Кратные интегралы и теория поля.
Конспект лекций (2021).
Лектор: Редкозубов Вадим Витальевич

Алексей Горбулев

2021

Содержание

Disclaimer

Внимание! Этот конспект начал создаваться ещё до вступления в КТЛ, и используется поэтому здесь немного другой стиль. Посмотреть проект конспекта можно здесь. Обо всех опечатках сообщайте автору.

Лекция 1 (7 сентября 2021). Методы вычисления интеграла Лебега в $\mathbb{R}^n$

Третий семестр — самый сложный. Поэтому на предмет нужно обратить особое внимание: он сложен и с технической, и с содержательной точки зрения. В первом семестре были две жемчужины: формула Тейлора и формула Ньютона-Лейбница. Было ли во втором что-то сравнимое? Скорее, это теорема Лебега о мажорируемой сходимости. А в третьем семестре будет не менее трёх: теорема Фубини, теорема о неявной функции, формула Стокса.

Тема лекции: «Методы вычисления интеграла Лебега в $\mathbb{R}^n$».

Сведение кратного интеграла к повторному

Обозначения: μ_n — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, $\int\limits_E d\mu_n$ называется n-кратным интегралом (Лебега), пишут $\int \underset{E}{\ldots} \int f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$. Отождествим $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_m)$, $(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^{n+m}$.

Def. Пусть $E \subset \mathbb{R}^{n+m}, x \in \mathbb{R}^n$. Множество $E_x = \{y \in \mathbb{R}^m : (x, y) \in E\}$ называется сечением множества E по координате x.

Аналогично определяется сечение E^y по $y \in \mathbb{R}^m$.

Note. Лектор написал y сверху, а не снизу, чтобы не было путаницы.

Принцип Кавальери

Th. (#1, принцип Кавальери) Пусть $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ измеримо. Тогда:

1. сечение E_x измеримо для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$;
2. функция $x \mapsto \mu_m(E_x)$ измерима на $\mathbb{R}^n$;
3. $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mu_m(E_x) d\mu(x) = \mu_{n+m}(E)$.

Доказательство: Постепенно усложняем множество E.

1) Пусть $E = B$ — брус в $\mathbb{R}^{n+m}$. Тогда $B = B' \times B''$, $B' \subset \mathbb{R}^n, B'' \subset \mathbb{R}^m$. Для любого $x \in \mathbb{R}^n$ верно, что $B_x = B''$, если $x \in B'$, в противном случае $B_x = \emptyset, x \notin B'$. Поэтому B_x измеримо. Функция $x \mapsto \mu_m(B_x) = \mu_m(B'') \cdot I_{B'}$ измерима и $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mu_m(B_x) d\mu(x) = \mu_m(B'')\mu_n(B') = \mu_{n+m}(B)$.

2) Пусть $E = G$ — открытое множество в $\mathbb{R}^{n+m}$. Тогда $G = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$, где B_k — брусы. Для любого $x \in \mathbb{R}^n$ верно, что множество $G_x = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} (B_k)_x$ измеримо по пункту 1. Функция $x \mapsto \mu_m(G_x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_m B_{kx}$ измерима как сумма ряда измеримых функций. По теореме Леви для рядов и пункту 1 имеем: $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mu_m(G_x) d\mu(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mu_m((B_k)_x) d\mu(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_{n+m}(B_k) = \mu_{n+m}(G)$.

3) Пусть $E = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} G_k$, где $\{G_k\}$ — последовательность вложенных ($G_k \subset G_{k+1}$) ограниченных открытых множеств в $\mathbb{R}^{n+m}$. Для любого $x \in \mathbb{R}^n$ множество $E_x = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} (G_k)_x$ измеримо по пункту 2. Поскольку $(G_k)_x \subset (G_m)_x$ и $\mu_m((G_1)_x) < \infty$, так как множество ограничено, то по непрерывности меры $\mu_m(E_x) = \lim\limits_{k \to \infty} \mu_m((G_k)_x)$ и, значит, $x \mapsto \mu_m(E_x)$ измерима как предел измеримых функций. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mu_m(E_x) d\mu(x) = \lim\limits_{k \to \infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mu_m(G_k)_x d\mu_x = \lim\limits_{k \to \infty} \mu_{n+m}(G_k) = \mu_{n+m}(E)$.

4) Пусть $E = Z$ — ограниченное множество меры нуль в $\mathbb{R}^{n+m}$. По критерию измеримости найдётся такое G_δ-множество $A \supset Z$, что $\mu_{n+m}(A) = 0$. По пункту 3 выполнено, что $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mu_m(A_x) d\mu(x) = 0$. Внимание, нетривиальный момент! Где же возникает «почти всюду»? Именно здесь:

$$\int\limits_{R^n} \mu_m(A_x) d\mu(x) = 0 \Rightarrow \mu_m(A_x) = 0 \text{ для почти всех } x.$$

Поскольку $A_x \supset Z_x$, то Z_x измеримо и $\mu_m(Z_x) = 0$ для почти всех x.

Note. Здесь предполагаем, что A ограничено, иначе заменим на его пересечение с открытым шаром, содержащим Z.

5) Пусть E — произвольное измеримое множество в $\mathbb{R}^{n+m}$. По критерию измеримости найдутся G_δ-множество $\Omega \supset E$ и множество Z меры нуль, такие что $E = \Omega \backslash Z$. Пусть E ограничено. Тогда Ω тоже считаем ограниченным. Поскольку выполнено $(\Omega \backslash Z)_x = \Omega_x \backslash Z_x$ и $\mu_n((\Omega \backslash Z)_x) = \mu_m(\Omega_x) - \mu_m(Z_x)$, то заключаем, что теорема верна для E. Если E не является ограниченным, то запишем его в виде $E = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} (E \cap A_k)$, где $A_k = \{x \in \mathbb{R}^{n+m} : k-1 \leqslant |x| < k\}$ и повторим рассуждения пункта 2. ■

Лемма о подграфике

Лемма. (#1, о подграфике) Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, функция $f : E \to [0; +\infty]$ измерима. Тогда подграфик $S_f = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in E, 0 < t < f(x)\}$ измерим в $\mathbb{R}^{n+1}$, и $\mu_{n+1}(S_f) = \int\limits_E f d\mu_n$.

Доказательство: Сначала докажем, что для измеримого $E \subset \mathbb{R}^n$ и $r > 0$ множество $E \times (0; r)$ измеримо. По критерию измеримости найдутся такие G_δ-множества $\Omega \supset E$ и множество Z меры нуль, что $E = \Omega \backslash Z$. Следовательно, $E \times (0; r) = (\Omega \times (0; r)) \backslash (Z \times (0; r))$. Если $\Omega = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} G_k$, где все G_k открыты, то $\Omega \times (0; r) = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} (G_k \times (0; r))$, открытое в $\mathbb{R}^{n+1}$, то есть $\Omega \times (0; r)$ — G_δ-множество в $\mathbb{R}^{n+1}$. Если набор брусов $\{B_k\}$ образует покрытие Z, то набор брусов $\{B_k \times (0; r)\}$ образует покрытие $Z \times (0; r)$, и $\mu_{n+1}(B_k \times (0; r)) = r \cdot \mu_n(B_k)$. Отсюда заключаем, что $Z \times (0; r)$ имеет меру нуль в $\mathbb{R}^{n+1}$. Поскольку подграфик $S_f = \bigcup\limits_{r \in Q} \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in E, 0 < t < r, r \in f(x)\}$, то подграфик S_f измерим как счётное объединение измеримых множеств $\{x \in E : f(x) > r\} \times (0; r)$. Для $x \in E$ выполнено: $(S_f)_x = (0; f(x)), \mu_1(0; f(x)) = f(x)$, для $x \notin E$ $(S_f)_x = \emptyset$. По пункту 3 теоремы #1 $\mu_{n+1}(S_f) = \int\limits_E f(x) d\mu(x)$. ■

Теорема Тонелли

Th. (#2, Тонелли) Пусть $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$, и функция $f : E \to [0; +\infty]$ измерима. Тогда:

1) функция $f(x, \cdot)$ измерима на E_x для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$;

2) функция $I(x) = \int\limits_{E_x} f(x, y) d\mu(y)$ измерима на $\mathbb{R}^m$;

3) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} I(x) d\mu(x) = \int\limits_E f d\mu_{n+m}$.

Доказательство: Рассмотрим подграфик $S_f = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^{n+m} \times \mathbb{R} : (x, y) \in E, 0 < t < f(x, y)\}$. Для фиксированного $x \in \mathbb{R}^n$ рассмотрим $S_{f(x,\cdot)} := \{(y, t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} : y \in E_x, 0 < t < f(x, y)\} = (S_f)_x$.

Note. Результаты очного экзамена ужасающие! Чуть ли не треть — «неуды» и неявки. Выяснилось, что Редкозубова не особо понимают! Будем учиться заново! Поэтому ходите на очные лекции, пока ситуация позволяет! Если на лекции будет ходить меньше 60 человек, то Вадим Витальевич запретит вести запись!

Продолжаем доказательство. По лемме #1 множество S_f измеримо. Поэтому по теореме #1 можем выписать следующее:

1) $S_{f(x,\cdot)}$ измеримо для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$;

2) $x \mapsto \mu_m(S_{f(x,\cdot)})$ измерима на $\mathbb{R}^n$;

3) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mu_m(S_{f(x,\cdot)}) d\mu(x) = \mu_{n+m}(S_f)$.

Перечисленные пункты являются другой формой записи утверждении теоремы #2. Покажем это.

Пусть для $x \in \mathbb{R}^n$ множество $S_{f(x,\cdot)}$ измеримо. Тогда по пунктам 1 и 2 теоремы #1 $y \mapsto \mu_1((S_{f(x,\cdot)})_y)$ измеримы на $\mathbb{R}^m$, но $\mu_1((S_{f(x,\cdot)})_y) = \mu_1((0, f(x, y))) = f(x, y)$ (для $y \in E_x$ это выполнено, а для $y \notin E_x$ верно, что $(S_{f(x,\cdot)})_y = \emptyset$), что доказывает измеримость $f(x, \cdot)$. Тогда по пункту 3 теоремы #1 выполнено следующее: $I(x) = \int\limits_{E_x} f(x, y) d\mu(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \mu_1((S_{f(x,\cdot)})_y) d\mu(y) = \mu_{m+1}(S_{f(x,\cdot)})$. Это доказывает измеримость функции $I(x)$. Теперь пункт 3 с учётом леммы #1 можно записать в виде $\int\limits_{\mathbb{R}^n} I(x) d\mu(x) =$

$\mu_{n+m}(S_f) = \int\limits_E f d\mu_{n+m}$. ■

Note. Задача о мере конуса — задача на применение принципа Кавальери (теоремы #1).

Следствие. Пусть $f : E \to [0; +\infty]$ измерима. Функция f интегрируема на $E \iff \int\limits_{\mathbb{R}^n}(\int\limits_{E_x} f(x,y)d\mu(y))d\mu(x) < \infty$.

Пример: Вычислим интеграл Пуассона (он же Гауссов интеграл): $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

Доказательство: $E = [0; +\infty)^2$, $f(x,y) = y \cdot e^{-(1+x^2)y^2}$ — неотрицательная измеримая функция. По теореме Тоннели $\int\limits_E f d\mu_2 = \int\limits_{(0;+\infty)} \left(\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} 2ye^{-(1+x^2)y^2dy}\right) d\mu(x) = \frac{1}{2}\int\limits_{(0;+\infty)} \left(-\frac{e^{-\left(1+x^2\right)y^2}}{1+x^2}\Big|_0^\infty\right) d\mu(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}arctgx\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{4}$. С другой стороны, $\int\limits_E f d\mu_2 = \int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^\infty ye^{-(1+x^2)y^2}dx\right)dy = \int\limits_0^\infty e^{-y^2}\left(\int\limits_0^\infty e^{-t^2}dt\right)dy = \left(\int\limits_0^\infty e^{-t^2}dt\right)^2$. ■

Теорема Фубини

Th. (#3, Фубини) Пусть $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$, и функция $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ интегрируема. Тогда:

1) функция $f(x, \cdot)$ интегрируема на E_x для почти всех $x \in \mathbb{R}$;

2) функция $I(x) = \int\limits_{E_x} f(x,y)d\mu(y)$ интегрируема на $\mathbb{R}^m$;

3) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} I(x)d\mu(x) = \int\limits_E f d\mu_{n+m}$.

Доказательство: Пусть $f \geqslant 0$. Тогда по теореме Тонелли $\int\limits_{\mathbb{R}^n} I(x)d\mu(x) = \int\limits_E f d\mu_{m+n} < \infty$. Отсюда следует, что $I(x)$ интегрируема. Следовательно, функция I конечна почти всюду, что доказывает пункт 1. В общем случае, когда f произвольного знака, применим аналогичные рассуждения к f^+ и f^-. ■

Лекция 2 (14 сентября 2021)

Напоминаем прекрасный результат с прошлой лекции:

Th. (#3, Фубини) Пусть $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$, и функция $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ интегрируема. Тогда:

1) функция $f(x, \cdot)$ интегрируема на E_x для почти всех $x \in \mathbb{R}$;

2) функция $I(x) = \int\limits_{E_x} f(x,y)d\mu(y)$ интегрируема на $\mathbb{R}^m$;

3) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} I(x)d\mu(x) = \int\limits_E f d\mu_{n+m}$.

Начнём сегодняшнюю лекцию с обсуждения результатов этой теоремы.

Note. В теоремах #2 и #3 переменные x и y равноправны, поэтому условие 3) можно записать следующим образом:

$$\int\limits_E d\mu_{n+m} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\int\limits_{\mathbb{E}_x} f(x,y) d\mu(y)) d\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} (\int\limits_{E^y} f(x,y) d\mu(x)) d\mu(y)$$

Последние две величины — повторные интегралы.

Def. $Pr_X E = \{x \in \mathbb{R}^n : E_x \neq \emptyset\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists (x,y) \in E\}$ — проекция множества E на координатные подпространство $X = \mathbb{R}^n_x$.

Аналогично определяется $Pr_Y E$.

Note. Проекция измеримого множества может оказаться неизмеримым.

Пример: Пусть e — неизмеримое множество в $\mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$. Возьмём $E = e \times \{y\}$, E измеримо в $\mathbb{R}^{n+m}$, так как можно его покрыть набором брусов, суммарная мера которых сколь угодно мала, и $\mu_{n+m}(E) = 0$, но $Pr_X E = e$ неизмеримо в $\mathbb{R}^n$.

Следствие. Если дополнительно к условиям теорем #2 и #3 $Pr_X E$ измерима, то $\int\limits_E f d\mu_{n+m} = \int\limits_{Pr_X E} (\int\limits_{E_x} f(x,y) d\mu(y)) d\mu(x)$.

Пример: (#1) $E = [0;1]^2, f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, f(0,0) = 0$. $\int\limits_0^1 (\int\limits_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dy) dx = \int\limits_0^1 [\frac{y}{x^2+y^2}]|_{y=0}^{y=1} dx = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = arctg(x)|_0^1 = \frac{\pi}{4}$. Мера множеств «плохих» точек равна нулю, поэтому всё будет нормально.

$(\frac{y}{x^2+y^2})'_y = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}$ (здесь мы пытались догадаться до первообразной).

А если мы проинтегрируем в другом порядке? Тогда $\int\limits_0^1 (\int\limits_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dx) dy = -\frac{\pi}{4}$.

Таким образом, функция f не является интегрируемой на E.

Задача. Пусть $E = [-1,1]^n, f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$, $f(0,0) = 0$. Докажите, что оба повторных интеграла существуют и равны 0, но f неинтегрируема на E.

Пример: (#2) Вычислим меру n-мерного шара. μ_n Мера Лебега не меняется при параллельном переносе. Шар радиуса R получен из шара единичного радиуса получен растяжением (гомотетией) в R раз.

$\mu_n(B_R(a)) = R^n \mu_n(B_1(0)) = R^n \cdot \omega_n$; $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1}_x \times \mathbb{R}_y$.

Посмотрим, как выглядит сечение по координате y: $B^y = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : |x|^2 < 1 - y^2\}$. Если $|y| \geqslant 1$, то сечение пусто. Иначе это $B_{\sqrt{1-y^2}}(0)$.

Посмотрим на меру этого сечения. Если $|y| \geqslant 1$, то она равна нулю, иначе она равна $(1-y^2)^{\frac{n-1}{2}} \omega_{n-1}$.

По принципу Кавальери (теореме #1) $\omega_n = \int\limits_{\mathbb{R}} \mu_{n-1}(B^y) d\mu(y) = \int\limits_{-1}^1 (1-y^2)^{\frac{n-1}{2}} \omega_{n-1} dy = 2\omega_{n-1} \int\limits_0^1 (1 - y^2)^{\frac{n-1}{2}} dy = |y = \sin t| = 2\omega_{n-1} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt$.

Вычислим $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} t d(\sin t) = \cos^{n-1} t \sin t|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\cos^{n-2} t \cdot \sin^2 t dt = (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} t(1-\cos^2 t)dt = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$. $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$, $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \dots = \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \epsilon_n$. Если n чётно, то $\epsilon_n = \frac{\pi}{2}$, иначе это 1.

Таким образом, $\omega_n = 2\omega_{n-1}\frac{(n-1)!!}{n!!}\epsilon_n = 4\omega_{n-2}\frac{(n-2)!!}{(n-1)!!}\epsilon_{n-1}\frac{(n-1)!!}{n!!}\epsilon_n = 4\omega_{n-2} \cdot \frac{(n-2)!!}{n!!}\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi\omega_{n-2}}{n}$.

Пусть $n = 2k$. Тогда $\omega_{2k} = \frac{\pi^k}{k!}$. Пусть $n = 2k+1$. Тогда $\omega_{2k+1} = 2\frac{(2\pi)^k}{(2k+1)!!}$.

Давайте посмотрим, что будет происходить при разных n. $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = \pi$.

Замена переменных

Def. Пусть U, $V \subset \mathbb{R}^n$. Отображение $g : U \to V$ называется диффеоморфизмом, если:

1) g — биекция;

2) g — гладкое отображение ($g \in C^1(U, V)$);

3) $g^{-1} \in C^1(V, U)$.

В дальнейшем под $Dg(x)$ подразумевается матрица Якоби гладкого отображения g в точке x (квадратная матрица $d \cdot g_x$в стандартном базисе $\mathbb{R}^n$).

$J_g(x) = \det Dg(x)$ — якобиан g в точке x.

Note. Если $g : U \to V$ — диффеоморфизм, то $g^{-1} \circ g = id_u$ и по теореме о дифференцировании композиции $Dg^{-1}(g(x))Dg(x) = E \Rightarrow Dg^{-1}(g(x)) = [Dg(x)]^{-1}$.

Лемма. (#2) Если $E \subset U$ измеримо, то $\mu(g(E)) \leqslant \int\limits_E |J_g(x)|d\mu(x)$, где $J_g = \det Dg$.

Комментарий. $|x|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$, $A = \max\limits_{i\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}|$, $A = (a_{ij})$, $|Ax|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_j| \leqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}||x_j| \leqslant ||A|||x|_\infty$.

Напомним теорему из прошлого семестра. Если $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — обратимое линейное преобразование, то $\mu(A(E)) = |\det A|\mu(E)$.

Ну а теперь докажем лемму #2.

Доказательство:

1) Пусть $E = Q$ — замкнутый куб: $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-a|_\infty \leqslant h\}$. Зафиксируем $x \in Q$. По теореме Лагранжа о среднем $g(x) - g(a) = Dg(g + \theta(x-a))(x-a)$ для некоторого $\theta \in (0; 1)$. Тогда $|g(x) - g(a)|_\infty \leqslant ||Dg(z)|| \cdot |x-a|_\infty \leqslant \max\limits_{z\in Q} ||Dg(z)|| \cdot h$ (функция $z \mapsto ||Dg(z)||$ непрерывна на компакте Q, следовательно, $\exists \max\limits_{z\in Q} ||Dg(z)||$). Следовательно, $\mu(g(Q)) \leqslant (\max\limits_{z\in Q} ||Dg(z)||)^n \cdot \mu(Q)$.

А теперь нетривиальный момент! Пусть $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — обратимое линейное преобразование. Запишем $g = A \cdot A^{-1}g$ и применим полученное неравенство к отображению $A^{-1}g$, получим $\mu(g(Q)) =$

$|\det A|\mu(A^{-1}g(Q)) \leqslant |\det A| \cdot (\max\limits_{z\in Q}||A^{-1}Dg(z)||)^n\mu(Q)$ $(*)$. В качестве A возьмём дифференциал g, и будет выражение, близкое к дифференциалу тождественного преобразования.

Теперь разобьём Q на кубы $Q_1, \dots, Q_N$, длины рёбер которых не превосходит 2δ (уточним позже). Поскольку $x \mapsto |J_g(x)|$ непрерывна на Q_k, то $\exists x_k = Q_k : |J_g(x_k)| = \min\limits_{x\in Q_k}|J_g(x)|$. Применим $(*)$, положив $A = Dg(x_k)$ и $Q = Q_k$. Тогда $\mu(g(Q)) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{N}\mu(g(Q_k)) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{N}|J_g(x_k)|\cdot(\max\limits_{z\in Q_k}||Dg^{-1}(g(x_k))Dg(z)||)^n\cdot\mu(Q_k)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Функция Dg равномерно непрерывна на Q, поэтому $\exists\delta > 0\ \forall x, y \in Q$ ($|x-y| < \delta \Rightarrow ||Dg(x) - Dg(y)|| < \frac{\varepsilon}{M}$), где $M = \max\limits_{x\in g(Q)}||Dg^{-1}(x)||$. Следовательно, $||Dg^{-1}(g(x_k))Dg(x)|| = ||E + Dg^{-1}(g(x_k))Dg(x) - Dg^{-1}(g(x_k))Dg(x_k)|| \leqslant ||E|| + ||(Dg^{-1}g(x_k))(Dg(x) - Dg(x_k))|| \leqslant 1 + ||Dg^{-1}(g(x_k))||\cdot ||Dg(x) - Dg(x_k)|| \leqslant 1 + \varepsilon$. Следовательно, $\mu(g(Q)) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{N}|J_g(x_k)|(1+\varepsilon)^n\mu(Q_k)$.

Учитывая выбор x_k, имеем $\mu(g(Q)) \leqslant (1+\varepsilon)^n\sum\limits_{k=1}^{N}\int\limits_{Q_k}|J_g(x)|d\mu(x) = (1+\varepsilon)^n\int\limits_{Q}|J_g(x)|d\mu(x)$. Устремим ε к нулю, получим $\mu(g(Q)) \leqslant \int\limits_{Q}|J_g(x)|d\mu(x)$.

Можно посмотреть и более простые доказательства у Рудина и Зорича, но они негеометричны, там не чувствуется, что происходит.

Лекция 3 (21 сентября 2021)

Продолжение доказательства леммы #2

У нас неделю назад была следующая лемма #2, насчёт которой мы мучались очень долго.

На самом деле тут равенство! Но чтобы это доказать, нужна кропотливая работа. Поэтому пока докажем оценку сверху. Был неделю назад и комментарий насчёт норм, которыми довольно удобно пользоваться: для куба довольно просто оценивать норму.

