Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
БИЛЕТЫ К ЭКЗАМЕНУ
I СЕМЕСТР

Лектор: *Редкозубов Вадим Витальевич*

Автор: *Головко Денис*
Проект на Github

осень 2022

1. Множество действительный чисел $\mathbb{R}$ как полное упорядоченное поле. Точные грани числовых множеств. Принцип полноты Вейерштрасса. Аксиома Архимеда.

2. Предел числовой последовательности: единственность, ограниченность. Переход к пределу в неравенствах. Теорема о зажатой последовательности. Арифметические операции с пределами. Бесконечные пределы. Теорема о пределе монотонной последовательности. Теорема Кантора о вложенных отрезках. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Частичные пределы, теорема о верхнем и нижнем пределах. Фундаментальные последовательности и критерий Коши.

3. Внутренность, внешность и граница подмножества $\mathbb{R}$. Открытые и замкнутые множества и их свойства. Предельные точки множества, критерии замкнутости. Замкнутость множества частичных пределов. Замыкание множества. Лемма Гейне–Бореля.

4. Определения предела функции в точке по Коши и по Гейне, их равносильность. Свойства пределов функции. Предел композиции. Критерий Коши существования предела функции. Односторонние пределы функции, теорема об односторонних пределах монотонной функции.

5. Непрерывность функции в точке. Равносильные определения непрерывности. Теорема о непрерывности композиции. Точки разрыва, их классификация. Теорема о разрывах монотонной функции.

6. Ограниченность непрерывной на отрезке функции. Теорема Вейерштрасса о достижимости точных граней. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции. Непрерыность монотонной функции, отображающей промежуток на промежуток. Теорема об обратной функции. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора о равномерной непрерывности. Экспонента и ее свойства. Второй замечательный предел. Сравнение асимптотического поведения функций, O–символика.

7. Определение и геометрический смысл производной. Линейная аппроксимация и дифференциал функции. Непрерывность дифференцируемой функции. Односторонние производные. Производная суммы, произведения и частного. Производная композиции. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменного. Производная обратной функции. Таблица производных основных элементарных функций.

8. Локальные экстремумы. Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции. Теорема Ролля. Теоремы Лагранжа и Коши о среднем значении. Теорема Дарбу о промежуточных значениях производной. Условия монотонности и постоянства дифференцируемой функции. Достаточное условие экстремума функции в терминах первой производной. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$.

9. Производные высших порядков. Формула Лейбница для n–ой производной произведения функций. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Разложения функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ и $(1+x)^\alpha$. Достаточное условия локального экстремума в терминах высших производных. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Выпуклые функции. Дифференциальные условия выпуклости. Неравенство Йенсена.

10. Первообразная. Неопределнный интеграл и его свойства. Интегрирование рациональных функций.

11. Определенный интеграл Римана. Формула Ньютона-Лейбница. Ограниченность интегрируемой функции. Линейность и монотонность интеграла. Верхние и нижние суммы Дарбу и их свойства. Критерий интегрируемости Дарбу. Интегрируемость по подотрезкам. Аддитивность интеграла. Интегрируемость произведения и модуля интегрируемых функций. Интегральная

теорема о среднем. Интегрируемость непрерывных функций, монотонных функций и ограниченных функций с конечным числом точек разрыва. Интеграл с переменным верхним пределом: непрерывность и дифференцируемость. Существование первообразной у непрерывной функции. Замена переменной в интеграле. Формула интегрирования по частям.

12. Евклидово пространство $\mathbb{R}^m$. Предел и производная вектор–функции. Теорема Лагранжа для вектор–функций. Параметризованная кривая в $\mathbb{R}^m$. Длина кривой. Аддитивность длины кривой. Достаточное условие спрямляемости. Дифференцируемость переменной длины дуги кривой. Натуральная параметризация.

Содержание

1. Множество действительный чисел $\mathbb{R}$ как полное упорядоченное поле. Точные грани числовых множеств. Принцип полноты Вейерштрасса. Аксиома Архимеда. 4

2. Предел числовой последовательности: единственность, ограниченность. Переход к пределу в неравенствах. Теорема о зажатой последовательности. Арифметические операции с пределами. Бесконечные пределы. Теорема о пределе монотонной последовательности. Теорема Кантора о вложенных отрезках. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Частичные пределы, теорема о верхнем и нижнем пределах. Фундаментальные последовательности и критерий Коши. 6

3. Внутренность, внешность и граница подмножества $\mathbb{R}$. Открытые и замкнутые множества и их свойства. Предельные точки множества, критерии замкнутости. Замкнутость множества частичных пределов. Замыкание множества. Лемма Гейне–Бореля. 11

4. Определения предела функции в точке по Коши и по Гейне, их равносильность. Свойства пределов функции. Предел композиции. Критерий Коши существования предела функции. Односторонние пределы функции, теорема об односторонних пределах монотонной функции. 14

5. Непрерывность функции в точке. Равносильные определения непрерывности. Теорема о непрерывности композиции. Точки разрыва, их классификация. Теорема о разрывах монотонной функции. 18

6. Ограниченность непрерывной на отрезке функции. Теорема Вейерштрасса о достижимости точных граней. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции. Непрерыность монотонной функции, отображающей промежуток на промежуток. Теорема об обратной функции. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора о равномерной непрерывности. Экспонента и ее свойства. Второй замечательный предел. Сравнение асимптотического поведения функций, O–символика. 20

7. Определение и геометрический смысл производной. Линейная аппроксимация и дифференциал функции. Непрерывность дифференцируемой функции. Односторонние производные. Производная суммы, произведения и частного. Производная композиции. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменного. Производная обратной функции. Таблица производных основных элементарных функций. 25

8. Локальные экстремумы. Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции. Теорема Ролля. Теоремы Лагранжа и Коши о среднем значении. Теорема Дарбу о промежуточных значениях производной. Условия монотонности и постоянства дифференцируемой функции. Достаточное условие экстремума функции в терминах первой производной. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$. 29

9. Производные высших порядков. Формула Лейбница для n–ой производной произведения функций. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Разложения функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ и $(1+x)^\alpha$. Достаточное условия локального экстремума в терминах высших производных. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Выпуклые функции. Дифференциальные условия выпуклости. Неравенство Йенсена. **33**

10. Первообразная. Неопределнный интеграл и его свойства. Интегрирование рациональных функций. **38**

11. Определенный интеграл Римана. Формула Ньютона-Лейбница. Ограниченность интегрируемой функции. Линейность и монотонность интеграла. Верхние и нижние суммы Дарбу и их свойства. Критерий интегрируемости Дарбу. Интегрируемость по подотрезкам. Аддитивность интеграла. Интегрируемость произведения и модуля интегрируемых функций. Интегральная теорема о среднем. Интегрируемость непрерывных функций, монотонных функций и ограниченных функций с конечным числом точек разрыва. Интеграл с переменным верхним пределом: непрерывность и дифференцируемость. Существование первообразной у непрерывной функции. Замена переменной в интеграле. Формула интегрирования по частям. **40**

12. Евклидово пространство $\mathbb{R}^m$. Предел и производная вектор–функции. Теорема Лагранжа для вектор–функций. Параметризованная кривая в $\mathbb{R}^m$. Длина кривой. Аддитивность длины кривой. Достаточное условие спрямляемости. Дифференцируемость переменной длины дуги кривой. Натуральная параметризация. **46**

1. Множество действительный чисел $\mathbb{R}$ как полное упорядоченное поле. Точные грани числовых множеств. Принцип полноты Вейерштрасса. Аксиома Архимеда.

Определение. Непустое множество F называется *полем*, если на нём заданы операции сложения $"+" : F \times F \to F$, произведения $"\cdot" : F \times F \to F$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1. $\forall a, b \in F : a + b = b + a,\ \ a \cdot b = b \cdot a$ (коммутативность).
2. $\forall a, b, c \in F : (a + b) + c = a + (b + c),\ \ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (ассоциативность).
3. $\exists 0_f \in F : \forall a \in F\ \ a + 0_f = 0_f + a = a$ (существование нуля).
4. $\forall a \in F : \exists -a \in F\ \ a + (-a) = 0_f$ (существование противоположного).
5. $\exists 1_f \in F \setminus \{0_f\} : \forall a \in F\ \ a \cdot 1_f = a$ (существование единицы).
6. $\forall a \in F \setminus \{0_f\} : \exists a^{-1} \in F\ \ a \cdot a^{-1} = 1_f$ (существование обратного).
7. $\forall a, b, c \in F : (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (дистрибутивность).

Определение. Поле F называется *упорядоченным*, если на нём выполняется **аксиома порядка**.

Теорема. ***Аксиома порядка***
Существует ненулевое $P \subset F$:

1. $\forall a{,}b \in P$ $(a + b \in P$ *и* $ab \in P)$.
2. $\forall a \in F$ *верно ровно одно: либо* $a \in P$, *либо* $-a \in P$, *либо* $a = 0_f$.

Будем писать, $a < b$ $(b > a)$, если $b - a \in P$. Будем писать, $a \leqslant b$ $(b \geqslant a)$, если $a < b$ или $a = b$.

Замечание. $\forall a{,}b \in F$ либо $a < b$, либо $a > b$, либо $a = b$.

Определение. Пусть A, B – подмножества упорядоченного поля. Будем говорить, что A лежит левее B, если $\forall a \in A$, $\forall b \in B$: $a \leqslant b$. Будем говорить, что элемент c разделяет A и B, если A лежит левее $\{c\}$, и $\{c\}$ лежит левее B, т.е. $\forall a \in A\ \forall b \in B (a \leqslant c \leqslant b)$.

Определение. Упорядоченное поле F называется *полным*, если на нем выполняется **аксиома непрерывности**.

Теорема. ***Аксиома непрерывности***
Пусть $A, B \subset F (A \neq \varnothing, B \neq \varnothing)$, причём A лежит левее B. Тогда $\exists c \in F$, разделяющий A и B.

Определение. Полное упорядоченное поле, содержащее множество рациональных чисел, называется полем действительных чисел и обозначается $\mathbb{R}$. Элементы поля $\mathbb{R}$ – действительные числа.

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}$. Множество E называется *ограниченным* сверху, если $\exists m \in \mathbb{R}\ \forall x \in E\ (x \leqslant m)$. m – верхняя грань. Множество E называется *ограниченным* снизу, если $\exists m \in \mathbb{R}\ \forall x \in E\ (x \geqslant m)$. Множество E называется *ограниченным*, если E ограниченно и сверху, и снизу.

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \varnothing$. Наименьшая из верхних граней E называется точной верхней гранью (супремумом $sup(E)$). Наибольшая из нижних граней E называется точной нижней гранью (инфимум $inf(E)$).

$$c = sup(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E (x \leqslant c) \\ \forall c^{'} < c \ \exists x \in E(x > c^{'}) \end{cases}$$

$$c = inf(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E (x \geqslant c) \\ \forall c^{'} > c \ \exists x \in E(x < c^{'}) \end{cases}$$

Замечание. Не всякое $E \neq \varnothing$ имеет точную верхнюю (нижнюю) грань. Необходимым (и достаточным) условием их существования является ограниченность сверху/снизу.

Теорема. ***Принцип полноты Вейерштрасса***
Всякое непустое ограниченое сверху (снизу) множество имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.

Доказательство. Пусть $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$ и A – ограничено сверху. Рассмотрим $B = \{b \in \mathbb{R} | \ \forall a \in A \ (a \leqslant b)\}$ – множество верхних граней A. $\Rightarrow$ $B \neq \varnothing$ и A лежит левее B. Тогда, по аксиоме непрерывности,

$$\exists c \in \mathbb{R} \ \forall a \in A \ \forall b \in B \ (a \leqslant c \leqslant b)$$

Имеем, что $a \leqslant c \ \forall a \in A$. Пусть $\exists c^{'} < c$. Т.к. $c \leqslant b$, то $c^{'} < b \Rightarrow c^{'} \notin B \Rightarrow c^{'}$ – не является верхней гранью. Тогда $c = sup(A)$.
Существование инфимума у непустого ограниченного снизу множества устанавливается аналогично. □

Теорема. ***Аксиома Архимеда***

$$\forall a \in \mathbb{R} \ \exists n \in \mathbb{N} (n > a)$$

Доказательство. Пусть $\mathbb{N}$ ограничено сверху. Тогда, по теореме Вейерштрасса, $\exists k = sup(\mathbb{N}) \ \Rightarrow$ $k-1$ верхней гранью не является $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \ n > k-1 \ \Rightarrow n+1 > k$ – противоречие. □

$\Rightarrow \mathbb{N}$ – неограничено.
Следствие. (целая часть) $\forall x \in \mathbb{R} \ \exists! \ m \in \mathbb{Z} \ (m \leqslant x < m+1)$.

Доказательство. (1). Пусть $x \geqslant 0$. Рассмотрим $S = \{n \in \mathbb{N} | \ n > x\}$. По аксиоме Архимеда $S \neq \varnothing$ и, значит, S имеет минимальный элемент p. Положим $m = p - 1$. Тогда по определению p имеем $m + 1 > x$ и $m \leqslant x$.
(2). Пусть $x < 0$. $\exists m^{'} \in \mathbb{Z} \ (m^{'} \leqslant -x < m^{'} + 1) \Leftrightarrow (-m^{'} - 1 < x \leqslant -m^{'})$.

$$m = \begin{cases} -m^{'}, \text{ если } x = -m^{'} \\ -m^{'} - 1, \text{ иначе} \end{cases}$$

Тогда $m \leqslant x < m+1$.
(3). Пусть $m_1 \leqslant x < m_1 + 1$, $m_2 \leqslant x < m_2 + 1$. Тогда

$$0 \leqslant x - m_1 < 1, \ 0 \leqslant x - m_2 < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 < m_1 - m_2 < 1 \Rightarrow m_1 - m_2 = 0 \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

□

Следствие 2. $\forall a, b \in \mathbb{R}, \ a < b, \ \exists r \in \mathbb{Q} \ (a < r < b)$.

Доказательство. По аксиоме Архимеда $\exists n > \frac{1}{b-a}$, т.е. $\frac{1}{n} < b - a$.
$r = \frac{[na]+1}{n} : r \in \mathbb{Q}$ и $r > \frac{na-1+1}{n} = a$ и $r \leqslant \frac{na+1}{n} = a + \frac{1}{n} < b$.
$\Rightarrow \mathbb{Q}$ всюду в $\mathbb{R}$. □

2. Предел числовой последовательности: единственность, ограниченность. Переход к пределу в неравенствах. Теорема о зажатой последовательности. Арифметические операции с пределами. Бесконечные пределы. Теорема о пределе монотонной последовательности. Теорема Кантора о вложенных отрезках. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Частичные пределы, теорема о верхнем и нижнем пределах. Фундаментальные последовательности и критерий Коши.

Определение. Число a называется пределом последовательности $\{a_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ (n \geqslant N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$$

Пишут $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, или $a_n \to a$ при $n \to \infty$, или $a_n \to a$.

Теорема. *Теорема о единственности.*
Если $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *и* $\lim_{n\to\infty} a_n = b$, *то* $a = b$.

Доказательство. Пусть $a \neq b$, тогда $|a - b| > 0$. Положим, $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$, тогда:
$\exists N_1 \ \forall n \geqslant N_1 (|a_n - a| < \varepsilon)$
$\exists N_2 \ \forall n \geqslant N_2 (|a_n - b| < \varepsilon)$
Положим $N = max\{N_1, N_2\}$, тогда:

$$|a - b| = |a - a_N + a_N - b| \leqslant |a_N - a| + |a_N - b| < \varepsilon + \varepsilon = |a - b|$$

Противоречие. □

Теорема. *Теорема об ограниченности.*
Если последовательность $\{a_n\}$ *сходится, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть $a_n \to a \in \mathbb{R}$.
По определению предела ($\varepsilon = 1$):

$$\exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant N (a - 1 < a_n < a + 1)$$

Положим, $m = min\{a - 1, a_1, ..., a_{N-1}\}$, $M = max\{a + 1, a_1, ..., a_{N-1}\}$.
Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \ (m \leqslant a_n \leqslant M)$. □

Теорема. *О пределе в неравенствах.*
Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. *Тогда:*
1) $a < b \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N \ (a_n < b_n)$
2) $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant n_0 \ (a_n \leqslant b_n) \Rightarrow a \leqslant b$

Доказательство.
1) Положим $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$.
Тогда $\varepsilon > 0$ и по определению предела:
$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N(a_n < a + \varepsilon)$
$\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N(b_n > b - \varepsilon)$
Положим $N = max\{N_1, N_2\}$.
Тогда при $n \geqslant N$ имеем $a_n < a + \varepsilon = \frac{a+b}{2} = b - \varepsilon < b_n$.
2) Второе утверждение вытекает из первого по правилу контрапозиции. □

Замечание. Предельный переход не обязан сохранять строгие неравенства:
Пример: $a_n = 0, b_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ (0 < \frac{1}{n})$, но $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Теорема. *О зажатой последовательности.*
Пусть $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$ *для всех* $n \geqslant n_0$, *и* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = a$, *тогда существует* $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению предела:
$\exists N_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N_1\ (a - \varepsilon < a_n)$
$\exists N_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N_2\ (b_n < a + \varepsilon)$.
Положим $N = max\{N_1, N_2, n_0\}$, тогда при $n \geqslant N$ имеем:

$$a - \varepsilon < a_n \leqslant c_n \leqslant b_n < a + \varepsilon \Rightarrow |c_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = a$$

□

Теорема. *Об арифметических операциях с пределами.*
Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, *тогда:*

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
3. $b \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}\ (b_n \neq 0) \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b}$

Доказательство.

1. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению предела:
   $\exists N_1 \in \mathbb{N}\ n \geqslant N_1\ (|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2})$
   $\exists N_2 \in \mathbb{N}\ n \geqslant N_2\ (|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2})$
   Положим $N = max\{N_1, N_2\}$, тогда
   $\forall n \geqslant N\ |(a_n + b_n) - (a + b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

2. Так как $\{a_n\}$ – сходящаяся, то $\{a_n\}$ – ограниченная, то есть $\exists C > 0$, что $\forall n \in \mathbb{N}\ (|a_n| \leqslant C)$.
   Увеличивая C, если необходимо, можно считать, что $|b| \leqslant C$.
   Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению предела
   $\exists N_1\ \forall n \geqslant N_1\ (|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2C})$
   $\exists N_2\ \forall n \geqslant N_2\ (|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2C})$
   Положим $N = max\{N_1, N_2\}$, тогда при $n \geqslant N$ имеем:
   $|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leqslant |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| < C\frac{\varepsilon}{2C} + C\frac{\varepsilon}{2C} = \varepsilon$

3. Так как $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$, тогда по пункту 2 достаточно показать, что $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$.
   Поскольку $|b| \neq 0$, то по определению предела:
   $\exists N_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N_1\ (|b_n - b| < \frac{|b|}{2})$. При этом $|b| = |b - b_n + b_n| \leqslant |b_n - b| + |b_n| < \frac{|b|}{2} + |b_n|$, откуда $|b_n| > \frac{|b|}{2}$.
   Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению предела:
   $\exists N_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N_2\ (|b_n - b| < \frac{\varepsilon|b|^2}{2})$
   Положим $N = max\{N_1, N_2\}$. Тогда при $n \geqslant N$ имеем $|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| = \frac{|b_n - b|}{|b||b_n|} < \frac{2}{|b|^2} \cdot \varepsilon \cdot \frac{|b|^2}{2} = \varepsilon$

□

Определение. 1) Говорят, что $\{a_n\}$ *стремится* к $+\infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow a_n > \frac{1}{\varepsilon})$$

Пишут $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ или $a_n \to +\infty$.
2) Говорят, что $\{a_n\}$ *стремится* к $-\infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow a_n < \frac{-1}{\varepsilon})$$

Пишут $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ или $a_n \to -\infty$.
3) Последовательность a_n называется бесконечно большой (б.б.), если $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

Замечание. Если последовательность имеет предел в $\overline{\mathbb{R}}$, то он единственный.

Теорема. *О пределе монотонной последовательности*
1) Если последовательность $\{a_n\}$ нестрого возрастает, то существует $\lim_{n\to\infty} a_n = sup\{a_n\}$. Если к тому же $\{a_n\}$ ограничена сверху, то $\{a_n\}$ – сходящаяся.
2) Если последовательность $\{a_n\}$ нестрого убывает, то существует $\lim_{n\to\infty} a_n = inf\{a_n\}$. Если к тому же $\{a_n\}$ ограничена снизу, то $\{a_n\}$ – сходящаяся.

Доказательство. 1) Пусть $\{a_n\}$ ограничена сверху. Тогда $c = sup\{a_n\} \in \mathbb{R}$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$.
По определению супремума выполнено: $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}(a_n \leqslant c) \\ \exists N \in \mathbb{N}(a_N > c - \varepsilon) \end{cases}$
В силу возрастания при $n \geqslant N$:

$$c - \varepsilon < a_N \leqslant a_n \leqslant c < c + \varepsilon$$

Значит, $|a_n - c| < \varepsilon$. Т.к. $\varepsilon > 0$ – любое, то $c = \lim_{n\to\infty} a_n$.
Пусть $\{a_n\}$ неограничена сверху, $sup\{a_n\} = +\infty$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists N \in \mathbb{N}(a_N > \frac{1}{\varepsilon})$ и в силу возрастания $a_n \geqslant a_N > \frac{1}{\varepsilon}\ \forall n \geqslant N \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.
2) Аналогично пункту 1. $\square$

Определение. Последовательность отрезков $\{[a_n, b_n]\}$ называется *вложенной*, если $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]\ \forall n \in \mathbb{N}$. Если к тому же $\{b_n - a_n\} \to 0$, то $\{[a_n, b_n]\}$ называется *стягивающейся.*

Теорема. *Теорема Кантора*
Всякая последовательность вложенных отрезков имеет общую точку. Если последовательность стягивающейся, то такая точка единственная.

Доказательство. Пусть $\{[a_n, b_n]\}$ – последовательность вложенных отрезков.
Поскольку $a_1 \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant b_1\ \forall n$, то
$\{a_n\}$ – нестрого возрастает и ограничена сверху числом b_1,
$\{b_n\}$ – нестрого убывает и ограничена снизу числом a_1.
По теореме о пределе монотонной последовательности обе последовательности сходятся $a_n \to \alpha$ и $b_n \to \beta$.

Переходя в неравенстве $a_n \leqslant b_n\ \forall n$ к пределу при $n \to \infty$, получим $\alpha \leqslant \beta$. Ввиду монотонности $a_n \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b_n\ \forall n$, следовательно $\cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] \supset [\alpha, \beta]$, значит $\cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] \neq \varnothing$.

Пусть $\{[a_n, b_n]\}$ – стягивающаяся, и $x, y \in \cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$. Так как $x, y \in [a_n, b_n]\ \forall n \Rightarrow |x - y| \leqslant b_n - a_n\ \forall n$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим $x = y$, то есть $\cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \{x\}$, где $x = \alpha = \beta$. $\square$

Определение. Пусть $\{a_n\}$ – последовательность, $\{n_k\}$ – строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Последовательность $\{b_k\}$, где $b_k = a_{n_k}\ \forall k$, называется *подпоследовательностью* $\{a_n\}$ и обозначается $\{a_{n_k}\}$.

Теорема. *Больцано – Вейерштрасса*
Всякая ограниченная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Пусть $\{a_n\}$ – ограничена, тогда $a_n \in [c, d]\ \forall n$.
Положим $[c_1, d_1] = [c, d]$.
Положим $y = \frac{c_1+d_1}{2}$, тогда:
$[c_{k+1}, d_{k+1}] = \begin{cases} [c_k, y], \text{ если } \{m : a_m \in [c_k, y]\} \text{ – бесконечно} \\ [y, d_k] \text{ - иначе} \end{cases}$

По индукции будет построена последовательность вложенных отрезков $[c_k, d_k]$, каждый из которых содержит значения бесконечного множества членов a_n.
По теореме Кантора (о вложенных отрезках) существует общая точка $a = \lim_{k\to\infty} c_k = \lim_{k\to\infty} d_k$.
Построим строго возрастающую последовательность номеров $\{n_k\}$.
Положим $n_1 = 1$, если номер n_k найден, то выберем номер $n_{k+1} > n_k$ так, что $a_{n_{k+1}} \in [c_{k+1}, d_{k+1}]$.
Т.к. по построению $c_k \leqslant a_{n_k} \leqslant d_k\ \forall k$, то по теореме о зажатой последовательности $\{a_{n_k}\} \to a$. □

Определение. Точка $a \in \overline{\mathbb{R}}$ называется *частичным пределом* последовательности $\{a_n\}$, если a – предел некоторой подпоследовательности $\{a_{n_k}\}$.

Для последовательности $\{a_n\}$ определим $M_k = \sup_{n\geqslant k}\{a_n\}$, $m_k = inf_{n\geqslant k}\{a_n\}$. Так как при переходе к подмножеству, sup не увеличивается, а inf не уменьшается, то имеем следующую цепочку неравенств:

$$m_k \leqslant m_{k+1} \leqslant M_{k+1} \leqslant M_k\ \forall k$$

Следовательно, $\{m_k\}$ нестрого возрастает, а $\{M_k\}$ нестрого убывает, и значит, эти последовательности имеют предел в $\overline{\mathbb{R}}$.

Замечание. Если $\{a_n\}$ не ограничена сверху (снизу), то $M_k = +\infty$ $(m_k = -\infty)$ $\forall k$. Будем считать, что $\lim_{k\to\infty} M_k = +\infty$ $(\lim_{k\to\infty} m_k = -\infty)$.

Определение.
$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geqslant k}\{a_n\}$ называется *верхним пределом* $\{a_n\}$
$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{k\to\infty} \inf_{n\geqslant k}\{a_n\}$ называется *нижним пределом* $\{a_n\}$

Теорема. *Верхний (нижний) предел – это наибольший (наименьший) из частичных пределов последовательности в* $\overline{\mathbb{R}}$.

Доказательство. $M = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$, $m = \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n$
Нужно показать, что m, M – частичные пределы и все частичные пределы лежат между $[m, M]$.
Докажем, что M – это частичный предел $\{a_n\}$:

1. Пусть $M \in \mathbb{R}$. Так как $M - 1 < M_1 = \sup\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, то существует n_1 такой, что $M - 1 < a_{n_1} \leqslant M_{n_1}$. Так как $M - \frac{1}{2} < M_{n_1+1} = \sup_{n\geqslant n_1+1}\{a_n\}$, то существует номер $n_2 > n_1$ такой, что $M - \frac{1}{2} < a_{n_2} \leqslant M_{n_2}$ и т.д.
   По индукции будет построена подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$, такая что
   $M - \frac{1}{k} < a_{n_k} \leqslant M_{n_k}\ \forall k$.
   Поскольку $\lim_{k\to\infty}(M - \frac{1}{k}) = \lim_{k\to\infty}(M_{n_k}) = M$, то по теореме о зажатой последовательности $\{a_{n_k}\} \to M$.

2. Пусть $M = +\infty \Rightarrow M_k = +\infty\ \forall k$.
   Так как $\{a_n\}$ не ограничена сверху, то существует номер n_1, такой что $1 < a_{n_1}$.
   Так как $\{a_n\}$ не ограничена сверху, то существует n_2, такой что $2 < a_{n_2}$.
   По индукции будет построена $\{a_n\}$, такая что $k < a_{n_k}$. Так как последовательность $\{k\}_{k=1}^{\infty} \to +\infty$, то $a_{n_k} \to +\infty$.

3. Пусть $M = -\infty$. Так как $a_k \leqslant M_k\ \forall k$
   $M_k \to -\infty$, то $a_k \to -\infty$.

В любом из случаев M – частичный предел $\{a_n\}$.
Доказательство для m аналогично.
Пусть a – частичный предел $\{a_n\}$, $a_{n_k} \to a$. Т.к. $n_k \geqslant k$, то

$$m_k \leqslant a_{n_k} \leqslant M_k\ \forall k$$

Перейдем к пределу при $k \to \infty$. Получим $m \leqslant a \leqslant M$. ☐

Определение. Последовательность a_n называется *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m \in \mathbb{N}(n \geqslant N, m \geqslant N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon)$$

Лемма. *Всякая фундаментальная последовательность ограничена.*

Доказательство. Пусть $\{a_n\}$ фундаментальна. Тогда

$$\exists N\ \forall n, m \geqslant N(|a_n - a_m| < 1)$$

В частности, $\forall n \geqslant N\ (a_N - 1 < a_n < a_N + 1)$. Положим $\alpha = min\{a_1, ..., a_{N-1}, a_N - 1\}, \beta = max\{a_1, ..., a_{N-1}, a_N + 1\}$, тогда $\alpha \leqslant a_n \leqslant \beta\ \forall n \in \mathbb{N}$. ☐

Теорема. *Критерий Коши.*
Последовательность $\{a_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

Доказательство. 1) Пусть $a_n \to a \in \mathbb{R}$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению предела $\exists N$ $\forall n \geqslant N$ $(|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2})$. Тогда при $n, m \geqslant N$

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)| \leqslant |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Значит, последовательность $\{a_n\}$ – фундаментальна.
2) Пусть $\{a_n\}$ фундаментальна. По лемме $\{a_n\}$ ограничена. Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса:

$$\exists \{a_{n_k}\}, a_{n_k} \to a$$

Покажем, что $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению фундаментальной последовательности $\exists N\ \forall n,m \geqslant N(|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2})$. Покажем, что N – подходящий номер в определении предела $\{a_n\}$ для ε. В силу сходимости $\{a_{n_k}\}$ $\exists K\ \forall k \geqslant K$ $(|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2})$. Положим $M = max\{N, K\}$. Тогда $n_M \geqslant M \geqslant N, n_M \geqslant M \geqslant K$ и, значит, при $n \geqslant N$:

$$|a_n - a| \leqslant |a_n - a_{n_M}| + |a_{n_M} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$, то $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. ☐

3. Внутренность, внешность и граница подмножества $\mathbb{R}$. Открытые и замкнутые множества и их свойства. Предельные точки множества, критерии замкнутости. Замкнутость множества частичных пределов. Замыкание множества. Лемма Гейне–Бореля.

Определение. Пусть $\varepsilon > 0, a \in \mathbb{R}$. Введем обозначения

1. $B_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ – ε–окрестность в точке a.
2. $\mathring{B}_\varepsilon(a) = B_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ – проколотая ε–окрестность в точке a.

Классифицируем точки по отношению к заданному множеству.

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}$ и $x \in \mathbb{R}$.

1. Точка x называется *внутренней* точкой множества E, если $\exists \varepsilon > 0$ $(B_\varepsilon(x) \subset E)$. Обозначение $int(E)$ – множество всех внутренних точек E.
2. Точка x называется *внешней* точкой множества E, если $\exists \varepsilon > 0$ $(B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R} \setminus E)$. Обозначение $ext(E)$ – множество всех внешних точек E.
3. Точка x называется *граничной* точкой множества E, если $\forall \varepsilon > 0$ $B_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing$, $B_\varepsilon(x) \cap R \setminus E \neq \varnothing$. Обозначение $\delta(E)$ – множество всех граничных точек E.

Замечание.

$$\mathbb{R} = int(E) \cup ext(E) \cup \delta(E), \text{ и } int(E), ext(E), \delta(E) \text{ попарно не пересекаются.}$$

Определение. Множество $G \subset \mathbb{R}$ называется *открытым*, если все его точки являются внутренними. То есть $G = int(G)$. Множество $F \subset \mathbb{R}$ называется *замкнутым*, если $\mathbb{R} \setminus F$ открыто.

Лемма.

1. *Если G_λ – открытое $\forall \lambda \in \Lambda$, то $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ – открытое множество.*
2. *Если $G_1, G_2, ..., G_m$ – открытые, то $\bigcap\limits_{k=1}^{m} G_k$ – открытое множество.*
3. *$\mathbb{R}, \varnothing$ – открытые множества.*

Доказательство. 1) Пусть $G = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$. Пусть $x \in G \Rightarrow \exists \lambda_0 \in \Lambda (x \in G_{\lambda_0})$.
G_{λ_0} – открытое, $x \in G_{\lambda_0} \Rightarrow \exists B_\varepsilon(x) \subset G_{\lambda_0} \subset G$, т. е. x – внутренняя точка G.
2) Пусть $G = \bigcap\limits_{k=1}^{m} G_k$, $x \in G$. Тогда $\forall k = 1, .., m : (x \in G_k)$, G_k – открытое $\Rightarrow \exists B_{\varepsilon_k}(x) \subset G_k$.
Положим $\varepsilon = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant m} \{\varepsilon_k\}$, тогда $\varepsilon > 0$ и $B_\varepsilon(x) \subset B_{\varepsilon_k}(x) \subset G_k$ для $k = 1, .., m \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{m} G_k = G$, т. е. x – внутренняя точка G.
3) Вытекает из определения. □

Лемма.

1. *Если F_λ – замкнутое $\forall \lambda \in \Lambda$, то $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ – замкнутое.*
2. *Если $F_1, ..., F_m$ – замкнуто, то $\bigcup\limits_{k=1}^{m} F_k$ – замкнутое.*
3. *$\mathbb{R}, \varnothing$ – замкнутые.*

Доказательство. 1) $\mathbb{R} \setminus \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} (\mathbb{R} \setminus F_\lambda)$.
2) $\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{m} F_k = \bigcap\limits_{k=1}^{m} (\mathbb{R} \setminus F_k)$, то утверждение следует из леммы 1 и законов Де Моргана.
3) Оба множества замкнуты, т.к. мы доказали, что дополнения к ним открыты. □

Определение. Точка $x \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой* множества $E \in \mathbb{R}$, если $\forall\varepsilon > 0$ $(\mathring{B}_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing)$. Множество предельных точек обозначается $E^{'}$.

Лемма.

$x \in E$ – предельная $\Leftrightarrow$ $\exists\{x_n\} : x_n \to x$ и $x_n \neq x$.

Доказательство. Пусть x – предельная точка множества E. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество $\overset{o}{B}_{1/n}(x) \cap E$ не пусто. Выберем точку $x_n \in \overset{o}{B}_{1/n}(x) \cap E$. Так как $|x_n - x| < \frac{1}{n}$, то последовательность $\{x_n\}$ сходится к x.
Обратно, пусть последовательность x_n удовлетворяет перечисленным в условии свойствам. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется номер N, такой что $|x_n - x| < \varepsilon$ для всех $n \geqslant N$. Значит, $\overset{o}{B}_\varepsilon(x) \cap E$ не пусто (содержит, например, $x_N \neq x$), и точка x предельная для E. □

Теорема. *Критерии замкнутости*
Пусть $E \subset \mathbb{R}$, тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. *E замкнуто*
2. *E содержит все свои граничные точки*
3. *E содержит все свои предельные точки*

Доказательство. 1. $1 \Rightarrow 2$
$x \in \mathbb{R} \setminus E$ (открытое) $\Rightarrow \exists B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R} \setminus E \Rightarrow x$ – внешняя точка $E \Rightarrow x \neq \delta(E) \Rightarrow E \supset \delta(E)$.

2. $2 \Rightarrow 3$
Любая предельная точка – внутренняя или граничная. $int(E) \subset E, \delta(E) \subset E \Rightarrow E^{'} \subset E$.

3. $3 \Rightarrow 1$
$x \in \mathbb{R} \setminus E \Rightarrow x \notin E' \Rightarrow \exists \mathring{B}_\varepsilon(x) \cap E = \varnothing \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R} \setminus E \Rightarrow \mathbb{R} \setminus E$ – открыто $\Rightarrow E$ – замкнуто. □

Следствие. E – замкнуто $\iff \forall x_n \subset E (x_n \to x \Rightarrow x \in E)$

Доказательство. $\Rightarrow$
Пусть $\{x_n\} \subset E$, а $x \notin E$.
$x_n \to x \Rightarrow x \in E' \Rightarrow E$ – не замкнуто по 3 критерию замкнутости, так как $x \notin E$. □

Доказательство. $\Leftarrow$
Пусть задано условие на последовательности. Тогда $E \supset E'$ по лемме, следовательно E – замкнуто по 3 критерию замкнутости. □

Определение. $\bar{E} = E \cup \delta(E)$ – *замыкание множества E.*

Лемма. *Множество $\bar{E}$ – замкнуто. Более того, $\bar{E} = E \cup E'$.*

Доказательство. Пусть $x \in \mathbb{R} \setminus \bar{E} \Rightarrow x \in ext(E) \Rightarrow \exists B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R} \setminus E$. Кроме того, $B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R} \setminus \bar{E}$, иначе $B_\varepsilon(x) \cap \delta(E) \neq \varnothing$, но тогда $B_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing$. Следовательно $\mathbb{R} \setminus \bar{E}$ – открыто.
2 утверждение вытекает из 2 наблюдений:

1. любая предельная точка либо внутренняя, либо граничная $(E \cup E' \subset E \cup \delta(E))$

2. Любая граничная точка, не принадлежащая множеству E является предельной ($E \cup \delta(E) \subset E \cup E'$)

$\square$

Определение. Семейство $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ называется *покрытием* множества E, если $E \subset \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$. Если все множества G_λ открыты, то покрытие называется *открытым.*

Теорема. *Гейне-Борель*
Если $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *– открытое покрытие* $[a,b]$*, то* $\exists\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n \in \Lambda$ $([a,b] \subset G_{\lambda_1} \cup G_{\lambda_2} \cup ... \cup G_{\lambda_n})$

Доказательство. Предположим, $[a,b]$ не покрывается никаким конечным набором G_λ. Разделим $[a,b]$ пополам и обозначим $[a_1,b_1]$ ту половину, которая не покрывается конечным набором G_λ. Разделим пополам $[a_1,b_1]$ и т.д. По индукции будет построена $\{[a_n,b_n]\}$ – стягивающаяся ($b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$), каждый из её отрезков не покрывается конечным набором G_λ. По теореме Кантора $\exists c \in \cap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$. $c \in [a,b] \subset \cup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda \Rightarrow \exists\lambda_0 \in \Lambda$ $(c \in G_{\lambda_0})$. G_{λ_0} – открыто $\Rightarrow \exists B_\varepsilon(c) \subset G_{\lambda_0}$.
$a_n \to c, b_n \to c \Rightarrow \forall\varepsilon > 0$ $\exists k : c - a_k < \varepsilon,$ $b_k - c < \varepsilon \Rightarrow [a_k,b_k] \subset B_\varepsilon(c) \subset G_{\lambda_0}$. Противоречие с выбором $[a_k,b_k]$. $\square$

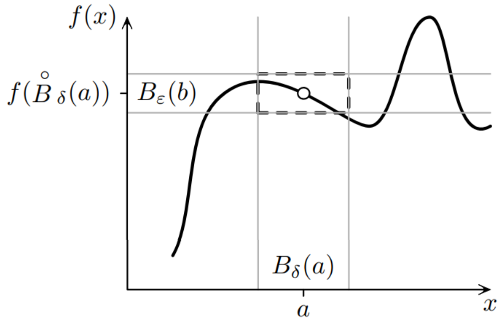
4. Определения предела функции в точке по Коши и по Гейне, их равносильность. Свойства пределов функции. Предел композиции. Критерий Коши существования предела функции. Односторонние пределы функции, теорема об односторонних пределах монотонной функции.

Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$

Определение. *Коши.* Точка b называется *пределом* функции f в точке a, если a – предельная точка множества E и

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E\ (x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b))$$

Пишут $\lim_{x\to a} f(x) = b$, или $f(x) \to b$ при $x \to a$.



Определение. *Гейне.* Точка b называется *пределом* функции f в точке a, если a – предельная точка E и выпонено следующее:

$$\forall \{x_n\} \subset E \setminus \{a\}\ (x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to b)$$

Пишут $\lim_{x\to a} f(x) = b$, или $f(x) \to b$ при $x \to a$.

Теорема. *Определения пределов по Коши и по Гейне равносильны.*

Доказательство. Пусть $f : E \longrightarrow R$, a – предельная точка множества E.
$\Rightarrow$ Пусть $b = \lim_{x\to a} f(x)$ по Коши. Рассмотрим произвольную $\{x_n\} \subset E \setminus \{a\}$, $x_n \to a$. Докажем, что $f(x_n) \to b$.
Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению предела $\exists \delta > 0\ \forall x \in E\ (x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b))$. Т.к. $x_n \to a$, то $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N\ (x_n \in B_\delta(a))$. По условию $x_n \in E \setminus \{a\}$ и, значит, $\forall n \geqslant N\ (x_n \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E)$. Тогда $\forall n \geqslant N : f(x_n) \in B_\varepsilon(b) \Rightarrow f(x_n) \to b$. Определение предела по Гейне выполняется.
$\Leftarrow$ Пусть b – предел f в точке a по Гейне. Покажем, что b – предел функции по Коши. Пусть так, и предположим, что b не является пределом f в точке a по Коши. Тогда

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in E (x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \text{ и } f(x) \notin B_\varepsilon(b))$$

Положим $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ и соответствующее значение x обозначим x_n. По построению $\{x_n\} \subset E \setminus \{a\}$ и $x_n \to a$ (т.к. $x_n \in \overset{\circ}{B}_{\frac{1}{n}}(a)$). По определению предела по Гейне $f(x_n) \to b$, значит $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N\ (f(x_n) \in B_\varepsilon(b))$. Противоречие по построению (все $f(x_n) \notin B_\varepsilon(b)$). □

Пусть $f,g,h : E \longrightarrow \mathbb{R}$, a – предельная точка множества E.

Определение. $f : X \longrightarrow Y$, $A \subset X$. *Сужением* f на множестве A называется

$$f|_A : A \longrightarrow Y, (f|_A)(x) = f(x)\ \forall x \in A$$

1. (о единственности) Если $\lim_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim_{x\to a} f(x) = c$, то $b = c$

   Доказательство. Рассмотрим произвольную $\{x_n\} \subset E \setminus \{a\}$, $x_n \to a$. По определению Гейне:

   $$f(x_n) \to b \text{ и } f(x_n) \to c$$

   В силу единственности предела последовательности $b = c$. □

2. (о пределе по подмножеству) Если $\lim_{x\to a} f(x) = b$ и a – предельная точка множества $D \subset E$, то $\lim_{x\to a} f|_D(x) = b$.

   Доказательство. Рассмотрим $\{x_n\} \subset D \setminus \{a\}$, $x_n \to a$. Тогда

   $$f|_D(x_n) = f(x_n) \to b$$

   По определению Гейне, $b = \lim_{x\to a} f|_D(x)$. □

3. (о зажатой функции) Пусть $\exists \sigma > 0\ \forall x \in \overset{o}{B}_\sigma(a) \cap E\ (f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x))$. Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = b$. Тогда $\exists \lim_{x\to a} h(x) = b$.

   Доказательство. Рассмотрим $x_n \subset E \setminus \{a\}$, $x_n \to a$. Тогда $\exists n_0\ \forall n \geqslant n_0 (x_n \in \overset{o}{B}_\sigma(a) \cap E)$ и, значит, $f(x_n) \leqslant h(x_n) \leqslant g(x_n)$. По условию $f(x_n) \to b$, $g(x_n) \to b$. Тогда, по свойству предела последовательности, $h(x_n) \to b \Rightarrow b = \lim_{x\to a} h(x)$. □

4. (арифметические операции с пределами) Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$. Тогда справедливы следующие утверждения:
   1. $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = b \pm c$.
   2. $\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c$.
   3. Если $c \neq 0$ и $g(x) \neq 0\ \forall x \in E$, то $\lim_{x\to a}(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{b}{c}$.

   Заключение следует понимать так: если существует величина справа, то существует величина слева и они равны.

   Доказательство. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\} \in E$ с условиями $x_n \to a$ и $x_n \neq a$. Тогда $f(x_n) \to b$ и $g(x_n) \to c$. По свойствам предела последовательности $f(x_n) \pm g(x_n) \to b \pm c$, $f(x_n) \cdot g(x_n) \to b \cdot c$, $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \frac{b}{c}$. Осталось воспользоваться определением предела по Гейне. □

5. (о локализации) Если $\exists \sigma > 0\ \forall x \in \overset{o}{B}_\sigma(a) \cap E\ (f(x) = g(x))$ и $\lim_{x\to a} f(x) = b$, то $\exists \lim_{x\to a} g(x) = b$.

   Доказательство. Если в определении Коши предел f для $\varepsilon > 0$ подходит $\delta > 0$, то в поределении Коши предел g подходит $\delta' = min\{\delta, \sigma\}$. □

6. (о локализации ограниченности) Если $\exists \lim_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R}$, то $\exists C > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \overset{o}{B}_\delta(a) \cap E\ (|f(x)| \leqslant C)$.

Доказательство. Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = b$. Тогда $\exists \delta > 0\ \forall x \in \overset{o}{B}_\delta(a) \cap E\ (b - 1 < f(x) < b + 1)$. Положим $c = |b| + 1$. Тогда $|f(x)| < c$. □

7. (О пределе композиции.) Пусть $E, D \subset \mathbb{R}$ и $f : E \longrightarrow D$ и $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$, такие что $\lim_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim_{y\to b} g(y) = c$. Пусть выполнено одно из двух условий:
1) $f(x) \neq b$ в некоторой проколотой окрестности множества a или
2) $g(b) = c$. Тогда $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c = \lim_{y\to b} g(y)$.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению предела

$$\exists \sigma > 0\ \forall y \in \overset{o}{B}_\sigma(b) \cap D\ (g(y) \in B_\varepsilon(c))$$

$$\exists \delta > 0\ \forall x \in \overset{o}{B}_\delta(a) \cap E\ (f(x) \in B_\sigma(b))$$

1) Уменьшая δ, если необходимо, можно считать, что $f(x) \neq b$ на $\overset{o}{B}_\delta(a) \cap E$. Тогда $f(x) \in \overset{o}{B}_\sigma(b) \cap D$. Поэтому $g(f(x)) \in B_\varepsilon(c) \Rightarrow \lim_{x\to a} g(f(x)) = c$.

2) Если $f(x) = b$ для некоторого $x \in \overset{o}{B}_\delta(a)$, то $g(f(x)) = c \in B_\varepsilon(c)$. Поэтому $\forall x \in \overset{o}{B}_\delta(a) \cap E\ (g(f(x)) \in B_\varepsilon(c)) \Rightarrow \lim_{x\to a} g(f(x)) = c$. □

Теорема. *Критерий Коши.*
Пусть $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, a – предельная точка множества E. Функция f имеет конечный предел в точке a тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, x' \in \mathring{B}_\delta(a) \cap E\ (|f(x) - f(x')| < \varepsilon)$$

Доказательство.
$\Rightarrow$ Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = b$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению предела функции $\exists \delta > 0\ \forall x \in \mathring{B}_\delta(a) \cap E\ (|f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2})$. Тогда $\forall x, x' \in \mathring{B}_\delta(a) \cap E$ имеем

$$|f(x) - f(x')| \leqslant |f(x) - b| + |f(x') - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Так как $\varepsilon > 0$ – любое, то условия теоремы выполняются.
$\Leftarrow$ Пусть f удовлетворяет условию теоремы. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем соответствующее $\delta > 0$. Рассмотрим произвольную последовательность точек $x_n \in E$ со свойствами $x_n \to a$ и $x_n \neq a$. Найдется такой номер N, что $\forall n \geqslant N\ (x_n \in \mathring{B}_\delta(a) \cap E)$ и, значит, $\forall n, m \geqslant N\ (|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon)$. Таким образом, последовательность $\{f(x_n)\}$ – фундаментальна. По критерию Коши для последовательностей $\{f(x_n)\}$ сходится к некоторому числу b. Рассмотрим еще последовательность точек $y_n \in E$ со свойствами $y_n \to a$ и $y_n \neq a$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0\ (x_n, y_n \in \mathring{B}_\delta(a) \cap E)$ и, значит, по условию $\forall n \geqslant n_0\ (|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon)$. Это означает, что $f(x_n) - f(y_n) \to 0$, так что $f(y_n) \to b$. По определению Гейне $b = \lim_{x\to a} f(x)$. □

Определение. Если a – предельная точка $(a, +\infty) \cap E$, то предел сужения $f|_{(a,+\infty)\cap E}$ в точке a называется *пределом справа* функции f в точке a и обозначается $f(a + 0)$, или $\lim_{x\to a+0} f(x)$.
Если a – предельная точка $(-\infty, a) \cap E$, то предел сужения $f|_{(-\infty,a)\cap E}$ в точке a называется *пределом слева* функции f в точке a и обозначается $f(a - 0)$, или $\lim_{x\to a-0} f(x)$.
Пределы функции слева и справа называются *односторонними*.

Определение. Пусть $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, и $D \subset E$.
Функция f называется *нестрого возрастающей (нестрого убывающей)* на D, если для любых $x, x' \in D$ из условия $x < x'$ следует $f(x) \leqslant f(x')(f(x) \geqslant f(x'))$.

Если вместо $\leqslant$ ($\geqslant$) написать $<$ ($>$), то функцию называют *строго возрастающей (строго убывающей)*.
Нестрого возрастающие и нестрого убывающие функции называются *монотонными*.

Теорема. *Об односторонних пределах монотонной функции*
Пусть $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$. *Если функция* f *нестрого возрастает на* (a, b), *то существуют* $\lim_{x\to b-0} f(x) = \sup_{x\in(a,b)} f(x)$ *и* $\lim_{x\to a+0} f(x) = \inf_{x\in(a,b)} f(x)$.
В случае нестрогого убывания $\sup$ *и* $\inf$ *меняются местами.*

Доказательство. Предположим, что f нестрого возрастает на (a, b). Пусть $s = \sup_{(a,b)} f(x)$. По определению супремума для любого $r < s$ существует такое $x_r \in (a,b)$, что $r < f(x_r)$. Тогда в силу возрастания $r < f(x) \leqslant s$ для всех $x \in (x_r, b)$.
Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Положим $r = s - \varepsilon$, если $s \in \mathbb{R}$, и $r = \frac{1}{\varepsilon}$, если $s = +\infty$. Тогда $f(x) \in B_\varepsilon(s)$ для всех $x \in (x_r, b)$.
Для завершения доказательства осталось показать, что существует такое $\delta > 0$, что (x_r, b) включает интервал $(b-\delta, b)$ в случае $b \in \mathbb{R}$, и луч $(\frac{1}{\delta}, +\infty)$ в случае $b = +\infty$. В первом случае подходит $\delta = b - x_r$, во втором $\delta = \frac{1}{|x_r|+1}$.
Остальные равенства рассматриваются аналогично. □

Следствие. Пусть функция f монотонна на (a, b) и $c \in (a, b)$. Тогда существуют конечные пределы $f(c-0)$ и $f(c+0)$, причем $f(c-0) \leqslant f(c) \leqslant f(c+0)$, если f нестрого возрастает на (a, b), и $f(c-0) \geqslant f(c) \geqslant f(c+0)$, если f нестрого убывает.

Доказательство. Если f нестрого возрастает на (a, b), то $f(x) \leqslant f(c)$ для всех $x \in (a, c)$ и, значит, $f(c-0) = \sup_{(a,c)} f(x) \leqslant f(c)$. Аналогично для предела справа. □

5. Непрерывность функции в точке. Равносильные определения непрерывности. Теорема о непрерывности композиции. Точки разрыва, их классификация. Теорема о разрывах монотонной функции.

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, задана функция $f : E \to \mathbb{R}$ и $a \in E$. Функция f называется *непрерывной* в точке a, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E\ (x \in B_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(f(a)))$$

Теорема. *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $a \in E$. Следующие условия эквивалентны:*

1. *функция f непрерывна в точке a;*
2. *$\forall \{x_n\}$, $x_n \in E$ $(x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a))$;*
3. *a – изолированная точка множества E, или a – предельная точка E и $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Доказательство.
(1) ⇒ (2) Рассмотрим произвольную последовательность точек $x_n \in E$, сходящуюся к a. Покажем, что $f(x_n) \to f(a)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению непрерывности найдется такое $\delta > 0$, что $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ для всех $x \in B_\delta(a) \cap E$. Так как $x_n \to a$, то существует такой номер N, что $x_n \in B_\delta(a) \cap E$ при всех $n \geqslant N$ и, значит, $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$.
(2) ⇒ (3) Если a – предельная точка E, то в силу (2) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ по определению Гейне предела функции. Если a не является предельной точкой E, то по определению a – изолированная точка E.
(3) ⇒ (1) Если a изолирована, то $B_{\delta_0}(a) \cap E = \{a\}$ для некоторого $\delta_0 > 0$. Тогда определение непрерывности в точке a выполняется для $\delta = \delta_0$. Пусть a предельная точка E. По определению Коши предела функции $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E\ (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$. Но последняя импликация очевидно выполняется и для $x = a$. Значит, функция f непрерывна в точке a. □

Теорема. *О непрерывности композиции*
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, и $g : D \to \mathbb{R}$, причем $f(E) \subset D$. Если функция f непрерывна в точке a, функция g непрерывна в точке $f(a)$, то композиция $g \circ f : E \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке a.

Доказательство. Пусть $x_n \in E$ и $x_n \to a$. Тогда $f(x_n) \to f(a)$ в силу непрерывности f в точке a, и $g(f(x_n)) \to g(f(a))$ в силу непрерывности g в точке $f(a)$. По теореме об эквивалентных определениях непрерывности, функция $g \circ f$ непрерывна в точке a. □

Определение. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $a \in E$. Если f не является непрерывной в точке a, то говорят, что f *разрывна* в точке a, а точку a называют *точкой разрыва* функции f.

Пусть функция задана в проколотой окрестности точки a. Если существуют конечные пределы $f(a-0)$ и $f(a+0)$, но не все числа $f(a-0)$, $f(a+0)$ и $f(a)$ равны между собой (случай, когда f не определена в самой точке a тоже допускается), то a называется *точкой разрыва I рода.* В противном случае, т.е. хотя бы один из односторонних пределов бесконечен или не существует, то a называется *точкой разрыва II рода f*.
Если a – точка разрыва I рода и $f(a-0) = f(a+0)$, то a называется *точкой устранимого разрыва* функции f.

Теорема. *О разрывах монотонной функции*
Если функция f монотонна на конечном или бесконечном интервале (a, b), то f может иметь на (a, b) разрывы только I рода, причем их не более чем счетное множество.

Доказательство. Пусть для определенности f нестрого возрастает. По следствию из теоремы об односторонних пределах монотонной функции, для любой точки $c \in (a, b)$ существуют конечные $f(c+0)$ и $f(c-0)$, причем $f(c-0) \leqslant f(c) \leqslant f(c+0)$. Поэтому, если f разрывна в точке c, то $f(c-0) < f(c+0)$ и, значит, c – точка разрыва I рода.
Пусть $c, d \in (a, b)$, причем $c < d$. Ввиду возрастания функции $\inf_{(c,b)} f(x) = \inf_{(c,d)} f(x)$ и $\sup_{(a,d)} f(x) = \sup_{(c,d)} f(x)$ и, значит,

$$f(c+0) = \inf_{x \in (c,d)} f(x) \leqslant \sup_{x \in (c,d)} f(x) = f(d-0).$$

Поэтому, если c, d – точки разрыва f, то интервалы $(f(c-0), f(c+0))$ и $(f(d-0), f(d+0))$ не пересекаются. Поставим в соответствие каждому такому интервалу рациональное число, содержащееся в нем. Тем самым установим биекцию между множеством таких интервалов и подмножеством $\mathbb{Q}$. Любое подмножество $\mathbb{Q}$ не более чем счетно, поэтому множество точек разрыва f не более чем счетно. $\square$

6. Ограниченность непрерывной на отрезке функции. Теорема Вейерштрасса о достижимости точных граней. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции. Непрерывность монотонной функции, отображающей промежуток на промежуток. Теорема об обратной функции. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора о равномерной непрерывности. Экспонента и ее свойства. Второй замечательный предел. Сравнение асимптотического поведения функций, O–символика.

Определение. Функция называется *непрерывной* на D, если она непрерывна в каждой точке множества D.

