Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

VI СЕМЕСТР

Лектор: *Шабанов Дмитрий Александрович*

h\nu

КОНСПЕКТ НЕ ЗАКОНЧЕН
ОБ ОШИБКАХ СООБЩАТЬ СЮДА

Автор: *Хаймоненко Виктор*

Проект на Github

весна 2022

Содержание

1 Основные определения

Определение 1.1. Пусть T – произвольное множество. Тогда набор случайных величин $X = (X_t,\, t \in T)$, заданных на одном вероятностном пространстве $(\Omega,\, \mathcal{F},\, P)$, называеется *случайной функцией* на T.

Замечание. Формально не требуется, чтобы все X_t принимали значения в одном пространстве.

Замечание. Множество T чаще всего интерпретируется как "время".

Замечание. На X можно смотреть как на функцию двух переменных, то есть $X = X(t,\, \omega)$, $\omega \in \Omega$.

Определение 1.2. *Траекторией* (*реализацией*) случайной функции $X = (X_t,\, t \in T)$ называется функция на T вида $\tilde{X}_{\omega_0}(t) = X_t(\omega_0)$, $\omega_0 \in \Omega$, $t \in T$.

Определение 1.3. Если $T \subseteq \mathbb{R}$, то случайная функция на T называется *случайным процессом.*

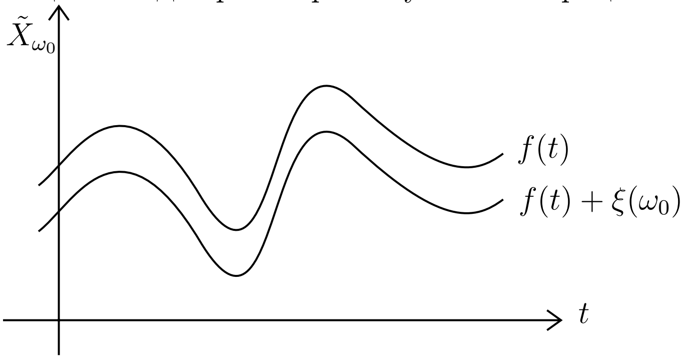
Определение 1.4. Если T – интервал, полуинтервал, отрезок или луч в $\mathbb{R}$, то случайный процесс называется процессом *с непрерывным временем.*

Определение 1.5. Если $T \subset \mathbb{N}$ $(\mathbb{Z})$, то случайный процесс называется процессом *с дискретным временем.*

Определение 1.6. Если $T \subset \mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$, то случайный процесс называется *случайным полем.*

Замечание. Всюду далее будет использоваться термин "случайный процесс".

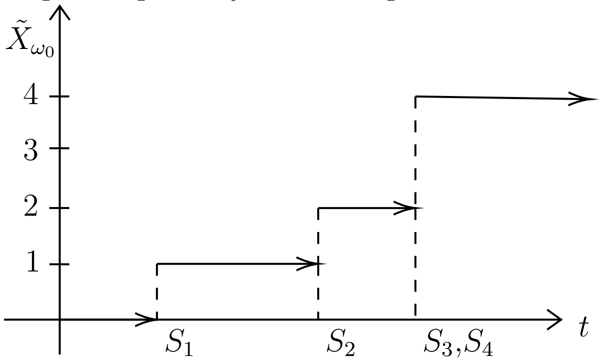
Пример. Пусть $X = X(t,\, \omega) = f(t) + \xi(\omega)$, где ξ – случайная величина, а f – неслучайная функция. Тогда траектория случайного процесса имеет вид



Пример. Пусть $\{\xi_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ – независимые случайные векторы из $\mathbb{R}^m$. Обозначим $S_0 = 0$, $S_n = \xi_1 + \ \ldots\ + \xi_n$, $n \geqslant 1$. Случайный процесс $\{S_n,\, n \in \mathbb{Z}_+\}$ является процессом с дискретным временем и называется *случайным блужданием.*

Пример. Пусть $\{\xi_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ – невырожденные независимые одинаково распределенные случайные величины, причем $\xi_n \geqslant 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Определим $S_0 = 0$, $S_n = \xi_1 + \ \ldots\ + \xi_n$. Тогда случайный процесс $X = (X_t,\, t \geqslant 0)$, где $X_0 = 0$, $X_t = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}}\{n :\ S_n \leqslant t\}$, $t \neq 0$

называется *процессом восстановления*, построенным по случайным величинам $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Траектория случайного процесса имеет вид



Утверждение 1.1. *Процесс восстановления конечен почти наверное.*

Доказательство. Пусть $E\xi_i = a < \infty$. Зафиксируем t и рассмотрим событие $\{X_t = +\infty\}$:

$$\{X_t = +\infty\} = \{\forall n:\ S_n \leqslant t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{S_n \leqslant t\}.$$

Заметим, что $\{S_{n+1} \leqslant t\} \subset \{S_n \leqslant t\}$, то в силу непрерывности меры

$$P(X_t = +\infty) = \lim_{n\to\infty} P(S_n \leqslant t) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n}{n} \leqslant \frac{t}{n}\right).$$

Так как t фиксирован, то при достаточно большом n выполнится $\frac{t}{n} \leqslant \frac{a}{2}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n}{n} \leqslant \frac{t}{n}\right) \leqslant \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n}{n} \leqslant \frac{a}{2}\right).$$

