МФТИ ФПМИ

Госэкзамен по математике

Гагаринов Даниил

Гаибов Демид

Горбунов Сергей

Кулапин Артур

Рухадзе Альбина

Огромная благодарность Титову Андрею за выдержку и подготовку основной базы конспекта

Весна 2021

Содержание

1 Математический анализ

1.1 Теорема Больцано-Вейерштрасса и критерий Коши сходимости числовой последовательности.

Определение. Функцию $f : \mathbb{N} \to A$ называют *последовательностью элементов* множества A. При этом $(n, a) \in f$ называют *n-ым членом последовательности*, и вместо $f(n)$ пишут a_n. Саму последовательность обозначают $\{a_n\}$. Если $A = \mathbb{R}$, то последовательность называют *числовой*.

Определение. Число $a \in \mathbb{R}$ называют *пределом числовой последовательности* $\{a_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} \; (n \geqslant N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$$

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, или $a_n \to a$ при $n \to \infty$, или $a_n \to a$.

Определение. Последовательность, имеющая некоторое число своим пределом, называется *сходящейся*, в противном случае — *расходящейся*.

Замечание. Пусть последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ таковы, что $\exists m \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} \; (b_n = a_{n+m})$. Тогда $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ имеют предел одновременно и, если имеют, то пределы равны.

Теорема. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$, то $a = b$.

Определение. Последовательность называется *ограниченной*, если множество её значений ограничено (аналогично определяется ограниченность сверху и снизу).

Теорема. Если последовательность $\{a_n\}$ сходится, то она ограничена.

Теорема. Если $\forall n \geqslant n_0 \; (a_n \geqslant b_n)$, $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, то $a \geqslant b$

Теорема (о двух полицейских). Если $\forall n \geqslant n_0 \; (a_n \geqslant c_n \geqslant b_n)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

Теорема (об операциях с пределами). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Тогда:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
3. $b_n \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

Определение. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется *бесконечно малой*, если $\alpha_n \to 0$.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ *стремится к* $+\infty$, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} \; (n \geqslant N \Rightarrow a_n > \frac{1}{\varepsilon})$.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ *стремится к* $-\infty$, если $\{-a_n\}$ стремится к $+\infty$.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно большой*, если $\{|a_n|\}$ стремится к $+\infty$.

Теорема. Пусть $\forall n \geqslant n_0 \; a_n \leqslant b_n$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называют *нестрого возрастающей*, если $\forall n \in \mathbb{N} \; (a_n \leqslant a_{n+1})$; *строго возрастающей*, если $\forall n \in \mathbb{N} \; (a_n < a_{n+1})$. (Аналогично определяются *убывающие* последовательности)

Теорема. Всякая нестрого возрастающая, ограниченная сверху последовательность сходится. (Аналогично для убывающей)

Определение. Последовательность отрезков $\{[a_n, b_n]\}$ называется *вложенной*, если $\forall n \in \mathbb{N} \; [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$.

Определение. Последовательность отрезков $\{[a_n, b_n]\}$ называется *стягивающейся*, если $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Теорема (теорема Кантора о вложенных отрезках). Любая последовательность вложенных отрезков имеет общую точку (причём, если последовательность стягивающаяся, то такая точка единственна).

Определение. Если $\{a_n\}$ — последовательность, $\{n_k\}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел, что последовательность $\{b_k\}$, где $\forall k \in \mathbb{N} \; (b_k = a_{n_k})$, называется *подпоследовательностью* $\{a_n\}$

Обозначение: $\{a_{n_k}\}$

Лемма. Если последовательность имеет предел в $\overline{\mathbb{R}}$, то любая её подпоследовательность имеет тот же предел.

Теорема (Больцано-Вейерштрасса). Любая ограниченная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство: Пусть все члены последовательности $\{a_n\}$ лежат в отрезке $[c, d]$. Разобьём его на два отрезка — $[c, \frac{c+d}{2}]$ и $[\frac{c+d}{2}, d]$, и обозначим за $[c_1, d_1]$ ту половину, который содержит значения бесконечного множества членов последовательности (если же обе половины удовлетворяют этом условию, то выбираем левую). Выберем $a_{n_1} \in [c_1; d_1]$.

Предположим, что отрезок $[c_k, d_k]$ построен $(k \geqslant 1)$. Обозначим за $[c_{k+1}, d_{k+1}]$ ту половину $[c_k, d_k]$, которая содержит значения бесконечного множества членов последовательности (если же обе половины удовлетворяют этому условию, то выбираем левую), и выберем $a_{n_{k+1}} \in [c_{k+1}, d_{k+1}]$.

Таким образом, по индукции будет построена стягивающаяся последовательность отрезков $\{[c_k, d_k]\}$ и подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$. По теореме о вложенных отрезках 1.1, $\exists a = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} d_n$.
Так как $c_k \geqslant a_{n_k} \geqslant d_k$, то (по теореме о “зажатой” последовательности) $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. ■

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} \; \forall m \in \mathbb{N} \; (n \geqslant N \wedge m \geqslant N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon)$$

Теорема (Критерий Коши). Последовательность $\{a_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

Доказательство:

- $\Rightarrow$: Пусть $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. По определению,

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N\ (|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}) \Rightarrow |a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)| \leqslant |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon$$

- $\Leftarrow$: Пусть $\{a_n\}$ фундаментальна.

  Покажем, что она ограничена. По определению,

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N}\ (n \geqslant N \land m \geqslant N \Rightarrow |a_n - a_m| < 1) \Rightarrow \forall n \geqslant N\ (a_N - 1 < a_n < a_N + 1)$$

  Определим $\alpha = \min\{a_1, \ldots, a_{N-1}, a_N - 1\}$ и $\beta = \max\{a_1, \ldots, a_{N-1}, a_N + 1\}$, тогда

$$\forall n \in \mathbb{N}\ (\alpha \leqslant a_n \leqslant \beta)$$

  По теореме Больцано-Вейерштрасса, $\{a_n\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$, $a_{n_k} \to a$. Покажем, что $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

  По определению фундаментальности,

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N}\ (n \geqslant N_1 \land m \geqslant N_1 \Rightarrow |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2})$$

  По определению предела,

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N}\ (k \geqslant N_2 \Rightarrow |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2})$$

  Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$, тогда

$$\forall n \geqslant N\ |a_n - a| \leqslant |a_n - a_{n_N}| + |a_{n_N} - a| < \varepsilon \text{ (учтём, что } n_N \geqslant N) \Rightarrow a = \lim_{n\to\infty} a_n$$

■

1.2 Ограниченность функции, непрерывной на отрезке, достижение точных верхней и нижней граней.

Пусть $a \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$.

Определение. $B_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ — *ε-окрестность* точки a.

Определение. $B'_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon)$ — *проколотая* ε-окрестность точки a.

Определение. Множество $G \subset \mathbb{R}$ называется *открытым*, если $\forall x \in G\ \exists \varepsilon > 0\ (B_\varepsilon(x) \subset G)$.

Определение. Множество $G \subset \mathbb{R}$ называется *замкнутым*, если $\mathbb{R} \setminus G$ открыто.

Пусть $E \subset \mathbb{R}$ и $x \in \mathbb{R}$.

Определение. Точка x называется *внутренней* для множества E, если $\exists \varepsilon > 0\ (B_\varepsilon(x) \subset E)$.

Определение. Точка x называется *предельной* для множества E, если $\forall \varepsilon > 0\ (B'_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing)$

Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$, $A \subset E$ и $B \subset \mathbb{R}$.

Определение. *Образ* множества A под действием f: $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$.

Определение. *Прообраз* множества B под действием f: $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$.

Определение. *Сужение* f на множество A: $f\restriction_A = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$

Определение. Функция $f : E \to \mathbb{R}$ *ограничена сверху (снизу)*, если $f(E)$ ограничено сверху (снизу).

Определение. (Коши) Точка $b \in \overline{\mathbb{R}}$ называется *пределом* функции $f : E \to \mathbb{R}$ в точке $a \in \mathbb{R}$, если a — предельная точка E и

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E\ (x \in B'_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b))$$

Обозначение: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

Определение. Число $b \in \mathbb{R}$ называется *пределом* функции $f : E \to \mathbb{R}$ в точке $a \in \mathbb{R}$, если a — предельная точка E и

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E\ (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)$$

Определение. (Гейне) Точка $b \in \overline{\mathbb{R}}$ называется *пределом* функции $f : E \to \mathbb{R}$ в точке $a \in \mathbb{R}$, если a — предельная точка E и

$$\forall \{x_n\}\ (\forall n \in \mathbb{N}\ (x_n \in E \setminus \{a\}) \Rightarrow (x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to b))$$

Теорема. Определения предела по Коши и по Гейне эквивалентны.

Свойства предела:

1. Если предел существует, то он единственен.

2. Если a — предельная точка, $a \in D \subset E$ и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, то $\lim\limits_{x \to a} f\restriction_D(x) = b$.

3. Если $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ выполняется на множестве $B'_\sigma(a) \cap E$ для некоторого $\sigma > 0$, и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = b$, то $\lim\limits_{x \to a} h(x) = b$.

4. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, тогда:
   $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = b \pm c$
   $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = b \cdot c$
   Если $c \neq 0$ и $g(x) \neq 0$, то $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$

5. Если $f = g$ на $B'_\sigma(a) \cap E$ для некоторого $\sigma > 0$, и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, то $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$.
6. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, то $\exists C > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in B'_\delta(a) \cap E\ (|f(x) - b| \leqslant C)$
7. Пусть $f : D \to E$, $g : E \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, b — предельная точка E, и $f(x) \neq b$ в некоторой проколотой окрестности.

   Если $\lim\limits_{y\to b} g(y) = c$, то $\lim\limits_{x\to a}(g \circ f)(x) = c$.

Определение. Функция $f : E \to \mathbb{R}$ удовлетворяет *критерию Коши* в точке a, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x, x' \in B'_\delta(a) \cap E\ (|f(x) - f(x')| < \varepsilon)$$

Теорема. Функция f имеет *конечный* предел в точке $\Leftrightarrow$ f удовлетворяет критерию Коши.

Определение. Функция $f : E \to \mathbb{R}$ *непрерывна в точке* $a \in E$, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in E\ (x \in B_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(f(a)))$$

Замечание. Предел функции в этой точке совпадает со значением функции

Теорема (Критерий непрерывности). Следующие утверждения эквивалентны:

1. f непрерывна в точке a
2. $\forall\{x_n\}\ (\forall n \in \mathbb{N}\ (x_n \in E) \Rightarrow (x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)))$
3. a — изолированная или предельная точка, и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Определение. Функция $f : E \to \mathbb{R}$ *непрерывна на* E, если она непрерывна в каждой точке E.

Теорема (Вейерштрасс). Если $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна, то

$$\exists x_i, x_s \in [a, b]\ \left(f(x_i) = \inf_{x\in[a,b]} f(x) \land f(x_s) = \sup_{x\in[a,b]} f(x)\right)$$

Доказательство: Покажем, что множество значений f ограниченно.

Если это не так, то $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in [a, b]\ (|f(x_n)| > n)$.

По теореме Больцано-Вейерштрасса, существует сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} \to x_0$. Переходя к пределу в неравенстве $a \leqslant x_{n_k} \leqslant b$ при $k \to \infty$, получаем $a \leqslant x_0 \leqslant b$, т. е. $x_0 \in [a, b]$.

Функция f непрерывна в x_0, поэтому $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$, но по построению

$$|f(x_{n_k})| > n_k \Rightarrow |f(x_{n_k})| \to +\infty \text{ — противоречие}$$

Так как $f([a, b])$ ограниченно сверху, то пусть $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) \in \mathbb{R}$. По определению супремума,

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in [a, b]\ \left(M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leqslant M\right)$$

По теореме Больцано-Вейерштрасса, существует сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} \to x_s \in [a, b]$. Функция f непрерывна в x_s, поэтому $f(x_{n_k}) \to f(x_s)$; с другой стороны, $f(x_{n_k}) \to M$, и в силу единственности предела $f(x_s) = M$.

(Точка x_i для инфинума находится аналогично) ■

1.3 Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции.

Теорема (о промежуточном значении; Больцано-Коши).

Если $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна и s между $f(a)$ и $f(b)$, то $\exists c \in [a, b]$ $(f(c) = s)$.

Доказательство: Если $s = f(a) \vee s = f(b)$, то в качестве точки c можно взять a или b соответственно.

Пусть $f(a) < s < f(b)$. Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = s$, то $c = \frac{a+b}{2}$, и теорема доказана. Иначе возьмём

$$[a_1, b_1] = \begin{cases} [a, \frac{a+b}{2}], & \text{если } f\left(\frac{a+b}{2}\right) > s \\ [\frac{a+b}{2}, b], & \text{если } f\left(\frac{a+b}{2}\right) < s \end{cases}$$

Повторим рассуждения с отрезком $[a_1, b_1]$ вместо $[a, b]$ — получим отрезок $[a_2, b_2]$, и т. д.

Возможны две ситуации: или точка c совпадёт с серединой очередного отрезка, или же будет построена последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}$. Так как $b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} \to 0$, то $\{[a_n, b_n]\}$ — стягивающаяся. По теореме Кантора, существует c — общая точка всех $[a_n, b_n]$, причём $a_n \to c$ и $b_n \to c$. Функция f непрерывна в точке c, поэтому, переходя к пределу в неравенстве $f(a_n) < s < f(b_n)$ при $n \to \infty$, получаем $f(c) \leqslant s \leqslant f(c)$, т. е. $f(c) = s$.

(Случай $f(b) < s < f(a)$ рассматривается аналогично) ■

1.4 Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа и Коши для дифференцируемых функций.

1.4.1 Производная и дифференциал

Определение. Пусть $f, g : E \to \mathbb{R}$, и a — предельная точка E. Если существует $\alpha : E \to \mathbb{R}$ и окрестность $B_\delta(a)$ такие, что $\forall x \in B'_\delta(a) \cap E$ $(f(x) = \alpha(x)g(x))$, и:

1. α ограничена на $B'_\delta(a) \cap E$, то говорят, что $f(x)$ *ограничена по сравнению с* $g(x)$ при $x \to a$, и пишут:
$$f(x) = O(g(x))$$

2. $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$, то говорят, что $f(x)$ *бесконечно мала по сравнению с* $g(x)$ при $x \to a$, и пишут:
$$f(x) = o(g(x))$$

3. $\alpha(x) \to 1$ при $x \to a$, то говорят, что $f(x)$ и $g(x)$ *эквивалентны* при $x \to a$, и пишут:
$$f(x) \sim g(x)$$

Определение. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, и a — внутренняя точка E. Функция f называется *дифференцируемой в точке* a, если
$$\exists A \in \mathbb{R}\ (f(x) = f(a) + A(x-a) + o(x-a) \text{ при } x \to a)$$

Предел $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ называется *производной* f *в точке* a и обозначается $f'(a)$ или $\dfrac{df(a)}{dx}$.

Лемма. Функция f дифференцируема в точке $a \Leftrightarrow \exists f'(a) \in \mathbb{R}$.

Замечание. Если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке:
$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a}(f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)) = f(a)$$

Определение. Линейная функция $h \mapsto f'(a) \cdot h, h \in \mathbb{R}$ называется *дифференциалом* f *в точке* a. Обозначение: df_a.

Определение. Пусть функция f определена на непустом интервале $[a, b)$ $((b, a])$ тогда предел $f'_+(a) = \lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ $\left(f'_-(a) = \lim\limits_{x \to a-0} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}\right)$ называется *правой (левой) производной* в точке a.

Замечание. Для существования производной (конечной или бесконечной) в точке a необходимо и достаточно наличие равных односторонних пределов в этой точке, причём $f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a)$.

Замечание. Формула из определения дифференцируемости при замене $x \to a$ на $x \to a + 0$ становится условием существования $f'_+(a) \in \mathbb{R}$ (аналогично для $f'_-(a)$).

1.4.2 Теоремы о среднем

Теорема (Ферма). Пусть f определена на $B_\delta(a)$, и $f(x) \leqslant f(a)$ $(f(x) \geqslant f(a))$ для всех $x \in B_\delta(a)$. Если f имеет производную в точке a, то $f'(a) = 0$.

Геометрический смысл: если во внутренней точке локального максимума (минимума) существует касательная, то она горизонтальна.

(Далее в разделе считаем, что отрезок $[a, b]$ невырожден, т. е. $a < b$)

Теорема (Ролль). Если функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b), и $f(a) = f(b)$, то $\exists c \in (a, b)$ $(f'(c) = 0)$.

Доказательство: По теореме Вейерштрасса $\exists x_i, x_s \in [a, b]$ $((f(x_i) = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)) \wedge (f(x_s) = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)))$. Если $f(x_i) < f(a) = f(b)$, то $c = x_i$; если $f(x_s) > f(a) = f(b)$, то $c = x_s$ (в обоих случаях $c \in (a, b)$, и (по теореме Ферма) $f'(c) = 0$). Если же $f(x_i) = f(x_s)$, то f постоянна, и любая точка $c \in (a, b)$ подходит ■

Теорема (Лагранж; теорема о среднем). Если $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), то $\exists c \in (a, b)$ $(f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a))$.

Доказательство: Рассмотрим на отрезке $[a, b]$ функцию

$$F(x) = (f(x) - f(a)) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Она непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b), и $F(a) = F(b) = 0$; по теореме Ролля

$$\exists c \in (a, b)\ (F'(c) = 0) \ \Rightarrow\ f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \ \Rightarrow\ f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$

■

Геометрический смысл: В условиях теоремы существует точка графика, в которой касательная параллельна хорде, соединяющей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

Следствие. Если функция f имеет ограниченную производную на промежутке I, то она равномерно непрерывна на I.

Теорема (Коши). Если $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b), и $g'(x) \neq 0$ на (a, b), то

$$\exists c \in (a, b)\ \left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\right)$$

(отметим, что $g(a) \neq g(b)$, т. к. в противном случае по теореме Ролля $\exists \xi \in (a, b)$ $(g'(\xi) = 0)$)

Доказательство: Рассмотрим на отрезке $[a, b]$ функцию

$$F(x) = (f(x) - f(a)) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

Она непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b), и $F(a) = F(b) = 0$; по теореме Ролля

$$\exists c \in (a, b)\ (F'(c) = 0) \ \Rightarrow\ f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0 \ \Rightarrow\ \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

(не забываем, что $g'(x) \neq 0$) ■

1.5 Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано или Лагранжа.

1.5.1 Правило Лопиталя

Теорема. Пусть $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, и:

1. f и g дифференцируемы на (a, b)
2. $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} g(x) = 0$ (или $\pm\infty$)
3. $g'(x) \neq 0$ на (a, b)

4. $\exists \lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$

Тогда существует $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Замечание. Теоремы остаются справедливыми при замене $x \to a+0$ на $x \to b-0$, $x \to x_0$, $x \to \pm\infty$.

1.5.2 Производные высших порядков

Производные высших порядков определяются индуктивно:

- Производная 1-го порядка: $f^{(1)} = f'$
- Если $f^{(n-1)}$ определена в некоторой окрестности точки a и дифференцируема в самой точке a, то функция f называется n *раз дифференцируемой*, и её производная n-го порядка (n-я производная) равна $f^{(n)}(a) = (f^{(n-1)})'(a)$
- Производная нулевого порядка: $f^{(0)} = f$

Замечание. Существование n-й производной влечёт существование $(n-1)$ производной в некоторой окрестности.

В силу линейности взятия производной по индукции имеем

$$(\alpha f + \beta g)^{(n)}(a) = \alpha f^{(n)}(a) + \beta g^{(n)}(a)$$

Теорема (формула Лейбница). Если $f, g : E \to \mathbb{R}$ n раз дифференцируемы в точке a, то fg также n раз дифференцируема, и

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a)$$

Определение. Пусть f дважды дифференцируема в точке a, тогда *вторым дифференциалом f в точке a* называется $d^2 f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определённая следующим образом:

$$\varphi(x) = df_x(h) = f'(x) \cdot h$$
$$d^2 f_a(h) = d\varphi_a(h)$$

Из определения следует, что

$$d^2 f_a(h) = \varphi'(a) \cdot h = (f'(a) \cdot h)' \cdot h = f''(a) \cdot h^2,$$

или

$$d^2 f_a = f''(a) \cdot dx^2$$

По индукции можно определить $d^n f_a$ для всех $n > 2$.

1.5.3 Формула Тейлора

Определение. Пусть f n раз дифференцируема в точке a, тогда равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + r_n(x)$$

называется *формулой Те́йлора порядка* n *функции* f *в точке* a. Многочлен

$$P_n(x) = P_{n,a,f}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

называется *многочленом Тейлора*, а $r_n(x) = r_{n,a,f}(x)$ называется *остаточным членом.*

Пример: Запишем многочлен Тейлора для $f(x) = \sum\limits_{m=0}^{l} c_m(x-a)^m$:

$$f^{(n)}(x) = \sum_{m=n}^{l} \frac{m!}{(m-n)!}\, c_m(x-a)^{m-n}$$

значит, $f^{(n)}(a) = n!\, c_n$. Таким образом, $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ — многочлен Тейлора.

Теорема (остаточный член в форме Пеано). Если f n раз дифференцируема в точке a, то

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n),\ x \to a$$

(то есть $r_n(x) = o((x-a)^n),\ x \to a$)

Доказательство: Пусть $P(x)$ — многочлен Тейлора, тогда для остаточного члена имеем

$$r_n(a) = r_n'(a) = \dots = r_n^{(n)}(a) = 0$$

Применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to a} \frac{r_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{r_n'(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \dots = \lim_{x\to a} \frac{r_n^{(n-1)}(x)}{n!\,(x-a)}$$

Последний предел существует, т. к.

$$\lim_{x\to a} \frac{r_n^{(n-1)}(x)}{n!\,(x-a)} = \frac{1}{n!} \lim_{x\to a} \frac{r_n^{(n-1)}(x) - r_n^{(n-1)}(a)}{x-a} = \frac{1}{n!} r_n^{(n)}(a) = 0$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to a} \frac{r_n(x)}{(x-a)^n} = 0$ ■

Теорема. Пусть f n раз дифференцируема в точке a, $P_1(x), P_2(x)$ — многочлены степени $\leqslant n$ и

$$f(x) - P_1(x) = f(x) - P_2(x) = o((x-a)^n),\ x \to a$$

тогда $P_1(x) = P_2(x)$.

Следствие обеих теорем. Если f n раз дифференцируема в точке a и

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k + o((x-a)^n),\ x \to a$$

то $c_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$.

Замечание. Если функция f $(n+1)$ раз дифференцируема в точке a, и

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

то

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1})$$

Теорема (остаточный член в форме Лагранжа). Пусть функция f $(n+1)$ раз дифференцируема на интервале (α, β), и зафиксирована точка $a \in (\alpha, \beta)$, тогда для любого $x \in (\alpha, \beta)$ существует c, лежащее между a и x и обладающее следующим свойством:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Доказательство: Зафиксируем точки $a, x \in (\alpha, \beta)$; для определённости положим $x > a$. Функции $r(x) = r_n(x) = f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ и $\varphi(x) = (x-a)^{n+1}$ $(n+1)$ раз дифференцируемы на $[a, x]$, $\varphi', \varphi'', \ldots, \varphi^{(n+1)} \neq 0$ на (a, x), причём $r(a) = r'(a) = \cdots = r^{(n)}(a) = 0$. Применим $(n+1)$ раз теорему Коши о среднем:

$$\begin{aligned}\frac{r(x)}{\varphi(x)} = \frac{r(x) - r(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} &= \frac{r'(c_1)}{\varphi'(c_1)} \\ &= \frac{r'(c_1) - r'(a)}{\varphi'(c_1) - \varphi'(a)} = \frac{r''(c_2)}{\varphi''(c_2)} \\ &= \cdots = \frac{r^{(n+1)}(c_{n+1})}{\varphi^{(n+1)}(c_{n+1})}\end{aligned}$$

для некоторых $a < c_{n+1} < c_n < \cdots < c_1 < x$.

Положим $c = c_{n+1}$, тогда $c \in (a, x)$ и $\dfrac{r(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{r^{(n+1)}(c)}{\varphi^{(n+1)}(c)}$. Последнее равенство эквивалентно следующему:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

(используется тот факт, что у многочлена степени $\leqslant n$ производные порядка $> n$ равны нулю) ■

1.6 Исследование функций одной переменной при помощи первой и второй производных на монотонность, локальные экстремумы, выпуклость. Необходимые условия, достаточные условия.

1.6.1 Монотонность

Теорема. Пусть функция $f : I \to \mathbb{R}$ непрерывна на промежутке I и дифференцируема во всех внутренних точках I. Тогда

1. f нестрого возрастает на $I \Leftrightarrow f'(x) \geqslant 0$ во всех внутренних точках $x \in I$.
2. f нестрого убывает $\Leftrightarrow f'(x) \leqslant 0$.
3. f постоянна $\Leftrightarrow f'(x) = 0$.
4. Если $f'(x) > 0$, то f строго возрастает.
5. Если $f'(x) < 0$, то f строго убывает.

Доказательство: Докажем первый пункт. Необходимость следует из теоремы Ферма.

Докажем достаточность. Пусть $f'(x) \geqslant 0$. Рассмотрим $x, y \in I : x < y$. По теореме Лагранжа, $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$ для некоторой $c \in (x, y)$, отсюда $f(x) \leqslant f(y)$, т. е. f нестрого возрастает.

Пункты 2, 4 и 5 доказываются аналогично, пункт 3 вытекает из пунктов 1–2. ■

1.6.2 Локальные экстремумы

Определение. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и a — внутренняя точка E. Точка a называется *точкой локального максимума*, если $\exists \varepsilon > 0\ \forall x \in B'_\varepsilon(a)\ (f(x) \leqslant f(a))$; *точкой строгого локального максимума*, если $\exists \varepsilon > 0\ \forall x \in B'_\varepsilon(a)\ (f(x) < f(a))$. (*Локальные минимумы* определяются аналогично)

Все 4 вида точек называются *локальными экстремумами*.