С доказательством была беда... Попробуем ещё раз.

Доказательство:

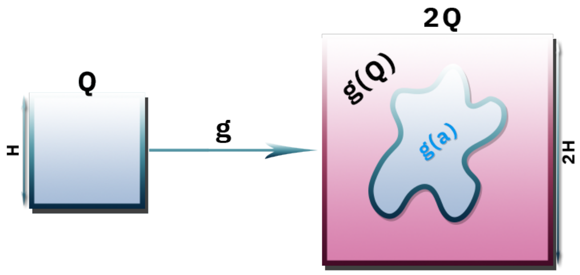
1) Пусть $E = Q$ — замкнутый куб: $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-a|_\infty \leqslant h\}$. Зафиксируем $x \in Q$. Применим теорему Лагранжа о среднем к функции $t \mapsto g_i(a + t(x-a))$ на $[0;1]$, где $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$, получим $g_i(x) - g_i(a) = \sum\limits_{j=1}^{n}\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(z_i)(x_i - a_i)$, $i = 1, \dots, n$, некоторая точка z_i устроена как $a + t_i(x-a)$, и она принадлежит отрезку с концами a и x. Следовательно,

$$|g_i(x) - g_i(a)| \leqslant |x-a|_\infty\sum_{i=1}^{n}|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(z_i)| \leqslant |x-a|_\infty||Dg(z_i)|| \leqslant x - a_\infty \cdot \max_{z\in Q}||Dg(z)||$$

Почему максимум существует? Он существует в силу того, что функция $z \mapsto ||Dg(z)||$ непрерывна на компакте Q.

Из оценки получаем $|g(x)-g(a)|_\infty \leqslant \max\limits_{z\in Q}||Dg(z)||\cdot h$.

Теперь рассмотрим вспомогательное выражение $|y-g(a)|_\infty \leqslant H$, задающее куб с центром в точке a и длиной ребра $2H$. Под действием диффеоморфизма g образ компакта Q полностью лежит в заданном кубе.



Имеем оценку $\mu(g(Q)) \leqslant (\max\limits_{z\in Q}||Dg(z)||)^n\cdot\mu(Q)$.

А теперь «пружина» доказательства! Пусть $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ — обратимое линейное преобразование. Запишем $g = A\cdot A^{-1}g$ и применим полученное неравенство к диффеоморфизму $A^{-1}g$, получим по теореме об изменении меры при линейном преобразовании $\mu(g(Q)) = |\det A|\mu(A^{-1}g(Q)) \leqslant |\det A|\cdot(\max\limits_{z\in Q}||A^{-1}Dg(z)||)^n\mu(Q)$ (1). Далее нужно разбить на маленькие кубы, и на каждом из Q_k в качестве A возьмём дифференциал функции g, и будет выражение, близкое к единице.

Но на какие именно кубы нужно разбивать? Давайте посмотрим. Фиксируем $\varepsilon>0$, положим $M=\max\limits_{x\in Q}||[Dg(x)]^{-1}||$. Почему именно такое M берём, почему $M>0$? Вспомним, как устроена обратная матрица. В знаменателе будет определитель матрицы, а в числителе алгебраические дополнения, положительность достигается за счёт невырожденности матрицы. Поскольку Dg равномерно непрерывна на Q, то $\exists\delta>0\ \forall x,y\in Q\ (|x-y|_\infty<\delta\Rightarrow||Dg(x)-Dg(y)||<\frac{\varepsilon}{M})$.

Далее имеем $[Dg(x)]^{-1}\cdot Dg(y) = E + Dg(x)^{-1}(Dg(y)-Dg(x))$, откуда $||[Dg(x)]^{-1}\cdot Dg(y)|| \leqslant ||E|| + ||[Dg(x)]^{-1}||\cdot||Dg(y)-Dg(x)|| < 1+\varepsilon$ (2).

Разобьём куб Q на кубы $Q_1,\ldots,Q_N$ с длиной ребра меньше δ. Выберем точку $x_k\in Q_k$ так, что $|J_g(x_k)| = \min\limits_{x\in Q_k}|J_g(x)|$. Следовательно, по монотонности имеем $\int\limits_{Q_k}|J_g(x)|d\mu(x)\geqslant|J_g(x_k)|\mu(Q_k)$.

Применим (1) к $A=Dg(x_k)$ и $Q=Q_k$. $\mu(g(Q_k))\leqslant|J_g(x_k)|(\max\limits_{z\in Q_k}||[Dg(x_k)]^{-1}Dg(x_k)||)^n\mu(Q_k)) \leqslant (1+\varepsilon)^n|J_g(x_k)|\mu(Q_k)\leqslant(1+\varepsilon)^n\int\limits_{Q_k}|J_g(x)|d\mu(x)$.

В итоге $\mu(g(Q)) = \mu(\bigcup\limits_{k=1}^{n}g(Q_k)) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{N}\mu(g(Q_k)) \leqslant (1+\varepsilon)^n\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{Q_k}|J_g(x)|d\mu(x) = (1+\varepsilon)^n\int\limits_{Q}|J_g(x)|d\mu(x)$. Устремим ε к нулю, получим $\mu(g(Q))\leqslant\int\limits_{Q}|J_g(x)|d\mu(x)$. Первый пункт наконец-то нормально доказан!

2) Расширим класс множеств, для которых данная оценка верна. Пусть $E=G$ — открытое множество в U. Тогда $G=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}Q_i$, где $\{Q_i\}$ — замкнутые кубы, внутренности которых не пересекаются. Множество $g(G)$ открыто, поэтому измеримо; справедлива оценка:

$$\mu(g(G)) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} g(Q_i)) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(g(Q_i)) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \int_{Q_i} |J_g(x)| d\mu(x) = \int_{Q} |J_g(x)| d\mu(x)$$

В последнем равенстве учли, что кубы Q_i пересекаются по множествам меры нуль.

3) Для $m \in \mathbb{N}$ определим $W_m = \{x \in U : |x| < m, |J_g| < m\}$. Тогда W_m открыто и $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_m$. Установим неравенство для измеримого $E \subset W_m$. Разобъем это на несколько пунктов.

а) $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$, где $\{G_k\}$ — последовательность вложенных открытых множеств. Можно считать, что $G_1 \subset W_m$. Множество $g(E) = \bigcap_{k=1}^{\infty} g(G_k)$ измеримо как G_δ множество. Тогда по непрерывности меры и теореме Лебега, применим к последовательности $f_k = |J_g| I_{G_k}$ следующее:

$$\mu(g(E)) = \lim_{k\to\infty} \mu(g(G_k)) \leqslant \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |J_g| \cdot I_E d\mu = \int_{E} |J_g(x)| d\mu(x)$$

б) Пусть $E = Z$ — множество меры нуль в W_m. По критерию измеримости существует G_δ множество $\Omega_0 \supset Z$, такое что $\mu(\Omega_n) = 0$. Можно считать, что $\Omega_0 \subset W_m$. Следовательно, по предыдущему пункту

$$\mu^*(g(Z)) \leqslant \mu(g(\Omega_0)) \leqslant \int_{\Omega_0} |J_g(x)| d\mu(x) = 0$$

То есть $g(Z)$ измеримо и $\mu(g(Z)) = 0$.

в) Пусть измеримое множество $E \subset W_m$, тогда $E = \Omega \backslash Z$, $\mu(Z) = 0$. Пользуясь биекцией, запишем $g(E) = g(\Omega) \backslash g(Z)$, и $g(E)$ измеримо, и $\mu(g(E)) \leqslant \mu(g(\Omega)) \leqslant \int_E |J_g(x)| d\mu(x)$.

4) Пусть E — произвольное измеримое множество. Тогда $E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$, где $E_m = E \bigcap W_m$, для $g(E)$ и $g(E_m)$ аналогично. По доказанному $\mu(g(E_m)) \leqslant \int_{E_m} |J_g(x)| d\mu(x)$. Используя непрерывность меры и теорему Леви, применённую к $f_m = |J_g| \cdot I_{E_m}$, устанавливаем неравенство в общем случае. ■

Теорема о замене переменных в кратном интеграле

Th. (#4, о замене переменных в кратном интеграле) Пусть $g : U \to V$ — диффеоморфизм открытых множеств $U, V \subset \mathbb{R}^n$, и $E \subset U$ измеримо. Если f — неотрицательная измеримая или интегрируемая на $g(E)$ функция, то $\int_{g(E)} f(y) d\mu(y) = \int_E f(g(x)) |\det Dg(x)| d\mu(x)$.

Доказательство: Для любого $a \in \mathbb{R}$ верно: $f(g(x)) < a \Rightarrow g(x) \in \{y : f(y) < a\}$, тогда $\{x : f \circ g(x) < a\} = g^{-1}\{y : f(y) < a\}$. Откуда заключаем, что f на $g(E)$ и $f \circ g$ на E измеримы одновременно.

Теперь докажем для индикатора. Пусть $f = I_A$ — индикатор измеримого множества $A \subset V$. Поскольку $I_A \circ g(x) = \begin{cases} 1, & x \in g^{-1}(A) \\ 0, & x \notin g^{-1}(A) \end{cases} = I_{g^{-1}(A)}(x)$, то $\int_{g(E)} I_A(y) d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^n} I_{g(E)\cap A}(y) d\mu(y) = \mu(g(E) \cap A) = \mu(g(E \cap g^{-1}(A))) \leqslant \int_{E \cap g^{-1}(A)} |J_g(x)| d\mu(x) = \int_E I_{g^{-1}(A)}(x) |J_g(x)| \cdot d\mu(x) = \int_E I \circ g(x) |J_g(x)| d\mu(x)$.

Простая неотрицательная функция представима в виде линейной комбинации индикаторов, откуда для них это же верно по линейности интеграла.

Теперь пусть f — произвольная неотрицательная функция. По теореме о приближении найдётся последовательность $\{\varphi_k\}$ простых неотрицательных функций, которая, возрастая, стремится к f на $g(E)$. Тогда рассмотрим последовательность $\{\varphi_k \circ g \cdot |J_g|\}$, она, возрастая, стремится к функции $f \circ g \cdot |J_g|$ на E. Переходя к пределу при $k \to \infty$ в неравенстве $\int\limits_{g(E)} \varphi_k(y) d\mu(y) \leqslant \int\limits_E \varphi_k \circ g(x)|J_g(x)|d\mu(x)$, по теореме Леви получим:

$$\int\limits_{g(E)} f(y) d\mu(y) \leqslant \int\limits_E f \circ g(x)|J_g(x)|d\mu(x)$$

В последнем интеграле сделаем замену $x = g^{-1}(y)$:

$$\int\limits_E f \circ g(x)|J_g(x)|d\mu \leqslant \int\limits_{g(E)} f(y)|J_g(g^{-1}(y))||J_{g^{-1}}(y)|d\mu(y) = \int\limits_{g(E)} f(y)d\mu(y).$$

Традиционный шаг: если f интегрируема, на $g(E)$, то $f = f^+ - f^-$, теорема верна и для f^+, и для f^-, получаем искомое равенство. ■ .

Теорема Лагранжа о среднем в $\mathbb{R}^n$

Th. (Лагранжа о среднем в $\mathbb{R}^n$) Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и $f : U \to \mathbb{R}^n$ дифференцируема на U. Если $||df_x|| \leqslant M$ для всех $x \in U$, то $\forall x, y \in U : |f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$ при условии, что $[x, y] \subset M$.

Доказательство: Рассмотрим функцию $t \mapsto \varphi(t) = (f(x + t(y - x)), f(y) - f(x))$ на отрезке $[0, 1]$. По теореме Лагранжа в $\mathbb{R}$ $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta)$, можно ещё заметить, что $(f(y) - f(x); f(y) - f(x)) = (df_{x+\theta(y-x)}(y-x); f(y)-f(x))$. Тогда по неравенству Коши-Буняковского-Шварца и оценке норм имеем $|f(y) - f(x)|^2 \leqslant |df_{x+\theta(y-x)}(y - x)| \cdot |f(y) - f(x)|$, откуда получим $|f(y) - f(x)| \leqslant ||df_{x+\theta(y-x)}|||y - x|$. В итоге получаем, что $|f(y) - f(x)| \leqslant M|y - x|$. ■

Теорема об обратной функции и следствия из неё

Мотивация. Хотим решить уравнение $y = f(x)$. Можно поступать так $F(x) = y - (f(x) - x)$. Пусть x — решение, тогда $F(x) = x$, такие точки будут неподвижными.

Теорема Банаха о сжимающих отображениях

Th. (#1, Банах, о сжимающих отображениях) Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство и $F : X \to X$ сжимающее, то есть $\exists \lambda \in (0; 1)\ \forall x, y \in X\ \ (\rho(F(x), F(y)) \leqslant \lambda\rho(x, y))$. Тогда $\exists! x^* \in X : F(x^*) = x^*$.

Доказательство: Пусть $x_0 \in X$, определим $\{x_n\}$ так: $x_{n+1} = F(x_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Поскольку $\rho(x_{k+1}, x_k) = \rho(F(x_k), F(x_{k-1})) \leqslant \lambda\rho(x_k, x_{k-1}) \leqslant \dots \leqslant \lambda^k\rho(x_1, x_0)$, то $\rho(x_{n+p}, x_n) \leqslant \rho(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \dots + \rho(x_{n+1}, x_n) \leqslant (\lambda^{n+p-1} + \lambda^{n+p-2} + \dots + \lambda^n)\rho(x_1, x_0) \leqslant \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\rho(x_1, x_0)$, и поскольку $\frac{\lambda^n}{1-\lambda} \to 0$, заключаем, что $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность. Следовательно, существует точка x^* такая, что $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Переходя к пределу в $x_{n+1} = F(x_n)$, получим $x^* = F(x^*)$.

Пусть y^* — неподвижная точка F. Тогда $\rho(y^*, x^*) = \rho(F(y^*), F(x^*)) \leqslant \lambda\rho(y^*, x^*) \Rightarrow \rho(y^*, x^*) = 0 \Rightarrow y^* = x^*$. ■

Теорема об обратной функции

Th. (#2, об обратной функции) Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, и $f : U \to \mathbb{R}^n$ — функция класса C^1. Если $a \in U$ и df_a обратим, то существуют такие открытые W, в которой лежит точка a, и V, в которой лежит $f(a)$, что $f|_W : W \to V$ является диффеоморфизмом.

Доказательство: Начнём с упрощения. Заменяя f на $(df_a)^{-1} \circ F$, можно считать, что $Df(a) = E$. Теперь основная часть доказательства. Она состоит из нескольких шагов.

1 шаг. Построение f^{-1}. Положим $\varphi(x) = f(x) - x$. Тогда $\varphi \in C^1(U)$ и $D\varphi(a) = 0$. Поэтому существует такое $r > 0$, что $\forall x$ $(|x - a| \leqslant r \Rightarrow ||D\varphi(x)|| \leqslant \frac{1}{2})$. Дело в том, что норма матрицы $D\varphi(x)$, по словам В. В. Редкозубова, мало отличается от нормы нулевой матрицы, поэтому эту норму можно ограничить сверху числом $\frac{1}{2}$. По-простому можно это получить, вспомнив одну замечательную оценку: $||D\varphi(x)||^2 \leqslant \sum\limits_{i,j} (\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}(x))^2$. Можно считать, что $\overline{B}_r(A) \subset U$. По теореме Лагранжа $\forall x, x' \in \overline{B}_r(a)$ $(|\varphi(x) - \varphi(x')| \leqslant \frac{1}{2}|x - x'|)$. Для $y \in B_{\frac{r}{2}}(f(a))$ рассмотрим отображение $F_y(x) = y + x - f(x)$. Оценим: $|F_y(x) - a| \leqslant |F_y(x) - F_y(a)| + |F_y(a) - a| = |\varphi(x) - \varphi(a)| + |y - f(a)| \leqslant \frac{1}{2}|x - a| + |y - f(a)| < r$. Теперь рассмотрим разность $|F_y(x) - F_y(x')| = |\varphi(x) - \varphi(x')| \leqslant \frac{1}{2}|x - x'|$. Всё это нам даёт следующее: $F : \overline{B}_r(a) \to \overline{B}_r(a)$ и является сжимающим пространством с $\lambda = \frac{1}{2}$. По теореме Банаха существует единственная точка x, такая что $F_y(x) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

Отметим, что неподвижная точка лежит внутри шара $(x \in B_r(a))$, так как отображение $F_y(\overline{B}_r(x)) \subset B_r(a)$.

Возьмём $V = B_{\frac{r}{2}}(f(a))$, $W = f^{-1}(V) \cap B_r(a)$. Тогда f биективно отображает W на V.

Покажем, что отображение является непрерывно дифференцируемым. Пока докажем только непрерывность f^{-1}. Это будет нашим 2-м шагом. Пусть $y = f(x) = \varphi(x) + x$, $y' = f(x') = \varphi(x') + x'$. Тогда $|y - y'| = |(x - x') + (\varphi(x) - \varphi(x'))| \geqslant |x - x'| = |\varphi(x) - \varphi(x')| \geqslant \frac{1}{2}|x - x'|$. Следовательно, $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y)| \leqslant 2|y - y'|$.

Лекция 4 (28 сентября 2021)

Теорема об обратной функции (продолжение доказательства)

Продолжаем доказательство теоремы об обратной функции. Напомним о ней:

Th. (#2, об обратной функции) Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, и $f : U \to \mathbb{R}^n$ — функция класса C^1. Если $a \in U$ и df_a обратим, то существуют такие открытые W, содержащее a, и V, содержащее $f(a)$, что $f|_W : W \to V$ является диффеоморфизмом.

Уже успели доказать два пункта: существование f^{-1} и её непрерывность. Осталось от гомеоморфизма перейти к гомеоморфизму.

Доказательство: (непрерывная дифференцируемость f^{-1}). Функция $x \mapsto J_f(x)$ непрерывна, и по условию $J_f(a) \neq 0$. Поэтому существует окрестность точки a, что $J_f(x) \neq 0$ для всех x из этой окрестности, и, значит, существует $(Df(a))^{-1}$.

Теперь зафиксируем точку y. Сначала докажем дифференцируемость обратной функции. Напишем определение дифференцируемости функции f в точке $x = f(y)$: $f(x+h) - f(x) = Df(x)h + \alpha(h)|h|$, где α непрерывна в нуле и $\alpha(0) = 0$. Пусть $k \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ с условием $y + k \in V$. Рассмотрим $\beta(k) = \frac{1}{|k|}\left(f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) - [Df(x)]^{-1}k\right)$. Положим $h = f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)$. Тогда $\beta(k)$ можно переписать в виде:

$$\beta(k) = \tfrac{1}{|k|}\left(h - [Df(x)]^{-1}\left(f(x+h) - f(x)\right)\right) = \tfrac{1}{|k|}\left(h - [Df(x)]^{-1}\left(Df(x)h + \alpha(h)\cdot h\right)\right) =$$
$$\tfrac{1}{|k|}\left(h - h - |h|[Df(x)]^{-1}(\alpha(h))\right) = -\tfrac{|h|}{|k|}[Df(x)]^{-1}\left(\alpha(h)\right)$$

Согласно пункту 2, $|h| \cdot |f^{-1}(y+k) - f(y)| \leqslant 2|k|$. Устремляя k к нулю, получим, что h стремится к нулю, и, значит, $\beta(k) \to 0$. Это доказывает, что f^{-1} дифференцируема в точке y с $df_y^{-1} = \left(df_{f^{-1}(y)}\right)^{-1}$.

Теперь несложно можно доказать непрерывную дифференцируемость обратной функции. Из курса линейной алгебры известно, что элементы $Df^{-1}(y)$ — рациональные функции от $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\left(f^{-1}(y)\right)$ со знаменателем $J_f\left(f^{-1}(y)\right)$. Из непрерывной дифференцируемости f и непрерывности f^{-1} получаем непрерывную дифференцируемость f^{-1}. ■

Что будет, если вместо C^1 будем рассматривать C^r? Тогда и обратная функция принадлежит классу C^r, что доказывается по индукции. База уже доказана ранее, когда доказывали теорему об обратной функции. По предположению индукции, $f \in C^{r-1} \implies f^{-1} \in C^{r-1}$. Но тогда у нас частные производные принадлежат классу C^{r-1}, и их композиция с $f^{-1}(y)$ является непрерывной. К этому вернёмся после теоремы о неявной функции.

Следствие. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Если отображение $f : U \to \mathbb{R}^n$ класса C^1 с $J_f \neq 0$ на U, то $f(U)$ — открытое множество.

Доказательство: Зафиксируем точку $b \in f(U)$. Пусть $b = f(a)$. По теореме об обратной функции найдутся открытые множества W, содержащее a, и V, содержащее b, такие что $W \subset U$ и $f : W \to V$ — диффеоморфизм. Множество $V = f(W) \subset f(U)$ — открытое, содержащее точку b, следовательно, b — внутренняя точка $f(U)$. ■

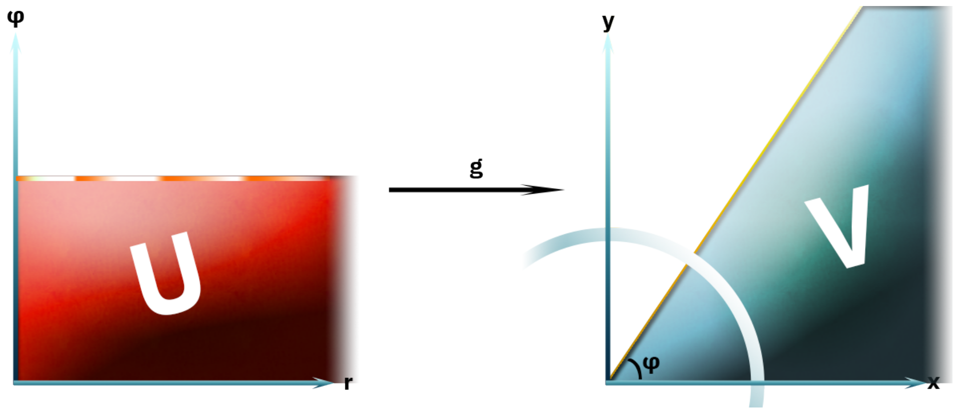
Пример: $U = \{(r,\varphi) : r > 0,\ 0 < \varphi < 2\pi\}$, $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0);\ x \geqslant 0\}$, $g : U \to V$, $g(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. $g \in C^{-1}(U)$, g — биекция. Посчитаем якобиан:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = r$$

Так как $r > 0$, то и $J_g > 0$. Следовательно, g — диффеоморфизм.

Def. Пусть $U,\ V \subset \mathbb{R}^n$ — области, и задан диффеоморфизм $g : U \to V$, такой что $g(y) = (g_1(y), \ldots, g_n(y))$, $y \in U$. Набор функций $(g_1, \ldots, g_n)$ называется криволинейной системой координат на U.

Пример: Рассмотрим полярную систему координат.



Множество точек, при которых φ — константа, перейдёт в луч, исходящий из начала координат, образующий угол φ с осью Ox; множество точек, при которых r — константа, перейдёт в окружность радиуса r.