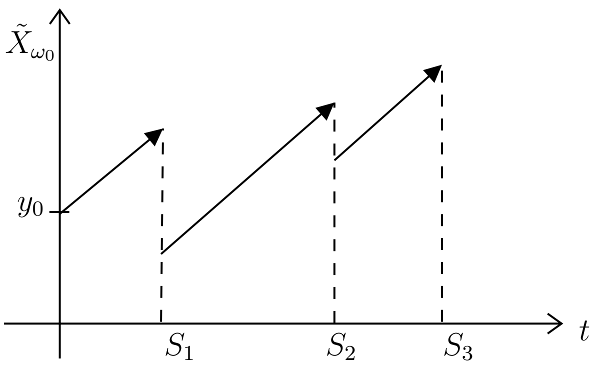
В силу ЗБЧ $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} a \Rightarrow \frac{S_n}{n} \xrightarrow{d} a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n}{n} \leqslant \frac{a}{2}\right) = P\left(a \leqslant \frac{a}{2}\right) = 0$. Значит, $\forall t \hookrightarrow P(X_t = +\infty) = 0$. В силу неубывания по t функции X_t при фиксированном ω получаем

$$P(\exists t:\ X_t = +\infty) \leqslant P(\exists n \in \mathbb{N}:\ X_n = +\infty) = 0.$$

Если $E\xi_i = \infty$, то определим $\tilde{\xi}_i = \min(\xi_i, 1)$. Тогда $\tilde{S}_n = \tilde{\xi}_1 + \ \ldots\ + \tilde{\xi}_n \leqslant S_n$. По уже доказанному $0 = \lim_{n\to\infty} P\left(\tilde{S}_n \leqslant t\right) \geqslant \lim_{n\to\infty} P(S_n \leqslant t)$. □

Пример. Пусть $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ – невырожденные независимые одинаково распределенные случайные величины, причем $\xi_i \geqslant 0$. Пусть $(X_t,\ t \geqslant 0)$ – процесс восстановления по $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Также, пусть $\{\eta_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, причем $\eta_i \geqslant 0$ и независимы с $\{\xi_n\}$, y_0, $c > 0$ – числа. Тогда *моделью страхования Спарре Андерсена* называется процесс $(Y_t,\ t \geqslant 0)$, где $Y_t = y_0 + ct - \sum\limits_{k=1}^{X_t} \eta_k$.

Траектория случайного процесса имеет следующий вид



Замечание. Параметры в модели страхования Спарре Андерсена имеют следующий смысл: y_0 – начальный капитал, c – скорость поступления страховых взносов, ξ_n – время между $(n-1)$-ой и n-ой выплатами, η_n – размер n-ой выплаты, X_t – число выплат к моменту времени t.

2 Ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона

Замечание. Физическая модель случайного процесса состоит в том, что в дискретные моменты времени частицы распадаются на случайное количество таких же частиц.

Определение 2.1. Пусть ξ – случайная величина со значениями в $\mathbb{Z}_+ = \{0,\, 1,\, 2, \ldots\}$. Пусть $\left\{\xi_k^{(n)},\, k,\, n \in \mathbb{N}\right\}$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с тем же распределением, что и у ξ. Положим $X_0 = 1$, $X_n = \sum\limits_{k=1}^{X_{n-1}} \xi_k^{(n)}$, $n \geqslant 1$. Тогда последовательность $(X_n,\, n \in \mathbb{Z}_+)$ называется *ветвящимся процессом Гальтона-Ватсона* с законом размножения частиц ξ.

Замечание. В модели ветвящегося процесса X_n – число потомков в момент времени n, $\xi_k^{(n)}$ – число потомков k-ой частицы в $(n-1)$-ый момент времени.

Определение 2.2. Пусть ξ – случайная величина. Тогда ее *производящей функцией* называется $\varphi_\xi(z) = Ez^\xi$.

Утверждение 2.1. *(Свойства производящей функции, б/д)*

1. $\varphi_\xi(1) = 1$.
2. $\varphi_\xi'(1) = E\xi$.
3. *Если* ξ, η *– независимы, то* $\varphi_{\xi+\eta}(z) = \varphi_\xi(z) \cdot \varphi_\eta(z)$.

Утверждение 2.2. *(Свойства производящей функции при* $\xi \in \mathbb{Z}_+$*, б/д)*

1. $\varphi_\xi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k P(\xi = k)$ *– степенной ряд, который сходится на множестве* $\{|z| \leqslant 1\}$.
2. *В области* $\{|z| < 1\}$ *функция* $\varphi_\xi(z)$ *является аналитической (т.е. совпадает со своим рядом Тейлора в окрестности любой точки области определения) и бесконечно дифференцируемой.*

3. $P(\xi = k) = \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial^k}{\partial z^k}\varphi_\xi(z)\right)\Big|_{z=0}$.

Утверждение 2.3. *Пусть* $(X_n,\ n \in \mathbb{Z}_+)$ *– ветвящийся процесс с законом размножения (РАЗЛОЖЕНИЯ?) частиц* ξ*. Тогда, если* $z \in [0,\ 1]$*, то* $\varphi_{X_n}(z) = \varphi_{X_{n-1}}(\varphi_\xi(z))$*.*

Доказательство. По определению $\varphi_{X_n}(z) = Ez^{X_n} = E\left(E\left(z^{X_n} \mid X_{n-1}\right)\right)$. Рассмотрим условное математическое ожидание

$$E\left(z^{X_n}|X_{n-1} = m\right) = E\left(z^{\sum_{k=1}^{X_{n-1}}\xi_n^{(k)}} \mid X_{n-1} = m\right) = E\left(z^{\sum_{k=1}^{m}\xi_n^{(k)}} \mid X_{n-1} = m\right) =$$
$$= \prod_{k=1}^{m} E\left(z^{\xi_k^{(n)}} \mid X_{n-1} = m\right) = \prod_{k=1}^{m} E\left(z^{\xi_k^{(n)}}\right) = (\varphi_\xi(z))^m.$$

Тогда $E\left(z^{X_n} \mid X_{n-1}\right) = (\varphi_\xi(z))^{X_{n-1}}$, и

$$\varphi_{X_n}(z) = E\left((\varphi_\xi(z))^{X_{n-1}}\right) = \varphi_{X_{n-1}}(\varphi_\xi(z)).$$

□

Следствие.