Теорема. Пусть $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, $a \in (\alpha, \beta)$, f непрерывна на (α, β) и дифференцируема на $(\alpha, \beta) \setminus \{a\}$.

1. Если $f'(x) \geqslant 0$ на (α, a) и $f'(x) \leqslant 0$ на (a, β), то $x = a$ — точка локального максимума (строгого, если неравенства строгие).
2. Если $f'(x) \leqslant 0$ на (α, a) и $f'(x) \geqslant 0$ на (a, β), то $x = a$ — точка локального минимума (строгого, если неравенства строгие).

Доказательство: Докажем первый пункт.

По предыдущей теореме f нестрого возрастает на $(\alpha, a]$ и нестрого убывает на $[a, \beta)$, поэтому $f(x) \leqslant f(a)$ для всех $x \in (\alpha, \beta) \setminus \{a\}$, и a — точка локального максимума.
(Если неравенства для производной строгие, то возрастание и убывание f тоже строгие.)

Теорема. Пусть f n раз дифференцируема в точке a, и $f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0, f^{(n)} \neq 0$.

1. Если n чётно и $f^{(n)}(a) < 0$, то a — точка строгого локального максимума.
2. Если n чётно и $f^{(n)}(a) > 0$, то a — точка строгого локального минимума.
3. Если n нечётно, то f не имеет в точке a локального экстремума.

Доказательство: По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$
$$f(x) - f(a) = \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \alpha(x)\right)(x-a)^n, \ \alpha(x) \to 0$$

Найдём такое $\delta > 0$, что $|\alpha(x)| < \left|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right|$ для всех $x \in B'_\delta(a)$, тогда знак выражения $\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \alpha(x)$ будет совпадать со знаком числа $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Если n чётно, то $(x-a)^n > 0$, и, значит, в случае 1 $f(x) < f(a)$, а в случае 2 $f(x) > f(a)$ $\forall x \in B'_\delta(a)$.

Если n нечётно, то знак $f(x) - f(a)$ зависит ещё и от знака $(x-a)$, то есть $\mathrm{sign}(f(x) - f(a)) = \mathrm{sign}(f^{(n)}(a)) \cdot \mathrm{sign}(x-a)$, и в точке a экстремума нет. ∎

Замечание. Чаще всего теорема применяется в случае $n = 2$.

1.6.3 Выпуклые функции

Определение. Функция f называется *выпуклой* на конечном или бесконечном интервале (a, b), если

$$\forall x_1, x_2 \ \forall t \in (0,1) \ (f((1-t)x_1 + tx_2) \leqslant (1-t)f(x_1) + tf(x_2))$$

Если неравенство строгое, то f называется *строго выпуклой*. Если неравенство заменить на противоположное, то получится определение *вогнутой (выпуклой вверх) функции*.

Лемма. Функция f выпукла на (a, b) тогда и только тогда, когда

$$\forall x_1, x_2, x \in (a,b) \ \left(x_1 < x < x_2 \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}\right)$$

Теорема. Пусть f дифференцируема на (a, b), тогда следующие условия эквивалентны:

1. f выпукла (строго выпукла) на (a, b).
2. f' нестрого (строго) возрастает.
3. $f(x) \geqslant f(t) + f'(t)\,(x-t)$.

Доказательство.

- $(1 \Rightarrow 2)$ Пусть $a < s < x_1 < u < x_2 < t < b$, тогда по лемме 1
$$\frac{f(x_1) - f(s)}{x_1 - s} \leqslant \frac{f(u) - f(x_1)}{u - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(u)}{x_2 - u} \leqslant \frac{f(t) - f(x_2)}{t - x_2}$$
Устремляя $s \to x_1, t \to x_2$, получим $f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$.

(Для строго выпуклой функции второй знак $\leqslant$ изменится на $<$)

- $(2 \Rightarrow 3)$ По теореме Лагранжа $f(x) - f(t) = f'(c)\,(x - t)$ для некоторой точки c, лежащей между x и t. Тогда $f(x) - f(t) - f'(t)\,(x - t) = (f'(c) - f'(t))(x - t)$. Правая часть всегда неотрицательна (положительна), что и требовалось доказать.

- $(3 \Rightarrow 1)$ Пусть $x_1 < x < x_2$, тогда
$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$
Применим предыдущую лемму и получим искомое.

Следствие. Пусть f дважды дифференцируема на (a, b). Функция f выпукла (строго выпукла) на (a, b) тогда и только тогда, когда $f'' \geqslant 0$ $(f'' > 0)$ на (a, b).

1.7 Теорема о равномерной непрерывности функции, непрерывной на компакте

Определение. Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется *равномерно непрерывной*, если
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, x' \in E\ (|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$$

Определение. Функция не является равномерно непрерывной, если
$$\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x, x' \in E\ (|x - x'| < \delta \wedge |f(x) - f(x')| \geqslant \varepsilon_0)$$

Теорема (Кантор). Если $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она равномерно непрерывна *на этом же отрезке.*

Пусть (X, ρ) — МП, и $K \subset X$.

Определение. Множество K называется *компактом*, если из любого его покрытия открытыми множествами $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ можно выделить конечное подпокрытие, т. е. $K \subset G_{\lambda_1} \cup \ldots \cup G_{\lambda_m}$.

Теорема. Пусть K — компакт в МП X, тогда:

1. K ограничено
2. K замкнуто

3. Любая последовательность элементов K имеет подпоследовательность, сходящуюся к элементу из K

Теорема. Множество $K \subset \mathbb{R}^n$ является компактом $\Leftrightarrow$ K ограничено и замкнуто.

Теорема. Если $f : K \to Y$ непрерывна, и K — компакт, то $f(K)$ — компакт в Y.

Следствие (теорема Вейерштрасса). Если $f : K \to \mathbb{R}$ непрерывна, то

$$\exists x_i, x_s \in K \ \left(f(x_i) = \inf_{x \in K} f(x) \wedge f(x_s) = \sup_{x \in K} f(x)\right)$$

Определение. Функция $f : X \to Y$ называется *равномерно непрерывной на* X, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x_1, x_2 \in X \ \left(\rho_X(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon\right)$$

Теорема (Кантор). Если $f : K \to Y$ непрерывна на компакте K, то она равномерно непрерывна на *этом же компакте.*

Доказательство: Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как f непрерывна на K, то

$$\forall a \in K \ \exists \delta_a > 0 \ \forall x \in K \ \left(\rho_K(x, a) < \delta_a \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

В частности, $\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ для любых $x_1, x_2 \in B_{\delta_a}(a) \cap K$.

Набор $\{B_{\frac{\delta_a}{2}}(a)\}_{a \in K}$ образует открытое покрытие K. Поскольку K — компакт, то $\exists m \in \mathbb{N} : K \subset B_{\frac{\delta_{a_1}}{2}}(a_1) \cup \ldots \cup B_{\frac{\delta_{a_m}}{2}}(a_m)$. Покажем, что $\delta = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant m} \left\{\frac{\delta_{a_k}}{2}\right\}$. Пусть $\rho_K(x_1, x_2) < \delta$ и точка x_1 принадлежит некоторому шару $B_{\frac{\delta_{a_k}}{2}}(a_k)$. Поскольку $\rho_K(x_2, a_k) \leqslant \rho_K(x_2, x_1) + \rho_K(x_1, a_k) < \delta_{a_k}$, то $x_1, x_2 \in B_{\delta_{a_k}}(a_k)$, а значит, $\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$. ■

1.8 Достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных.

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $f : E \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$.

Определение. Функция f называется *дифференцируемой в точке* a, если a — внутренняя точка E и существует такое линейное отображение $L_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, что

$$f(a + h) = f(a) + L_a(h) + \alpha(h)\,|h| \tag{1}$$

где $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$ (далее $\alpha(0) = 0$).

Матрица дифференциала $\mathcal{D}f_a$ называется *матрицей Якóби* и обозначается $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)$.

Замечание. Формулу (1) также можно записать в виде

$$f(a + h) = f(a) + \mathcal{D}f_a(h) + o(|h|), \quad h \to 0$$

Замечание. Если функция f дифференцируема в точке a, то она непрерывна в a. Действительно, по (1) получаем $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$.

Лемма. Функция f дифференцируема в точке $a \Leftrightarrow$ все её координатные функции f_i дифференцируемы в точке a.

Доказательство: Пусть f дифференцируемо в точке a. Запишем равенство (1) покоординатно:

$$f_i(a+h) = f_i(a) + L_i(h) + \alpha_i(h)\,|h| \tag{2}$$

Координатные функции L_i отображения L_a линейны, а условие "$\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$" равносильно условиям "$\alpha_i(h) \to 0$ при $h \to 0$" для всех $i = 1, \ldots, m$, поэтому f_i дифференцируема в a.

Обратно, если выполнены условия (2) с линейными функциями L_i и $\alpha_i(h) \to 0$, то выполнено (1) с отображением $L_a = (L_1, \ldots, L_m)$ и $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_2)$. ■

Теорема. Если $f : E \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке a, и $v \in \mathbb{R}^n$, то существует $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = df_a(v)$.

Следствие 1. Если f дифференцируема в точке a, то она имеет в этой точке частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$, $k = 1, \ldots, n$, и

$$df_a(h) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\, h_k$$

Следствие 2.
Если функция $f : E \to \mathbb{R}^m$ дифференцируема в точке a, то ij-й элемент матрицы Якоби равен $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$.

Теорема. Если все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ функции $f : E \to \mathbb{R}$ определены в окрестности точки a и непрерывны в точке a, то f дифференцируема в точке a.

Доказательство: Выберем $B_r(a) \subset E$, где определены $\frac{\partial f}{\partial x_k}$, и зафиксируем $h = (h_1, \ldots, h_n)$ с $|h| < r$. Покажем, что найдутся такие точки $c^{(k)} \in B_r(a)$, что

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\left(c^{(k)}\right)\, h_k$$

Рассмотрим двумерный случай. Разность $f(a+h) - f(a)$ можно переписать в виде

$$f(a+h) - f(a) = f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1+h_1, a_2) + f(a_1+h_1, a_2) - f(a_1, a_2)$$

Функция $t \mapsto f(t, a_2)$ дифференцируема на интервале, содержащем отрезок с концами $a_1 + h_1$ и a_1, поэтому по теореме Лагранжа существует такая точка a_1^*, лежащая между $a_1 + h_1$ и a_1, что

$$f(a_1+h_1, a_2) - f(a_1, a_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1^*, a_2)\, h_1 \quad (\text{при } h_1 = 0 \text{ пусть } a_1^* = a_1)$$

Аналогично

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1+h_1, a_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1+h_1, a_2^*)\, h_2$$

Положим $c^{(1)} = (a_1^*, a_2)$, $c^{(2)} = (a_1+h_1, a_2^*)$, тогда $c^{(k)} \in B_r(a)$ и $f(a+h) - f(a) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_k}\left(c^{(k)}\right)\, h_k$.

Т. к. $|c^{(k)}-a|\leqslant|h|$, то, рассматривая $c^{(k)}=c^{(k)}(h)$, имеем $c^{(k)}(h)\to a$ при $h\to 0$. Поскольку $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ непрерывна в точке a, то $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)\to\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ при $x\to a$, а значит, $\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(c^{(k)}(h)\right)\to\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ при $h\to 0$, то есть

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(c^{(k)}(h)\right)=\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)+o(1),\quad h\to 0$$

Учитывая, что $|h_k|\leqslant|h|$, имеем

$$f(a+h)-f(a)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\,h_k+o(1)\cdot|h|,\quad h\to 0$$

Следовательно, f дифференцируема в точке a. ■

1.9 Теорема о неявной функции, заданной одним уравнением.

Определение. Отображение $F:X\to X$ — *сжимающее*, если

$$\exists\lambda\in(0,1)\ \forall x,y\in X\ \left(\rho(F(x),F(y))\leqslant\lambda\,\rho(x,y)\right)$$

Теорема (Ба́нах). Пусть X — полное МП, и отображение $F:X\to X$ — *сжимающее*, тогда $\exists!\,x^*\in X\ (F(x^*)=x^*)$, x^* — неподвижная точка.

Теорема (об обратной функции). Пусть $U\subset\mathbb{R}^n$ открыто, и $a\in U$. Если $f:U\to\mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируема на U, и $\mathcal{D}f_a$ обратим ($\neq 0$), то существует открытое $W\subset U$, содержащее a и обладающее следующими свойствами:

1. $V=f(W)$ — открыто
2. $f:W\to V$ — биекция
3. Обратная функция $f^{-1}:V\to W$ непрерывно дифференцируема на V, и $\mathcal{D}f^{-1}_y=(\mathcal{D}f_x)^{-1}$, где $x=f^{-1}(y)$

Замечание. Переменные в $\mathbb{R}^{n+m}=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ будем записывать в виде $(x,y)=(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)$.

Замечание. Если $U\subset\mathbb{R}^{n+m}$ открыто, и функция $F:U\to\mathbb{R}^m$ дифференцируема в точке (a,b), то матрица Якоби имеет вид

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} & \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial F}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\end{pmatrix}$$

где $\frac{\partial F}{\partial x}$ — матрица дифференциала $x\mapsto F(x,b)$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ — матрица дифференциала $y\mapsto F(a,y)$.

Теорема (о неявной функции). Пусть $U\subset\mathbb{R}^{n+m}$ открыто, и $(a,b)\in U$. Если функция $F:U\to\mathbb{R}^m$ непрерывно дифференцируема на U, $F(a,b)=0$ и дифференциал $y\mapsto F(a,y)$ обратим в точке b (то есть $\det\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\neq 0$), то существуют такие открытые $W \subset \mathbb{R}^n$ и $V \subset \mathbb{R}^m$, содержащие a и b соответственно, и такая непрерывно дифференцируемая функция $f : W \to V$, что $W \times V \subset U$, и

$$\forall (x, y) \in W \times V \ (F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x))$$

Доказательство: Рассмотрим отображение $\Phi : U \to \mathbb{R}^n_u \times \mathbb{R}^m_v$, заданное

$$\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ F(x, y) \end{pmatrix}$$

Её матрица Якоби имеет вид $\begin{pmatrix} E & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$, а значит, якобиан Φ равен $\det \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$. По теореме об обратной функции существуют такие открытые $W_0 \ni (a, b)$ и $V_0 \ni \Phi(a, b) = (a, 0)$, что $\Phi : W_0 \to V_0$ является диффеоморфизмом. Из вида Φ заключаем, что $\Phi^{-1}(u, v) = (u, g(u, v))$ для некоторой непрерывно дифференцируемой g. Композиции $\Phi^{-1} \circ \Phi$ и $\Phi \circ \Phi^{-1}$ приводят к равенствам

$$(x, y) = \Phi^{-1}(x, F(x, y)) = (x, g(x, F(x, y))) \Rightarrow \forall (x, y) \in W_0 \ (y = g(x, F(x, y))) \tag{1.1}$$

$$(u, v) = \Phi(u, g(u, v)) = (u, F(u, g(u, v))) \Rightarrow \forall (u, v) \in V_0 \ (v = F(u, g(u, v))) \tag{1.2}$$

В частности, из (1.1) следует, что $F(x, y) = 0 \Rightarrow y = g(x, 0)$.

Определим множество $W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, 0) \in V_0\}$ (заметим, что оно открыто) и функцию $f(x) = g(x, 0) \restriction_W$ (заметим, что она непрерывно дифференцируема); уменьшая, если необходимо, W, подберём $V \supset f(W)$ так, чтобы $W \times V \subset W_0$.

Осталось показать справедливость утверждения теоремы:

1. Если $F(x, y) = 0$, то по (1.1) $y = g(x, 0) = f(x)$.

2. Если $y = f(x)$, то положим в (1.2) $(u, v) = (x, 0)$ — получится $0 = F(x, g(x, 0)) = F(x, y)$. ■

1.10 Экстремумы функций нескольких переменных. Необходимые условия, достаточные условия.

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $f : E \to \mathbb{R}$, a — внутренняя точка E, тогда a называется *точкой локального максимума*, если

$$\exists \delta > 0 \ \forall x \in B'_\delta(a) \ f(x) \leqslant f(a)$$

Аналогично определяются строгий/нестрогий локальные минимум/максимум.

Теорема. Если a — точка локального экстремума функции f и существует $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$, то $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$.

Доказательство: Рассмотрим $\varphi(x_k) = f(a_1, \ldots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$. a_k является точкой локального экстремума для $\varphi(x)$, откуда по теореме Ферма получаем требуемое. ■

Следствие.

Если f дифференцируема в точке локального экстремума, то дифференциал в этой точке нулевой.

Remind.

Пусть $f \in C^2(E)$, тогда $d^2 f_a(h) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j$ и это является по сути квадратичной формой.

Теорема. Пусть $f \in C^2(E)$, E открыто в $\mathbb{R}^n$, а в точке a дифференциал нулевой, тогда

1. $\forall h \neq 0$ $d^2 f_a(h) > 0$, то a — точка строгого локального минимума f.
2. $\forall h \neq 0$ $d^2 f_a(h) < 0$, то a — точка строгого локального максимума f.
3. $\exists h_+, h_- \neq 0$ такие, что $d^2 f_a(h_+) > 0$ и $d^2 f_a(h_+) < 0$, то a не является точкой локального экстремума f.

Доказательство:

1. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано
$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2} d^2 f_a(h) + \alpha(h)|h|^2,\ \alpha(h) \xrightarrow{h \to 0} 0$$
Тогда при $h \neq 0$ получаем, что $f(a+h) - f(a) = |h|^2 \Big(\frac{1}{2} d^2 f_a \left(\frac{h}{|h|} \right) + \alpha(h) \Big)$. Так как $f \in C^2(E)$, получаем, что отображение $h \to d^2 f_a(h)$ непрерывно, а единичная сфера является компактом (так как пространство конечномерное), по теореме Вейерштрасса $\exists m = \min d^2 f_a(h) > 0$. Пусть $\delta > 0$ таково, что $|\alpha(h)| \leqslant m$ при $|h| < \delta$, тогда $f(a+h) - f(a) \geqslant |h|^2 m > 0$.
2. Аналогично
3. $f(a+th_+) - f(a) = t^2 \left(\frac{1}{2} d^2 f_a(h_+) + \alpha(th_+)|h_+|^2 \right)$. По непрерывности и стремлению $\frac{1}{2} d^2 f_a(h_+) + \alpha(th_+)|h_+|^2 \xrightarrow{t \to 0} d^2 f_a(h_+) > 0$ получаем, что $\exists \delta_1 :\ f(a+th_+) - f(a) > 0$ для $|t| < \delta$. Аналогично для h_- построим δ_2 такое, что $f(a+th_-) - f(a) < 0$, а значит a не является точкой локального экстремума.

■

Определение. Пусть $g : U \to \mathbb{R}^m$, $m < n$, тогда $g = 0$ называют *уравнением связи*.

Определение. Точка $p \in M$ называется *точкой условного локального максимума* при уравнении связи $g = 0$, если
$$\exists \delta > 0\ \forall x \in B'_\delta(a) \cap M\ f(x) \leqslant f(p)$$

Теорема (Лагранж). Пусть $f \in C^1(U)$, $g \in C^1(U)$, при этом $\mathrm{rk} \mathcal{D} g_p = m$. Если p — точка условного локального экстремума на $M = g^{-1}(0)$, то
$$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R} :\ \mathrm{grad} f(p) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \mathrm{grad} g_i(p)$$

Доказательство: Выберем достаточно малую окрестность V точки p, что на ней $\mathrm{rk}\mathcal{D}g_x = m$. Тогда $M \cap V$ является гладкой $(n-m)$-мерной поверхностью в $\mathbb{R}^n$. Пусть $v \in T_pM$. Рассмотрим дифференцируемую кривую $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$, что $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$. Функция $f(\gamma(t))$ имеет экстремум в точке $t = 0$, откуда

$$0 = \left.\frac{df(\gamma(t))}{dt}\right|_{t=0} = (\mathrm{grad} f(p), v)$$

То есть $\mathrm{grad} f(p) \in (T_pM)^\perp$. Значит его можно разложить по базису, например, $\{\mathrm{grad} g_i(p)\}$. Это базис, так как размерность $(T_pM)^\perp$ и число g_i совпадут. Линейная независимость тривиальна из того, что у нас поверхность гладкая, а значит ранг $\mathcal{D}g(p)$ максимален. ■

1.11 Свойства интеграла с переменным верхним пределом (непрерывность, дифференцируемость). Формула Ньютона-Лейбница.

1.11.1 Интеграл Римана

Замечание. Перед тем, как коснуться самой сути пункта, нам необходимо погрузиться в удивительный мир интеграла Римана.

Пусть $[a, b]$ - невырожденный отрезок (то есть $a \neq b$).

Определение.
Набор точек $T = \{x_i\}_{i=0}^n$, где $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, называется *разбиением отрезка* $[a, b]$.

Определение.
Отрезок $[x_{i-1}, x_i]$ называется *i-ым отрезком разбиения*; его длина обозначается как Δx_i.

Определение. Число $|T| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta x_i$ называется *мелкостью разбиения*.

Определение.
Пусть $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^n$, где $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Пара (T, ξ) называется *отмеченным разбиением отрезка* $[a, b]$.

Определение. Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Величина $\sigma_T(f, \xi) = \sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ называется *интегральной суммой функции f, отвечающей отмеченному разбиению* (T, ξ).

Определение. Функция f называется *интегрируемой по Риману на отрезке* $[a, b]$, если

$$\exists I \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall (T, \xi)\ (|T| < \delta \Rightarrow |\sigma_T(f, \xi) - I| < \varepsilon)$$

Определение. Если функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, то значение I определено однозначно. Оно называется *определённым интегралом функции f на отрезке* $[a, b]$ и обозначается

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx$$

Определение. $\mathcal{R}[a, b]$ - множество функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$.

Замечание. Если $f \in \mathcal{R}[a,b]$, то для любой последовательности отмеченных разбиений (T^j, ξ^j) такой, что $|T^j|\to 0$, выполнено $\sigma_{T^j}(f,\xi^j) \to \int\limits_a^b f(x)dx$.

Лемма. Если функция $f \in \mathcal{R}[a,b]$, то она ограничена на $[a,b]$.

Утверждение. Интеграл Римана имеет следующие свойства:

1. **Линейность.** Если $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, то для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ функция $\alpha f + \beta g$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$, причём
$$\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx + \beta \int\limits_a^b g(x)dx$$
2. **Монотонность.** Если $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ и $f \leqslant g$ на отрезке $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)dx$
3. **Аддитивность.** Если $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $f \in \mathcal{R}[b,c]$, $f \in \mathcal{R}[a,c]$, где $a < b < c$, то справедливо равенство: $\int\limits_a^c f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx$

Замечание. Также удобно считать, что $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$, а $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

Утверждение. Если $|f|\in \mathcal{R}[a,b]$, то
$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$$

1.11.2 Непрерывность и дифференцируемость интеграла с переменным верхним пределом

Определение. Пусть I — промежуток, $f : I \to \mathbb{R}$, тогда если $f \in \mathcal{R}[c,d]$ для любого $[c,d] \subset I$, то функция f называется *локально интегрируемой.*

Определение. Пусть I — промежуток, а $f : I \to \mathbb{R}$ — локально интегрируемая функция на нём. Зафиксируем $a \in I$, тогда функция $F : I \to \mathbb{R}$, определённая как $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$, называется *интегралом с переменным верхним пределом.*

Теорема. Пусть $f : I \to \mathbb{R}$ — локально интегрируема на I, $a \in I$, тогда функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ непрерывна на I; если f непрерывна в $x \in I$, то F дифференцируема в x, а $F'(x) = f(x)$.

Доказательство: Пусть $x \in I$. Выберем $\sigma > 0$ так, чтобы $[\alpha, \beta] := [x-\sigma, x+\sigma] \cap I$ был невырожденным отрезком. По условию $f \in \mathcal{R}[\alpha,\beta]$, а значит $M = \sup\limits_{[\alpha,\beta]} |f| < \infty$. Для $y \in [\alpha,\beta]$ имеем:
$$|F(y) - F(x)|= \left|\int\limits_a^y f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt\right| = \left|\int\limits_x^y f(t)dt\right| \leqslant \left|\int\limits_x^y |f(t)|\,dt\right| \leqslant M\,|y-x|\,,$$

откуда получаем, что $\lim\limits_{y\to x} F(y) = F(x)$, а это есть непрерывность.

Приступим к доказательству второго пункта теоремы и зафиксируем $\varepsilon > 0$. Если f непрерывна в x, то $\exists \delta > 0\ \forall t \in B_\delta(x) \cap I\ (|f(t) - f(x)| \leqslant \varepsilon)$. Отсюда для $y \in B'_\delta(x) \cap I$ имеем:

$$\left|\frac{F(y) - F(x)}{y - x} - f(x)\right| = \left|\frac{1}{y - x}\int\limits_x^y f(t)dt - f(x)\right| = \frac{1}{|y - x|}\left|\int\limits_x^y (f(t) - f(x))dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|y - x|}\left|\int\limits_x^y |f(t) - f(x)|\, dt\right| \leqslant \frac{1}{|y - x|}\cdot \varepsilon\,|y - x| = \varepsilon,$$

а это значит, что F дифференцируема в x, причём $F'(x) = f(x)$. ■

Следствие. Если $f : I \to \mathbb{R}$ непрерывна на I, то F является первообразной функции f на I.

1.11.3 Формула Ньютона-Лейбница

Теорема (формула Ньютона-Лейбница). Если функция $f \in \mathcal{R}[a, b]$ имеет первообразную F на отрезке $[a, b]$, то справедлива формула Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Доказательство: Для всех $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим последовательность $x_k = a + \frac{b-a}{n}k$, где $k = 0, \ldots, n$. По теореме Лагранжа 1.4.2:

$$\exists \xi_k^{(n)} \in [x_{k-1}, x_k]\left(F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'\left(\xi_k^{(n)}\right)\cdot(x_k - x_{k-1}) = f\left(\xi_k^{(n)}\right)\cdot \Delta x_k\right),$$

тогда для отмеченного разбиения $\left(T^{(n)}, \xi^{(n)}\right)$ имеем:

$$\sigma_{T^{(n)}}\left(f, \xi^{(n)}\right) = \sum_{k=1}^{n}(F(x_k) - F(x_{k-1})) = F(b) - F(a)$$

Поскольку $f \in \mathcal{R}[a, b]$, по замечанию 1.11.1 получаем желаемое:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sigma_{T^{(n)}}\left(f, \xi^{(n)}\right) = F(b) - F(a)$$

■

1.12 Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость суммы функционального ряда.

