

Механика деформируемой структуры

(20 баллов)

В этой задаче мы исследуем деформируемую структуру в поле тяжести. Структуру можно считать физическим маятником, у которого только одна степень свободы (т.е. **существует только один способ деформировать его**, и его положение полностью определяется углом α). Джеймс Максвелл исследовал подобные структуры в XIX веке, а недавно было открыто их необычное поведение.

На рисунке 1 показаны N^2 одинаковых **равносторонних** треугольных пластинок (красные треугольники), которые шарнирно соединены друг с другом одинаковыми стержнями. Таким образом, система представляет собой решетку размером $N \times N$ ($N > 1$). Шарниры в вершинах треугольников обозначены маленькими кружками. **Длина стороны треугольника равна длине стержня и равна l .**

Пунктирными линиями обозначены четыре трубки. **Вдоль каждой из трубок могут скользить N вершин (серые кружки), т.е. трубку можно рассматривать, как направляющий стержень.** Четыре трубки шарнирно соединены в ромб так, что его углы зафиксированы: два из них 60° , а два других — 120° (см. Рис. 1).

Все пластинки однородны, и масса каждой из них равна M . Остальные части системы невесомы. Положение системы однозначно определяется углом α , где $0^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ$. На рисунке 1 приведены примеры положений для различных углов α .

Система расположена вертикально (как занавес), а верхняя трубка может двигаться только в горизонтальном направлении.

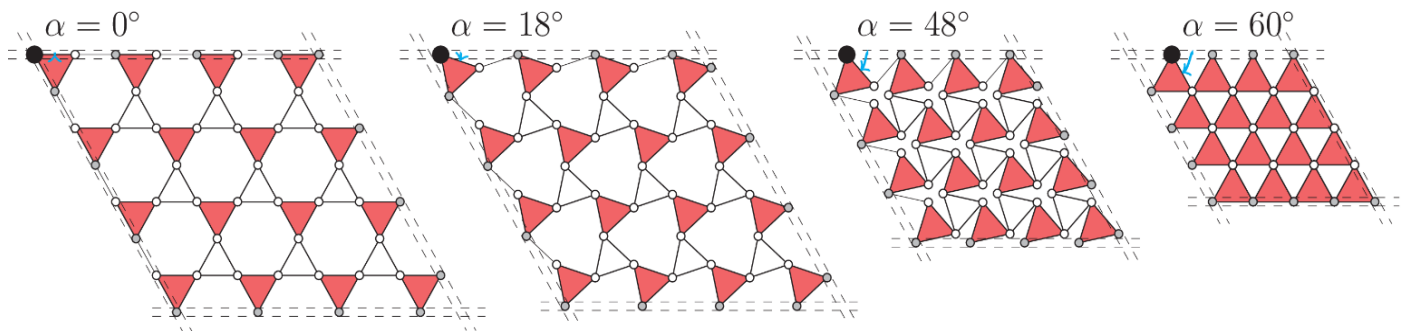


Рис. 1

Система координат приведена на рисунке 2. Нулевой уровень потенциальной энергии выбран при $y = 0$. Треугольная пластинка обозначается парой индексов (m, n) , где $m, n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, что задает их нумерацию в направлениях x и y соответственно. $A(m, n)$, $B(m, n)$ и $C(m, n)$ обозначают положения трех вершин треугольника (m, n) . Верхняя левая вершина $A(0, 0)$ неподвижна.

Движение системы происходит только в плоскости xu . Момент инерции однородной равносторонней треугольной пластинки относительно ее центра масс равен $I = Ml^2/12$. Ускорение свободного падения — g .

Для кинетической и потенциальной энергии используйте обозначения E_k и E_p соответственно.