Лемма. *Если функция f непрерывна на $[a,b]$, то она ограничена на $[a,b]$.*

Доказательство. Предположим, что f не является ограниченной. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется такое $x_n \in [a,b]$, что $|f(x_n)| > n$. По теореме Больцано–Вейерштрасса $\{x_n\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность, $x_{n_k} \to c$. Переходя в неравенстве $a \leqslant x_{n_k} \leqslant b$ к пределу при $k \to \infty$ или пользуясь замкнутостью $[a,b]$, получаем $c \in [a,b]$. Тогда по непрерывности $f(x_{n_k}) \to f(c)$, что приводит к противоречию, т.к. $\{f(x_{n_k})\}$ неограничена. □

Теорема. *Вейерштрасс*
Если функция f непрерывна на $[a,b]$, то существуют $x_m, x_M \in [a,b]$, такие что $f(x_M) = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ и $f(x_m) = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$.

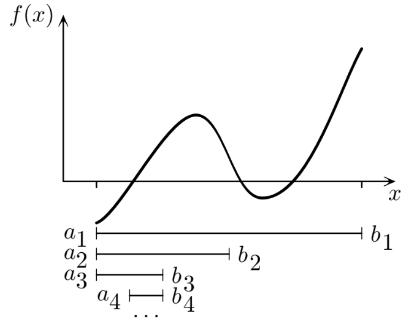
Доказательство. По определению супремума для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется такое $x_n \in [a,b]$, что $M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leqslant M$ и, значит, $f(x_n) \to M$. По теореме Больцано–Вейерштрасса существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} \to x_M$. Тогда по непрерывности $f(x_{n_k}) \to f(x_M)$. С другой стороны, $f(x_{n_k}) \to M$. В силу единственности предела $f(x_M) = M$.
Доказательство для инфимума аналогично. □

Лемма. *Если функция f непрерывна на $[a,b]$ и $f(a)f(b) < 0$, то существует такое $c \in (a,b)$, что $f(c) = 0$.*

Доказательство. Пусть $f(a) < 0 < f(b)$. Положим $[a_1,b_1] = [a,b]$. Если $f(\frac{a_1+b_1}{2}) = 0$, то $c = \frac{a_1+b_1}{2}$. Иначе положим

$$[a_2,b_2] = \begin{cases} [a_1, \frac{a_1+b_1}{2}], \text{ если } f(\frac{a_1+b_1}{2}) > 0, \\ [\frac{a_1+b_1}{2}, b_1], \text{ если } f(\frac{a_1+b_1}{2}) < 0. \end{cases}$$

Разделим $[a_2,b_2]$ пополам и повторим процесс. Если на некотором шаге функция f обнулится в середине отрезка, то точка c найдена. Иначе будет построена стягивающаяся последовательность отрезков $\{[a_n,b_n]\}$, что $f(a_n) < 0 < f(b_n)$. По теореме Кантора существует точка c – общая для всех отрезков $[a_n,b_n]$, причем $a_n \to c$ и $b_n \to c$. Тогда $f(c) \leqslant 0 \leqslant f(c)$, т.е. $f(c) = 0$. □



Теорема. *Коши о промежуточных значениях*
Если функция f непрерывна на $[a,b]$, то для любого числа s, лежащего между $f(a)$ и $f(b)$, найдется такое $c \in [a,b]$, что $f(c) = s$.

Доказательство. Если s совпадает с $f(a)$ или $f(b)$, то в качестве точки c можно взять a или b соответственно. В противном случае рассмотрим функцию $g = f - s$. Функция g непрерывна на $[a,b]$ и $g(a)g(b) < 0$. По лемме, существует $c \in (a,b)$, что $g(c) = 0$, т.е. $f(c) = s$. □

Следствие. Если функция f непрерывна на промежутке I, то $f(I)$ – промежуток.

Доказательство. Пусть $y_1, y_2 \in f(I)$, тогда найдутся точки $x_1, x_2 \in I$, такие что $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$. Если $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$, то по теореме Коши существует точка $x \in [x_1, x_2]$, такая что $f(x) = y$. Так как I – промежуток, то $x \in I$ и, значит, $y \in f(I)$. □

Лемма. *Если функция f монотонна на промежутке I и $f(I)$ – промежуток, то f непрерывна на I.*

Доказательство. Пусть f нестрого возрастает на I. Предположим, функция f имеет разрыв в точке $c \in I$. Поскольку $f(c-0) \leqslant f(c) \leqslant f(c+0)$ (если c – концевая точка, то существет только один из односторонних пределов, для которого и проводятся рассуждения), то хотя бы одно из неравенств строгое и, значит, хотя бы один из интервалов $(f(c-0), f(c))$ или $(f(c), f(c+0))$ не пуст.
Пусть интервал $J := (f(c), f(c+0))$ не пуст (случай непустого $(f(c-0), f(c))$ рассматривается аналогично). Тогда $f(t) \leqslant f(c)$ для любого $t \in I$, $t \leqslant c$, и $f(t) \geqslant \inf_{(c, \sup I)} f(x) = f(c+0)$ для любого $t \in I$, $t > c$. Таким образом, интервал J не пересекается с $f(I)$, но с обеих сторон имеются точки из $f(I)$. Это означает что $f(I)$ не является промежутком. □

Теорема. *Об обратной функции*
Если функция $f : I \to \mathbb{R}$ строго монотонна и непрерывна на промежутке I, то $f(I)$ – промежуток, f – биекция I на $f(I)$ и обратная функция $f^{-1} : f(I) \to I$ также строго монотонна и непрерывна.

Доказательство. По следствию из теоремы Коши о промежуточных значениях, множество $J = f(I)$ является промежутком. Если $x_1, x_2 \in I$ и $x_1 \neq x_2$, то в силу строгой монотонности $f(x_1) \neq f(x_2)$ и, значит, f – инъекция. Поэтому $f : I \to J$ – биекция и существует обратная функция $f^{-1} : J \to I$.
Пусть f строго возрастает на I. Пусть $y_1, y_2 \in J$ и $y_1 < y_2$. Положим $x_1 = f^{-1}(y_1)$ и $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Если $x_1 \geqslant x_2$, то $y_1 = f(x_1) \geqslant f(x_2) = y_2$, противоречие. Следовательно, $x_1 < x_2$ и функция f^{-1} строго возрастает. Так как $f^{-1}(J) = I$ – промежуток, то по лемме функция f^{-1} непрерывна на J. □

Определение. Пусть функция f определена на $E \subset \mathbb{R}$. Функция f называется *равномерно непрерывной* на E, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, x' \in E\ (|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon).$$

Теорема. *Кантор*
Если функция f непрерывна на $[a,b]$, то она равномерно непрерывна на $[a,b]$.

Доказательство. Пусть f непрерывна, но не является равномерно непрерывной на $[a,b]$. Тогда

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x, x' \in [a,b]\ (|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| \geqslant \varepsilon).$$

Полагая $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, найдем соответствующие точки $x_n, x'_n \in [a,b]$, что $|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}$ и $|f(x_n) - f(x'_n)| \geqslant \varepsilon$. По теореме Больцано–Вейерштрасса $\{x_n\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность

$\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} \to x_0 \in [a,b]$. Поскольку $x_{n_k} - \frac{1}{n_k} \leqslant x'_{n_k} \leqslant x_{n_k} + \frac{1}{n_k}$, то $x'_{n_k} \to x_0$ по теореме о зажатой последовательности. Следовательно, $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(x'_{n_k}) = f(x_0)$, что противоречит условию $|f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \geqslant \varepsilon > 0$. □

Определение. Функция $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $exp(x) = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n$, называется *экспонентой.*

Теорема. *Для любого* $x \in \mathbb{R}$ *существует конечный* $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = exp(x)$*. Кроме того,* $exp(x+y) = exp(x)\cdot exp(y)$ *для всех* $x, y \in \mathbb{R}$.

Доказательство. 1) Докажем сходимость последовательности $a_n(x) = (1+\frac{x}{n})^n$. Зафиксируем натуральное $m > |x|$. Тогда при $n \geqslant m$ верно $a_n(x) > 0$ и

$$\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} = \frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{(1+\frac{x}{n})^n} = \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(\frac{(1+\frac{x}{n+1})}{(1+\frac{x}{n})}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{\frac{x}{n(n+1)}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1}$$

Выражение

$$-\frac{\frac{x}{n(n+1)}}{(1+\frac{x}{n})} > 0 \text{ при } x<0, \text{ и } \geqslant -1 \text{ при } x \geqslant 0$$

По неравенству Бернулли: $\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \geqslant (1+\frac{x}{n})\left(1-\frac{\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right) = 1$, следовательно $\{a_n(x)\}$ нестрого возрастает при $n \geqslant m$.
Т.к. $a_n(-x) \geqslant a_m(-x)\ \forall n \geqslant m$, то

$$a_n(x)\cdot a_n(-x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \leqslant 1$$

Следовательно, $a_n(x) \leqslant \frac{1}{a_n(-x)} \leqslant \frac{1}{a_m(-x)}\ \forall n \geqslant m$.
Поэтому, последовательность $\{a_n(x)\}$ – сходится.
2) При $n > |x+y|$:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n = \left(1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}\right)^n = \left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n\left(1+\frac{\frac{xy}{n^2}}{1+\frac{x+y}{n}}\right)^n$$

Положим $\alpha_n = \frac{xy}{n+x+y}$.
Для завершения доказательства достаточно показать, что $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha_n}{n}\right)^n = 1$.
Выберем N так, что $|\alpha_n| < 1$ при $n \geqslant N$.
Поскольку $\left(1+\frac{\alpha_n}{n}\right)^n\left(1-\frac{\alpha_n}{n}\right)^n = \left(1-\frac{\alpha_n^2}{n^2}\right)^n \leqslant 1$, по н-ву Бернулли при $n \geqslant N$:

$$1+\alpha_n \leqslant \left(1+\frac{\alpha_n}{n}\right)^n \leqslant \frac{1}{\left(1-\frac{\alpha_n}{n}\right)^n} \leqslant \frac{1}{1-\alpha_n}$$

$\Rightarrow$ по теореме о зажатой последовательности $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha_n}{n}\right)^n = 1$. □

Лемма.

1. $exp(x) \geqslant 1+x\ \forall x \in \mathbb{R}$;
2. $exp(x) \leqslant \frac{1}{1-x}\ \forall x < 1$.

Доказательство. Зафиксируем такой номер N, что $\frac{x}{N} \geqslant -1$. Тогда $(1+\frac{x}{n})^n \geqslant 1+x$ при всех $n \geqslant N$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем первое неравенство.

Из пункта (1) следует, что $exp(-x) \geqslant 1-x > 0$ при $x < 1$. Откуда, учитывая, что $exp(-x) = \frac{1}{exp(x)}$, получаем второе утверждение. $\square$

Теорема. *Функция exp непрерывна, строго возрастает и отображает $\mathbb{R}$ на $(0, +\infty)$.*

Доказательство. По лемме, для всех $x < 1$ имеют места неравенства $1 + x \leqslant exp(x) \leqslant \frac{1}{1-x}$, откуда $\lim_{x\to 0} exp(x) = 1$. Теперь

$$\forall a \in \mathbb{R} \ \lim_{x\to a} exp(x) = \lim_{t\to 0} exp(t + a) = \lim_{t\to 0}(exp(a) \cdot exp(t)) = exp(a),$$

что доказывает непрерывность экспоненты в точке a.
Пусть $x, y \in \mathbb{R}$ и $x < y$. Тогда по лемме имеем

$$exp(y) - exp(x) = (exp(y - x) - 1) \cdot exp(x) \geqslant (y - x)exp(x) > 0.$$

Следовательно, функция exp строго возрастает.
По лемме $\lim_{x\to +\infty} exp(x) = +\infty$ и $\lim_{x\to -\infty} exp(x) = \lim_{x\to +\infty} exp(-x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{exp(x)} = 0$. Поэтому $\sup_{\mathbb{R}} exp(x) = +\infty$ и $\inf_{\mathbb{R}} exp(x) = 0$. Учитывая непрерывность экспоненты, заключаем, что множество значений $exp(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$. $\square$

Определение. *Натуральным логарифмом* называется функция $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, обратная к exp.

Лемма. *Второй замечательный предел*
$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$. *Кроме того,* $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Доказательство. По лемме для всех $x < 1$ выполнено $1 + x \leqslant e^x \leqslant \frac{1}{1-x}$ или $x \leqslant e^x - 1 \leqslant \frac{x}{1-x}$. Откуда $1 \leqslant \frac{e^x-1}{x} \leqslant \frac{1}{1-x}$ при $0 < x < 1$ и $\frac{1}{1-x} \leqslant \frac{e^x-1}{x} \leqslant 1$ при $x < 0$. По свойству предела зажатой функции $\frac{e^x-1}{x} \to 1$ при $x \to 0$.
Для функций $g(y) = \frac{y}{e^y-1}$ и $f(x) = ln(x+1)$ композиция $(g\circ f)(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$, поэтому $\lim_{x\to 0} g(f(x)) = \lim_{y\to 0} g(y) = 1$ по свойству предела композиции.
Рассмотрим функцию h, где $h(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$ при $x \neq 0$, и $h(0) = 1$. Согласно предыдущему пункту h непрерывна в нуле. Тогда композиция $(exp\circ h)(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ также непрерывна в нуле и, значит, $\lim_{x\to 0}(exp \circ h)(x) = e$. $\square$

Определение. Пусть $f, g : E \to \mathbb{R}$, a – предельная точка E. Если существуют $\alpha : E \to \mathbb{R}$ и $\delta > 0$, такие что $f(x) = \alpha(x)g(x)$ для всех $x \in \overset{o}{B}_\delta(a) \cap E$, и

1. функция α ограничена на $\overset{o}{B}_\delta(a)\cap E$, то говорят, что f *ограничена по сравнению с g* при $x \to a$, и пишут $f(x) = O(g(x))$ при $x \to a$.
2. функция $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$, то говорят, что f *бесконечно мала по сравнению с g* при $x \to a$, и пишут $f(x) = o(g(x))$ при $x \to a$.
3. функция $\alpha(x) \to 1$ при $x \to a$, то говорят, что fи g *эквивалентны* или *асимптотически равны* при $x \to a$, и пишут $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$.

Замечание. Если $g(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности a, то

1. $f(x) = O(g(x))$ при $x \to a \Leftrightarrow \exists M > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in \overset{o}{B}_\delta(a) \cap E\ (|\frac{f(x)}{g(x)}| \leqslant M)$;
2. $f(x) = o(g(x))$ при $x \to a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$;
3. $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Необходимость условий очевидна. Для доказательства обратного утверждения достаточно положить $\alpha(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ на $\overset{o}{B}_\delta(a) \cap E$ и $\alpha(x) = 0$ на $E \setminus \overset{o}{B}_\delta(a)$.

Замечание. Важно понимать, что $O(g)$ и $o(g)$ – это классы функций, и знак равенства означает принадлежность этому классу. Поэтому все такие равенства читаются только слева направо. Например, $x^2 = o(x)$ и $x^3 = o(x)$ при $x \to 0$, но $x^2 \neq x^3$.

Лемма. *При $x \to a$ справедливы формулы:*

1. $o(f) \pm o(f) = o(f),\ O(f) \pm O(f) = O(f)$;
2. $o(f) = O(f)$;
3. $o(O(f)) = o(f),\ O(o(f)) = o(f)$;
4. $o(f) \cdot O(g) = o(fg)$.

Доказательство. Докажем (4). Пусть $u(x) = o(f(x))$ при $x \to a$, т.е. $u = \alpha f$ в некоторой проколотой окрестности точки a, и функция $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$. Пусть $v(x) = O(g(x))$ при $x \to a$, т.е. $v = \beta g$ в некоторой проколотой окрестности точки a, причем функция β там ограничена. Тогда на пересечении окрестностей $uv = (\alpha\beta)(fg)$ и $(\alpha\beta)(x) \to 0$ при $x \to a$. Это означает, что $u(x)v(x) = o(f(x)g(x))$ при $x \to a$.
Остальные утверждения проверяются аналогично. □

Установим свойства асимптотического равенства.

Лемма. *Справедливы следующие утверждения:*

1. $f(x) \sim g(x)$ *при* $x \to a \Leftrightarrow f(x) = g(x) + o(g(x))$;
2. *если* $f(x) \sim \tilde{f}(x),\ g(x) \sim \tilde{g}(x)$ *при* $x \to a$, *то* $f(x)g(x) \sim \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)$ *и* $\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}$ *при* $x \to a$;
3. *если* $f(x) \sim g(x)$ *при* $x \to a$, *то* $\lim_{x\to a} f(x)$ *и* $\lim_{x\to a} g(x)$ *существуют одновременно (в $\overline{\mathbb{R}}$), и если существуют, то равны.*

Доказательство. Пусть функции α и β в некоторой проколотой окрестности точки a связаны соотношением $\alpha(x) = 1 + \beta(x)$. Тогда (1) следует из равносильности условий $\alpha(x) \to 1$ и $\beta(x) \to 0$ при $x \to a$. Утверждения (2) доказываются аналогично. При этом следует учесть, что множества определения $\frac{f}{g}$ и $\frac{\tilde{f}}{\tilde{g}}$ имеют непустое пересечение, для которого a является предельной точкой.
Докажем (3). Пусть $f(x) = \alpha(x)g(x)$ в некоторой проколотой окрестности точки a и $\alpha(x) \to 1$ при $x \to a$. Тогда по свойству локализации $\lim_{x\to a} f(x)$ существует одновременно с $\lim_{x\to a} \alpha(x)g(x)$, который существует одновременно с $\lim_{x\to a} g(x)$. В случае существования все три предела равны. □

7. Определение и геометрический смысл производной. Линейная аппроксимация и дифференциал функции. Непрерывность дифференцируемой функции. Односторонние производные. Производная суммы, произведения и частного. Производная композиции. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменного. Производная обратной функции. Таблица производных основных элементарных функций.

Всюду в этом разделе $I \subset \mathbb{R}$ – невырожденный промежуток числовой прямой.

Определение. Пусть $f : I \to \mathbb{R},\ a \in I$. *Производной* функции f в точке a называется следующий предел:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

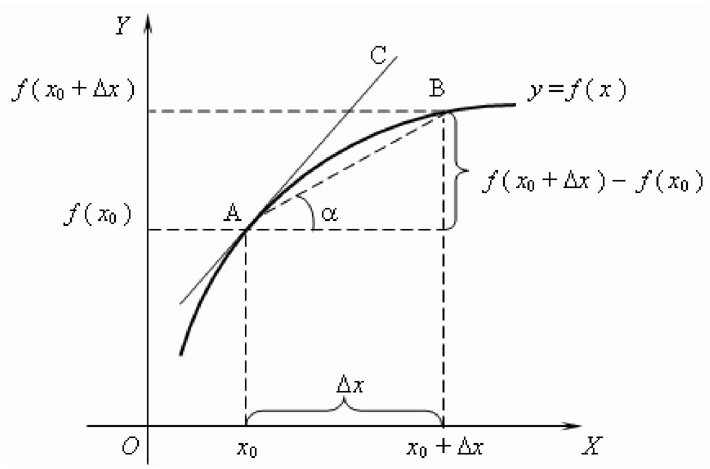
Обозначается $f'(a)$, $\frac{df(a)}{dx}$.
Если указанный предел конечен, то говорят, что функция f *дифференцируема* в точке a.