1.12.1 Числовые ряды

Теорема (признак Коши).

Пусть $a_n \geqslant 0$ и $q = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}$, тогда

- Если $q < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится
- Если $q > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится

Доказательство:

- Пусть $q < q_0 < 1$, тогда по свойству верхнего предела $\exists N : \forall n \geqslant N \ \sqrt[n]{a_n} < q_0$. Но тогда $a_n < q_0^n$, а ряд из q_0^n сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем меньше единицы. Откуда по признаку сравнения и исходный ряд начиная с N-го члена сходится, а частичная N-я сумма очевидно конечна. То есть и исходный ряд сойдется.
- Так как q — частичный предел $\sqrt[n]{a_n}$, откуда неравенство $\sqrt[n]{a_n}$ верно для бесконечного числа номеров, откуда $a_n \not\to 0$, а значит и ряд расходится.

■

Теорема (Признак Д'аламбера).

Пусть $a_n > 0$. Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, то ряд сходится. Если $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то ряд расходится.

Доказательство: Пусть $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} < q_0 < 1$, тогда, начиная с некоторого N, $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q_0$, откуда ряд сходится по признаку сравнения с геометрической прогрессией $(a_{N+k} = a_N \cdot q^k)$.

Если же $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то, начиная с некоторого N, $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, откуда $a_n \not\to 0$ и ряд расходится. ■

1.12.2 Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов

Определение. Пусть имеются функции $f_n : E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, тогда набор $\{f_n\}$ называется *функциональной последовательностью.*

Замечание. Для удобства договоримся, что функция f действует из E в $\mathbb{R}(\mathbb{C})$.

Определение. Функциональная последовательность $\{f_n\}$ *поточечно сходится* к функции f на множестве E, если $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ для любого $x \in E$.

Определение. Если $\{f_n\}$ поточечно сходится к f, то f называется *предельной функцией* последовательности $\{f_n\}$, а сходимость обозначается так: $f_n \to f$ на E.

Определение. Функциональная последовательность $\{f_n\}$ *равномерно сходится* к функции f на множестве E (обозначение: $f_n \rightrightarrows f$ на E), если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant N \ \forall x \in E \ (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

Замечание. Равномерная сходимость влечёт за собой поточечную, обратное неверно.

Лемма. $f_n \rightrightarrows f$ на $E \iff \lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$, где $\rho_n = \sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|$.

Доказательство: Высказывание $\forall x \in E$ $(|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon)$ равносильно высказыванию $\sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. Отсюда и получаем равносильность левой и правой частей. ■

Определение. Функциональная последовательность *равномерно (поточечно) сходится на* E, если существует определённая на E функция, к которой данная последовательность равномерно (поточечно) сходится на E.

Определение. Пусть имеется функциональная последовательность $\{f_n\}$, где $f_n : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, тогда символ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ называется *функциональным рядом.*

Определение. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *сходится на множестве* $E \subset X$, если $\forall x \in E$ числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится.

Определение. Функция $S : E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, определённая как $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, называется *суммой функционального ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$.

Определение. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *равномерно (поточечно) сходится на* E, если последовательность его частичных сумм $S_N(x) = \sum\limits_{n=1}^{N} f_n(x)$ равномерно (поточечно) сходится на E.

Замечание. Равномерная сходимость имеет следующие свойства:

1. Если $f_n \rightrightarrows f$ на E, а $D \subset E$, то $f_n \rightrightarrows f$ на D.

   Если функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ равномерно сходится на E, а $D \subset E$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ равномерно сходится на D.

2. Если $f_n \rightrightarrows f$ на E и $g_n \rightrightarrows g$ на E, то $\alpha f_n + \beta g_n \rightrightarrows \alpha f + \beta g$ на E

   Если функциональные ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ равномерно сходятся на E, то функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha f_n + \beta g_n)$ тоже равномерно сходится на E, причём $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha f_n + \beta g_n) = \alpha \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n + \beta \sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$.

   Следствие. Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ равномерно сходится на E, то $f_n \rightrightarrows 0$ на E.

3. Пусть функция $g : E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ ограниченна.

   Если $f_n \rightrightarrows f$ на E, то $gf_n \rightrightarrows gf$ на E.

   Если функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ равномерно сходится на E, то функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} gf_n$ тоже равномерно сходится на E, причём верно, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} gf_n = g \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$.

Теорема (критерий Коши). Функциональная последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится тогда и только тогда, когда она удовлетворяет *условию Коши*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geqslant N\ \forall x \in E\ (|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon)$$

Доказательство:

$\Longrightarrow$ Найдем такой N, что $\forall n, m > N\ \forall x \in E\ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, откуда по неравенству треугольника $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

$\Longleftarrow$ Зафиксируем $\varepsilon > 0$, найдем N из условия Коши. Заметим, что $\forall x \in E\ \{f_n(x)\}$ фундаментальна, то есть сходится. Тогда пусть $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Зафиксируем n и устремим $m \to \infty$ в условии Коши и получим

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ \forall x \in E\, (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

■

Следствие. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ равномерно сходится тогда и только тогда, когда он удовлетворяет *условию Коши*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in E\ \left(\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon \right)$$

Замечание. Передавайте привет от этих условий Коши остальным условиям и теоремам Коши, которых встретите в процессе чтения госбука. Также передавайте привет и благодарность Андрею Титову за исходники предложенных ниже признаков сходимости.

Теорема (признак Вейерштрасса).
Если функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ и числовая последовательность $\{a_n\}$ таковы, что

1. $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in E\ (|f_n(x)| \leqslant a_n)$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится абсолютно и равномерно на E.

Доказательство: Так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то он удовлетворяет условию Коши, но тогда из неравенств $\left| \sum\limits_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{m} a_n$ следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ (на E) удовлетворяет условию Коши равномерной сходимости функциональных рядов; по критерию Коши он сходится равномерно. Абсолютная сходимость следует по признаку сравнения для числовых рядов.

Определение. *Преобразование Абеля*: пусть $B_k = \sum\limits_{j=1}^{k} b_j$, тогда

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{m} a_k (B_k - B_{k-1}) = a_m B_m - a_{n+1} B_n - \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_{k+1} - a_k) B_k$$

■

Теорема (признак Дирихле).
Если частичные суммы $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ равномерно ограниченны на E (т. е. $\sup\limits_{x,n}|B_n(x)|< \infty$), последовательность вещественнозначных функций $a_n(x)$ монотонна (по n), и $a_n \rightrightarrows 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, b_n(x)$ равномерно сходится на E.

Доказательство:
Из условия равномерной ограниченности $\{B_n\}$ вытекает, что $\exists M > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in E\ (|B_n(x)|\leqslant M)$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Из условия $a_n \rightrightarrows 0$ найдём такой номер N, что $\forall n \geqslant N\ \forall x \in E\ (|a_n(x)|< \varepsilon)$.

Зафиксируем $x \in E$. Применим преобразование Абеля к отрезку ряда (далее $m > n \geqslant N$):

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k(x)\, b_k(x) = a_m(x)\, B_m(x) - a_{n+1}(x)\, B_n(x) - \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_{k+1}(x) - a_k(x))\, B_k(x)$$

Тогда с учётом постоянства знака $a_{k+1}(x) - a_k(x)$ имеем оценку[1]

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k(x)\, b_k(x)\right| \leqslant M \left(|a_m(x)|+|a_{n+1}(x)|+ \sum_{k=n+1}^{m-1} |a_{k+1}(x) - a_k(x)|\right) < 2M\varepsilon$$

По критерию Коши (следствие теоремы 1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ равномерно сходится на E. ■

Следствие. (признак Лейбница). Если последовательность $a_n(x)$ монотонна (по n), и $a_n \rightrightarrows 0$ на E, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n(x)$ равномерно сходится на E.

Теорема (признак Абеля). Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ равномерно сходится на E, последовательность вещественнозначных функций $a_n(x)$ монотонна (по n) и равномерно ограниченна на E, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, b_n(x)$ равномерно сходится на E.

Доказательство:
Из условия равномерной ограниченности $\{a_n\}$ вытекает, что $\exists C > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in E\ (|a_n(x)|\leqslant C)$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Из равномерной сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ найдём такой номер N, что $\forall n \geqslant N\ \forall x \in E\ (|B_n(x) - B(x)|< \varepsilon)$ (здесь $B(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$).

Зафиксируем $x \in E$. Применим преобразование Абеля к отрезку ряда (далее $m > n \geqslant N$):

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k(x)\, b_k(x) = a_m(x)\, B_m(x) - a_{n+1}(x)\, B_n(x) - \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_{k+1}(x) - a_k(x))\, B_k(x)$$

Так как $a_m(x) - a_{n+1}(x) - \sum\limits_{k=n+1}^{m-1} (a_{k+1}(x) - a_k(x)) = 0$, то, домножая обе части равенства на $B(x)$ и

[1]Если заменить третье слагаемое на модуль разности, получится более простая оценка $4M\varepsilon$.

вычитая его из предыдущего равенства, получим

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k(x)\, b_k(x) = a_m(x)\,(B_m(x) - B(x)) - a_{n+1}(x)\,(B_n(x) - B(x)) \\ - \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_{k+1}(x) - a_k(x))\,(B_k(x) - B(x))$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k(x)\, b_k(x)\right| \leqslant \varepsilon \left(|a_m(x)|+|a_{n+1}(x)|+\sum_{k=n+1}^{m-1} |a_{k+1}(x) - a_k(x)|\right) \\ \leqslant 4C\varepsilon$$

По критерию Коши (следствие теоремы 1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ равномерно сходится на E. ■

1.12.3 Непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость суммы функционального ряда

Теорема. Пусть $f_n \rightrightarrows f$ на $E \subset \mathbb{R}$ и $\forall n$ f_n непрерывны в точке $a \in E$. Тогда f непрерывна в a.

Доказательство: Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $f_n \rightrightarrows f$, найдем N такой, что $\forall n \geqslant N$ $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ на E. Теперь зафиксируем $n > N$.

$$|f(x) - f(a)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| < \frac{2\varepsilon}{3} + |f_n(x) - f_n(a)|$$

В силу непрерывности f_n подберем $\delta > 0$ такое, что $\forall x \in B_\delta(a) \cap E$ $|f_n(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Откуда следует требуемое. ■

Теорема. Пусть последовательность дифференцируемых функций $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ сходится в некоторой точке $x_0 \in [a, b]$, а $f_n' \rightrightarrows g$ на $[a, b]$, тогда $\{f_n\}$ равномерно сходится на $[a, b]$ к некоторой функции f, причём f дифференцируема на $[a, b]$, а $f' = g$.

Доказательство: Покажем, что f_n сходятся равномерно на $[a, b]$. Применяя теорему Лагранжа к разности $f_n - f_m$, получим (точка c между x и x_0):

$$(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(x_0) - f_m(x_0)) = (x - x_0)(f_n'(c) - f_m'(c)) \Longrightarrow \\ \Longrightarrow |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + |f_n'(c) - f_m'(c)| \cdot (b - a)$$

Так как $f_n' \rightrightarrows g$ и последовательность $\{f_n(x_0)\}$ сходится, получаем, что $\{f_n(x)\}$ удовлетворяет условию Коши равномерной сходимости, то есть $f_n \rightrightarrows f$, при этом f непрерывна (по теореме выше).

Зафиксируем $x \in [a, b]$. Рассмотрим $\varphi_n(t) = \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}$ при $x \neq t$ и $\varphi_n(x) = f_n'(x)$. По теореме Лагранжа:

$$\varphi_n(t) - \varphi_m(t) = \frac{(f_n(t) - f_n(x)) - (f_m(t) - f_m(x))}{t - x} = f_n'(\xi) - f_m'(\xi)$$

Откуда следует:

$$\sup_{t \in [a,b]} |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| \leqslant \sup_{\xi \in [a,b]} |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)|$$

Так как $f_n' \rightrightarrows g$, получаем, что и φ_n тоже сходятся равномерно на $[a,b]$ к функции $h(t) = \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ при $t \neq x$ и $h(x) = g(x)$. Так как h непрерывна, получаем, что $f'(x) = \lim\limits_{t\to x} h(t) = h(x) = g(x)$. ■

Следствие. Пусть функции $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ дифференцируемы на $[a,b]$, функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'$ равномерно сходится на $[a,b]$, существует такая точка $x_0 \in [a,b]$, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ сходится, тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ равномерно сходится на $[a,b]$, а для любого $x \in [a,b]$ верно, что

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

Следствие. Пусть $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$, где $f_n \in C[a,b]$, тогда $\int\limits_a^x f_n(t)dt \rightrightarrows \int\limits_a^x f(t)dt$.

Доказательство: По теореме о непрерывности f непрерывна, а значит и интегрируема. Пусть $\varepsilon > 0$, найдем такой номер N, что $\forall n > N\ \forall x \in [a,b]\ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$, тогда

$$\left|\int_a^x f_n(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right| \leqslant \left|\int_a^x |f_n(t) - f(t)|dt\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$

■

1.13 Степенные ряды. Радиус сходимости. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда. Ряд Тейлора.

Замечание. В этом пункте крайне высока концентрация именных утверждений, в частности за авторством одного специалиста в теории вероятностей, дифференциальных уравнениях и вещественном и комплексном анализе — Огюстена Луи Коши.

1.13.1 Степенные ряды

Определение. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

называется *степенным*, если $c_n, z_0 \in \mathbb{C}$ и $z \in \mathbb{C}$ — переменная

Определение. Число R называется *радиусом сходимости* степенного ряда, если $\forall z \in \{|z - z_0| < R\}$ ряд сходится, а $\forall z \in \{|z - z_0| > R\}$ ряд расходится.

Замечание. Для $z \in \{|z - z_0| = R\}$ ряд может как сходиться, так и расходиться.

Теорема (формула Коши-Адамара).

Каждый степенной ряд имеет радиус сходимости, который может быть найден по формуле:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

Доказательство: Пусть $z \neq z_0$, тогда введем

$$q = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n(z-z_0)^n|} = |z-z_0| \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$$

Если $q < 1$, то по признаку Коши ряд сходится (и абсолютно тоже). Аналогично, если $q > 1$, то ряд расходится (и абсолютно тоже). ■

Определение.
Пусть R — радиус сходимости, тогда *кругом сходимости* называют множество $B = \{z \mid |z-z_0|< R\}$.

Теорема. Пусть $R > 0$ — радиус сходимости, тогда внутри замкнутого круга $B_r = \{z \mid |z - z_0| \leqslant r\}$, где $r \in [0, R)$ ряд сходится равномерно.

Доказательство: Внутри B_r верно, что ряд сходится абсолютно, то есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n| r^n$ сходится. Но тогда, так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n| (z-z_0)^n \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n| r^n$ исходный степенной ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса. ■

Лемма. Следующие степенные ряды имеют одинаковые радиусы сходимости

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-z_0)^{n-1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (z-z_0)^{n+1}$$

Теорема. Пусть $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ и $R > 0$. Тогда $f \in C^{\infty}(\{z \mid |z-z_0|< R\})$ и

$$f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \prod_{k=0}^{n-1} (n-k) \cdot c_n (z-z_0)^{n-m}$$

Доказательство: Сделаем несколько допущений:

1. Без ограничения общности $z_0 = 0$.
2. Покажем для $m = 1$, а далее, так как по лемме радиус сходимости не меняется, применим индукцию.

   Пусть $w \in B_R(0)$. Докажем, что $f'(w) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n w^{n-1} = l$. Зафиксируем такое r, что $|w|< r < R$. Для $z \neq w$ рассмотрим величину

$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - l = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{z^n - w^n}{z-w} - n w^{n-1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z^{n-1} + w z^{n-2} + \ldots + w^{n-1} - n w^{n-1}) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left((z^{n-1} - w^{n-1}) + w(z^{n-2} - w^{n-2}) + \ldots + w^{n-2}(z-w) \right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n(z-w)\left(\sum_{k=0}^{n-2} z^k w^{n-2-k} + w\sum_{k=0}^{n-3} z^k w^{n-3-k} + \ldots + w^{n-2}\right)\right]$$

В первом «внутреннем» ряду $(n-1)$ слагаемое, во втором — $(n-2)$. Так как $\sum\limits_{m=1}^{n-1}(n-m) = \frac{n(n-1)}{2}$, то справедлива оценка

$$|c_n|\left|z^{n-1} + wz^{n-2} + \ldots + w^{n-1} - nw^{n-1}\right| \leqslant |z-w||c_n|\cdot\frac{n(n-1)}{2}r^{n-2}$$

Ряд из членов в формуле выше сходится в $B_r(0)$, так как является второй производной абсолютно сходящегося ряда. А значит

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - l\right| \leqslant |z-w|\sum_{n=2}|c_n|\cdot\frac{n(n-1)}{2}r^{n-2} \to 0, \text{ при } z\to w$$

откуда существует $\lim\limits_{z\to w}\frac{f(z)-f(w)}{z-w} = l$. ■

1.13.2 Ряд Тейлора

Определение. Если f бесконечно дифференцируема в z_0, то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

называется *рядом Тейлора* f в точке z_0.

Замечание. В общем случае неверно, что ряд Тейлора сходится к самой функции.

Пример:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x\leqslant 0 \\ e^{-\frac{1}{x}}, & x>0 \end{cases}$$

На $x\leqslant 0$ верно, что все производные равны нулю. А вот для $x>0$ получим, что $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$, где P_n — многочлен степени $2n$.

Более того, $P_0(t)=1$ и $P_{k+1}(t) = t^2(P_k(t) - P_k'(t))$, откуда $f^{(n)} = 0$ на $\mathbb{R}$, но ни в какой окрестности нуля ряд Тейлора не сойдется к f даже поточечно.

Теорема. Пусть f в $B_\delta(a)$ бесконечно дифференцируема и $\exists C>0 : \forall x\in B_\delta(a)\ \forall n\in\mathbb{N}\ |f^{(n)}(x)|< C$, то ряд Тейлора сходится к этой функции в $B_\delta(a)$

Доказательство: Воспользуемся формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. То есть $\forall x\in B_\delta(a)$ и $\forall N\in\mathbb{N}$ существует точка c между x и a такая, что

$$\left|f(x) - \sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-a)^n\right| = \left|\frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1}\right| \leqslant \frac{C\delta^{N+1}}{(N+1)!}\to 0$$

■

1.14 Глоссарий для раздела ниже

Замечание. Данный раздел запрещен для чтениям беременным и детям до 18 лет. Перед прочтением проконсультируйтесь со специалистом.

Замечание. Я серьезно. Не надо читать ниже, вы еще молоды.

Замечание. Даже если это вас не остановило, то от винта, коллеги, в последний путь!

Определение. *Диффеоморфизм* — такое отображение из U в V открытых в $\mathbb{R}^n$ множеств, что оно непрерывно диференцируемо на U, при этом оно биективно, а обратное к нему тоже непрерывно дифференцируемо на V.

Определение. Отображение метрических пространств является *гомеоморфизмом*, если оно непрерывно и биективно, при этом обратное тоже непрерывно.

Определение. Пусть $k \in [1, n]$. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *гладкой (регулярной) k-мерной поверхностью*, если $\forall p \in M$ $\exists V \in \mathbb{R}^n$ открытое и такое, что $p \in V$, открытое в $\mathbb{R}^k$ множество U и $\exists \varphi : U \to \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение, что оно является гомеоморфизмом из U в $M \cap V$, причем $\mathrm{rk}\mathcal{D}\varphi$ для любой точки из U максимален (то есть равен k).

1.14.1 Дифференциальные 1-формы

Определение. Пусть $U \in \mathbb{R}^n$ открыто, тогда *дифференциальной 1-формой* на U называют функцию $\omega : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Замечание. То есть ω берет точку из U и становится линейным оператором из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$. Это можно записать как $\omega(x, h)$, где $x \in U$ и $h \in \mathbb{R}^n$.

Замечание. Таким образом, дифференциальной форме соответствует *векторное поле* $F : U \to \mathbb{R}^n$.

Замечание. Сложение и произведение форм определено поточечно.

Определение. Форма принадлежит классу $C^r(U)$, если все её компоненты $\omega(x, e_i)$ таковы. В данном определении e_i составляют базис.

Определение. Пусть $\gamma : [a, b] \to U$ — гладкая параметризованная кривая, а ω — дифференциальная 1-форма, тогда можно определить интеграл по кривой от дифформы

$$\int\limits_\gamma \omega = \int\limits_a^b \omega(\gamma(t), \gamma'(t))dt$$

Замечание. О корректности определения мы корректно умолчим.

О свойствах интеграла от дифформы. Он линеен и аддитивен по кускам кривой.

Естественно в этом разделе уже никто не гонится за пониманием, но для любопытных ребят приведем пример.

Пример: Пусть $\omega = \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy$, $\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Тогда

$$\int\limits_\gamma \omega = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{R\cos t}{R^2}(-R\sin t) + \frac{R\sin t}{R^2}(R\cos t) \right) dt = 0$$

Как видите, не так уж и страшно, но это пока.

Теорема. Пусть $f : U \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(U)$, а U открыто, и $\gamma : [a, b] \to U$ является кусочно гладкой. Тогда справедлива формула Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Определение. пусть $F : U \to \mathbb{R}$, $F \in C^1(U)$, а U открыто, и ω — дифференциальная 1-форма. Тогда

1. F — первообразная ω, если $dF = \omega$.
2. ω называется *точной* на U, если у нее есть первообразная на U.

Теорема. Пусть U — область в $\mathbb{R}^n$, а ω — непрерывная 1-форма на U, тогда следующие утверждения эквивалентны

1. ω точна на U
2. Интеграл вдоль замкнутой кривой нулевой
3. Интеграл вдоль кривой не зависит от траектории, а только от концов.

Замечание. Если дифференциальная 1-форма точна, то соответствующее ей векторное поле называют *потенциальным.*

Замечание. Из теоремы выше и курса школьной физики можно попробовать придумать аналогию, что дифференциальная 1-форма задает в пространстве векторное поле силы (например, тяжести, при этом оно потенциально (напряглись и вспомнили, что это правда)).

1.14.2 Внешние k-формы

Пусть V — линейное пространство с базисом $e_1, \ldots, e_n$.

Определение. Функция $\omega : V^k \to \mathbb{R}$ называется *внешней k-формой*, если она обладает следующими свойствами:

1. Линейна по каждому аргументу.
2. Она кососимметрична, то есть $\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \operatorname{sign}(\sigma)\omega(v_1, \ldots, v_k)$

Замечание. Пространство k-форм обозначается как $\bigwedge^k(V)$.

Определение. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in V^*$, то есть линейные функции на V, тогда *мономом* называют k-форму вида

$$\alpha_1 \overline{\wedge} \ldots \overline{\wedge} \alpha_k(v_1, \ldots, v_k) = \det(\alpha_i(v_j))$$

Определение. *Внешним произведением* k-формы ω и m-формы φ называют $(k+m)$-форму вида

$$\omega \wedge \varphi(v_1, \ldots, v_{k+m}) = \frac{1}{k!\,m!} \sum_{\sigma \in S_{k+m}} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \omega\left(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}\right) \cdot \varphi\left(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+m)}\right)$$

Теорема. На мономах операции $\wedge$ и $\overline{\wedge}$ совпадают.

Теорема. Внешние k-формы ассоциативны, антикоммутативны (выносится $(-1)^{km}$, где k, m — размерности форм) и дистрибутивны относительно сложения.

1.14.3 Дифференциальные k-формы

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ открыто.

Определение. Пусть M — гладкая поверхность, а $p \in M$, тогда *касательным пространством* T_pM называют множество всех касательных векторов к M в точке p.

Определение. *Дифференциальной k-формой* на U называют отображение $\omega : U \to \bigwedge^k(T_p(\mathbb{R}^n))$.

Замечание. Мы вышли на еще один уровень абстракции. Теперь мы по точке будем возвращать внешнюю k-форму, которая берет n векторов и сопоставляет ей число.

Замечание. $\mathcal{I}_k$ назовем все поднаборы индексов размера k упорядоченные по возрастанию.

Определение. Пусть $\{e_i(p)\}$ — базис в $T_p\mathbb{R}^n$, а $\{dx_i(p)\}$ — двойственный базис, тогда можно разложить дифференциальную k-форму по базису:

$$\omega(p) = \sum_{I \in \mathcal{I}_k} a_I(p)(dx_I(p)) \Longrightarrow \omega = \sum_{I \in \mathcal{I}_k} a_I dx_I$$

Определение. *Внешним дифференциалом* $\omega = \sum\limits_{I \in \mathcal{I}_k} a_I dx_I \in \Omega^k(U)$ называют

$$d\omega = \sum_{I \in \mathcal{I}_k} da_I \wedge dx_I = \sum_{I \in \mathcal{I}_k} \left(\sum_j \frac{\partial a_I}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_I \in \Omega^{k+1}(U)$$

Пример: Именно этим примером мы сведем уважаемую теорему Стокса к пустячковой теореме Грина. Пусть $\omega = Pdx + Qdy$, тогда найдем

$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right) \wedge dy = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

Замечание. Заметим, что $dx \wedge dx = 0$, если k нечетно, так как у нас имеется антикоммутативность. То есть $dx \wedge dy = (-1)^{km} dy \wedge dx$, а в нашем случае $m = k$, то есть $dx \wedge dy = (-1)^{k^2} dy \wedge dx$, а так как k

нечетно, то и k^2 нечетно, откуда $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$, а в нашем случае $dx \wedge dx = -dx \wedge dx$. Поэтому половина слагаемых умирает при вычислении дифференциала выше.