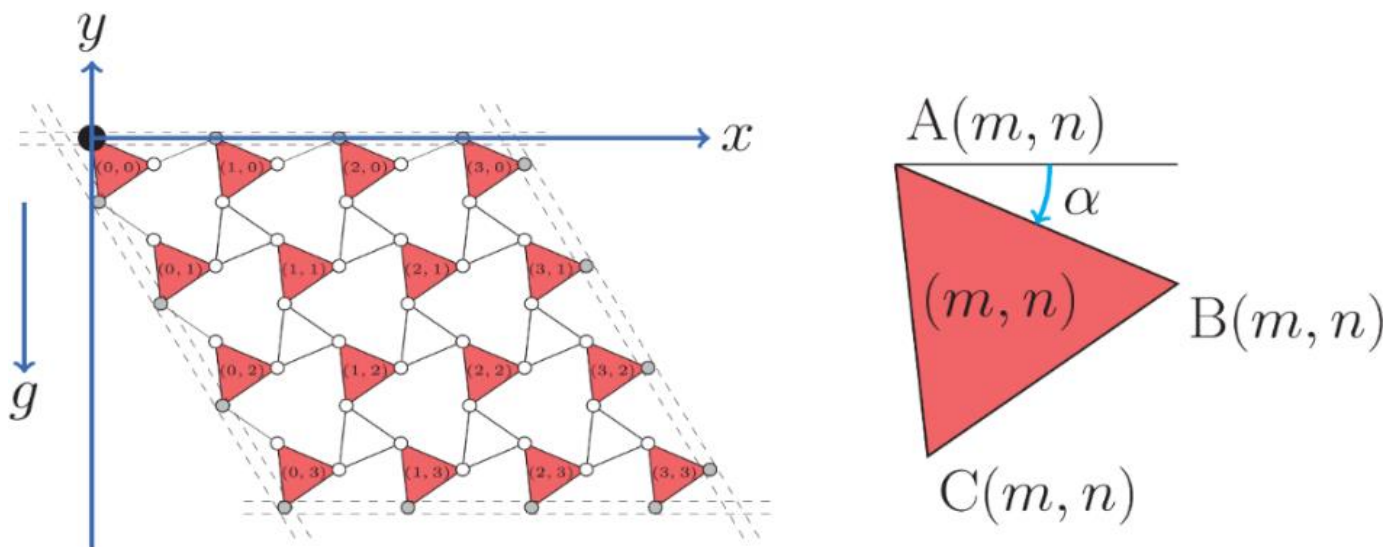


Рис. 2

Часть А

Рассмотрите случай $N = 2$ (см. Рис. 3).

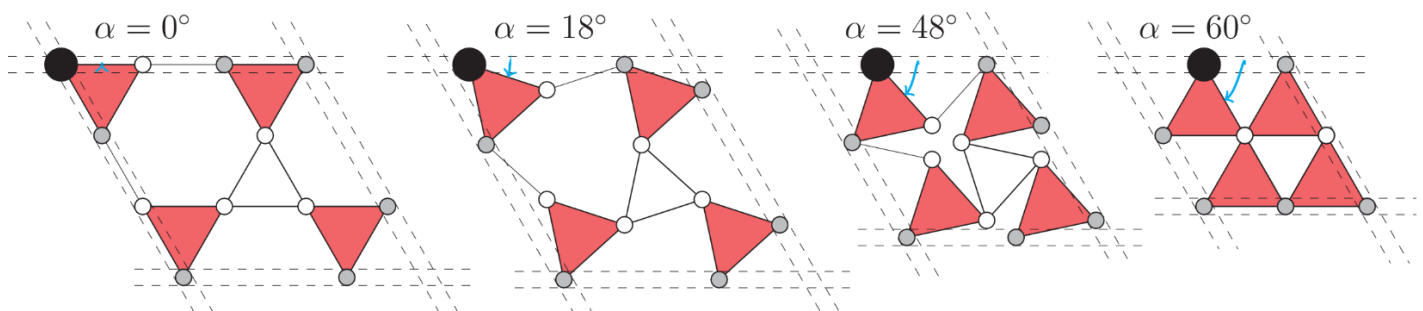


Рис. 3

A1	Чему равна потенциальная энергия системы E_p для произвольного угла α при $N = 2$?	2 б.
A2	Чему равен угол α_E , при котором система находится в равновесии в поле тяжести (при $N = 2$)?	1 б.
A3	Система может совершать малые гармонические колебания вблизи положения равновесия. Рассчитайте кинетическую энергию этой системы. Рассчитайте частоту малых колебаний f_E при $N = 2$.	5 б.

Часть В

Рассмотрите систему при произвольном N .