1. $\varphi_{X_n}(z) = \varphi_\xi(\varphi_\xi(\ldots(\varphi_\xi(z))\ldots))$ (n итераций)
2. $\varphi_{X_n}(z) = \varphi_\xi(\varphi_{X_{n-1}}(z))$.

Доказательство.

1. $\varphi_{X_n}(z) = \varphi_{X_{n-1}}(\varphi_\xi(z)) = \varphi_{X_{n-2}}(\varphi_\xi(\varphi_\xi(z))) = \ldots = \varphi_\xi(\varphi_\xi(\ldots(\varphi_\xi(z))\ldots))$.
2. $\varphi_{X_n}(z) = \varphi_\xi(\varphi_\xi(\ldots(\varphi_\xi(z))\ldots)) = \varphi_\xi(\varphi_{X_2}(\varphi_\xi(\ldots(\varphi_\xi(z))\ldots))) = \ldots = \varphi_\xi(\varphi_{X_{n-1}}(z))$.

□

Определение 2.3. Пусть $q_n = P(X_n = 0)$, $q = P(\exists n :\ X_n = 0)$, где q называется *вероятностью вырождения.*

Лемма 2.1. $q_n \leqslant q_{n+1}$, $q = \lim\limits_{n\to\infty} q_n$.

Доказательство. Заметим, что $\{X_n = 0\} \subset \{X_{n+1} = 0\}$. Значит, $q_n = P(X_n = 0) \leqslant P(X_{n+1} = 0) = q_{n+1}$. Тогда $\{\exists n :\ X_n = 0\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{X_n = 0\}$ – возрастающая последовательность вложенных множеств. Следовательно, по непрерывности вероятностной меры $q = P(\exists n :\ X_n = 0) = P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{X_n = 0\}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} P(X_n = 0) = \lim\limits_{n\to\infty} q_n$. □

Лемма 2.2. *Вероятность вырождения* q *удовлетворяет равенству* $q = \varphi_\xi(q)$*.*

Доказательство. $q_n = P(X_n = 0) = \varphi_{X_n}(0) = \varphi_\xi(\varphi_{X_{n-1}}(0)) = \varphi_\xi(q_{n-1})$. Тогда $q = \lim\limits_{n\to\infty}\varphi_\xi(q_{n-1}) = \varphi_\xi\left(\lim\limits_{n\to\infty} q_n\right) = \varphi_\xi(q)$, так как функция $\varphi_\xi(z)$ непрерывна. □

Теорема 2.1. *(О вероятности вырождения) Пусть* $P(\xi = 1) < 1$. *Обозначим* $\mu := E\xi \in \overline{R}$. *Тогда*

1. *Если* $\mu \leqslant 1$, *то уравнение* $z = \varphi_\xi(z)$ *имеет единственное решение* $z_0 = 1$ *на* $[0, 1]$, *и вероятность вырождения* q *равняется* z_0.

2. *Если* $\mu > 1$, *то уравнение* $z = \varphi_\xi(z)$ *имеет ровно одно решение* z_0 *на* $[0, 1)$, *и* $q = z_0$.

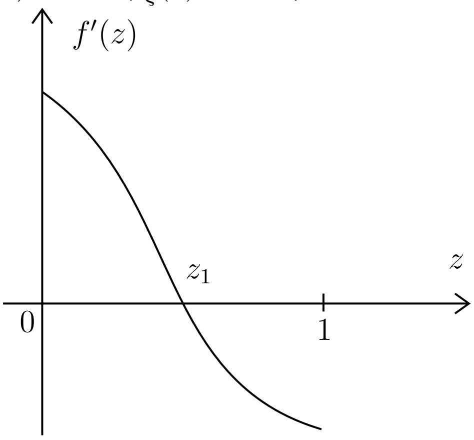
Доказательство. 1. Если $\xi \equiv 0$, то $q = 1$. Иначе, $\varphi'_\xi(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} kz^{k-1}P(\xi = k)$. Заметим, если $\varphi'(z) \equiv const$, то $\varphi'_\xi(z) = P(\xi = 1) = \mu < 1$. Иначе, $\varphi'_\xi(z)$ строго возрастает на $[0, 1]$. Значит, $\forall z \in [0,1) \hookrightarrow \varphi'_\xi(z) < \varphi'_\xi(1) = \mu \leqslant 1$. Также, по теореме Лагранжа о среднем $\forall z \in [0, 1) \hookrightarrow \varphi_\xi(1) - \varphi_\xi(z) = \varphi'_\xi(\theta)(1 - z)$, где $\theta \in (z,1)$. Следовательно, $0 < \varphi'_\xi(z) < 1$, и

$$\forall z \in [0,1) \hookrightarrow 1 - z > \varphi_\xi(1) - \varphi_\xi(z) = 1 - \varphi_\xi(z) \Leftrightarrow \varphi_\xi(z) > z.$$

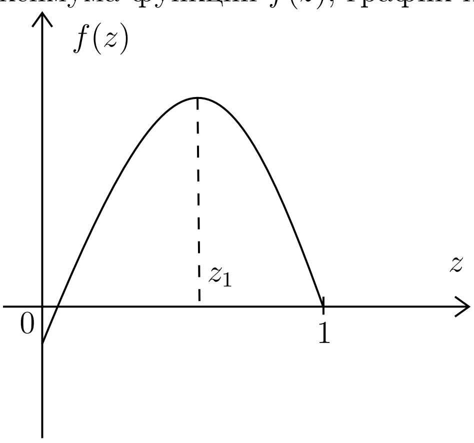
Следовательно, других корней, кроме $z_0 = 1$ на отрезке $[0, 1]$ нет.