Note. Теорема об обратной функции носит **локальный** характер: отображение $f : U \to \mathbb{R}^n$ с $J_f \neq 0$ на U при $n > 1$, локально может быть диффеоморфизмом, а вот глобально уже нет.

С середины XIX-го века известна проблема якобиана, до сих пор это открытый вопрос: рассмотрим $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ при $n > 1$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$, где f_i — многочлен, $J_f \equiv 1$. Верно ли, что $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — гомеоморфизм на $\mathbb{R}^n$?

Теорема о неявной функции

А теперь переходим к одной из «жемчужин» нашего курса — теоремы о неявной функции! Часто на семинарах по кратным интегралам возникает нечто наподобие $z = x^2 + y^2$, пытаемся понять, какую фигуру задаёт это уравнение. Рассматривали множество уровней: $L_c = \{(x,y) : x^2 + y^2 = c\}$, при $c = 0$ $L_c = \emptyset$. Какой график задаёт эта функция? $L_c = \{(x, \varphi(x)) : x \in I\}$, казалось бы, это просто окружность, но возникает несколько проблем. Ещё один мотивирующий пример. Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}y_1 + \dots + b_{1m}y_m = 0; \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n + b_{m1}y_1 + \dots + b_{mm}y_m = 0. \end{cases}$$

Как выразить x через y? Вот в чём вопрос...

Отождествим $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$. Пусть $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ — открытое множество, и $E : U \to \mathbb{R}^m$ дифференцируема в точке $p = (a, b)$, $F = (F_1, \dots, F_m)$. Тогда $DF(p)$ имеет вид $\left(\frac{\partial F}{\partial x}(p) \quad \frac{\partial F}{\partial y}(p)\right)$, где $\frac{\partial F}{\partial x}(p)$ — матрица Якоби $x \mapsto F(x, b)$ в точке a, $\frac{\partial F}{\partial y}(p)$ — матрица Якоби $y \mapsto F(a, y)$ в точке b.

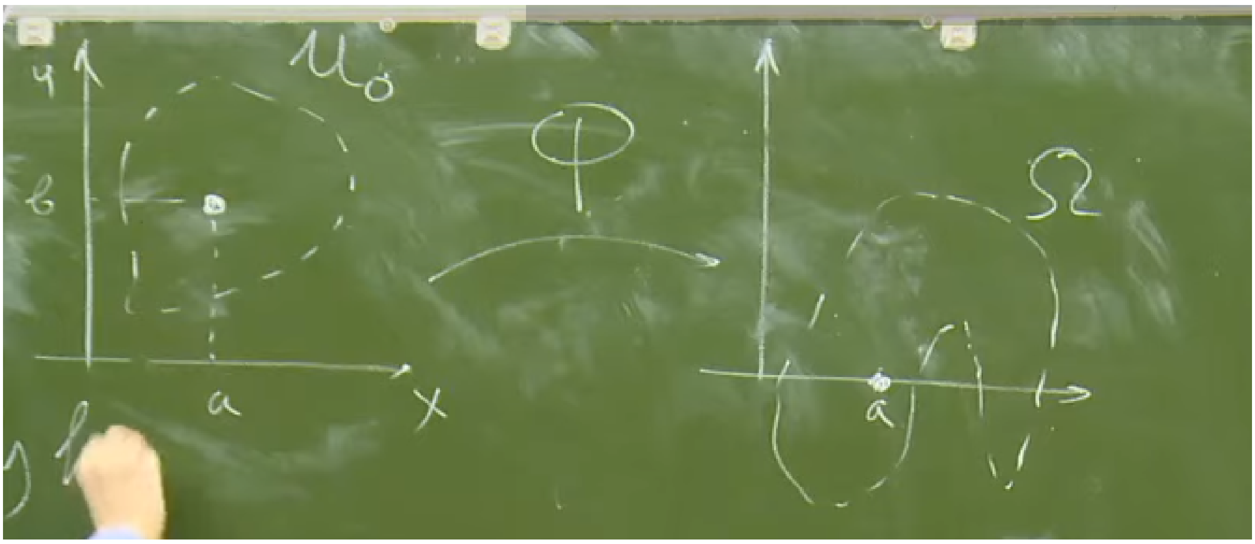
Th. (#3, о неявной функции) Пусть $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ — открытое множество, $(a, b) \in U$. Если $F : U \to \mathbb{R}^m$ такое, что:

1. $F(a, b) = 0$;
2. $F \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$;
3. $\det \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$;

то существуют открытые множества $W \subset \mathbb{R}^n$, содержащее точку a, $V \subset \mathbb{R}^m$, содержащее точку b, и $f : W \to V \in C^1$, такие что $W \times V \subset U$ и $(x, y) \in W \times V$, что верно $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$.

Доказательство: Рассмотрим $\Phi : U \to \mathbb{R}^n_u \times \mathbb{R}^m_v$, $\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ F(x, y) \end{pmatrix}$. Тогда $\Phi \in C^1(U)$, и матрица Якоби Φ имеет вид $D\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$. По теореме об обратной функции найдутся открытые U_0, содержащее (a, b), и Ω, содержащее $\Phi(a, b) = (a, 0)$, такие что $U_0 \subset U$, и $\Phi : U_0 \to \Omega$ является диффеоморфизмом.

Осознать доказательство проще и лучше геометрически.



Из вида Φ получаем $\Phi^{-1}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ g(u,v) \end{pmatrix}$ для некоторого $g \in C^1(\Omega)$. Из $\Phi^{-1} \circ \Phi$ получим $(x,y) = \Phi^{-1}(x, F(x,y)) = (x, g(x, F(x,y))) \Rightarrow y = g(x, F(x,y))$ для всех $(x,y) \in U_0$ **(1)**. $\Phi \circ \Phi^{-1}$: $v = F((u, g(u,v))$ для всех $(u,v) \in \Omega$ **(2)**.

Положим $W = \{x \in \mathbb{R}^n : (x,0) \in \Omega\}$ и $f : W \to \mathbb{R}^m$, $f(x) = g(x,0)$, $x \in W$. Тогда W открыто и $f \in C^1(W)$. Уменьшая, если необходимо, W, выберем V так, что $W \times V \subset U_0$, можно также считать, что $f(W) \subset V$. А теперь важные следствия из **(1)** и **(2)**:

$$F(x,y) = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} y = f(x)$$
$$y = f(x) \overset{(2)}{\Rightarrow} F(x,y) = 0, \text{ где } (u,v) = (x,0).$$

Это то, что и требовалось доказать. ■

Следствие. (о неявном дифференцировании). В условиях теоремы о неявной функции матрица Якоби $\frac{\partial f}{\partial x}$ на W вычисляется по правилу:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))$$

Доказательство: $F(x, f(x)) = 0$ выполняется тождественно на W. Дифференцируя обе части, по правилу дифференцирования композиции, получаем $DF(x, f(x)) = \begin{pmatrix} E \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \frac{\partial f}{\partial x}$. ■

Note. Если в теореме об обратной функции f класса C^r $(r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$, то $f^{-1} \in C^r$. Следовательно, если в теореме о неявной функции $F \in C^r$, то неявная функция $f \in C^r$.

Задача. Покажите, что теоремы об обратной функции и о неявной функции эквивалентны.

Пример: $\begin{cases} F_1 = xy^2 + xzy + yv^2 = 3 \\ F_2 = u^3yz + 2xv^3 - u^2v^2 = 2 \end{cases}$, дана точка $(1,1,1,1,1)$. Показать, что в окрестности точки $(1,1,1,1,1)$ данная система разрешена в виде $\begin{cases} u = u(x,y,z) \\ v = v(x,y,z) \end{cases}$, и найти частные производные $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$ в точке $(1,1,1)$.

Нам нужно применить теорему о неявной функции. Каковы наши координатные функции? $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$, $F = (F_1, F_2)$, $a = (1,1,1)$, $b = (1,1)$.

$\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} xz & 2yv \\ 3u^2yz - 2uv^2 & 6xv^2 - 2u^2v \end{pmatrix}\Bigg|_{(a,b)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, определитель равен 2, отличен от 0.

$$\begin{cases} 2xy + xz\frac{\partial u}{\partial y} + v^2 + 2yv\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ 3u^2y\frac{\partial u}{\partial y} + u^3z + 6xv^2\frac{\partial v}{\partial y} - 2u^2v\frac{\partial v}{\partial y} - 2v^2u\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \xrightarrow{(a,b)}$$

$$\stackrel{(a,b)}{\to} \begin{cases} 3+\frac{\partial u}{\partial y}(1,1,1)+2\frac{\partial v}{\partial y}(1,1,1)=0 \\ 3\frac{\partial u}{\partial y}(1,1,1)+6\frac{\partial v}{\partial y}(1,1,1)-2\frac{\partial v}{\partial y}(1,1,1)-2\ \frac{\partial u}{\partial y}(1,1,1)+1=0 \end{cases}$$

Гладкие k-мерные поверхности

Note. В дальнейшем под гладкостью отображения будем понимать принадлежность отображения классу C^r для некоторого $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Def. Пусть $1 \leqslant k \leqslant n$. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется гладкой (регулярной k-мерной плоскостью), $\forall p \in M\ \exists U:\ p \in U, \exists V$, где U открыто в $\mathbb{R}^n$, V открыто в $\mathbb{R}^k$, и $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$, такие что:

1. φ — гладкое;
2. $\varphi : V \to M \cap U$ — гомеоморфизм;
3. $rk\ D\varphi(x) = k$ для любого x из V.

При этом φ называется параметризацией M в окрестности точки p.

Лекция 5 (5 октября 2021)

Гладкие поверхности

Напоминаем определение:

Def. Пусть $1 \leqslant k \leqslant n$. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется гладкой (регулярной) k-мерной поверхностью, если $\forall p \in M\ \exists U : p \in U,\ \exists \Omega$, где U открыто в $\mathbb{R}^n$, Ω открыто в $\mathbb{R}^k$, и $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$, такие что:

1. φ — гладкое;
2. $p : \Omega \to M \cap U$ — гомеоморфизм;
3. $rkD\varphi_x = k\ \forall x \in \Omega$.

При этом φ называется **параметризацией** M в окрестности точки p.

Пример: Рассмотрим сферу $S^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Рассмотрим $r(\varphi, \psi) = (\cos\varphi\cos\psi, \sin\varphi\cos\psi, \sin\psi)$, $r : (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^3$. Если рассмотреть часть сферы за исключением главного меридиана, то это отображение удовлетворяет всем трём пунктам, r — параметризация. Нужно подумать, почему одной r недостаточно, чтобы образом была вся сфера.

Задача. Докажите, что $M \subset \mathbb{R}^n$ является гладкой n-мерной поверхностью тогда и только тогда, когда M открыто в $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим ещё один важный пример.

Пример: Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^k$, Ω — открытое, и $f : \Omega \to \mathbb{R}^{n-k}$ — гладкая. Тогда график $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in \Omega\}$ — гладкая k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$. Действительно, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = (x, f(x))$. Мы должны проверить каждый из трёх пунктов. φ — гладкая на Ω, $D\varphi(x) = \begin{pmatrix} E \\ Df(x) \end{pmatrix}$, $Df(x)$ имеет n строк, k столбцов, $D\varphi(x)$ — матрица, имеющая ранг k. Теперь рассмотрим отображение $\psi : \Gamma_f \to \Omega$ $\psi\left(x, f(x)\right) = x$. Тогда $\psi = \varphi^{-1}$ — непрерывная, и φ — гомеоморфизм.

Задача. Докажите, что $M = \{(x, y) : xy = 0\}$ не является гладкой поверхностью в $\mathbb{R}^2$.

Способы описания гладких поверхностей

А теперь предоставим другие способы описания гладких поверхностей.

Th. (#4) Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. M — гладкая k-мерная поверхность;
2. Для любой точки $p \in M$ найдётся W, содержащее p, открытое в $\mathbb{R}^n$, найдётся V, открытое в $\mathbb{R}^n$, найдётся $\Phi : W \to V$ — диффеоморфизм, такие что $\Phi\left(W \cap M\right) = V \cap \left(\mathbb{R}^k \times \{0\}\right)$ (иногда в литературе это называется тривиализацией);
3. Для любой точки $p \in M$ найдётся U, содержащее p, открытое в $\mathbb{R}^n$, найдётся гладкая функция $F : U \to \mathbb{R}^{n-k}$, такие что $rkDF = n - k$ на U и $M \cap U = F^{-1}\left(0\right) = \{x \in U : F(x) = 0\}$.

Доказательство:

(1) $\Rightarrow$ (2) Пусть $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — параметризация в окрестности точки p, $a = \varphi^{-1}(p)$. По условию $rk\ D\varphi(a) = k$, дополним столбцы $D\varphi(a)$ до базиса $\mathbb{R}^n$. Поэтому существует такая матрица A размера $n \times (n - k)$, что $D\varphi(a)A$ невырожденная. Рассмотрим отображение $F : \Omega \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$, $F\left(x, y\right) = \varphi(x) + Ay$. Тогда F гладкое и $DF\left(a; 0\right) = D\varphi(a)A$, из-за того, что матрица невырожденная, применима теорема об обратной функции. По теореме об обратной функции найдутся $\widetilde{U}$, открытое в $\mathbb{R}^n$, содержащее p, $\widetilde{\Omega} \subset \Omega \times \mathbb{R}^{n-k}$, открытое в R^n, что $F|_{\widetilde{\Omega}} : \widetilde{\Omega} \to \widetilde{U}$ является диффеоморфизмом. Положим $\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^k : (x, 0) \in \widetilde{\Omega}\}$. Множество $F\left(\Omega \times \{0\}\right) = \varphi\left(\Omega_0\right)$ открыто в $M \subset \mathbb{R}^n$ как образ открытого множества при гомеоморфизме φ. Поэтому найдётся открытое в $\mathbb{R}^n$ множество W, такое что $M \cap W = \varphi\left(\Omega_0\right)$. Кроме того, можно считать, что W содержится в $\widetilde{U}$, иначе заменим W на $W \cap \widetilde{U}$. Теперь осталось построить V. Положим $V = \left(F|_{\widetilde{\Omega}}\right)^{-1}\left(W\right)$ и $\Phi : W \to V$, $\Phi = \left(F|_{\widetilde{\Omega}}\right)^{-1}$, Покажем, что Φ является искомым отображением. Действительно, Φ является диффеоморфизмом, и $\Phi\left(W \cap M\right) = F^{-1}\left(F(\Omega_0 \times \{0\})\right) = \Omega_0 \times \{0\} = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$, где $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ — координатное пространство.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть для точки $p \in M$ выполнены условия (2). Положим $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^k : (x, 0) \in V\}$ и $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = \Phi^{-1}\left(x, 0\right)$. Покажем, что φ — параметризация M в окрестности точки p.

Действительно, φ — гладкое, так как Φ — диффеоморфизм, $\varphi : \Omega \to \varphi(\Omega)$ является гомеоморфизмом, $rk\ d\varphi_x = k$ в каждой точке, поскольку столбцы столбцы $D\varphi(x)$ являются первыми k столбцами невырожденной матрицы $D\Phi^{-1}(x)$.

Импликация из (2) в (3) устроена намного проще. Положим $U = W$, $F = (\Phi_{k+1}, \ldots, \Phi_n)$, где Φ_j — координатные функции диффеоморфизма Φ.

Теперь покажем, что из (3) следует (1). Пусть в точке p выполнено условие (3). Без ограничения общности можно считать, что в матрице $DF(p)$ последние $n-k$ столбцов линейно независимы. Положим $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k_x \times \mathbb{R}^{n-k}_y$, $p = (a, b)$. Матрица $\frac{\partial F}{\partial y}(p)$ является невырожденной, поэтому применима теорема о неявной функции: по теореме о неявной функции найдутся W', открытое в $\mathbb{R}^k$, содержащее a, W'', открытое в $\mathbb{R}^k$, содержащее b, что $W_0 = W' \times W'' \subset U$ и для любой пары точек (x, y) из W_0 верно, что $F(x, y) = 0 \Longleftrightarrow y = f(x)$. Осталось воспользоваться примером, который показывает, что график функции является k-мерной поверхностью. ■

Пример: Рассмотрим многомерную сферу $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$. Покажем, что это гладкая $(n-1)$-мерная поверхность. Положим $F(x) = |x|^2 - 1$, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. F — гладкое отображение, $S^{n-1} = F^{-1}(0)$. Посмотрим, как выглядит $grad\ F(x)$: $grad\ F(x) = 2x$, он обнуляется, когда $x = 0$, но эта точка не принадлежит сфере, и градиент ненулевой для любой точки сферы.

Гладкость отображения по Милнору

Def. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ (необязательно открытые). Отображение $f : X \to Y$ называется гладким по Милнору, если для любой точки $x \in X$ найдётся окрестность точки U в $\mathbb{R}^n$, а также гладкая функция $F : U \to \mathbb{R}^m$, что $f|_{X \cap U} = F|_{x \cap U}$.

Def. $f : X \to Y$ — диффеоморфизм, если f — биекция, и f, f^{-1} — гладкие.

Следствие. Если $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — параметризация M в окрестности точки p, $\varphi(\Omega) = U_0$, то $\varphi : \Omega \to U_0$ — диффеоморфизм.

Доказательство: Достаточно показать гладкость отображения $\varphi^{-1} : U_0 \to \Omega$. Пусть $q \in U_0$. Из доказательства пункта 2 (про тривиализацию) следует, что диффеоморфизм $\Phi : W \to V$ модно выбрать так, что $q \in W \cap M \subset U_0$ и $\Phi(x) = (\varphi^{-1}(x), 0)$. Следовательно, φ^{-1} имеет гладкое продолжение на W. ■

Лемма. (#1) Пусть M — гладкая поверхность, и задана функция $f : M \to \mathbb{R}^m$. Следующие утверждения эквивалентны:

1. f — гладкая по Милнору;
2. Для любой точки $p \in M$ и $\forall \varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ функция $f \circ \varphi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ является гладкой в обычном смысле;
3. Для любой точки $p \in M$ существует параметризация $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^m$, такая что функция $f \circ \varphi$

гладкая.

Доказательство:

(1) $\Rightarrow$ (2) Пусть $x_0 \in \Omega$, $p_0 = \varphi(x_0) \in M$. Рассмотрим F — гладкое продолжение f в окрестность точки p_0. Тогда $f \circ \varphi = F \circ \varphi$ в некоторой окрестности x_0. Следовательно, $f \circ \varphi$ является гладкой в обычном смысле.

(2) $\Rightarrow$ (3) по сути тривиально: из более сильного в более слабое.

(3) $\Rightarrow$ (1) Положим $f = (f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$. По следствию φ^{-1} гладкое. Следовательно, f гладкое как композиция гладких отображений в R^n. ■

Note. Пусть $f_1 : X_1 \to \mathbb{R}^{m_2}$, $f_2 : X_2 \to \mathbb{R}^{m_3}$, $f_1(X_1) \subset X_2$. Тогда $f_2 \circ f_1 : X_1 \to \mathbb{R}^{m_3}$ — гладкое. Пусть $F_1 : U_1 \to \mathbb{R}^{m_2}$, $F_2 : U_2 \to \mathbb{R}^{m_3}$ — гладкие продолжения на окрестности точки p и $f(p)$ соответственно. Тогда $F_2 \circ f_1 : U \to \mathbb{R}^{m_3}$ — гладкое продолжение $f_2 \circ f_1$, $U = U_1 \cap {F_1}^{-1}(U_2)$ содержит p.

Лемма. (о функциях перехода) Пусть $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ и $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ — параметризации M. O определим как $\varphi(U) \cap \psi(V) \neq \emptyset$. Тогда отображение $g = \psi^{-1} \circ \varphi$ — диффеоморфизм.

Лекция 6 (12 октября 2021). Касательное пространство к гладкой поверхности

Касательные векторы и касательные пространства

Поговорим о касательных векторах. Этот вопрос довольно нетривиальный. Что вообще означает, что вектор касается к поверхности в точке p? В одном случае у нас есть в этом уверенность: вспомним из 1-го семестра параметризованные кривые в $\mathbb{R}^n$, например: дана параметризованная кривая $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, касательным вектором будет $\gamma'(t_0) = (x_1'(t_0), \ldots, x_n'(t_0))$. Это подтверждается всеми законами природы!

Def. Пусть M — гладкая поверхность в $\mathbb{R}^n$, $p \in M$. Вектор $v \in \mathbb{R}^n$ называется касательным вектором к M в точке p, если существует гладкая параметризованная кривая $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$, такая что $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$. Множество касательных векторов к M в точке p будем обозначать T_pM.

Th. (#5) Пусть M — гладкая k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$, $p \in M$. Если $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — параметризация M в окрестности p, то $T_pM = d\varphi_a\left(\mathbb{R}^k\right)$, где $\varphi(a) = p$.

Доказательство: Пусть вектор v — касательный, то есть $v \in T_pM$, и параметризованная кривая $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$, такая что $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = \delta$. Тогда найдётся окрестность точки p в $\mathbb{R}^n$ (обозначим как U) и гладкая функция $\Phi : U \to \mathbb{R}^k$, такая что $\Phi(q) = \varphi^{-1}(q)$ для любого $q \in M \cap U$. Без ограничения общности можно считать, что $\gamma(-\delta, \delta) \subset U$. Рассмотрим $\beta = \Phi \circ \gamma : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^k$. Тогда $\beta(0) = a$ и $\gamma = \varphi \circ \beta$. По правилу дифференцирования композиции $\gamma(0) = d\varphi_a(b'(0))$, и таким образом $T_pM \subset d\varphi_a\left(\mathbb{R}^k\right)$.

Теперь докажем в другую сторону. Пусть $v = d\varphi_a(h)$, где $h \in \mathbb{R}^k$. Рассмотрим гладкую параметризованную кривую $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$, $\gamma(t_0) = \varphi(a + th)$. Тогда $\gamma'(0) = d\varphi_a(h) = v$. Таким образом $T_pM \supset d\varphi_a\left(\mathbb{R}^k\right)$. ■

Следствие. T_pM является векторным пространством как образ векторного пространства $\mathbb{R}^k$ при линейном отображении, $dim\ T_pM = rk\ d\varphi_a = k$ в силу определения параметризации. T_pM — k-мерное векторное пространство.

Note. Под $p+T_pM$ (касательной гиперплоскостью) понимается аффинное пространство касательных векторов, отложенных от точки p.

Лемма. (#3) Если гладкая k-мерная поверхность M в окрестности точки p задана уравнением $F(x) = 0$ (то есть существует гладкая функция $F : U \to \mathbb{R}^k$, такая что $rk\ DF = n - k$ на $M \cap U = F^{-1}(0)$), то $T_pM = ker\ dF_p$, или, что эквивалентно, совпадает со множеством решений системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} (grad\ F_1(p), v) = 0; \\ \vdots \\ (grad\ F_{n-k}(p), v) = 0. \end{cases}$$

Доказательство: Пусть $v \in T_pM$ и параметризованная кривая $\gamma : (-\delta, \delta) \to M \cap U$, такая что $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$. Продифференцируем $F_i(\gamma(t)) = 0$, тогда $\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p) \cdot \gamma_i'(0) = 0 \iff (grad\ F_i(p), v) = 0$. Следовательно, T_pM лежит в пространстве решений СЛУ, совпадение решений следует из соображений, связанных с размерностью. ■

Def. Пусть M — гладкая поверхность в $\mathbb{R}^n$, и задана гладкая функция $f : M \to \mathbb{R}^m$. Дифференциал функции f в точке $p \in M$ определим следующим образом: $df_p : T_pM \to \mathbb{R}^m$ по правилу: если $v \in T_pM$ и $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$, такая что $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$, то $df_p(v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\gamma(t))$.