B1	Чему равен угол α'_E , при котором система находится в равновесии в поле тяжести (при произвольном N)?	3 б.
B2	Рассмотрите случай $N \rightarrow \infty$. При небольшом изменении угла α изменение потенциальной энергии системы может быть представлено как $\Delta E_p \propto N^{\gamma_1}$, кинетическая энергия системы — $E_k \propto N^{\gamma_2}$ и частота малых колебаний — $f'_E \propto N^{\gamma_3}$. Найдите значения γ_1, γ_2 и γ_3 .	3 б.

Часть С

Систему удерживают в положении с $\alpha_m = 60^\circ$. Для этого на одну из $3N^2$ вершин действуют некоторой силой.

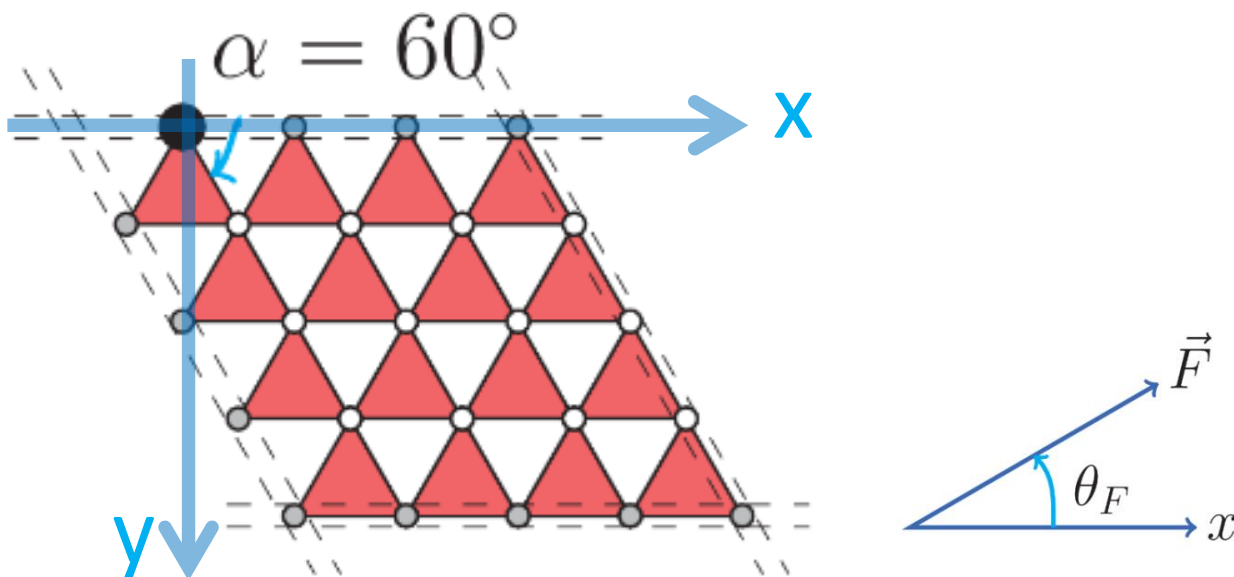


Рис. 4

C1	Какую вершину нужно выбрать, чтобы эта сила была минимальной?	1 б.
C2	Чему равен модуль этой минимальной силы, и каково ее направление? Укажите это направление с помощью угла θ_F , который определен так, как показано на рисунке 4.	5 б.

Вихри в сверхтекучей жидкости

Введение

Сверхтекучесть - это свойство жидкости течь без трения. Повседневный опыт говорит нам, что при движении обычной жидкости (например, воды при комнатной температуре) всегда возникает вязкое трение, приводящее к диссипации энергии так, что поток постепенно замедляется, если он не поддерживается внешними силами. Напротив, сверхтекучая жидкость не теряет кинетической энергии: однажды возбужденное движение сверхтекучей жидкости может продолжаться бесконечно долго. Сверхтекучесть была первоначально экспериментально обнаружена в жидком гелии.

Мы будем рассматривать свойства сверхтекучего гелия при нулевой температуре. Будем считать, что это несжимаемая жидкость с плотностью ρ , которая обладает свойством непрерывности (масса втекающая в заданный бесконечно малый объем, и вытекающая из него, одинакова). Это позволяет утверждать, что поток вектора скорости гелия \vec{v} через любую замкнутую поверхность всегда равен нулю. Отсюда можно сделать вывод, что скорость сверхтекучей жидкости аналогична индукции магнитного поля. Аналогично линиям индукции магнитного поля, "линии тока" в каждой своей точке направлены по касательной к скорости и их плотность пропорциональна величине скорости.