2. Заметим, что $\exists k \geqslant 2 : \; P(\xi = k) > 0$. Иначе, $\xi \leqslant 1$ почти наверное, и $\mu \leqslant 1$, что приводит к противоречию.

Рассмотрим $\varphi''_\xi(z) = \sum\limits_{k=2}^{\infty} k(k-1)z^{k-2}P(\xi = k)$. Тогда $\forall z > 0 \hookrightarrow \varphi''_\xi(z) > 0$. Значит, $\varphi'_\xi(z)$ строго возрастает на $[0, 1]$. Обозначим $f(z) := z - \varphi_\xi(z)$. Тогда $f'(z) = 1 - \varphi'_\xi(z)$ – строго убывающая функция на $[0, 1]$. Заметим, что $f'(0) = 1 - \varphi'_\xi(0) = 1 - P(\xi = 1) > 0$, $f'(1) = 1 - \varphi'_\xi(1) = 1 - \mu < 0$. Значит, график функции $f'(z)$ имеет вид



Следовательно, $\exists!\; z_1 \in (0, 1) : \; f'(z_1) = 0$, которая является единственной точкой максимума функции $f(z)$, график которой имеет вид



Пусть сначала $f(0) = 0 - \varphi_\xi(0) = 0 \Rightarrow P(\xi = 0) = 0 \Rightarrow q = 0$, и существует единственный корень $z_0 = 0$ на $[0, 1]$. Теперь пусть $f(0) < 0 \Rightarrow P(\xi = 0) > 0 \Rightarrow \exists!\ z_0 \in (0, z_1):\ f(z_0) = 0$. Заметим, что $f(z) < 0 \Leftrightarrow z < z_0$.

Покажем, что $q = z_0$. Для этого докажем, что $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow q_n < z_0$.

$$\begin{aligned} q_n = P(X_n = 0) &= P(X_{n-1} = 0) + P(X_n = 0,\, X_{n-1} \neq 0) = \\ &= q_{n-1} + \sum_{k=1}^{\infty} P(X_{n-1} = k) \cdot P(X_n = 0 \mid X_{n-k} = k) = \\ &= q_{n-1} + \sum_{k=1}^{\infty} P(X_{n-1} = k) \cdot (P(\xi_k = 0))^k > q_{n-1}, \end{aligned}$$

т.к. $\exists k:\ P(X_{n-1} = k) \neq 0$. Далее,

$$q_n = P(X_n = 0) = \varphi_{X_n}(0) = \varphi_\xi(\varphi_{X_{n-1}}(0)) = \varphi_\xi(q_{n-1}) < \varphi_\xi(q_n),$$

т.к. φ_ξ строго возрастает. Получили, что

$$f(q_n) = q_n - \varphi_\xi(q_n) < 0 \Rightarrow q_n < z_0 \Rightarrow q = \lim_{n\to\infty} q_n \leqslant z_0 \Rightarrow q = z_0.$$

$\square$

Следствие. Вероятность вырождения – наименьший корень уравнения $z = \varphi_\xi(z)$ на $[0, 1]$.

Пример. Пусть $(X_n,\ n \in \mathbb{Z}_+)$ – ветвящийся процесс с законом размножения частиц $Pois(c)$, $c > 0$. Найдем вероятность вырождения.

$$q = \varphi_\xi(q) = \sum_{k=0}^{\infty} q^k \frac{c^k}{k!} e^{-c} = e^{qc} e^{-c} = e^{c(q-1)}.$$

Обозначим $\beta = 1 - q$ – вероятность невырождения. Тогда

$$q = e^{-\beta c} \Leftrightarrow 1 - \beta = e^{-\beta c} \Leftrightarrow \beta + e^{-\beta c} = 1.$$

Если $c \leqslant 1$, то $q = 1$, а при $c > 1$ есть нетривиальное решение $q \in (0, 1)$.

Пример. Пусть $G(n, p)$ – биномиальная модель случайного графа. Пусть $p = \dfrac{c}{n}$, $c > 0$. Обозначим X_n – максимальный размер компоненты в $G\left(n, \dfrac{c}{n}\right)$. Тогда

1. $c < 1 \Rightarrow \dfrac{X_n}{\ln n} \xrightarrow{P} \alpha(c) > 0$.
2. $c = 1 \Rightarrow \dfrac{X_n}{n^{2/3}} \xrightarrow{d} \xi$ – случайная величина.
3. $c > 1 \Rightarrow \dfrac{X_n}{n} \xrightarrow{P} \beta$, где β – решение уравнения $\beta + e^{-\beta c} = 1$.

Замечание. Если рассмотреть фиксированную вершину v из множества вершин $G(n, p)$, то количество ее соседей имеет распределение $Bin(n-1, p)$, то есть в третьем случае при $n \to \infty$ это распределение стремится к $Pois(c)$.

Пусть $(X_n,\, n \in \mathbb{Z}_+)$ – ветвящийся процесс с законом размножения частиц ξ с $\mu = E\xi$.

Определение 2.4. Процесс $(X_n,\, n \in \mathbb{Z}_+)$ называется

1. *докритическим*, если $\mu < 1$,
2. *критическим*, если $\mu = 1$,
3. *надкритическим*, если $\mu > 1$.

Следствие. Если $\mu \leqslant 1$, то $X_n \xrightarrow{a.s.} 0$, $\xi \not\equiv 1$.

Теорема 2.2. *(Предельная теорема для надкритического случая, б/д) Пусть $(X_n,\, n \in \mathbb{Z}_+)$ – ветвящийся процесс с законом размножения частиц ξ, $\mu = E\xi > 1$, $\sigma^2 = D\xi < \infty$. Тогда существует случайная величина W, что*

$$\frac{X_n}{\mu^n} \xrightarrow{a.s.} W,$$

причем

1. $\dfrac{X_n}{\mu^n} \xrightarrow{L_2} W$,
2. $EW = 1,\ DW = \dfrac{\sigma^2}{\mu(\mu-1)}$,
3. $P(W = 0) = q$ *– вероятность вырождения.s*

Замечание. Смысл теоремы в том, что ветвящийся процесс либо растет экспоненциально, либо вырождается.