Th. (#6) Пусть M — гладкая k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$ и задана гладкая функция $f : M \to \mathbb{R}^m$, $p \in M$. Тогда:

1. $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\gamma(t))$ не зависит от выбора кривой γ;
2. $df_pT_pM \to \mathbb{R}^m$ — линейное;
3. если $f(M) \subset N$, где N — гладкая поверхность в $\mathbb{R}^n$, то $df_p(T_pM) \subset T_qN$, где $q = f(p)$.

Доказательство: Пусть $v \in T_pM$ и параметризованная кривая $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$ обладает свойством $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$. Тогда найдётся окрестность U в $\mathbb{R}^n$ точки p, а также гладкая функция $F : U \to \mathbb{R}^m$, такие что $F(q) = f(q)$ для любого $q \in M \cap U$. Обозначим через $DF(p)$ матрицу Якоби F в точке p. Так как $\gamma(t) \in M \cap U$ при всех достаточно малых $|t|$, то $DF(p) \cdot v = DF(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\gamma(t))$. Правая часть не зависит от выбора F, левая часть не зависит от выбора γ, что доказывает пункт 1.

Пункт 2 следует из следующего: $df_p(v) = DF(p) \cdot v$.

Теперь докажем пункт 3. Если $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$ — гладкая кривая, такая что $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$, то $f \circ \gamma : (-\delta, \delta) \to N$ — гладкая кривая, такая что $\beta(0) = f(p) = q$, $\beta'(0) = df_p(v) = w$, что доказывает пункт 3. ■

Задача. Пусть даны $f : M \to N$, $g : N \to \mathbb{R}^l$, $q = f(p)$, $d(g \circ f)_p = dg_q \circ df_p$. (А в чём вообще задача? Узнаю позже)

Следствие. (о диффеоморфизмах) Пусть M — гладкая k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$, N — гладкая r-мерная поверхность в $\mathbb{R}^m$, и пусть $f : M \to N$ является диффеоморфизмом. Тогда $k = r$ и $df_p : T_pM \to T_qN$ — линейный изоморфизм.

Доказательство:

$$g = f^{-1}$$

$$dg_q \circ df_p = id_{T_pM}$$

$$df_p \circ dg_q = id_{T_qN}$$

Из этого следует, что $df_p : T_pM \to T_qN$ — линейный изоморфизм. ■

Экстремумы функций многих переменных

Def. Пусть открыто $U \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$, $a \in U$. Точка a называется точкой локального максимума f (строгим), если $\exists \delta > 0\ \forall x \in B'_\delta(a) : f(x) \leqslant f(a)\ (<)$. Аналогичным образом определяется точка локального минимума. И локальный максимум, и локальный минимум являются локальными экстремумами.

Th. (#1). Если a — точка экстремума f, и существует $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$, то $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$.

Доказательство: Точка a_k — точка экстремума. $\varphi(t) = f(a_1, \ldots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \ldots, a_n)$. По теореме Ферма $0 = \varphi'(a_k) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$. ■

Следствие. Если a — точка экстремума функции f, и f дифференцируема в точке a, то $df_a = 0$, то есть $grad\ f(a) = 0$.

Def. Если f дифференцируема в точке a и $df_a = 0$, то a называется стационарной точкой функции f.

Если f дважды дифференцируема в точке a, то $d^2 f_a(h^2) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\, h_i h_j$ — квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$.

Note. Внимание! $d^2 f_a\left(h^2\right)$ — всего лишь иная форма записи $d^2 f_a\left(h, h\right)$.

Th. (#2). Пусть открыто $U \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^2\left(U\right)$ и a — стационарная точка функции f. Тогда:

1. Если $df_a\left(h^2\right) > 0$, то a — точка строгого локального минимума функции f;
2. Если $df_a\left(h^2\right) < 0$, то a — точка строгого локального максимума функции f;
3. Если существуют такие векторы h_+, h_-, лежащие в $\mathbb{R}^n$, такие что $d^2 f_a\left(h_+^2\right) > 0$, $d^2 f_a\left(h_-^2\right) < 0$, то точка a не является точкой локального экстремума f.

Доказательство: Докажем пункт 1. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа при $h \neq 0$ имеем:

$$f\left(a+h\right) = f\left(a\right) + \tfrac{1}{2}d^2 f\left(h^2\right) + \alpha\left(h\right)\left|h\right|^2 = f\left(a\right) + \left|h\right|^2\left(\tfrac{1}{2}d^2 f\left(\tfrac{h}{|h|}^2\right) + \alpha\left(h\right)\right)$$

Функция $h \mapsto d^2 f\left(h^2\right)$ непрерывна и $\{h : |h| = 1\}$ — компакт, тогда по теореме Вейерштрасса существует $m = \min\limits_{|h|=1} d^2 f\left(h^2\right) > 0$. Найдём такое $\gamma > 0$, что $\left|\alpha\left(h\right)\right| < \frac{m}{4}$ для любого h такого, что $0 < |h| < \delta$. Тогда $f\left(a+h\right) - f\left(a\right) > \frac{m}{4}|h|^2$ для любого h из $B'_\delta\left(0\right)$, что доказывает пункт 1.

Аналогичным образом можно доказать пункт 2, заменив f на $-f$.

Теперь осталось доказать пункт 3. По формуле Тейлора $f\left(a+th_+\right) = f\left(a\right) + t^2\left(\frac{1}{2}d^2 f_a(h_+^2) + \alpha(th_+)\cdot|h_+|^2\right)$. При $t \to 0$ выражение $\left(\frac{1}{2}d^2 f_a(h_+^2) + \alpha(th_+)\cdot|h_+|^2\right)$ стремится к $d^2 f_a\left(h_+^2\right) > 0$. Поэтому найдётся такое $\delta_1 > 0$, такое что $f\left(a+th_+\right) - f\left(a\right) > 0$ при всех $0 < |t| < \delta_1$. Аналогично найдётся такое $\delta_2 > 0$, что $f\left(a+th_-\right) - f\left(a\right) < 0$ при $0 < |t| < \delta_2$. Это означает, что точка a не является точкой локального экстремума функции f. ■

Note. Во-первых, исследование квадратичной формы на определённость проводится либо с помощью приведения к диагональному виду, либо с помощью критерия Сильвестра. Во-вторых, если квадратичная форма полуопределена, то теорема не позволяет сделать вывод о наличии экстремума в точке a.

Пример: Рассмотрим две функции в $\mathbb{R}^2$: $f\left(x,y\right) = x^2 + y^4$, $g\left(x,y\right) = x^2 - y^2$. Точка $O\left(0,0\right)$ — стационарная точка f и g. Теперь рассмотрим точку $h\left(h1, h2\right)$. Тогда $d^2 f_O\left(h^2\right) = 2h_1^2 = d^2 g_O\left(h^2\right)$. Однако точка O является точкой глобального минимума для f, а вот для g уже не является.

Условный экстремум

Пусть открыто $U \subset \mathbb{R}^n$, и задана функция $g : U \to \mathbb{R}^n$. Исследуем экстремумы функции $f : U \to \mathbb{R}$ на $M = g^{-1}\left(0\right)$. Иногда $g\left(x\right) = 0$ называют уравнением связи.

Def. Точка a называется точкой (локального) условного максимума f на M, если $\exists\delta > 0\ \forall x \in B'_\delta\left(a\right) \cap M : f\left(x\right) \leqslant f\left(a\right)$ (если рассмотрим строгий (локальный) условный максимум, то заменим знак $\leqslant$ на $<$).

Пример: Рассмотрим $f = x^2 + y^2$, $g(x, y) = xy - 1$. Функция f задаёт параболоид. Множество точек, которое задаёт g, представляет собой гиперболу...

Th. (#3, Лагранжа) Пусть открыто $U \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(U)$, $g \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$, $rk\ Dg(p) = m$. Если p является точкой условного экстремума функции f на $M = g^{-1}(0)$, то $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$: $\left(grad\ f(p) = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i\ grad\ g_i(p)\right)$.

Доказательство: Выберем такую окрестность V, в которой лежит точка p, что $rk\ Dg(x) = m\ \forall x \in V$. Тогда $M \cap V$ — гладкая (n-m)-я поверхность. Пусть $v \in T_p(M \cap V)$ и пусть параметризованная кривая $\gamma : (-\delta, \delta) \to M \cap V$, такая что $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$. Тогда $f(\gamma(t))$ имеет экстремум в точке $t = 0$. Следовательно, $0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\gamma(t)) = (grad\ f(p), v)$. Осталось отметить, что $grad\ g_i(p)$ образуют базис ортогонального дополнения к T_pM. ■

Лекция 7 (19 октября 2021)

Теоремы об условных локальных экстремумах

Остановились на теореме #3 (Лагранжа). Напомним формулировку:

Th. (#3, Лагранжа) Пусть открыто $U \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(U)$, $g \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$, $rk\ Dg(p) = m$. Если p является точкой условного экстремума функции f на $M = g^{-1}(0)$, то $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$: $\left(grad\ f(p) = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i\ grad\ g_i(p)\right)$. При этом предполагается, что $m < n$.

Note. Из теоремы #3 вытекает метод множителей Лагранжа — метод нахождения точек условного экстремума. Если p — точка локального условного экстремума f на M, то p — стационарная точка $L : U \to \mathbb{R},\ L(x) = f(x) - \lambda_1 g_1(x) - \cdots - \lambda_m g_m(x)$. $L : U \to \mathbb{R}$ называется функцией Лагранжа.

Th. (#4) Пусть $f \in C^2(U)$, $g \in C^2(U, \mathbb{R}^m)$, $rk\ Dg(p) = m$, где p — стационарная точка функции Лагранжа, то тогда:

1. Если $d^2L_p(h, h) > 0\ \forall h \in T_pM \setminus \{0\}$, то p — точка строгого локального условного минимума f на M;

2. Если $d^2L_p(h, h) < 0\ \forall h \in T_pM \setminus \{0\}$, то p — точка строгого локального условного максимума f на M;

3. Если d^2L_p принимает на T_pM значения разных знаков, то p не является точкой локального условного экстремума f на M.

Доказательство: Пусть $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $x = \varphi(y)$ — параметризация M в окрестности точки p, $p(a) = p$. Точка p является точкой локального условного максимума (минимума) f на M тогда и только тогда, когда точка a является точкой локального максимума (минимума) $H = f \circ \varphi$. Отметим, что функция f на M совпадает с функцией Лагранжа L, то есть $H = L \circ \varphi$. Для всякого вектора $v \in \mathbb{R}^{n-m}$ выполнено $dH_a(v) = dL_p(d\varphi_a(v))$. Поскольку p — стационарная точка L, то $dH_a(v) = 0$, то есть a — стационарная точка функции H. Теперь найдём d^2H_a:

$$\frac{\partial H}{\partial y_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L_a}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y_l \partial y_k} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_l} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} + \frac{\partial L}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_l \partial y_k} \right)$$

По условию для любого i $\frac{\partial L}{\partial x_i}(p) = 0$. Следовательно:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y_l \partial y_k}(a) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(p) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_l}(a) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}(a)$$

$$d^2H_a(v,v) = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial y_l \partial y_k}(a) v_l v_k = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(p) \left(\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_l}(a) v_l \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}(a) v_k \right) = d^2L_a(w,w), \text{ где } w = d\varphi_a(v)$$

Осталось отметить, что $d\varphi_a : \mathbb{R}^{n-m} \to T_pM$ — изоморфизм, $dH_a(v) = dL_p(d\varphi_a(v))$.

Это было доказательство пункта 1. Пункты 2 и 3 доказываются аналогично. ■

Интегрирование по поверхностям

Пусть M — гладкая k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$, $k < n$. Пусть $\varphi : \Omega \to M$ — локальная параметризация M. Рассмотрим функции $G = G(\varphi) : \Omega \to \mathbb{R}^{k^2}$, $G(x) = (D\varphi(x))^T \cdot D\varphi(x)$, $g = g(\varphi) : \Omega \to \mathbb{R}$, $g(x) = \det G(x)$.

Note. Из линейной алгебры известно, что матрица G, она же матрица Грама, в каждой точке симметрична и положительно определена. Если $\varphi_j : \Omega_j \to U$ — локальные параметризации M, где $j = 1,\ 2$, и $\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ — функция перехода, то есть $\Phi = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$, то $g(\varphi_1) = |\det \Phi|^2 g(\varphi_2)$

Доказательство: $\varphi_1 = \varphi_2 \circ \Phi \Rightarrow D\varphi_1 = D\varphi_2 \cdot D\Phi$, $G(\varphi_1) = (D\varphi_2 D\Phi)^T (D\varphi_2 D\Phi) = (D\Phi)^T G(\varphi_2) D\Phi$. ■

Теперь переходим к важному! Пусть M — гладкая k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$, $k < n$. Будем дополнительно предполагать, что M покрывается образами конечного числа параметризаций $\varphi_i : \Omega_i \to U_i$, то есть найдётся M такое, что $M = \cup_{i=1}^{N} U_i$. В этом случае будем говорить, что набор $\mathcal{C} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$ образует покрытие M.

Def. Пусть набор $\mathcal{C} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$ параметризаций $\varphi_i : \Omega_i \to U_i$ образует покрытие M. Набор функций $(\eta_1, \ldots, \eta_N)$, $\eta_i : M \to \mathbb{R}$, называется разбиением единицы, подчинённым покрытию $\mathcal{C}$, если:

1. $0 \leqslant \eta_i \leqslant 1$ для любого $i \in \{1, \ldots, N\}$;

2. $\eta_i\Big|_{M\setminus U_i} \equiv 0$ для любого $i \in \{1, \ldots, N\}$;

3. $\sum\limits_{i=1}^{N} \eta_i \equiv 1$ на M.

Лемма. (#1). Для заданного покрытия $\mathcal{C} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$ локальными параметризациями $\varphi_i : \Omega_i \to U_i$ существует измеримое разбиение единицы, подчинённое $\mathcal{C}$.

Доказательство: $\eta_i : M \to \mathbb{R}$, $\eta_i = I_{W_i}$, где $W_i = U_i \setminus \cup_{j=1}^{i-1} U_j$, при этом $M = \sqcup_{i=1}^{N} W_i$. Покажем, что каждая из η_i измерима. Рассмотрим следующий прообраз луча:

$$(\eta_i \circ \varphi_i)^{-1}(a; +\infty] = \begin{cases} \Omega_i & a < 0 \\ \varphi_i^{-1}(W_i) = \Omega_i \setminus \cup_{j=1}^{i-1} \Omega_j & a \in [0; 1) \\ \emptyset & a \geqslant 1 \end{cases}.$$

Отсюда и получим требуемое. ■

Def. Пусть M — гладкая k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$, $k < n$. Пусть набор $\mathcal{C} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$ локальных параметризаций $\varphi_i : \Omega_i \to U_i$ образует покрытие M. Кроме того:

1. $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ называется σ-измеримой, если $f \circ \varphi_i$ измеримо для любого $i \in \{1, \ldots, N\}$;

2. Пусть $f : M \to [0; +\infty]$ σ-измерима и $(\eta_1, \ldots, \eta_N)$ — измеримое разбиение единицы, подчинённое покрытию $\mathcal{C}$, тогда определим $\int\limits_M f d\sigma = \sum\limits_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega_i} (\eta_i f) \circ \varphi_i \sqrt{g(\varphi_i)} d\mu\,(1)$, где $g(\varphi_i)$ — определитель Грама параметризации φ_i;

3. Множество $A \subset M$ называется σ-измеримым, если индикатор I_A σ-измерим. В этом случае положим $\sigma(A) = \int\limits_M I_a d\sigma$;

4. $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ называется σ-интегрируемой, если функция f является σ-измеримой и $\int\limits_M f^{\pm} d\sigma$ конечен.

Note. Множество A является σ-измеримым тогда и только тогда, когда $\varphi_i^{-1}(A)$ измерим по Лебегу в $\mathbb{R}^k$ для любого $i \in \{1, \ldots, N\}$.

Корректность

Th. (#1)

1. Измеримость функции на M не зависит от выбора параметризаций, покрывающих M.

2. Интеграл (1) определён корректно: интегралы в обеих частях формулы имеют смысл, значение интеграла не зависит ни от выбора параметризаций, покрывающих M, ни от выбора подчинённого измеримого разбиения единицы.

Доказательство: Пусть имеется наборы локальных параметризаций $\mathcal{C} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$, $\varphi_i : \Omega_i \to U_i$ для $(\eta_1, \ldots, \eta_N)$ и $\mathcal{D} = \{\psi_1, \ldots, \psi_K\}$, $\psi_j : \Theta_j \to W_j$ для $(\nu_1, \ldots, \nu_K)$. Определим V_{ij} как $U_i \cap W_j$, $J = \{(i,j) : V_{ij} \neq \emptyset\}$. Тогда для $(i,j) \in J$ определим функцию перехода, являющуюся диффеоморфизмом, $\Phi_{ij} : \Theta_{ij} \to \Omega_{ij}$, $\Omega_{ij} = \varphi_i^{-1}(V_{ij})$.

Докажем первый пункт. Пусть функция f является σ-измеримой относительно $\mathcal{C}$. Для $j \in \{1, \ldots, K\}$ покажем, что каждая из функций $f \circ \psi_j$ измерима в $\mathbb{R}^k$ по Лебегу. Применим разбиение единицы: $f \circ \psi_j = \sum\limits_{i=1}^{N} (\eta_i f) \circ \psi_j = \sum\limits_{i:(i,j)\in J} (\eta_i f) \circ (\varphi_i \circ \Phi_{ij})$. Функции $\eta_i \circ \varphi_i$, $f \circ \varphi_i$ измеримы, вспомним доказательство теоремы о замене переменных, и их композиции с диффеоморфизмом Φ_{ij} тоже измеримы, $f \circ \psi_j$ тоже измерима.

Докажем второй пункт. Для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$ рассмотрим интеграл $\int\limits_{\Theta_j} (\nu_j f) \circ \psi_j \sqrt{g(\psi_j)} d\mu = \sum\limits_{i:(i,j)\in J} \int\limits_{\Theta_j} (\eta_i \nu_j f) \circ \psi_j \sqrt{g(\psi_j)} d\mu = \sum\limits_{i:(i,j)\in J} \int\limits_{\Theta_{ij}} (\eta_i \nu_j f) \circ \varphi_i \circ \Phi_{ij} |\det \Phi_{ij}| \sqrt{g(\varphi_i \circ \Phi_{ij})} d\mu = \sum\limits_{i:(i,j)\in J} \int\limits_{\Omega_{ij}} (\eta_i \nu_j f) \circ \varphi_i \sqrt{g(\varphi_i)} d\mu$. Следовательно, $\sum\limits_{j=1}^{K} \int\limits_{\Theta_j} (\nu_j f) \circ \psi_j \sqrt{g(\psi_j)} d\mu = \sum\limits_{j=1}^{N} \sum\limits_{i=1}^{K} \int\limits_{\Omega_{ij}} (\nu_j \eta_i f) \circ \varphi_i \sqrt{g(\varphi_i)} d\mu = \sum\limits_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega_i} (\eta_i f) \circ \varphi_i \sqrt{g(\varphi_i)} d\mu$. ■

Здесь нет сложных мест, идеи просты. Однако индексов довольно много, и они доставляют много неудобств.

Лекция 8 (26 октября 2021)

Примеры криволинейных и поверхностных интегралов

Продолжаем изучать поверхностные интегралы. Исправим следующую ошибку, которая была допущено при доказательстве корректности. Было так:

$$\int\limits_{\Omega_{ij}} (\eta_i \nu_j f) \, \varphi_i \sqrt{g(\varphi_i)} d\mu$$

Хотели сделать замену, при которой $\psi_j = \varphi_i \circ \Phi_{ij}$ и $\Omega_{ij} = \Phi_{ij}(\Theta_{ij})$.

Был неверен переход к следующему:

$$\sum\limits_{i:(i,j)\in J} \int\limits_{\Theta_{ij}} (\eta_i \nu_j f) \circ \varphi_i \circ \Phi_{ij} |\det \Phi_{ij}| \sqrt{g(\varphi_i \circ \Phi_{ij})} d\mu$$

Константин Юрьевич Замана, один из семинаристов, указал на то, что правильнее так:

$$\sum_{i:(i,j)\in J}\int_{\Theta_{ij}} (\eta_i \nu_j f)\circ\varphi_i\circ\Phi_{ij}|\det D\Phi_{ij}|\sqrt{g(\varphi_i)\circ\Phi_{ij}}d\mu$$

Теперь переходим к примерам!

1. $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, где I — интервал, $\mathbb{R}^n$ — гладкая, $n > 1$, $\gamma'(t) \neq 0$ на I. Отображение $\gamma : I \to \gamma(I)$ является гомеоморфизмом. Тогда $M = \gamma(I)$ — 1-мерная гладкая поверхность, покрываемая одной параметризацией. Если неотрицательная функция $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ σ-измерима или σ-интегрируема, то тогда криволинейным интегралом от f по M будет следующее:

$$\int_M f ds = \int_I f(\gamma(t)) \,|\, \gamma'(t)\,| d\mu(t)$$

Здесь $s(M) = \int_I |\,\gamma'(t)\,| d\mu(t) = L(\gamma)$ — длине кривой.

2. Пусть $r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $(u,v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, где Ω — открытое множество. Отображение $r : \Omega \to r(\Omega)$ является гомеоморфизмом. Тогда $M = r(\Omega)$ является 2-мерной поверхностью в $\mathbb{R}^2$, покрываемой одной параметризацией. Посмотрим, как будет выглядеть матрица Грама:

$$Dr = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{pmatrix}$$

$$(Dr)^T Dr = \begin{pmatrix} (r'_u, r'_u) & (r'_u, r'_v) \\ (r'_u, r'_v) & (r'_v, r'_v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Тогда искомый интеграл равен $\iint_m f dS = \iint_\Omega f(r(u,v))\sqrt{EG - F^2} d\mu(u,v)$, где $S(M) = \iint_\Omega \sqrt{EG - F^2} d\mu$. Это поверхностный интеграл I-го рода.

3. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$, Ω — открытое множество, $F : \Omega \to \mathbb{R}$ — гладкая. $M = \{(x, F(x)) : x \in \Omega\}$ — гладкая $(n-1)$-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$, покрываемая одной параметризацией $\varphi(x) = (x, F(x))$, $x \in \Omega$. Посмотрим вновь, как будет выглядеть матрица Грама:

$$D\varphi = \begin{pmatrix} E_{n-1} \\ grad\ F \end{pmatrix}, \ (D\varphi)^T D\varphi = E_{n-1} + (grad\ F)^T grad\ F.$$

Пусть $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ σ-измерима или σ-интегрируема, тогда:

$$\int_M f d\sigma = \int_\Omega f(x, F(x))\sqrt{1 + |grad\ F|^2} d\mu(x)$$

Это поверхностный интеграл II-го рода.

