e^{x^2+y^2} - 1 - z^2$ непрерывна, поэтому множество $E = f^{-1}(-\infty, 0)$ открыто по критерию непрерывности. Однако E не является связным, так как $E \subset U \cup V$, где $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}, V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z < 0\}$, причем E пересекается и с U, и с V.

Выделим класс множеств, для которых проверка связности осуществляется несколько проще.

Определение 6.11. Метрическое пространство X называется *линейно связным*, если для любых точек $x, y \in X$ существует такая непрерывная функция $\gamma : [0, 1] \to X$, что $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$.

Теорема 6.8. *Всякое линейно связное метрическое пространство связно.*

Доказательство. Предположим, что линейно связное пространство X несвязно. Тогда найдутся непустые открытые множества U и V, такие что $X = U \cup V$ и $U \cap V = \varnothing$. Пусть $x \in U$ и $y \in V$. Так как X линейно связно, то существует непрерывная функция $\gamma : [0, 1] \to X$, такая что $\gamma(0) = x$ и $\gamma(1) = y$. Тогда $\gamma^{-1}(U)$ и $\gamma^{-1}(V)$ не пусты, не пересекаются, открыты в $[0, 1]$, и $[0, 1] = \gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V)$, что невозможно, так как отрезок $[0, 1]$ связен. □

Пример. Шар $B_r(a)$ в нормированном пространстве V – линейно связное множество.

Доказательство. Пусть $x, y \in B_r(a), x \neq y$. Рассмотрим точку $\gamma(t) = (1-t)x + ty$, $t \in (0, 1)$. Поскольку

$$\|\gamma(t) - a\| = \|(1 - t)(x - a) + t(y - a)\| \leqslant (1 - t)\|x - a\| + t\|y - a\| < (1 - t)r + tr = r,$$

то эта точка лежит в $B_r(a)$. Осталось положить $\gamma : [0, 1] \to B_r(a)$, $\gamma(t) = (1 - t)x + ty$. □

Лемма 6.5. *Связное открытое множество E в нормированном пространстве линейно связно.*

Доказательство. Пусть $x \in E$. Рассмотрим множество U тех точек y, которые можно соединить с x кривой, то есть существует непрерывная функция $\gamma : [0, 1] \to E$, что $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$. Покажем, что U открыто. Для $y \in U$ в силу открытости E найдется такое $\varepsilon > 0$, что $B_\varepsilon(y) \subset E$. Любая пара точек в шаре может быть соединена открезком: для $z \in B_\varepsilon(y)$ рассмотрим $\sigma : [0, 1] \to B_\varepsilon(y)$, $\sigma(t) = (1 - t)y + tz$. Тогда кривая

$$\gamma \circ \sigma(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ \sigma(2t - 1), & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

соединяет x и z, поэтому $B_\varepsilon(y) \subset U$. Аналогично устанавливается, что $E \setminus U$ открыто. В силу связности $E \setminus U$ пусто, то есть $E = U$. $\square$

Задача. *Докажите, что множество* $A = \{(0,y) : y \in [-1,1]\} \cup \{(x, \sin(\frac{1}{x})) : x \in (0,1]\}$ *связно, но не линейно связно в* $\mathbb{R}^2$.

6.5 Линейные отображения в евклидовых пространствах

Определение 6.12. Отображение L называется *линейным*, если $\forall x_1, x_2 \in X$ и $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ выполнено $L(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 L(x_1) + \alpha_2 L(x_2)$.

Пример. Пусть $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ линейно, $L(x) = Ax$ с $A = (a_{ij})$. Так как $|L(x)|^2 = \sum_{i=1}^m (L_i, x)^2$, где $L_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})^T$, то по неравенству Коши-Буняковского-Шварца

$$|L(x)|^2 \leqslant \sum_{i=1}^m |L_i|^2 |x|^2 = |x|^2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2,$$

так что $\|L\| \leqslant C$ для $C = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$.

Определение 6.13. Для $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ определим $\|L\| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|L(x)\|}{\|x\|}$.

Замечание. $\|L\| \in \mathbb{R}$. По определению супремума $\|L(x)\| \leqslant \|L\| \|x\|$ для всех $x \in X$, и для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $x_\varepsilon \in X$, что $\|L(x)\| > (\|L\| - \varepsilon)\|x_\varepsilon\|$. Это означает, что $\|L\|$ – наименьшее из чисел $C > 0$, таких что $\|L(x)\| \leqslant C\|x\|$ для всех $x \in X$.

Нетрудно проверить, что $(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|)$ является нормированным пространством, причем $\|L_2 L_1\| \leqslant \|L_2\| \|L_1\|$.

7 Дифференциальное исчисление

7.1 Дифференцируемость функции в точке

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$, U – открытое и задана функция $f : U \to \mathbb{R}^n$.

Определение 7.1. Функция f называется *дифференцируемой* в точке a, если существует такое непрерывное линейное отображение $L_a : X \to Y$, что

$$f(a+h) = f(a) + L_a(h) + \alpha(h)\|h\|,$$

для некоторой функции α, такой что $\alpha(h) \to 0$.

Замечание. Формула (7.1) не определяет значение α в нуле. В дальнейшем будем считать, что $\alpha(0) = 0$ и, значит, функция α непрерывна в нуле.

Формулу (7.1) можно знаписать в виде

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + o(\|h\|), \ h \to 0.$$

Линейное отображение L_a называется *дифференциалом* f в точке a и обозначается df_a.

Замечание. Если функция f дифференцируема в точке a, то f непрерывна в точке a. Действительно, a – внутренняя точка U, и по (7.1) $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a) \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Определение 7.2. Пусть $v \in \mathbb{R}^n$ и функция f определена на множестве $\{a + tv : |t| < \delta\}$ для некоторого $\delta > 0$. Предел

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t},$$

если этот предел существует, называется *производной f по вектору v* в точке a и обозначается $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ (а также $f'_v(a)$ и $\partial_v f(a)$).

Пример. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Пусть $x, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Тогда $\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0}|x+tv| = \frac{d}{dt}|_{t=0} \left(\sum_{i=1}^n (x_i + tv_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2|x|}\sum_{i=1}^n 2x_i v_i = \left(\frac{x}{|x|}, v\right)$.

Теорема 7.1. *Если $f : U \to \mathbb{R}^n$ дифференцируема в точке a, $v \in \mathbb{R}^n$, то существует $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = df_a(v)$.*

Доказательство. Для $v = 0$ утверждение верно. Пусть $v \neq 0$. Выберем $\delta > 0$ так, что $B_\delta(a) \subset U$. Тогда для всех $t \in \mathbb{R}$ с $|t| < \frac{\delta}{|v|}$, получим

$$f(a+tv) = f(a) + df_a(tv) + \alpha(tv)\|tv\|.$$

В силу линейности $df_a(tv) = t df_a(v)$. Далее, по непрерывности α в 0 имеем $\alpha(tv) \to 0$ при $t \to 0$, поэтому

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t\to 0}\frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \lim_{t\to 0}(df_a(v) \pm \alpha(tv)\|v\|) = df_a(v).$$

□

Следствие. Если функция f дифференцируема в точке a, то ее дифференциал в точке a определен однозначно.

Пример. Любое линейное отображение $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в каждой точке $a \in \mathbb{R}^n$ и $dL_a = L$. Это следует из равенства

$$L(a+h) = L(a) + L(h).$$

Запишем определение дифференцируемости для конкретных случаев $X = \mathbb{R}^n$ и $Y = \mathbb{R}^m$.

Случай функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^m$.

Дифференцируемость функции $\gamma : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^m$ в точке $a \in (\alpha, \beta)$ определялась ранее как существование производной $\gamma'(a) = \lim_{t\to 0}\frac{\gamma(a+t) - \gamma(a)}{t}$. Это согласуется с определением дифференцируемости, поскольку наличие предела равносильно $\gamma(a+t) - \gamma(a) = t\gamma'(a) + t\sigma(t)$, где $\sigma(t) \to 0$ при $t \to 0$. Таким образом, $d\gamma_a(t) = t\gamma'(a)$.

Случай функций из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$.

Пусть $U \subset R^n$ открыто, и функция $f : U \to \mathbb{R}$. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^n$.

Определение 7.3. Производная по вектору e_k в точке a, т.е. $\frac{\partial f}{\partial e_k}(a) = \lim_{t\to 0}\frac{f(a+te_k) - f(a)}{t}$, называется *частной производной* функции f по переменной x_k в точке a и обозначается $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ (а также $f'_{x_k}(a)$ и $\partial_k f(a)$).

Из теоремы 1 получим необходимое условие дифференцируемости.

Следствие. Если $f : U \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке a, то она имеет в этой точке частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$, $k = 1, \ldots, n$, и $df_a(h) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) h_k$ для всех $h \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. По теореме 1 существуют $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = df_a(e_k)$, следовательно, в силу линейности

$$df_a(h) = df_a\left(\sum_{k=1}^n h_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n h_k df_a(e_k) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) h_k.$$

□

Замечание. Для координатной функции $p_k(x_1, \ldots, x_n) = x_k$ совпадает в любой точке с самой функцией. Обозначим его через dx_k, тогда $dx_k(h) = h_k \ \forall h \in \mathbb{R}^n$. Следовательно, имеем функциональную запись для дифференциала:

$$df_a = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) dx_k.$$

Функции $dx_1, \ldots, dx_n$ образуют базис в $(\mathbb{R}^n)^*$, двойственный к стандартному $e_1, \ldots, e_n$.

Замечание (Геометрический смысл дифференцируемости $(n = 2)$)**.** Пусть $f : U \to \mathbb{R}$, U – открыто в $\mathbb{R}^2$, f – дифференцируема в точке (x_0, y_0), то есть

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

$G_f = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in U\}$ – график f.

$\pi : z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$.

$\overline{n}(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1)$ – вектор нормали.

$\overline{a}(x - x_0, y - y_0, f(x, y) - f(x_0, y_0))$ – непрерывный вектор в MM_0

$\cos(\varphi) = \frac{(\overline{a}, \overline{n})}{|\overline{a}||\overline{n}|}$

Определение 7.4. Вектор $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a))^T$ называется *градиентом* функции f в точке a и обозначается $gradf(a)$ или $\nabla f(a)$.

Следствие. Пусть f дифференцируема в точке a, и $gradf(a) \neq 0$, то для любого $v \in \mathbb{R}^n$ с $|v| = 1$ выполнено

$$\left|\frac{\partial f}{\partial v}(a)\right| \leqslant |gradf(a)|,$$

причем равенство достигается лишь при $v = \pm\frac{gradf(a)}{|gradf(a)|}$.

Доказательство. Так как $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = df_a(v) = (gradf(a), v)$, то по неравенству Коши-Буняковского-Шварца $\left|\frac{\partial f}{\partial v}(a)\right| \leqslant |gradf(a)| \cdot |v| = |gradf(a)|$, причем равенство достигается лишь в случае коллинеарности $gradf(a)$ и v, то есть $v = \pm\frac{gradf(a)}{|gradf(a)|}$. □

Пример. Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & y = x^2,\ x > 0 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = 0$ для любого $v \in \mathbb{R}^2$, но функция f разрывна в точке $(0, 0)$.

Тем не менее, в терминах частных производных можно получить довольно простой признак дифференцируемости.