Выражение $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ называется *разностным отношением.*
Пусть функция f дифференцируема в точке a.

$$l_{\text{секущая}} : y = f(a) + \frac{f(t) - f(a)}{t - a}(x - a)$$

$$l_{\text{касательная}} : y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$$k_{\text{секущая}} = \frac{f(t) - f(a)}{t - a} \Rightarrow k_{\text{касательная}} = f'(a)$$



Замечание. Геометрический смысл производной
Угловой коэффициент секущей стремится к угловому коэффициенту касательной.

Теорема. *О линейной аппроксимации*
Пусть $f : I \to \mathbb{R},\ a \in I$. Функция f дифференцируема в точке $a \Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = f(a) + A(x - a) + o(x - a),\ x \to a.$$

В этом случае $A = f'(a)$.

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть f дифференцируема в a. Определим функцию $\alpha : I \to R$, $\alpha(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)$ при $x \neq a$, и $\alpha(a)$ произвольно. Тогда $\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0$ и $f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + \alpha(x)(x - a)$. Следовательно, выполнимо условие.
$\Leftarrow$ Из условия следует, что $A + o(1) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Переходя к пределу при $x \to a$, получаем $\exists\ f'(a) = A$, т.е. f дифференцируема в точке a. $\square$

Следствие. Если f дифференцируема в точке a, то f непрерывна в a.

Доказательство. Переходя к пределу при $x \to a$ в теореме о линейной аппроксимации, получим $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Это означает, что f непрерывана в точке a. $\square$

Рассмотрение односторонних пределов приводит к следующему обобщению производной.

Определение. Пусть $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$.
$f'_+(a) = \lim_{x\to a+0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ называется *правой производной* f в точке a.
$f'_-(a) = \lim_{x\to a-0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ называется *левой производной* f в точке a.

Замечание. Если a – внутренняя точка I, то $\exists\ f'(a) \Leftrightarrow f'_+(a) = f'_-(a)$. В этом случае все три предела равны.
Если a – концевая точка I, то $f'(a)$ существует одновременно с соответствующей односторонней производной.

Теорема.
Пусть $f, g : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Если f и g дифференцируемы в точке a, то в этой точке дифференцируемы $\alpha f + \beta g$, $f \cdot g$ и при условии $g \neq 0$ на I также $\frac{f}{g}$. При этом

1. $(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$
2. $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
3. $(\frac{f}{g})(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$

Доказательство. 1. Следует из свойств линейности предела.

2.
$$(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a) = g(a)(f(x) - f(a)) + f(x)(g(x) - g(a))$$
$$\lim_{x\to a} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x - a} = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$
– непрерывна в точке a.

3. Переходя к пределу при $x \to a$, получим
$$\frac{(\frac{1}{g})(x) - (\frac{1}{g})(a)}{x - a} = \frac{1}{g(a) \cdot g(x)} \cdot \frac{g(a) - g(x)}{x - a},$$
получим, что $g(x)$ дифференцируема в точке a и $(\frac{1}{g})'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$. Теперь пункт (3) следует из (2).

$\square$

Теорема. *Производная композиции*
Пусть I, J – промежутки, $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$. Если f дифференцируема в точке $a \in I$ и g дифференцируема в точке $b = f(a)$, то композиция $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке a, причем
$$(g \circ f)'(a) = g'(b) \cdot f'(a)$$

Доказательство. Определим функцию $h : J \to \mathbb{R}$,

$$h(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(b)}{y-b}, & y \neq b \\ g'(b), & y = b. \end{cases}$$

Тогда h непрерывна в точке b. Покажем, что $\forall x \in I$, $x \neq a$, выполнено

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = h(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Если $f(x) = f(a)$, то $0 = 0$. Если $f(x) \neq f(a)$, то равенство следует из того, что

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a)))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Перейдем к пределу

$$\lim_{x \to a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = g'(b) \cdot f'(a).$$

(т.к. h непрерывна в точке b, то по свойству предела композиции $\lim_{x \to a} h(f(x)) = h(b) = g'(b)$) □

Теорема. *Производная обратной функции*
Пусть $f : I \to \mathbb{R}$ непрерывна и строго монотонна на промежутке I. Если f дифференцируема в точке $a \in I$ и $f'(a) \neq 0$, то обратная функция $f^{-1} : f(I) \to I$ дифференцируема в точке $b = f(a)$, причем

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

Доказательство. По теореме об обратной функции на $J = f(I)$ определена функция f^{-1}, которая на J непрерывна и строго монотонна. Следовательно, $f^{-1}(t) \to a$ при $t \to b$, $f^{-1}(t) \neq a$ при $t \neq b$

$$\lim_{t \to b} \frac{f^{-1}(t) - f^{-1}(b)}{t - b} = \lim_{t \to b} \frac{f^{-1}(t) - f^{-1}(b)}{f(f^{-1}(t)) - f(f^{-1}(b))} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}$$

□

Таблица производных.

1. $c' = 0$
2. $(a^x)' = a^x \ln(a)$, при $a > 0, a \neq 1$
3. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln(a)}$, при $a > 0, a \neq 1$
4. $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$, при $\alpha \in \mathbb{R}$
5. $(\sin x)' = \cos x$
6. $(\cos x)' = -\sin x$
7. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
9. $(\arcsin x)' = -(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, при $x \in (-1, 1)$
10. $(\operatorname{arctg} x)' = -(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Доказательство. 1. По определению.

2. По второму замечательному пределу $(e^x)' = \lim_{t\to x} \frac{e^t - e^x}{t-x} = e^x \cdot \lim_{t\to x} \frac{e^{t-x}-1}{t-x} = e^x$.
   $(a^x)' = (e^{x\ln(a)})' = e^{x\ln(a)} \cdot (x \cdot \ln(a))' = a^x \ln(a)$.

3. $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$, по теореме о производной обратной функции получим: $(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln(a)}$.

4. $\alpha \in \mathbb{Z}\ \ (x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ – по определению.
   $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\ \ (x^\alpha)' = (e^{\alpha\ln(x)})' = e^{\alpha\ln(x)}\frac{\alpha}{x} = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$.

5. $(\sin x)' = \lim_{t\to x}\frac{\sin t - \sin x}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{\sin\frac{t-x}{2}\cos\frac{t+x}{2}}{\frac{t-x}{2}} = \cos x$.

6. $(\cos x)' = (-1)\cdot\cos(\frac{\pi}{2} - x) = -\sin x$.

7. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
   $(\operatorname{tg} x)' = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$.

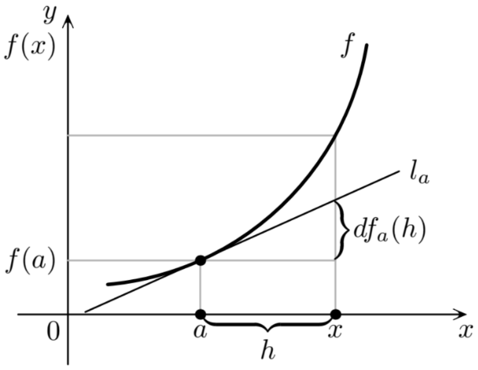
8. Аналогично пункту (7).

9. $y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y\ \ y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$
   $(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

10. Аналогично пункту (9).

□

Определение. Пусть $f : I \to \mathbb{R}$, I – промежуток, дифференцируема в точке a. Линейная функция $h \mapsto f'(a)h$, $h \in \mathbb{R}$, называется *дифференциалом* функции f в точке a и обозначается df_a.



Для функции $x \mapsto x$ функция $dx(h) = 1 \cdot h$ в любой точке. Следовательно, $df_a(h) = f'(a)dx(h)$. Или в функциональной записи: $df_a = f'(a)dx$.

Замечание. Инвариантность дифференциала.
Формула $df_x = f'(x)dx$ верна и в случае, когда x – независимая переменная, и в случае, когда $x = x(t)$.

8. Локальные экстремумы. Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции. Теорема Ролля. Теоремы Лагранжа и Коши о среднем значении. Теорема Дарбу о промежуточных значениях производной. Условия монотонности и постоянства дифференцируемой функции. Достаточное условие экстремума функции в терминах первой производной. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Определение. Пусть f определена на интервале, содержащем точку a.
Точка a называется *точкой локального максимума (строгого)*, если

$$\exists \delta > 0 \ \ \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \ (f(x) \underset{(<)}{\leqslant} f(a))$$

Аналогично определяются *точки локального минимума (строгого)*. Точки локального максимума или минимума называются *точками локального экстремума*.

Теорема. *Ферма. (необходимое условие экстремума дифференцируемой функции)*
Пусть f определена на интервале содержащем точку a.
Если a – точка локального экстремума f и $\exists f'(a)$, то $f'(a) = 0$.

Доказательство. Пусть для определенности a – точка локального максимума. По определению:

$$\exists \delta > 0 \ \ \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a)(f(x) \leqslant f(a)$$

Тогда $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0$ на $(a, a+\delta) \Rightarrow f'(a) = f'_+(a) = \lim_{x \to a+0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0 \Rightarrow f'(a) \leqslant 0$.
$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$ на $(a-\delta, a) \Rightarrow f'(a) = f'_-(a) = \lim_{x \to a-0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0 \Rightarrow f'(a) \geqslant 0$.
$\Rightarrow f'(a) = 0$ □

Замечание. Геометрический смысл.
Если в точке экстремума существует касательная, то она горизонтальна.

Теорема. *Ролль.*

1. *f – непрерывна на $[a, b]$;*
2. *f – дифференцируема на (a,b);*
3. *$f(a) = f(b)$;*

$\Rightarrow \exists c \in (a,b) \ (f'(c) = 0)$.

Доказательство. По теореме Вейерштрасса $\exists x_1, x_2 \in [a, b] \ (f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)) \ \ \forall x \in [a, b]$. Если $x_1, x_2 \in \{a,b\}$ (концевые точки), то $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f$ постоянна на $[a, b]$. В качестве c можно взять любую точку из (a,b).
Если $x_1, x_2 \notin \{a,b\}$, то $\exists x_i \in (a,b)$. Тогда по теореме Ферма $f'(x_i) = 0$ и $c = x_i$. □

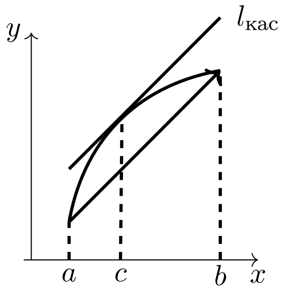
Теорема. *Лагранж.*

1. *f – непрерывна на $[a, b]$;*
2. *f – дифференцируема на (a,b);*

$\Rightarrow \exists c \in (a,b)\ (f(b) - f(a) = f'(c)(b-a))$

Доказательство. Рассмотрим $h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)$. Тогда h – непрерывна на $[a,b]$, h – дифференцируема на (a,b) и $h(a) = 0 = h(b)$.
Следовательно, по теореме Ролля, $\exists c \in (a,b)\ h'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$. □

Замечание. Геометрический смысл.
$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



Найдется точка c в которой касательная параллельна хорде.

Теорема. *Коши.*

1. *f, g – непрерывны на $[a,b]$;*
2. *f, g – дифференцируемы на (a,b);*
3. *$g' \neq 0$ на (a,b);*

$\Rightarrow \exists c \in (a,b)\ (\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)})$.

Доказательство. Отметим, что $g(b) \neq g(a)$, иначе, по теореме Ролля, $\exists \xi \in (a,b)\ (g'(\xi) = 0)$. Рассмотрим $h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a))$. Тогда h – непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b) и $h(a) = h(b) = f(a)$. По теореме Ролля:

$$\exists c \in (a,b)\ h'(c) = 0 \ \Leftrightarrow \ f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) = 0.$$

Так как $g'(c) \neq 0$, то $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$. □

Теорема. *Дарбу.*
Если f дифференцируема на $[a,b]$ и число s лежит между $f'(a)$ и $f'(b)$, то найдется точка $c \in [a,b]$, такая что $f'(c) = s$.

Доказательство. Если s совпадает с $f'(a)$ или $f'(b)$, то условие очевидно. Пусть для определенности $f'(a) < s < f'(b)$. Рассмотрим $\varphi(x) = f(x) - s \cdot x$, тогда φ дифференцируема на $[a,b]$ и $\varphi'(a) = f'(a) - s < 0 < f'(b) - s = \varphi'(b)$. По теореме Вейерштрасса $\exists c \in [a,b] : \varphi(c) = inf_{[a,b]}\varphi(x)$. Если $c = a$, то $\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a} \geqslant 0$ на $(a,b] \Rightarrow \varphi'(a) \geqslant 0$ – пришли к противоречию с $\varphi'(a) < 0$. Следовательно, $c \neq a$. Аналогично, $c \neq b$. Поэтому $c \in (a,b)$ по теореме Ферма $\varphi'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) = s$. □

Теорема. *Условия монотонности и постоянства.*
Пусть f непрерывна на промежутке I и дифференцируема на $int(I)$, тогда

1. *Функция нестрого возрастает (убывает) на $I \Leftrightarrow f'(x) \geqslant 0 \ \ \forall x \in int(I)$.*
2. *Если $f'(x) > 0 \ \ \forall x \in int(I)$, то $f(x)$ строго возрастает на I.*

3. *f постоянна на $I \Leftrightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in int(I)$.*

Доказательство.
(1.$\Rightarrow$) Пусть f нестрого возрастает на I, $x \in int(I)$. Тогда $f(y) \geqslant f(x) \quad \forall y \in (x, sup(I))$, и значит, $f'(x) = \lim_{y \to x+0} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geqslant 0$.
(1.$\Leftarrow$) Пусть $x, y \in I$, x < y. Тогда по теореме Лагранжа $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$ для некоторой точки $c \in (x, y)$. Так как $c \in int(I)$, то $f'(c) \geqslant 0$, и значит, $f(y) \geqslant f(x)$, то есть f нестрого возрастает на I. Доказательство для нестрого убывающей аналогично или может быть сведено к рассмотрению замены f на $-f$.
(2) Если $f'(x) > 0 \quad \forall x \in int(I)$, то $f(y) > f(x)$ и f строго возрастает на I.
(3) Пункт вытекает из пункта (1).
Обратное утверждение пункта (2) неверно. $f(x) = x^3$ строго возрастает на $\mathbb{R}$, но $f'(0) = 0$. □

Следствие. Достаточное условие экстремума.
Пусть f определена на (α, β) и $a \in (\alpha, \beta)$. Пусть f дифференцируема на $(\alpha, \beta) \setminus \{a\}$ и непрерывна в точке a.

1. Если $f' \geqslant 0$ на (α, a) и $f' \leqslant 0$ на (a, β), то a – точка локального максимума функции f. (строгого, если неравенство строгое).
2. Если $f' \leqslant 0$ на (α, a) и $f' \geqslant 0$ на (a, β), то a – точка локального минимума функции f. (строгого, если неравенство строгое).

Доказательство. По теореме об условии монотонности f нестрого возрастает на (α, a) и нестрого убывает на (a, β). Следовательно, $f(x) \leqslant f(a) \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$, то есть a - точка локального максимума. Если неравенства строгие, то возрастание (убывание) строгое, и значит, $f(x) < f(a) \quad \forall x \in (\alpha, \beta) \setminus \{a\}$. □

Теорема. *Правило Лопиталя о неопределенности $\frac{0}{0}$.*
Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. Если

1. *f, g дифференцируемы на (a, b).*
2. $\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a+0} g(x) = 0$
3. $g'(x) \neq 0$ *на* (a, b)
4. $\exists \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$

Тогда $\exists \lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство. Доопределим функции f, g в точке a, положив $f(a) = g(a) = 0$, тогда доопределенные функции будут непрервны на $[a, b)$ и по теореме Коши о среднем для каждого $x \in (a, b)$ существует $c \in (a, x)$, такое что

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Поскольку существует $\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(c)}{g'(c)}$, то существует и $\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. □

Теорема. *Правило Лопиталя о неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$.*
Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. Если

1. *f, g дифференцируемы на (a, b).*

2. $\lim_{x\to a+0} g(x) = \pm\infty$

3. $g'(x) \neq 0$ *на* (a, b)

4. $\exists \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$

Тогда $\exists \lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство.
I) A $= 0$.
Рассмотрим произвольную $\{x_n\} \subset (a, b),\ x_n \to a$. Покажем, что $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to 0$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По условию $\exists y \in (a, b):\quad \forall c \in (a, y)\ (g(c) \neq 0$ и $|\frac{f'(c)}{g'(c)}| < \varepsilon)$. Без ограничения общности можно считать, что все $x_n \in (a, y)$. Тогда по теореме Коши о среднем $\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists c_n \in (a, x_n)$

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(y)}{g(x_n) - g(y)} \cdot \frac{g(x_n) - g(y)}{g(x_n)} + \frac{f(y)}{g(x_n)} =$$

$$= \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}(1 - \frac{g(y)}{g(x_n)}) + \frac{f(y)}{g(x_n)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\frac{f(x_n)}{g(x_n)}| \leqslant \varepsilon + \varepsilon \cdot |\frac{g(y)}{g(x_n)}| + |\frac{f(y)}{g(x_n)}|$$

Следовательно, $\overline{\lim}_{n\to\infty} |\frac{f(x_n)}{g(x_n)}| \leqslant \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ – любое, то $\overline{\lim}_{n\to\infty} |\frac{f(x_n)}{g(x_n)}| = 0$, тогда $\underline{\lim}_{n\to\infty} |\frac{f(x_n)}{g(x_n)}| \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} |\frac{f(x_n)}{g(x_n)}| = 0$, и значит, $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = 0$.
II) Пусть $A \in \mathbb{R}$ – произвольное число. Рассмотрим $h = f - Ag$. Тогда

$$\lim_{x\to a+0} \frac{h'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a+0} (\frac{f'(x)}{g'(x)} - A) = 0$$

Поэтому по пункту (I) $\exists \lim_{x\to a+0} \frac{h(x)}{g(x)} = 0$, то есть $\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.
III) $A = +\infty$. Аналогично пункту I зафиксируем $M > 0$, что $\frac{f'(c)}{g'(c)} > M$. Тогда

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}(1 - \frac{g(y)}{g(x_n)}) + \frac{f(y)}{g(x_n)}$$

Пусть $(1 - \frac{g(y)}{g(x_n)}) > 0$ при $n \geqslant n_0$.