Теорема. Для внешнего дифференциала верны следующие свойства:

1. Он линеен
2. $d(\omega \wedge \varphi) = d\omega \wedge \varphi + (-1)^k \omega \wedge d\varphi$
3. $d^2\omega = 0$

Определение. *Интегралом от дифформы* $\omega = a(x)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \in \Omega^n(U)$ для области $U \subset \mathbb{R}^n$ назовем

$$\int_U \omega = \int_U a(x)dx_1 \ldots dx_n$$

Замечание. Чувствуете уже теорему Грина, да?))))))))))))

1.14.4 Оператор переноса (pullback)

Определение. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ открыто и $V \subset \mathbb{R}^m$ открыто, тогда отображение $f : U \to V$ порождает $f^* : \Omega^k(V) \to \Omega^k(U)$, действующий по следующему правилу:

$$(f^*\omega)_p(v_1, \ldots, v_k) = \omega_{f(p)}(\mathcal{D}f_p(v_1), \ldots, \mathcal{D}f_p(v_k))$$

Теорема. Свойства оператора переноса:

1. Он линеен
2. $f^*(\omega \wedge \varphi) = f^*\omega \wedge f^*\varphi$
3. Если $\omega = \sum a_I dy_I$ и $y = f(x)$, то $f^*\omega = a_I \circ f df_I$
4. $d(f^*\omega) = f^*d\omega$

Коллеги, если вы дочитали до этого места, то я вас безмерно уважаю. Если вы поняли хотя бы половину, то вы герои нашего времени. А я вынужден сообщить, что винт у нашего самолета уже давно отвалился и мы входим в клубничное пике.

1.14.5 Многообразия для маленьких

Если вы вдруг думаете, что мы так с наскоку дадим определение многообразия, то это конечно не так. Вспомним немного функционального анализа.

Определение. Топологическое пространство X — множество, в котором выделена $\tau \subset 2^X$, для которой верно следующее:

1. $\varnothing, X \in \tau$

2. Пусть $\alpha \in \mathcal{A}$, тогда если $U_\alpha \in \tau$, тогда и $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha \in \tau$

3. Замкнуто относительно конечного пересечения.

Определение. Множества из τ в определении выше. Окрестностью точки $p \in X$ называют любое открытое множество, содержащее ее.

Определение. Топологическое пространство *хаусдорфово*, если для любых различных точек из X имеются непересекающиеся окрестности.

Определение. *Карта* на X — пара (U, φ) такая, что U открыто в X, а $\varphi : V \to U$ является гомеоморфизмом из области $V \subset \mathbb{R}^n$ в U.

Определение. *Атлас* — набор карт $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ такой, что $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha = X$.

Определение. Пусть $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$, тогда отображение

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$$

называется *функцией перехода.*

Определение. Хаусдорфово топологическое пространство M называют *гладким многообразием* размерности n, если на нем существует не более чем счетный атлас, функции перехода которого гладкие.

1.14.6 Немного об ориентации ~~авторов~~

Определение. Атлас *ориентирующий*, если якобианы всех функций перехода положительны.

Определение. Гладкое многообразие с ориентирующим атласом называется *ориентированным.*

Определение. Если на гладком многообразии существует ориентирующий атлас, то оно называется *ориентируемо.*

Определение. *Ориентация* многообразия — класс эквивалентности ориентирующих атласов, где два атласа эквивалентны, если их объединение ориентирующее.

1.14.7 Многообразия с краем

Определение. Множество $H^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \leqslant 0\}$ будем называть *полупространством.*

Определение. Хаусдорфово топологическое пространство M называют *гладким многообразием с краем* размерности n, если на нем существует не более чем счетный атлас, карты которого устроены как $\{(U, \varphi)\}$, при этом $\varphi : V \to U$, где U открыто в M, а V является областью в H^n. Также необходимо, чтобы функции перехода были гладкими.

Утверждение. Диффеоморфизм (гладкое и биективное отображение) переводит внутренние точки во внутренние, а граничные в граничные.

Определение. Точка $p \in M$ называется *краевой*, если существует такая карта, содержащая ее, что обратная функция перехода переводит p в граничную точку H^n.

Определение. *Краем многообразия* будем называть множество краевых точек. Обозначать такое множество будем как ∂M.

Теорема. Пусть M — гладкое многообразие размерности n с непустым краем. Тогда ∂M является гладким многообразием размерности $(n-1)$ с пустым краем, причем край ориентируем, если ориентируемо само многообразие.

Определение. Такие «индуцированные» ориентации края и самого многообразия будем называть *согласованными*.

Замечание. Любое многообразие является подмногообразием $\mathbb{R}^n$, что позволяет нам переходить с языка областей на язык многообразий.

Ну в принципе мы готовы.

1.14.8 Формула Стокса.

Теорема (Пацанский Стокс). Пусть M — гладкое n-мерное $(n > 1)$ многообразие с краем, причем ориентации M и ∂M согласованы. Тогда $\forall \omega \in \Omega_C^{n-1}(M)$ верно, что

$$\int\limits_{\partial M} \omega = \int\limits_{M} d\omega$$

Доказательство:

Замечание. Если вдруг вы дошли до этой строки на ГОСе, то сообщите автору, он пришлет вам четное число цветочков.

1. Пусть $M = V \subset \mathbb{R}^n$ — открытое. Распишем ω в координатах:

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n$$

   Будем считать, что $\omega(\mathbb{R}^n \setminus V) = 0$. Теперь распишем

$$d\omega = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) dx_j \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

   А теперь черная магия

$$\int\limits_{V} d\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) dx_j \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)dx_1\ldots dx_n$$

Ну наконец, сняли веджики, теперь можно и нормально интегрировать, как завещали Average Riemann's fans. Используем теорему Фубини

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)dx_1\ldots dx_n = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)dx_i\right)dx_1\ldots dx_{i-1}dx_{i+1}\ldots dx_n$$

Так как носитель ω компактен, то и носитель f_i компактен, откуда по формуле Ньютона-Лейбница (R таково, что при $|x|\geqslant R$ $f_i(x)=0$)

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)dx_i = f_i(x_1,\ldots,x_n)\Big|_{x_i=-R}^{x_i=R} = 0$$

Равенство нулю нетривиально, но носитель формы финитный.

Отсюда $\int\limits_V d\omega = 0$.

2. Пусть теперь $M=V$ открыто в H^n (полупространство), тогда все проделаем аналогично до теоремы Фубини. При $i>1$ все аналогично случаю выше (так как полупространство вдоль первой координаты), поэтому

$$\int\limits_V d\omega = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\left(\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x)dx_1\right)dx_2\ldots dx_n = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f_1(0,x_2,\ldots,x_n)$$

Теперь еще немного магии. Пусть i будет являться тождественным включением ∂H^n в H^n, а координатная функция $\varphi:\mathbb{R}^{n-1}\to\partial H^n$ задается уравнением $\varphi(x_2,\ldots,x_n)=(0,x_2,\ldots,x_n)$. А значит

$$\int\limits_{\partial H^n} i^*\omega = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\varphi^* i^*\omega = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f_1(0,x_2,\ldots,x_n)dx_2\wedge\ldots\wedge dx_n = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f_1(0,x_2,\ldots,x_n)dx_2\ldots dx_n$$

Следовательно

$$\int\limits_V d\omega = \int\limits_{H^n} d\omega = \int\limits_{\partial H^n} i^*\omega = \int\limits_{V\cap\partial H^n} i^*\omega = \int\limits_{\partial V} i^*\omega$$

3. Для произвольного многообразия доказательство опущено (нам и достигнутых высот хватит для теорем ниже). Спасибо за внимание.

1.15 Формула Стокса для жителей трехмерного мира.

Теорема (формула Стокса). Пусть $F=(P,Q,R)$, где $P,Q,R\in C^1(\Omega)$, где $M\subset\Omega$ и Ω — область, а ориентации M и ∂M согласованы, тогда

$$\int\limits_{\partial M}(F,dr) = \iint\limits_M(\mathrm{rot}F,n)dS$$

Теперь распишем по-человечески.

$$(F, dr) = Pdx + Qdy + Rdz$$

Что делать с ротором и кто это такой?

Определение. Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^3$, а функция $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $F = (P, Q, R)$ дифференцируема на Ω. Тогда *ротором (вихрем)* F называют функцию $\mathrm{rot}F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ такую, что

$$\mathrm{rot}F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

Замечание. Заметим, что ротор совпадет с определителем $\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix}$

$$(\mathrm{rot}F, n) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

Как свести общего Стокса к данному Стоксу? Очень просто, как в формуле Грина, пусть $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$, найдите $d\omega$, он и будет искомым

1.16 Формула Грина. Потенциальные векторные поля на плоскости.

Определение. *Интегралом от дифформы* $\omega = a(x)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \in \Omega^n(U)$ для области $U \subset \mathbb{R}^n$ назовем

$$\int\limits_U \omega = \int\limits_U a(x)dx_1 \ldots dx_n$$

Теорема (Пацанский Стокс). Пусть M — гладкое n-мерное $(n > 1)$ многообразие с краем, причем ориентации M и ∂M согласованы. Тогда $\forall \omega \in \Omega_C^{n-1}(M)$ верно, что

$$\int\limits_{\partial M} \omega = \int\limits_M d\omega$$

Пример: Именно этим примером мы сведем уважаемую теорему Стокса к пустячковой теореме Грина. Пусть $\omega = Pdx + Qdy$, тогда найдем

$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\right) \wedge dy = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

Теперь запишем теорему Грина.

Теорема (Грин). Пусть M является областью в H^2, а $\omega = Pdx + Qdy$ является дифференциальной 1-формой, тогда

$$\int\limits_{\partial M} Pdx + Qdy = \iint\limits_M \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Определение. Пусть $F : U \to \mathbb{R}$, $F \in C^1(U)$, а U открыто. А еще ω — дифференциальная 1-форма. Тогда

1. F — первообразная ω, если $dF = \omega$.
2. ω называется *точной* на U, если у нее есть первообразная на U.

Замечание. Если дифференциальная 1-форма точна, то соответствующее ей векторное поле называют *потенциальным*.

1.17 Формула Остроградского-Гаусса. Соленоидальные векторные поля.

Определение. *Интегралом от дифформы* $\omega = a(x)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \in \Omega^n(U)$ для области $U \subset \mathbb{R}^n$ назовем

$$\int\limits_U \omega = \int\limits_U a(x)dx_1 \ldots dx_n$$

Теорема (Пацанский Стокс). Пусть M — гладкое n-мерное $(n > 1)$ многообразие с краем, причем ориентации M и ∂M согласованы. Тогда $\forall \omega \in \Omega_C^{n-1}(M)$ верно, что

$$\int\limits_{\partial M} \omega = \int\limits_M d\omega$$

Теорема (Гаусс-Остроградский). Пусть $\subset \mathbb{R}^3$ является гладким многообразием с краем, а ∂M покрывается одной картой, тогда

$$\int\limits_{\partial M} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy = \int\limits_M \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz$$

Определение. Дивергенцией поля $F = (P, Q, R)$ называют $\mathrm{div} F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

Определение.
Поле соленоидально в G, если $\forall D : \overline{D} \subset G$ верно, что поток поля через ∂D равен нулю.

Из теоремы Стокса в общем виде можно вывести эквивалентное определение.

Определение. Поле соленоидально, если его дивергенция нулевая.

1.18 Достаточные условия сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке.

1.18.1 Определение ряда Фурье

Определение. *Тригонометрической системой* называется система функций

$$\left\{\frac{1}{2}, \sin\frac{\pi n x}{l}, \cos\frac{\pi n x}{l}\right\} \iff \left\{e^{\frac{i\pi n x}{l}}\right\} \tag{1.3}$$

Определение. Пусть $f \in L_1[a, a+2l]$, тогда *коэффициентами Фурье* по тригонометрической системе называются числа

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_a^{a+2l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_a^{a+2l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx$$

Или же

$$c_k = \hat{f}_k(x) = \frac{1}{2l}\int\limits_a^{a+2l} f(x)e^{-\frac{i\pi n x}{l}}dx$$

Замечание. Заметим, что коэффициенты связаны соотношениями:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$$

$$c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}$$

Определение. *Рядом Фурье* по системе 1.3 называют ряд

$$S(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{\pi k x}{l} + b_k\sin\frac{\pi k x}{l}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{i\pi k x}{l}}$$

Лемма (Риман, об осцилляции). Пусть $I \subset \mathbb{R}$ — промежуток, а $f \in L_1(I)$, тогда

$$\int\limits_I f(x)e^{i\lambda x}dx \to 0 \text{ при } \lambda \to \infty$$

Следствие. Коэффициенты ряда Фурье стремятся к нулю.

Замечание. Далее в данном шедевре литературы будет считаться, что $l = \pi$, однако все утверждения не теряют своей силы из-за такого допущения.

Определение. Пусть $p \in [1, \infty)$, тогда $L_p(\mathbb{T})$ обозначим класс 2π-периодических функций, определенных почти всюду на $\mathbb{R}$ таких, что $f \in L_p(-\pi, \pi)$.

1.18.2 Ядро Дирихле

Определение. Функция $D_n(t) = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}\cos kt$ называется *ядром Дирихле.*

Лемма (Дирихле). Если $f \in L_1(\mathbb{T})$, то

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(f(x-t) + f(x-t))D_n(t)dt$$

Свойства:

1. D_n — четная 2π-периодическая функция
2. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = \pi$
3. $D_n(t) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}$

1.18.3 Сходимость ряда Фурье в точке

Теорема (признак Дини). Пусть $f \in L_1(\mathbb{T})$ и $x \in \mathbb{R}$. Если для числа $S \in \mathbb{C}$ $\exists \delta > 0$ такое, что

$$\int\limits_0^{\delta} \frac{|f(x+t)+f(x-t)-2S|}{t} dt < \infty$$

то ряд Фурье $S(f,x)$ сходится в точке x к числу S.

Доказательство:

$$S_n(f,x) - S = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} (f(x+t)+f(x-t))D_n(t)dt - \frac{2S}{\pi}\int\limits_0^{\pi} D_n(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)-2S}{2\sin\frac{t}{2}} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)tdt$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Уменьшим δ настолько, чтобы было верно неравенство

$$\int\limits_0^{\delta} \frac{|f(x+t)+f(x-t)-2S|}{t} dt < \varepsilon$$

В силу выпуклости синуса, известно, что $\sin x \geqslant \frac{2x}{\pi}$ на $[0, \pi/2]$. Тогда

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)-2S}{2\sin\frac{t}{2}} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\ dt \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\delta} \frac{|f(x+t)+f(x-t)-2S|}{2t/\pi} dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

Функция $h(t) = \frac{f(x+t)+f(x-t)-2S}{2\sin\frac{t}{2}} \in L_1[\delta, \pi]$, поэтому по лемме Римана об осцилляции

$$I_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)-2S}{2\sin\frac{t}{2}} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\ dt \to 0$$

Откуда $\exists N \in \mathbb{N}$ такой, что $\forall n \geqslant N$ $|I_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, то есть $|S_n(f,x) - S| < \varepsilon$. ■

Следствие. Пусть $f \in L_1(\mathbb{T})$ и $x \in \mathbb{R}$, тогда если существуют конечные односторонние пределы $f(x \pm 0)$ и конечные

$$\alpha_{\pm} = \lim_{t \to \pm 0} \frac{f(x+t) - f(x \pm 0)}{t}$$

то ряд Фурье $S(f,x)$ сходится в точке x к числу $S = \frac{f(x+0)-f(x-0)}{2}$.

Доказательство: Пусть $\varphi(t) = \frac{f(x+t)+f(x-t)-2S}{t}$, тогда

$$\varphi(t) = \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t} + \frac{f(x-t)-f(x-0)}{t} \to \alpha_+ - \alpha_-$$

Откуда $\varphi(t)$ ограничена на некотором интервале $(0,\delta)$ и можно применить признак Дини.

■

Следствие. Пусть $f \in L_1(\mathbb{T})$ и $x \in \mathbb{R}$, тогда если существуют конечные односторонние производные в точке x, то ряд Фурье $S(f,x)$ сходится в точке x к $f(x)$.

1.19 Достаточные условия равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье.

Замечание. Равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ следует из сходимости ряда $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$. То есть чаще всего нам этого будет хватать, но не всегда:(

Определение. Функция удовлетворяет *условию Гёльдера с показателем* $\alpha \in (0,1]$, если

$$\exists C > 0\ \forall x,y \in \mathbb{R}\ |f(x)-f(y)| \leqslant C|x-y|^\alpha$$

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Последовательность $\{g_n\}$ *равностепенно непрерывна* на E, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x,y \in E\ |x-y| < \delta \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ |g_n(x)-g_n(y)| < \varepsilon$$

Лемма. Пусть $\{g_n\}$ заданы на компакте $K \subset \mathbb{R}$. Если $\{g_n\}$ равностепенно непрерывна и поточечно сходится к нулю на K, то g_n равномерно сходятся к нулю на K.

Доказательство: Предположим противное (сходимость неравномерная). Тогда найдется $\varepsilon > 0$, последовательность номеров $\{n_k\}$ и последовательность точек $x_k \in K$, для которой $g_{n_k}(x_k) \geqslant \varepsilon$. Выберем сходящуюся подпоследовательность $\{x_{k_j}\}$, тогда $x_{k_j} \to x_0 \in K$ и

$$\varepsilon \leqslant |g_{n_{k_j}}(x_{k_j})| \leqslant |g_{n_{k_j}}(x_{k_j}) - g_{n_{k_j}}(x_0)| + |g_{n_{k_j}}(x_{k_j})|$$

Выбором j правую часть можно сделать сколь угодно малой — противоречие.

■

Теорема. Пусть $f \in L_1(\mathbb{T})$. Если f удовлетворяет условию Гельдера на $[a,b]$, то $S(f,x)$ равномерно сходится к f на любом $[a+r, b-r]$, где $0 < r < \frac{b-a}{2}$.

Доказательство: По условию $|f(x)-f(y)| \leqslant C|x-y|^\alpha$ для любых $x,y \in [a,b]$. Пусть $g_n(x) = S_n(f,x) - f(x)$, где $x \in [a+r, b-r]$. По признаку Дини $g_n \to 0$, поэтому осталось показать равностепенную непрерывность и применить лемму. Вспомним о том, как выглядит g_n

$$g_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x-t)-f(x)) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt$$

Тогда $\forall x, y \in [a+r, b-r]$ и $\eta \in (0, r]$ верно, что

$$|g_n(x) - g_n(y)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\eta}^{\eta} \frac{|f(x-t) - f(x)| + |f(y-t) - f(y)|}{2|\sin\frac{t}{2}|}dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\eta\leqslant|t|\leqslant\pi} \frac{|f(x-t) - f(x)| + |f(y-t) - f(y)|}{2|\sin\frac{t}{2}|}dt$$

Вспомним, что синус выпуклый (как в пункте выше) и условия Гельдера, первый интеграл оценивается сверху как

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\eta}^{\eta} \frac{2C|t|^\alpha}{2\cdot 2/\pi\cdot|t/2|}dt = 2C\int\limits_{0}^{\eta} t^{\alpha-1}dt = \frac{2C}{\alpha}\eta^\alpha$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Уменьшим η настолько, чтобы $\frac{2C}{\alpha}\eta^\alpha < \frac{\varepsilon}{2}$.

Так как для второго интеграла справедливо $|\sin\frac{t}{2}| \geqslant \frac{t}{\pi} \geqslant \frac{\eta}{\pi}$, то оценим второй интеграл сверху так:

$$\frac{1}{2\eta}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(|f(x-t) - f(y-t)| + |f(x) - f(y)|)\,dt = \frac{1}{2\eta}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x-t) - f(y-t)|dt + \frac{\pi}{\eta}|f(x) - f(y)|$$

В итоге получаем, что

$$|g_n(x) - g_n(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\|f_h - f\|_1}{2\eta} + \frac{\pi}{\eta}C|h|^\alpha$$

Где $h = x - y$. В силу непрерывности сдвига можно выбрать h так, чтобы сумма была меньше ε. ■

Следствие. Пусть f — 2π-периодическая непрерывная функция, имеющая на $[-\pi, \pi]$ кусочно-непрерывную производную. Тогда ряд Фурье $S(f, x)$ сходится к f равномерно на $\mathbb{R}$.

Доказательство: Покажем, что f удовлетворяет условию Гельдера с $\alpha = 1$. в силу периодичности достаточно показать для $[-\pi, \pi]$. Пусть $-\pi = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = \pi$ — все имеющиеся точки разрыва производной на $[-\pi, \pi]$. Применим к f на $[x_{j-1}, x_j]$ теорему Лагранжа. $|f(x_j) - f(x_{j-1})| = |f'(\xi_j)|(x_j - x_{j-1})$. Заметим, что f' ограничена (по теореме Вейерштрасса на $[x_{j-1}, x_j]$).

Пусть M таково, что $|f'| \leqslant M$ на $[-\pi, \pi]$. Пусть $x, y \in [-\pi, \pi]$, $x \leqslant x_p < \ldots < x_q \leqslant y$, тогда

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x_p) - f(x)| + \sum_{i=p+1}^{q-1}|f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(y) - f(x_q)| \leqslant$$
$$\leqslant M\left((x_p - x) + \sum_{i=p+1}^{q-1}(x_i - x_{i-1}) + (y - x_q)\right) = M(y - x)$$

■

1.20 Непрерывность преобразования Фурье абсолютно интегрируемой функции. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.

1.20.1 Интеграл с параметром

Определение. пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, A — произвольное множество, а f определена на $E \times A$, причем $f(\cdot, \alpha)$ интегрируема $\forall \alpha \in A$. Тогда функция

$$I(\alpha) = \int\limits_E f(x, \alpha) dx$$

называется интегралом с параметром.

Теорема (непрерывность по параметру). Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, A — метрическое пространство, а $f : E \times A \to \mathbb{C}$ такова, что

1. $f(\cdot, \alpha)$ измерима на E
2. $f(x, \cdot)$ непрерывна в $\alpha_0 \in A$ для почти всех $x \in E$
3. Существует такая интегрируемая на E $\varphi(x)$ такая, что $|f(x, \alpha)| \leqslant \varphi(x)$ выполнено для почти всех $\alpha \in A$ и почти всех $x \in E$

Тогда $I(\alpha)$ непрерывна в α_0.

Теорема (дифференцируемость по параметру). Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, A — промежуток, а $f : E \times A \to \mathbb{C}$ такова, что

1. $f(\cdot, \alpha)$ интегрируема на E
2. $f(x, \cdot)$ дифференцируема на A для почти всех $x \in E$
3. Существует такая интегрируемая на E $\varphi(x)$ такая, что $\left|\frac{\partial f}{\partial}(x, \alpha)\right| \leqslant \varphi(x)$ выполнено для почти всех $\alpha \in A$ и почти всех $x \in E$

Тогда $I(\alpha)$ дифференцируема на A и

$$I'(\alpha) = \int\limits_E \frac{\partial f}{\partial}(x, \alpha) dx$$

1.20.2 Преобразование Фурье

Определение. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ локально интегрируема (то есть на любом отрезке), тогда *интегралом в смысле главного значения* функции f называют следующую конструкцию

$$\text{v.p.} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) dx = \lim_{u \to \infty} \int\limits_{-u}^{u} f(x) dx$$

Замечание. Из теоремы Лебега (в ГОСе не надо это упоминать)

$$f \in L_1(\mathbb{R}) \iff \exists \int\limits_{\mathbb{R}} f\ dx \Longrightarrow \exists \text{v.p.} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)dx = \lim_{u\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) \cdot I[-u,u]\ dx$$

Определение. Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$, тогда *преобразованием Фурье* функции f называется функция

$$F[f](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixy}dx$$

Замечание. Существование такого интеграла следует из того, что

$$|f(x)e^{-ixy}| = |f(x)|$$

Замечание. Из определения можно заметить, что преобразование Фурье линейно.

Теорема. Преобразование Фурье равномерно непрерывно и $F[f](y) \to 0$ при $y \to \pm\infty$

Доказательство: $\forall x, y, h \in \mathbb{R}$ верно, что

$$|F[f](y+h) - F[f](y)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) \left(e^{-ixh} - 1\right) e^{-ixy}dx \right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)| \left|e^{-ixh} - 1\right| dx$$

Откуда, по теореме о непрерывности интеграла с параметром (прошу, не спрашивайте, что это такое) $|F[f](y+h) - F[f](y)| \to 0$ при $h \to 0$. Равномерная сходимость следует из независимости правой части от y. ■

Теорема. Пусть $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$ и $f' \in L_1(\mathbb{R})$, тогда

$$F[f'](y) = iy \cdot F[f](y)$$

Доказательство: По формуле Ньютона-Лейбница

$$f(x) = f(0) + \int\limits_0^x f'(x)dx$$

Из условия, что $f' \in L_1(\mathbb{R})$ следует, что $\exists \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A < \infty$. Более того, $A = 0$, иначе $|f| \geqslant \frac{|A|}{2}$ в окрестности ∞, что противоречит тому, что $f \in L_1(\mathbb{R})$. Таким образом, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Интегрируя по частям, получаем:

$$\sqrt{2\pi} \cdot F[f'](y) = \int\limits_{\mathbb{R}} f'(x)e^{-iyx}dx = f(x)e^{-iyx}\Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} + iy \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{-iyx}dx = \sqrt{2\pi} \cdot iy \cdot F[f](y)$$

■

Теорема. Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$ и $(x \to xf(x)) \in L_1(\mathbb{R})$, тогда $F[f] \in C^1(\mathbb{R})$ и

$$\frac{dF[f](y)}{dy} = F[-ix \cdot f(x)](y)$$

Доказательство: При любом $y \in \mathbb{R}$ верно, что $|-ixf(x)e^{-iyx}| = |xf(x)|$, откуда по теореме о дифференцировании по параметру

$$\sqrt{2\pi}\frac{dF[f](y)}{dy} = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial y}\left(f(x)e^{-iyx}\right) dx = \int\limits_{\mathbb{R}} -ixf(x)e^{-iyx} dx$$

■

2 Аналитическая геометрия. Линейная алгебра

2.1 Прямые и плоскости в пространстве. Формулы расстояния от точки до прямой и плоскости, между прямыми в пространстве. Углы между прямыми и плоскостями.