Теорема 7.2 (Достаточное условие дифференцируемости). *Пусть $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, точка $a \in U$. Если все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ определены в окрестности a и непрерывны в точке a, то f дифференцируема в точке a.*

Доказательство. Пусть все $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ определены в $B_r(a) \subset U$. Рассмотрим $h = (h_1, \ldots, h_n)^T$ с $|h| < r$, и определим точки $x_0 = a$, $x_k = a + \sum_{j=1}^{k} h_j e_j$. Тогда приращение

$$f(a + h) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \sum_{k=1}^{n} (f(x_{k-1} + h_k e_k) - f(x_{k-1})).$$

Функция $g(t) = f(x_{k-1} + te_k) - f(x_{k-1})$ на отрезке с концами 0 и h_k (при $h_k \neq 0$) имеет производную $g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_{k-1} + t_{e_k})$. По теореме Лагранжа о среднем $g(h_k) - g(0) = g'(\xi_k) h_k$ для некоторого ξ_k между 0 и h_k. Положим $c_k(h) = x_{k-1} + \xi_k e_k$, тогда последнее равенство перепишется в виде $f(x_k) - f(x_{k-1}) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(c_k) h_k$, причем $c_k \to a$ при $h \to 0$. Поэтому

$$f(a + h) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) h_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(c_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \right) h_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(c_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \right) \frac{h_k}{|h|} |h| =: \alpha(h)|h|.$$

В силу непрерывности $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ в точке a и неравенства $|h_k| \leqslant |h|$ функция $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$. Следовательно, f дифференцируема в точке a. □

Случай функций из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$.

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ открыто, и функция $f : U \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \ldots, f_m)^T$.

Лемма 7.1. *Функция f дифференцируема в точке a тогда и только тогда, когда все координатные функции f_i дифференцируемы в точке a.*

Доказательство. Пусть f дифференцируема в точке a. Распишем формулу (1) покоординатно:

$$f_i(a + h) = f_i + L_i(h) + \alpha_i(h)|h|.$$

Координатные функции L_i дифференциала L_a линейны, а условие "$\alpha(h) \to 0$ при $h \to \overline{0}$" равносильно "$\alpha_i(h) \to 0$ при $h \to 0$" , где $i = 1, \ldots, m$, поэтому функция f_i дифференцируема в точке a и ее дифференциал $d(f_i)_a = L_i$.

Обратно, если все функции f_i дифференцируемы, то верна и формула (1) с $L_a = (L_1, \ldots, L_m)^T$ и $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)^T$. □

Поскольку действие линейного отображения из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ на вектор есть умножение этого вектора слева на матрицу, поэтому найдется такая матрица Df_a размера $m \times n$, что $df_a(h) = Df_a \cdot h$ для всех $h \in \mathbb{R}^n$.

Определение 7.5. Матрица Df_a называется *матрицей Якоби* функции f в точке a.

Замечание. По лемме 1 следует, что $df(h) = (df_1(h), \dots, df_m(h))^T$, поэтому ij-й элемент матрицы Якоби в точке a равен значению $d(f_i)_a(e_j)$, то есть $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$. Таким образом, строками матрицы Якоби являются градиенты ее координатных функций в этой точке.

7.2 Правила дифференцирования

Свойство 7.1 (линейность)**.** *Пусть* $\underbrace{U}_{\text{откр.}} \subset \mathbb{R}^n$.

Если $f, g : U \to \mathbb{R}^m$ *дифференцируемы в точке* a, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, *то* $\lambda f + \mu g : U \to \mathbb{R}^m$ *дифференцируема в точке* a *и* $d(\lambda f + \mu g)_a = \lambda df_a + \mu dg_a$.

Доказательство. По определению

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \alpha(h)|h|, h \to 0 \Rightarrow \alpha(h) \to 0,$$
$$g(a+h) = g(a) + dg_a(h) + \beta(h)|h|, h \to 0 \Rightarrow \beta(h) \to 0,$$
$$(f+g)(a+h) = (f+g)(a) + (df_a + dg_a)(h) + \underbrace{(\alpha(h) + \beta(h))}_{\to 0}|h|.$$

Следовательно, $f+g$ дифференцируема в точке a и $d(f+g)_a = df_a + dg_a$, λf дифференцируема в точке a и $d(\lambda f)_a = \lambda df_a$. $\square$

Теорема 7.3 (дифференцирование композиции)**.** *Пусть* $\underbrace{U}_{\text{откр.}} \subset \mathbb{R}^n$, $\underbrace{V}_{\text{откр.}} \subset \mathbb{R}^m$.

Если $f : U \to \mathbb{R}^m$ *дифференцируема в точке* a, $g : V \to \mathbb{R}^k$ *дифференцируема в точке* $f(a)$, $f(U) \subset V$, *то композиция* $g \circ f : U \to \mathbb{R}^k$ *дифференцируема в точке* a *и*

$$d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a.$$

Доказательство. Положим $b = f(a)$. По определению

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \alpha(h)|h|, h \to 0 \Rightarrow \alpha(h) \to 0,$$
$$g(b+u) = g(b) + dg_b(u) + \beta(u)|u|, u \to 0 \Rightarrow \beta(u) \to 0,$$

Подставим вместо u во второе равенство выражение $\varkappa(h) = df_a(h) + \alpha(h)|h|$.

$$g(f(a+h)) = g(b + \varkappa(h)) = g(b) + dg_b(df_a(h) + \alpha(h)|h|) + \beta(\varkappa(h))|\varkappa(h)| =$$
$$= g(b) + dg_b(df_a(h)) + dg_b(\alpha(h)) \cdot |h| + \beta(\varkappa(h)) \cdot |\varkappa(h)| =$$
$$= g(b) + dg_b(df_a(h)) + \gamma(h)|h|, \gamma(h) = dg_b(\alpha(h)) + \beta(\varkappa(h))\frac{|\varkappa(h)|}{|h|}.$$

По теореме о непрерывности композиции $dg_b(\alpha(h))$ и $\beta(\varkappa(h))$ непрерывны при $h = 0$ со значением 0.

По определению нормы $\exists C \geqslant 0 \ \ (|df_a(h)| \leqslant C|h|)$.

Следовательно, $\frac{|\varkappa(h)|}{|h|}$ ограничена в некоторой проколотой окрестности $h = 0$ и, значит, $\gamma(h)$ — бесконечно малая при $h \to 0$ (как сумма двух бесконечно малых). □

Следствие. Пусть $f, g : \underbrace{U}_{\text{откр. в } \mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке a.

Тогда:

1. $f \cdot g : U \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке a и
$$d(f \cdot g)_a = g(a)df_a + f(a)dg_a;$$
2. При условии $f \neq 0$ на U: $\frac{1}{f} : U \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке a и $d\left(\frac{1}{f}\right)_a = -\frac{1}{f^2(a)}df_a$.

Доказательство. $F = (f, g)^T$ дифференцируема в точке a и $dF_a = (df_a, dg_a)^T$.

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \varphi(x, y) = xy$ дифференцируема в каждой точке из $\mathbb{R}^2$ и $d\varphi = ydx + xdy$. Тогда $\varphi \circ F$ дифференцируема в точке a и $d(\varphi \circ F)_a = d\varphi_{F(a)} \circ dF_a$, то есть $d(f \cdot g)_a = g(a)df_a + f(a)dg_a$.

Второй пункт доказывается аналогично. □

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial y_1}(b) & \dots & \frac{dg}{dy_m}(b) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Откуда $\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_i}(b)\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$ и, следовательно,

$$d(g \circ f)_a = \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_1}(a)dx_1 + \dots + \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_n}(a)dx_n =$$
$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_i}(b) \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)dx_j \right) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_i}(b)dy_i, dy_i = d(f_i)_a.$$

Определение 7.6. Пусть $\underbrace{U}_{\text{откр.}} \subset \mathbb{R}^n, f : U \to \mathbb{R}^m, f = (f_1, \dots, f_m)^T$.

Функция f называется *непрерывно дифференцируемой* на U, если все частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ определены и непрерывны на U.

Множество всех таких функций обозначают $C^1(U, \mathbb{R}^m)$.

Лемма 7.2. *Функция f непрерывно дифференцируема на U тогда и только тогда, когда f дифференцируема на U и $df : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ непрерывен.*

Доказательство. Пусть f дифференцируема в каждой точке из U. Тогда на $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ $\|A\| = \sup_{h\neq 0} \frac{|Ah|}{|h|}$. Так как $\forall x \in U \, \forall h \in \mathbb{R}^h$ $df_x(h) = Df(x)h \Rightarrow \|df_x\| = \|Df(x)\|$.

На $M_{m\times n}(\mathbb{R}) \|A\|_\infty = \max |a_{ij}|, \|\cdot\| \sim \|\cdot\|_\infty$.

$\lim_{x\to a} \|df_x - df_a\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \|Df_x - Df_a\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \forall i, j \ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \to \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$ при $x \to a$. □

Следствие. Если $f, g \in C^1(U, \dots)$, то $\lambda f + \mu g \in C^1(U)$, $g \circ f \in C^1(U)$.

(Аналогично для $f \cdot g$)

7.3 Частные производные и дифференциалы высших порядков

Пусть $\underbrace{U}_{\text{откр.}} \subset \mathbb{R}^n, f : U \to \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$.

Определение 7.7. Частной производной нулевого порядка в точке a называют $f(a)$.

Если частная производная $\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \ldots \partial x_{i_1}}$ $k-1$-го порядка определена в некоторой окрестности точки a и меет в точке a частную производную по x_{i_k}, то

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \ldots \partial x_{i_1}} := \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \ldots \partial x_{i_1}} \right)\Bigg|_{x=a}$$

называется *частной производной k-го порядка функции f в точке a.*

Теорема 7.4 (Юнг). *Пусть $\underbrace{U}_{\text{откр.}} \subset \mathbb{R}^2, f : U \to \mathbb{R}$. Если частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ определены в некоторой окрестности точки (a, b) и дифференцируемы в точке (a, b), то*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b).$$

Доказательство. Выберем окрестность $B_\delta(a, b)$, в которой определены $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$. Рассмотрим выражение

$$\Delta(t) = f(a + t, b + t) - f(a + t, b) - f(a, b + t) + f(a, b),\ 0 < |t| < \delta.$$

Функция $g(s) = f(a+s, b+t) - f(a+s, b)$ на отрезке с концами 0 и t имеет производную $g'(s) = \frac{\partial f}{\partial x}(a+s, b+t) - \frac{\partial f}{\partial x}(a+s, b)$. По теореме Лагранжа $g(t) - g(0) = g'(\xi)t$ для некоторого ξ между 0 и t. Тогда в силу равенства $\Delta(t) = g(t) - g(0)$ и дифференцируемости $\frac{\partial f}{\partial x}$ имеем

$$\Delta(t) = g'(\xi)t = \frac{\partial f}{\partial x}(a + \xi, b + t)t - \frac{\partial f}{\partial x}(a + \xi, b)t =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(a, b)\xi + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)t + \alpha(t)\sqrt{\xi^2 + t^2} \right) t - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(a, b)\xi + \beta(t)|\xi| \right) t =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) \pm \alpha(t)\sqrt{1 + \frac{\xi^2}{t^2}} \pm \beta(t)\frac{|\xi|}{|t|} \right) t^2,$$

где $\alpha(t) \to 0$, $\beta(t) \to 0$ при $t \to 0$. Следовательно, существует $\lim_{t\to 0} \frac{\Delta(t)}{t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)$.

Аналогично $\lim_{t\to 0} \frac{\Delta(t)}{t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$, что и доказывает теорему. $\square$

Задача (теорема Шварца). *Докажите, что если $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ определены в окрестности (a, b) и непрерывны в точке (a, b), то $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)$.*

Распространим теорему на случай n переменных.

Следствие. Пусть $k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2$. Если все частные производные до порядка $k - 2$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки a, а все частные производные порядка $k - 1$ дифференцируемы в точке a, то

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{ik} \dots \partial x_{i1}}(a) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{jk} \dots \partial x_{j1}}(a)$$

при условии, что списки $(i_1, \dots, i_k)$ и $(j_1, \dots, j_k)$ отличаются лишь порядком.

Доказательство. Индукция по k. Пусть $k = 2$. Положим $x_r = a_r, r \neq i_1,i_2$, тогда имеем функцию двух переменных x_{i_1} и x_{i_2}, и равенство вытекает по теореме Юнга (7.4).

Пусть $k > 2$. Можно считать, что список $(j_1, \dots, j_k)$ получен из $(i_1, \dots, i_k)$ с помощью одной транспозиции, то есть обменом i_r и i_{r-1}.