Упражнение. Доказать, что определитель матрицы $E_{n-1} + (grad\ F)^T grad\ F$ равен $1 + |grad\ F|^2$.

Теоремы, связанные с криволинейными и поверхностными интегралами

Th. (#2) Пусть набор $\mathcal{A}_\sigma = \{A \subset M$ — σ-измеримые $\}$ образует σ-алгебру на M, где $\sigma : \mathcal{A}_\sigma \to [0;\infty]$, $\sigma(A) = \int\limits_M I_A d\sigma$, является мерой на M (эта мера ещё называется поверхностной). Кроме того, интеграл $\int\limits_M f d\sigma = \sum\limits_{i=1}^N \int\limits_{\Omega_i} (\eta_i f) \circ \varphi_i \sqrt{g(\varphi_i)} d\mu$ (1) является интегралом по мере σ.

Доказательство: Пусть $\mathcal{C} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N)$, как в определении. Пусть $A \subset M$. A является σ-измеримым тогда и только тогда, когда $\varphi_i^{-1}(A) \in M\left(\mathbb{R}^k\right)$ для любого $i \in \{1, \ldots, N\}$. Кроме того, $\mathcal{A}_\sigma = \cap_{i=1}^N B_i$, где $B_i = \{B \subset M : \varphi_i^{-1}(B) \in \mathcal{M}\left(\mathbb{R}^k\right)\}$. Каждый набор B_i является σ-алгеброй, что вытекает из свойств прообразов. Следовательно, $\mathcal{A}_\sigma$ — σ-алгебра.

Теперь покажем, что σ является мерой на M. Из определения вытекает, что $\sigma(\emptyset) = 0$. Покажем, что счётная аддитивность функции σ вытекает из счётной аддитивности интеграла Лебега. А как она вытекает? Пусть у нас есть набор $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — набор попарно непересекающихся множеств из $\mathcal{A}_\sigma$, а также $A = \cup_{k=1}^\infty A_k$. Тогда для любого $i \in \{1, \ldots, N\}$ верно следующее:

$$\int\limits_{\Omega_i} (\eta_i \cdot I_A) \circ \varphi_i \sqrt{g(\varphi_i)} d\mu = \int\limits_{\Omega_i} (\eta_i \circ \varphi_i) I_{\varphi_i^{-1}(A)} \sqrt{g(\varphi_i)} d\mu = \int\limits_{\varphi_i^{-1}(A)} (\eta_i \circ \varphi_i) \sqrt{g(\varphi_i)} d\mu =$$
$$\sum_{k=1}^\infty \int\limits_{\varphi_i^{-1}(A_k)} (\eta_i \circ \varphi_i) \sqrt{g(\varphi_i)} d\mu = \sum_{k=1}^\infty \int\limits_{\Omega_i} (\eta_i I_{A_k}) \circ \varphi_i \sqrt{g(\varphi_i)} d\mu$$

Следовательно, $\sigma(A) = \sum\limits_{k=1}^\infty \sigma(A_k)$.

$f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ σ-измерима тогда и только тогда, когда $f \circ \varphi_i$ измерима для любого $i \in \{1, \ldots, N\}$, что равносильно тому, что $(f \circ \varphi_i)^{-1}([-\infty; a)) \in \mathcal{M}\left(\mathbb{R}^k\right)$ для любого $a \in \mathbb{R}$ при любом i. Функция f измерима относительно $\mathcal{A}_\sigma$ тогда и только тогда, когда $f^{-1}([-\infty; a)) \in \mathcal{A}_\sigma$, что равносильно тому, что $\varphi_i^{-1}(f^{-1}([-\infty; a))) \in \mathcal{M}\left(\mathbb{R}^k\right)$ для любого a при любом i.

Пусть $A \in \mathcal{A}_\sigma$, тогда $\int\limits_M I_A d\sigma = \mu(A)$. Из формулы (1) следует, что интеграл, определённый формулой (1), обладает свойствами аддитивности по функциям и положительной однородности. Следовательно, $\int\limits_M f d\sigma = \int\limits_M d\mu$ для всякой неотрицательной $\mathcal{A}_\sigma$-простой функции.

Пусть $f : M \to [0;\infty]$ $\mathcal{A}_\sigma$-измерима и неотрицательна, тогда найдётся набор $\{f_k\}$ $\mathcal{A}_\sigma$-простых неотрицательных функций, последовательность f_k сходится к f. Применяя теорему Леви о монотонной сходимости, получим:

$$\int\limits_M f d\sigma = \sum_{i=1}^N \int\limits_{\Omega_i} (\eta_i f) \circ \varphi_i \sqrt{g(\varphi_i)} d\mu = \sum_{i=1}^N \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega_i} (\eta_i f_k) \circ \varphi_i \sqrt{g(\varphi_i)} d\mu = \lim_{k\to\infty} \int\limits_M f_k d\mu = \int\limits_M f d\mu$$

Для интегрируемых функций равенство вытекает из определений. ■

Смысл всего этого на практике в том, что интеграл, определённый по формуле (1), является интегралом по мере, и его можно рассматривать точно так же, как и интеграл Лебега: например, не учитывать множество точек меры нуль.

Пример: Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $r > 0$. Рассмотрим верхнюю полусферу $M = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r, x_n > 0\}$ как график функции $h : U \to \mathbb{R}$, $h(x_1, \dots, x_{n-1}) = \sqrt{r^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2}$, определённой на $U = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : |x| < r\}$. Для $i \in \{1, \dots, n-1\}$ имеем $\frac{\partial h}{\partial x_i} = -\frac{x_i}{h(x)}$. Поэтому для параметризации $\varphi(x) = (x, h(x))$; $g(\varphi) = 1 + |grad\ h|^2 = 1 + \sum\limits_{i=1}^{n-1} \frac{x_i^2}{(h(x))^2} = \frac{r^2}{(h(x))^2}$. Если $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ σ-измерима, неотрицательна или σ-интегрируема, то $\int\limits_M f d\sigma = \int\limits_U f(x, h(x)) \sqrt{1 + |grad\ h|^2} d\mu(x) = \int\limits_{B_r(0)} f\left(x, \sqrt{r^2 - |x|^2}\right) \frac{r}{\sqrt{r^2 - |x|^2}} d\mu(x) = \int\limits_{B_1(0)} f\left(rt, r\sqrt{1-t^2}\right) \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-|t|^2}} d\mu(t)$

Th. (#3) Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ интегрируема, $n \geqslant 1$, Тогда для почти всех $r \in (0; \infty)$ f σ-интегрирума по $S_r(0) - \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\}$, причём $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f d\mu = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_{S_r(0)} f(x) d\sigma(x) \right) d\mu(r)$

Доказательство: Пусть $x = (y, x_n)$, $y = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Введём верхнюю и нижнюю полуплоскости: $H_\pm = \{x \in \mathbb{R}^n : \pm x_n > 0\}$, а ещё введём $B = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : |y| < 1\}$. Рассмотрим отображение $\varphi : B \times (0; \infty) \to H_+$, где $\varphi(y, r) = \left(ry, r\sqrt{1 - |y|^2}\right)$. Отображение φ обратимо. $\varphi^{-1}(x) = \left(\frac{y}{|x|}, |x|\right)$. φ является диффеоморфизмом, значит, можем сделать замену переменных. По теореме о замене переменных и формуле Фубини получаем, что:

$$\int\limits_{H_+} f d\mu = \int\limits_{B \times (0;\infty)} f\left(ry, r\sqrt{1 - |y|^2}\right) |\det D\varphi| d\mu$$

Посчитаем матрицу Якоби:

$$D\varphi = \begin{pmatrix} r & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & r & x_{n-1} \\ -\frac{-rx_1}{\sqrt{1-|y|^2}} & \dots & \dots & -\frac{-rx_{n-1}}{\sqrt{1-|y|^2}} & \sqrt{1 - |y|^2} \end{pmatrix}$$

Теперь найдём определитель: $\det D\varphi = r^{n-1} \left(\sqrt{1 - |y|^2} + \frac{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2}{\sqrt{1-|y|^2}} \right) = \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-|y|^2}}$. Отсюда получим, что $\int\limits_{H_+} f d\mu = \int\limits_{B \times (0;\infty)} f\left(ry, r\sqrt{1 - |y|^2}\right) \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-|y|^2}} d\mu = \int\limits_{(0;\infty)} \left(\int\limits_B f\left(ry, r\sqrt{1-|y|^2}\right) \right) \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-|y|^2}} d\mu = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_{S_r(0) \cap H_+} f(x) d\sigma(x) \right) d\mu(r)$. Поскольку f интегрируема на $\mathbb{R}^n$, то внутренний интеграл $\int\limits_{S_r(0) \cap H_+} f d\sigma$ конечен для почти всех $r > 0$.

Аналогичным образом устанавливается, что $\int\limits_{H_-} f d\mu = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_{S_r(0) \cap H_-} f(x) d\sigma(x) \right) d\mu(r)$.

Для завершения доказательства осталось заметить, что множество $S_r(0) \cap \{x_n = 0\}$ имеет поверхностную меру нуль. *Это лектор оставил в качестве упражнения. Можно, например, покрыть некоторой параметризацией.* ■

Задача. Пусть M — гладкая k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$, $k < n$, $r > 0$. Рассмотрим отображение $\Phi_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, гомотетию $\Phi_r(x) = rx$. Докажите, что $M' = \Phi'_r(M)$ — гладкая k-мерная поверхность и $\int\limits_{M'} f d\sigma = \int\limits_{M} f \circ \Phi_r r^k d\sigma$.

Пример: Введём меру n-мерного шара как $\omega_n = \mu_n \left(B_1(0)\right)$, а на его поверхности введём меру $\sigma_n = \sigma\left(S_1(0)\right)$. Найдём площадь поверхности n-мерного шара.

$$\omega_n = \int\limits_{\mathbb{R}^n} I_{B_1(0)} d\mu = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{S_r(0)} 1 d\sigma\right) d\mu_1 = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{S_1(0)} r^{n-1} d\sigma\right) dr = \sigma_n \cdot \tfrac{1}{n}$$

Отсюда получаем, что $\sigma_n = n\omega_n$.

Дифференциальные формы

k-формы

Повторим кое-что о перестановках. Пусть $A = \{1, \ldots, k\}$. Перестановкой σ называется биекция из A в A. S_k - группа всех перестановок A. Пара $(\sigma(i), \sigma(j))$ образует инверсию, если $i < j$, но $\sigma(i) > \sigma(j)$. По количеству инверсий можно узнать знак перестановки: знак перестановки соответствует чётности числа инверсии. Знак произведения перестановки равен произведению знаков перестановок.

Def. Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. Функция $f : V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$ (V встречается k раз) называется k-линейной, если $f(\ldots \lambda v + \mu w \ldots) = \lambda f(\ldots v \ldots) + \mu f(\ldots w \ldots)$.

Def. Пусть f — k-форма, g — m-форма (на V). Тензорным произведением f и g называется $(k+m)$-форма $f \otimes g$, определяемая следующим образом:

$$f \otimes g\left(v_1, \ldots, v_{k+m}\right) = f\left(v_1, \ldots, v_k\right) \cdot g\left(v_{k+1}, \ldots, v_{k+m}\right)$$

Note. Ассоциативность вытекает из определения: $(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$.

Def. k-функция f называется кососимметрической, если $f\left(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}\right) = sgn(\sigma) \cdot f\left(v_1, \ldots, v_k\right)$ для любой перестановки $\sigma \in S_k$

Определим операцию альтернирования: для произвольной k-функции f положим $Alt(f)\left(v_1, \ldots, v_k\right) = \frac{1}{k!} \sum\limits_{\sigma \in S_k} sgn(\sigma) f\left(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}\right)$.

Свойства альтернирования:

1. $Alt(f)$ — кососимметрическая функция:
   $Alt(f)\left(v_{\tau(1)}, \ldots, v_{\tau(k)}\right) = \frac{1}{k!} \sum\limits_{\sigma \in S_k} sgn(\sigma) f\left(v_{\sigma\tau(1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(k)}\right) = \frac{1}{k!} sgn(\tau) \sum\limits_{\sigma \in S_k} sgn(\sigma\tau) f\left(v_{\sigma\tau(1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(k)}\right) = sgn(\tau) Alt(f)$
2. Если f — кососимметрическая функция, то $Alt(f) = f$, что вытекает из определения.

Лемма. (#1) $Alt\,(f \otimes g) = Alt\,(Alt(f) \otimes g) = Alt\,(f \otimes Alt(g))$.

Доказательство: Пусть $\sigma \in S_k$. Рассмотрим действие перестановки на f: $\sigma f\,(v_1, \ldots, v_k) = f\left(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}\right)$. $Alt\,(Alt(f) \otimes g) = \frac{1}{k!} \sum\limits_{\sigma \in S_k} sgn(\sigma) Alt(\sigma f \otimes g)$. Продолжим σ до $\sigma' \in S_{k+m}$ по правилу:

$$\sigma'(i) = \begin{cases} \sigma(i) & i \leqslant k \\ i & i > k \end{cases}.$$

$\sigma f \otimes g = \sigma'\,(f \otimes g)$, $sgn(\sigma') = sgn(\sigma)$. Следовательно, $Alt(Alt(f) \otimes g) = \frac{1}{k!} \sum\limits_{\sigma \in S_k} sgn(\sigma) Alt\,(\sigma'(f \otimes g)) = \frac{1}{k!} \sum\limits_{\sigma \in S_k} sgn(\sigma) sgn(\sigma') Alt(f \otimes g) = Alt(f \otimes g)$ ■

Внешнее произведение

Def. Пусть $f \in A_k(V)$, $g \in A_m(W)$. Внешним произведением f и g называется кососимметрическая форма степени $k + m$ $f \wedge g \in A_{k+m}(V)$, определяемая следующим образом: $f \wedge g = \frac{(k+m)!}{k!m!} Alt(f \otimes g)$.

Лемма. (#2) Внешнее произведение обладает следующими свойствами:

1. Внешнее произведение линейно по f и g;
2. $f \wedge g = (-1)^{km}\, g \wedge f$;
3. $(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h)$.

Доказательство: Первое свойство вытекает непосредственно из определения. Третье свойство вытекает из леммы #1.

Докажем второе свойство. Рассмотрим $\tau \in S_{k+m}$:

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & m & m+1 & \ldots & m+k \\ k+1 & \ldots & k+m & 1 & \ldots & k \end{pmatrix}$$

$Alt\,(f \otimes g) = \frac{1}{(k+m)!} \sum\limits_{\sigma \in S_{k+m}} f\left(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}\right) g\left(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+m)}\right) = \frac{sgn(\tau)}{(k+m)!} \sum\limits_{\sigma \in S_{k+m}} sgn(\sigma\tau) f\left(v_{\sigma\tau(m+1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(m+k)}\right) g\left(v_{\sigma\tau(1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(m)}\right) = sgn(\tau) Alt(g \otimes f)$. Осталось заметить, что $sgn(\tau) = (-1)^{km}$. ■

Лекция 9 (2 ноября 2021)

Продолжение про внешнее произведение

Напомним основную операцию, которую ввели неделей ранее. Пусть $f \in A_k(V)$, $g \in A_m(V)$. Внешним произведением $f \wedge g$ называется следующее: $\frac{(k+m)!}{k!m!} Alt(f \otimes g)$. Не успели доказать его ассоциативность. Осталось наверстать упущенное.

Доказательство: $(f \wedge g) \wedge h = \frac{(k+m+l)!}{(k+m)!l!} Alt((f \wedge g) \otimes h) = \frac{(k+m+l)!}{(k+m)!l!} \cdot \frac{(k+m)!}{k!m!} Alt(Alt(f \otimes g) \otimes h) = \frac{(k+m+l)!}{k!m!l!} Alt((f \otimes g) \otimes h)$. Аналогично устанавливается, что $f \wedge (g \wedge h) = \frac{(k+m+l)!}{k!m!l!} Alt(f \otimes (g \otimes h))$. Всё это устанавливается благодаря лемме #1. Осталось воспользоваться ассоциативностью тензорного произведения. ■

Note. Пусть $A_0(V) = \mathbb{R}$. Тогда $c \wedge f = cf$.

Следующая лемма крайне важна для дальнейшего понимания.

Лемма. (#3). Пусть $\alpha^1, \ldots, \alpha^k$ — линейные функции на V, $v_1, \ldots, v_k \in V$. Тогда $\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k(v_1, \ldots, v_k) = \det(\alpha^i(v_j))$.

Доказательство: По предыдущему следствию $\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k = k! Alt\left(\alpha^1 \otimes \cdots \otimes \alpha^k\right)$. Тогда $\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k(v_1, \ldots, v_k) = \sum\limits_{\sigma \in S_k} sgn(\sigma) \alpha^1\left(v_{\sigma(1)}\right) \cdot \cdots \cdot \alpha^k\left(v_{\sigma(k)}\right) = \det(\alpha^i(v_j))$. ■

Следствие. Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис V, $(e^1, \ldots, e^n)$ — двойственный базис V^*. Тогда $e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = \varepsilon^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_k} = \begin{cases} 1 & \mathcal{A} \\ 2 & \mathcal{B} \\ 0 & \mathcal{C} \end{cases}$, где $\mathcal{A}$ соответствует случаю, что $(j_1, \ldots, j_k)$ — чётная перестановка $(i_1, \ldots, i_k)$, $\mathcal{B}$ соответствует случаю, что $(j_1, \ldots, j_k)$ — нечётная перестановка $(i_1, \ldots, i_k)$, $\mathcal{C}$ соответствует остальным случаям.

Доказательство: Предположим, что некоторый $j_m \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$. Тогда у матрицы $A = \left(e^{i_\alpha}_{j_\beta}\right)$ m-й столбец нулевой, что означает вырожденность матрицы A, то есть $\det A = 0$.

Если перестановка $(j_1, \ldots, j_k)$ получена из $(i_1, \ldots, i_k)$ чётным числом транспозиций, то матрица A получена из единичной матрицы E чётным числом перестановок столбцов или строк, что означает, что $\det A = \det E = 1$. Аналогичным образом устанавливается, что если $(j_1, \ldots, j_k)$ — нечётная перестановка $(i_1, \ldots, i_k)$, то $\det A = -1$. ■

Note. Символ Леви-Чивиты: $\varepsilon^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_k}$.

Пусть $I = (i_1, \ldots, i_k)$, $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис V, $(e^1, \ldots, e^n)$ — соответствующий двойственный базис V^*. Введём обозначения:

$$e_I = (e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$$

$$e^I = e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}$$

$$e^I(e_J) = \varepsilon^I_J$$

$$\mathbb{I}_k = \{(i_1, \ldots, i_k) : 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n\}$$

Th. (#1) Пусть $(e^1, \ldots, e^n)$ — базис $V*$, Тогда $\{e^I : I \in \mathbb{I}_k\}$ — базис $A_k(V)$.

Доказательство: Пусть $\sum\limits_{I\in\mathbb{I}_k} c_I \cdot e^I = 0$. Применим обе части равенства к e_J, $J \in \mathbb{I}_k$. Тогда $0 = \sum\limits_{I\in\mathbb{I}_k} c_I e^I(e_J) = \sum\limits_{I\in\mathbb{I}_k} c_I \varepsilon^I_J = c_J$. Упорядочить набор по возрастанию возможно единственным способом, когда $I = J$. Следовательно, система $\{e^I mI \in \mathbb{I}_k\}$ является линейно независимой.

Пусть $f \in A_k(V)$. Рассмотрим $g = \sum I \in \mathbb{I}_k f(e_i) e^I$. Тогда $f(e_J) = g(e_J)$ для любого $J \in \mathbb{I}_k$, откуда $f(e_J) = g(e_J)$ для любого J длины k в силу кососимметричности, откуда $f(v_1, \ldots, v_k) = g(v_1, \ldots, v_k)$ для любого $v_i \in V$ в силу k-линейности. ■

Следствие. $dim\ A_k(V) = C^k_n$, при $k > n$ $A_k(V) = \{0\}$, так как обязательно встретятся два одинаковых элемента, и это получается вследствие кососимметричности.

Для того, чтобы точно понять эту тему, нужно кое-что повторить про сопряжённые пространства и тензорную алгебру.

Дифференциальные формы

Def. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$, U — открытое множество, рассматривается точка $p \in U$. Дифференциальной k-формой на U называется функция $U \mapsto \omega_p \in A_k(T_p\mathbb{R}^n)$.

Пусть $\left((e_1)_p, \ldots, (e_n)_p\right)$ — базис $T_p\mathbb{R}^n$, $\left((dx_1)_p, \ldots, (dx_n)_p\right)$ — двойственный базис $(T_p\mathbb{R}^n)^* = T^*_p\mathbb{R}^n$. Тогда $\{(dx_{i_1})_p \wedge \cdots \wedge (dx_{i_k})_p : 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n\}$ — базис в $A_k(T_p\mathbb{R}^n)$. Следовательно, $\omega_p = \sum\limits_{i_1<\cdots<i_k} a_{i_1\ldots i_k}(p)(dx_{i_1})_p \wedge \cdots \wedge (dx_{i_k})_p = \sum\limits_{I\in\mathbb{I}_k} a_I(p)(dx_I)_p$. Таким образом, $\omega = \sum\limits_{I\in\mathbb{I}_k} a_I dx_I$, где $a_I : U \to \mathbb{R}$.

Def. Говорят, что дифференциальная k-форма ω класса C^r на U, если все её коэффициенты $a_I \in C^r(U)$. Множество всех дифференциальных k-форм класса C^∞ на U обозначается как $\Omega^k(U)$.

Пусть ω, $\tau \in \Omega^k(U)$, $f \in C^\infty(U)$, $f \in C^\infty(U)$, тогда $\Omega^k(U)$ — векторное пространство.

Кроме того, пусть $\omega \in \Omega^k(U)$, $\tau \in \Omega^m(U)$, тогда $p \mapsto \omega_p \wedge \tau_p$.

Note. $\omega = \sum\limits_I a_I dx_I$, $\tau = \sum\limits_J b_J dx_J \Rightarrow \omega \wedge \tau = \sum\limits_{I,J} a_I \cdot b_j dx_I \wedge dx_J$

Внешнее дифференцирование

Пример: Пусть $f : U \to \mathbb{R}$ принадлежит классу C^∞, $df_p : T_p\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $df_p(v) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\Big|_{t=0}$ при $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$. df — дифференциальная 1-форма. $df = \sum\limits_{i=1}^n a_i dx_i$. С одной стороны, $df_p((e_j)_p) = a_j(p)$. С другой стороны, $df_p((e_j)_p) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(p)$, $df = \sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$.

Исходя из того, что $A_0(V) = \mathbb{R}$, $\Omega^0(U) = C^\infty(U)$.