3 Конечномерные распределения случайных процессов

Пусть $X = (X_t,\, t \in T)$ – случайный процесс. Пусть $\forall t \in T$ X_t является случайной величиной.

Определение 3.1. *Пространством траекторий* процесса X_t называется $\mathbb{R}^T = \{y = (y(t),\, t \in T) :\ y(t) \in \mathbb{R}\}$ – вещественнозначные функции на T.

Определение 3.2. Для любого $t \in T$ и $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ введем $c(t,\, B) = \big\{y \in \mathbb{R}^T :\ y(t) \in B\big\}$ – *элементарный цилиндр.*

Определение 3.3. Цилиндрической σ-алгеброй на $\mathbb{R}^T$ называется минимальная σ-алгебра, содержащая все элементрые цилиндры. Обозначение $\mathcal{B}_T = \sigma(c(t,\, B) :\ t \in T,\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Замечание. Таким образом, задав σ-алгебру, построили измеримое пространство $\big(\mathbb{R}^T,\, \mathcal{B}_T\big)$. Встает вопрос об измеримости отображения $X : \Omega \to \mathbb{R}^T$.

Лемма 3.1. *(Эквивалентность определений случайного процесса). $X = (X_t,\, t \in T)$ – случайный процесс тогда и только тогда, когда $X : \Omega \to \mathbb{R}^T$ измеримо, т.е. $\forall E \in \mathcal{B}_T \hookrightarrow X^{-1}(E) = \{\omega : X(\omega) \in E\} \in \mathcal{F}$, где $(\Omega,\, \mathcal{F},\, P)$ – вероятностное пространство.*

Доказательство. Пусть $(X_t,\ t \in T)$ – случайный процесс, и $c(t,\ B)$ – элементарный цилиндр. Тогда $X^{-1}(c(t,\ B)) = \{\omega :\ X \in c(t,\ B)\} = \{X_t \in B\} \in \mathcal{F}$, так как X_t – случайная величина. Из критерия измеримости следует, что X – измеримо относительно $\mathcal{B}_T$.

Пусть $t \in T$ и $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Тогда $\{X_t \in B\} = \{X \in c(t,\ B)\} \in \mathcal{F}$, так как $c(t,\ B) \in \mathcal{B}_T$. Следовательно, X_t – случайная величина, и X – случайный процесс. □

Замечание. Таким образом, можно рассматривать случайный процесс, как единый случайный элемент со значениями в $\mathbb{R}^T$. Поэтому, можно определить его распределение.

Определение 3.4. *Распределением случайного процесса* $X = (X_t,\ t \in T)$ называется вероятностная мера P_X на $\left(\mathbb{R}^T,\ \mathcal{B}_T\right)$, заданная по правилу:

$$\forall c \in \mathcal{B}_T \hookrightarrow P_X(c) = P(X \in c).$$

Определение 3.5. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $t_1,\ \ldots, t_n \in T$. Обозначим через $P_{t_1,\ \ldots,\ t_n}$ – распределение случайного вектора $(X_{t_1},\ \ldots,\ X_{t_n})$, т.е. $P_{t_1,\ \ldots,\ t_n}$ – вероятностная мера на $(\mathbb{R}^n,\ \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, $P_{t_1,\ \ldots,\ t_n}(B) = P((X_{t_1},\ \ldots,\ X_{t_n}) \in B)$. Тогда набор вероятностных мер $\{P_{t_1,\ \ldots,\ t_n},\ n \in \mathbb{N},\ t_1,\ \ldots,\ t_n \in T\}$ называется *конечномерным распределением* случайного процесса $X = (X_t,\ t \in T)$.

Лемма 3.2. *Пусть* $(X_t,\ t \in T)$ *и* $(Y_t,\ t \in T)$ *– случайные процессы. Тогда* $P_X = P_Y$ *тогда и только тогда, когда все их конечномерные распределения одинаковы.*

Доказательство. Пусть $t_1,\ \ldots,\ t_n \in T$, $B_1,\ \ldots,\ B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Введем цилиндр $c(t_1,\ \ldots,\ t_n,\ B_1,\ \ldots,\ B_n) = \left\{y \in \mathbb{R}^T :\ \forall i = \overline{1,n} \hookrightarrow y(t_i) \in B_i\right\}$ – пересечение элементарных цилиндров $c(t_1,\ B_1),\ \ldots,\ c(t_n,\ B_n)$. Заметим, что цилиндры образуют π-систему M (т.е. систему, замкнутую относительно конечного непустого пересечения множеств), и $\sigma(M) = \mathcal{B}_T$. Тогда для проверки равенства мер на $\mathcal{B}_T$ достаточно доказать, что меры совпадают на всех множествах из M.

Пусть $\forall t_1,\ \ldots, t_n \hookrightarrow P^X_{t_1,\ \ldots,\ t_n} = P^Y_{t_1,\ \ldots,\ t_n}$. Рассмотрим цилиндр $c(t_1,\ \ldots, t_n, B_1,\ \ldots, B_n)$. Тогда

$$\begin{gathered}P_X(c(t_1,\ \ldots, t_n;\ B_1,\ \ldots, B_n)) = P(X_{t_1} \in B_1,\ \ldots, X_{t_n} \in B_n) = \\ = P^X_{t_1,\ \ldots,\ t_n}(B_1 \times\ \ldots\ \times B_n) = P^Y_{t_1,\ \ldots,\ t_n}(B_1 \times\ \ldots\ \times B_n) = \\ = P_Y(c(t_1,\ \ldots, t_n;\ B_1,\ \ldots, B_n)).\end{gathered}$$

P_X и P_Y совпадают на цилиндрах, а значит, совпадают и на всей $\mathcal{B}_T$.