Рассмотрим $g = \frac{\partial^{r-2} f}{\partial x_{i_{r-2}} \dots \partial x_{i_1}}$. По теореме Юнга в окрестности точки a имеет место равенство $\frac{\partial^2 g}{\partial x_{i_r} \partial x_{i_{r-1}}} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_{i_{r-1}} \partial x_{i_r}}$. При $r = k$ имеем $\frac{\partial^2 g}{\partial x_{i_r} \partial x_{i_{r-1}}}(a) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_{i_{r-1}} \partial x_{i_r}}(a)$, что лишь формой записи отличается от требуемого равенства; при $r < k$ еще надо продифференцировать по переменным $x_{i_{r+1}}, \dots, x_{i_k}$ и подставить $x = a$. □

Дифференциалы высших порядков определяются индуктивно.

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ открыто.

Определение 7.8. Положим $d^1 f = df$. Пусть $k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2$. Пусть $d^{k-1} f$ определен в некоторой окрестности точки a и дифференцируем в точке a, то $d^k f_a := d(d^{k-1} f)_a$, понимаемый как k-линейное отображение, называется *дифференциалом* k-го порядка функции f в точке a. При этом функция f называется k *раз дифференцируемой* в точке a.

Лемма 7.3. *Дифференциал $d^k f$ симметричен, то есть на наборах k векторов, отличающихся лишь порядком, принимает одинаковые значения.*

Доказательство. Достаточно установить совпадение на наборах векторов стандартного базиса и воспользуемся линейностью.

Покажем по индукции, что $d^k f_a(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}(a)$. При $k - 1$ это следует из теоремы 1 и определения частной производной. Если равенство верно для $k-1$, то $\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}} = d^{k-1} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_{k-1}})$ дифференцируема в точке a. Следовательно,

$$d^k f_a(e_{i_1, \dots, e_{i_k}}) = d\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}}\right)_a (e_{i_k}) = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}}\right)|_{x=a} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}(a).$$

Симметричность $d^k f$ на наборах базисных векторов теперь вытекает из следствия теоремы Юнга (7.4). □

Эта теорема позволяет наряду с k- линейным отображением $d^k f_a$ рассматривать соответствующую k- форму $h \mapsto d^k f_a(h, \dots, h) =: d^k f_a(h^k)$. При $m = 1$ форма $d^k f_a(h^k)$ является однородным многочленом степени k от компонент вектора h:

$$d^k f_a(h^k) = \sum_{i_k=1}^{n} \dots \sum_{i_1=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}(a) h_{i_1} \dots h_{i_k},\ h = (h_1, \dots, h_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

Следствие. Функция f дифференцируема k раз в точке a, тогда и только тогда, когда все частные производные до порядка $k - 2$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки a, а все частные производные порядка $k - 1$ дифференцируемы в точке a.

Теорема 7.5 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа)**.** *Пусть* $f : \underbrace{U}_{\text{откр.}} \to \mathbb{R}$ *дифференцируема* $(p+1)$ *раз на* U*. Если* $a \in U$, $h \in \mathbb{R}^n$, *такие что* $[a, a+h] \subset U$, *то* $\exists \Theta \in (0, 1)$, *что*

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} d^k f_a(h) + \frac{1}{(p+1)!} d^{p+1} f_{a+\Theta h}(h).$$

Доказательство. $[a, a+h] = \{a + th \mid t \in [0, 1]\}$ — отрезок с концами a и $a+h$.

Рассмотрим функцию $g(t) = f(a + th)$, определённую на интервале, содержащем $[0, 1]$. Так как $t \mapsto \underbrace{a}_{\text{пост.}} + \underbrace{th}_{\text{линейн.}} \Rightarrow \forall \tau \in \mathbb{R}\ d(a+th)_t(\tau) = \tau h$. Тогда по теореме о дифференцировании композиции

$$dg_t(\tau) = df_{a+th}(\tau h).$$

По индукции

$$d^k g_t(\tau) = d^k f_{a+th}(\tau h) \quad k = 1, \ldots, p+1.$$

Имеем $d^k g_t(\tau) = g^{(k)}(t)\tau^k \overset{\tau=1}{\Rightarrow} g^{(k)}(t) = d^k f_{a+th}(h), \quad k = 1, \ldots, p+1.$

По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$g(t) = g(0) + \sum_{k=1}^{p} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} t^k + \frac{g^{(p+1)}(\theta_t)}{(p+1)!} t^{p+1}.$$

При $t = 1$ и $\theta = \theta_1$ получаем искомую формулу. □

Лемма 7.4. *Пусть* $\varphi : \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – k*-линейное симметрическое отображение, и* $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\Phi(x) = \varphi(x, \ldots, x)$*. Тогда функция* Φ *дифференцируема и* $d\Phi_x(h) = k\varphi(x^{k-1}, h)$*.*

Доказательство. Имеем $\Phi(x+h) - \Phi(x) = \varphi(x+h, \ldots, x+h) - \varphi(x, \ldots, x) = k\varphi(x, \ldots, x, h) +$ слагаемые $\varphi(x^p, h^q)$, где $p + q = k$, $q \geqslant 2$.

Покажем, что найдется такое $C \geqslant 0$, что $|\varphi(x^p, h^q)| \leqslant C|x|^p|h|^q$. Если оба x, h ненулевые, то $|\varphi(x^p, h^q)| = \left|\varphi\left((\frac{x}{|x|})^p, (\frac{h}{|h|})^q\right)\right| |x|^p|h|^q \leqslant C|x|^p|h|^q$ для $C = \max_{|x|=1} |\varphi(x^k)|$. Оценка очевидно выполняется, когда хотя бы один из векторов нулевой.

Так как $q \geqslant 2$, то из полученной оценки следует, что $\varphi(x^p, h^q) = o(|h|)$ при $h \to 0$, что доказывает утверждение. □

Теорема 7.6 (остаточный член в форме Пеано)**.** *Если функция* $f : \underbrace{U}_{\text{откр.}} \to \mathbb{R}$ *дифференцируема* p *раз в точке* a*, то*

$$f(a+x) = f(a) + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} d^k f_a(h) + o(|h|^p), \ h \to 0.$$

Доказательство. Индукция по p. При $p = 1$ равенство верно по определению дифференцируемости. Предположим, утверждение верно при $p - 1$.

Рассмотрим функцию $g(x) = f(a+x) - f(a) - df_a(x) - \ldots - \frac{1}{p!} d^p f_a(x)$. Зафиксируем $v \in \mathbb{R}^n$. Тогда по лемме 7.4 имеем

$$d(d^k f_a(x))(v) = k d^k f_a(x)(v)$$

и, значит,

$$dg_x(v) = df_{a+x}(v) - df_a(v) - \ldots - \frac{1}{(p-1)!}d^p f_a(x,\ldots,x,v).$$

Применим предположение индукции к $y \mapsto df_y(v)$:

$$df_{a+x}(v) = df_a(v) + d^2 f_a(x,v) + \ldots + \frac{1}{(p-1)!}d^p f_a(x,\ldots,x,v) + o(|x|^{p-1}).$$

Заключаем, что $|dg_x(v)| = o(|x|^{p-1})$ при $x \to 0$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Найдем такое $\delta > 0$, что $\|dg_h\| \leqslant \varepsilon |h|^{p-1}$ при всех $h \in \mathbb{R}$ с $|h| < \delta$. В шаре $B_\delta(0)$ применим теорему 7.5 (для $p = 1$), получим

$$|g(h)| = |g(h) - g(o)| \leqslant \varepsilon |h|^{p-1}|h|,$$

то есть $g(h) = o(|h|^p)$, $h \to 0$. □

Определение 7.9. Будем говорить, что f k раз непрерывно дифференцируема на U и писать $f \in C^k(U)$, если $d^{k-1}f_x \in C^1(U)$.

Замечание. Пусть $\varphi : \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – k-линейное отображение. Тогда $\|\varphi\| = \max\limits_{|v_1|=1,\ldots,|v_k|=1} |\varphi(v_1,\ldots,v_k)|$ – норма на пространстве k-линейных отображений. Тогда из леммы 7.1 $f \in C^k(U) \Leftrightarrow$ все частные производные до k-го порядка непрерывны на U.

8 Мера Лебега

8.1 Объем бруса

Определение 8.1. *Брусом* в $\mathbb{R}^n$ называется множество вида $B = I_1 \times \ldots \times I_n$, где I_k – ограниченный промежуток. Если $a_k \leqslant b_k$ – концы I_k, то $|B| = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$ называется *объемом* бруса B.

Если хотя бы один из промежутков I_k вырожденный, то брус B называется *вырожденным*, в частности, $\varnothing$ — вырожденный брус. Объём вырожденного бруса равен 0.

Если все I_k – отрезки, то брус называется *замкнутым*.

Если все I_k – интервалы, то брус называется *открытым*.

Задача. *Докажите, что пересечение двух брусов — брус, а разность двух брусов — объединение не более чем $2n$ брусов.*

Свойство 8.1. *Если $B, B_1, \ldots, B_m$ — брусы и $B \subset \bigcup_{i=1}^m B_i$, то $|B| \leqslant \sum_{i=1}^m |B_i|$.*

Доказательство. Если $I \subset \mathbb{R}$ — ограниченный промежуток, то

$$|I| - 1 \leqslant \#(I \cap \mathbb{Z}) \leqslant |I| + 1,$$
$$N|I| - 1 \leqslant \#(NI \cap \mathbb{Z}) \leqslant N|I| + 1,$$
$$|I| - \frac{1}{N} \leqslant \frac{1}{N}\#\left(I \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right) \leqslant |I| + \frac{1}{N},$$
$$|I| = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#\left(I \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right).$$

Пусть $B = I_1 \times \ldots \times I_n$, тогда

$$|B| = \lim_{N\to\infty} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{N} \# \left(I_j \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z} \right) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^n} \# \left(B \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^n \right).$$

Если $B \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_i$, то

$$\frac{1}{N^n} \# \left(B \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^n \right) \leqslant \frac{1}{N^n} \sum_{i=1}^{n} \# \left(B_i \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^n \right).$$

Предельный переход $N \to \infty$ завершает доказательство. □

Свойство 8.2. *Для любого бруса B и $\varepsilon > 0$ найдутся замкнутый брус B' и открытый брус B^o, так что $B' \subset B \subset B^o$ и $|B'| > |B| - \varepsilon$, $|B^o| < |B| + \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть $B = I_1 \times \ldots \times I_n$, где I_k — ограниченный промежуток с концами $a_k \leqslant b_k$.

Если $|B| > 0$, то положим

$$B'_\delta = [a_1 + \delta, b_1 - \delta] \times \ldots \times [a_n + \delta, b_n - \delta]$$
$$B^o_\delta = (a_1 - \delta, b_1 + \delta) \times \ldots \times (a_n - \delta, b_n + \delta)$$

Так как $|B'_\delta|$, $|B^o_\delta| \to |B|$ при $\delta \to +0$, то искомые брусы существуют и определяются выбором δ. Если же B – вырожденный брус, то положим $B' = \varnothing$, B^o_δ как выше. □

Лемма 8.1. *Каждое непустое открытое множество U в $\mathbb{R}^n$ представимо в виде счетного объединения непересекающихся кубов (брусов, у которых длины ребер равны).*

Доказательство. Куб $\left[\frac{k_1}{2^m}; \frac{k_1+1}{2^m}\right) \times \ldots \times \left[\frac{k_n}{2^m}; \frac{k_n+1}{2^m}\right)$, где $k_i \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant 0$, будем называть двоичным m-го ранга.