Замечание. Подразумевается, что читатель имеет базовые представления о прямых, плоскостях и их свойствах еще из курса школьной геометрии.

2.1.1 Уравнение прямой

Заметим, что прямая в произвольном пространстве, необязательно $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$, задана однозначно, если нам дана точка M_0 на ней и направляющий вектор a. Тогда рассмотрим произвольную точку M на прямой. Очевидно, что вектор $\overline{M_0M}$ имеет вид $t\bar{a}$, то есть имеется уравнение $\overline{M_0M} = t\bar{a}$, где t — параметр. Тогда из этих рассуждений можно получить следующее.

Определение. *Параметрическим* уравнением прямой называют уравнение вида $r = r_0 + at$, где r_0 — радиус вектор заданной точки на прямой, a — направляющий вектор прямой, $t \in \mathbb{R}$ — параметр, а r — радиус-вектор точки на прямой.

Предлагаем перейти в $\mathbb{R}^3$, так как пространства размерности выше устроены аналогично. Заметим, что параметрическое уравнение можно разложить по базису, то есть расписать покоординатно, получив систему

$$\begin{cases} x = x_0 + x_a t \\ y = y_0 + y_a t \\ z = z_0 + z_a t \end{cases}$$

Исключая параметр t из этой системы получим следующее.

Определение. Уравнение вида

$$\frac{x - x_0}{x_a} = \frac{y - y_0}{y_a} = \frac{z - z_0}{z_a}$$

называется *каноническим* уравнением прямой в $\mathbb{R}^3$.

Замечание. Нетрудно получить аналогичные уравнение в $\mathbb{R}^n$, но это останется элементарным упражнением без изюминки для скептического читателя.

Перейдем в $\mathbb{R}^2$, чтобы отметить некоторые свойства уравнений прямой. Заметим, что параметрическое уравнение прямой равносильно тому, что вектора $r - r_0$ и a коллинеарны, тогда можно покоординатно расписать уравнение и получить эквивалентную запись

$$\det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x_a & y_a \end{pmatrix} = 0$$

Распишем это уравнение: $y_a x - x_a y + (x_a y_0 - y_a x_0) = 0$, откуда получаем уравнение вида $Ax + By + C = 0$, при этом $A^2 + B^2 \neq 0$. Обратно, для произвольного линейного многочлена $Ax + By + C = 0$, где $A^2 + B^2 \neq 0$ можно подобрать a и r_0, чтобы получить параметрическое уравнение.

Из рассуждения выше можно получить, что в качестве a можно взять вектор $(-B, A)$. Более того, мы получили вектор нормали к прямой $n = (A, B)$.

Из всего выше сказанного можно ввести следующее понятие.

Определение. *Векторное* уравнение прямой — уравнение вида $[r - r_0, a] = 0$.

2.1.2 Уравнение плоскости

Проделаем схожие рассуждения, что и для прямой, только заметим, что нам потребуется два направляющих вектора на плоскости p и q. Также выберем некоторую точку на плоскости с радиус-вектором r_0. Тогда, как и для прямой, можно задать параметрическое уравнение плоскости.

Определение. *Параметрическим* уравнением плоскости называют уравнение вида $r = r_0 + t_1 p + t_2 q$, где r_0 — радиус вектор заданной точки на плоскости, p и q — два направляющих вектора плоскости (они не коллинеарны) и r — радиус-вектор точки на плоскости.

Перейдем в $\mathbb{R}^3$ и проделаем рассуждения со схожими выше. Заметим, что вектора $r - r_0$, p и q компланарны (лежат в одной плоскости) согласно параметрическому уравнению, что эквивалентно равенству $(r - r_0, p, q) = 0$. Более того, вспомним определение векторного произведения и получим, что вектор нормали $n = [p, q]$, откуда, учитывая свойства смешанного произведения, $(r - r_0, n) = 0$. Уравнение уже приятнее, но давайте поможем ему заиграть новыми красками. Пусть $D = -(r_0, n)$, тогда уравнение плоскости записывается еще оригинальнее

$$(r, n) + D = 0.$$

Определение. *Векторное* уравнение плоскости — уравнение вида $(r - r_0, n) = 0$.

Такое уравнение может натолкнуть пытливого читателя на шальную мысль, а именно то, что уравнение плоскости можно расписать в виде $Ax + By + Cz + D = 0$, где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Заметим, что $A = (e_1, n)$, $B = (e_2, n)$ и $C = (e_3, n)$, где e_i — базис в $\mathbb{R}^3$. Используя свойства смешанного произведения, получим, что

$$n = A\frac{[e_2, e_3]}{(e_1, e_2, e_3)} + B\frac{[e_3, e_1]}{(e_1, e_2, e_3)} + C\frac{[e_1, e_2]}{(e_1, e_2, e_3)}$$

То есть вектор нормали к плоскости может быть получен как $n = (A, B, C)$.

2.1.3 Расстояния

От точки до плоскости

Пусть плоскость задана уравнением в форме $(r - r_0, n) = 0$ и точка M с радиус-вектором R, тогда вектор $\overline{M_0M} = R - r_0$, расстояние от точки до плоскости это просто модуль проекции $R - r_0$ на нормаль. Тогда

$$h = \frac{|(R - r_0, n)|}{|n|} \iff h = \frac{|Ax_M + By_M + Cz_M + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

От точки до прямой

Пусть прямая задана уравнением в форме $[r - r_0, a] = 0$ и точка M с радиус-вектором R, тогда вектор $\overline{M_0M} = R - r_0$, расстояние от точки до плоскости можно найти как площадь параллелограмма, построенного на векторах a и $R - r_0$, деленная на длину основания, то есть

$$h = \frac{|[R - r_0, a]|}{|a|} \iff h = \frac{|Ax_M + By_M + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Между прямыми

Если прямые параллельны, то можно построить плоскость через них и свести задачу к поиску расстояния от точки до прямой. Теперь пусть прямые не пересекаются, тогда введем обозначения: p и q — прямые, заданные уравнениями вида $r = r_1 + a_1t$ и $r = r_2 + a_2t$. Известно, что через p можно провести плоскость параллельную q (назовем ее P), аналогично строится плоскость Q. Тогда расстояние от p до q это расстояние между P и Q.

Как же найти это расстояние? Разделим объем параллелепипеда, построенный на векторах a_1, a_2 и $r_2 - r_1$ на площадь основания, то есть параллелограмма на векторах p и q. Итого получаем формулу:

$$h = \frac{|(r_2 - r_1, a_1, a_2)|}{|[a_1, a_2]|}$$

2.1.4 Углы

Между прямыми

Угол между прямыми это угол между их направляющими векторами. Его можно получить из соотношения

$$\cos\varphi = \frac{(a_1, a_2)}{|a_1||a_2|}$$

Между прямой и плоскостью

Угол между прямой и плоскостью это угол между прямой и ее проекцией на плоскость.

Между плоскостями

Угол между плоскостями это угол между их нормалями.

2.2 Кривые второго порядка, их геометрические свойства.

2.2.1 Кривые второго порядка

Определение. *Кривая второго порядка* — множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,\ A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$$

Теорема. Путём поворота можно избавиться от коэффициента B:

$$A'(x')^2 + C'(y')^2 + 2D'y' + 2E'y' + F' = 0$$

Приступим к анализу полученного уравнения.

1. Пусть $A'C' \neq 0$, тогда путем выделения полных квадратов и сдвига координат получим новое уравнение:
$$A'(x'')^2 + C'(y'')^2 + F'' = 0$$
   (a) Пусть $A'C' > 0$, тогда для F'' есть три опции:
      i. Знак F'' отличен от знака A'', тогда можем преобразовать уравнение к виду
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
      Можно утверждать, что $a \geqslant b$, иначе линейной заменой поменяем их местами. Тогда получаем *эллипс*.
      ii. Знак F'' совпадает с знаком A'', тогда можем преобразовать уравнение к виду
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$
      Тогда получаем *мнимый эллипс*.
      iii. $F'' = 0$, тогда перед нами *пара мнимых пересекающихся прямых*
   (b) $A'C' < 0$, тогда для F'' есть две опции:
      i. $F'' = 0$, тогда перед нами уравнение вида $(a_1x + c_1y)(a_2x + c_2y) = 0$ или *пара пересекающихся прямых*
      ii. $F'' \neq 0$. Будем считать, что знаки F' и A' различны (иначе меняем местами x и y). Данная ветка в развитии приведет нас к уравнению вида
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
      Тогда получаем *гиперболу*.

(c) Теперь $A'C' = 0$, то есть хотя бы одно равно нулю. Но, так как уравнение все еще второго порядка, только один из них равен нулю. Будем считать, что A', иначе опять линейная рокировочка. Тогда путем выделения полных квадратов снова получим, что уравнение вновь преобразилось

$$C'(y'')^2 + 2D'x'' + F' = 0$$

А тут опять разветвление:

i. Пусть $D' \neq 0$, тогда приведем уравнение к виду путем сдвига по оси x

$$C''y^2 + 2D'x = 0 \iff y^2 = 2px$$

Считаем, что $p > 0$, иначе еще раз поменяем знак у x путем замены. Таким образом, получили *параболу*.

ii. $D' = 0$, то есть $C'y^2 + F' = 0$, тогда опять развилка

A. $C'F'' < 0$, тогда $y^2 - a^2 = 0$, откуда получаем *пару параллельных прямых*.

B. $C'F'' > 0$, тогда $y^2 + a^2 = 0$, откуда получаем *пару мнимых параллельных прямых*.

C. $F' = 0$, тогда $y^2 = 0$, откуда получаем *пару совпавших прямых*

2.2.2 Геометрические свойства

Замечание. В данном разделе нам интересны только парабола, эллипс и гипербола, так как остальные варианты обладают одним общим свойством — бесполезностью.

Эллипс

Определение. Пусть $c^2 = a^2 - b^2$, тогда $\varepsilon = \frac{c}{a}$ — *эксцентриситет* эллипса.

Определение. Точки с координатами $(\pm c, 0)$ — *фокусы* эллипса

Утверждение. Сумма расстояний от любой точки эллипса до его фокусов равна $2a$ или *большей оси*.

Доказательство: Пусть r_1 и r_2 — расстояния до фокусов и $r_1 \leqslant r_2$, тогда верно, что $r_1^2 = (x-c)^2+y^2$, что эквивалентно

$$r_1^2 = x^2 - 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 = (a - \varepsilon x)^2$$

Аналогично получаем, что $r_2^2 = (a + \varepsilon x)^2$. Тогда $r_1 + r_2 = 2a$. ■

Определение. Прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ называются *директрисами* эллипса.

Утверждение. Касательная к эллипсу является биссектрисой угла, смежного с углом между отрезками от точки до эллипсов.

Гипербола

Утверждение. Прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ не пересекают гиперболу, тогда как прямые с меньшим по модулю углом наклона обязательно ее пересекут.

Определение. Прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ называются *асимптотами* гиперболы.

Определение. Пусть $c^2 = a^2 + b^2$, тогда *фокусами* гиперболы называют точки $(\pm c, 0)$.

Утверждение. Пусть r_1 и r_2 расстояния от точки на гиперболе до ее фокусов, тогда $|r_1 - r_2| = 2a$.

Определение. Отношение $\varepsilon = \frac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом* гиперболы.

Определение. Прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ называются *директрисами* гиперболы.

Утверждение. Касательная к гиперболе является биссектрисой угла образованного отрезками, соединяющую точку с фокусами.

Парабола

Определение. *Фокус* параболы — точка с координатами $(\frac{p}{2}, 0)$.

Определение. *Директриса* параболы — прямая $x = -\frac{p}{2}$.

Утверждение. Расстояние от любой точки параболы до фокуса и директрисы одинаковы.

2.3 Общее решение системы линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.

2.3.1 Ранг матрицы

Определение. Столбцовым рангом матрицы называют наибольшее число линейно независимых столбцов. Строковый ранг определяется аналогично.

Теорема. Столбцовый и строковый ранги совпадают.

Определение. В силу теоремы выше рангом матрицы называют либо её столбцовый, либо строковый ранг.

2.3.2 Системы линейных уравнений

Определение. Система вида

$$\begin{cases} a_1^1 x_1 + \ldots + a_n^1 x_n = b^1 \\ \ldots \\ a_1^m x_1 + \ldots + a_n^m x_n = b^m \end{cases}$$

называется *системой линейных уравнений с m уравнениями от n переменных.*

Определение. *Матрицей системы* будем называть матрицу $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$, а её *столбцом свободных членов* будем называть $b = (b^i)_{i=1}^m$.

Замечание. Систему можно переписать в следующем виде, если x — вектор неизвестных, то $Ax = b$.

Определение. *Расширенная матрица системы* $A^* := (A \mid b)$, то есть матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 & \mid b^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & \dots & a_n^m & \mid b^m \end{pmatrix}$$

Определение. Если столбец свободных членов состоит из нулей, то система является *однородной.*

Определение.
Если у системы имеется хотя бы одно решение, то она *совместна*, иначе она *несовместна.*

Замечание. Элементарные преобразования над расширенной матрицей системы не меняют множество её решений.

Утверждение.
Если A квадратная и $|A|= 0$, то однородная система имеет единственное решение.

Теорема (Кронекер-Капелли).

Система совместна $\iff rkA = rkA^*$.

Доказательство: Переформулируем условие теоремы, а именно приписывание к матрице A размера $m \times n$ столбца высоты m не меняет её ранга тогда и только тогда, когда он является линейной комбинацией столбцов A. Докажем это.

Если $rkA = rkA^*$, то подматрица, задающая базис для A, не меняется для A^*, откуда b раскладывается по столбцам A. В обратную сторону. Если b раскладывается по столбцам A, то матрицу A^* можно превратить в матрицу A_0, которая является присоединением к A нулевого столбца, откуда $rkA_0 = rkA^*$. Но ведь $rkA = rkA_0$, что тоже тривиально. А значит $rkA = rkA^*$. ■

2.3.3 Общее решение

Определение.
Пусть $Ax = b$ — система, тогда её *приведенной* системой называют однородную вида $Ax = \overline{0}$.

Утверждение. Пусть x_0 — решение неоднородной системы, тогда x — также её решение тогда и только тогда, когда найдется решение y приведенной системы такое, что $x = x_0 + y$.

Доказательство: Пусть x — решение, тогда $y = x - x_0$, а для этого верно, что $Ay = Ax - Ax_0 = b - b = 0$. В обратную сторону, пусть y — решение приведенной системы, тогда $Ax = A(x_0 + y) = Ax_0 + Ay = b + 0 = b$. ■

Замечание. Из утверждения выше можно сделать вывод, что нам достаточно найти решение приведенной системы, а потом подгадать частное, чтобы окончательно решить систему.

Утверждение. Пусть x_1 и x_2 — решения приведенной системы, тогда и их линейная комбинация является таковой.

Доказательство: Заметим, что если x — решение, то и ax является решением. Отсюда следует, что достаточно проверить, что и $x_1 + x_2$ является решением. Что, очевидно, верно. ∎

Следствие. Отсюда получаем, что достаточно задать базис в пространстве решений.

Определение. Фундаментальная система решений — набор из n линейно независимых векторов, каждый из которых является решением.

Тогда пусть F — матрица, где столбцами являются элементы её ФСР. Нетрудно вывести, что $x = x_0 + Fc$ является общим решением системы, где x_0 — частное решение, а c — вектор констант.

2.4 Линейное пространство, базис и размерность. Линейное отображение конечномерных пространств, его матрица. Ядро и образ линейного отображения.

2.4.1 Линейное пространство

Определение. Множество V называется *линейным пространством*, а его элементы *векторами*, если введены операции сложения и умножения на число

- $\forall x, y \in V\ x + y \in V$
- $\forall x \in V\ \forall a \in \mathbb{R}\ ax \in V$

и выполнен набор аксиом:

1. Сложение коммутативно
2. Сложение ассоциативно
3. Существует нейтральный элемент по сложению, называемый нулем
4. Существует нейтральный элемент по умножению, называемый единицей
5. Для любого элемента существует обратный по сложению
6. $a(x + y) = ax + ay$
7. $(a + b)x = ax + bx$
8. $(ab)x = a(bx)$

Определение. Система векторов *линейна зависима*, если существует нетривиальная линейная комбинация, обращающая ее в ноль.

Определение. *Базис* — упорядоченный набор векторов такой, что:

1. Базис линейно независим
2. $\forall v \in V$ существует линейная комбинация из векторов данного набора

Утверждение. Разложение по базису единственно.

Определение.
Координатами v в базисе e назовем линейные коэффициенты в разложении v по базису.

Теорема. Любой базис имеет одинаковое число векторов.

Доказательство: От противного показать, что базисные векторы большего базиса раскладываются по меньшему базису, а значит больший базис таковым не является. ∎

Определение. Пусть в пространстве V существует базис из n векторов, тогда *размерность* пространства $dimV = n$.

Замечание. Пусть $V = \{0\}$, тогда $dimV = 0$ по определению.

2.4.2 Линейное отображение

Пусть U и V — линейные пространства.

Определение.
Отображение $A : U \to V$ *линейно*, если $\forall \alpha, \beta \in K$, $x, y \in U$ $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$

Утверждение.
Линейное отображение уважает ноль и переводит подпространство в подпространство.

Определение. *Образом* отображения $A : U \to V$ называют множество $\mathrm{Im} A = \{A(x) \mid x \in U\}$

Определение. *Рангом* отображения $A : U \to V$ называют $\dim \mathrm{Im} A$

Определение. *Ядром* отображения $A : U \to V$ называют множество $\mathrm{Ker} A = \{x \in U \mid Ax = 0\}$

Определение. Отображение $A : U \to V$ *инъективно*, если $\forall x \neq y \in U$ $A(x) \neq A(y)$.

Утверждение. Отображение инъективно тогда и только тогда, когда его ядро тривиально.

Доказательство: Линейно независимые вектора переходят в линейно независимые.

Заметим, что если мы выбрали в U базис, то образ любого элемента можно разложить по образу базисных векторов. При этом линейно независимые вектора переходят в линейно независимые. Уверен, у читателя уже витает безумная мысль, что если расписать образ базисных векторов U по базису из V, то получится, что у нас с вами имеется матрица(!)

Определение. *Матрицей* линейного отображения конечномерных линейных пространств U и V называется матрица, столбцы которой — координатные столбцы образа базисных векторов из U, разложенные по базису в V.

2.5 Собственные значения и собственные векторы линейных преобразований. Диагонализируемость линейных преобразований.

Определение.
Линейное отображение называется *преобразованием*, если оно действует из V в себя же.

Определение. Если для линейного преобразования A верно для некоторого ненулевого $h \in V$, что $Ah = \lambda h$, то h называется *собственным вектором*, а соответствующее λ — *собственным значением*.

Определение.
Собственным подпространством называют $\mathrm{Ker}(A - \lambda E)$, где λ — собственное значение.

Замечание. Из определений тривиально вытекает, что сужение преобразования на собственное подпространство является гомотетией или нулевым преобразованием.

Определение. Подпространство $L \subset V$ является *инвариантным* относительно преобразования A, если $AL \subset L$.

Заметим, что $\mathrm{Ker}(A - \lambda E)$ нетривиально тогда и только тогда, когда $det(A - \lambda E) = 0$.

Более того, заметим, что уравнение $det(A - \lambda E) = 0$ инвариантно относительно замены базиса.

Определение.
Уравнение $det(A - \lambda E) = 0$ называется *характеристическим уравнением преобразования* A.

Теорема. Пусть $x_1, \ldots, x_s$ — собственные вектора, принадлежащие различным собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, линейно независимы.

Доказательство: Пусть $B_i = A - \lambda_i E$. Тогда $B_i(x_j) = Ax_j - \lambda_i x_j = (\lambda_j - \lambda_i)x_j$, таким образом $B_i(x_j) = 0$ тогда и только тогда, когда $i = j$.

Допустим, что $x_1 = \sum\limits_{i=2}^{s} \alpha_i x_i$. Подействуем на это равенство преобразованиями $B_2, \ldots, B_s$, тогда получим следующее выражение:

$$0 \neq \prod_{i=2}^{s} (\lambda_1 - \lambda_i) x_1 = \sum_{i=2}^{s} \prod_{j=2}^{s} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_j) x_i = \sum_{i=2}^{s} 0 = 0$$

■

Следствие. Существует базис, в котором матрица преобразования A имеет диагональный вид тогда и только тогда, когда существует базис из собственных векторов. Тогда на главной диагонали стоят собственные значения преобразования.

2.6 Самосопряженные преобразования евклидовых пространств, свойства их собственных значений и собственных векторов.

Замечание. Крайне рекомендуется сравнить утверждения ниже с утверждениями функционального анализа и осознать, насколько мы низко спускаемся с бесконечномерных высот.

Определение. Билинейная симметричная функция $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ называется *скалярным произведением*, если $\forall x \neq 0 \in V \ \varphi(x, x) > 0$.

Определение.
Линейное пространство, снабженное скалярным произведением, называется *евклидовым*.

Определение. Пусть A — линейное преобразование евклидового пространства V, тогда A^* называется *сопряженным* оператором, если

$$\forall x, y \in V \ (Ax, y) = (x, A^*y)$$

Утверждение. Если базис в V ортонормированный, то $A^* = A^T$, иначе ниже укажем связь.

Определение.
Матрицей Грамма для базиса e называют матрицу скалярных произведений $((e_i, e_j))_{i,j=1}^n$.

Если расписать тождество $(Ax, y) = (x, A^*y)$, то получим, что $x^T A^T \Gamma y = x^T \Gamma A^* y$, то есть $A^T \Gamma = \Gamma A^*$

Определение. Преобразование A называется самосопряженным, если для него верно, что $A^* = A$.

Утверждение. В ортонормированном базисе матрица A симметрична $\iff$ A самосопряженный.

Лемма. Если у характеристического многочлена есть комплексный корень, то существует двумерное инвариантное подпространство, не являющееся собственным.

Теорема. Корни характеристического многочлена вещественны у самосопряженного оператора.

Доказательство: Предположим противное. По лемме имеется двумерное инвариантное подпространство L. Пусть B — сужение A на L, тогда заметим, что B все еще самосопряженное, при этом его матрица тогда имеет вид $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$.

Характеристическое уравнение для B имеет вид $\lambda^2 - (\alpha+\gamma)\lambda + \alpha\gamma - \beta^2 = 0$. Его дискриминант после тривиальных преобразований имеет вид $(\alpha - \gamma)^2 + 4\beta^2 > 0$, значит есть вещественный корень, что, конечно, бред, так как в таком случае B имеет собственный вектор. ■

Утверждение. Если подпространство B инвариантно относительно самосопряженного преобразования, то и $B^\perp$ инвариантно относительно него.

Утверждение.
Собственные вектора, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

Следствие. В евклидовом пространстве E имеется ортонормированный базис, в котором матрица самосопряженного оператора A диагональна.

Доказательство: Пусть L — прямая сумма собственных подпространств A, докажем, что она совпадет с E. Действительно, если $x \in E$ раскладывается по собственным векторам, то и его образ раскладывается по ним же.

Из утверждения выше следует, что $L^\perp$ также инвариантна относительна A. Покажем, что $L^\perp$ тривиально. Предположим, что это не так, тогда рассмотрим сужение $B = A|_{L^\perp}$. B все еще самосопряжен, а значит у его характеристического многочлена есть вещественный корень, а значит и собственный вектор h, который является собственным вектором A, то есть $h \in L \cap L^\perp = \{0\}$, откуда $h = 0$, что невозможно.

Получаем, что $L = E$, а тогда искомый базис является объединением базисов в собственных подпространствах. Эти вектора будут ортогональны по утверждению выше. ■

2.7 Приведение квадратичных форм в линейном пространстве к каноническому виду. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

2.7.1 Квадратичные формы

Определение.
Функция $b : V \times V \to \mathbb{R}$ билинейна, если если она линейна по каждому своему аргументу.

Определение. Функция $K(x) = b(x, x)$ называется квадратичной формой, если b симметрична.

Заметим, что если выделить базис в V, то получим, что

$$b(x,y) = b\left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i, \sum_{i=1}^n \eta_i e_i\right) = \sum_{i,j=1}^n \xi_i \eta_j \beta_{ij}$$

Определение. Если в линейном пространстве V задать базис $e_1, \ldots, e_n$, тогда можно определить *матрицу билинейной функции* b как

$$B = \begin{pmatrix} b(e_1,e_1) & \ldots & b(e_1,e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b(e_n,e_1) & \ldots & b(e_n,e_n) \end{pmatrix}$$

Замечание. Таким образом, можно записать $b(x, y)$ как $x^T By$

Замечание. При замене матрицей S получаем, что форма в новом базисе имеет вид $S^T BS$.

Замечание. Действие квадратичной формы можно записать как

$$K(x) = x^T Bx = B_{11}x_1^2 + 2B_{12}x_1x_2 + \ldots$$

то есть многочлен второй степени, причем однородный.

Определение. Квадратичная форма *диагональна*, если $K(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 b_{ii}$, что равносильно тому, что ее матрица диагональна.

Теорема. Для каждой квадратичной формы имеется базис, в котором она диагональна.

Доказательство: Пусть B — матрица квадратичной формы (то же самое, что и матрица соответствующей ей билинейной функции), тогда применим к B последовательность элементарных преобразований, чтобы получить из нее диагональную. Возможны два случая:

1. $b_{11} \neq 0$, тогда можно элементарными преобразованиями добиться того, чтобы $b_{i1} = 0$, $i \in \overline{2, n}$. В силу симметрии матрицы квадратичной формы, получим, что и $b_{1i} = 0$, $i \in \overline{2, n}$. То есть

$$B_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Где C_1 — симметричная матрица размера $n - 1$

2. Второй случай, $b_{11} = 0$. Тогда возможны два варинта действий:

   - Если нашлось $i \in \overline{2, n}$, что $b_{i1} \neq 0$, то поменяем местами i-й столбец с первым и первую строку с i-й, теперь перешли к случаю выше.
   - Не нашлось такого i, что $b_{i1} \neq 0$, тогда в силу симметрии матрицы верно, что и $b_{1i} = 0$, откуда получаем, что вся первая строка и весь первый столбец состоят из нулей. Но это нам тоже подходит, просто соответствующее значение на главной диагонали нулевое.