Пусть $P_X = P_Y$. Тогда $P^X_{t_1,\ \ldots,\ t_n}$ и $P^Y_{t_1,\ \ldots,\ t_n}$ совпадают на прямоугольниках $B_1 \times \ldots \times B_n$. Система таких прямоугольников является π-системой с наименьшей σ-алгеброй $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, $P^X_{t_1,\ \ldots,\ t_n} = P^Y_{t_1,\ \ldots,\ t_n}$. □

Лемма 3.3. *(Условия симметрии и согласованности) Пусть* $\{P_{t_1,\ \ldots,\ t_n},\ n \in \mathbb{N},\ t_1,\ \ldots, t_n \in T\}$ *– конечномерные распределения процесса* $(X_t,\ t \in T)$. *Тогда выполняются условия симметрии и согласованности:*

1. $P_{t_1,\ \ldots,\ t_n}(B_1 \times\ \ldots\ \times B_n) = P_{t_{\tau(1)},\ \ldots,\ t_{\tau(n)}}(B_{\tau(1)} \times\ \ldots\ \times B_{\tau(n)}),\ \forall \tau \in S_n$.
2. $P_{t_1,\ \ldots,\ t_n}(B_1 \times\ \ldots\ \times B_{n-1} \times \mathbb{R}) = P_{t_1,\ \ldots,\ t_{n-1}}(B_1 \times\ \ldots\ \times B_{n-1})$.

Доказательство.

1. очевидно.

2. тривиально.

$\square$

Замечание. Оказывается, что условия симметрии и согласованности являются достаточными условиями для существования случайного процесса.

Теорема 3.1. *(Колмогорова, о существовании случайных процессов, б/д). Пусть T – произвольное множество, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t_1, \ \ldots, \ t_n \in T$ задана вероятностная мера $P_{t_1, \ ..., \ t_n}$ на $(\mathbb{R}^n, \ \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, причем набор мер $\{P_{t_1, \ ..., \ t_n}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall t_1, \ \ldots, \ t_n \in T\}$ удовлетворяет условиям симметрии и согласованности. Тогда существует вероятностное пространство $(\Omega, \ \mathcal{F}, \ P)$ и случайный процесс $(X_t, \ t \in T)$ на нем, что $\{P_{t_1, \ ..., \ t_n}\}$ являются его конечномерными распределениями.*

4 Следствия из теоремы Колмогорова

Перепишем условия симметрии и согласованности в терминах характеристических функций.

Теорема 4.1. *(Условия симметрии и согласованности для характеристических функций, б/д). Пусть T – непустое множество, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall t_1, \ \ldots, \ t_n$ задана вероятностная мера $P_{t_1, \ ..., \ t_n}$ на $(\mathbb{R}^n, \ \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Пусть также $\varphi_{t_1, \ ..., \ t_n}$ – характеристическая функция распределения $P_{t_1, \ ..., \ t_n}$. Тогда меры $P_{t_1, \ ..., \ t_n}$ удовлетворяют условиям симметрии и согласованности тогда и только тогда, когда характеристические функции $\varphi_{t_1, \ ..., \ t_n}$ удовлетворяют условиям симметрии и согласованности, т.е. выполняется*

1. $\varphi_{t_1, \ ..., \ t_n}(\lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_n) = \varphi_{t_{\sigma(1)}, \ ..., \ t_{\sigma(2)}}(\lambda_{\sigma(1)}, \ \ldots, \ \lambda_{\sigma(n)}), \ \forall \sigma \in S_n$.

2. $\varphi_{t_1, \ ..., \ t_{n-1}, \ t_n}(\lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_{n-1}, \ 0) = \varphi_{t_1, \ ..., \ t_{n-1}}(\lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_{n-1})$.

Следствие. Пусть $T \subset \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t_1, \ \ldots, \ t_n \in T: \ t_1 < \ldots < t_n$ задана вероятностная мера $P_{t_1, \ ..., \ t_n}$ на $(\mathbb{R}^n, \ \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ с характеристической функцией $\varphi_{t_1, \ ..., \ t_n}$. Если функции $\varphi_{t_1, \ ..., \ t_n}$ удовлетворяют условию

$$\begin{gathered}\forall m \in \{1, \ \ldots, \ n\} \hookrightarrow \varphi_{t_1, \ ..., \ t_n}(\lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_n)\big|_{\lambda_m = 0} = \\ = \varphi_{t_1, \ ..., \ t_{m-1}, \ t_{m+1}, \ ..., \ t_n}(\lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_{m-1}, \ \lambda_{m+1}, \ \ldots, \ \lambda_n),\end{gathered} \tag{4.1}$$

то существует такое вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и случайный процесс $(X_t, t \in T)$ на нем, что $P_{t_1, \ ..., \ t_n}$ будет распределением вектора $(X_{t_1, \ ..., \ t_n})$.

Доказательство. TODO – доказать, что выполняется первое условие. $\square$

5 Процессы с независимыми приращениями

Определение 5.1. Случайный процесс $(X_t,\ t \geqslant 0)$ является процессом с независимыми приращениями, если $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall t_1,\ \ldots,t_n$ случайные величины $X_{t_n}-X_{t_{n-1}},\ \ldots, X_{t_2}-X_{t_1}, X_{t_1}$ независимы в совокупности.

Замечание. Случайный процесс с независимыми приращениями является непрерывным аналогом случайного блуждания.