Истинное сверхтекучее движение является безвихревым, т.е. циркуляция вектора скорости \vec{v} по любому замкнутому контуру внутри гелия равна нулю

$$\int_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (1)$$

Однако это выражение необходимо изменить, если сверхтекучесть отсутствует вдоль тонкой "вихревой нити" или "вихря". Толщина нити имеет приблизительно атомарные размеры a , вокруг нее создаются потоки жидкости на больших расстояниях (дальняя зона). Циркуляция вектора скорости вокруг такой нити равна кванту циркуляции. ¹

$$\left| \int_L \vec{v} \cdot d\vec{l} \right| = 2\pi\kappa, \quad (2)$$

и равна нулю если контур не охватывает ни одну вихревую нить (см. рис. 1). Это подтверждает аналогию между полем векторов скоростей сверхтекучей жидкости и магнитным полем, создаваемым проводами с током: для полей векторов скоростей выполняется принцип суперпозиции (сумма двух полей скоростей также дает поле скоростей), и скорость в любой точке равна (с точностью до размерного коэффициента) индукции магнитного поля, создаваемого электрическими токами, текущими через систему проводов, соответствующих вихревым нитям.

¹Такое квантование является макроскопическим квантовым эффектом и соответствует квантованию момента импульса в модели Бора. Квант циркуляции скорости может быть записан как $\kappa = \hbar/m_{\text{He}}$, где m_{He} масса атома гелия.

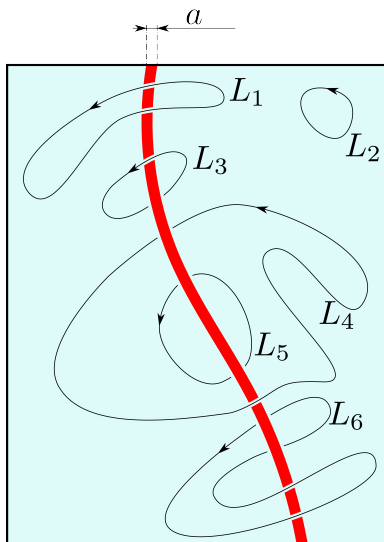


Fig. 1: Вихревая нить (красная линия) в сверхтекучей жидкости (светло голубой фон). Значение циркуляции вектора скорости вдоль траекторий L_1 , L_2 , L_5 и L_6 равно нулю, циркуляция вдоль L_3 и L_4 равна $\pm 2\pi\kappa$. Важно отметить, что циркуляции вектора скорости вдоль траекторий L_3 и L_4 имеют разные знаки.

Задание А. Покоящийся вихрь (0.75 балла).

Рассмотрим цилиндрический сосуд (радиусом $R_0 \gg a$) со сверхтекучим гелием и прямой вертикальной вихревой нитью в ее центре (рис. 2).

A.1 Нарисуйте линии тока. Найдите скорость v в точке с радиус-вектором \vec{r} . 0.25pt

A.2 Найдите форму свободной поверхности, которая образуется вокруг вихревой нити, т.е. зависимость высоты от расстояния до оси $z(\vec{r})$. Ускорение свободного падения g . Поверхностным натяжением можно пренебречь. 0.5pt

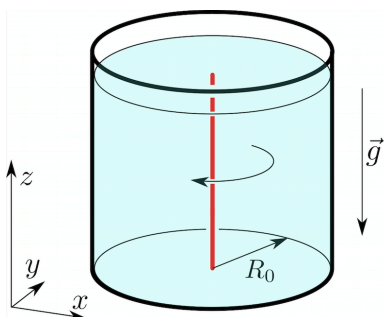
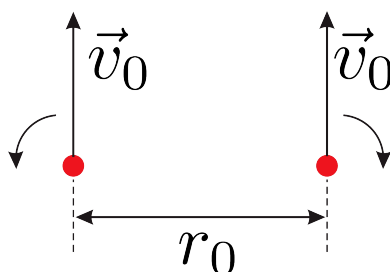


Рис. 2. Вихревая нить вдоль оси цилиндрического сосуда.

Задание В. Движущиеся вихри (1.4 балла).