Данный процесс можно продолжать по индукции абсолютно аналогично, так как после k шагов матрица будет иметь вид

$$B_k = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \dots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & O \\ 0 & \dots & \varepsilon_k & \\ & O & & C_k \end{pmatrix}$$

Откуда преобразования над матрицей C_k приведенные выше не затронут уже диагональный «префикс» матрицы.

Если на каком-то шаге C_k окажется полностью нулевой, то процесс можно завершать. ■

Замечание. Заметим, что при замене базиса ранг матрицы квадратичной формы не меняется, а значит не меняется и ранг квадратичной формы.

Определение. Полученный базис из теоремы выше называется *каноничным*, а представление формы в этом базисе называют *каноничным видом* матрицы.

2.7.2 Критерий Сильвестра

Определение. Квадратичная форма положительно определена на V, если $\forall x \in V\ k(x,x) > 0$.

Лемма. Знак определителя квадратичной формы постоянен (не меняется от замены базиса).

Доказательство: Пусть $B' = S^T BS$, тогда $|B'| = |B| \cdot |S|^2$. ■

Теорема (Критерий Сильвестра).

Для того, чтобы квадратичная форма была положительно определена, необходимо и достаточно чтобы ее главные миноры были положительны.

Доказательство:

$\Longrightarrow$ Заметим, что в каноничном виде у положительно определенной формы все элементы положительны. Заметим, что в ходе перехода к произвольному базису к строке могут быть прибавлены только строки выше ее, а к столбцу — только те, что левее его, а значит главные миноры от таких преобразований не поменяются. А, так как они положительны в каноничном базисе, они будут положительны и в произвольном.

$\Longleftarrow$ Пусть все главные миноры матрицы положительны, в частности $B_{11} = M_1 > 0$, тогда первый шаг приведения к каноничному виду приведет к матрице, где $\varepsilon_1 > 0$:

$$B_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Заметим тогда, что второй главный минор не поменялся, а значит из того, что $M_2 = b_{22} \cdot M_1$, следует, что $b_{22} > 0$ и $\varepsilon_2 = \frac{M_2}{M_1} > 0$. Продолжая рассуждение по индукции, получаем, что $\varepsilon_k = \frac{M_k}{M_{k-1}} > 0$, что завершает доказательство достаточности.

■

3 Дифференциальные уравнения

3.1 Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского. Формула Лиувилля-Остроградского.

Рассмотрим функцию $y(x)$, определенную вместе с n производными на промежутке I. Также рассмотрим функцию $F(x, y, p_1, \dots, p_n)$, определенную и непрерывную на некотором $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$.

Определение. Уравнение вида

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

называется *дифференциальным уравнением n-го порядка.*

Определение. Функция $\varphi(x)$, определенная на I вместе со своими n производными, называется *решением уравнения*, если:

1. φ и все ее n производных непрерывны на I.
2. $\forall x \in I \ ((x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \in \Omega)$.
3. $\forall x \in I \ (F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0)$.

Теорема (о существовании и единственности решения задачи Коши (для системы уравнений n-го порядка в нормальной форме)).

Пусть вектор-функция $\vec{f}(x, \vec{y})$ непрерывна в G вместе со всеми производными по y^j, и $(x_0, \vec{y}_0) \in G$, тогда задача Коши *локально разрешима* единственным образом:

1. Существует замкнутая δ-окрестность точки x_0, в которой решение задачи Коши существует.
2. Это решение единственно в следующем смысле:

   Если $\vec{y}_1 \equiv \varphi(x)$ — решение в δ_1-окрестности, а $\vec{y}_2 \equiv \psi(x)$ — решение в δ_2-окрестности, то $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ в $\min\{\delta_1, \delta_2\}$-окрестности.

Определение. Уравнение вида

$$\vec{y}\,' = A(x)\vec{y} + \vec{f}(x)$$

$$(A(x) = (a_{ij}(x)) \text{ —матрица-функция; } a_{ij}(x) \in C(I);\ \vec{f} \in C(I))$$

называется *системой линейных дифференциальных уравнений.*

Определение. $L(y) = \vec{y}\,' - A(x)\vec{y}$.

Замечание. $\vec{f} = L \circ \vec{y}$.

Определение. Если $\forall \vec{y}\ L(\vec{y}) = \vec{0}$, то уравнение называется *однородным*

$$\vec{y}\,' = A(x)\vec{y}.$$

Замечание. Комплекснозначеное уравнение можно свести к паре действительнозначных уравнений, поэтому в дальнейшем будут рассматриваться только вещественнозначные.

Теорема (о существовании, единственности и продолжимости решения). Если функции $A(x)$ и $\vec{f}(x)$ определены на $[\alpha, \beta]$, то решение следующей задачи существует, единственно и продолжимо на (α, β):

$$\begin{cases} \vec{y}\,' = A(x)\vec{y} + \vec{f}(x) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \end{cases}$$

Лемма. Если $\vec{y}_1(x)$ и $\vec{y}_2(x)$ — решения уравнения, то $\vec{y} = \lambda\vec{y}_1 + \mu\vec{y}_2$ также является решением уравнения для всех $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Лемма. Если $\vec{y}_1(x)$ и $\vec{y}_2(x)$ — решения уравнения, то $\vec{y} = \vec{y}_1 - \vec{y}_2$ — решение уравнения.

Определение. Вектор-функции $\vec{y}_1(x), \ldots, \vec{y}_k(x)$, определенные на промежутке I, называются *линейно зависимыми*, если

$$\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R} : \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 \neq 0 \land \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{y}_i(x) \equiv \vec{0} \right)$$

Определение. Пусть $\vec{y}_1(x), \ldots, \vec{y}_n(x)$ — вектор-функции с n компонентами. Функция

$$W(x) = \det \begin{bmatrix} y_1^1(x) & y_2^1(x) & \ldots & y_n^1(x) \\ y_1^2(x) & y_2^2(x) & \ldots & y_n^2(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^n(x) & y_2^n(x) & \ldots & y_n^n(x) \end{bmatrix}$$

называется *определителем Вронского (вронскианом)* для заданных вектор-функций.

Лемма. Если вронскиан системы $\vec{y}_1(x), \ldots, \vec{y}_n(x)$ отличен от нуля хотя бы в одной точке, то все эти функции линейно независимы

Доказательство: Пусть эти функции линейно зависимы, тогда векторы $\vec{y}_1(x_0), \ldots, \vec{y}_n(x_0)$ линейно зависимы в каждой точке x_0, а значит определитель матрицы, составленной из векторов (то есть, значения вронскиана в точке x_0), равен нулю. ■

Определение. *Фундаментальная система решений (ФСР)* для СЛДУ — набор n линейно независимых решений системы, где n — количество уравнений

Лемма. ФСР существует

Доказательство: Пусть $x_0 \in [a, b]$, и $\vec{y}_{01}, \ldots, \vec{y}_{0n}$ — числовые линейно независимые векторы. Составим систему задач Коши:

$$\begin{cases} \vec{y}\,' = A(x)\vec{y} \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y_{0i}} \end{cases}$$

Пусть $\vec{z_1}, \ldots, \vec{z_n}$ — решения этих задач, тогда их вронскиан в точке x_0 равен определителю матрицы, составленной из $\{\vec{y}_{0i}\}_{i=1}^n$, следовательно он не равен нулю, и ФСР существует. ■

Лемма. Любое решение СЛДУ единственным образом представимо в виде линейной комбинации векторов ФСР

Доказательство: Пусть $x_0 \in [a, b]$, $\vec{y}$ — решение системы, и $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$ — ФСР, тогда $\vec{y}_1(x_0), \ldots, \vec{y}_n(x_0)$ линейно независимы, и $\vec{y}(x_0)$ единственным образом выражается через них. В силу единственности решения задачи Коши, коэффициенты линейной комбинации окажутся одними и теми же для всех точек отрезка. ■

Определение. *Фундаментальная матрица СЛДУ* — квадратная матрица порядка n, столбцы которой являются элементами некоторой ФСР этой системы.

Лемма. Если $Y_1(x)$ и $Y_2(x)$ — фундаментальные матрицы одной системы, то существует такая невырожденная матрица C, что $Y_1 = Y_2 C$

Теорема (Лиувилля-Остроградского).

Пусть $W(x)$ — вронскиан решений $\vec{y}_1(x), \ldots, \vec{y}_n(x)$ системы $\vec{y}\,' = A(x)\vec{y}$ на промежутке I, и $x_0 \in I$, тогда для всех $x \in I$ имеет место формула *Лиувилля-Остроградского*:

$$W(x) = W(x_0) \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} \operatorname{tr} A(t) dt \right)$$

Доказательство: Покажем, что $W(x)$ является решением следующего уравнения:

$$W'(x) = \operatorname{tr} A(x) \cdot W(x)$$

Выразим $W'(x)$:

$$W'(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial W(x)}{\partial y_{ij}} \frac{dy_{ij}}{dx}$$

Составим матрицу со столбцами из решений

$$Y(x) = \begin{bmatrix} \vec{y_1}(x) & \vec{y_2}(x) & \ldots & \vec{y_n}(x) \end{bmatrix}$$

Положим $\tilde{Y}_{ij}(x)$ - алгебраическое дополнение элемента $y_{ij}(x)$. Тогда

$$W(x) = \sum_{i=1}^{n} y_{ij}(x) \tilde{Y}_{ij}(x)$$

■

3.2 Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью-квазимногочленом.

Определение. Уравнение вида

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

$$a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R};\ a_0 \neq 0;\ y : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

называется *линейным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами.*

Теорема (о существовании, единственности и продолжимости решения задачи Коши). Если функция f определена и непрерывна на $[\alpha, \beta]$, то решение следующей задачи существует, единственно и продолжимо на (α, β):

$$\begin{cases} a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \\ y(x_0) = y_{0,0} \\ y'(x_0) = y_{0,1} \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1} \end{cases}$$

Доказательство: Очевидно следует из аналогичной теоремы для системы уравнений

$$\begin{cases} y_0' = y_1 \\ y_1' = y_2 \\ \dots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = (f - a_n y_0 - a_{n-1} y_2 - \dots - a_1 y_{n-1})/a_0 \\ y_0(x_0) = y_{0,0} \\ y_1(x_0) = y_{0,1} \\ \dots \\ y_{n-1}(x_0) = y_{0,n-1} \end{cases}$$

Достаточно положить $y_0 = y$, тогда $y_k = y^{(k)}$. ■

Определение. Однородное уравнение:

$$L(y) = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

Найдем решение однородного уравнения в виде $y = e^{\lambda x}$:

$$M(\lambda) = a_0 \lambda^n + \dots + a_{(n-1)} \lambda + a_n$$

$$L(y) = L(e^{\lambda x}) = M(\lambda)e^{\lambda x} = 0$$

Так как экспонента никогда не обнуляется (даже в комплексных числах), то единственный возможный вариант — это $M(\lambda) = 0$.

Определение. Уравнение

$$M(\lambda) = 0$$

называется *характеристическим*, как и многочлен в его левой части.

Лемма. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — однократные корни $M(\lambda)$, тогда решения $y_i = e^{\lambda_i x}$ линейно независимы.

Доказательство: Запишем вронскиан:

$$W(e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}) = \det \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x} & \ldots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \ldots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \ldots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{bmatrix} = e^{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)x} \det \begin{bmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Получившийся определитель Вандермонда не равен нулю, поскольку все λ_i различны ■

Замечание. Если все $a_i \in \mathbb{R}$, то все комплексные корни $M(\lambda)$ разбиваются на пары комплексно сопряженных:

$$\lambda = \alpha + i\beta, \ \overline{\lambda} = \alpha - i\beta$$

Соответствующие им решения:

$$y = e^{\lambda x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

$$\overline{y} = e^{\overline{\lambda} x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x)$$

Для простоты можем заменить y и $\overline{y}$ на

$$z_1 = \frac{y + \overline{y}}{2} = e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$z_2 = \frac{y - \overline{y}}{2i} = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Замена является корректным переходом в другой базис (проверяется построением матрицы перехода и подсчётом определителя), а потому линейная оболочка не изменится.

Лемма. Пусть $y = x^s e^{\lambda x}$, где λ — корень характеристического уравнения кратности l. Тогда

$$L(x^s e^{\lambda x}) = \begin{cases} 0, & s < l \\ (b_0 x^{s-l} + b_1 x^{s-l-1} + b_{s-l})e^{\lambda x}, & s \geqslant l \end{cases}$$

Доказательство: Пусть z и λ — комплексные числа. Сначала докажем, что

$$\left(\left(e^{\lambda z}\right)_\lambda^{(s)}\right)_z^{(p)} = \left(\left(e^{\lambda z}\right)_z^{(p)}\right)_\lambda^{(s)}$$

или же

$$\left(z^s e^{\lambda z}\right)_z^{(p)} = \left(\lambda^p e^{\lambda z}\right)_\lambda^{(s)}$$

Рассмотрим некую формальную операцию $\cdot'_x$ $(\cdot'_\lambda)$, для которой верны следующие соотношения:

$$(x^s)'_x = sx^{s-1}$$
$$(a)'_x = 0$$
$$(e^{\lambda x})_x = \lambda e^{\lambda x}$$
$$(\alpha f_1 + \beta f_2)'_x = \alpha f_{1x} + \beta f_{2x}$$
$$(f_1 \cdot f_2)'_x = f'_{1x} \cdot f_2 + f_1 \cdot f'_{2x}$$

Приступим к доказательству:

$$\begin{aligned}
\left(z^s e^{\lambda z}\right)_z^{(p)} &= \sum_{k=0}^{p} C_p^k (z^s)_z^{(k)} (e^{\lambda z})_z^{(p-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{p} C_p^k \, s(s-1)\dots(s-(k-1))\, z^{s-k}\lambda^{p-k}e^{\lambda z} \\
&= \sum_{k=0}^{\min(p,s)} C_p^k C_s^k k! \; z^{s-k}\lambda^{p-k}e^{\lambda z}
\end{aligned}$$

Заметим, что $\left(\lambda^p e^{\lambda z}\right)_\lambda^{(s)}$ раскроется в такое же выражение ввиду “структурной симметрии”.

Найдём $L(x^s e^{\lambda x})$:

$$\begin{aligned}
L(x^s e^{\lambda x}) &= a_0\left(x^s e^{\lambda x}\right)_x^{(n)} + a_1\left(x^s e^{\lambda x}\right)_x^{(n-1)} + \dots + a_n x^s e^{\lambda x} \\
&= a_0\left(\left(e^{\lambda x}\right)_\lambda^{(s)}\right)_x^{(n)} + a_1\left(\left(e^{\lambda x}\right)_\lambda^{(s)}\right)_x^{(n-1)} + \dots + a_n\left(e^{\lambda x}\right)_\lambda^{(s)} \\
&= a_0\left(\left(e^{\lambda x}\right)_x^{(n)}\right)_\lambda^{(s)} + a_1\left(\left(e^{\lambda x}\right)_x^{(n-1)}\right)_\lambda^{(s)} + \dots + a_n\left(e^{\lambda x}\right)_\lambda^{(s)} \\
&= \left(a_0\left(e^{\lambda x}\right)_x^{(n)} + a_1\left(e^{\lambda x}\right)_x^{(n-1)} + \dots + a_n e^{\lambda x}\right)_\lambda^{(s)} \\
&= \left(e^{\lambda x} M(\lambda)\right)_\lambda^{(s)} = \sum_{k=0}^{s} C_s^k (M(\lambda))_\lambda^{(k)} \left(e^{\lambda x}\right)_\lambda^{(s-k)} \\
&= \sum_{k=\ell}^{s} C_s^k (M(\lambda))_\lambda^{(k)} \left(e^{\lambda x}\right)_\lambda^{(s-k)}
\end{aligned}$$

Следовательно, $b_i = C_s^k (M(\lambda))_\lambda^{(k)}$, и лемма доказана. ■

Замечание. Пусть λ — корень $M(\lambda)$ кратности l, тогда функции $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{l-1}e^{\lambda x}$ являются решениями однородного уравнения.

Доказательство: Корень кратности s многочлена $P(x)$ является корнем $P, P', \dots, P^{(s-1)}$. ■

Определение.

Квазимногочлен — произведение многочлена на экспоненту с линейной функцией в показателе.

Замечание. $(P_m(x)e^{\lambda x})'_x = Q_m(x)e^{\lambda x}$

Доказательство: $((p_0x^m + \dots)\, e^{\lambda x})' = p_0x^m \cdot \lambda e^{\lambda x} + \dots$, где все оставшиеся слагаемые имеют степень не более m (равенство достигается при $\lambda = 0$). ■

Теорема. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — корни $M(\lambda)$ кратностей $l_1, \dots, l_k$ (заметим, что $\sum l_i = n$), тогда набор функций вида $x^s e^{\lambda_i x}$, где $s = 0, \dots, l_i - 1$ и $i = 1, \dots, k$, является ФСР для однородного уравнения.

Доказательство: Указанный набор состоит из n функций, поэтому осталось показать их линейную независимость.

Предположим, что это не так, т.е. существует нетривиальная всюду нулевая линейная комбинация с коэффициентами $c_1, \dots, c_n$. Сгруппировав слагаемые с одинаковой экспонентой получим нулевую сумму k квазимногочленов, хотя бы один из которых отличен от тождественного нуля. Без потери общности предположим, что последний квазимногочлен $P_k(x)e^{\lambda_k x}$ отличен от нуля.

Домножим линейную комбинацию на $e^{-\lambda_1 x}$ и продифференцируем результат l_1 раз. В результате получим сумму $k-1$ квазимногочленов, последний из которых по-прежнему отличен от тождественного нуля. Повторив данную процедуру $k-2$ раз, получим некоторый квазимногочлен $R_k(x)e^{(\lambda_k - \lambda_{k-1} - \lambda_{k-2} - \dots - \lambda_1)x}$, который должен быть тождественно равен нулю — противоречие. ■

Теорема. Если в правой части неоднородного уравнения $f(x) = P_m(x)e^{\gamma x}$ — квазимногочлен степени m, то уравнение имеет частое решение вида $y = x^l Q_m(x)e^{\gamma x}$, где l — кратность γ как корня многочлена $M(\lambda)$.

Доказательство: Пусть $y_1(x) = q_0 x^{m+l} e^{\gamma x}$, тогда $L(y_1) = (q_0 \cdot b_0 x^m + R_{<m}(x))e^{\gamma x}$, где $b_0 \neq 0$.

Если $m = 0$, то $R(x) \equiv 0$, и $q_0 b_0 x^m = p_0 x^m$, отсюда $q_0 = p_0/b_0$.

Если же $m \geqslant 1$, то рассмотрим $y(x) = y_1(x) + z(x) = \frac{p_0}{b_0} e^{\gamma x} + z(x)$:

$$L(y) = L(y_1) + L(z) = (p_0x^m + R_{<M}(x))\, e^{\gamma x} + L(z) = (p_0x^m + \underbrace{p_1x^{m-1} + \dots}_{\tilde{P}_{<m}(x)})\, e^{\gamma x}$$

$$L(z) = (\tilde{P}_{<m}(x) - R(x))\, e^{\gamma x}$$

...и мы свели задачу к меньшей степени. ■

3.3 Системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, методы их решения.

Теперь рассматриваем

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, A_{n\times n} = (a_{ij}), \vec{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

Определение. Система вида

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{f}(t)$$

называется *системой линейных дифференциальных уравнений n-го порядка с постоянными коэффициентами.*

Определение. Однородная система:

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$$

3.3.1 Решение задачи в случае, если мы адекватны

Теорема. Если $\vec{h_1}, \dots, \vec{h_n}$ — базис из собственных векторов матрицы A, то $\vec{x}^{\,i} = e^{\lambda_i t}\vec{h_i}$ — ФСР для однородной системы.

Доказательство: Заметим, что если $\vec{h}$ — собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному числу λ, то $A(e^{\lambda t}\vec{h}) = e^{\lambda t}(A\vec{h}) = e^{\lambda t}\lambda\vec{h} = \left(e^{\lambda t}\vec{h}\right)'$, значит, собственный вектор является решением однородной системы. Их линейная независимость следует из того, что их вронскиан в точке $t = 0$ равен определителю из координатных столбцов этого базиса, а значит не равен нулю. ■

Замечание. Если λ — комплексное собственное значение действительнозначной матрицы, то $\overline{\lambda}$ и соответствующие им собственный векторы покомпонентно сопряжены. Это позволяет нам перейти в базис, содержащий только действительнозначные функции (экспонента, синус, косинус).

Определение. Пусть $\vec{h}_1$ — собственный вектор матрицы A для собственного значения λ:

$$(A - \lambda E)\,\vec{h} = \vec{0}$$

Последовательность $\{\vec{h}_i\}_{i=1}^k$, определяемая соотношением $(A - \lambda E)\,\vec{h}_{i+1} = \vec{h}_i$, причём уравнение $(A - \lambda E)\,\vec{h} = \vec{h}_k$ не имеет решений, называется *жордановой цепочкой*, а её элементы (кроме $\vec{h}_1$) — *присоединёнными (к $\vec{h}_1$) векторами.*

Определение. Матрица следующего вида называется *жордановой клеткой*:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{vmatrix}$$

Определение. Блочно-диагональная матрица, на диагонали которая стоят жордановы клетки, называется *жордановой.*

Определение. Пусть S — (числовая) матрица перехода, переводящая A в жорданову матрицу J. Соответствующий базис называется *жордановым*, а произведение SJS^{-1} — *жордановой нормальной формой.*

Теперь введём $\vec{y}$ следующим образом: $\vec{x} = S\vec{y}$. Заметим, что $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ можно преобразовать в $S\dot{\vec{y}} = AS\vec{y}$, а затем (в силу невырожденности S) в

$$\dot{\vec{y}} = J\vec{y}$$

Полученная система уравнений решается “поблочно”.

Рассмотрим один блок системы уравнений:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda y_1 + y_2 \\ \dot{y}_2 = \lambda y_2 + y_3 \\ \dots \\ \dot{y}_{k-1} = \lambda y_{k-1} + y_k \\ \dot{y}_k = \lambda y_k \end{cases}$$

Выполним следующую замену: $y_i = e^{\lambda t} z_i$

$$\begin{cases} \lambda e^{\lambda t} z_i + e^{\lambda t} \dot{z}_i = \lambda e^{\lambda t} z_i + e^{\lambda t} z_{i+1} \\ \dots \\ \lambda e^{\lambda t} z_k + e^{\lambda t} \dot{z}_k = \lambda e^{\lambda t} z_k \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_i = z_{i+1} \\ \dots \\ \dot{z}_k = 0 \end{cases}$$

Следовательно,

$$z_i = \sum_{j=i}^{k} c_j \frac{t^{j-i}}{(j-i)!}$$

$$y_i = z_i e^{\lambda t}$$

Объединим все компоненты в вектор и перейдём в исходный базис:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{k} y_i \vec{h}_i$$

3.3.2 Решение задачи, если матан очень сильно вас помотал (матричная экспонента)

Пусть t — действительнозначная переменная, $A_{n\times n}$ — комплекснозначная квадратная матрица. Рассмотрим следующий ряд:

$$E_{n\times n} + \frac{t^1}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \dots + \frac{t^k}{k!}A^k + \dots \tag{1}$$

Обозначим элементы матриц следующим образом: $A^m = \|a_{ij}^m\|$. Заметим, что

$$a_{ij}^k = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}^{k-1} a_{\ell j}$$

Введём обозначение для частичных сумм:

$$S_k = E + \sum_{\ell=1}^{k} \frac{t^\ell A^\ell}{\ell!}$$

$$(S_k)_{ij} = s_{ij}^k = \delta_{ij} + \sum_{\ell=1}^{k} \frac{t^\ell a_{ij}^\ell}{\ell!} \tag{2}$$

Определение. Матричный ряд (1) называется *сходящимся* при $t_0 \in \mathbb{R}$, если степенной ряд (2) сходится при $t = t_0$ для всех i и j.

(Остальные определения, связанные со сходимостью, вводятся аналогично.)

Лемма. Для любой квадратной матрицы A и любого $t \in \mathbb{R}$ ряд (1) сходится абсолютно.

Доказательство: Пусть $M = \max\limits_{i,j}|a_{ij}|$. Из определения получаем, что $|a_{ij}^2| \leqslant nM^2$; отсюда по индукции выводим оценку $|a_{ij}^k| \leqslant n^{k-1}M^k$. Следовательно, для всех i и j ряд (2) мажорируется по модулю рядом

$$\delta_{ij} + \sum_{\ell=1}^{k} \frac{|t|^\ell n^{\ell-1} M^\ell}{\ell!} = \delta_{ij} + \sum_{\ell=1}^{k} |t|^\ell b_\ell$$

Воспользуемся признаком Д'Аламбера:

$$\frac{|t|^{\ell+1} b_{\ell+1}}{|t|^\ell b_\ell} = \frac{|t| n^\ell M^{\ell+1} \ell!}{(\ell+1)!\, n^{\ell-1} M^\ell} = \frac{|t| nM}{\ell+1} \to 0$$

$\blacksquare$

Определение. Сумма абсолютно сходящегося ряда (1) называется *матричной экспонентой.*

Обозначение: e^{At}

Определение. Ряд (1) *равномерно сходится на множестве* $X \subset \mathbb{R}$, если ряд (2) равномерно сходится на этом же множестве.

Утверждение. Ряд (1) равномерно сходится на любом отрезке.