Def. Пусть $\omega = \sum\limits_{I\in\mathbb{I}_k} a_I dx_I \in \Omega^k(U)$. Внешним дифференциалом ω называется $d\omega = \sum\limits_{I\in\mathbb{I}_k} da_I \wedge dx_I =$

$\sum\limits_{I\in\mathbb{I}_k}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{\partial a_I}{\partial x_j}dx_j\right)\wedge x_I$.

Лемма. (#4). Пусть $\omega\in\Omega^k(U)$, $\tau\in\Omega^m(U)$. Тогда:

1. $d(\alpha\omega+\beta\tau)=\alpha d\omega\wedge\beta d\tau$ $(k=m)$, $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$;
2. $d(\omega\wedge\tau)=d\omega\wedge\tau+(-1)^k\omega\wedge d\tau$;
3. $d(d\omega)=0$.

Доказательство: Первый пункт вытекает непосредственно из определения.

В силу $\mathbb{R}$-линейности достаточно доказать второй пункт для $\omega=fdx_I$, $\tau=gdx_J$. $d(\omega\wedge\tau)=d(fgdx_I\wedge dx_J)=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial(fg)}{dx_i}dx_i\wedge dx_I\wedge dx_J=\sum\limits_{i=1}^{n}g\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i\wedge dx_I\wedge dx_J+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial x_i}dx_i\wedge dx_I\wedge dx_J$. Перенесём множитель $\frac{\partial g}{\partial x_i}dx_i$ через $dx_I=dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}$, получим $d(\omega\wedge\tau)=\sum\limits_{i=1}^{n}g\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i\wedge dx_I\wedge dx_J+(-1)^k\sum i=1^n fdx_I\wedge\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}dx_i\wedge dx_J\right)=d\omega\wedge+(-1)^k\omega\wedge d\tau$.

Теперь достаточно доказать третий пункт для $\omega=fdx_I$.

$$d(d\omega)=d\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i\wedge dx_I\right)=\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}dx_j\wedge dx_i\right)\wedge dx_I \text{ При } i=j\text{: } dx_i\wedge dx_j=0 \text{ При } i\neq j\text{: } dx_i\wedge dx_j=-dx_j\wedge dx_i$$

Воспользовались теоремой Шварца. ■

Note. Если $D:\Omega^*(U)\to\Omega^*(U)$ удовлетворяет каждому из пунктов леммы #4 и $Df=df$ для любого $f\in C^\infty(U)$, то $D=d$.

Доказательство: В силу $\mathbb{R}$-линейности достаточно установить совпадение на $\omega=fdx_I$. $Df=df$ для любого $f\in C^\infty$, $D(dx_i)=D(Dx_i)=0$. По индукции можно доказать, что $D(dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k})=0$. Следовательно, $D(fdx_I)=Df\wedge dx_I+(-1)^n f\wedge D(dx_I)=df\wedge dx_I=d\omega$. Таким образом, $D=d$ на $\Omega^*(U)$. ■

А теперь рассмотрим операцию переноса формы (pullback).

Операция переноса (pullback)

Def. Пусть $U\subset\mathbb{R}^n$, U — открытое множество, $V\subset\mathbb{R}^m$, V — открытое множество, $f:U\to V$ класса C^∞. Тогда $f^*:\Omega^k(V)\to\Omega^k(U)$, выполняется $(f^*\omega)_p(v_1,\dots,v_k)=\omega_{f(p)}(df_p(v_1),\dots,df_p(v_k))$. Это сработает в предположении, что $k\geqslant 1$. При $k=0$ $f^*g=g\circ f$ $\forall g\in C^\infty(V)=\Omega^0(V)$.

Note. Непосредственно из определения следует, что:

1. $f^*(\omega+\tau)=f^*\omega+f^*\tau$;

2. $f^*(\omega \wedge \tau) = f^*\omega \wedge f^*\tau$

Доказательство оставляется в качестве упражнения.

Лемма. (#5) В этой лемме несколько пунктов:

1. Если $\omega = \sum\limits_{I \in \mathbb{I}_k} a_I dy_I$, $y = f(x)$, то $f^*\omega = \sum\limits_{I \in \mathbb{I}_k} a_i \circ f df_I$;
2. $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$

На лекции эти пункты указывались как 3 и 4.

Доказательство: Докажем первый (третий) пункт. $f^*a_I = a_I \circ f$; $f^*(dy_i)(v) = dy_i(df(v)) = d(y_i \circ f)(v) = df_i(v)$, $f^*\omega = \sum\limits_{I \in \mathbb{I}_k} f^*(a_I dy_I) = \sum\limits_{I \in \mathbb{I}_k} f^*(a_I) f^*(dy_I) = \sum\limits_{I \in \mathbb{I}_k} a_I \circ f (f^*dy_{i_1}) \wedge \dots \wedge (f^*dy_{i_k}) = \sum\limits_{I \in \mathbb{I}_k} a_i \circ f df_I$.

Докажем второй (четвёртый) пункт. Пусть $g \in \Omega^0(V)$. Тогда $f^*(dg) = f^*\left(\sum\limits_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_i} dy_i\right) = \sum\limits_{i=1}^m f^*\left(\frac{\partial g}{\partial y_i} dy_i\right) = \sum\limits_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_i} \circ f df_i = d(g \circ f) = d(f^*g)$. Пусть $\omega = g dy_I$. Тогда $f^*(d\omega) = f^*(dg \wedge dy_I) = f^*(dg \wedge dy_I) = f^*(dg) \wedge f^*(dy_I) = d(f^*g) \wedge df_I = d(g \circ f) \wedge df_I = d(g \circ f df_I) = d(f^*\omega)$. ■

А теперь наконец-то примеры!

Пример: Пусть $\omega = Pdx + Qdy$. Посмотрим, как выглядит внешний дифференциал: $d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy\right) \wedge dy = \frac{\partial P}{\partial x} dx \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \wedge dy = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy$.

Лекция 10 (9 ноября 2021)

Материал прошлой лекции прошёл тяжело. Вадим Витальевич надеется, что задачи из задавальника могут помочь усвоить материал полегче. Пример, обещанный неделей ранее, рассмотрен не будет. Зато начнём новую тему.

Гладкие многообразия

Прежде, чем о них говорить, поймём кое-что о близости точек на многообразии. Вспомним второй семестр, когда говорили о метрических пространствах. Много что определялось на «языке» открытых множеств, окрестностей. Всё это приводит к понятию топологического пространства.

Топологические пространства

Def. Пусть $X \neq \emptyset$. Система $\tau = \{U_\alpha \subset X : \alpha \in A\}$ называется топологией на X, если:

1. $X, \emptyset \in \tau$;

2. $\forall\ \alpha,\ \beta \in A\ U_\alpha \cap U_\beta \in \tau$;

3. $\forall\ \mathcal{A} \subset A\ \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \in \tau$

Def. Упорядоченная пара (X, τ) называется топологическим пространством.

Def. Множества вида $U_\alpha \in \tau$ называются открытыми в X.

Рассмотрим примеры:

1. $\tau = \{X, \emptyset\}$, $\tau = P(X)$;

2. Всякое метрическое пространство является топологическим относительно системы открытых множеств, порождённых метрикой;

3. $X = \mathbb{R}^n$, $\tau = \{U \subset X : |U^c| < \infty\} \cup \{X, \emptyset\}$, для $U,\ V \in \tau$ $(U \cap V)^c = U^c \cup V^c$. для $U_\alpha \in \tau$ $\left(\bigcup\limits_\alpha U_\alpha\right)^c = \bigcap\limits_\alpha U_\alpha^c$.

Def. Окрестностью точки $p \in X$ называется любое открытое множество, содержащее p.

Def. Топологическое пространство X называется хаусдорфовым, если для любых различных точек p и q существует открытое множество U, содержащее p, открытое множество V, содержащее q, что $U \cap V = \emptyset$.

Def. Пусть (X, τ_x), (Y, τ_Y) — топологические пространства, рассмотрим отображение $f : X \to Y$. отображение f называется непрерывным, если для любого открытого в Y множества $V \subset Y$ прообраз $f^{-1}(V)$ открыт в X.

Пример: Рассмотрим отображение $f : X \to Y$, $f(x) = y_0$.

$$f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\}$$

$$f^{-1}(V) = \begin{cases} \emptyset, & y_0 \notin V \\ X, & y_0 \in V \end{cases}$$

На практике задают не всю топологию, а некоторую её подсистему.

Def. Базой топологии τ называется $\beta \subset \tau$, если для любого $U \in \tau$ существует $B_s \in \beta$, что $U = \bigcup\limits_s B_s$.

Лемма. (#1) β является базой тогда и только тогда, когда выполнены два следующих условия:

1. $\forall x \in X\ \exists B \in \beta\ (x \in B)$

2. $\forall B_1,\ B_2 \in \beta\ (x \in B_1 \cap b_2 \Rightarrow x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2)$

Доказательство:

Необходимость:

- Первое условие означает, что всё множество X представимо в виде элементов из базы β, и каждый элемент $x \in X$ будет представлять собой открытое множество.
- Второе условие означает, что множество $B_1 \cap B_2$ представляет собой объединение элементов из базы, но элементы из базы представляют собой открытые множества, и тогда $B_1 \cap B_2$ тоже будет открытым множеством.

Достаточность: рассмотрим $\tau(\beta) = \{\bigcup\limits_s B_s : B_s \in \beta\}$. Возьмём $A = \bigcup\limits_s B_s$, $C = \bigcup\limits_t B_t$, получим $A \cap C = \bigcup\limits_{s,t} B_s \cap B_t$. Аналогично $A \cup C \in \tau(\beta)$. ■

Пример: Рассмотрим $\mathbb{R}^n$, возьмём набор шаров вида $B_r(q)$. Получим пространство со счётной базой.

Основные сведения о гладких многообразиях

Def. Множество M называется топологическим k-мерным многообразием, если M — хаусдорфово топологическое пространство со счётной базой, и M локально евклидово, то есть для любой точки $p \in M$ существует окрестность U, содержащая точку p, гомеоморфная открытому множеству $V \subset \mathbb{R}^k$.

Можем говорить о компактных топологических пространствах. Вообще то, как давал Вадим Витальевич материал во 2-м семестре, позволяет перенести многие определения, связанные с метрическими пространствами, в топологические пространства.

Пусть M — топологическое k-мерное многообразие.

Def. Упорядоченная пара (U, φ), где $U \subset M$ является открытым, а $\varphi : U \to V$, где V открыто в $\mathbb{R}^k$, является гомеоморфизмом, называется картой на M.

Def. Две карты (U, φ) и (V, ψ) называются согласованными, если либо $U \cap V = \emptyset$, либо функция перехода $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ — диффеоморфизм.

Def. Набор согласованных карт $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ называется атласом, если $M = \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$.

Def. Атласы $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ называются эквивалентными, если $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ — атлас на M.

Def. Класс эквивалентности атласов на M называется гладкой структурой.

Def. Топологическое k-мерное многообразие с фиксированной на нём гладкой структурой называется гладким k-мерным многообразием.

А теперь переходим к примерам.

1. $U \subset \mathbb{R}^k$, U — открытое множество. Введём атлас $\{(U, id)\}$.

2. $f : \Omega \to \mathbb{R}$, Ω — множество, открытое в $\mathbb{R}^k$, f — непрерывное отображение. $M = \Gamma_f$. $\varphi(x, f(x)) = x$. Все карты согласованы. Всё, что покрыто одной картой, автоматически даст гладкое многообразие.

3. Рассмотрим $S^1 = \{x^2 + y^2 = 1\}$. Пусть $U = \{(\cos\theta_1, \sin\theta_1) : 0 < \theta_1 < 2\pi\}$

   - Посмотрим гомеоморфизм: $\varphi : U \to (0; 2\pi)$, $\varphi(\cos\theta_1, \sin\theta_1) = \theta_1$.
   - Теперь рассмотрим другую карту: $V = \{(\cos\theta_2, \sin\theta_2) : -\pi < \theta_2 < \pi\}$, $\psi : V \to (-\pi; \pi)$, $\psi(\cos\theta_2, \sin\theta_2) = \theta_2$.

   Таким образом, S^1 можно представить в виде $U \cup V$. $\varphi(U \cap V) = (0; \pi) \cup (\pi; 2\pi)$. Рассмотрим функцию перехода:

$$\psi \circ \varphi^{-1}(\theta_1) = \begin{cases} \theta_1, & \theta_1 \in (0; \pi) \\ \theta_1 - 2\pi, & \theta_1 \in (\pi; 2\pi) \end{cases}$$

   Получили гладкий атлас.

4. Всякая гладкая k-мерная поверхность с топологией, индуцированной с $\mathbb{R}^n$, является гладким k-мерным многообразием.

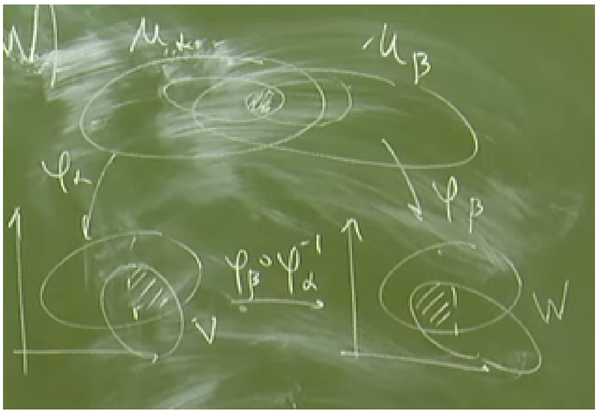
Лемма. (#2, о картах) Пусть $M \neq \emptyset$ и $\mathcal{C} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, и:

1. $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ — биекция, где V открыто в $\mathbb{R}^k$;
2. $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$, $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ — открыты в $\mathbb{R}^k$, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ — диффеоморфизм;
3. Для любых точек p и q из M возможна одна из двух ситуаций:
   (a) Существуют U_α, содержащее p, U_β, содержащее q, $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$;
   (b) Обе точки p и q лежат в U_α.
4. $M = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} U_{\alpha_k}$

Тогда существует единственная топология τ на M, относительно которой M является гладким k-мерным многообразием с атласом $\mathcal{C}$.

Доказательство: Разобьём доказательство на несколько шагов.

- Пусть $\beta = \{\varphi_\alpha^{-1}(V) : \alpha \in A, V \subset \mathbb{R}^k\}$, V — открытое множество. Рассмотрим $\varphi_\alpha^{-1}(V) \cap \varphi_\beta^{-1}(W)$, покажем, как это устроено.



$$\varphi_\alpha^{-1}\left((\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1}(W) \cap V\right) = \varphi_\beta^{-1}(W) \cap \varphi_\alpha^{-1}(V)$$

- Пусть $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ является гомеоморфизмом. Хотим доказать, что φ_α^{-1} является непрерывным.

$$(\varphi_\alpha^{-1})^{-1}\left(\widetilde{U}\right) = \varphi_\alpha\left(\bigcup_t \varphi_\beta^{-1}(V_t)\right)$$

- Теперь докажем хаусдорфовость топологии и счётность её базы.
  - Рассмотрим произвольное открытое множество $O \subset M$, тогда $O \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} U_{\alpha_k}$.
  - Пусть U_j не является подмножеством O, $O \cap U_j \neq \emptyset$. Если это так, то $\varphi_j\left(O \cap U_j\right) = \bigcup\limits_i B_i$, $W_{ij} = \varphi_j^{-1}\left(B_i\right)$.
  - Рассмотрим карту $\left(W_{ij}, \varphi_j\Big|_{W_{ij}}\right)$. Она будет согласована с (U_j, φ_j).
  - То же самое можно сделать с аналогичной картой, те же самые условия будут выполнены.

■

Упражнение. Доказать единственность топологии.

Def. Пусть M, N — гладкие многообразия. Отображение $f : M \to N$ называется гладким в точке $p \in M$, если существует карта (U, φ), содержащая p в M, и существует карта (V, ψ), содержащая $f\left(p\right)$ в N, что:

1. $f\left(U\right) \subset V$;
2. Координатное предоставление $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi\left(U\right) \to \psi\left(V\right)$ является гладким в точке $\varphi\left(p\right)$.

Здесь $F = \begin{cases} y_1 = y_1\left(x_1, \ldots, x_k\right), \\ \vdots \\ y_l = y_l = y_l\left(x_1, \ldots, x_k\right) \end{cases}$

Задача. Докажите, что гладкое отображение непрерывно.

Note. Определение гладкости отображение не зависит от выбора согласованных карт: пусть выбраны карты $\left(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi}\right)$, содержащее p, $\left(\widetilde{V}, \widetilde{\psi}\right)$, содержащее $f(p)$, а также $\widetilde{\psi} \circ f \circ \widetilde{\varphi}^{-1} = \left(\widetilde{\psi} \circ \psi^{-1}\right) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \left(\varphi \circ \widetilde{\varphi}^{-1}\right)$, которое является гладким.

Задача. Докажите, что композиция гладких отображений является гладким отображением.

Важный случай: $f : M \to \mathbb{R}$

Def. Отображение $F : M \to N$ является диффеоморфизмом между гладкими многообразиями, если:

1. F — биекция;
2. F, F^{-1} — гладкие.

Пример: Рассмотрим две прямые $\mathbb{R}$. На первой прямой выберем карту U, $u = x$, на второй прямой выберем карту V, $v = x^3$. Так как $u = \sqrt[3]{v}$, а $\sqrt[3]{v}$ не является дифференцируемой в нуле, то карты U и V не являются согласованными между собой. Структуры различны. Рассмотрим $f : p \mapsto x$, $f(p) = u = \sqrt[3]{v}$. С одной стороны, получается гладкая функция, с другой стороны, получается функция, не являющаяся гладкой.

Задача. Докажите, что $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ — диффеоморфизм.

Касательное пространство

Def. Пусть M — гладкое k-мерное многообразие, и заданы гладкие кривые на многообразии: $\gamma_1, \gamma_2 : (-\delta, \delta) \to M$, $\gamma_i(0) = p$. Будем говорить, что γ_1 касается γ_2 в точке p, то есть $\gamma_1 \sim \gamma_2 \Longleftrightarrow \exists\,(U, \varphi), p \in (U, \varphi)$, $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$.

Note. Условие касания не зависит от выбора согласованных карт: пусть есть ещё одна карта (V, ψ), содержащая точку p. Кроме того, условие касания $\sim$ действительно является отношением эквивалентности.

$$\psi \circ \gamma_i = (\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma_i) \text{ при } i = 1, 2$$

$$(\psi \circ \gamma_2)'(0) = D\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)_{\varphi(p)}$$

$$(\psi \circ \gamma_1)'(0) = (\psi \circ \gamma_2)'(0)$$

Def. Касательным пространством T_pM называется множество $\{[\gamma]_p : \gamma : (-\delta, \delta) \to M, \gamma(0) = p\}$.

Лекция 11 (16 ноября 2021)

Касательное пространство к многообразию

Ранее рассмотрели кривые $\gamma_1, \gamma_2 : (-\delta, \delta) \to M$, $\gamma_1(0) = p = \gamma_2(0)$, определили условие касания. Имеет смысл рассматривать множество $T_pM = \{[\gamma]_p : \gamma : (-\delta, \delta) \to M, \gamma(0) = p\}$. Определение хорошее, геометрические, но мы хотим рассматривать T_pM как векторное пространство.

Th. (#1) T_pM — векторное пространство.

Доказательство: Для любой карты $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ такой, что $p \in (U_\alpha, \varphi_\alpha)$, определим:

$$b_\alpha : \mathbb{R}^k \to T_pM$$

$$b_\alpha(v) = [\gamma_v], \text{ где } \gamma_v(t) = \varphi_\alpha^{-1}(a + tv), \text{ где } a = \varphi_\alpha(p)$$

Покажем, что b_α — биекция. Имеем:

$$(\varphi_\alpha \circ \gamma_v)'(0) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \varphi_\alpha\left(\varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(p) + tv)\right) = v$$

Отсюда получим следующее: если $[\gamma_v] = [\gamma_w]$, то $v = w$, и b_α — инъекция.

Теперь покажем, что b_α — сюръекция. Пусть $[c] \in T_pM$ с представителем параметризованной кривой $c : (-\delta, \delta) \to M$, $c(0) = p$, положим $v = (\varphi_\alpha \circ c)'(0)$. Тогда $b_\alpha(v) = [\gamma_v]$, откуда $[\gamma_v] = [c]$, что подтверждает, что b_α — сюръекция.

Таким образом, b_α — биекция, причём $b_\alpha^{-1}([c]) = (\varphi_\alpha \circ c)'(0)$.

Перенесём структуру векторного пространства с $\mathbb{R}^k$ на T_pM. Определим операции:

$$[\gamma_v] + [\gamma_w] = [\gamma_{v+w}]$$

$$\lambda[\gamma_v] = [\gamma_{\lambda v}$$

$$x + y = b_\alpha\left(b_\alpha^{-1}(x) + b_\alpha^{-1}(y)\right)$$

$$\lambda x = b_\alpha\left(\lambda_\alpha^{-1}(x)\right)$$

Покажем корректность операций, то есть их независимость от выбора карты, содержащей p. Отметим, что:

$$b_\beta^{-1} \circ b_\alpha(v) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}\left(\varphi_\alpha(p) + tv\right) = D\left(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}\right)_{\varphi_\alpha(p)}(V)$$

Отсюда $b_\beta^{-1} \circ b_\alpha$ — линейный изоморфизм $\mathbb{R}^k$. Следовательно:

$$b_\alpha\left(b_\alpha^{-1}(x) + b_\alpha^{-1}(y)\right) = b_\alpha\left(b_\alpha^{-1} \circ b_\beta\left(b_\beta^{-1}(x)\right) + b_\alpha^{-1} \circ b_\beta\left(b_\beta^{-1}(y)\right)\right) = b_\alpha \circ b_\alpha^{-1} b_\beta\left(b_\beta^{-1}(x) + b_\beta^{-1}(y)\right) = b_\beta\left(b_\beta^{-1}(x) + b_\beta^{-1}(y)\right)$$

■

Следствие. $[\gamma]_p \longleftrightarrow (\varphi \circ \gamma)'(0) = (v_1, \ldots, v_k)$[1]

Следствие. Пусть карта $(U, x_1, \ldots, x_k)$ содержит точку p и кривая $\gamma_i(t) = \varphi^{-1}(\varphi(p) + te_i)$, тогда $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p := [\gamma_i]$ образуют базис T_pM.

Note. В дальнейшем будем отождествлять $T_p\mathbb{R}^k$ с $\mathbb{R}^k$ по правилу $[\gamma] \to \gamma'(0)$.

Касательный вектор можно интерпретировать как производную по вектору. Пусть $f \in C^\infty(M)$, $v \in T_pM$, $v = [\gamma]_p$, $v(f) = (f \circ \gamma)'(0)$, всё это не зависит от выбора представителя v.

Пример: Пусть $\gamma_i(t) = \varphi^{-1}(\varphi(p) + te_i)$. Тогда:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (f) = (f \circ \gamma_i)'(0) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f \circ \varphi^{-1}(\varphi(p) + te_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(f \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(p))$$

Лемма. (#3) Пусть $v \in T_pM$, карта $(U, x_1, \ldots, x_k)$ содержит точку p. Тогда:

$$v = \sum_{i=1}^k v_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$$

Здесь $(v_1, \ldots, v_k)$ — координаты v в карте (U, φ).