Свободные вихри движутся в пространстве вместе с потоком². Другими словами, каждый элемент вихревой нити движется со скоростью \vec{v} , равной скорости жидкости, которая должна была быть на месте этого элемента.

Для примера, рассмотрим два вихря, вращающихся противоположно друг другу и расположенных на некотором заданном начальном расстоянии r_0 друг от друга (см. рис. 3). Каждый вихрь создает движение жидкости со скоростью $v_0 = \kappa/r_0$ в точке, в которой располагается ось другого вихря. В результате, эти два вихря движутся прямолинейно и с постоянной скоростью $v_0 = \kappa/r_0$, поэтому расстояние между ними не изменяется.



Параллельно движущиеся вихри с противоположной циркуляцией.

- | | | |
|------------|---|--------|
| В.1 | Рассмотрим два одинаковых вихря, которые вначале расположены на расстоянии r_0 друг от друга, как показано на рис. 4. Найдите начальные скорости вихрей и изобразите их траектории. | 0.25pt |
|------------|---|--------|

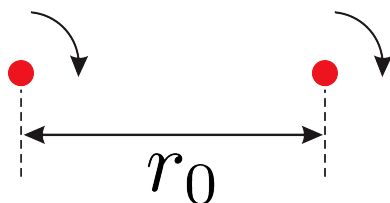


Рис. 4. Две параллельные вихревые нити с одинаковыми циркуляциями.

Цилиндрическая емкость с гелием (см. Задание А), заполнена треугольной решеткой ($u \ll R_0$) из одинаковых вертикальных вихревых нитей (см. рис. 5).

²Это является следствием закона сохранения импульса, см. следующий раздел

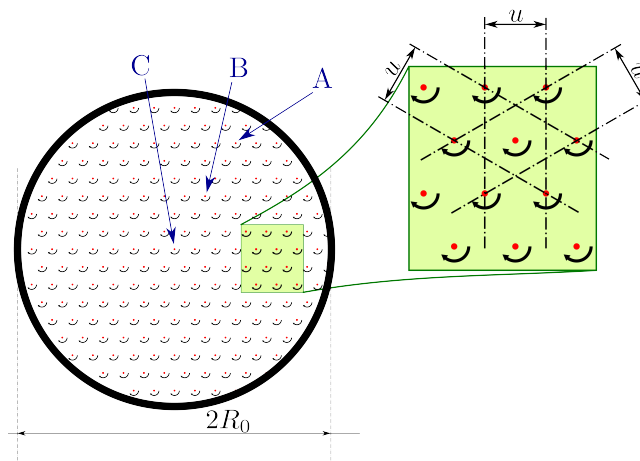


Рис. 5: Треугольная решетка вихрей в цилиндрическом сосуде. Вид сверху.

B.2	Нарисуйте траектории вихрей A, B и C (расположенного в центре).	0.15pt
B.3	Найдите скорость $v(\vec{r})$ вихря расположенного в точке с радиус-вектором \vec{r} .	0.4pt
B.4	Найдите зависимость расстояния $AB(t)$ между вихрями A и B от времени t . Считайте $AB(0)$ в начальный момент времени заданным.	0.35pt
B.5	Найдите сглаженную форму свободной поверхности гелия $z(\vec{r})$, не учитывая решетчатую структуру	0.25pt

Задание С. Импульс и энергия.

Поле скоростей в дальней зоне, т.е. расположенных на расстоянии намного большем, чем размер вихря дает основной вклад в энергию системы вихрей. Поэтому она нечувствительна к точной структуре вихревых нитей. Сама вихревая нить не может быть правильно описана макроскопической теорией, поэтому мы считаем, что возникающие сингулярности (бесконечности) несущественны. В действительности, величиной энергии внутри тонкой трубки с радиусом a вокруг вихревой нити можно пренебречь. Вне этой трубки плотность кинетической энергии сверхтекучей жидкости $\rho v^2/2$ (где $\rho = \text{const}$) подобна плотности энергии магнитного поля $B^2/(2\mu_0)$ — они обе квадратичны по соответствующим переменным. Эта аналогия вместе с соответствием между магнитным полем и скоростью сверхтекучей жидкости, а также вихревыми нитями и токами, облегчает расчет кинетической энергии для заданной системы. Например, для случая круговой проводочной петли с током радиусом R с радиусом провода a величина индуктивности $L \approx \mu_0 R \log(R/a)$, отсюда мы получаем энергию сверхтекучей вихревой петли (вихревого кольца)³

$$U \approx 2R\rho\pi^2\kappa^2 \log(R/a) \quad (3)$$

Полный импульс жидкости также определяется распределением скоростей в дальней зоне. Он получается интегрированием плотности импульса $\rho\vec{v}$. Снова рассмотрим поток, созданный вихре-

³Это выражение также справедливо, только если $\log R/a \gg 1$.