Доказательство. Пусть $t \in [\alpha, \beta]$, тогда $|t| \leqslant T$, отсюда

$$\left| \frac{a_{ij}^\ell t^\ell}{\ell!} \right| \leqslant \frac{n^{\ell-1} M^\ell T^\ell}{\ell!}$$

…и по признаку Вейерштрасса ряд сходится равномерно.

Лемма 2. Если квадратные матрицы A и B перестановочны (т. е. $AB = BA$), то для любого $t \in \mathbb{R}$ выполнено $e^{tA} \cdot e^{tB} = e^{tB} \cdot e^{tA} = e^{t(A+B)}$.

Доказательство.

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k} = n! \sum_{k+m=n} \frac{A^k}{k!} \frac{B^m}{m!}$$

$$\begin{aligned}
e^{t(A+B)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}(A+B)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+m=n} \frac{t^k A^k}{k!} \frac{t^m B^m}{m!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \frac{t^m B^m}{m!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t^k A^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m B^m}{m!} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m B^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m B^m}{m!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \\
&= e^{tA} \cdot e^{tB} = e^{tB} \cdot e^{tA}
\end{aligned}$$

Следствие. $e^{-tA} = (e^{tA})^{-1}$

Доказательство. Заметим, что $e^{tA} \cdot e^{-tA} = e^{0_{n\times n}} = E$, а значит, $\det e^{tA} \neq 0$. Домножив обе части слева на $(e^{tA})^{-1}$, получаем искомое.

Лемма 3.

1. Если $A = SBS^{-1}$, то $e^{tA} = Se^{tB}S^{-1}$.
2. $\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA} = e^{tA} \cdot A$

Доказательство.

1. С помощью индукции можно показать, что $(SAS^{-1})^n = SA^nS^{-1}$. Выписав частичные суммы ряда (1) и вынеся S и S^{-1} за скобки, получим искомое.
2. Продифференцируем ряд почленно (это возможно ввиду равномерной сходимости):

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\ell t^{\ell-1} A^{\ell}}{\ell!} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{t^{\ell} A^{\ell+1}}{\ell!} = A \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{t^{\ell} A^{\ell}}{\ell!} = Ae^{tA}$$

Теорема. Матрица e^{tA} является фундаментальной матрицей для системы линейных уравнений $\dot{x} = Ax$.

Доказательство. $(e^{tA})' = Ae^{tA}$, следовательно, каждый столбец матрицы e^{tA} является решением системы. Поскольку $\det e^{tA} \neq 0$ при любом t, то e^{tA} фундаментальна.

Общее решение данной системы: $\vec{x} = e^{tA}\vec{c}$, где $\vec{c}$ — вектор-констант.

3.4 Простейшая задача вариационного исчисления. Необходимые условия локального экстремума

Вернемся к функану!

Рассмотрим вещественное линейное нормированное пространство Y с нормой $\|\cdot\|$, M — некоторое подмножество Y.

Определение. Отображение $F : M \to \mathbb{R}$ называется *функционалом* $F(y)$ с областью определения M.

Определение. $C^1[a, b]$ — линейное нормированное пространство всех непрерывно дифференцируемых функций, заданных на $[a, b]$, с нормой

$$\|y(x)\| = \max_{x \in [a,b]} |y(x)| + \max_{x \in [a,b]} |y'(x)|$$

Пусть $F(x, y, p)$ — заданная непрерывно дифференцируемая функция для $\forall x \in [a, b]$ и $\forall (y, p) \in \mathbb{R}^2_{(y,p)}$ — плоскости с декартовыми прямоугольными координатами y, p. Рассмотрим интеграл

$$J(y) = \int\limits_a^b F[x, y(x), y'(x)]dx$$

на множестве

$$M = \{y \in C^1[a, b] \mid y(a) = A, y(b) = B\},$$

где A и B — заданные числа. Функции $y(x) \in M$ будем называть *допустимыми*.

Очевидно, что $\forall y(x) \in M$ интеграл $J(y)$ определен и задает функционал с областью определения M в пространстве $C^1[a, b]$.

Определение. Функция $\hat{y}(x) \in M$ дает *слабый локальный минимум функционала* $J(y)$, если

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall y(x) \in M (\|y(x) - \hat{y}(x)\| < \varepsilon \Rightarrow J(y) \geqslant J(\hat{y})).$$

Замечание. Если заменить в последнем неравенстве знак на $J(y) \leqslant J(\hat{y})$, то получим определение *слабого локального максимума*. Оба понятия — слабый локальный минимум и слабый локальный максимум объединяются общим термином: *слабый локальный экстремум*.

Определение. Задача нахождения слабого локального экстремума функционала $J(y)$ называется простейшей вариационной задачей.

Определение. $\mathring{C}^1[a, b] = \{y(x) \in C^1[a, b] \mid y(a) = y(b) = 0\}$.

Замечание. Для произвольных $y(x) \in M$ и $\eta(x) \in \mathring{C}^1[a, b]$ очевидно $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $y(x) + \alpha\eta(x) \in M$. Тогда рассмотрим

$$J(y + \alpha\eta) = \int\limits_a^b F[x, y(x) + \alpha\eta(x), y'(x) + \alpha\eta'(x)]dx$$

При фиксированных $y(x)$ и $\eta(x)$ интеграл является функцией $\Phi(\alpha) = J(y + \alpha\eta)$. Можем найти такое $\varepsilon > 0$, такое что при $|\alpha| < \varepsilon, x \in [a, b]$ подынтегральная функция F и ее производная по α являются непрерывными. Тогда по теоремам из матана $\Phi(\alpha)$ — дифференцируемая функция при $|\alpha| < \varepsilon$.

Замечание.

$$\Phi'(0) = \frac{d}{d\alpha} J[y(x) + \alpha\eta(x)]|_{\alpha=0} = \int\limits_a^b \frac{\partial F[x, y(x), y'(x)]}{\partial y} \cdot \eta(x) + \frac{\partial F[x, y(x), y'(x)]}{\partial y'} \cdot \eta'(x)dx$$

Определение. *Вариацией* функции $y(x) \in M$ называется любая функция $\eta(x) \in \mathring{C}^1[a,b]$. Выражение $\frac{d}{d\alpha}J[y(x)+\alpha\eta(x)]\,|_{\alpha=0}$, где $\eta(x)$ — вариация y, называется *первой вариацией* функционала $J(y)$ на функции $y(x)$, и обозначается $\delta J[y,\eta(x)]$, $\forall\eta(x) \in \mathring{C}^1[a,b]$.

Замечание.

$$\delta J[y,\eta(x)] = \int\limits_a^b \frac{\partial F[x,y(x),y'(x)]}{\partial y}\cdot\eta(x) + \frac{\partial F[x,y(x),y'(x)]}{\partial y'}\cdot\eta'(x)dx$$

Замечание. Первая вариация $\delta J[y,\eta(x)]$ линейно зависит от $\eta(x)$ и $\eta'(x)$.

Теорема. Если $\hat{y}(x) \in M$ является решением простейшей вариационной задачи, то необходимо $\delta J[\hat{y},\eta(x)] = 0$ для любой вариации $\eta(x)$.

Доказательство: Пусть для определенности $\hat{y}(x) \in M$ дает слабый локальный минимум для функционала $J(y)$, т.е.

$$\exists\varepsilon > 0 : \forall h(x) \in \mathring{C}^1[a,b]\ (\|h(x)\| < \varepsilon \Rightarrow J(\hat{y}+h) \geqslant J(\hat{y}))$$

Положим $h(x) = \alpha\eta(x)$, где $\alpha \in \mathbb{R}, \eta(x) \in \mathring{C}^1[a,b]$. Тогда $\hat{y}(x) + h(x) \in M$, и для достаточно малых $|\alpha|$ при фиксированной $\eta(x)$

$$\|h(x)\| = |\alpha|\left(\max_{[a,b]}|\eta(x)| + \max_{[a,b]}|\eta'(x)|\right) < \varepsilon,$$

$$\Phi(\alpha) = J(\hat{y}+\alpha\eta) \geqslant J(\hat{y}) = \Phi(0).$$

Это значит, что дифференцируемая функция $\Phi(\alpha)$ имеет минимум при $\alpha = 0$. Значит $\Phi'(0) = 0$, и тогда $\forall\eta(x) \in \mathring{C}^1[a,b]$ $\delta J[y,\eta(x)] = \Phi'(0) = 0$. ■

Основная лемма вариационного исчисления.
Если $f(x) \in C[a,b]$ и $\int\limits_a^b f(x)\eta(x)dx = 0$ для $\forall\eta(x) \in \mathring{C}^1[a,b]$, то $f(x) \equiv 0$ на $[a,b]$.

Доказательство: Предположим противное. Пусть $f(x) \not\equiv 0$ на $[a,b]$. Тогда $\exists x_0 \in (a,b)$ такая, что $f(x_0) \neq 0$. Пусть для определенности $f(x_0) > 0$. Из непрерывности $f(x)$ на $[a,b]$ следует, что

$$\exists\varepsilon > 0\ :\ \forall x\ (|x - x_0| \leqslant \varepsilon \Rightarrow f(x) \geqslant \frac{1}{2}f(x_0)).$$

Положим

$$\eta(x) = \begin{cases} [x-(x_0-\varepsilon)]^2\cdot[x-(x_0+\varepsilon)]^2, & |x-x_0| \leqslant \varepsilon, \\ 0, & |x-x_0| > \varepsilon. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что функция $\eta(x) \in \mathring{C}^1[a,b]$. По интегральной теореме о среднем получаем, что

$$\int\limits_a^b f(x)\eta(x)dx = \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)\eta(x)dx = f(\zeta)\int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\eta(x)dx \geqslant \frac{1}{2}f(x_0)\int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\eta(x)dx > 0,$$

где $\zeta \in [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$. Полученное неравенство противоречит условию теоремы, поэтому наше предположение неверно. ■

Теорема. Пусть функция $F(x,y,p)$ — дважды непрерывно дифференцируема при $\forall x \in [a,b], \forall (y,p) \in \mathbb{R}^2_{(y,p)}$. Если дважды непрерывно дифференцируемая функция $\hat{y}(x)$ является решением простейшей вариационной задачи, то необходимо чтобы функция $\hat{y}(x)$ на $[a,b]$ удовлетворяет *уравнению Эйлера*:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

Доказательство:

Если $\hat{y}(x)$ — решение задачи, то в силу прошлой теоремы $\delta J[y, \eta(x)] = 0$ для любой вариации $\eta(x)$. Учитывая, что $\eta(a) = \eta(b) = 0$, проинтегрируем по частям слагаемое, содержащее $\eta'(x)$ в формуле для $\delta J[y, \eta(x)]$. Это законно, так как выражение

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F[x, y(x), y'(x)]}{\partial y'} = \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} \cdot y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \cdot y''$$

при подстановке $y = \hat{y}$ является непрерывной функцией на $[a,b]$. Имеем

$$0 = \int\limits_a^b \frac{\partial F[x, y(x), y'(x)]}{\partial y} \cdot \eta(x) + \frac{\partial F[x, y(x), y'(x)]}{\partial y'} \cdot \eta'(x) dx =$$

$$= \frac{\partial F[x, \hat{y}(x), \hat{y}'(x)]}{\partial y'} \cdot \eta(x) \Bigg|_{x=a}^{x=b} + \int\limits_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial F}{\partial y'} \right]_{y=\hat{y}(x)} \cdot \eta(x) dx =$$

$$= \int\limits_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial F}{\partial y'} \right]_{y=\hat{y}(x)} \cdot \eta(x) dx.$$

Поскольку $\eta(x) \in \mathring{C}^1[a,b]$, а функция

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial F}{\partial y'} \right]_{y=\hat{y}(x)}$$

является непрерывной на $[a,b]$, то в силу основной леммы вариационного исчисления

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial F}{\partial y'} \right]_{y=\hat{y}(x)} \equiv 0, \forall x \in [a,b].$$

Это значит, что $\hat{y}(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера. ■

Определение. Всякое решение уравнения Эйлера называют экстремалью функционала. Всякая же экстремаль $y(x)$, являющаяся допустимой функцией, т.е. $y(x) \in M$, называют допустимой экстремалью функционала.

Замечание. Из последней теоремы вытекает, что только среди допустимых экстремалей нужно искать решение простейшей вариационной задачи.

4 Теория вероятности

4.1 Полная система событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Независимость событий и классов событий.

4.1.1 Полная система событий.

Определение. *Вероятностное пространство* — тройка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где

- Ω — *пространство элементарных исходов*
- $\mathcal{F}$ — *σ-алгебра* событий:
  1. $\Omega \in \mathcal{F}$
  2. $\forall \mathcal{A} \subseteq \Omega \ (\mathcal{A} \in \mathcal{F} \Rightarrow (\Omega \setminus \mathcal{A}) \in \mathcal{F})$
  3. $\forall \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n, \ldots \in \mathcal{F} \ \left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i \in \mathcal{F} \right)$
- P — *σ-аддитивная вероятностная мера*, определённая на $\mathcal{F}$:
  1. $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$
  2. $P(\Omega) = 1$
  3. $\forall \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n, \ldots \in \mathcal{F}$
     $\Bigl((\forall i, j \in \mathbb{N} \ ((i \neq j) \Rightarrow (\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \varnothing))) \Rightarrow \Bigl(P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i \right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(\mathcal{A}_i) \Bigr) \Bigr)$

Определение. Система событий $\{B_n\}_{n=1}^{\infty\,(N)}$ называется *разбиением* Ω, если:

1. $\forall i, j \in \mathbb{N} \ ((i \neq j) \Rightarrow (B_i \cap B_j = \varnothing))$
2. $\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty\,(N)} B_i = \Omega$

Определение. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют *полную группу событий*, если хотя бы одно из них непременно должно произойти, т.е. если

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega.$$

4.1.2 Формула полной вероятности.

Определение. *Условная вероятность* $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, где $P(B) > 0$.

Теорема (о полной вероятности). Если $\{B_n\}_{n=1}^{\infty\,(N)}$ — разбиение Ω, и $\forall i$ $(P(B_i) > 0)$, то

$$\forall A \in \mathcal{F} \left(P(A) = \sum_{i=1}^{\infty\,(N)} P(A|B_i)\, P(B_i) \right)$$

Доказательство.

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P\left(A \cap \left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty\,(N)} B_i\right)\right) = P\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty\,(N)} A \cap B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty\,(N)} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{\infty\,(N)} P(A|B_i)\, P(B_i)$$

4.1.3 Формула Байеса.

Определение. *Апостериорная* вероятность находится через *априорные* следующим образом:

$$P(B_n|A) = \frac{P(A \cap B_n)}{P(A)} = \frac{P(A|B_n)\, P(B_n)}{\sum\limits_{i=1}^{\infty\,(N)} P(A|B_i)\, P(B_i)}$$

Замечание. Если $P(B) = 0$, то $P(A|B)$ либо не определена, либо равна нулю.

4.1.4 Независимость событий и классов событий.

Определение. События A и B называются *независимыми* ($A \perp\!\!\!\perp B$), если $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$.

(Можно получить из более интуитивного, но не симметричного выражения $P(A|B) = P(A)$)

Определение. Набор событий $\{A_i\}$ называется *независимым в совокупности*, если

$$\forall B \subseteq \{A_i\} \left(P\left(\bigcap B\right) = \prod_{b \in B} P(b) \right) \quad \text{(любой набор индексов независим)}$$

4.2 Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, их свойства. Вычисление для нормального распределения.

4.2.1 Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, их свойства.

Определение. *Математическим ожиданием* случайной величины ξ называют величину

$$\mathbb{E}\xi = \int_{\Omega} \xi(\omega) dP$$

Свойства:

1. Пусть c — константа, тогда $\mathbb{E}c = c$.

2. Если $\xi \leqslant \eta$ п.н. и если $\exists\ \mathbb{E}\xi, \mathbb{E}\eta$, то $\mathbb{E}\xi \leqslant \mathbb{E}\eta$

3. $\mathbb{E}(c\xi) = c \cdot \mathbb{E}\xi$, если $\exists |\mathbb{E}\xi| < \infty$

4. $\mathbb{E}(\xi + \eta) = \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta$, если $\exists \mathbb{E}\xi, \mathbb{E}\eta, |\mathbb{E}\xi|, |\mathbb{E}\eta| < \infty$

5. $|\mathbb{E}\xi| \leqslant \mathbb{E}|\xi|$, если $\exists\ \mathbb{E}\xi$

6. Если $\forall A \in \mathcal{F}\ (\mathbb{E}\xi I_A \leqslant \mathbb{E}\eta I_A)$, то $\xi \leqslant \eta$ п.н.

   Доказательство: Пусть $A = \{\xi > \eta\} \in \mathcal{F} \Longrightarrow \mathbb{E}\xi I_A \leqslant \mathbb{E}\eta I_A \Longrightarrow \mathbb{E}(\xi - \eta)I_A \leqslant 0$. При этом $(\xi - \eta)I_A \geqslant 0 \Longrightarrow \mathbb{E}(\xi - \eta)I_A \geqslant 0 \Longrightarrow \mathbb{E}(\xi - \eta)I_A = 0 \Longrightarrow P((\xi - \eta)I_A) = 0 \Longrightarrow P(A) = 0$ ■

7. $\xi \perp\!\!\!\perp \eta \Longrightarrow \mathbb{E}\xi\eta = \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta$, если $|\mathbb{E}\xi|, |\mathbb{E}\eta|, \mathbb{E}|\xi\eta| < \infty$ (по теореме Фубини)

8. $\xi_n \to \xi$ п.н. и $\forall n\ |\xi_n| \leqslant \eta, \mathbb{E}\eta < \infty$, тогда $\mathbb{E}\xi_n \to \mathbb{E}\xi, |\mathbb{E}\xi| < \infty$ и $\mathbb{E}|\xi_n - \xi| \to 0$

Определение. *Дисперсия* случайной величины ξ:

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2$$

Определение. *Центрированный k-й момент: $E(\xi - E\xi)^k$*

Свойства:

1. Альтернативная формула:

$$\begin{aligned} D\xi &= E(\xi - E\xi)^2 \\ &= E(\xi^2 - 2\xi\, E\xi + (E\xi)^2) \\ &= E\xi^2 - 2(E\xi)^2 + (E\xi)^2 \\ &= E\xi^2 - (E\xi)^2 \end{aligned}$$

2. $D\xi \geqslant 0$, причём $D\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = const$ п.н. (более того, эта константа равна $E\xi$)

3. $D(C\xi + A) = C^2\, D\xi$

4.2.2 Вычисление для нормального распределения.

$\xi \sim \mathbb{N}(a, \sigma^2)$, тогда

$$\mathbb{E}\xi = \int\limits_{\mathbb{R}} x \cdot p_\xi(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{x}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \left| \begin{matrix} t = \frac{x-a}{\sqrt{2\sigma^2}} \iff x = t\sqrt{2\sigma^2} + a \\ dt = d\left(\frac{x-a}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}}dx \\ dx = \sqrt{2\sigma^2}dx \end{matrix} \right| =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{t\sqrt{2\sigma^2}+a}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-t^2\right) dt = \sqrt{\frac{2\sigma^2}{\pi}} \cdot \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}} t\exp\left(-t^2\right) dt}_{=0,\text{ нечётная функция}} + \frac{a}{\sqrt{\pi}} \cdot \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-t^2\right) dt}_{=\sqrt{\pi},\text{ инт. Эйлера-Пуассона}} = a$$

$$\mathbb{D}\xi = \int\limits_{\mathbb{R}} (x-\mathbb{E}x)^2 \cdot p_\xi(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{(x-a)^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \left| \begin{array}{c} t=\frac{x-a}{\sqrt{2\sigma^2}} \iff x = t\sqrt{2\sigma^2}+a \\ dt = d\left(\frac{x-a}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}}dx \\ dx = \sqrt{2\sigma^2}dx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} t^2 \exp\left(-t^2\right) dt = \left| \begin{array}{c} u = e^{-t^2} \\ du = -2te^{-t^2} \end{array} \right| = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} td\left(e^{-t^2}\right) =$$

$$= \left| \begin{array}{c} u=t, du=dt, \\ dv = de^{-t^2}, v=e^{-t^2} \end{array} \right| = -\frac{\sigma^2}{\pi} te^{-t^2}\Big|_{\mathbb{R}} + \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-t^2}dt}_{=\sqrt{\pi}} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi} = \sigma^2$$

4.3 Неравенство Чебышёва и закон больших чисел.

Теорема (Неравенство Маркова). Если $\xi \geqslant 0$ и существует $\mathbb{E}\xi$, то $\forall a > 0 \left(P(\xi \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}\xi}{a}\right)$

Доказательство: $\xi \geqslant a \cdot I(\xi \geqslant a) \Longrightarrow \mathbb{E}\xi \geqslant a \cdot P(\xi \geqslant a)$

Теорема (Неравенство Чебышёва). Если существует $\mathbb{D}\xi$, то $\forall \varepsilon > 0 \left(P\left(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbb{D}\xi}{\varepsilon^2}\right)$.

Доказательство: Применяем неравенство Маркова к $\eta = (\xi - \mathbb{E}\xi)^2$.

Теорема (Закон больших чисел в форме Чебышёва). Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые случайные величины, при этом $\forall i\ \exists C > 0:\ \mathbb{E}\xi_i^2 < \infty, \mathbb{D}\xi_i \leqslant C$, тогда верно, что

$$\forall\ \delta > 0 \forall \varepsilon > 0\ \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^n \xi_i - \mathbb{E}\left(\sum\limits_{i=1}^n \xi_i\right)}{n^{\frac{1}{2}+\delta}}\right| > \varepsilon\right) = 0$$

Доказательство: Применим неравенство Чебышёва:

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^n \xi_i - \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right)\right| > \varepsilon \cdot n^{\frac{1}{2}+\delta}\right) \leqslant \frac{\mathbb{D}\left(\xi_1 + \ldots + \xi_n\right)}{\varepsilon^2 n^{1+2\delta}} = \frac{\mathbb{D}\xi_1 + \ldots + \mathbb{D}\xi_n}{\varepsilon^2 n^{1+2\delta}} \leqslant \frac{nC}{\varepsilon^2 n^{1+2\delta}} = \frac{C}{\varepsilon^2 n^{2\delta}} \to 0$$

■

Следствие. Если в знаменателе поставить не $n^{\frac{1}{2}+\delta}$, а $\sqrt{n} \cdot f(n)$, где $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \infty$, то теорема остается верной

4.4 Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределённых случайных величин с конечной дисперсией.

4.4.1 Характеристическая функция

Определение. Пусть ξ, η — случайные величины, тогда $\mathbb{E}(\xi + i\eta) = \mathbb{E}\xi + i\mathbb{E}\eta$

Определение. Пусть ξ — случайная величина, тогда $\varphi_\xi(x) = \mathbb{E}e^{ix\xi}$, $\varphi_\xi(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — характеристическая функция ξ

Определение. Пусть ξ — случайный вектор, тогда $\varphi_\xi(x) = \mathbb{E}e^{i(\xi, x)}$, $\varphi_\xi(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ — характеристическая функция ξ, где (x, y) — скалярное произведение

Пример:

$\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2) \Longrightarrow \frac{\xi - a}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$$\varphi_{\frac{\xi-a}{\sigma}}(x) = \mathbb{E}e^{i\frac{\xi-a}{\sigma}x} = e^{-\frac{x^2}{2}} \Longrightarrow \varphi_{\frac{\xi}{\sigma}}(x) = e^{ia\frac{x}{\sigma} - \frac{x^2}{2}} \Longrightarrow \varphi_\xi(x) = \varphi_{\frac{\xi}{\sigma}}(\sigma x) = e^{iax - \frac{\sigma^2 x^2}{2}}$$

Теорема (О единственности). Если $\varphi_\xi(x), \varphi_\eta(x)$ — характеристические функции случайных векторов одинаковой размерности и $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\varphi_\xi(x) = \varphi_\eta(x)$, то $\xi = \eta$ по распределению.

Теорема (Критерий независимости). $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы $\Longleftrightarrow \varphi_{(\xi_1, \ldots, \xi_n)}(x_1, \ldots, x_n) = \prod\limits_{j=1}^{n} \varphi_{\xi_j}(x_j)$

4.4.2 Центральная предельная теорема

Теорема (Центральная предельная теорема). Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — н.о.р.с.в. такие, что $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Тогда имеется сходимость по распределению

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathbb{D}S_n}} \xrightarrow{d} \eta \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Доказательство: Пусть $\mathbb{E}\xi = a$, $\mathbb{D}\xi = \sigma^2$. Пусть $\hat{\xi}_j = \frac{\xi_j - a}{\sqrt{\sigma^2}}$.

Тогда заметим, что $\mathbb{E}\hat{\xi} = 0$, $\mathbb{D}\hat{\xi} = 1$, $\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathbb{D}S_n}} = \frac{\hat{S}_n}{\sqrt{n}}$. И при $n \to \infty$ получаем

$$\varphi_{\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathbb{D}S_n}}}(x) = \mathbb{E}e^{i\frac{\hat{S}_n}{\sqrt{n}}x} = \prod_{j=1}^{n} \varphi_{\hat{\xi}_j}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) = \left(\varphi_{\hat{\xi}_1}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \overset{(*)}{=} \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n =$$

$$= e^{n\left(-\left(\frac{x}{\sqrt{2n}}\right)^2\right) + o(1)} = e^{-\frac{x^2}{2} + o(1)} \to e^{-\frac{x^2}{2}} = \varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(x)$$

$(*)$: Считая φ обычной функцией, раскладываем ее в ряд Маклорена: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$, — каждый коэффициент есть n-ый момент, умноженный на i^n.

Тогда по теореме о непрерывности и о единственности получаем требуемое, так как предел характеристической функций совпадет с характеристической функцией стандартного нормального распределения. ■

5 Комплексный анализ (ТФКП)

5.1 Дифференцируемость функций комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Интегральная теорема Коши.

Определение. Пусть $E \subset \overline{\mathbb{C}}$. *Функция комплексного переменного* — отображение из E в $\overline{\mathbb{C}}$.