Теорема 5.1. *(О существовании процессов с независимыми приращениями). Пусть $\forall s,t:\ 0 \leqslant s \leqslant t$ задана вероятностная мера $Q_{s,t}$ на $(\mathbb{R},\ \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ с характеристической функцией $\varphi_{s,t}$. Пусть также задана вероятностная мера Q_0 на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Пусть также случайный процесс $(X_t,\ t \geqslant 0)$ является случайным процессом с независимыми приращениями и распределениями приращений*

$$X_t - X_s \overset{d}{=} Q_{s,t},\ 0 \leqslant s < t,$$
$$X_0 \overset{d}{=} Q_0.$$

Такой процесс существует тогда и только тогда, когда

$$\forall s,u,t:\ 0 \leqslant s < u < t \hookrightarrow \varphi_{s,t}(\tau) = \varphi_{s,u}(\tau)\cdot \varphi_{u,s}(\tau). \tag{5.1}$$

Доказательство. Пусть такой процесс существует. Тогда в силу независимости приращений $(X_t,\ t \geqslant 0)$ выполняется

$$\varphi_{s,t}(\tau) = \varphi_{X_t-X_s}(\tau) = \varphi_{X_t-X_u+X_u-X_s}(\tau) = \varphi_{X_t-X_u}(\tau)\cdot \varphi_{X_u-X_s}(\tau) = \\ = \varphi_{s,u}(\tau)\cdot \varphi_{u,t}(\tau).$$

Пусть выполняется условие (2), и предположим, что процесс существует. Пусть также$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$. Рассмотрим вектор $\xi = (X_{t_n},\ X_{t_{n-1}},\ \ldots,\ X_{t_1},\ X_{t_0})$. Найдем его характеристическую функцию. Для этого рассмотрим вектор приращений $\xi' = (X_{t_n} - X_{t_{n-1}},\ \ldots,\ X_{t_1} - X_{t_0},\ X_{t_0})$. Компоненты ξ' независимы, следовательно, характеристическая функция ξ' имеет вид

$$\varphi_{\xi'}(\lambda_n,\ \ldots,\lambda_0) = \varphi_{X_{t_n}-X_{t_{n-1}}}(\lambda_n)\cdot\ \ldots\ \cdot\varphi_{X_{t_1}-X_0}(\lambda_1)\cdot \varphi_{X_0}(\lambda_0) = \\ = \varphi_{t_{n-1},t_n}(\lambda_n)\cdot\ \ldots\ \cdot\varphi_{0,t_1}(\lambda_1)\cdot \varphi_0(\lambda_0).$$

Далее, заметим, что

$$\xi = A\xi',\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\varphi_\xi(\overline{\lambda}) = \mathbb{E}e^{i<\overline{\lambda},\ \xi>} = \mathbb{E}e^{i<\overline{\lambda},\ A\xi'>} = \mathbb{E}e^{i\left\langle A^T\overline{\lambda},\ \xi'\right\rangle} = \varphi_{\xi'}\left(A^T\overline{\lambda}\right) = \\ = \varphi_{t_{n-1},t_n}(\lambda_n)\cdot \varphi_{t_{n-2},t_{n-1}}(\lambda_n+\lambda_{n-1})\cdot\ \ldots\ \cdot\varphi_0(\lambda_n+\ \ldots\ +\lambda_0) =: \varphi_{0,t_1,\ \ldots,\ t_n}(\lambda_0,\ \ldots,\lambda_n).$$

Положим $\varphi_{t_1,\ \ldots,\ t_n}(\lambda_1,\ \ldots,\lambda_n) := \varphi_{0,t_1,\ \ldots,\ t_n}(0,\ \lambda_1,\ \ldots,\lambda_n)$.

Проверим, что выполняется условие (1) из следствия для характеристических функций $\varphi_{t_1,\,...,\,t_n}$, $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n$. Без ограничения общности проверим только ситуацию, когда есть нулевой момент времени $t_0 = 0$. Если $m = 0$, то по определению $\varphi_{t_0,\,...,\,t_n}(\lambda_0, \ \ldots, \ \lambda_n)\big|_{\lambda_0=0} = \varphi_{t_1,\,...,\,t_n}(\lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_n)$. Ели $m > 0$, то по условию теоремы выполняется

$$\begin{gathered}
\varphi_{0,\,t_1,\,...,\,t_n}(\lambda_0, \lambda_1, \ \ldots, \lambda_n)\big|_{\lambda_m=0} = \\
= \varphi_{t_{n-1},t_n}(\lambda_n)\cdot \ \ldots \ \cdot \varphi_{t_m,t_{m+1}}(\lambda_n + \ \ldots + \lambda_{m+1})\cdot \varphi_{t_{m-1},t_m}(\lambda_n + \ \ldots + \lambda_{m+1} + 0)\cdot \ \ldots \ \cdot \\
\cdot \varphi_{0,t_1}(\lambda_n + \ \ldots \ + \lambda_{m+1} + \lambda_{m-1} + \ \ldots \ + \lambda_0) = \\
= \varphi_{t_{n-1},t_n}(\lambda_n)\cdot \ \ldots \ \cdot \varphi_{t_{m-1},t_{m+1}}(\lambda_n + \ \ldots + \lambda_{m+1})\cdot \ \ldots \ \cdot \\
\cdot \varphi_{0,t_1}(\lambda_n + \ \ldots \ + \lambda_{m+1} + \lambda_{m-1} + \ \ldots \ + \lambda_0) = \\
= \varphi_{0,t_1,\,...,t_{m-1},t_{m+1},\,...,\,t_n}(\lambda_0, \ \ldots, \lambda_{m-1}, \lambda_{m+1}, \ \ldots, \lambda_n).
\end{gathered}$$

Таким образом, выполняется условие (1) следствия. Следовательно, по следствию существует вероятностное пространство и случайный процесс $(X_t, \, t \geqslant 0)$ на нем, что $\varphi_{t_1,\,...,\,t_n}$ является характеристической функцией вектора $(X_{t_1}, \ \ldots, \ X_{t_n})$, $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n$. По построению такой процесс является процессом с независимыми приращениями, и выполняется $X_{t_j} - X_{t_i} \stackrel{d}{=} Q_{t_{j-1},\,t_i}$. □

6 Пуассоновский процесс

Определение 6.1. Процесс $(N_t, \, t \geqslant 0)$ называется *пуассоновским процессом интенсивности* λ, если

1. $N_0 = 0$ почти наверное,
2. N_t имеет независимые приращения,
3. $N_t - N_s \ \sim \ Pois(\lambda(t-s))$, $0 \leqslant s < t$.