вым кольцом, расположенной в плоскости xy . Из соображений симметрии очевидно, что полный импульс имеет компоненту отличную от нуля только вдоль оси z :

$$P = \int \rho v_z dV = \rho \iint \underbrace{\left(\int v_z dz \right)}_{q(x,y)} dx dy \quad (4)$$

Внутреннее интегрирование это интегрирование вдоль линий направленных параллельно оси z (см. Рис. 6). Из тождества (2) следует, что внутренний интеграл

$$q(x, y) = \int_{L(x,y)} \vec{v} \cdot d\vec{l} \quad (5)$$

может принимать только два значения, а именно ноль - для линий проходящих вне кольца и $2\pi\kappa$ для линий проходящих внутри кольца. Поэтому полный импульс равен

$$P = \rho \cdot \pi R^2 \cdot 2\pi\kappa = 2\pi^2 \rho R^2 \kappa \quad (6)$$

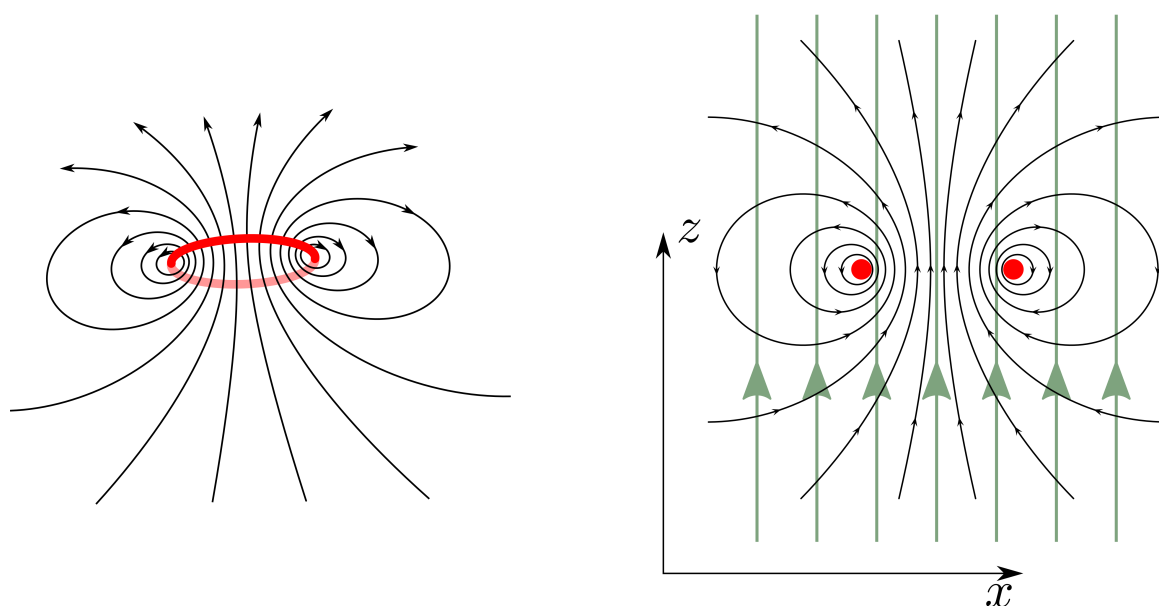


Рис. 6: Поле скоростей для вихревого кольца и линии интегрирования (обозначены зеленым цветом) для вычисления $q(x, y)$.

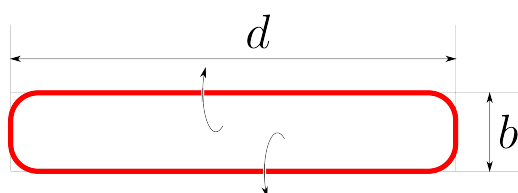


Fig. 7: Вихревая петля в форме близкой к прямоугольной, $b \ll d$.