Определение. Пусть $a, A \in \overline{\mathbb{C}}$, и f определена в $\mathring{B}_{\delta_0}(a)$. Число A называется *пределом функции* f в точке a, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \in (0, \delta_0]\ (f(\mathring{B}_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(A))$$

Обозначение: $\lim\limits_{z \to a} f(z) = A$

Замечание. Всякая функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ представима функцией $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. В связи с этим мы будем использовать запись $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$, где $z = x + iy$.

Замечание. Для пределов функций можно определить арифметические операции.

Определение. Пусть $a \in \mathbb{C}$, f определена в $B_{\delta_0}(a)$, и $f(B_{\delta_0}(a)) \subset \mathbb{C}$. Функция f *непрерывна* в точке a, если $\lim\limits_{z \to a} f(z) = f(a)$.

Утверждение. Пусть $a = b + ic$, $z = x + iy$, $A = B + iC$, и $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$, тогда

$$\lim_{z \to a} f(z) = A \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{(x,y) \to (b,c)} u(x, y) = B \\ \lim\limits_{(x,y) \to (b,c)} v(x, y) = C \end{cases}$$

5.1.1 Дифференцируемость функций комплексного переменного.

Определение. $z \in \mathbb{C}$ — конечное фиксированное число. Пусть f определена в $B_\delta(z)$. Функция f *дифференцируема* в точке z, если существуют такие $A \in \mathbb{C}$ (фиксированное) и $\alpha(\Delta z) : \mathring{B}_\delta(0) \to \mathbb{C}$ что выполняется:

1. $f(z + \Delta z) = f(z) + A \cdot \Delta z + \alpha(\Delta z) \cdot |\Delta z|$, $\forall \Delta z \in B_\delta(0)$,
2. $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \alpha(\Delta z) = 0$.

Замечание. A не зависит от Δz, но может зависеть от z.

Определение. *Производная* функции f в точке a:

$$f'(a) = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

Альтернативное определение. $f(z)$ *дифференцируема* в точке $z \iff$ существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z)$. При существовании предела $f'(z)$ есть *производная* функции f.

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{C}$ — открыто. Тогда $f : E \to \mathbb{C}$ называется *регулярной*, если f комплексно непрерывно дифференцируема в каждой точке $z \in E$.

Замечание. Важно отметить, что на других потоках непрерывность производной не требуется в определении выше, однако для упрощения доказательств мы позволим себе такое допущение.

Определение. Функция $f : E \to \mathbb{C}$ *регулярна в точке*, если у этой точки имеется некоторая окрестность, в которой функция регулярна.

Пример: $f(z) = |z|^2$ — дифференцируема только в точке $z = 0$, не регулярна ни в одной точке.

5.1.2 Условия Коши-Римана.

Теорема. Функция $f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$ дифференцируема в точке $z = x+iy$ тогда и только тогда, когда u и v дифференцируемы в точке (x, y), и в этой же точке выполняются *условия Коши-Римана*:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Доказательство:

- $(\Rightarrow)$ Пусть $A = B + iC$, $\alpha = \beta + i\gamma$. Распишем определение дифференцируемости:

$$[u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y)] - [u(x, y) + iv(x, y)] =$$
$$= (B + iC)(\Delta x + i\Delta y) + (\beta(\Delta x, \Delta y) + i\gamma(\Delta x, \Delta y))\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

  Отделяя вещественную и мнимую часть, получаем:

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y) = u(x, y) + B \cdot \Delta x + (-C) \cdot \Delta y + \beta(\Delta x, \Delta y) \cdot |\Delta z|$$
$$v(x + \Delta x, y + \Delta y) = v(x, y) + C \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \gamma(\Delta x, \Delta y) \cdot |\Delta z|$$

  Отметим, что эти выражения означают дифференцируемость u и v, а также справедливость условий Коши-Римана.

- $(\Leftarrow)$ Достаточно расписать дифференцируемость u и v (положив по условию Коши-Римана $u_x = B$ и $v_y = C$) — так получим последние два равенства. Сложив их и домножив v на i, докажем свойство дифференцируемости функции $f(z)$.

Определение. Область *односвязна*, если ее граница есть связное множество.

5.1.3 Интегральная теорема Коши.

Теорема (из курса мат. анализа). Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — односвязная область, $P, Q \in \mathcal{C}^1(G)$, γ — кусочно-гладкая замкнутая кривая в G, и $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ на G, тогда

$$\int\limits_{\gamma} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$$

Определение. Пусть γ — кусочно-гладкая кривая, f — функция, непрерывная на $M(\gamma)$. *Интеграл II рода* определяется как интеграл Римана для следующих интегральных сумм (здесь $\{(t_k, \xi_k)\}$ — помеченное разбиение области определения γ):

$$\hat{S} = \sum_k f(\gamma(\xi_k)) \cdot (\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}))$$

Можно ввести определение через интегралы компонент: если $f = u + iv$, то

$$I = \int_\gamma (u\,dx - v\,dy) + i \int_\gamma (v\,dx + u\,dy)$$

Если оба интеграла в правой части существуют, то считаем, что и интеграл в левой части существует.

Обозначение: $\int\limits_\gamma f(z)\,dz$

Теорема (Интегральная теорема Коши для односвязной области). Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — односвязная область, f регулярна в G, и γ — кусочно-гладкая замкнутая кривая в G, тогда

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

Доказательство: Пусть $f = u + iv$, тогда интеграл из условия теоремы можно заменить на следующие два интеграла:

$$\int_\gamma u\,dx - v\,dy, \quad \int_\gamma v\,dx + u\,dy$$

Пусть $P_1 = u$, $Q_1 = -v$, $P_2 = v$, $Q_2 = u$; в силу условий Коши-Римана можно применить теорему 1 к парам функций (P_1, Q_1) и (P_2, Q_2).

Замечание. Условие односвязности существенно для обеих теорем:

$$G = \{z \in \mathbb{C} \mid 1/2 < |z| < 2\}$$
$$\gamma(t) = e^{it}$$
$$f(z) = 1/z$$

Интеграл f по γ равен $2\pi i$.

5.2 Интегральная формула Коши. Разложение функции, регулярной в окрестности точки, в ряд Тейлора.

5.2.1 Интегральная формула Коши.

Определение. Область $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ называется *областью с простой границей*, если ∂G является объединением конечного числа попарно непересекающихся простых замкнутых кусочно-гладких кривых, положительно ориентированных относительно G.

Утверждение. Пусть G — область в $\mathbb{C}$, γ — гладкая кривая, $f(z, w)$ определена на $G \times \gamma$ (подразумевается носитель γ), дифференцируема по z при $\forall (z, w) \in G \times \gamma$, $f(z, w), f_z(z, w)$ непрерывны на

$G \times \gamma$. Тогда

$$F(z) = \int\limits_\gamma f(z,w)dw \text{ регулярна в } G, \text{ и } F'(z) = \int\limits_\gamma f_z(z,w)dw.$$

Определение. Пусть γ — кусочно-гладкая кривая, $\varphi : \gamma \to \mathbb{C}$ непрерывна, тогда

$$F(z) = \int\limits_\gamma \frac{\varphi(w)}{w-z}\,dw$$

называются *интегралом (типа) Коши*.

Определение.

$$F_n(z) = \int\limits_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w-z)^n}\,dw$$

Таким образом, $F(z) = F_1(z)$.

Замечание. Из утверждения выше следует регулярность интеграла Коши в точках $z \notin \gamma$:

$$F_1^{(n)} = n!\int\limits_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw$$

Теорема (Интегральная формула Коши). Пусть G — ограниченная односвязная область с простой границей, f регулярна в $\overline{G}$, и $z_0 \in G$, тогда

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

Доказательство: Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Поскольку f непрерывна в z_0, то найдётся такое $\delta > 0$, что $\overline{B_\delta(z_0)} \subset G$ и $f\left(\overline{B_\delta(z_0)}\right) \subset \overline{B_\varepsilon(f(z_0))}$. Пусть γ — положительно ориентированная граница $\overline{B_\delta(z_0)}$, и $D = G \setminus \overline{B_\delta(z_0)}$, тогда $\partial D = \partial G \cup \gamma^{-1}$. Так как D — ограниченная область с простой границей, и $\frac{f(z)}{z-z_0}$ регулярна в $\overline{D}$, то по (второй) интегральной теореме Коши получаем, что

$$\int\limits_{\partial D} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 0$$

Далее,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - f(z_0)\right| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz + \frac{f(z_0)}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz - f(z_0)\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_\gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\cdot\left(2\pi\delta\cdot\max_\gamma\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|\right) \\
&= \delta\cdot\frac{\max\limits_\gamma|f(z)-f(z_0)|}{\delta} \leqslant \varepsilon
\end{aligned}$$

Замечание. Требование односвязности можно убрать.

Теорема (Интегральная формула Коши для производных). Пусть $f(z)$ регулярна в точке z. Тогда $f(z)$ имеет производную любого порядка в точке z.

Доказательство: Пусть z_0 фиксировано, $f(z)$ регулярна в $\overline{B_\delta(z_0)}$, $\gamma = \partial B_\delta(z_0)$ (положительно ориентирована). Тогда по интегральной формуле Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(w)dw}{w-z}, z \in B_\delta(z_0). \tag{1}$$

Правая часть формулы есть интеграл типа Коши. Обозначая ее $F(z)$ в силу указанного в замечании $F(z)$ имеет производную любого порядка в любой точке $z \notin \gamma$, причем $F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} = \int\limits_\gamma \frac{f(w)dw}{(w-z)^{n+1}}$. Но в $B_\delta(z_0)$ в силу (1) имеем $f(z) \equiv F(z) \Rightarrow f(z)$ в $B_\delta(z_0)$ имеет производную любого порядка и

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(w)dw}{(w-z)^{n+1}} \tag{2}$$

(2) — интегральная формула Коши для производных. ■

Замечание. Для любой ограниченной области с простой границей верно

$$f^{(n)} = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{f(w)dw}{(w-z)^{n+1}}, z \in G. \tag{3}$$

5.2.2 Разложение функции, регулярной в окрестности точки, в ряд Тейлора.

Степенные ряды.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

Обозначения:

1. $\mathcal{M}$ — множество точек сходимости ряда (очевидно, оно непусто).
2. Радиус сходимости $R = \sup\limits_{z\in\mathcal{M}} |z-z_0|$

Теорема (Абеля). Пусть ряд сходится в точке $\tilde{z}$, и $r = \tilde{z} - z_0$, тогда:

1. Ряд сходится абсолютно в $B_r(z_0)$
2. Ряд сходится равномерно в $\overline{B_\rho(z_0)} \subset B_r(z_0)$

Доказательство: Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} c_n(|\tilde{z}-z_0|)^n = 0$, то $|c_n(\tilde{z}-z_0)^n| \leqslant M$ для некоторого M, не зависящего от n. Далее, при любом $z \in \overline{B_\rho(z_0)}$ имеем

$$|c_n(z-z_0)^n| = |c_n(\tilde{z}-z_0)^n| \cdot \left|\frac{z-z_0}{\tilde{z}-z_0}\right|^n \leqslant Mq^n$$

...где $q = \frac{\rho}{|\tilde{z}-z_0|} < 1$; следовательно, по признаку Вейерштрасса ряд сходится равномерно на $\overline{B_\rho(z_0)}$ при любом фиксированном $\rho \in [0, r)$. Из признака сравнения получаем, что ряд сходится абсолютно в каждой точке.

Разложение в степенной ряд функций, регулярных в круге

Теорема. Пусть $f(z)$ регулярна в $B_R(z_0)$, тогда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

Доказательство: Зафиксируем $\overline{B_\rho(z_0)} \subset B_R(z_0)$. Пусть $|w-z_0| = \rho$ и $|z-z_0| < \rho$, тогда

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} \tag{4}$$

Поскольку $\left|\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\right| = \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{|z-z_0|}{\rho}\right)^n$, то ряд сходится равномерно. Домножим левую и правую части (4) на $\frac{f(w)}{2\pi i}$, а правую также на $\frac{n!}{n!}$, тогда имеем:

$$\frac{f(w)}{2\pi i(w-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} \frac{f(w)}{2\pi i(w-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n$$

Поскольку $\frac{f(w)}{2\pi i}$ ограничена на γ, то умножение на эту функцию сохраняет равномерную сходимость. Осталось применить интегральную формулу Коши — интегрируем обе части и получаем:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\partial G} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw}_{f^{(n)}(z),(3)} \cdot \frac{(z-z_0)^n}{n!}$$

Так, получаем

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

Замечание. Ряд из теоремы — ряд Тейлора.

5.3 Разложение функции, регулярной в кольце, в ряд Лорана. Изолированные особые точки однозначного характера.

5.3.1 Ряд Лорана

Определение.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n \tag{1}$$

Сходимость ряда в левой части определяется через одновременную сходимость рядов в правой части. Отметим, что с помощью замены $w = \frac{1}{z-z_0}$ первое слагаемое преобразуется к виду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-k} w^k$.

Утверждение. Пусть ряд (1) сходится в (открытом) кольце

$$K = \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z-z_0| < R_2\}$$

...тогда этот ряд сходится равномерно в любом замкнутом подкольце K.

Доказательство: Второе слагаемое в правой части сходится в любой точке K, а значит, по теореме Абеля оно сходится равномерно в любом замкнутом подкруге $B_{R_2}(z_0)$.

Применив замену $w = \frac{1}{z-z_0}$, получаем, что первое слагаемое в правой части сходится в любой точке

$$K' = \{z \in \mathbb{C} \mid 1/R_2 < |w| < 1/R_1\}$$

...а значит, по теореме Абеля оно сходится равномерно в любом замкнутом подкруге K'; перейдя обратно к z, получаем сходимость во внешности любого открытого надкруга $B_{R_1}(z_0)$.

Следствие. Применяя теорему Вейерштрасса, получим следующие результаты:

1. Ряд Лорана сходится в K локально равномерно.
2. Сумма ряда Лорана в K является регулярной в K функцией.
3. $f^{(m)}$ сходится локально равномерно в K.

Теорема. Пусть f регулярна в кольце K, тогда существует единственное разложение этой функции в ряд Лорана:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$$

Доказательство: Зафиксируем $z \in K$, после чего возьмём такие $\rho_1, \rho_2 > 0$, что $R_1 < \rho_1 < |z-z_0| < \rho_2 < R_2$. Рассмотрим область G с простой границей, составленной из окружностей γ_1, γ_2 радиусов ρ_1, ρ_2 с центром z_0. Применим интегральную формулу Коши:

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\, dw + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\, dw$$

Преобразуем первое слагаемое:

$$-\frac{1}{w-z}=\frac{1}{(z-z_0)-(w-z_0)}=\frac{1}{(z-z_0)\left(1-\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(w-z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}}$$

Поскольку $\left|\frac{w-z_0}{z-z_0}\right|=\frac{\rho_1}{|z-z_0|}<1$, то ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса.

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}\,dw &= \int\limits_{\gamma_1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(w)\cdot(w-z_0)^k}{2\pi i\cdot(z-z_0)^{k+1}}\,dw\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}f(w)\cdot(w-z_0)^k\,dw\right)\cdot\frac{1}{(z-z_0)^{k+1}}\\
&=\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\frac{f(w)\,dw}{(w-z_0)^{n+1}}\right)\cdot(z-z_0)^n
\end{aligned}$$

Аналогичное представление для второго слагаемого было получено в предыдущих лекциях.

Из интегральной теоремы Коши для области G следует, что интеграл в условии не зависит от выбора кривой в K.

Покажем единственность разложения: пусть

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\,(z-z_0)^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}d_n\,(z-z_0)^n$$

Эти ряды сходятся равномерно на любой окружности в K с центром в z_0. Зафиксируем $m\in\mathbb{Z}$, после чего домножим оба ряда на $(z-z_0)^m$. Поскольку этот множитель ограничен на любой окружности, то равномерная сходимость сохраняется. Отметим, что интеграл любого слагаемого, кроме, возможно, $(-m-1)$-го, по окружности в K с центром в z_0 равен нулю; интегрируя почленно, получаем, что $2\pi i\cdot c_{-m-1}=2\pi i\cdot d_{-m-1}$. В силу произвольности m получаем единственность. ■

5.3.2 Классификация изолированных особых точек однозначного характера по структуре главной части лорановского разложения.

Определение. Точка $z_0\in\overline{\mathbb{C}}$ называется *изолированной особой точкой (ИОТ)* функции f, если f регулярна в $B'_\varepsilon(z_0)$, но не регулярна или не определена в z_0.

Виды ИОТ:

1. *Устранимая особая точка (УОТ)* (предел в z_0 не равен ∞)
2. *Полюс* (предел в z_0 равен ∞)
3. *Существенно особая точка (СОТ)* (предел в z_0 не существует)

Замечание. Рассмотрим разложение f в ряд Лорана в $B'_\varepsilon(z_0)$, $z_0 \neq \infty$; слагаемые с *отрицательными* номерами называются *главной частью*, а остальные — *правильной частью.*

Теорема. Пусть f регулярна в $B'_\varepsilon(z_0)$, тогда z_0 — УОТ $\Leftrightarrow$ главная часть тождественно равна нулю.

Доказательство:

- ($\Rightarrow$) Из формул для коэффициентов ряда имеем
$$|c_n| \leqslant \frac{\max\limits_{|z-z_0|=\rho} |f(z)|}{\rho^n}$$
Поскольку f ограничена в проколотой окрестности z_0, то найдётся такое $M > 0$, что $|c_n| < \frac{M}{\rho^n}$. Фиксируя $n < 0$ и переходя к пределу при $\rho \to 0$, получаем искомое.

- ($\Rightarrow$) Из теорем Абеля и Вейерштрасса получаем, что ряд Лорана для f сходится к некоторой функции, регулярной в $B_\varepsilon(z_0)$ и совпадающей с f в $B'_\varepsilon(z_0)$.

Замечание.

1. Если f регулярна и ограничена в $B'_\varepsilon(z_0)$, то z_0 — УОТ.
2. Если f регулярна в $B'_\varepsilon(z_0)$ и непрерывна в $B_\varepsilon(z_0)$, то она регулярна в $B_\varepsilon(z_0)$.

Теорема. Пусть f регулярна в $B'_\varepsilon(z_0)$, тогда z_0 — полюс $\Leftrightarrow$ главная часть состоит из конечного непустого множества ненулевых слагаемых.

Доказательство:

- ($\Rightarrow$) Возьмём $B'_{R_1}(z_0)$, в которой f всюду отлична от нуля; заметим, что $g = 1/f$ всюду отлична от нуля в $B'_{R_1}(z_0)$, и $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = 0$. Отсюда следует, что z_0 — УОТ g, а значит, z_0 является нулём конечного порядка g. Таким образом, $g(z) = (z - z_0)^m h(z)$, и $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m \cdot h(z)}$, где h регулярна в $B_{R_1}(z_0)$, и $h(z_0) \neq 0$.

- ($\Leftarrow$) Поскольку $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$, где g регулярна в $B_{R_1}(z_0)$, и $g(z_0) \neq 0$, то $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

Определение. z_0 — *полюс порядка* m, если $c_m \neq 0$, и $c_k = 0$ при $k < -m$.

Следствие. z_0 — СОТ $\Leftrightarrow$ главная часть состоит из бесконечного множества ненулевых слагаемых.

Утверждение.
$z = \infty$ — УОТ/полюс/СОТ функции $f(z) \Leftrightarrow w = 0$ — УОТ/полюс/СОТ (ИОТ того же типа) функции $f(1/w)$.

Доказательство: Отображение $\varphi(z) = 1/z$ взаимно-однозначно переводит $B'_\varepsilon(0)$ в $B'_{1/\varepsilon}(\infty)$, и $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = \lim\limits_{w \to 0} f(1/w)$.

Замечание. Если f регулярна в $B'_\varepsilon(\infty)$, то существует единственное разложение f в ряд Лорана в этой окрестности. Слагаемые с *положительными* номерами называются *главной частью*, а остальные — *правильной частью*.

Замечание. Критерии ИОТ и порядок полюса определяются аналогично.

Утверждение. Пусть $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ — СОТ f, $g \not\equiv 0$, и z_0 не является СОТ g, тогда z_0 — СОТ $f \cdot g$.

Доказательство: Отметим, что $g(z) = (z - z_0)^m h(z)$, где h регулярна в $B_\varepsilon(z_0)$, и $h(z_0) \neq 0$. Отсюда следует, что z_0 — СОТ $f \cdot h$. Дважды применяя критерий СОТ, получаем искомое.

5.4 Вычеты. Вычисление интегралов по замкнутому контуру при помощи вычетов.

5.4.1 Понятие вычета. Вычисление вычетов.

Определение. Пусть $z_0 \neq \infty$ — ИОТ или точка регулярности f. Коэффициент c_{-1} ряда Лорана для f в $B'_\varepsilon(z_0)$ называется *вычетом* функции f в точке z_0.

Обозначение: $\operatorname*{res}\limits_{z=z_0} f(z)$.

Необходимое и достаточное условие существования вычета: для точки z_0 существует некоторая проколотая окрестность, в которой функция $f(z)$ регулярна)

Замечание. Если z_0 — УОТ или точка регулярности f, то $\operatorname*{res}\limits_{z=z_0} f(z) = 0$.

Определение. $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}$.

Утверждение. Пусть $z = \infty$ — ИОТ f, тогда

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \operatorname*{res}_{w=0} \left(-\frac{1}{w^2} \cdot f\left(\frac{1}{w}\right)\right)$$

Доказательство: Пусть $f = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ в $B'_\varepsilon(\infty)$, тогда в $B'_{1/\varepsilon}(0)$ выполняется следующее равенство:

$$-\frac{1}{w^2} \cdot f\left(\frac{1}{w}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-c_n) \cdot w^{-(n+2)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(-c_{-(k+2)}\right) \cdot w^k$$

Отсюда следует искомое равенство.

Вычисление вычета в полюсе. Пусть z_0 — полюс порядка m функции f, тогда $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$, где $g(z)$ регулярна в $B_\varepsilon(z_0)$, и $g(z_0) \neq 0$. Используя разложение f в ряд Лорана, получаем, что

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

Попробуем избежать использования g.

Утверждение. Пусть z_0 — полюс порядка не более m функции f, тогда

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lim_{z\to z_0} \left(f(z)\cdot(z-z_0)^m\right)^{(m-1)}$$

Утверждение. Пусть $g(z)$, $h(z)$ регулярны в z_0, $h(z_0)=0$, и $h'(z_0)\neq 0$, тогда

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

5.4.2 Теорема Коши о вычетах

Теорема. Пусть $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область с простой границей, и f регулярна в $\overline{G}$ за исключением конечного числа особых точек $z_1,\ldots,z_n$, лежащих в G, тогда

$$\int\limits_{\partial G} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)$$

Доказательство:

1. Пусть $\infty \notin G$, тогда ∂G состоит из внешней граничной кривой Γ_0 и внутренних кривых $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_m$ (если таковые имеются). Обозначим окружности вида $|z-z_k|=\rho_k$ как γ_k (обход по часовой стрелке), где числа $\rho_1,\ldots,\rho_n$ выбраны таким образом, что каждая окружность лежит в пересечении внешностей остальных окружностей и внешностей $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_m$.

   Рассмотрим область D с простой границей, составленной из ∂G и $\gamma_1,\ldots,\gamma_m$; по интегральной теореме Коши $\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz = 0$. В то же время

$$\begin{aligned}\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz &= \int\limits_{\partial G} f(z)\,dz + \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\gamma_k} f(z)\,dz \\ &= \int\limits_{\partial G} f(z)\,dz - 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)\end{aligned}$$

   Отсюда следует искомое равенство.

2. Пусть $z_n=\infty\in G$, тогда ∂G состоит из граничных кривых $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_m$. Выберем такое $R>0$, что $z_1,\ldots,z_{n-1}$ и $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_n$ лежат в круге $D=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<R\}$; пусть C_R — граница этого круга (обход против часовой стрелки). Применим выше доказанный результат к D:

$$\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)$$

   В то же время

$$\begin{aligned}\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz &= \int\limits_{\partial G} f(z)\,dz + \int\limits_{C_R} f(z)\,dz \\ &= \int\limits_{\partial G} f(z)\,dz - 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)\end{aligned}$$

   Отсюда следует искомое равенство.

Следствие. Пусть f имеет в $\overline{\mathbb{C}}$ конечное число особых точек $z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n = \infty$, тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = 0$$

Доказательство: Пусть $R > \max\limits_{1 \leqslant k < n} |z_k|$, $C_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$, G — ограниченная область с границей C_R, G_1 — неограниченная область с границей C_R^{-1} (обход в противоположную сторону). Применим теорему о вычетах к обеим областям, после чего сложим полученные равенства.

5.4.3 Вычисление вычетов

Как вычислять вычеты?

- Через ряд Лорана. Если точка конечна, то вычет в ней равен c_{-1}, а если в бесконечности, то $-c_{-1}$. Оба коэффициента при $\frac{1}{z}$!
- Полюсы в конечной точке.
  - Полюс первого порядка. Вычет равен $\lim\limits_{z \to a} ((z-a)f(z))$. Пусть $f(z) = \frac{h(z)}{\varphi(z)}$, h, φ регулярны в точке a, при этом $\varphi(a) = 0$, $\varphi'(a) \neq 0$. Тогда вычет равен $\frac{h(a)}{\varphi'(a)}$.
  - Полюс порядка $m > 1$. Тогда вычет в ней равен $\frac{1}{(m-1)!} \lim\limits_{z \to a} ((z-a)^m f(z))^{(m-1)}$
- Полюсы в бесконечности.
  - f регулярна в ∞, тогда вычет равен $\lim\limits_{z \to \infty} (z(f(\infty) - f(z)))$.
  - $z = \infty$ — нуль порядка k, и $f \sim \frac{A}{z^k}$, тогда если $k = 1$, то вычет равен $-A$, а иначе — 0.
  - $f(z) = \varphi\left(\frac{1}{z}\right)$, φ регулярна в нуле, тогда вычет равен $-\varphi'(0)$.

6 Материалы

1. Вопросы госэкзамена по математике

2. Текущий статус