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \geqslant M(1 - \frac{g(y)}{g(x_n)}) + \frac{f(y)}{g(x_n)} \to M$$

Следовательно, $\underline{\lim}_{n\to\infty} |\frac{f(x_n)}{g(x_n)}| \geqslant M$. Так как $M > 0$ – любое, то

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = +\infty \ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = +\infty$$

□

9. Производные высших порядков. Формула Лейбница для n–ой производной произведения функций. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Разложения функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ и $(1+x)^\alpha$. Достаточное условия локального экстремума в терминах высших производных. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Выпуклые функции. Дифференциальные условия выпуклости. Неравенство Йенсена.

Производные высших порядков определяются индуктивно.

Определение. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Положим $f^{(1)} = f'$. Если $n > 1$, функция $f^{(n-1)}$ определена в некоторой окрестности точки a и дифференцируема в самой точке a, то функция f называется *дифференцируемой n раз* в точке a, и ее производная n-ого порядка в точке a определяется равенством $f^{(n)}(a) = (f^{(n-1)})'(a)$. Считаем также $f^{(0)} = f$.

Функция f называется n раз дифференцируемой на множестве E, если она n раз дифференцируема в каждой точке из E.

Замечание. Если $n > 1$, то существование производной n-ого порядка в точке a влечет существование производных $n-1$-ого порядка в некоторой окрестности точки a.

Ввиду линейности дифференцирования, по индукции устанавливается, что $(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}$, если $\exists f^{(n)}, g^{(n)}$. Для произведения справедлива следующая формула.

Теорема. *Формула Лейбница.*
Если f и g дифференцируемы n раз в точке x, то в точке x также дифференцируема n раз функция $f \cdot g$, причем справедлива формула:

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

Доказательство. Докажем индукцией по n. При $n = 1$ равенство известно $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Предположим, утверждение верно для n, тогда (опуская аргумент x)

$$(fg)^{(n+1)} = ((fg)^n)' =$$

$$= (\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x))' =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) =$$

$$= f^{(n+1)} g + \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x) + \sum_{k=1}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x) + f g^{(n+1)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (C_n^{k-1} + C_n^k) f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x) + f^{(n+1)} g + f g^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x)$$

Так как $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$. □

Определение. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и функция f дифференцируема n раз в точке a. Тогда равенство:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + r_n(x)$$

называется *формулой Тейлора* порядка n функции f в точке a.
При этом многочлен $P_n(x) = P_{n,a,f}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ называется *многочленом Тейлора*, $r_n(x) = r_{n,a,f}(x)$ - *остаточным членом.*

Теорема. *Остаточный член в форме Пеано.*
Пусть $n \in \mathbb{N}$ и функция f дифференцируема n раз в точке a. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n),\ x \to a$$

то есть $r_n(x) = o((x-a)^n)$ при $x \to a$.

Доказательство. Пусть $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$, тогда $P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a),\ 0 \leqslant k \leqslant n$. Поэтому для остаточного члена $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$ выполнено $r_n(a) = r_n'(a) = \dots = r_n^{(n)}(a) = 0$. По правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to a} \frac{r_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{r_n'(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \dots = \lim_{x\to a} \frac{r_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)}$$

Последний предел существует по определению n-й производной в точке a:

$$\lim_{x\to a} \frac{r_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)} = \frac{1}{n!} \lim_{x\to a} \frac{r_n^{(n-1)}(x) - r_n^{(n-1)}(a)}{(x-a)} = \frac{r_n^{(n)}(a)}{n!} = 0$$

следовательно, $r_n(x) = o((x-a)^n)$ при $x \to a$. □

Следствие. Достаточное условие локального экстремума.
Пусть $n \in \mathbb{N}$, функция f дифференцируема n раз в точке a и $f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$, но $f^{(n)}(a) \neq 0$. Тогда

1. если n четно и $f^{(n)}(a) < 0$ ($f^{(n)}(a) > 0$), то a является точкой строгого локального максимума (минимума) функции f.

2. если n нечетно, то a не является точкой локального экстремума функции f.

Доказательство. По предыдущей теореме

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n) =$$

$$= (\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \alpha(x)) \cdot (x-a)^n$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$. Найдется такое $\delta > 0$, что $|\alpha(x)| < |\frac{f^{(n)}(a)}{n!}|\ \forall x \in \mathring{B}_\delta(a)$, поэтому $sign(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \alpha(x)) = sign(f^{(n)}(a))\ \forall x \in \mathring{B}_\delta(a)$, и значит, в $\mathring{B}_\delta(a)$ $\ sign(f(x) - f(a)) = sign(f^{(n)}(a)(x-a)^n)$.
Что в 1 случае дает одинаковые знаки при $x < a$ и $x > a$. И во втором - разные. □

Теорема. *О единственности разложения.*
Пусть $p_1(x), p_2(x)$ *– такие многочлены степени* $\leqslant n$*, что* $f(x) - p_1(x) = o((x-a)^n)$ *и* $f(x) - p_2(x) = o((x-a)^n), x \to a$*. Тогда* $p_1(x) = p_2(x)$*.*

Доказательство. Положим $q(x) = p_1(x) - p_2(x)$, тогда $q(x) = o((x-a)^n)$. Покажем, что $q(x)$ – нулевой многочлен.
Пусть $q(x) = c_0 + c_1(x-a) + ... + c_n(x-a)^n$. Предположим, что $\exists c_i \neq 0$. Тогда положим $j = \min\{k : c_k \neq 0\}$. Поделим равенство на $(x-a)^j$ получим $q(x) = o((x-a)^{n-j})$. Перейдем к пределу при $x \to a$, тогда $c_j = 0$. Противоречие. □

Теорема. *Основные разложения.*
1) *Если* $f(x) = e^x$*, то* $f^{(k)}(0) = e^0 = 1, k \in \mathbb{N}$*. Следовательно,*

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n), x \to 0$$

2) *Если* $f(x) = \sin(x)$*. Тогда (по индукции)* $f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}n), n \in \mathbb{N}$*. Поэтому* $f^{(2k)}(0) = 0, f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$*. Следовательно,*

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}), x \to 0$$

3) *Если* $f(x) = \cos(x)$*. Тогда (по индукции)* $f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2}n), n \in \mathbb{N}$*. Поэтому* $f^{(2k)}(0) = (-1)^k, f^{(2k+1)}(0) = 0$*. Следовательно,*

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), x \to 0$$

4) *Если* $f(x) = (1+x)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$*, то* $f^{(k)}(x) = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot ... \cdot (\alpha - k + 1)(1+x)^{\alpha - k}$*.*
Положим $c_\alpha^0 = 1, c_\alpha^k = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot ... \cdot (\alpha-k+1)}{k!}$*. Следовательно,*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} c_\alpha^k x^k + o(x^n), x \to 0$$

В частности $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n), x \to 0$*.*
5) *Если* $f(x) = \ln(1+x)$*, то* $f(0) = 0$*,* $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$*. Следовательно,*

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n), x \to 0$$

Теорема. *Остаточный член в форме Лагранжа.*
Пусть функция f *дифференцируема* $n+1$ *раз на* (α, β) *и* $a \in (\alpha, \beta)$*. Тогда для любой точки* $x \in (\alpha, \beta)$*,* $x \neq a$*, найдется точка* c*, лежащая между* a *и* x*, что*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

т.е. $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$*.*

Доказательство. Пусть для определенности $x > a$. Рассмотрим функции $\varphi(t) = f(t) + f'(t)(x -$

$t) + ... + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n$, $\psi(t) = (x-t)^{n+1}$. Функции φ и ψ дифференцируемы на $[a,x]$, $\varphi'(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$ и $\psi'(t) = -(n+1)(x-t)^n$, причем $\psi' \neq 0$ на (a,x). Тогда по теореме Коши найдется такая точка $c \in (a,x)$, что

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\psi(x)-\psi(a)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)} \Leftrightarrow \frac{f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{-(x-a)^{n+1}} = \frac{\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n}{-(n+1)(x-c)^n},$$

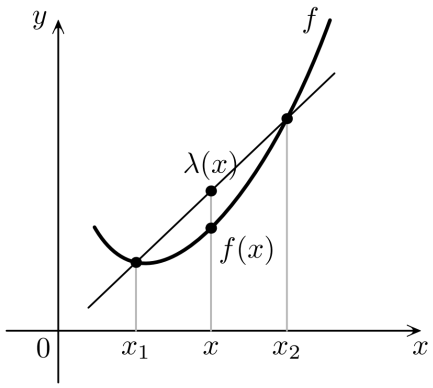
откуда получаем, что $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$. □

Определение. Пусть f определена на промежутке I. Функция f называется *выпуклой* (или выпуклой вниз) на I, если для любых $x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2$ и $t \in (0,1)$ выполнено

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leqslant (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Если неравенство строгое, то говорят, что f *строго выпукла* на I. Функция f называется *вогнутой*(или выпуклой вверх) на I, если функция $(-f)$ выпукла на I. Аналогично определяется строгая вогнутость.

Замечание. Геометрический смысл.
Выпуклость означает, что график функции лежит *не выше* любой своей хорды.



Проверка выпуклости по определению не всегда удобна. Однако, если функция дифференцируема, то такая проверка легко описывается.

Теорема. *Пусть функция f непрерывна на промежутке I и дифференцируема на $int(I)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. *f выпукла на I;*
2. *$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ для всех $x \in I$ и $x_0 \in int(I)$;*
3. *f' возрастает на $int(I)$;*

Доказательство. $(1 \Rightarrow 2)$. Пусть $x \in I, x_0 \in int(I)$. Пусть $h = x - x_0$ и $t \in (0,1)$. По определению выпуклости $f(x_0 + th) \leqslant (1-t)f(x_0) + tf(x_0 + h)$. Это неравенство можно переписать в виде

$$f(x_0 + th) - f(x_0) \leqslant t(f(x_0 + h) - f(x_0)),$$

откуда, пользуясь дифференцируемостью f в точке x_0, имеем

$$tf'(x_0)h + o(th) \leqslant t(f(x_0 + h) - f(x_0)), t \to 0.$$

Поделим обе части на t и перейдем к пределу при $t \to 0$. Тогда

$$f'(x_0)h \leqslant f(x_0+h) - f(x_0).$$

$(2 \Rightarrow 3)$. Для $x,y \in int(I)$ имеем

$$f(y) - f(x) \geqslant f'(x)(y-x) \Rightarrow f(x) - f(y) \leqslant -f'(x)(y-x).$$

$$f(x) - f(y) \geqslant f'(y)(x-y) \Rightarrow f(y) - f(x) \leqslant -f'(y)(y-x).$$

Складывая неравенства, получим $(f'(y) - f'(x))(y-x) \geqslant 0$.
$(3 \Rightarrow 1)$. Пусть $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ и $t \in (0,1)$. Положим $x = (1-t)x_1 + tx_2$.
По теореме Лагранжа $f(x) - f(x_1) = f'(c_1)(x - x_1)$ и $f(x_2) - f(x) = f'(c_2)(x_2 - x)$ для некоторых $c_1 \in (x_1, x)$ и $c_2 \in (x, x_2)$. В силу возрастания производной $f'(c_1) \leqslant f'(c_2)$ и, значит,

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Так как $x - x_1 = t(x_2 - x_1)$ и $x_2 - x = (1-t)(x_2 - x_1)$, то последнее неравенство равносильно $\frac{f(x)-f(x_1)}{t} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{1-t}$ или $f(x) \leqslant (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$. Следовательно, f выпукла на I. $\square$

Замечание. Геометрический смысл пункта 2 означает, что график выпуклой функции лежит не ниже всякой своей касательной.

Следствие. Пусть функция f непрерывна на промежутке I и дважды дифференцируема на $int(I)$.

1. Функция f выпукла на I тогда и только тогда, когда $f'' \geqslant 0$ на $int(I)$.

2. Если $f'' > 0$ на I, то функция f строго выпукла на $int(I)$.

Теорема. *Неравенство Йенсена.*
Пусть f выпукла на I, $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geqslant 0$ и $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$. Тогда $f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \dots + \lambda_n \cdot x_n) \leqslant \lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2) + \dots + \lambda_n \cdot f(x_n)$.

Доказательство. ММИ по n. При $n = 2$ – определение выпуклости. Пусть утверждение верно для n. Тогда $f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \dots + \lambda_n \cdot x_n + \lambda_{n+1} \cdot x_{n+1}) \leqslant (1 - \lambda_{n+1})f(y) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$.

$$y = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} x_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} x_n$$

При этом справедливо неравенство: $\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} + \dots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} = 1$. Тогда

$$f(y) = f(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} x_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} x_n) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} f(x_1) + \dots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} \cdot f(x_n)$$

$$\Rightarrow f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \dots + \lambda_n \cdot x_n + \lambda_{n+1} \cdot x_{n+1}) \leqslant$$

$$\leqslant (1 - \lambda_{n+1})(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} f(x_1) + \dots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} \cdot f(x_n)) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) =$$

$$= \lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2) + \dots + \lambda_n \cdot f(x_n)$$

$\square$

10. Первообразная. Неопределнный интеграл и его свойства. Интегрирование рациональных функций.

Определение. Пусть f определена на промежутке I. Функция $F : I \to \mathbb{R}$ называется *первообразной* функции f на I, если F дифференцируема на I и $\forall x \in I\ F'(x) = f(x)$.

Теорема. *Описание множества первообразных.*
Если F – первообразная функции f на промежутке I, то $F + C$, где C – константа, также является первообразной f на I. Если F_1, F_2 – первообразные f на I, то $F_1 - F_2$ – постоянна на I.

Доказательство.

$$(F + C)' = F' + C' = f + 0 = f$$

$$(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0$$

Следовательно, функция постоянна $F_1 - F_2 = C$, где C – константа. □

Определение. Произвольная первообразная функции f на промежутке I называется *неопределенным интегралом* функции f на I и обозначается $\int f(x)\,dx$ или $\int f\,dx$. Операция перехода от данной f к первообразной называется *интегрированием.*

Теорема. *Свойства неопределенного интеграла.*

1. *Если существует $\int f\,dx$ на I, то $(\int f\,dx)' = f$ на I.*

2. *Если существует $\int f\,dx$ и $\int g\,dx$ на $I, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то существует $\int(\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int f\,dx + \beta \int g\,dx + C$.*

3. *(Формула интеграла по частям) Если функции u и v дифференцируемы на промежутке I и существует $\int vu'\,dx$, то на I существует $\int uv'\,dx = uv - \int vu'\,dx + C$.*

   Доказательство. Правая часть имеет вид $F(x) + C$. тогда F дифференцируема на I и $F' = u'v + uv' - vu' = uv'$. Следовательно, F – первообразная uv'. □

   Замечание. Традиционная запись $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

4. *(Интегрирование подстановкой) Если F – первообразная функции f на промежутке I, φ – дифференцируема на промежутке J и $\varphi(J) \subset I$, то существует на J:*

   $$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C$$

   Замечание. Если дополнительно φ – строго монотонна но J, то из предыдущей формулы следует, что на $\varphi(J)$ существует

   $$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt|_{x=\varphi(t)} + C$$

5. *(Формула интегрирования обратной функции) Если f на I имеет конечную, не равную 0 производную и F – первообразная f на I, то для обратной функции на $f(I)$ существует*

   $$\int f^{-1}(y)\,dy = yf^{-1}(y) - F(f^{-1}(y)) + C$$

Доказательство. Проверка всех перечисленных равенств производится дифференцированием на указанных промежутках. □

Определение. *Рациональной дробью* называется частное двух многочленов. Рациональные функции вида $\frac{A}{(x-a)^n}$ $(A \neq 0)$, $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$, M или $N \neq 0$, $\frac{p^2}{4} - q < 0$ называются *элементарными (простейшими)* рациональными дробями.

Всякая правильная рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ имеет единственное разложение на элементраные дроби с точностью до порядка слагаемых. Покажем, как интегрируются элементарные дроби.

1. $\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + C$

2. $\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C$

3. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx + (N - \frac{Mp}{2})\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx + C_1 =$ $\frac{M}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + (N-\frac{Mp}{2})\int \frac{d(x+\frac{p}{2})}{(x^2+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}} + C_1 = \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C_2$

4. $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,dx + (N-\frac{Mp}{2})\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n})\,dx + C_1 = -\frac{M}{2(n-1)(x^2+px+q)^{n-1}} +$ $(N-\frac{Mp}{2})\int \frac{d(x+\frac{p}{2})}{((x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4})^n} + C_2.$

   Заменой $t = x + \frac{p}{2}$ и $a = \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$ последний интеграл сводится к $J_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$. Проинтегрируем J_n по частям, положив $u = \frac{1}{(t^2+a^2)^n}$, $v = t$. Тогда

$$J_n = \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^{n+1}}\,dt + C_1 = \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2nJ_n - 2na^2J_{n+1} + C_2$$

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}[\frac{t}{(t^2+a^2)^n} + (2n-1)J_n] + C_3,\ J_1 = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}(\frac{t}{a}) + C.$$

Все элементарные функции возможно проинтегрировать за конечное число операций.

Теорема. *Об интегрировании рациональных дробей.*
Неопределенный интеграл от рациональной дроби выражается через рациональные функции (быть может многочлены), $\ln, \operatorname{arctg}$ *и, следовательно, является элементарной функцией.*

11. Определенный интеграл Римана. Формула Ньютона-Лейбница. Ограниченность интегрируемой функции. Линейность и монотонность интеграла. Верхние и нижние суммы Дарбу и их свойства. Критерий интегрируемости Дарбу. Интегрируемость по подотрезкам. Аддитивность интеграла. Интегрируемость произведения и модуля интегрируемых функций. Интегральная теорема о среднем. Интегрируемость непрерывных функций, монотонных функций и ограниченных функций с конечным числом точек разрыва. Интеграл с переменным верхним пределом: непрерывность и дифференцируемость. Существование первообразной у непрерывной функции. Замена переменной в интеграле. Формула интегрирования по частям.

Определение. Пусть $[a, b]$ – невырожденный отрезок. Набор точек $T = \{x_i\}_{i=0}^n$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, называется *разбиением* отрезка $[a, b]$.
Отрезок $[x_{i-1}, x_i]$ называется *i–м отрезком разбиения*, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Величина $|T| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta x_i$ называется *мелкостью* разбиения T.
Если $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, то пара (T, ξ), где $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^n$, называется *отмеченным разбиением* $[a, b]$.
Пусть числовая функция f определена на отрезке $[a, b]$. Сумма

$$\sigma_T(f, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

называется *интегральной суммой* функции f, отвечающей отмеченному разбиению (T, ξ).

Если функция f неотрицательна, то слагаемое $f(\xi_i)\Delta x_i$ равно площади прямоугольника с основанием $[x_{i-1}, x_i]$ и высотой $f(\xi_i)$, а интегральная сумма – площади фигуры, полученной объединением всех таких прямоугольников.