C.1 Рассмотрим вихревую петлю в форме близкой к прямоугольнику с размерами $b \times d$, $b \ll d$, Рис. 7. Укажите направление ее полного импульса \vec{P} . Найдите величину полного импульса. 0.3pt

C.2 Найдите энергию этой петли U . 0.7pt

C.3 Предположим, что мы сдвинули длинную прямую вихревую нить на расстояние b в направлении оси x , см. Рис.8. Насколько изменился полный импульс жидкости? Укажите направление изменения полного импульса жидкости. Длина нити (ограниченная стенками сосуда) равна d . 0.75pt

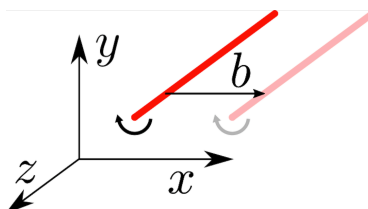


Рис. 8: Импульс изменяется всегда, когда вихрь смещается относительно жидкости.

Задание D. Захваченные заряды (2.85 балла)

Если электроны поместить в гелий, то они будут "захвачены" в вихревую нить. Здесь и далее пренебрегаем диэлектрической проницаемостью гелия ($\epsilon = 1$).

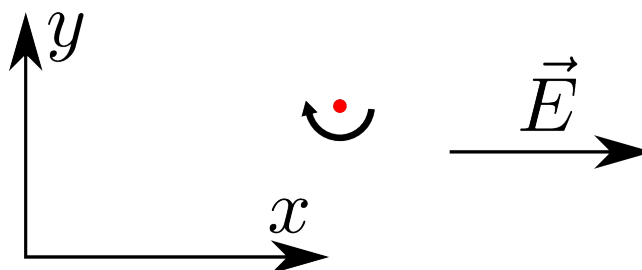


Fig. 9: Прямая вихревая нить в однородном электрическом поле.

D.1 Рассмотрим прямую вихревую нить, заряженную с постоянной линейной плотностью $\lambda < 0$ и помещенную в однородное электрическое поле \vec{E} . Изобразите траекторию движения нити. Найдите зависимость ее скорости от времени. 0.5pt

Вихревое кольцо радиуса R_0 , первоначально с однородно распределенным зарядом с линейной плотностью $\lambda < 0$ помещена в однородное электрическое поле \vec{E} перпендикулярное к ее плоскости и направленное противоположно вектору полного импульса \vec{P}_0 .

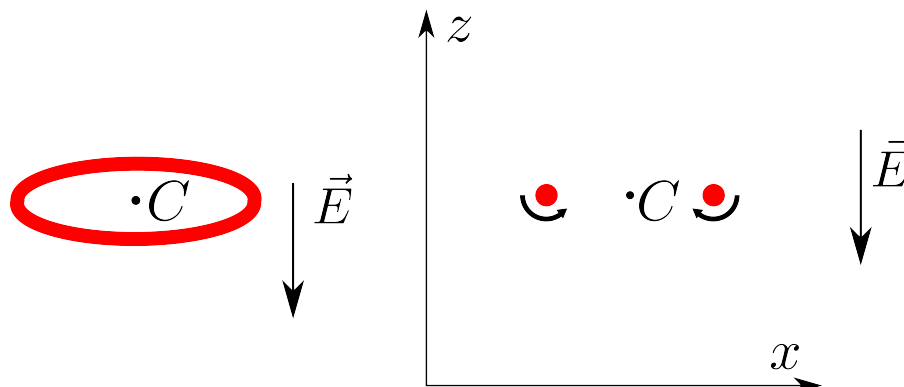


Рис. 10: (слева) Вихревое кольцо в однородном электрическом поле. (справа) Поперечное сечение кольца.

D.2 Нарисуйте траекторию движения центра вихревого кольца C . Найдите зависимость радиуса кольца от времени. 0.6pt

D.3 Найдите зависимость скорости центра кольца $v(t)$ от времени. 1.5pt

D.4 В некоторый момент времени t^* , когда скорость достигает значения $v^* = v(t^*)$, электрическое поле выключают. Найдите скорость $v(t)$ вихревого кольца в моменты времени $t > t^*$. 0.25pt

Задание Е. Влияние границ (3.25 балла)

Твердые стенки изменяют поле скоростей, создаваемое вихревой нитью, потому что жидкость не может протекать сквозь них. Математически это означает, что составляющая скорости, направленная перпендикулярно к стенке, обращается в ноль на ее поверхности.