Обозначим через A_0 множество всех кубов ранга 0, содержащихся в U. Если множества $A_0, \ldots, A_{m-1}$ уже определены, то обозначим через A_m множество всех кубов ранга m, содержащихся в U и не лежащих ни в одном кубе из $A_0, \ldots, A_{m-1}$. Положим $A = \bigcup_{m=0}^{\infty} A_m$. Тогда A – счетное множество непересекающихся кубов. Покажем, что $U = \bigcup_{Q\in A} Q$. Пусть $x \in U$. Ввиду открытости U существует шар $\overline{B_r}(x) \subset U$. Если m таково, что $\frac{\sqrt{n}}{2^m} \leqslant r$, то содержащий точку x куб $Q_m(x)$ ранга m удовлетворяет включению $Q_m(x) \subset \overline{B_r}(x)$ и, значит, множество $\{m \in \mathbb{N}_0 : Q_m(x) \subset U\}$ непусто. Обозначим через m_0 его минимум. Тогда $Q_m(x) \not\subset U$ при $m < m_0$, а $Q_{m_0}(x) \subset U$. Следовательно, $Q_{m_0}(x) \in A_{m_0}$ и поэтому $x \in \bigcup_{Q\in A} Q$. Учитывая, что обратное включение очевидно, равенство установлено. □

8.2 Алгебры множеств

Определение 8.2. Семейство $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ называется *алгеброй*, если

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$;
2. если $E \in \mathcal{A}$, то $E^c = \mathbb{R}^n \setminus E \in \mathcal{A}$;
3. если $E, F \in \mathcal{A}$, то $E \cup F \in \mathcal{A}$.

Алгебра $\mathcal{A}$ называется *σ-алгеброй*, если выполнено условие

3'. если $E_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}$, то $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A}$.

Пример.

1. σ-алгебра, содержащая все одноэлементные множества, также содержит все не более чем счетные множества и множества, дополнение к которым не более чем счетно.

2. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ – минимальная по включению σ-алгебра, содержащая все открытые множества (*борелевская σ-алгебра*). Чтобы установить существование $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, необходимо рассмотреть пересечение всех σ-алгебр, содержащие открытые множества.

Пример. Покажем, что минимальная σ-алгебра, содержащая двоичные кубы, совпадает с $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Пусть O – совокупность открытых множеств в $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \underbrace{\sigma(O)}_{\substack{\text{мин. } \sigma\text{-алгебра,} \\ \text{содержащая } 0}} \subset \sigma(\text{двоич. кубы})$.

$$\left[\frac{k_1}{2^m}; \frac{k_1+1}{2^m}\right) \times \ldots \times \left[\frac{k_n}{2^m}; \frac{k_n+1}{2^m}\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \left(\frac{k_1}{2^m} - \frac{1}{i}; \frac{k_1+1}{2^m}\right) \times \ldots \times \left(\frac{k_n}{2^m} - \frac{1}{i}; \frac{k_n+1}{2^m}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma(\text{двоич. кубы}) \subset \sigma(O).$$

Задача. $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(C)$, *где* $C = \{(a, +\infty), a \in \mathbb{Q}\}$.

Цель: построить σ-алгебру $M \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ и меру $\mu : M \to [0, +\infty]$, такие что

1. $E = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty} E_k$, где $E_k \in M$, то $\mu(E) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(E_k)$ (счетная аддитивность);

2. $\mu(R) = |R|$ $\forall R$ – брус;

3. $\mu(E + y) = \mu(E)$.

8.3 Внешняя мера

Определение 8.3. *Внешней мерой Лебега* множества $E \subset \mathbb{R}^n$ называется величина

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |B_i| : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right\},$$

где инфимум берется по всем счетным наборам $\{B_i\}$, покрывающих E.

Очевидно, $0 \leqslant \mu^*(E) \leqslant +\infty$.

Теорема 8.1. *Внешняя мера обладает следующими свойствами*

1. *если* $E \subset F$, *то* $\mu^*(E) \leqslant \mu^*(F)$ *(монотонность);*

2. *если* $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, *то* $\mu^*(E) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k)$ *(счетная полуаддитивность);*

3. $\mu^*(R) = |R|$ *для любого бруса* R *(нормировка).*

Доказательство. Докажем пункт 2. Будем предполагать, что $\mu^*(E) < +\infty$, иначе утверждение очевидно. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим семейство брусов $\{B_{i,k}\}_{i=1}^{\infty}$, образующее покрытие E_k, такие что

$$\sum_{i=1}^{\infty} |B_{i,k}| < \mu^*(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Семейство $\{B_{i,k}\}_{i,k=1}^{\infty}$ образуют покрытие $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ и

$$\mu^*(E) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{+\infty} |B_{i,k}| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\mu^*(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\mu^*(E_k) + \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ – любое, то пункт 2 установлен.

Докажем пункт 3. Так как $\{R\}$ – покрытие R брусом, то $\mu^*(R) \leqslant |R|$. Покажем, что $\mu^*(R) \geqslant |R|$.

Сначала для случая, когда R – замкнуто. Нам достаточно показать, что $|R| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |B_i|$ для всякого покрытия R брусами B_i. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда по свойству брусов (8.2) $\exists \underbrace{B_i^o}_{\text{отк. брус}} \supset B_i$ и $|B_i^o| < |B_i| + \frac{\varepsilon}{2^i}$. Так как $R \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}$ и R – компакт, то по свойству брусов (8.1)

$$R \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_i^o \Rightarrow |R| \leqslant \sum_{i=1}^{N} |B_i^o| \Rightarrow |R| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\left(|B_i| + \frac{\varepsilon}{2^i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} |B_i| + \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ – любое, то $|R| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |B_i|$.

Пусть R – произвольный брус. Тогда для $\varepsilon > 0$ по свойству (8.2) $\exists \underbrace{R'}_{\text{замк. брус}} \subset R$ $(|R'| > |R| - \varepsilon)$. Тогда

$$\mu^*(R) \geqslant \mu^*(R') = |R'| > |R| - \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ – любое, то $\mu^*(R) \geqslant |R|$. □

8.4 Измеримые множества

Определение 8.4. Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *измеримым (по Лебегу)*, если для любого $A \subset \mathbb{R}^n : \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$.

Замечание. При проверке измеримости достаточно установить, что $\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$, так как противоположное неравенство следует из счетной аддитивности.

Пример. Если $\mu^*(E) = 0$, то E измеримо.

Действительно, $\mu^*(A \cap E) \leqslant \mu^*(E) = 0$, $\mu^*(A \cap E) \leqslant \mu^*(A)$ из монотонности μ^*. Тогда $\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$.

Пример. Для всякого $a \in \mathbb{R}$ и $k \in \{1, \ldots, n\}$ полупространство $H = H_{a,k} = \{x = (x_1, \ldots, x_n)^T : x_k < a\}$ измеримо.

Рассмотрим $A \subset \mathbb{R}^n$ и произвольное покрытие $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$. Брусами определим

$$B_i^1 = B_i \cap H,\ B_i^2 = B_i \cap H^c.$$

Тогда B_i^1, B_i^2 – брусы. $\{B_i^1 \cap H\}_{i=1}^{\infty}$ – покрытие $A \cap H$. $\{B_i^2 \cap H^c\}_{i=1}^{\infty}$ – покрытие $A \cap H^c$.

$$\sum_{i=1}^{\infty}|B_i| = \sum_{i=1}^{\infty}|B_i^1| + \sum_{i=1}^{\infty}|B_i^2| \geqslant \mu^*(A\cap H) + \mu^*(A\cap H^c).$$

Следовательно, $\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A\cap H) + \mu^*(A\cap H^c)$.

Аналогичное утверждение верно и для других неравенств между x_k и a.

Теорема 8.2 (Каратеодори)**.** *Совокупность $\mathcal{M}$ всех измеримых множеств в $\mathbb{R}^n$ образует σ-алгебру. Сужение $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ счетно аддитивно.*

Доказательство. $\varnothing \in \mathcal{M}$, $E \in \mathcal{M} \Rightarrow E^c \in \mathcal{M}$.

1. Пусть $E, F \in \mathcal{M}$. Покажем, что $E\cup F \in \mathcal{M}$.

   Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$, тогда

   $$\mu^*(A\cap(E\cup F)) + \mu^*(A\cap(E\cup F)^c) = \mu^*(A\cap(E\cup F)\cap E) + \mu^*(A\cap(E\cup F)\cap E^c) + \mu^*(A\cap(E\cup F)^c) =$$

   $$= \mu^*(A\cap E) + \mu^*(A\cap E^c\cap F) + \mu^*(A\cap E^c\cap F^c) = \mu^*(A\cap E) + \mu^*(A\cap E^c) = \mu^*(A).$$

2. Пусть $\{E_k\} \subset \mathcal{M}$, причем $E_i\cap E_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Покажем, что $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{M}$.

   Положим $F_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$. Если $A \subset X$, то

   $$\mu^*(A\cap F_n) = \mu^*(A\cap F_n\cap E_n) + \mu^*(A\cap F_n\cap E_n^c) = \mu^*(A\cap E_n) + \mu^*(A\cap F_{n-1}).$$

   Продолжая процесс, получим $\mu^*(A\cap F_n) = \sum_{k=1}^{n}\mu^*(A\cap E_k)$.

   Поскольку $F_n \in \mathcal{M}$, то

   $$\mu^*(A) = \mu^*(A\cap F_n) + \mu^*(A\cap F_n^c) \geqslant \sum_{k=1}^{n}\mu^*(A\cap E_k) + \mu^*(A\cap F^c).$$

   Переходя к пределу при $n\to\infty$, получим $\mu^*(A) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(A\cap E_k) + \mu^*(A\cap F^c)$. Откуда по свойству счетной полуаддитивности

   $$\mu^*(A) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(A\cap E_k) + \mu^*(A\cap F_c) \geqslant \mu^*(A\cap F) + \mu^*(A\cap F^c) \geqslant \mu^*(A).$$

   Это доказывает, что $F \in \mathcal{M}$. Если еще положить $A = F$, то $\mu^*(F) = \sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(E_k)$.

3. Пусть $\{A_k\} \subset \mathcal{M}$. Покажем, что $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}$.

   Положим $E_1 = A_1$, $E_k = A_k \setminus \bigcup_{i<k} E_i$. Тогда E_k попарно не пересекаются, и $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{M}$ по предыдущему пункту.

□

Следствие. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}$.

Доказательство. Брус измерим, так как его можно записать в виде пересечения конечного числа подпространств (измеримы по примеру 8.4). По лемме 8.1 тогда всякое открытое множество измеримо. □

Определение 8.5. $\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}}$ – мера Лебега.

Теорема 8.3 (непрерывность меры)**.** *1. $A_i \in \mathcal{M}$, $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, $A = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$. Тогда $\mu(A) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$ (непрерывность снизу).*

2. $A_i \in \mathcal{M}$, $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, $A = \bigcap_{i=1}^\infty A_i$, $\mu(A_1) < \infty$. Тогда $\mu(A) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$ (непрерывность сверху).

Доказательство. 1. Положим $B_1 = A_1$, $B_i = A_i \setminus A_{i-1}$. Тогда $B_i \in \mathcal{M}$, $B_i \cap B_j = \varnothing$ при $i \neq j$, и $\bigcup_{i=1}^m B_i = \bigcup_{i=1}^m A_i$ для всех $m \in \mathbb{N} \cup \infty$. Поэтому

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty B_i\right) = \sum_{i=1}^\infty \mu(B_i) = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^m \mu(B_i) = \lim_{m\to\infty} \mu(A_m).$$

2. Рассмотрим $A_1 \setminus A_i$. Применим прошлый пункт к этим множествам. Тогда $\bigcup_{i=1}^\infty (A \setminus A_i) = A_1 \setminus A$ и

$$\mu(A_1) - \mu(A) = \mu(A_1 \setminus A) = \lim_{m\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_m) = \mu(A_1) - \lim_{m\to\infty} \mu(A_m).$$

Осталось из обоих частей вычесть $\mu(A_1)$ и изменить знак.

□

Задача. *Покажите, что $\mu(A_1) < \infty$ – существенно.*

Пример (инвариативность меры относительно сдвигов)**.** Пусть $E \in \mathcal{M}$ и $y \in \mathbb{R}^n$. Тогда $E + y = \{x + y : x \in E\} \in \mathcal{M}$ и $\mu(E + y) = \mu(E)$.