Определение. Функция f *интегрируема по Риману* на отрезке $[a, b]$, если

$$\exists I \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall (T, \xi)\ (|T| < \delta \Rightarrow |\sigma_T(f, \xi) - I| < \varepsilon).$$

Число I называется *определенным интегралом* функции f по $[a, b]$ и обозначается символом $\int_a^b f(x)dx$.
Множество функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$, будем обозначать $\mathcal{R}[a, b]$.

Теорема. *Формула Ньютона-Лейбница.*
Пусть функция $f \in \mathcal{R}[a, b]$ и имеет первообразную F на $[a, b]$. Тогда справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Пусть $T = \{x_i\}_{i=0}^m$ – разбиение отрезка $[a, b]$. По теореме Лагранжа о среднем найдется такая точка $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$, что

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = f(c_i)\Delta x_i.$$

Положим $\xi = \{c_i\}_{i=1}^m$. Тогда для отмеченного разбиения (T, ξ) выполнено

$$\sigma_T(f, \xi) = \sum_{i=1}^{m} (F(x_i) - F(x_{i-1})) = F(b) - F(a).$$

Рассмотрим произвольную последовательность T_n разбиений $[a, b]$, мелкость которых стремится к нулю с ростом n. Далее, для каждого n выберем набор точек ξ_n, как указано выше. Тогда $\sigma_{T_n}(f, \xi_n) = F(b) - F(a)$ для всех n. Поскольку $f \in \mathcal{R}[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sigma_{T_n}(f, \xi_n) = F(b) - F(a),$$

что завершает доказательство. □

Лемма. *Если функция $f \in \mathcal{R}[a, b]$, то она ограничена на $[a, b]$.*

Доказательство. Пусть функция f неограничена на $[a, b]$. Рассмотрим произвольное разбиение $T = \{x_i\}_{i=0}^n$ отрезка $[a, b]$. Из неограниченности следует существование такого k, что f неограничена на $[x_{k-1}, x_k]$. Выберем каким-либо образом точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ при $i \neq k$. Для произвольного числа I выбором $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ можно добиться, чтобы интегральная сумма

$$\sigma_T(f, \xi) = \sum_{i \neq k} f(\xi_i)\Delta x_i + f(\xi_k)\Delta x_k$$

удовлетворяла неравенству $|\sigma_T(f, \xi)| > |I| + 1$. Это доказывает, что I не является интегралом f по $[a, b]$. □

Линейность.
Если $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, то для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ функция $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}[a, b]$, причем

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

Доказательство. Положим $I_1 = \int_a^b f(x)\,dx$ и $I_2 = \int_a^b g(x)\,dx$. Пусть $\varepsilon > 0$. Функции f и g интегрируемы на $[a, b]$, поэтому найдется такое $\delta > 0$, что для всякого отмеченного разбиения (T, ξ) мелкости $|T| < \delta$ выполнено $|\sigma_T(f, \xi) - I_1| < \frac{\varepsilon}{2(|\alpha|+1)}$ и $|\sigma_T(g, \xi) - I_2| < \frac{\varepsilon}{2(|\beta|+1)}$. Поскольку $\sigma_T(\alpha f + \beta g, \xi) = \alpha\sigma_T(f, \xi) + \beta\sigma_T(g, \xi)$, то

$$|\sigma_T(\alpha f + \beta g, \xi) - (\alpha I_1 + \beta I_2)| \leqslant |\alpha| \cdot |\sigma_T(f, \xi) - I_1| + |\beta| \cdot |\sigma_T(g, \xi) - I_2| < \varepsilon$$

Так как $\varepsilon > 0$ – любое, то $\alpha f + \beta g$ интегрируема на $[a, b]$ и $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha I_1 + \beta I_2$. □

Монотонность.
Если $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ и $f \leqslant g$ на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

Доказательство. Для всякого отмеченного разбиения (T, ξ) верно неравенство $\sigma_T(f, \xi) \leqslant \sigma_T(g, \xi)$. Поэтому достаточно рассмотреть последовательность разбиений (T_n, ξ_n) с $|T_n| \to 0$ и в неравенстве для интегральных сумм перейти к пределу при $n \to \infty$. □

Аддитивность.
Если функция f интегрируема по Риману на $[a, b]$ и отрезках $[a, c], [c, b]$, где $a < c < b$, то верно

равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Доказательство. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим отмеченное разбиение $(\hat{T_n}, \hat{\xi_n})$ отрезка $[a,c]$, состоящее из точек $x_{k,n} = a + \frac{(c-a)k}{n}$ $(k = 0, \dots, n)$, и отмеченных точек $\hat{\xi_{k,n}} = x_{k-1,n}$ $(k = 1, \dots, n)$. Рассмотрим также $(\check{T_n}, \check{\xi_n})$ – отмеченное разбиение $[c,b]$ с точками $y_{k,n} = c + \frac{(b-c)k}{n}$, $\check{\xi_{k,n}} = y_{k-1,n}$. Тогда объединение (T_n, ξ_n) этих разбиений является отмеченным разбиением $[a,b]$, причем

$$\sigma_{T_n}(f, \xi_n) = \sigma_{\hat{T_n}}(f, \hat{\xi_n}) + \sigma_{\check{T_n}}(f, \check{\xi_n}).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим искомое равенство для интегралов. □

Определение. Пусть f ограничена на $[a,b]$. Пусть $T = \{x_i\}_{i=0}^n$ – разбиение $[a,b]$ и $M_i = \sup\limits_{[x_{i-1};x_i]} f(x)$, $m_i = \inf\limits_{[x_{i-1};x_i]} f(x)$. Тогда
$S_T(f) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$ – *верхняя сумма Дарбу* f, отвечающая разбиению T.
$s_T(f) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$ – *нижняя сумма Дарбу* f, отвечающая разбиению T.

Лемма. *Для любого разбиения T выполнено*

$$S_T(f) = \sup_\xi \sigma_T(f, \xi),\ \ s_T(f) = \inf_\xi \sigma_T(f, \xi)$$

Доказательство. Пусть $T = \{x_i\}_{i=0}^n$. Поскольку для $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^n$, где $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, верно $f(\xi_i) \leqslant M_i$, то $\sigma_T(f, \xi) \leqslant S_T(f)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем $\xi_i' \in [x_{i-1}, x_i]$ так, чтобы $f(\xi_i') > M_i - \frac{\varepsilon}{b-a}$. Тогда для $\xi' = \{\xi_i'\}_{i=1}^n$ выполнено

$$\sigma_T(f, \xi') = \sum_{i=1}^n f(\xi_i')\Delta x_i > \sum_{i=1}^n (M_i - \frac{\varepsilon}{b-a})\Delta x_i = S_T(f) - \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^n \Delta x_i = S_T(f) - \varepsilon.$$

Это означает что $S_T(f)$ является супремумом множества $\sigma_T(f, \xi)$. Аналогично для $s_T(f)$. □

Покажем, что при добавлении точек в разбиение верхние суммы Дарбу не увеличиваются, а нижние – не уменьшаются.

Лемма. *Если разбиение T' получено из рабиения T добавлением m точек, то*

$$0 \leqslant S_T(f) - S_{T'}(f) \leqslant 2M_f m|T|$$

$$0 \leqslant s_{T'}(f) - s_T(f) \leqslant 2M_f m|T|,$$

где $M_f = \sup\limits_{[a,b]}|f|$.

Доказательство. Пусть $T = \{x_i\}_{i=0}^n$ и пусть $T' = T + x^*$, $x^* \in (x_{j-1}, x_j)$. Введем обозначения

$$M_j' = \sup_{[x_{j-1},x^*]} f,\ \ M_j'' = \sup_{[x_*,x_j]} f$$

Тогда

$$S_T(f) - S_{T'}(f) = M_j(x_j - x_{j-1}) - M_j'(x^* - x_{j-1}) - M_j''(x_j - x^*) = (M_j - M_j')(x^* - x_{j-1}) + (M_j - M_j'')(x_j - x^*).$$

Поскольку $0 \leqslant M_j - M_j' \leqslant 2M_f$ и $0 \leqslant M_j - M_j'' \leqslant 2M_f$, то

$$0 \leqslant S_T(f) - S_{T'}(f) \leqslant 2M_f(x_j - x_{j-1}) \leqslant 2M_f|T|$$

Общий случай следует индукцией по m. Проверка нижних сумм Дарбу аналогична. □

Определение.
$I^*(f) = \inf\limits_{T} S_T(f)$ – *верхний интеграл Дарбу* функции f.
$I_*(f) = \sup\limits_{T} s_T(f)$ – *нижний интеграл Дарбу* функции f.

Теорема. *Критерий интегрируемости Дарбу.*
Пусть f ограничена на $[a, b]$

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \Leftrightarrow I^*(f) = I_*(f)$$

При этом $\int_a^b f(x)dx = I^*(f) = I_*(f)$.

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists \delta > 0\ \forall (T, \psi), |T| < \delta$

$$I - \varepsilon < \sigma_T(f, \psi) < I + \varepsilon. \text{ По лемме 2 получим } I - \varepsilon \leqslant s_T(f) \leqslant S_T(f) \leqslant I + \varepsilon.$$

Т.к. $\varepsilon > 0$ – любое, то $I_*(f) = I^*(f) = I$.
$\Leftarrow$ Пусть $I_*(f) = I^*(f) = I$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По следствию 2 $\exists \delta > 0\ \forall (T, \psi), |T| < \delta$

$$0 \leqslant S_T(f) - I^*(f) < \varepsilon$$

$$0 \leqslant I_*(f) - s_T(f) < \varepsilon$$

Тогда $\sigma_T(f, \psi) - I \leqslant S_T(f) - I^*(f) < \varepsilon$, $\sigma_T(f, \psi) - I \geqslant s_T(f) - I_*(f) > -\varepsilon$.
Значит, $|\sigma_T(f, \psi) - I| < \varepsilon$, следовательно, $f \in \mathcal{R}[a, b]$ и $I = \int_a^b f(x)dx$. □

Определение. Пусть $f : D \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$. *Колебанием* функции f на множестве E называется величина:

$$\omega(f, E) = \sup_{x, y \in E} |f(x) - f(y)|.$$

Для f ограниченной на $[a, b]$, и разбиения $T = \{x_i\}_{i=0}^n$ этого отрезка, положим $\Omega_T(f) = S_T(f) - s_T(f)$.

Теорема.

1) Если $f \in \mathcal{R}[a, b], [c, d] \subset [a, b]$. Тогда $f \in \mathcal{R}[c, d]$.
2) Если $a < c < b$ и $f \in \mathcal{R}[a, c]$ и $f \in \mathcal{R}[c, b]$, то $f \in \mathcal{R}[a, b]$.
3) Если $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, то $f \cdot g \in \mathcal{R}[a, b]$.
4) Если $f \in \mathcal{R}[a, b]$, то $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$.

Доказательство.
1) Т.к. $f \in \mathcal{R}[a, b]$, то f ограничена на $[a, b]$ и, значит, ограничена на $[c, d]$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists T$ – разбиение $[a, b]$ $(\Omega_T(f) < \varepsilon)$. Положим $T_0 = T + \{c, d\}$. Следовательно ,

$$\Omega_{T_0}(f) = S_{T_0}(f) - s_{T_0}(f) \leqslant S_T(f) - s_T(f) = \Omega_T(f),$$

значит функция интегрируема на $[a, b]$.
2) Ограниченность на $[a, c]$ и $[c, b]$ влечет ограниченность на $[a, b]$. Так как $f \in \mathcal{R}[a, c]$, то существует T_1 – разбиение $[a, c]$, такое что $\Omega_{T_1}(f|_{[a,c]}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Так как $f \in \mathcal{R}[c, b]$, то существует T_2 – разбиение $[c, b]$, такое что $\Omega_{T_2}(f|_{[c,b]}) < \frac{\varepsilon}{2}$. $T = T_1 \cup T_2$ – разбиение $[a, b]$. Тогда $\Omega_T(f) = \Omega_{T_1}(f|_{[a,c]}) + \Omega_{T_2}(f|_{[c,b]}) < \varepsilon$. Тогда f интегрируема на $[a, b]$.
3) Оценим колебания произведения функций на $E \subset [a, b]$. Так как f и g – ограничены на $[a, b]$, то $\exists M > 0(|f| \leqslant M, |g| \leqslant M)$ на $[a, b]$. Пусть $x, y \in [a, b]$, тогда

$$|f(y)g(y) - f(x)g(x)| = |f(y)g(y) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(x)g(x)| \leqslant$$

$$\leqslant |f(y)||g(y)-g(x)|+|g(x)||f(y)-g(x)|\leqslant$$

$$\leqslant M|g(y)-g(x)|+M|f(y)-f(x)|\leqslant$$

$$\leqslant M\omega(f,E)+M\omega(g,E)\Rightarrow \omega(fg,E)\leqslant M(\omega(f,E)+\omega(g,E))$$

Зафиксируем $\varepsilon>0$. Так как $f\in\mathcal{R}[a,b]$, то $\exists T_f$ – разбиение $[a,b]$, такое что $\Omega_T(f)<\frac{\varepsilon}{2M}$, $g\in\mathcal{R}[a,b]$, то $\exists T_g$ – разбиение $[a,b]$, такое что $\Omega_T(f)<\frac{\varepsilon}{2M}$. Положим $T=T_f\cup T_g$ – разбиение $[a,b]$. Тогда $\Omega_T(f)\leqslant\Omega_{T_f}(f)$, $\Omega_T(g)\leqslant\Omega_{T_g}(g)$. Следовательно, $\Omega_T(fg)\leqslant M\Omega_T(f)+M\Omega_T(g)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. Значит, $fg\in\mathcal{R}[a,b]$.
4) Так как $||f(y)|-|f(x)||\leqslant|f(y)-f(x)|\ \forall x,y\in E$, то $\omega(|f|,E)\leqslant\omega(f,E)$. Далее повторяем рассуждения из прошлого пункта. □

Теорема. *Интегрируемости о среднем.*
Пусть $f,g\in\mathcal{R}[a,b]$, $m\leqslant f\leqslant M$ на $[a,b]$. Если $g\geqslant 0$ на $[a,b]$ или $g\leqslant 0$ на $[a,b]$, то $\exists\lambda\in[m,M]$: $\int_a^b f(x)g(x)\,dx=\lambda\int_a^b g(x)\,dx$.

Доказательство. Пусть $g\geqslant0$ на $[a,b]$. Тогда $mg\leqslant fg\leqslant Mg$ на $[a,b]$. По свойству монотонности $m\int_a^b g(x)\,dx\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\,dx\leqslant M\int_a^b g(x)\,dx$. Если $\int_a^b g(x)\,dx=0$, то $\int_a^b f(x)g(x)\,dx=0$ и в качестве λ – любое число от m до M. Если $\int_a^b g(x)\,dx>0$, то равенство выполняется для $\lambda=\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}\in[m,M]$.
Случай $g\leqslant 0$ сводится к предыдущему заменой g на $-g$. □

Теорема. *Если f непрерывна на $[a,b]$, то f интегрируема на $[a,b]$.*

Доказательство. Так как f непрерывна на $[a,b]$, то по теореме Вейерштрасса f ограничена на $[a,b]$ и по теореме Кантора равномерно непрерывна на $[a,b]$. Зафиксируем $\varepsilon>0$. Из условия равномерной непрерывности $\exists\delta>0\ \forall x,y\in[a,b]\ (|x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{b-a})$. Рассмотрим T – разбиение $[a,b]$, $|T|<\delta$. По теореме Вейерштрасса $\exists x_i',x_i''\in[a,b](f(x_i')=M_i,\ f(x_i'')=m_i)$. Так как $|x_i'-x_i''|\leqslant\Delta x_i<\delta$, то $f(x_i')-f(x_i'')<\frac{\varepsilon}{b-a}$. Следовательно, $\Omega_T(f)=\sum_{i=1}^n(M_i-m_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^n(f(x_i')-f(x_i''))\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^n\Delta x_i=\varepsilon$. Тогда $f\in\mathcal{R}[a,b]$. □

Теорема. *Если f монотонна на $[a,b]$, то f интегрируема на $[a,b]$.*

Доказательство. Пусть для определенности f нестрого возрастает на $[a,b]$. Тогда $f(a)\leqslant f(x)\leqslant f(b)\ \forall x\in[a,b]$ и, значит, f ограничена на $[a,b]$. Для произвольного $T=\{x_i\}_{i=0}^n$ – разбиение $[a,b]$, выполнено: $\Omega_T(f)=\sum_{i=1}^n(M(i)-m_i)\Delta x_i\leqslant|T|\sum_{i=1}^n(f(x_i)-f(x_{i-1}))=|T|(f(b)-f(a))$. Выберем T так, что $|T|(f(b)-f(a))<\varepsilon$, тогда $\Omega_T(f)<\varepsilon$, тогда $f\in\mathcal{R}[a,b]$. □

Теорема. *Пусть f определена на $[a,b]$ и ограничена на нем. Если $f\in\mathcal{R}[c,d]\ \forall[c,d]\subset(a,b)$, то $f\in\mathcal{R}[a,b]$.*

Доказательство. По условию $\exists M>0$ $(|f|\leqslant M)$ на $[a,b]$. Зафиксируем $\varepsilon>0$. Рассмотрим $c=a+\frac{\varepsilon}{6M},c=a+\frac{\varepsilon}{6M},d=b-\frac{\varepsilon}{6M}$ $(c<d)$. По условию $f\in\mathcal{R}[c,d]$, тогда $\exists T_0$ – разбиение $[c,d]$: $\Omega_{T_0}(f)<\frac{\varepsilon}{3}$. $T=T_0\cup\{a,b\}$ – разбиение $[a,b]$. $\Omega_T(f)=\omega(f,[a,c])(c-a)+\Omega_{T_0}(f)+\omega(f,[d,b])(b-d)$. $\omega(f,[a,c])\leqslant 2M,\omega(f,[d,b])\leqslant 2M$ и, следовательно, $\Omega_T(f)<2M\frac{\varepsilon}{6M}+\frac{\varepsilon}{3}+2M\frac{\varepsilon}{6M}=\varepsilon$. Тогда $f\in\mathcal{R}[a,b]$. □

Следствие. Пусть f ограничена на $[a,b]$ и множество точек разрыва f на $[a,b]$ конечно, тогда $f\in\mathcal{R}[a,b]$.