Доказательство: Рассмотрим вектор $v = [\gamma_u]_p$.

$$v = [\gamma_u]_p \Longrightarrow u = (v_1, \ldots, v_k) \in \mathbb{R}^k$$

$$u = \sum_{i=1}^k v_i e_i \Longrightarrow [\gamma_u]_p = \sum_{i=1}^k v_i [\gamma_i]_i$$

$$v = \sum_{i=1}^k v_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$$

$$v(x_i) = (x_i \circ \gamma_u)'(0) = v_i$$

■

Следствие. Пусть $(U_\alpha, x_1, \ldots, x_k)$, $(U_\beta, y_1, \ldots, y_k)$ — карты на M, содержащие точку p. Пусть $v \in T_pM$, координаты в соответствующих картах: $(v_1^\alpha, \ldots, v_k^\alpha)$, $\left(v_1^\beta, \ldots, v_k^\beta\right)$. Тогда:

$$v = \sum_{i=1}^k v_i^\alpha \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p = \sum_{i=1}^k v_i^\alpha \left(\sum_{j=1}^k \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_p\right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^k v_i^\alpha \frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right) \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_p$$

[1] Здесь $(v_1, \ldots, v_k)$ — координаты v в карте (U, φ).

Гладкие отображения гладких многообразий

Def. Пусть M, N — гладкие многообразия, $f : M \to N$ — гладкое отображение, $p \in M$. Дифференциалом отображения f в точке p называется отображение:

$$df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$$
$$df_p\left([\gamma]_p\right) = f \circ \gamma_{f(p)}$$

Далее покажем некоторые свойства дифференциала отображения гладких многообразий. Пусть задана карта (U, φ) в M, она содержит точку p. Пусть задана карта (V, ψ) в N, она содержит точку $f(p)$, $f(U) \subset V$. Тогда:

$$(\psi \circ f \circ \gamma)'(0) = ((\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma))'(0) = DF_{\varphi(p)}\left((\varphi \circ \gamma)'(0)\right)^{[2]}$$

Отсюда следует, что:

1. Если $\gamma_1 \sim \gamma_2$ в точке p, то $f \circ \gamma_1 \sim f \circ \gamma_2$ в точке $f(p)$
2. $[(f \circ \gamma)_{v+w}]_{f(p)} = [(f \circ \gamma)_v]_{f(p)} + [(f \circ \gamma)_w]_{f(p)}$, $(f \circ \gamma)_{\lambda v\, f(p)} = \lambda[(f \circ \gamma)]_{v\, f(p)}$

Следовательно, дифференциал df_p определён корректно и является линейным отображением. Кроме того, в базисах $\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_p\}$ и $\{\frac{\partial}{\partial y_j}|_{f(p)}\}$ это отображение задаётся матрицей Якоби координатного представления F.

Note. $v \in T_pM$, $g \in C^\infty(N)$, $df_p(v)(g) = v(g \circ f)$

Note. $rk\ df_p = rk\ DF_{\varphi(p)}$

Гладкие подмногообразия

Def. Пусть M — гладкое k-мерное многообразие, $l \leqslant k$. Подмножество $S \subset M$, являющееся непустым, называется гладким l-мерным подмногообразием M, если для любой точки из S существует карта (U, φ), содержащая точку p, в M, такая что $\varphi(S \cap U) = \varphi(U) \cap \left(\mathbb{R}^l \times \{0\}\right) = \{x \in \varphi(U) : x_{l+1} = 0, \ldots, x_k = 0\}$

Note. S является l-мерным гладким многообразием.

Пусть S — топологическое подпространство, $\mathcal{A} = \{U, \varphi = (x_1, \ldots, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_k)\}$ — атлас на M, тогда $\mathcal{A}_S = \{U \cap S, \varphi_S = (x_1, \ldots, x_l)\}$ — атлас на S.

Пример: Если S — k-мерная гладкая поверхность в $\mathbb{R}^n$, то S — k-мерное гладкое подмногообразие $\mathbb{R}^n$.

[2] Здесь $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$.

Лекция 12 (23 ноября 2021)

Теорема о подмногообразии

Th. (#2) Пусть M — k-мерное гладкое многообразие, N — m-мерное гладкое многообразие ($m \leqslant k$). Пусть задано гладкое отображение $f : M \to N$, $q \in N$. Если $f^{-1}(q) \neq \emptyset$ и $rk df_p = m$ для любой точки $p \in f^{-1}(q)$, то $S = f^{-1}(q)$ — гладкое $(k-m)$-мерное подмногообразие M.

Доказательство: Выберем карту (V, ψ), содержащую точку q, $\psi(q) = 0$. Зафиксируем $p \in f^{-1}(q)$ и рассмотрим карту (U, φ), содержащую точку p в M, такую что $f(U) \subset V$.

Положим $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$. По условию $rk\ DF_{\varphi(p)} = m$, и эта матрица невырожденная. Будем отождествлять:

$$(x, z) = (x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_k)$$
$$g(x, z) = (F(x, z), z)$$

Матрица $Dy = \begin{pmatrix} A & \cdot \\ 0 & E \end{pmatrix}$ является невырожденной. По теореме об обратной функции существует открытое в $\mathbb{R}^k$ множество $\Omega \subset p(U)$, содержашее $\varphi(p)$, множество O, открытое в $\mathbb{R}^k$, что $g : \Omega \to O$ — диффеоморфизм.

Положим $W = \varphi^{-1}(\Omega)$, $\widetilde{\varphi} = g \circ \varphi$. Тогда $\left(W, \widetilde{\varphi}\right)$ — карта на M, содержащая точку p. Имеем:

$$\psi \circ f \circ \widetilde{\varphi}^{-1}(x, z) = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ g^{-1}(x, z) = F\left(g^{-1}(x, z)\right) = x$$
$$g \circ g^{-1}(x, z) = (x, z)$$

При этом функция f в координатах (x, z) действует как проектирование $(x, z) \mapsto x$.

Тогда $\widetilde{\varphi}(W \cap S) = \{(x_1, \ldots, x_k) \in \widetilde{\varphi}(W) : x_1 = 0, \ldots, x_m = 0\}$, следовательно, S — подмногообразие M размерности $k - m$. ■

Многообразия с краем

Моделью для гладкого k-мерного многообразия с краем будет служить множество $H^k \subset \mathbb{R}^k$, устроенное следующим образом:

$$H^k = \{(x_1, \ldots, x_k) : x_1 \leqslant 0\}$$

Напоминание. Пусть V — открытое подмножество H^k. Отображение $f : V \to \mathbb{R}^m$ называется гладким на V, если существует множество $U \supset V$, являющееся открытым в $\mathbb{R}^k$, а также существует гладкая функция $F : U \to \mathbb{R}^m$, такая что $F|_V = f$.

Положим $df_p = dF_p$ для точки $p \in V$. Определение корректно, так как в силу непрерывности $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ определяется своими значениями на $V \setminus \partial H^k$.

Лемма. (#4) Пусть $f : U \to V$ — диффеоморфизм между открытыми множествами U, $V \subset H^k$. Тогда:

1. $f\left(int\ U\right) = int\ V$
2. $f\left(U \cap \{x_1 = 0\}\right) = V \cap \{x_1 = 0\}$

Доказательство: Пусть $a \in int\ U$. Рассмотрим окрестность U_0, содержащую точку a, что $U_0 \subset int\ U$. Тогда по следствию из теоремы об обратной функции $f\left(U_0\right)$ открыто в $\mathbb{R}^k$, следовательно, $f\left(U_0\right) \cap \{x_1 = 0\}$ пусто. Значит, $f\left(int\ U\right) \subset int\ V$. Остальное доказывается от противного. ■

Note. Определение гладкого k-мерного многообразия с краем получается из определения гладкого k-мерного многообразия заменой открытых множеств в $\mathbb{R}^k$ на открытые множества в H^k.

Def. $\mathcal{A} = \{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ является атласом на гладком k-мерном многообразии с краем, если:

1. Отображение $\varphi : U_\alpha \to V_\alpha$ является гомеоморфизмом, где U_α открыто в M, V_α открыто в H^k;
2. Композиция $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha\left(U_\alpha \cap U_\beta\right) \to \varphi_\beta\left(U_\alpha \cap U_\beta\right)$ является диффеоморфизмом;
3. $\bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha = M$.

Лемма. (#5) Пусть M — гладкое k-мерное многообразие с краем. Тогда для $p \in M$ выполнено одно из условий:

1. Существует карта (U, φ), содержащая точку p, что $\varphi\left(p\right)$ — внутренняя точка H^k;
2. Существует карта (U, φ), содержащая точку p, что $\varphi\left(p\right) \in \{x_1 = 0\}$.

Доказательство: Пусть карта (V, ψ) содержит точку p. Тогда $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi\left(U\right) \to \psi\left(V\right)$ — диффеоморфизм множеств, открытых в H^k. По лемме #4 $\psi\left(p\right)$ — внутренняя (граничная) точка H^k тогда и только тогда, когда $\varphi\left(p\right)$ — внутренняя (граничная) точка H^k. ■

Def. В первом случае точка p называется внутренней точкой M.

Def. Во втором случае точка p называется краевой точкой M.

Def. Множество краевых точек M называется краем M, обозначение: ∂M.

Лемма. (#6) Пусть M — гладкое k-мерное многообразие с краем ∂M. Тогда ∂M — гладкое $(k-1)$-мерное многообразие.

Доказательство: Пусть точка p принадлежит краю ∂M, $\mathcal{A} = \{(U, \varphi)\}$ — атлас на M. По лемме 5 $\varphi\left(U \cap \partial M\right) = \varphi\left(U\right) \cap \{x_1 = 0\}$. Пусть $V = \varphi\left(U\right)$. Обозначим $U \cap \partial M$ за $\widetilde{U}$, $\varphi\left(U\right) \cap \{x_1 = 0\}$ — за $\widetilde{V}$. Тогда $\varphi : \widetilde{U} \to \widetilde{V}$ — гомеоморфизм как сужение гомеоморфизма на инвариантные множества.

Отождествим $\partial H^k = \{x_1 = 0\}$ с $\mathbb{R}^{k-1}$ по правилу $L(0, x') = x'$. Положим $\widetilde{\varphi} = L \circ \varphi$. Тогда $\left(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi}\right)$ — карта на ∂M, содержащая точку p. Тогда $\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi}^{-1} = L \circ \psi \circ \varphi^{-1} \circ L^{-1}$ — гладкое отображение как композиция гладких отображений. ■

Лемма. (#7) Пусть M — гладкое k-мерное многообразие, $k \geqslant 1$, функция $f : M \to \mathbb{R}$ является гладкой, такой что для любой точки $p \in f^{-1}(0)$ $rk\ df_p = 1$. Тогда $B = f^{-1}((-\infty; 0]) = \{p \in M : f(p) \leqslant 0\}$ — гладкое k-мерное многообразие с краем $\partial B = f^{-1}(0)$.

Доказательство: Здесь возможны два случая.

Рассмотрим первый случай, когда для $p \in B$ $f(p) < 0$. Тогда существует карта (U, φ), которая содержит точку p, такая что $U \subset f^{-1}((-\infty; 0))$.

Рассмотрим второй случай, когда для $p \in B$ $f(p) = 0$. Тогда по теореме #2 существет карта (U, φ), содержащая точку p, такая что в локальных координатах $f \circ \varphi^{-1}(x) = x_1$. Тогда следует, что $\varphi(U \cap B) = \{x \in \varphi(U) : x_1 \leqslant 0\} = \varphi(U) \cap \{x_1 \leqslant 0\}$. ■

Th. [3] Пусть M — гладкое k-мерное многообразие с краем ∂M, N — гладкое m-мерное многообразие, $k > m$, точка q принадлежит N, функция $f : M \to N$ — гладкая. Если $f(q) \neq 0$ и:

1. $rk\ df_p = m$ для любого $p \in f^{-1}(q)$;
2. $rk\ d\left(f|_{\partial M}\right)_p = m$ для любого $p \in f^{-1}(q)$;

то тогда $f^{-1}(q)$ является гладким $(k-m)$-мерным гладким многообразием с краем $\partial M \cap f^{-1}(q)$.

Пример: $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geqslant 0\}$. Рассмотрим $M = \{z \geqslant 0\}$, $f : M \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Тогда регулярным значением будет 1, матрица Якоби имеет вид $(2x, 2y, 2z)$, и верхняя полусфера — гладкое многообразие с краем.

Ориентируемые многообразия

Def. Пусть M — гладкое многообразие (с краем или без). Тогда:

1. Атлас на M называется ориентирующим, если якобианы всех функций перехода в нём положительны;
2. Гладкое многообразие с фиксированным на нём ориентирующим атласом называется ориентированным;
3. Если на гладком многообразии существует ориентирующий атлас, то многообразие называется ориентируемым;

[3]Эту теорему В. В. рассказал как дополнительный материал.

4. Ориентация на M — выбор одного из классов эквивалентности ориентирующих атласов, где два ориентирующих атласа эквивалентны, если их объединение — ориентирующий атлас.

Th. (#3) Пусть гладкая k-мерная поверхность M в $\mathbb{R}^n$ задана уравнением $F(x) = 0$, то есть существует гладкая функция $F; \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$, такая что $rk\ DF_p = n - k$ для любой точки $p \in M = F^{-1}(0)$, Тогда M ориентируемо.

Доказательство: Пусть $\varphi : \Omega : \mathbb{R}^n$ — локальная параметризация M, такая что $U = \varphi(\Omega)$ связно, и пусть точка p принадлежит U. Напомним, что градиенты $grad\ F_1(p)$, ..., $grad\ F_{n-k}(p)$ образуют базис в $(T_pM)^\perp$. Рассмотрим стандартный базис T_pM, то есть базис $v_i = D\varphi_{\varphi^{-1}(p)}(e_i)$, где $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$. Тогда $B(p) = (v_1(p) \ldots, v_k(p), grad\ F_1(p), \ldots, grad\ F_{n-k}(p))$ — базис в $\mathbb{R}^n$, причём компоненты $B(p)$ непрерывно зависят от точки p.

Пусть $S(p)$ — матрица перехода от базиса в $\mathbb{R}^n$ к $B(p)$. Тогда $\det S(p)$ — непрерывная всюду ненулевая функция. Тогда по теореме о промежуточных значениях функция $\det S(p)$ сохраняет знак на U. Зафиксируем точку $p_0 \in U$ и рассмотрим матрицу перехода $C(p)$ от базиса $B(p_0)$ к базису $B(p)$. Тогда $C(p) = S(p)(S(p_0))^{-1}$ имеет положительный определитель. Следовательно, все базисы $B(p)$ на U положительно (отрицательно) ориентируемы.

Рассмотрим набор параметризаций $\{\varphi_\alpha\}$, образы U_α которых связны и покрывают M. Если необходимо, меняя карты $(u_1, \ldots, u_k)$ на $(u_1, \ldots, -u_k)$, можно считать, что все базисы $B(p)$ положительно ориентируемы в $\mathbb{R}^n$.

Покажем, что $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha^{-1})\}$ — ориентирующий атлас на M. Пусть (U, φ^{-1}), (V, ψ^{-1}) — две пересекающиеся карты $\mathcal{A}$. Пусть $(v_1, \ldots, v_k)$ — стандартный базис от φ, $(\nu_1, \ldots, \nu_k)$ — стандартный базис от ψ. Тогда $(\nu_1, \ldots, \nu_k) = (v_1, \ldots, v_k)\, D\Phi$, где $\Phi = \psi^{-1} \circ \varphi$. Матрица перехода между $B(p)$, соответствующими φ и ψ, имеет вид $\begin{pmatrix} D\Phi & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$. Так как $\det \begin{pmatrix} D\Phi & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = \det D\Phi$ и он положителен, так как $B(p)$ положительно ориентируем в $\mathbb{R}^n$, то $\det D\Phi$ тоже положительный. Следовательно, атлас $\mathcal{A}$ — ориентирующий. ■

Задача. [4] Доказать, что на связном ориентируемом многообразии существует ровно две ориентации.

Задача. Доказать, что гладкая двумерная поверхность $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ ориентируема тогда и только тогда, когда на M^2 существует непрерывное поле единичных нормалей.

Задача. Пусть на гладком многообразии M существует дезориентирующая цепочка связных карт (U_i, φ_i), то есть такой набор карт, что $J_{\varphi_{i+1}\varphi_i^{-1}}$ положителен, где $i = \overline{1, n-1}$, и $J_{\varphi_1 \circ \varphi_n^{-1}}$ отрицателен. Тогда M неориентируемо.

Th. (#4). Пусть M — гладкое k-мерное ориентируемое многообразие с краем ∂M, где $k > 1$. Тогда ∂M также является ориентируемым многообразием.

Доказательство: Зафиксируем ориентируемый атлас $\mathcal{A} = \{(U, \varphi)\}$ на M. Пусть $\Phi = \psi \circ \varphi^{-1}$ —

[4] Эта задача не является обязательной.

функция перехода между пересекающимися картами (U, φ) и (V, ψ), $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_k)$, пусть $\widetilde{\Phi} = \widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi}^{-1}$ — функция перехода между картами $\left(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi}\right)$, $\left(\widetilde{V}, \widetilde{\psi}\right)$ на ∂M, где $\widetilde{U} = U \cap \partial M$, $\widetilde{V} = V \cap \partial M$. Тогда для любой точки $(0, a)$ из $\varphi\left(\widetilde{U} \cap \widetilde{V}\right)$ имеем:

$$\Phi(0, a) = \left(0, \widetilde{\Phi}(a)\right)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_i}(0, a) = 0 \ (i = 2, \ldots, k)$$

Следовательно:

$$D\Phi(0, a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(0, a) & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & D\widetilde{\Phi}(a) \end{pmatrix}$$

Значит:

$$\det D\Phi(0, a) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(0, a) \det D\widetilde{\Phi}(a)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(0, a) = \lim_{t \to -0} \frac{1}{t}\left(\Phi_1(t, a) - \Phi_1(0, a)\right)$$

Из всего этого следует следующее:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_i}(0, a) \geqslant 0$$

Таким образом, $\det \Phi(0, a)$ и $\det D\Phi(a)$ имеют один и тот же знак. ■

Def. Ориентации M и его края ∂M, задаваемые атласами из теоремы #4, называются согласованными.

Лекция 13 (30 ноября 2021)

Уже приближаемся к основному результату второй части нашего курса — теореме Стокса. Ввели уже необходимые определения, уже всё скоро будет.

Заключительная часть о гладких многообразиях

Def. Носителем функции $f : M \to \mathbb{R}$ называется $supp(f) = \overline{\{p \in M : f(p) \neq 0\}}$[5].

Лемма. Пусть M — гладкое многообразие (с краем или без края), $K \subset M$ — компакт и $K \subset O \subset M$, O — открытое множество. Тогда существует гладкая функция $f : M \to \mathbb{R}$, что:

[5] Замыкание и компакт здесь нужно понимать в топологическом смысле.

1. $f \equiv 1$ на K;

2. $f(p) \in [0;1]$ для любой точки $p \in O$;

3. Носитель $supp\,(f) \subset O$ является компактом.

Note. Лемма будет доказана на последней лекции.

Th. Пусть M — гладкое многообразие (с краем или без края). Пусть $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^N$ — конечный набор карт, покрывающих компакт $K \subset M$. Тогда существует гладкое разбиение единицы $\{p_i\}_{i=1}^N$, подчинённое этому покрытию, то есть набор гладких функций $p_i : M \to \mathbb{R}$, таких что:

1. $p_i(x) \in [0;1]$ для любого $x \in M$, $i \in \overline{1,N}$;

2. $supp\,(p_i) \subset U_i$ является компактом, $i \in \overline{1,N}$;

3. $\sum\limits_{i=1}^N p_i(x) = 1$ для любого $x \in K$.

Note. Теорема будет доказана в конце курса.

Дифференциальные формы на многообразиях

Def. Пусть M — гладкое n-мерное многообразие (с краем или без). Дифференциальной k-формой на M называется функция $p \mapsto A_k(T_pM)$, где A_k — кососимметрическая k-функция, $p \in M$.

Пусть $(U, x_1, \ldots, x_n)$ — карта на M, содержащая точку p. Тогда $\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p$ образуют стандартный базис в T_pM. Рассмотрим двойственный базис $dx_1|_p, \ldots, dx_n|_p$ в T_pM^*. Дифференциальная форма записывается следующим образом:

$$\omega_p = \sum_{i \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} a_{i_1 \ldots i_k}(p)\,(dx_{i_1})_p \wedge \cdots \wedge (dx_{i_k})_p$$

Координатное представление дифференциальной формы ω в карте $(U, x_1, \ldots, x_n)$ записывается так:

$$\omega = \sum_{I \in \mathbb{I}_k} a_I dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

Вспомним символ Леви-Чивиты:

$$(dx_{i_1})_p \wedge \cdots \wedge (dx_{i_k})_p \left(\left.\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x_{j_k}}\right|_p \right) = \varepsilon_J^I$$

$$a_I = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\right)$$

Def. Дифференциальной k-формой ω называется гладкой в точке p, если её коэффициенты a_I являются гладкими функциями в окрестности точки p относительно некоторой карты $(U, x_1, \ldots, x_n)$.

Note. $\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_p$

Множество всех гладких (принадлежащих классу C^∞) дифференциальных k-форм на M будем обозначать как $\Omega^k(M)$.

Пусть ω_1, $\omega_2 \in \Omega^k(M)$, $f \in C^\infty(M)$. Рассмотрим операции:

1. $(\omega_1 + \omega_2)_p = \omega_1|_p + \omega_2|_p$
2. $(f\omega)_p = f(p)\,\omega_p$

Пусть $\omega \in \Omega^k(M)$, $\tau \in \Omega^m(M) \Longrightarrow \omega \wedge \tau \in \Omega^{k+m}(M)$.

Определим операцию:

1. $(\omega \wedge \tau)_p = \omega_p \wedge \tau|_p$

Def. Пусть $F : M \to N$ — гладкое отображение многообразий M и N. Тогда $F^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$, при $\omega \in \Omega^k(N)$ значение $F^*\omega_p(v_1, \ldots, v_k) = \omega_{F(p)}(dF_p(v_1), \ldots, dF_p(v_k))$

Перечислим свойства F^*:

1. F^* является $\mathbb{R}$-линейной;
2. $F^*(\omega \wedge \tau) = F^*\omega \wedge F^*\tau$
3. Для любой карты $(V, y_1, \ldots, y_m)$ в N выполняется, что $F^*\left(\sum\limits_I a_I dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}\right) = \sum\limits_I a_I \circ F dF_{i_1} \wedge \cdots \wedge dF_{i_k}$
4. $(F \circ H)^* = H^* \circ F^*$

А теперь переходим к первому важному результату.