Доказательство. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ и $\{B_i\}_{i=1}^\infty$ – покрытие A брусами.

$$A \subset \bigcup_{i=1}^\infty B_i \Rightarrow A + y \subset \bigcup_{i=1}^\infty (B_i + y).$$

Ясно, что $B_i + y$ – брус, $|B_i + y| = |B_i|$. Тогда $\mu^*(A + y) \leqslant \sum_{i=1}^\infty |B_i| \Rightarrow \mu^*(A + y) \leqslant \mu^*(A)$. Так как $A = (A + y) - y \Rightarrow \mu^*(A) \leqslant \mu^*(A + y)$, то есть $\mu^*(A) = \mu^*(A + y)$.

Пусть $E \in \mathcal{M}$. Тогда

$$\mu^*(A \cap (E + y)) + \mu^*(A \cap (E + y)^c) = \mu^*\left(((A - y) \cap E) + y\right) + \mu^*\left(((A - y) \cap E^c) + y\right) =$$

$$= \mu^*\left((A - y) \cap E\right) + \mu^*\left((A - y) \cap E^c\right) = \mu^*(A - y) = \mu^*(A),$$

так что $E + y$ также измеримо. □

Лемма 8.2 (регулярность меры)**.** *Если $E \in \mathcal{M}$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists \underbrace{G}_{\text{откр.}} \supset E\ (\mu(G \setminus E) < \varepsilon)$.*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда E ограничено, а значит, $\mu^*(E) < \infty$. Для $\varepsilon > 0$ рассмотрим покрытие E счетным семейством брусов $\{B_k\}$ с $\sum_{i=1}^\infty |B_i| < \mu(E) + \frac{\varepsilon}{2}$. По свойству брусов $\exists \underbrace{B_i^o}_{\text{откр.}} \supset B_i \left(|B_i^o| < |B_i| + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\right)$. Определим $G = \bigcup_{i=1}^\infty B_i^o$. Тогда G – открытое, $G \supset E$ и

$$\mu(G \setminus E) = \mu(G) - \mu(E) \leqslant \sum_{i=1}^\infty |B_i^0| - \mu(E) < \varepsilon.$$

Перейдем к общему случаю. Поскольку $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, где $A_k = \{x \in \mathbb{R}^n : k-1 \leqslant |x| < k\}$, то E есть счетное объединение непересекающихся играниченных измеримых множеств $E_k = E \cap A_k$. По доказанному существует такое открытое множество $G_k \supset E_k$, что $\mu(G_k \setminus E_k) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^k}$. Тогда множество $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$ открыто, содержит E и

$$\mu(G \setminus E) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k \setminus E\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(G_k - E_k) < \varepsilon.$$

□

Следствие. Если $E \in \mathcal{M}$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists \underbrace{F}_{\text{замк.}} \subset E\, (\mu(E \setminus F) < \varepsilon)$.

Определение 8.6. Счетное пересечение открытых множеств называется множествами типа G_δ.

Счетное объединение замкнутых множеств называется множествами типа F_σ.

Замечание. Множества типа G_δ и F_σ являются борелевскими.

Теорема 8.4 (критерий измеримости). *Множество E измеримо $\Leftrightarrow$ существует множество Ω типа G_δ, что $E \subset \Omega$ и $\mu(\Omega \setminus E) = 0$.*

Доказательство. Докажем первое утверждение.

($\Rightarrow$) Для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдется такое открытое $G_k \supset E$ с $\mu(G_k \setminus E) \leqslant \frac{1}{k}$. Положим $\Omega = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$, тогда $E \subset \Omega$, и $\mu(\Omega \setminus E) \leqslant \mu(G_k \setminus E) \leqslant \frac{1}{k}$, откуда $\mu(\Omega \setminus E) = 0$.

($\Leftarrow$) Поскольку $E = \Omega \setminus (\Omega \setminus E)$ есть разность двух измеримых множеств, то E измеримо.

□

Замечание. Множество E измеримо $\Leftrightarrow$ существует множество Δ типа F_σ, что $\Delta \subset E$ и $\mu(E \setminus \Delta) = 0$.

Теорема 8.5 (критерий измеримости). *Пусть $\mu^*(E) < \infty$. Множество E измеримо $\Leftrightarrow$ существуют брусы $B_1, \ldots, B_N$, такие что $\forall \varepsilon > 0\ \mu^*(E \triangle \bigcup_{k=1}^{N} B_k) < \varepsilon$.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Если E измеримо, то $\exists \underbrace{\{B_k\}_{k=1}^{\infty}}_{\text{брусы}}$, такие что $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ и $\sum_{k=1}^{+\infty} |B_k| < \mu^*(E) + \frac{\varepsilon}{2}$. Так как ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} |B_k|$ сходится, то $\exists N \left(\sum_{k=N+1}^{+\infty} |B_k| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Положим $C = \bigcup_{k=1}^{N} B_k$. Тогда:

$$\mu^*(E \triangle C) \leqslant \mu^*(E \setminus C) + \mu^*(C \setminus E) \leqslant \mu^*\left(\bigcup_{k=N+1}^{+\infty} B_k\right) + \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k \setminus E\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} |B_k| + \sum_{k=1}^{+\infty} |B_k| - \mu^*(E) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

($\Leftarrow$) Пусть $\mu^*(E \triangle C) < \varepsilon$. Тогда тем более $\mu^*(E \setminus C) < \varepsilon$ и $\mu^*(C \setminus E) < \varepsilon$. Поскольку $E \subset C \cup (E \setminus C)$ и $E^c \subset C^c \cup (C \setminus E)$, то для любого $A \subset \mathbb{R}^n$ имеем

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \leqslant \mu^*(A \cap C) + \mu^*(A \cap (E \setminus C)) + \mu^*(A \cap C^c) + \mu^*(A \cap (C \setminus E)) \leqslant$$

$$\leqslant \mu^*(A \cap C) + \mu^*(A \cap C^c) + \mu^*(E \setminus C) + \mu^*(C \setminus E) < \mu^*(A) + 2\varepsilon.$$

Следовательно, $\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \leqslant \mu^*(A)$. Значит, E измеримо. □

9 Интеграл Лебега

9.1 Измеримые функции

Пусть E измеримо и $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$.

Определение 9.1. Функция f называется *измеримой* (по Лебегу), если $\{x \in E : f(x) < a\} = f^{-1}([-\infty, a))$ измеримо для всех $a \in \mathbb{R}$.

Лемма 9.1. *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *f измеримо;*
2. *$f^{-1}(U)$ измеримо для любого открытого U в $\overline{\mathbb{R}}$;*
3. *$f^{-1}(\Omega)$ для любого борелевского Ω в $\overline{\mathbb{R}}$.*

Доказательство. Рассмотрим $\mathcal{A} = \{A \in B(\overline{\mathbb{R}}) : f^{-1}(A) \text{ измеримо}\}$. Так как $\varnothing \in \mathcal{A}$, $E \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(\overline{\mathbb{R}} \setminus A) \Rightarrow (A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{\mathbb{R}} \setminus A \in \mathcal{A})$ и $f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(A_i) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$, то $\mathcal{A}$ образует σ-алгебру. $\mathcal{A}$ содержит все лучи $[-\infty, a)$. Следовательно, $B(\overline{\mathbb{R}}) = \mathcal{A}$, то есть $(1 \Rightarrow 3)$.

Импликации $(3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1)$ очевидны. □

Замечание. В определении измеримой функции $<$ можно заменить на $\leqslant, >, \geqslant$. Это следует из следующих равенств:

$$\{x : f(x) \leqslant a\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x : f(x) < a + \frac{1}{k}\},$$

$$\{x : f(x) \geqslant a\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x : f(x) > a - \frac{1}{k}\},$$

$$\{x : f(x) > a\} = E \setminus \{x : f(x) \leqslant a\},$$

$$\{x : f(x) < a\} = E \setminus \{x : f(x) \geqslant a\}.$$

Пример.

1. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$, Определим *индикатор (характеристическую функцию)* A:

   $$\mathbb{I}_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ \mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

   Поскольку $\{x : \mathbb{I}_A(x) < a\}$ пусто при $a \leqslant 0$, совпадает с A^c при $a \in (0, 1]$ и совпадает с $\mathbb{R}^n$ при $a > 1$, то функция $\mathbb{I}_A$ является измеримой $\Leftrightarrow$ A измеримо.

2. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ непрерывна и измерима на E. По критерию непрерывности $f^{-1}(-\infty, a)$ открыто в E, то есть $\exists \underbrace{G}_{\text{откр. в } \mathbb{R}^n} : f^{-1}(-\infty, a) = E \cap G$. Следовательно, $f^{-1}(-\infty, a)$ измеримо как пересечение измеримых множеств.

Теорема 9.1. *Если $f, g : E \to \mathbb{R}$ измеримые и $\lambda \in \mathbb{R}$, то $f + g, \lambda f, |f|, fg$ также измеримы.*

Доказательство. 1. Докажем измеримость суммы. Поскольку $\alpha < \beta \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{Q}(\alpha < r < \beta)$, $\mathbb{Q} = \{r_k\}_{k=1}^{\infty}$, то

$$\{x \in E : f(x)+g(x) < a\} = \{x \in E : f(x) < a-g(x)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{x \in E : f(x) < r_k < a-g(x)\} =$$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty}\{x \in E : f(x) < r_r\} \cap \{x \in E : g(x) < a - r_k\}.$$

Следовательно, $\{x \in E : f(x) + g(x) < a\}$ измеримо.

2. Пусть $\lambda > 0$, тогда $\{x \in E : \lambda f(x) < a\} = \{x \in E : f(x) < \frac{a}{\lambda}\}$ измеримо.

   Если $\lambda = 0$, то тривиально. Если $\lambda < 0$, то аналогично.

3. Так как $\{x \in E : f^2(x) < a\} = \{x \in E : f(x) < \sqrt{a}\} \cap \{x \in E : f(x) > -\sqrt{a}\}$ измеримо $\forall a > 0$.

   Если $a \leqslant 0$, то $\{x \in E : f^2(x) < a\} = \varnothing$ – измеримо.

   Следовательно, f^2 – измеримая функция. Аналогично для $|f|$.

   Так как $fg = \frac{1}{2}\left((f+g)^2 - f^2 - g^2\right)$, то fg измерима.

$\square$

Задача. *Пусть $g : E \to \mathbb{R}$ измерима, $g \neq 0$ на E. Докажите, что $\frac{f}{g}$ измерима.*

Замечание. Теорема остается справедливой для функций со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$, если операции допустимы. Например, для $f+g$ необходимо $f^{-1}(-\infty)\cap g^{-1}(+\infty) = \varnothing$ и $f^{-1}(+\infty)\cap g^{-1}(-\infty) = \varnothing$.

Определение 9.2. Функции $f^+ = \max\{f, 0\}$ и $f^- = \max\{-f, 0\}$ называются *положительной* и *отрицательной* частями f соответственно.

Замечание. Из определения следует, что $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$ и $0 \leqslant f^{\pm} \leqslant |f|$.

Следствие. Измеримость f равносильна одновременной измеримости f^+ и f^-.

Доказательство. Пусть f измерима, тогда $f^{\pm} = \frac{1}{2}(|f| \pm f)$ – измеримы. Если $f^{\pm}$ измеримы, то $f = f^+ - f^-$ измерима. $\square$

Теорема 9.2. *Если $f_k : E \to \overline{\mathbb{R}}$ – измеримы, то $\sup\limits_k f_k$, $\inf\limits_k f_k$, $\overline{\lim}_{k\to+\infty} f_k$, $\underline{\lim}_{k\to+\infty} f_k$ также измеримы на E.*

Доказательство. Измеримость $g = \sup\limits_k f_k$ следует из равенства:

$$\{x \in E : g(x) \leqslant a\} = \bigcap_{k=1}^{+\infty}\{x \in E : f_k(x) \leqslant a\}$$

Измеримость $h = \inf\limits_k f_k$ следует из $\inf\limits_k f_k = -\sup\limits_k(-f_k)$.