Доказательство. Добавим к множеству точек разрыва f на $[a,b]$ точки a,b : $a=x_0<x_1<\dots<x_N=b$. По теореме о непрерывности на отрезке: $f\in\mathcal{R}[\alpha,\beta]\forall[\alpha,\beta]\subset(x_{i-1},x_i)$ и f ограничена на $[x_{i-1},x_i]$. Тогда $f\in\mathcal{R}[x_{i-1},x_i],(i=1,\dots,N)$. Последовательно применяя пункт 2 получим $f\in\mathcal{R}[a,b]$. □

Определение. Пусть I – промежуток, $f : I \to \mathbb{R}$ интегрируема на любом $[\alpha, \beta] \subset I$, $a \in I$. Функция $F : I \in \mathbb{R}, F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, называется *интегралом с переменным верхним пределом.*

Теорема. *Пусть I – невырожденный промежуток, $f : I \to \mathbb{R}$ и $f \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$ $\forall[\alpha, \beta] \subset I, a \in I$, $F : I \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Тогда F непрерывна на I. Кроме того, если f непрерывна в точке x, то F диффиренцируема в точке x, $F'(x) = f(x)$.*

Доказательство. Зафиксируем $x \in I$. Выберем $\delta > 0$, что $[x-\delta, x+\delta] \cap I$ – невырожденный отрезок $[\alpha, \beta]$. По условию $f \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$, тогда $\exists M > 0$ ($|f| \leqslant M$ на $[\alpha, \beta]$). Тогда $\forall y \in [\alpha, \beta]$ $|F(y) - F(x)| = |\int_a^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt| = |\int_x^y f(t)\,dt| \leqslant \int_x^y |f(t)|\,dt \leqslant M|y-x|$, следовательно $\lim_{y\to x} F(y) = F(x)$.
Докажем второе утверждение. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Поскольку f непрерывна в точке x, то существует такое $\delta > 0$, что $(|f(t) - f(x)| < \varepsilon)$ для всех $t \in B_\delta(x) \cap I$. Тогда для любого $y \in \overset{o}{B}_\delta(x) \cap I$ имеем

$$|\frac{F(y)-F(x)}{y-x} - f(x)| = |\frac{1}{y-x}\int_x^y f(t)\,dt - \frac{1}{y-x}\int_x^y f(x)\,dt| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{|y-x|}|\int_x^y |f(t)-f(x)|\,dt| \leqslant \frac{1}{|y-x|}\cdot\varepsilon|y-x| = \varepsilon.$$

Это означает, что $\lim_{y-x} \frac{F(y)-F(x)}{y-x} = f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$. □

Следствие. Если f непрерывна на промежутке I, то f имеет на I первообразную.

Теорема. *О замене переменной.*
Пусть f непрерывна на промежутке I, функция $\varphi : [\alpha, \beta] \to I$ дифференцируема на $[\alpha, \beta]$, причем $\varphi' \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

где $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$.

Доказательство. Функция $f_o\varphi$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$, поэтому $(f_o\varphi)\varphi' \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$. Пусть F – первообразная f на I. Тогда по правилу дифференцирования композиции $(F_o\varphi)' = (f_o\varphi)\varphi'$ на $[\alpha, \beta]$ и, значит, $F_o\varphi$ – первообразная $(f_o\varphi)\varphi'$ на этом отрезке. По формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))|_\alpha^\beta = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

□

Теорема. *Формула интегрирования по частям.*
Пусть функции F и G дифференцируемы на $[a, b]$, а их производные f, g интегрируемы на этом отрезке. Тогда

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(x)G(x)|_a^b - \int_a^b G(x)f(x)dx.$$

Доказательство. Так как $(FG)' = Fg + fG$, то FG является первообразной функции $h = Fh + fG$. Из дифференцируемости F, G следует их непрерывность, а значит, и интегрируемость на $[a, b]$. Следовательно, $h \in \mathcal{R}[a, b]$. По свойству линейности и формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b Fg(x)dx + \int_a^b Gf(x)dx = \int_a^b (FG)'(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a)$$

и искомое равенство установлено. □

12. Евклидово пространство $\mathbb{R}^m$. Предел и производная вектор–функции. Теорема Лагранжа для вектор–функций. Параметризованная кривая в $\mathbb{R}^m$. Длина кривой. Аддитивность длины кривой. Достаточное условие спрямляемости. Дифференцируемость переменной длины дуги кривой. Натуральная параметризация.

Пусть $\mathbb{R}^m = \{x = (x_1, x_2, ..., x_m)^T, x \in \mathbb{R}\}$. Множество $\mathbb{R}^m$ является векторным пространством относительно операций сложения и умножения на число:
1) $(x_1, ..., x_m)^T + (y_1, ..., y_m)^T = (x_1 + y_1, ..., x_m + y_m)^T$,
2) $\alpha(x_1, ..., x_m)^T = (\alpha x_1, ..., \alpha x_m)^T$.
Функция $(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, (x, y) = \sum_{i=1}^m x_i y_i$ удовлетворяет свойствам:

1. $\forall x \in \mathbb{R}^m : (x, x) \geqslant 0, (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}^m : (x, y) = (y, x)$;
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^m : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$.

Всякая функция $(\cdot, \cdot)$ на векторном пространстве (над $\mathbb{R}$), удовлетворяющее свойствам 1-3, называется *скалярным произведением* на векторном пространстве (над $\mathbb{R}$). Векторное пространство со скалярным произведением называется *евклидовым пространством.* Т.о, $\mathbb{R}^m$ – евклидово пространство.
Будем рассматривать функции $\gamma : E \to \mathbb{R}^m$, где $E \subset \mathbb{R}$ (*вектор-функция*). Поскольку $\gamma(t) = (\gamma_1(t), ..., \gamma_m(t))^T, t \in E$, то задание вектор-функции $\gamma \Leftrightarrow$ заданию на E m числовых функций $t \mapsto \gamma_i(t)$ (*i–ая координатная функция* γ).

Определение. Пусть $\gamma : E \to \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^m$. Вектор a называется *пределом* функции γ в точке t_0, если t_0 – предельная точка E и

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall t \in \overset{o}{B}_\delta(t_0) \cap E \; (|\gamma(t) - a| < \varepsilon)$$

Пишут $a = \lim_{t \to t_0} \gamma(t)$. Аналогично вводится понятие непрерывности вектор-функции.

Теорема. *Пусть $\gamma : E \to \mathbb{R}^m$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), ..., \gamma_m(t))^T$. Вектор $a = (a_1, ..., a_m)^T$ является пределом функции γ при $t \to t_0$, тогда и только тогда, когда $\gamma_i(t) \to a_i$ при $t \to t_0$ для каждого $i = 1, ..., m$.*

Доказательство. Для любого $x \in \mathbb{R}^m$ верно неравенство

$$|x_i| \leqslant \sqrt{x_1^2 + ... + x_m^2} \leqslant |x_1| + ... + |x_m|.$$

Осталось применить его к $x = \gamma(t) - a$. □

Следствие. Об операциях с пределами.
Пусть $\gamma, \tilde{\gamma} : E \to \mathbb{R}^m$, $f : E \to \mathbb{R}$. Если существуют $\lim_{t \to t_0} \gamma(t) = a$, $\lim_{t \to t_0} \tilde{\gamma}(t) = b$ и $\lim_{t \to t_0} f(t) = c$, то существуют:

1. $\lim_{t \to t_0}(\gamma(t) + \tilde{\gamma}(t)) = a + b$;
2. $\lim_{t \to t_0} f(t)\gamma(t) = ca$;
3. $\lim_{t \to t_0}(\gamma(t), \tilde{\gamma}(t)) = (a, b)$.

Определение. Пусть функция $\gamma : I \to \mathbb{R}^m$ определена на промежутке I и $t_0 \in I$. Вектор $\gamma'(t_0)$ называется *производной* функции γ в точке t_0, если $\gamma'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}$. При этом будем говорить, что функция γ *дифференцируема* в точке t_0.

Следствие. Пусть функция $\gamma : I \to \mathbb{R}^m$ определена на промежутке I, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots , \gamma_m(t))^T$. Функция γ дифференцируема в точке t_0, тогда и только тогда, когда в этой точке дифференцируемы все ее координатные функции, причем $\gamma'(t_0) = (\gamma_1'(t_0), \dots , \gamma_m'(t_0))^T$.

Следствие. Пусть в точке t_0 дифференцируемы функции $\gamma, \tilde{\gamma} : I \to \mathbb{R}^m$ и $f : I \to \mathbb{R}$. Тогда в этой точке дифференцируемы функции $\gamma + \tilde{\gamma}$, $f\gamma$, скалярное произведение $(\gamma, \tilde{\gamma})$, причем:
1) $(\gamma + \tilde{\gamma})' = \gamma' + \tilde{\gamma}'$;
2) $(f\gamma)' = f'\gamma + f\gamma'$;
3) $(\gamma, \tilde{\gamma})' = (\gamma', \tilde{\gamma}) + (\gamma, \tilde{\gamma}')$.

Следствие. Пусть J, I – промежутки, функции $h : J \to I$ и $\gamma : I \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемы в точках u_0 и $t_0 = h(u_0)$ соответственно. Тогда в точке u_0 дифференцируема композиция $\gamma \circ h : J \to \mathbb{R}^m$ и $(\gamma \circ h)'(u_0) = h'(u_0)\gamma'(t_0)$.

Теорема. *Лагранжа для вектор-функций.*
Если функция $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ *непрерывна на* $[a, b]$ *и дифференцируема на* (a, b), *то существует* $\xi \in (a, b)$, *что* $|\gamma(b) - \gamma(a)| \leqslant |\gamma'(\xi)|(b - a)$.

Доказательство. Если $\gamma(b) = \gamma(a)$, то неравенство очевидно. Пусть $\gamma(b) \neq \gamma(a)$. Положим $e = \frac{\gamma(b)-\gamma(a)}{|\gamma(b)-\gamma(a)|}$, тогда $|e| = 1$ и

$$|\gamma(b) - \gamma(a)| = (\gamma(b) - \gamma(a), e) = (\gamma(b), e) - (\gamma(a), e).$$

Рассмотрим на $[a, b]$ функцию $f(t) = (\gamma(t), e)$. По теореме Лагранжа $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ для некоторой точки $\xi \in (a, b)$. Поскольку $f(b) - f(a) = |\gamma(b) - \gamma(a)|$, $f'(t) = (\gamma'(t), e)$, $|f'(\xi)| \leqslant |\gamma'(\xi)|$, получаем требуемое. □

Определение. *Параметризованной кривой* в $\mathbb{R}^m$ называется непрерывная функция $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$. При этом $\gamma(a)$ называется *началом*, $\gamma(b)$ – *концом*, а множество $\gamma([a, b])$ – *носителем* параметризованной кривой γ.
Параметризованная кривая $\gamma^- : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, $\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t)$, называется *противоположной* к γ.

Определение. Две параметризованные кривые $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ и $\tilde{\gamma} : [c, d] \to \mathbb{R}^m$ называются *эквивалентными*, если существует непрерывная строго возрастающая функция h, отображающая отрезок $[c, d]$ на $[a, b]$, такая что $\tilde{\gamma} = \gamma \circ h$. Аргумент кривой называется *параметром*, а функция h – *заменой параметра*.

Определение. *Кривой* Γ называется класс эквивалентности параметризованных кривых. Каждый представитель класса называется *параметризацией* кривой Γ.

Введенное понятие кривой является слишком широким и, в частности, содержит примеры (кривые Пеано), не согласующиеся с интуитивным представлением о кривых как одномерных объектах. Желая исключить из рассмотрения подобные примеры, на параметризации накладывают дополнительные условия.

Определение. Параметризованная кривая γ называется *простой*, если γ инъекция.

Определение. Пусть $r \in \mathbb{N}$. Параметризованная кривая $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t))^T$, называется C^r*-гладкой*, если все $\gamma_i \in C^r([a, b])$, т.е. производные $\gamma_i^{(k)}$ определены и непрерывны на (a,b) и существуют конечные $\gamma_i^{(k)}(a+0)$ и $\gamma_i^{(k)}(b-0)$, $k=1,...,r$. Класс C^∞ рассматривается как пересечение всех классов C^r. При этом $\gamma'(t)=(\gamma_1'(t),...,\gamma_m'(t))^T$ называется *вектором скорости* кривой γ. Параметризованная кривая $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^m$ называется *кусочно-гладкой*, если существует разбиение $T=\{t_i\}_{i=0}^n$, что кривая $\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}$ гладкая для каждого $i=1,...,n$.

Определение. Параметризованная кривая $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^m$ называется *регулярной* в точке t_0, если существует $\gamma'(t_0)\neq 0$. Параметризованная кривая регулярна, если она регулярна в каждой точке.

Определение. Кривая Γ называется C^r*-гладкой* (*регулярной*), если у нее имеется хотя бы одна C^r-гладкая параметризация.

Для параметризованной кривой $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^m$ и разбиения $T=\{t_i\}_{i=0}^n$ отрезка $[a,b]$ определим число $L(\gamma,T)=\sum_{i=1}^n|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})|$, геометрический смысл которого – это длина ломаной $\gamma(t_0)\gamma(t_1)...\gamma(t_n)$.

Определение. *Длиной* параметризованной кривой $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^m$ называется величина

$$L(\gamma)=\sup_T L(\gamma,T),$$

где супремум берется по всем разбиениям T отрезка $[a,b]$. Параметризованная кривая называется *спрямляемой*, если ее длина конечна.

Лемма. *Если параметризованные кривые $\tilde\gamma$ и γ эквивалентны и γ спрямляема, то $\tilde\gamma$ спрямляема, причем $L(\tilde\gamma)=L(\gamma)$.*

Доказательство. По условию $\tilde\gamma=\gamma\circ h$ для некоторой замены параметра $h:[c,d]\to[a,b]$. Так как h строго возрастает и концевые точки переводит в концевые, то разбиение $T=\{u_i\}_{i=0}^n$ отрезка $[c,d]$ определяет разбиение $h(T)=\{h(u_i)\}_{i=0}^n$ отрезка $[a,b]$, и наоборот. Таким образом, h индуцирует биекцию между разбиениями отрезков $[c,d]$ и $[a,b]$, причем $L(\tilde\gamma,T)=L(\gamma,h(T))$. Следовательно, $L(\tilde\gamma)=L(\gamma)$. □

Замечание. Таким образом, корректно определена длина кривой как длина любой ее параметризации.

Лемма. *Аддитивность длины кривой.*
Если кривая $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^m$ спрямляема и $c\in(a,b)$, то также спрямляемы кривые $\gamma|_{[a,c]}$ и $\gamma|_{[c,b]}$, причем $L(\gamma)=L(\gamma|_{[a,c]})+L(\gamma|_{[c,b]})$.

Доказательство. Введем обозначения $\gamma_1=\gamma|_{[a,c]}$, $\gamma_2=\gamma|_{[c,b]}$. Пусть T_1 и T_2 – разбиения отрезков $[a,c]$ и $[c,b]$ соответственно. Тогда $T=T_1\cup T_2$ – разбиение $[a,b]$, и $L(\gamma_1,T_1)+L(\gamma_2,T_2)=L(\gamma,T)\leqslant L(\gamma)$. Переходя к супремуму по всем разбиениям T_1, затем по T_2, получим $L(\gamma_1)+L(\gamma_2)\leqslant L(\gamma)$. Пусть теперь T – разбиение $[a,b]$. Положим $T'=T\cup\{c\}$, $T_1=T'\cap[a,c]$ и $T_2=T'\cap[c,b]$, тогда T_1 – разбиение $[a,c]$, T_2 – разбиение $[c,b]$ и $L(\gamma,T)\leqslant L(\gamma,T')=L(\gamma_1,T_1)+L(\gamma_2,T_2)\leqslant L(\gamma_1)+L(\gamma_2)$. Переходя к супремуму по всем разбиениям T получим $L(\gamma)\leqslant L(\gamma_1)+L(\gamma_2)$. □

Определение. Пусть $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^m$ спрямляема. Функция $s(t)=L(\gamma|_{[a,t]})$ называется *переменной длиной* дуги γ.

Если спрямляемая кривая $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^m$ не стационарна, то функция s имеет обратную $t:[0,l]\to[a,b]$, $t=t(s)$, которая удовлетворяет условиям замены параметра. Параметризованная кривая $\sigma(s)=\gamma(t(s))$, $s\in[0,l]$, эквивалентная γ, называется *натуральной параметризацией*, а ее аргумент – *натуральным параметром*.

Лемма. *Достаточное условие спрямляемости.*
Всякая C^{-1}-гладкая параметризованная кривая $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ спрямляема, причем $L(\gamma) \leqslant \sup_{[a,b]} |\gamma'| \cdot (b-a)$.

Доказательство. Пусть $M = \sup_{[a,b]} |\gamma'|$. Так как функция $|\gamma'|$ непрерывна, то $M \in \mathbb{R}$. Если $T = \{t_i\}_{i=0}^n$ – разбиение $[a,b]$, то по теореме Лагранжа для вектор-функций найдется такое $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$, что $|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \leqslant |\gamma'(\xi_i)| \cdot (t_i - t_{i-1})$. Поэтому $L(\gamma, T) \leqslant M \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = M(b-a)$. Осталось перейти к супремуму по всем разбиениям T. □

Теорема. *Для C^{-1}-гладкой параметризованной кривой $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ выполнено $s'(t) = |\gamma'(t)|$.*

Доказательство. Пусть $a \leqslant t_0 < t \leqslant b$. Имеем $s(t) - s(t_0) = L(\gamma|_{[t_0,t]})$, тогда из аддитивности длины кривой и достаточного условия спрямляемости

$$|\gamma(t) - \gamma(t_0)| \leqslant s(t) - s(t_0) \leqslant \sup_{[a,b]} |\gamma'|(t - t_0).$$

По теореме Вейерштрасса $\sup_{[a,b]} |\gamma'| = |\gamma'(\xi_t)|$ для некоторого $\xi_t \in (t_0, t)$. Поэтому

$$|\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}| \leqslant \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} \leqslant |\gamma'(\xi_t)|.$$

Перейдя к пределу при $t \to t_0 + 0$, получим $s'_+(t_0) = |\gamma'(t_0)|$. Аналогично устанавливается, что $s'_-(t_0) = |\gamma'(t_0)|$. □

Следствие. Всякая гладкая регулярная кривая имеет натуральную параметризацию.

Доказательство. По определению кривая имеет гладкую параметризацию γ с $\gamma' \neq 0$. Тогда по теореме $s' = |\gamma'| > 0$. Следовательно, функция s обратима. □

Следствие. Гладкая регулярная параметризованная кривая $\gamma : [0,l] \to \mathbb{R}^m$ является натуральной параметризацией тогда и только тогда, когда $|\gamma'(s)| = 1$ для всех $s \in [0,l]$.

Доказательство. Если γ – натуральная параметризация, то $|\gamma'(s)| = s' = 1$. Обратно, если $|\gamma'(t)| = 1$, то по теореме для переменной длины дуги $s(t) = t + C$. Так как $s(t) = L(\gamma|_{[0,t]})$, то $C = s(0) = 0$ и, значит, параметр t натуральный. □