Утверждение 6.1. *Пуассоновский процесс существует.*

Доказательство. Пусть $\varphi_{s,t}$ – характеристическая функция $Pois(\lambda(t-s))$. Тогда

$$\varphi_{s,t}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{i\tau k}\frac{(\lambda(t-s))^k}{k!}e^{-\lambda(t-s)} = e^{-\lambda(t-s)}e^{\lambda(t-s)e^{i\tau}} = e^{\lambda(t-s)\left(e^{i\tau}-1\right)}.$$

Следовательно, $\varphi_{s,u}(\tau)\cdot \varphi_{u,t}(\tau) = e^{\lambda(u-s)\left(e^{i\tau}-1\right)}e^{\lambda(t-u)\left(e^{i\tau}-1\right)} = e^{\lambda(t-s)\left(e^{i\tau}-1\right)}$, и по теореме о существовании найдется такой процесс $(X_t, \, t \geqslant 0)$ с независимыми приращениями, что $X_t - X_s$ имеет характеристическую функцию $\varphi_{s,t}$ для $0 \leqslant s < t$. □

Утверждение 6.2. *(Свойства траекторий N_t).*

1. $N_t \ \sim \ Pois(\lambda t) \in \mathbb{Z}_+$ *– целочисленные траектории,*
2. $N_t - N_s \ \sim \ Pois(\lambda(t-s)) \geqslant 0$ *– неубывают по* t.

Теорема 6.1. *(Явная конструкция пуассоновского процесса). Пусть* $(X_t,\ t \geqslant 0)$ *– процесс восстановления, построенный по случайным величинам* $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\xi_i \sim Exp(\lambda)\ \forall i \in \mathbb{N}$. *Тогда* X_t *– пуассоновский процесс интенсивности* λ.

Доказательство. Рассмотрим вектор $(S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_n)$. Тогда его плотность имеет вид

$$p_{S_1,\ \ldots,\ S_n}(x_1,\ \ldots,x_n) = p_{\xi_1}(x_1)\cdot p_{\xi_2}(x_2 - x_1)\cdot\ \ldots\ \cdot p_{\xi_n}(x_n - x_{n-1}) =$$
$$= \lambda e^{-\lambda x_1}\cdot \lambda e^{-\lambda(x_2 - x_1)}\cdot\ \ldots\ \cdot \lambda e^{-\lambda(x_n - x_{n-1})} = \lambda^n e^{-\lambda x_n}\cdot I(0 < x_1 < \ldots < x_n).$$

Пусть $0 < t_1 < \ldots < t_n$ и $0 \leqslant k_1 \leqslant \ldots \leqslant k_n$, $k_j \in \mathbb{Z}\ \forall j = \overline{1,n}$. Тогда

$$P(X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = k_n - k_{n-1},\ \ldots,\ X_{t_2} - X_{t_1} = k_2 - k_1,\ X_{t_1} = k_1) =$$
$$= P(S_1,\ \ldots,\ S_{k_1} \in (0,\ t_1],\ \ldots,\ S_{k_{n-1}+1},\ \ldots,\ S_{k_n} \in (t_{n-1},\ t_n],\ S_{k_n+1} > t_n) =$$
$$\int \cdots \int_A p_{S_1,\ \ldots,\ S_{k_n+1}}(x_1,\ \ldots,\ x_{k_n+1})dx_1 \ldots dx_{k_n+1} =: I,$$

где $A = \{(x_1,\ \ldots,\ x_{k_1}) \in (0,\ t_1],\ \ldots,\ (x_{k_{n-1}+1},\ \ldots,\ x_{k_n}) \in (t_{n-1},\ t_n],\ x_{k_n+1} > t_n\}$. Тогда

$$I = \int_{t_n}^{+\infty} \lambda^{k_n+1} e^{-\lambda x_{k_n+1}} dx_{k_n+1}\cdot$$
$$\prod_{j=1}^{n} \int \cdots \int_{x_{k_{j-1}+1},\ \ldots,\ x_{k_j} \in (t_{j-1},\ t_j]} \mathbb{I}(x_{k_{j-1}+1} < \ldots < x_{k_j}) dx_{k_{j-1}+1} \ldots dx_{k_j}.$$

Каждый интеграл в произведении равен объему симплекса. Куб в k-мерном пространстве полностью покрывается $k!$ непересекающимися равными по объему симплексами, каждый из которых порождается соответствующей перестановкой переменных. Поэтому, объем одного симплекса в k-мерном пространстве внутри куба со стороной m будет равняться $\dfrac{m^k}{k!}$. Из этого получаем, что

$$I = \lambda^{k_n+1} e^{-\lambda t_n}\cdot \prod_{j=1}^{n} \frac{(t_j - t_{j-1})^{k_j - k_{j-1}}}{(k_j - k_{j-1})!} = \prod_{j=1}^{n} \frac{(\lambda(t_j - t_{j-1}))^{k_j - k_{j-1}}}{(k_j - k_{j-1})!} e^{-\lambda(t_j - t_{j-1})}.$$

Из этого получается, что приращения случайного процесса $(X_t,\ t \geqslant 0)$ независимы и приращения $X_t - X_s \sim Pois(\lambda(t - s))$, $0 \leqslant s < t$. □