Далее, поскольку $\overline{\lim}_{k\to+\infty} f_k = \inf\limits_k \sup\limits_{m\geqslant k} f_m$, $\underline{\lim}_{k\to+\infty} f_k = \sup\limits_k \inf\limits_{m\geqslant k} f_m$, то оба предела измеримы. $\square$

Следствие. Если $f_k : E \to \overline{\mathbb{R}}$ измеримы, и $f(x) = \lim_{k\to+\infty} f_k(x)$ для всех $x \in E$, то f измерима на E.

Доказательство. Вытекает из предыдущей теоремы, но докажем непосредственно.

Имеем $f(x) < a \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{N}\ \exists N\ \forall k \geqslant N\ (f_k(x) < a - \frac{1}{j})$.

$\{x : f(x) < a\} = \bigcup_{j=1}^{+\infty} \bigcup_{N=1}^{+\infty} \bigcap_{k=N}^{+\infty} \{x : f_k(x) < a - \frac{1}{j}\}$ – измеримо как операции над измеримыми множествами. □

Определение 9.3. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, Q – формула на E.

Говорят, что Q верна *почти везде на* E, если $\mu(x \in E : Q(x) \text{ ложно}) = 0$.

Лемма 9.2. *Пусть $f, g : E \to \mathbb{R}$. Если $f = g$ почти везде и f измерима, то g измерима.*

Доказательство. По условию, $Z = \{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$ имеет меру нуль. Тогда для любого $a \in \mathbb{R}$ имеем $\{x \in E : g(x) < a\} = (\{x \in E : f(x) < a\} \cap Z^c) \cup (\{x \in E : g(x) < a\} \cap Z)$ – измеримо. □

Следствие. Если $f_k : E \to \overline{\mathbb{R}}$ измеримы и $f_k \to f$ почти везде на E, где $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, то f измерима.

Доказательство. $g = \overline{\lim}_{k\to+\infty} f_k$ измерима на E, $f = g$ почти везде на E, значит f измерима (по лемме). □

Определение 9.4. Функция $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *простой*, если φ измерима и множество её значений конечно.

Замечание. Любая линейная комбинация индикаторов измеримых множеств является простой функцией.

С другой стороны, для любой простой функции φ существует разбиение $\mathbb{R}^n$ конечным числом измеримых множеств, на которых φ постоянна (допустимое разбиение для φ). Такое разбиение можно построить следующим образом: пусть $\varphi(\mathbb{R}^n) = \{a_1, \ldots, a_m\}$, где a_i попарно различны, определим $A_i = \varphi^{-1}(a_i)$. Тогда $\varphi = \sum_{i=1}^m a_i \mathbb{I}_{A_i}$ и $\{A_i\}$ – допустимое разбиение.

Рассмотрим вопрос о приближении измеримых функций простыми.

Теорема 9.3. *Если $f : E \to [0, +\infty]$ – неотрицательная измеримая функция, то существует последовательность $\{\varphi_k\}$ неотрицательных простых функций, таких что $\forall x \in E$ выполняется*

1. $0 \leqslant \varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x) \leqslant \ldots$
2. $\lim_{k\to+\infty} \varphi_k(x) = f(x)$

Доказательство. Для $k \in \mathbb{N}$ определим множества:

$$E_{k,j} = \left\{x \in E : \frac{j-1}{2^k} \leqslant f(x) < \frac{j}{2^k}\right\},\ j = 1, \ldots, k \cdot 2^k,$$

$$F_k = \{x \in E : f(x) \geqslant k\}.$$

Множества $E_{k,j}$ и F_k измеримы и в объединении дают E.

Определим $\varphi_k = \sum_{j=1}^{k\cdot 2^k} \frac{j-1}{2^k}\mathbb{I}_{E_{k,j}} + k\cdot\mathbb{I}_{F_k}$. Пусть $x \in E$. Покажем, что $\{\varphi_k(x)\}$, возрастая, стремится к $f(x)$.

Если $f(x) = +\infty$, то $\varphi_k(x) = k$ для всех k и утверждение верно.

Пусть $f(x) \in \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{N}$. Если $f(x) \geqslant k+1$, то $\varphi_{k+1}(x) = k+1 > k = \varphi_k(x)$. Если $k \leqslant f(x) < k+1$, то $\varphi_{k+1}(x) \geqslant k = \varphi_k(x)$.

Пусть $f(x) < k$, тогда $\frac{j-1}{2^k} \leqslant f(x) < \frac{j}{2^k}$ для некоторого j, $1 \leqslant j \leqslant k\cdot 2^k$. Возможны два варианта: $\frac{2j-2}{2^{k+1}} \leqslant f(x) < \frac{2j-1}{2^{k+1}}$ или $\frac{2j-1}{2^{k+1}} \leqslant f(x) < \frac{2j}{2^{k+1}}$. В обоих случаях $\varphi_{k+1}(x) \geqslant \frac{2j-2}{2^{k+1}} = \frac{j-1}{2^k} = \varphi_k(x)$ и возрастание установлено. Кроме того, $0 \leqslant f(x) - \varphi_k(x) < 2^{-k}$ при всех $k \geqslant [f(x)] + 1$, откуда следует, что $\varphi_k(x) \to f(x)$. □

Замечание. Если f ограничена, то $\varphi_k \rightrightarrows f$ на E.

Определение 9.5. Пусть φ – простая функция, $\varphi = \sum_{i=1}^m a_i\mathbb{I}_{A_i}$, где $\{A_i\}_{i=1}^m$ – допустимое разложение.

Интегралом от φ по измеримому множеству E называется

$$\int_E \varphi d\mu = \sum_{i=1}^m a_i\mu(E\cap A_i).$$

Лемма 9.3. *Пусть φ, ψ – простые функции. Тогда:*

1. *Если $\varphi \leqslant \psi$ на E, то $\int_E \varphi d\mu \leqslant \int_E \psi d\mu$ (монотонность).*
2. *Если $\alpha \in [0, +\infty)$, то $\int_E \alpha\varphi d\mu = \alpha\int_E \varphi d\mu$ (положительная однородность).*
3. *$\int_E (\varphi+\psi) d\mu = \int_E \varphi d\mu + \int_E \psi d\mu$ (аддитивность по функциям).*

Доказательство. Пусть $\{A_i\}_{i=1}^m$, $\{B_j\}_{j=1}^k$ – допустимые разбиения φ и ψ соответственно ($\varphi|_{A_i} = a_i,\ \varphi|_{B_j} = b_j$). Положим $C_{ij} = A_i \cap B_j$.

Тогда $\{C_{ij}\}$ – общее допустимое разбиение для φ и ψ. Поскольку $A_i = A_i \cap \mathbb{R}^n = A_i \cap (\bigcup_{j=1}^k B_j) = \bigcup_{j=1}^k C_{ij}$, то по свойству аддитивности меры $\int_E \varphi d\mu = \sum_{i=1}^m a_i\mu(E\cap A_i) = \sum_{i=1}^m a_i\mu(\bigcup_{j=1}^k (E\cap C_{ij})) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k a_i\mu(E\cap C_{ij})$.

Аналогично, $\int_E \psi d\mu = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m b_j\mu(E\cap C_{ij})$. Если $E\cap C_{ij} \neq \varnothing$, то для любого $x \in E\cap C_{ij}$ имеем $a_i = \varphi(x) \leqslant \psi(x) = b_j$, что завершает доказательство.

Доказательство пункта 2 очевидно.

Доказательство пункта 3 аналогично пункту 1. □

Замечание. Попутно про доказательстве монотонности доказана корректность определения интеграла (то есть независимость от выбора допустимого разбиения).

Определение 9.6. Пусть $f : E \to [0, +\infty]$ – неотрицательная измеримая функция. Тогда:

$$\int_E f d\mu = \sup\left\{\int_E \varphi d\mu,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant f,\ \varphi - \text{простая}\right\}.$$

Замечание. Покажем, что определение согласуется с интегралом от простой функции. Чтобы их различить, перед знаком введенного ранее интеграла поставим (s).

Пусть f – простая неотрицательная функция. Если $0 \leqslant \varphi \leqslant f$ и φ – простая, то по свойству монотонности $(s)\int_E \varphi d\mu \leqslant (s)\int_E f d\mu$. Переходя к супремуму по φ, получим $\int_E \varphi d\mu \leqslant (s)\int_E f d\mu$. Противоположное неравенство очевидно, так как f сама является простой функцией.

Непосредственно из определений вытекают следующие свойства интеграла Лебега.

Пусть $f, g : E \to [0, +\infty]$ — неотрицательные измеримые функции.

Свойство 9.1 (монотонность)**.** *Если $f \leqslant g$ на E, то $\int_E f\,d\mu \leqslant \int_E g\,d\mu$.*

Свойство 9.2 (однородность)**.** *Если $\lambda \in [0, +\infty)$, то $\int_E \lambda f\,d\mu = \lambda \int_E f\,d\mu$.*

Свойство 9.3. *Если $E_0 \subset E$ измеримо, то $\int_{E_0} f\,d\mu = \int_E f \cdot \mathbb{I}_{E_0}\,d\mu$.*

Доказательство. Пусть $0 \leqslant \underbrace{\varphi}_{\text{прост.}} \leqslant f$ на E_0, тогда

$$\int_{E_0} \varphi\,d\mu = \int_E \varphi \cdot \mathbb{I}_{E_0}\,d\mu \leqslant \int_E f \cdot \mathbb{I}_{E_0}\,d\mu,$$
$$\int_{E_0} f\,d\mu \leqslant \int_E f \cdot \mathbb{I}_{E_0}\,d\mu \leqslant .$$

Обратно, пусть $0 \leqslant \underbrace{\psi}_{\text{прост.}} \leqslant f \cdot \mathbb{I}_{E_0}$ на E. Тогда $\psi = 0$ на $E \setminus E_0$ и, значит, $\psi = \psi \cdot \mathbb{I}_{E_0}$ на E. Следовательно,

$$\int_E \psi\,d\mu = \int_E \psi \cdot \mathbb{I}_{E_0}\,d\mu = \int_{E_0} \psi\,d\mu \leqslant \int_{E_0} f\,d\mu.$$

и, значит, $\int_E f \cdot \mathbb{I}_{E_0}\,d\mu \leqslant \int_{E_0} f\,d\mu$. □

Свойство 9.4. *Если $E_0 \subset E$ измеримо, то $\int_{E_0} f\,d\mu \leqslant \int_E f\,d\mu$.*

Доказательство. По свойствам (9.1) и (9.3) имеем

$$\int_{E_0} f\,d\mu = \int_E f \cdot \mathbb{I}_{E_0}\,d\mu \leqslant \int_E f\,d\mu.$$

□

Теорема 9.4 (Беппо Леви)**.** *Пусть $f_k : E \to [0, +\infty]$ измеримы, и $f_k \to f$ на E. Если $0 \leqslant f_k(x) \leqslant f_{k+1}(x)$ для всех $x \in E$ и $k \in \mathbb{N}$, то*

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k\,d\mu = \int_E f\,d\mu.$$

Доказательство. Интегрируя $f_k \leqslant f_{k+1} \leqslant f$ на E, получим

$$\int_E f_k\,d\mu \leqslant \int_E f_{k+1}\,d\mu \leqslant \int_E f\,d\mu.$$

Следовательно, $\left\{\int_E f\,d\mu\right\}$ нестрого возрастает (в $\overline{\mathbb{R}}$) и, значит, существует

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k\,d\mu \leqslant \int_E f\,d\mu.$$

Докажем противоположное неравенство. Для этого достаточно доказать, что $\lim_{k\to\infty} \int_E f_k\,d\mu \geqslant \int_E \varphi\,d\mu$ для всех простых φ, $0 \leqslant \varphi \leqslant f$ на E.

Рассмотрим такую функцию φ. Зафиксируем $t \in (0,1)$. Положим $E_k = \{x \in E : f_k(x) \geqslant t\varphi(x)\}$.