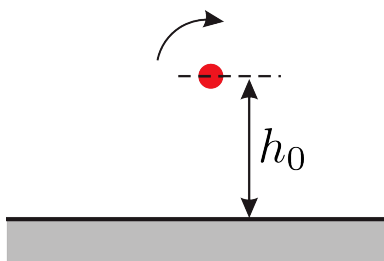


Рис. 11: Прямолинейная вихревая нить возле плоской стены.

E.1 Нарисуйте траекторию прямолинейного вихря, первоначально расположенного на расстоянии h_0 от плоской стены. Найдите зависимость скорости от времени. 0.5pt

Рассмотрим прямолинейный вихрь расположенный в углу на расстоянии h_0 от обеих плоских стенок.

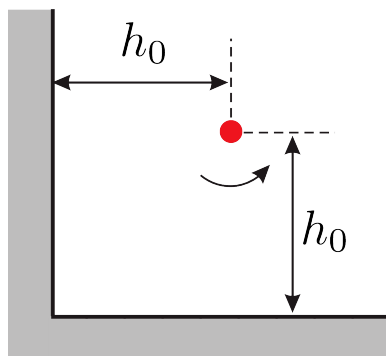


Рис. 12: Прямолинейная вихревая нить в углу.

E.2	Чему равна начальная скорость v_0 вихря?	0.75pt
E.3	Изобразите траекторию вихря.	0.5pt
E.4	Чему равна скорость вихря v_∞ спустя очень большой промежуток времени?	1.5pt

PROBLEM

Problem 3



Задача Т3. Образование протозвезды (9 баллов)

Рассмотрим следующую модель формирования звезды. Сферическое облако разреженного межзвёздного газа, находящееся изначально в состоянии покоя, начинает сжиматься из-за своей собственной гравитации. Начальный радиус облака равен r_0 , масса — m . Температура окружающей среды, гораздо более разреженной, чем газ, а также начальная температура газа однородна и равна T_0 . Газ считайте идеальным. Средняя молярная масса газа равна μ , а его показатель адиабаты $\gamma > \frac{4}{3}$. Предполагайте, что $G \frac{m\mu}{r_0} \gg RT_0$, где R — универсальная газовая постоянная, а G — гравитационная постоянная.

i. (0.8 б.) На протяжении большей части сжатия газ настолько прозрачен, что всё возникающее в нём тепло немедленно теряется через излучение. Во сколько раз (n) увеличится давление, если радиус уменьшится вдвое ($r_1 = 0.5r_0$)? Предполагайте, что плотность газа остаётся однородной.

ii. (1 б.) Оцените (приблизительно) время t_2 , за которое радиус облака уменьшится с r_0 до $r_2 = 0.95r_0$. Изменением гравитационного поля вдоль траектории частиц пренебрегите.

iii. (2.5 б.) Предполагая, что давление газа в облаке остаётся пренебрежимо мало, найдите время $t_{r \rightarrow 0}$, за которое облако сожмётся с радиуса r_0 до гораздо меньшего размера, используя законы Кеплера для эллиптических орбит.

iv. (1.7 б.) При определённом радиусе $r_3 \ll r_0$ газ станет достаточно плотным для того, чтобы быть непрозрачным для тепловой радиации. Определите количество теплоты Q , излучённое при сжатии с радиуса r_0 до r_3 .

v. (1 б.) Для радиусов меньше, чем r_3 , тепловым излучением можно пренебречь. Определите, как температура T облака зависит от его радиуса $r < r_3$.

vi. (2 б.) Через какое-то время пренебрегать влиянием давления на динамику газа больше нельзя, и сжатие прекращается при радиусе $r = r_4$ (где $r_4 \ll r_3$). Однако тепловым излучением все ещё можно пренебречь, а температура недостаточно высока, чтобы спровоцировать термоядерную реакцию. Давление в такой протозвезде больше не однородно, однако грубые оценки с неточными численными коэффициентами все ещё могут быть сделаны. Оцените конечный радиус r_4 и соответствующую температуру T_4 .