Ввиду монотонности $\forall k\ E_k \subset E_{k+1}$. Докажем, что $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = E$. Включение «$\subset$» очевидно.

Пусть $x \in E$. Если $\varphi(x) = 0$, то $\forall k\ x \in E_k$.

Если $\varphi(x) > 0$, то $f(x) \geqslant \varphi(x) > t\varphi(x)$. Тогда $\exists m \in \mathbb{N}\ \ (f_m(x) \geqslant t\varphi(x))$, то есть $x \in E_m$.

По монотонности

$$\int_E f_k\, d\mu \geqslant \int_{E_k} f_k\, d\mu \geqslant t \int_{E_k} \varphi\, d\mu.$$

Пусть $\varphi = \sum_{i=1}^{N} a_i \cdot \mathbb{I}_{A_i}$, где $\{A_i\}_1^N$ — допустимое разбиение.

Тогда по свойству монотонности меры:

$$\int_{E_k} \varphi\, d\mu = \sum_{i=1}^{N} a_i \mu(A_i \cap E_k) \underset{k\to\infty}{\to} \sum_{i=1}^{N} a_i \mu(A_i \cap E) = \int_E \varphi\, d\mu.$$

Переходя к пределу в неравенстве (9.4)

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k\, d\mu \geqslant t \int_E \varphi\, d\mu,\ \ t \to 1-0.$$

□

Задача. *Пусть $\{f_k\}$ — последовательность неотрицательных измеримых функций и $f_k \to f$ почти всюду на E. Если $\exists C > 0\ \left(\int_E f_k\, d\mu \leqslant C\right)$, то $\int_E f\, d\mu \leqslant C$.*

Теорема Леви в сочетании с теоремой о приближении неотрицательной измеримой функции простыми позволяет переносить свойства интеграла Лебега с простых функций на неотрицательные измеримые.

Свойство 9.5 (аддитивность)**.** *Если $f, g \geqslant 0$ измеримы на E, то $\int_E (f+g)\, d\mu = \int_E f\, d\mu + \int_E g\, d\mu$.*

Доказательство. Пусть $\varphi_k \uparrow$ (возрастает и стремится к $)f, \psi_k \uparrow g$ на E. Тогда $\varphi_k + \psi_k \uparrow f + g$ на E и, значит, по теореме Леви

$$\int_E (f+g)\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_E (\varphi_k + \psi_k)\, d\mu =$$
$$= \lim_{k\to\infty} \int_E \varphi_k\, d\mu + \lim_{k\to\infty} \int_E \psi_k\, d\mu = \int_E f\, d\mu + \int_E g\, d\mu.$$

□

Следствие (теорема Леви для рядов)**.** Если $f_k \geqslant 0$ измерима на E, то

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k\, d\mu.$$

Доказательство. По предыдущему свойству

$$\int_E \sum_{k=1}^{m} f_k\, d\mu = \sum_{k=1}^{m} \int_E f_k\, d\mu.$$

Поскольку $f_k \geqslant 0$, то последовательность частичных сумм ряда нестрого возрастает (по m). Поэтому по теореме Леви $\lim_{m\to\infty} \int_E \sum_{k=1}^m f_k\, d\mu = \int_E \sum_{k=1}^\infty f_k\, d\mu$. $\square$

Теорема 9.5 (счётная аддитивность интеграла). *Пусть E_k измеримы и попарно не пересекаются, $E = \bigsqcup_{k=1}^\infty E_k$. Если $f \geqslant 0$ на E, то*

$$\int_E f\, d\mu = \sum_{k=1}^\infty \int_{E_k} f\, d\mu.$$

Доказательство. Поскольку $\{E_k\}$ образуют разбиение E, то $\mathbb{I}_E = \sum_{k=1}^\infty \mathbb{I}_{E_k}$, $f = f\cdot \mathbb{I}_E = \sum_{k=1}^\infty f\cdot \mathbb{I}_{E_k}$ на E. Следовательно, по теореме Леви для рядов и

$$\int_E f\, d\mu = \sum_{k=1}^\infty \int_E f\cdot \mathbb{I}_{E_k}\, d\mu = \sum_{k=1}^\infty \int_{E_k} f\, d\mu.$$

$\square$

Теорема 9.6 (неравенство Чебышёва). *Если $f \geqslant 0$ измерима на E, то $\forall t \in (0, +\infty)$*

$$\mu\{x \in E : f(x) \geqslant t\} \leqslant \frac{1}{t}\int_E f\, d\mu.$$

Доказательство. Рассмотрим $E_t = \{x : f(x) \geqslant t\}$, тогда

$$\int_E f\, d\mu \geqslant \int_{E_t} f\, d\mu \geqslant t\int_{E_t} d\mu = t\cdot \mu(E_t).$$

$\square$

9.2 Интеграл Лебега в общем случае

Определение 9.7. Пусть $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима, тогда

$$\int_E f\, d\mu := \int_E f^+\, d\mu - \int_E f^-\, d\mu,$$

при условии, что хотя бы один из $\int_E f^\pm\, d\mu$ конечен.

Функция f называется *интегрируемой* (по Лебегу), если оба интеграла $\int_E f^\pm\, d\mu$ конечны.

Замечание. Данное определение согласуется с определением интеграла от неотрицательной функции, так как

$$f^+ = f, f^- \equiv 0 \text{ и } \int_E 0\, d\mu = 0.$$

Замечание. Если f измерима на E, то условия интегрируемости f и $|f|$ равносильны. В случае интегрируемости $\left|\int_E f\, d\mu\right| \leqslant \int_E |f|\, d\mu$.

Доказательство. Если f интегрируема на E, то $\int_E f^\pm d\mu < +\infty$. Тогда в силу оценки $|f| = f^+ + f^-$ интеграл $\int_E |f| d\mu < +\infty$. Если $|f|$ интегрируема на E, то в силу оценки $0 \leqslant f^\pm \leqslant |f|$ получаем, что $\int_E f^\pm d\mu < +\infty$, то есть f интегрируема на E.

Имеем

$$\left|\int_E f d\mu\right| = \left|\int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu\right| \leqslant \int_E f^+ d\mu + \int_E f^- d\mu = \int_E |f| d\mu.$$

$\square$

Замечание. Если f интегрируема на E, то f конечна почти всюду на E.

Доказательство. Определим $A = \{x \in E : |f(x)| = +\infty\}$. Тогда по неравенству Чебышева для любого $t \in (0; +\infty) : \mu(A) \leqslant \mu\{x : |f(x)| \geqslant t\} \leqslant \frac{1}{t}\int_E |f| d\mu$. Устремляя $t \to +\infty$, получаем, что $\mu(A) = 0$. $\square$

Лемма 9.4. *Если* $\underbrace{E_0}_{\text{изм.}} \subset E$ *и* $\mu(E \setminus E_0) = 0$*, то интегралы* $\int_E f d\mu$ *и* $\int_{E_0} f d\mu$ *существуют одновременно и в случае существования совпадают.*

Доказательство. Отметим, что f на E и f на E_0 измеримы одновременно. По свойству аддитивности по множествам:

$$\int_E f^{\pm} d\mu = \int_{E_0} f^{\pm} d\mu + \int_{E \setminus E_0} f^{\pm} d\mu = \int_{E_0} f^{\pm} d\mu.$$

Учтем, что интеграл по множеству меры 0 от произведения измеримых функций равен 0. Это вытекает из определения интеграла, для простых функций также следует учесть, что она ограничена. $\square$

Следствие. Пусть $f, g : \underbrace{E}_{\text{изм.}} \to \mathbb{R}$. Если f интегрируема на E и $f = g$ почти всюду на E, то g интегрируема на E и $\int_E g d\mu = \int_E f d\mu$.

Задача. *Пусть f измерима на E и существует интегрируемая на E функция g, такая что $|f| \leqslant g$ почти всюду на E. Докажите, что f интегрируема на E.*

Доказательство. Пусть $E_0 \subset E$ – подмножество, на котором $f \neq g$, $\mu(E_0) = 0$.
$\int_E |f| d\mu = \int_{E_0} |f| d\mu + \int_{E \setminus E_0} |f| d\mu \leqslant \int_{E \setminus E_0} g d\mu \leqslant \int_E g d\mu < +\infty$ $\square$

Теорема 9.7. *Пусть $f, g : E \to \mathbb{R}$ интегрируема и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда:*

1. *Если $f \leqslant g$ на E, то $\int_E f d\mu \leqslant \int_E g d\mu$;*
2. $\int_E \alpha f d\mu = \alpha \int_E f d\mu$;
3. $\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$.

Доказательство.

1. Пусть $f \leqslant g$ на E. Тогда $f^+ \leqslant g^+$, $f^- \geqslant g^-$ и, значит, $\int_E f^+ d\mu \leqslant \int_E g^+ d\mu$ и $\int_E f^- d\mu \geqslant \int_E g^- d\mu$. Вычтем одно неравенство из другого, получаем $\int_E f d\mu \leqslant \int_E g d\mu$.
2. Пусть $\alpha \geqslant 0$. Тогда $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$, $(\alpha f)^- = \alpha f^-$ и, значит, $\int_E \alpha f d\mu = \int_E (\alpha f)^+ d\mu - \int_E (\alpha f)^- d\mu = \alpha \int_E f^+ d\mu - \alpha \int_E f^- d\mu = \alpha \int_E f d\mu$. Так как $(-f)^+ = \max\{-f, 0\} = f^-$, $(-f)^- = \max\{f, 0\} = f^+$, то:

$$\int_E (-f)d\mu = \int_E (-f)^+ d\mu - \int_E (-f)^- d\mu = \int_E f^- d\mu - \int_E f^+ d\mu = -\int_E f d\mu.$$

Случай $\alpha < 0$ сводится к рассмотренному, так как $\alpha = (-1)|\alpha|$.

3. Так как f и g конечны почти всюду на E (из интегрируемости), то $\exists E_0 \subset E$ и $\mu(E \setminus E_0) = 0$, на котором определена функция $h = f + g$. Функция $h = f + g$ интегрируема на E_0 (так как $|h| \leqslant |f| + |g|$) и $h^+ - h^- = h = f + g = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-)$ или $h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$ на E_0. Следовательно, $\int_{E_0} h^+ d\mu + \int_{E_0} f^- d\mu + \int_{E_0} g^- d\mu = \int_{E_0} h^- d\mu + \int_{E_0} f^+ d\mu + \int_{E_0} g^+ d\mu$.

   Все интегралы в предыдущем равенстве конечны, их перегруппировка дает $\int_{E_0} h d\mu = \int_{E_0} f d\mu + \int_E g d\mu$.

   Так как $\mu(E \setminus E_0)$, то доопределим на $E_0 \cup (E \setminus E_0)$ произвольным образом. Получаем равенство для интегралов из 3 пункта.

□

Теорема 9.8 (Лебег). *Пусть $f_k : E \to \overline{\mathbb{R}}$ измеримы и $f_k \to f$ почти всюду на E. Если существует интегрируемая на E функция g, такая что $|f_k| \leqslant g$ $\forall k$, то* $\lim_{k\to+\infty} \int_E f_k d\mu = \int_E f d\mu$

Доказательство. Поскольку при интегрируемости можно пренебрегать множествами меры 0, будем считать, что $f_k \to f$ всюду на E и g конечна на E. Так как $|f_k| \leqslant g$ на E, то все f_k интегрируемы на E. Переходя к пределу при $k \to +\infty$, получаем $|f| \leqslant g$ на E. Следовательно, f интегрируема.

Определим $h_k = \sup_{m\geqslant k} |f_m - f|$ на E, тогда имеем $0 \leqslant h_{k+1}(x) \leqslant h_k(x)$ на E и $\lim_{k\to+\infty} h_k(x) = \inf_k sup_{m\geqslant k} |f_m(x) - f(x)| = \overline{\lim}_{k\to+\infty} |f_k(x) - f(x)| = 0$. Функция h_k интегрируема на E и $|h_k| \leqslant 2g$ ($|f_k| \leqslant g$, $|f| \leqslant g$). Применим теорему Леви к последовательности $\{2g - h_k\}$:

$$\lim_{k\to+\infty} \int_E (2g - h_k)d\mu = \int_E 2g d\mu,$$

откуда $\lim_{k\to+\infty} \int_E h_k d\mu = 0$. Для завершения доказательства $\int_E |f_k - f| d\mu \leqslant \int_E h_k d\mu \to 0$ при $k \to +\infty$ и, значит, $\left|\int_E f_k d\mu - \int_E f d\mu\right| \leqslant \int_E |f_k - f| d\mu \to 0$. □

Теорема 9.9. *Пусть f ограничена на $[a, b]$. f интегрируема по Риману на $[a, b]$ $\Leftrightarrow$ f непрерывна почти всюду на $[a, b]$. В этом случае функция интегрируема по Лебегу и оба интеграла совпадают.*

Доказательство. 1. Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$, $J = \int_a^b f(x)dx$. Покажем, что f непрерывна почти всюду на $[a, b]$ и $\int_{[a,b]} f d\mu = J$.

   Для разбиения $T = \{x_k\}_{k=0}^m$ открытого на $[a, b]$ положим $M_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f$, $m_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f$ и определим простые функции

$$\varphi_T = \sum_{i=1}^m m_i \cdot \mathbb{I}_{[x_{i-1},x_i)}, \ \ \psi_T = \sum_{i=1}^m \mathbb{I}_{[x_{i-1},x_i)} \cdot M_i.$$

   В последний промежуток включим точку $b = x_n$. Очевидно, что $\int_{[a,b]} \varphi_T d\mu = s_T$, $\int_{[a,b]} \psi_T d\mu = S_T$ (сумма Дарбу).

Рассмотрим последовательность разбиений $\{T_k\}$, $T_k \subset T_{k+1}$ и $|T| \to 0$. Положим $\varphi_k = \varphi_{T_k}$, $\psi_k = \psi_{T_k}$. Имеем $\varphi_k(x) \leqslant \varphi_{k+1}(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi_{k+1}(x) \leqslant \psi_k(x)$ для всех $x \in [a,b]$. Следовательно, существуют $\varphi(x) = \lim_{k\to+\infty} \varphi_k(x)$, $\psi(x) = \lim_{k\to+\infty} \psi_k(x)$.

Функции φ, ψ измеримы (как предел измеримых функций) и если $|f| \leqslant M$, то $|\varphi|, |\psi| \leqslant M$ и, значит, по теореме Лебега о мажорированной сходимости

$$\int_{[a,b]} (\psi - \varphi) d\mu = \lim_{k\to+\infty} \int_{[a,b]} (\psi_k - \varphi_k) d\mu = \lim_{k\to+\infty} (S_{T_k} - s_{T_k}) = 0,$$

откуда следует, что $\psi - \varphi = 0$ почти всюду на $[a,b]$.

Пусть $Z = \{x : \varphi(x) \neq \psi(x)\}$. Рассмотрим $x \notin Z \cup (\bigcup_{k=1}^{+\infty} T_k)$ и $\varepsilon > 0$. Выберем k, так что $\psi_k(x) - \varphi_k(x) < \varepsilon$ и рассмотрим соотвествующее T_k. Выберем $(x-\delta, x+\delta)$, лежащий в одном отрезке разбиения T_k. Тогда $|f(t) - f(x)| < \psi_k(x) - \varphi_k(x) < \varepsilon\ \forall t \in (x-\delta, x+\delta)$. Это означает, что f непрерывна в точке x. Следовательно, f непрерывна почти всюду на $[a,b]$. По теореме Лебега

$$J = \lim_{k\to+\infty} S_{T_k} = \lim_{k\to+\infty} \int_{[a,b]} \varphi_k d\mu = \int_{[a,b]} f d\mu.$$

2. Пусть f непрерывна почти всюду на $[a,b]$ и $\varepsilon > 0$. Рассмотрим $\{T_k\}$ – разбиение $[a,b]$ на 2^k равных отрезка, тогда $T_{k+1} \subset T_k$. Пусть x не является точкой разрыва f и $x \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} T_k$. Тогда, как и первом пункте , имеем $\varphi_k(x) \uparrow f(x)$ и $\psi_k \downarrow f(x)$ (учли непрерывность в точке x). По теорме Лебега $S_{T_k} = \int_{[a,b]} \psi_k d\mu \to \int_{[a,b]} f d\mu$, $s_{T_k} = \int_{[a,b]} \varphi_k d\mu = \int_{[a,b]} f d\mu$. Тогда, по критерию Дарбу $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

$\square$

Задача. *Пусть f локально интегрируема (по Риману) на $[a,b)$. Докажите, что*

1. *f измерима на $[a,b)$;*
2. *если дополнительно $f \geqslant 0$ на $[a,b)$, то f интегрируема на $[a,b) \Leftrightarrow \int_a^{\to b} f(x)dx$ сходится;*
3. *в общем случае f интегрируема на $[a,b) \Rightarrow \int_a^{\to b} f(x)dx$ сходится, но следствие в обратную сторону неверно.*

9.3 Формула суммирования Эйлера

Теорема 9.10 (Эйлер). *Пусть $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ дифференцируема и f' локально интегрируема на $[1,+\infty)$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство*

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(t)dt + \frac{f(1)+f(n)}{2} + \int_1^n \left(\{t\} - \frac{1}{2}\right) f'(t)dt.$$

Доказательство. Интегрирование по частям дает

$$\int_k^{k+1} f(t)dt = f(t)(t-k)\,|_k^{k+1} - \int_k^{k+1} (t-k)f'(t)dt = f(k+1) - \int_k^{k+1} \{t\}f'(t)dt.$$

Суммируя полученные равенства от 1 до $n-1$:

$$\int_1^n f(t)dt = \sum_{k=2}^n f(k) - \int_1^n \{t\}f'(t)dt.$$

По формуле Ньютона-Лейбница $\frac{f(n)-f(1)}{2} = \int_1^n \frac{f'(t)}{2}dt \Rightarrow \frac{f(n)+f(1)}{2} = f(1) + \int_1^n \frac{f'(n)}{2}$.

Складывая два равенства, получим искомое. □

Следствие. Пусть $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ дифференцируема, f монотонна и $f'(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^n f(t)dt + C_f + \frac{f(n)}{2} + \varepsilon_n,$$

где $C_f = \frac{f(1)}{2} + \int_1^{+\infty} \left(\{t\} - \frac{1}{2}\right) f'(t)dt$, $\varepsilon_n = \int_n^{+\infty} \left(\{t\} - \frac{1}{2}\right) f'(t)dt$.

Доказательство. Функция $t \mapsto \{t\} - \frac{1}{2}$ – периодическая функция с периодом 1 и интеграл по каждому равен 0.

$$\int_1^x \left(\{t\} - \frac{1}{2}\right) dt = \int_{[x]}^x \left(t - [x] - \frac{1}{2}\right) dt = \left.\frac{f^2}{2}\right|_{[x]}^x - \left([x] + \frac{1}{2}\right) t \left.\right|_{[x]}^x =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{[x]^2}{2} - \left([x] + \frac{1}{2}\right)\{x\} = \frac{1}{2}\{x\}(x + [x]) - [x]\{x\} - \frac{1}{2}\{x\} = \frac{1}{2}(\{x\}^2 - \{x\}).$$

Следовательно, $F(x) = \int_1^x (\{t\} - \frac{1}{2})dt$ ограничена и, значит, $\int_1^{+\infty} (\{t\} - \frac{1}{2}) f'(t)dt$ сходится по признаку Дирихле.

В частности, $C_f \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon \to 0$ (как «хвост» сходящегося интеграла). □

Пример (формула Стирлинга)**.** При $n \to +\infty$ справедлива оценка

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Доказательство. Применим следствие к функции $f(t) = \ln t$. Тогда

$$\sum_{k=1}^n \ln k = n \ln n - n + 1 + C + \frac{\ln n}{2} + \varepsilon_n,$$

$$\ln n! = \ln(n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{C+1} e^{\varepsilon_n}),$$

$$n! = c\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + o(1)),\ n \to +\infty.$$

Для нахождения константы c воспользуемся формулой Валлиса:

$$\pi = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$$

Имеем

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n} c^2 n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} (1 + o(1))^2}{c\sqrt{2n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} (1 + o(1))} = \frac{c\sqrt{n}}{\sqrt{2}}(1 + o(1)),$$

значит,

$$\pi = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\frac{c^2 n}{2}(1+o(1))^2 = \frac{c^2}{2} \Rightarrow c = \sqrt{2\pi}.$$

$\square$

Замечание. Формулу можно уточнить, рассматривая подробно асимптотику ε_n

$$\varepsilon_n = \int_n^{+\infty} \left(\frac{1}{2} - \{t\}\right)\frac{1}{t}dt = \left(\frac{\{t\}-\{t\}^2}{2t}\right)\Bigg|_n^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_n^{+\infty}(\{t\}-\{t\}^2)\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\right)dt =$$

$$= \int_n^{+\infty}(\{t\}-\{t\}^2)\frac{1}{2t^2}dt,$$

значит,

$$|\varepsilon_n| \leqslant \int_n^{+\infty}\frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t}\Bigg|_n^{+\infty} = \frac{1}{n}.$$

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

9.4 Неизмеримые множества

Построим пример неизмеримого множества.

Пример (множество Витали)**.** На $[0,1]$ введём отношение эквивалентности $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q} \Rightarrow [0,1] = \bigsqcup_\alpha H_\alpha$, H_α – классы эквивалетности.

V – множество, содержащее ровно один элемент из каждого H_α и только такие элементы (такое множество существует по аксиоме выбора).

Пусть $\{r_n\}_{n=0}^{+\infty}$ – некоторая нумерация $\mathbb{Q}\cap[-1,1]$, $r_0 = 0$. Рассмотрим $V_n = V + r_n$.

1. V_n попарно не пересекаются, так как

$$x \in V_i \cap V_j \Rightarrow x_i + r_i = x_j + r_j \Rightarrow x_j - x_i \in \mathbb{Q}.$$

2. $[0,1] \subset \bigsqcup_{n=0}^\infty V_n \subset [-1,2]$.

   (левое включение: $y \in [0,1] \Rightarrow y \in H_\alpha \Rightarrow y = x_\alpha + r$, $r = y - x_{\alpha\in[-1,1]} \Rightarrow \exists n(r - r_n))$

   (правое включение: $V \subset [0,1]$ и $r_n \in [-1,1]$)

3. Пусть $\underbrace{A_n}_{\text{изм.}} \subset V_n \Rightarrow \mu(A_n) = 0$.

   $(A_m = A_n - r_n + r_m \subset V_m$, $\mu(A_m) = \mu(A_n) = 0$, $\mu(\bigsqcup_{n=0}^\infty A_n) = \sum_{n=0}^\infty \mu(A_n) = \sum_{n=0}^\infty a \leqslant \mu([-1,2]) = 3 \Rightarrow a = 0)$

Теорема 9.11. *Если $E \subset \mathbb{R}$ и $\mu^*(E) > 0$, то E содержит неизмеримое подмножество.*

Доказательство. 1. Рассмотрим сначала случай $E \subset [0,1]$.

$E = E \cap (\bigsqcup_{n=0}^\infty V_n) = \bigsqcup_{n=0}^\infty (E\cap V_n)$, $F_n := E \cap V_n$.

$F_n \subset V_n$. Если все F_n измеримы, то $\mu(F_n) = 0$. Следовательно, $\mu(E) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mu(F_n) = 0$, противоречие. Следовательно, существует F_n неизмеримое.

2. Общий случай $E \subset \mathbb{R}$.

   $E = \bigsqcup_{k=-\infty}^{\infty} (\underbrace{E \cap [k, k+1)}_{E_k}) \Rightarrow \exists k : \mu^*(E_k) > 0.$

   $\widetilde{E} = E_k - k \subset [0, 1]$ и $\mu^*(\widetilde{E}) = \mu(E_k) > 0.$

$\square$