Th. (#1) Пусть M — гладкое n-мерное многообразие (с краем или без края). Тогда существует единственная операция $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ для любого $k \geqslant 0$, удовлетворяющая условиям:

1. d является $\mathbb{R}$-линейной;
2. $d(\omega \wedge \tau) = d\omega \wedge \tau + (-1)^k \omega \wedge d\tau$;
3. $d^2 = 0$;
4. Если $f \in C^\infty(M)$, то df — дифференциал функции f.

Доказательство: Начнём с лёгкой части. Покажем существование операции. Пусть $(U, \varphi) = (U, x_1, \ldots, x_n)$ — карта на M. Тогда:

$$d\omega = \varphi^* \left(d \left(\varphi^{-1}\right)^* \omega\right) = d \left(\sum_{I \in \mathbb{I}_k} a_I dx^I\right) = \sum_{I \in \mathbb{I}_k} da_I \wedge dx^I$$

Покажем, что определение корректно, то есть не зависит от выбора карты в окрестности точки. Пусть (V, ψ) — другая карта на M, такая что $U \cap V \neq \emptyset$. Рассмотрим функцию $f = \psi \circ \varphi^{-1}$. Тогда по свойству $f^* = \left(\varphi^{-1}\right)^* \circ \psi^*$, и:

$$f^* d \left(\psi^{-1}\right)^* \omega = d \left(f^* \left(\psi^{-1}\right)^* \omega\right) = d \left(\varphi^{-1}\right)^* \omega$$

А теперь покажем единственность. Покажем, что если U — открытое подмножество M, ω_1, $\omega_2 \in \Omega^k(M)$, $\omega_1 = \omega_2$ на U, то и $d\omega_1 = d\omega_2$ на U. Пусть точка $p \in U$, выберем окрестность $W \subset \overline{W} \subset U$. Рассмотрим $g \in C^\infty(M)$, $g|_W \equiv 1$, $supp\ g \subset M$. Положим $\eta = \omega_1 - \omega_2$, тогда $g \cdot \eta \equiv 0$, откуда $0 = d(g \cdot \eta) = dg \wedge \eta + g d\eta$. Посмотрим, какое значение принимает $g(p)$. $g(p) = 1$ и $dg_p = 0$. Используя следствия и $\mathbb{R}$-линейность, получаем, что $d\eta_p = 0$ и $d\omega_1 = d\omega_2$ на U.

Пусть (U, φ) — карта на M, $\omega \in \Omega^k(M)$, и пусть $\omega|_U = a_I dx^I$. Покажем, что $d\omega|_U = da_I \wedge dx^I$ для $a_I \in C^\infty(U)$. Фиксируем $p \in M$ и рассматриваем окрестность $W \subset \overline{W} \subset U$ и соответствующую функцию $g \in C^\infty(M)$. Положим $\widetilde{\omega} = (g a_I)\, d(g x_{i_1}) \wedge \cdots \wedge d(g x_{i_k}) \in \Omega^k(M)$, и на W выполнено $\widetilde{\omega} = \omega$. Тогда $d\widetilde{\omega} = d\omega$ на W.

$$d\widetilde{\omega} = d(g a_I) \wedge d(g x_{i_1}) \wedge \cdots \wedge d(g x_{i_k}) + (g a_I)\, d\left(d(g x_{i_1}) \wedge \cdots \wedge d(g x_{i_k})\right) = d(g a_I) \wedge d(g x_{i_1}) \wedge \cdots \wedge d(g x_{i_k})$$

Из этого следует, что на W $d\omega = d\widetilde{\omega} = da_I \wedge dx^I$. ■

Note. Операция d из теоремы #1 называется внешним дифференцированием.

Дифференциальные формы на гладких подмногообразиях

Пусть S — гладкое подмногообразие M, $\omega \in \Omega^k(M)$. Определим $\omega|_S$. Рассмотрим $p \in S$, v_1, $\ldots$, $v_k \in T_p S$. Тогда:

$$\left(\omega|_S\right)_p (v_1, \ldots, v_k) = \omega_p (v_1, \ldots, v_k)$$

Лемма. (#1) Пусть S — гладкое подмногообразие M, $i : S \to M$, $i(p) = p$ (стандартное вложение S в M). Тогда $i^* \omega = \omega|_S$.

Доказательство: Рассмотрим $p \in S$, v_1, $\ldots$, $v_k \in T_p S$. Тогда $(i^*\omega)_p (v_1, \ldots, v_k) = \omega_{i(p)} (di_p(v_1), \ldots, di_p(v_k)) = \omega_p (v_1, \ldots, v_k)$. ■

Интегрирование форм

Def. Пусть M — гладкое многообразие (с краем или без), $\omega \in \Omega^K(M)$. Носителем ω называется $supp(\omega) = \overline{\{p \in M : \omega_p \neq 0\}}$.

Обозначим множество гладких k-форм с компактным носителем как $\Omega_c^k(M)$.

Def. (#1) Пусть U — открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ $(\mathbb{H}^n)$, $\omega \in \Omega_c^n(U)$. Тогда $\omega = a(x)\,dx_1 \wedge \ldots dx_n$, $a \in C^\infty(U)$. Определим $\int\limits_U \omega = \int\limits_U a(x)\,dx_1 \ldots dx_n = \int\limits_{supp(\omega)} a(x)\,dx_1 \ldots dx_n$.

Def. (#2) Пусть M — гладкое n-мерное ориентированное многообразие, (U, φ) — карта. Пусть $\omega \in \Omega^n(M)$, $supp(\omega) \subset U$. Определим $\int\limits_M \omega = \pm \int\limits_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \omega$, где знак интеграла зависит от следующего:

1. Если (U, φ) положительно ориентирована, то интеграл берётся с плюсом;
2. В противном случае интеграл берётся с минусом.

Лемма. (#2) Пусть (U, φ), (V, ψ) — карты, якобиан функции перехода которых положителен, пусть $\omega \in \Omega_c^n(M)$ и $supp(\omega) \subset U \cap V$. Тогда:

$$\int\limits_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \omega = \int\limits_{\psi(V)} (\psi^{-1})^* \omega$$

Доказательство: $f = \psi \circ \varphi^{-1}$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$ — функция перехода между картами. Положим $\tau = (\psi^{-1})^* \omega$. Поскольку $f^* = (\varphi^{-1})^* \circ \psi^*$, то $f^*\tau = (\varphi^{-1})^* \omega$. Поэтому требуется доказать, что:

$$\int\limits_{\psi(U\cap V)} \tau = \int\limits_{\varphi(U\cap V)} f^*\tau$$

Пусть $(V, \psi) = (V, y_1, \ldots, y_n)$, $\tau = g(y)\,dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$ для некоторой функции $g \in C^\infty(V)$. Тогда:

$$f^*\tau = g \circ f df_1 \wedge \cdots \wedge df_n = g(f(x)) \det DF(x)\,dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Поскольку $\det DF > 0$, то по теореме о замене переменных в кратном интеграле:

$$\int\limits_{\psi(U\cap V)} g(y)\,dy_1 \ldots dy_n = \int\limits_{\varphi(U\cap V)} g(f(x)) \det Df(x)\,dx_1 \ldots dx_n$$

По определению #1 получаем искомое. ■

Def. (#3) Пусть M — гладкое n-мерное мерное ориентированное многообразие, $\omega \in \Omega_c^n(M)$. Пусть $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^N$ — набор карт, согласованных с ориентацией и покрывающих $supp(\omega)$, и $\{p_i\}_{i=1}^N$ — гладкое разбиение единицы, подчинённое этому покрытию. Определим $\int\limits_M \omega = \sum\limits_{i=1}^N \int\limits_M p_i\omega$ (2), где интегралы в правой части понимаются в смысле определения #2, и $supp(p_i\omega) \subset supp\ p_i \subset U_i$

Лемма. (#3) Интеграл (2) не зависит ни от выбора набора карт, покрывающих $supp\,(\omega)$, ни от разбиения единицы, подчинённого этому покрытию.

Доказательство: Пусть $(U_i, \varphi_i)_{i=1}^N$, $(V_j, \psi_j)_{j=1}^K$ — наборы карт, согласованных с ориентацией M и покрывающие $supp\,(\omega)$, обозначим для краткости эти наборы как $\{\rho_i\}_{i=1}^N$ и $\{\sigma_j\}_{j=1}^k$. Носитель $supp\,(\rho_i\sigma_j\omega) \subset U_i \cap V_j$. Тогда по лемме #2:

$$\int\limits_{\varphi_i(U_i)} \left(\varphi_i^{-1}\right)^* (\rho_i\sigma_j\omega) = \int\limits_{\psi_j(V_j)} \left(\psi_j^{-1}\right)^* (\rho_i\sigma_j\omega)$$

Просуммируем равенства по $i = 1, \ldots, N$ и $j = 1, \ldots, K$. Тогда по линейности интеграла Лебега, линейности операции переноса и суммировании получаем:

$$\sum_{i=1}^N \int\limits_M \rho_i\omega = \sum_{j=1}^K \int\limits_M \sigma_j\omega$$

■

Лекция 14 (7 декабря 2021)

Об интегрировании на многообразиях

Лемма. (#4) Пусть M, N — гладкие n-мерные ориентированные многообразия с краем или без края. Пусть ω, $\tau \in \Omega_c^n(M)$. Тогда:

1. $\int\limits_M \alpha\omega + \beta\tau = \alpha \int\limits_M \omega + \beta \int\limits_M \tau$ для любых скаляров α, $\beta \in \mathbb{R}$[6];
2. Если поменять на M ориентацию на противоположную, то $\int\limits_M \omega$ изменит знак.
3. Пусть $F : N \to M$ — диффеоморфизм, сохраняющий ориентацию, то есть $\det dF > 0$, тогда $\int\limits_M \omega = \int\limits_N F^*\omega$.

Note. Разбиение единицы применяется для доказательств утверждений, на практике оно используется редко.

Def. Пусть M — гладкое n-мерное многообразие (с краем или без). Множество $Z \subset M$ имеет меру нуль, если для любой карты (U, φ) на M выполнено, что $\varphi(U \cap Z)$ имеет меру нуль в $\mathbb{R}^n$.

Note. Определение корректно, то есть достаточно проверять для одного набора карт, покрывающих Z.

[6] Следует из того, что интегрирование сводится к интегрированию по Лебегу, а интеграл Лебега обладает свойством линейности. Кроме того, оба интеграла в правой части должны существовать.

Задача. [7] Пусть M — гладкое n-мерное многообразие, S — гладкое k-мерное подмногообразие в M и $k < n$. Показать, что S имеет меру нуль в M.

Лемма. (#5). Пусть M — гладкое n-мерное ориентированное многообразия (с краем или без), $\omega \in \Omega_c^n(M)$. Тогда верны два утверждения:

1. Если M — дизъюнктное объединение гладких n-мерных ориентированных многообразий M_1 и M_2, ориентации которых индуцированы ориентацией M, то выполняется свойство аддитивности: $\int\limits_M \omega = \int\limits_{M_1} \omega + \int\limits_{M_2} \omega$;
2. Если M — дизъюнктное объединение гладкого n-мерного ориентированного многообразия M' и множества Z меры нуль в M, то $\int\limits_M \omega = \int\limits_{M'} \omega$.

Доказательство: Докажем первое утверждение. Согласно определению можно свести доказательство к случаю, когда $supp(\omega)$ покрывается одной картой (U, φ). Положим $U_i = U \cap M_i$, $\varphi_i = \varphi|_{M_i}$, $i = 1, 2$. Если U_i не является пустым множеством, то (U_i, φ_i) — карта на M_i. Поскольку M_i — n-мерное многообразие, и $M = M_1 \sqcup M_2$, то $\varphi_i(U_i)$ открыто в $\mathbb{R}^n$ $(\mathbb{H}^n)$, и $\varphi(U) = \varphi_1(U_1) \sqcup \varphi_2(U_2)$. Тогда по свойству аддитивности интеграла Лебега:

$$\int\limits_M \omega = \int\limits_{\varphi(U)} \left(\varphi^{-1}\right)^* \omega = \int\limits_{\varphi_1(U_1)} \left(\varphi_1^{-1}\right)^* \omega + \int\limits_{\varphi_2(U_2)} \left(\varphi_2^{-1}\right)^* \omega = \int\limits_{M_1} \omega + \int\limits_{M_2} \omega$$

Второе утверждение доказывается аналогично. ■

Рассмотрим частный случай. Пусть $G \subset \mathbb{R}^3$ — область, $\omega \in \Omega_c^1(G)$. Базис в $\mathbb{R}^3$ — (x, y, z). Форма записывается как $\omega = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$. Пусть $\Gamma \subset G$ — гладкое 1-мерное ориентируемое многообразие, покрываемое одной параметризацией $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I$, где I — промежуток. Рассмотрим вложение $i : \Gamma \to G$, $i(p) = p_i$. Тогда:

$$\int\limits_\Gamma \omega = \int\limits_\Gamma i^*\omega = \int\limits_I \gamma^*(i^*\omega) = \int\limits_I \varphi^*\omega = \pm\int\limits_I \left(P(\varphi(t)) \cdot x'(t) + Q(\varphi(t))y'(t) + R(\varphi(t))z'(t)\right) dt^{8}$$

$$\varphi = i \circ \gamma : I \to G$$

Пусть $\vec{F} = (P, Q, R)$ — векторное поле. Рассмотрим кривую Γ. Тогда $\int\limits_\Gamma \omega = \int\limits_\Gamma \left(\vec{F}, \vec{\tau}\right) ds$ — криволинейный интеграл II-го рода.

Рассмотрим ещё один классический объект математического анализа. Рассмотрим область $G \subset \mathbb{R}^3$, $\omega \in \Omega_c^2(G)$, $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$. Пусть M — гладкое 2-мерное ориентируемое многообразие, покрываемое одной параметризацией $r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $(u, v) \in D$, $i : M \to G$, $i(p) = p$ — вложение, $\varphi = i \circ r$. Тогда:

[7] Эта задача имеет повышенную сложность.

[8] Знак положителен, если ориентация соответствует возрастанию параметра t, иначе знак отрицателен.

$$\int\limits_M \omega = \int\limits_M i^*\omega = \int\limits_D r^*\left(i^*\omega\right) = \int\limits_D \varphi^*\omega =$$

$$\int\limits_D \left(P\left(\varphi(u,v)\right) \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix} + Q\left(\varphi(u,v)\right) \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix} + R\left(\varphi(u,v)\right) \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \right) du \wedge dv = \int\limits_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} du \wedge dv =$$

$$\pm \int\limits_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} dudv$$

$$dy \wedge dz = \left(y'_u du + y'_v dv\right) \wedge \left(z'_u du + z'_v dv\right)$$

$$\vec{F} = (P, Q, R)$$

$$\int\limits_M \omega = \pm \int\limits_D \left(\vec{F}, \frac{r'_u \times r'_v}{|r'_u \times r'_v|}\right) |r'_u \times r'_v| dudv = \int\limits_M \left(\vec{F}, \vec{n}\right) dS$$

Данный объект — поверхностный интеграл II-го рода. Здесь $\vec{n}$ — поле единичных нормалей, задающее ориентацию M.

Теорема Стокса

Th. (Стокс) Пусть M — гладкое n-мерное ориентируемое многообразие с краем, причём ориентации M и ∂M согласованы, $n > 1$.[9] Тогда для любой формы $\omega \in \Omega_c^{n-1}(M)$ выполнено:

$$\int\limits_M d\omega = \int\limits_{\partial M} \omega^{10} \ (1)$$

Основную роль будет играть следующая лемма:

Лемма. (#6) Пусть V открыто в $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \leqslant 0\}$. Тогда для любой формы $\omega \in \Omega_c^{n-1}(V)$ выполнено:

$$\int\limits_V d\omega = \int\limits_{V \cap \partial \mathbb{H}^n} \omega$$

Доказательство: Рассмотрим два логически возможных случая.

Первый случай: пересечение $V \cap \partial\mathbb{H}^n$ пусто, то есть V открыто в $\mathbb{R}^n$. Запишем $\omega = \sum\limits_{i=1}^n f_i(x)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$[11], все функции f_i имеют компактный носитель в V. Продолжим ω на $\mathbb{R}^n$, положив $\omega = 0$ на $\mathbb{R}^n \setminus V$. Имеем:

$$d\omega = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\, dx_j \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_i \wedge \cdots \wedge dx_n$$

[9] При $n = 1$ доказательство работать не будет. Этот случай нужно рассматривать отдельно.
[10] В правой части под ω подразумевается сужение формы на край.
[11] Здесь «крышка» означает пропуск соответствующего слагаемого.

Поэтому:

$$\int\limits_V d\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)\, dx_1 \cdot \cdots \cdot dx_n$$

По теореме Фубини:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)\, dx_1 \cdot \cdots \cdot dx_n = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)\, dx_i \right) dx_1 \cdot \cdots \cdot \hat{dx_i} \cdot \cdots \cdot dx_n$$

В силу компактности носителя $supp\,(f_i)$ существует $R > 0$, такой что $f(x) = 0$ при $|x| \geqslant R$.

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)\, dx_i = \int\limits_{-R}^{R} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)\, dx_i = f(x_1 \ldots x_i \ldots x_n)\Big|_{x_i=-R}^{x_i=R} = 0$$

Рассмотрим второй случай, когда пересечение $V \cap \partial\mathbb{H}^n$ непусто. Аналогично первому случаю, продолжим ω на $\mathbb{H}^n$, повторим предыдущие рассуждения, получим:

$$\int\limits_V d\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int\limits_{\mathbb{H}^n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)\, dx_1 \cdot \cdots \cdot dx_n$$

При $i > 1$ $\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)\, dx_i = 0$, поэтому:

$$\int\limits_{\mathbb{H}^n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)\, dx = \int\limits_{(-\infty;0]\times\mathbb{R}^{n-2}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)\, dx_i \right) dx_1 \cdot \cdots \cdot \hat{dx_i} \cdot \cdots \cdot dx_n = 0$$

Следовательно:

$$\int\limits_V d\omega = \int\limits_{\mathbb{H}^n} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x)\, dx_1 \cdot \cdots \cdot dx_n = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x)\, dx_1 \right) dx_2 \cdot \cdots \cdot dx_n = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f_1(0, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 \cdot \cdots \cdot dx_n$$

$\partial\mathbb{H}^n$ отождествляется с $\mathbb{R}^{n-1}$ при помощи отображения $L : x' \to (0, x')$

$$\int\limits_{\partial\mathbb{H}^n} \omega = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} L^*\omega = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_1(0, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f_1(0, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 \cdot \cdots \cdot dx_n$$

Следовательно, $\int\limits_V d\omega = \int\limits_{\mathbb{H}^n} d\omega = \int\limits_{\partial\mathbb{H}^n} \omega = \int\limits_{V\cap\partial\mathbb{H}^n} \omega$. ■

А теперь переходим к доказательству теоремы Стокса.

Доказательство: Фиксируем атлас $\mathcal{A}$ на M, соответствующий ориентации. В силу компактности носителя $supp\,(\omega)$ найдётся конечный набор карт $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^N$ из $\mathcal{A}$, покрывающих носитель $supp\,(\omega)$. Пусть $\{p_i\}_{i=1}^N$ — гладкое разбиение единицы, подчинённое покрытию $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^N$. Поскольку $\omega = \sum\limits_{i=1}^N p_i\omega$, $d\omega = \sum\limits_{i=1}^N d(p_i\omega)$, то в силу линейности интеграла от формы равенство (1) достаточно доказать для случая, когда $supp\,(\omega)$ лежит в одной карте (U, φ), пусть $V = \varphi(U)$. В этом случае (1) запишется так:

$$\int\limits_U d\omega = \int\limits_{\partial U} \omega$$

По лемме #6:

$$\int\limits_U d\omega = \int\limits_V \left(\varphi^{-1}\right)^* d\omega = \int\limits_V d\left((\varphi^{-1})^*\omega\right) = \int\limits_{V\cap\partial\mathbb{H}^n} \left(\varphi^{-1}\right)^* \omega = \int\limits_{U\cap\partial M} \omega$$

Последнее равенство получено по определению краевых точек. Теперь рассмотрим $I : \partial M \to M$, $I(p) = p$. Тогда:

$$\int\limits_{U\cap\partial M} = \int\limits_{\partial U} I^*\omega$$

Осталось заметить, что $I^*\omega = \omega|_{\partial M}$. ■

Лемма Пуанкаре

Def. Пусть M — гладкое многообразие, $\omega \in \Omega^k(M)$. Форма ω называется замкнутой, если $d\omega = 0$.

Def. Форма ω называется точной, если $\omega = d\alpha$ для некоторой формы $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$.

Note. В силу того, что $d \circ d = 0$, заключаем, что всякая точная форма является замкнутой.

Ограничимся областью в $\mathbb{R}^n$.

Def. Область $G \subset \mathbb{R}^n$ называется звёздной, если найдётся такая точка $a \in G$, что для любой точки $x \in G$ отрезок $[x, a]$ — подмножество G.

Note. Если G — звёздная область, то определено отображение $H : G \times [0, 1] \to G$ по правилу $H(x, t) = a + t(x - a)$.

Th. (лемма Пуанкаре) Пусть G — звёздная область в $\mathbb{R}^n$. Тогда всякая замкнутая форма $\omega \in \Omega^k(G)$ при $k \geqslant 1$ точна.

Доказательство не будет прямым, оно будет иметь «олимпиадный» стиль.

Доказательство: Пусть $(x_1, \ldots, x_n, t)$ — координаты в $G \times [0; 1]$. Всякая форма $\omega \in \Omega^k(G \times [0; 1])$ может быть записана в виде $\omega = \sum\limits_I a_I(x, t)\, dx^I + \sum\limits_J b_J(x, t)\, dt \wedge dx^J$, где a_I, b_J — гладкие функции на $G \times [0; 1]$, $I = (i_1, \ldots, i_k) \in \mathbb{I}_k$, $J = (j_1, \ldots, j_{k-1}) \in \mathbb{I}_{k-1}$. Рассмотрим линейное отображение $\Phi : \Omega^k(G \times [0; 1]) \to \Omega^{k-1}(G)$, соответствующее правилу $\Phi(\omega) = \sum\limits_J \left(\int\limits_0^1 b_J(x, t)\, dt\right) dx^J$. Почему коэффициенты остались гладкими? Вспоминаем теорему о дифференцировании интеграла по параметру, которая не была включена в программу экзамена второго семестра. Покажем, что справедливо следующее равенство:

$$d\Phi(\omega) + \Phi(d\omega) = i_1^*\omega - i_0^*\omega$$

Здесь $i_1,\ i_0 : G \times [0;1] \to G,\ i_1(x) = (x,1),\ i_0(x) = (x,0)$. Распишем слагаемые:

$$\Phi(\omega) = \sum_J \left(\int_0^1 b(x,t)\, dt \right) dx^J$$

$$d\Phi(\omega) = \sum_{J,i} \left(\int_0^1 \frac{\partial b_J}{\partial x_i}(x,t)\, dt \right) dx_i \wedge dx^J$$

$$d\omega = \frac{\partial a_I}{\partial x_i}(x,t)\, dx_i \wedge dx^I + \sum_I \frac{\partial a_I}{\partial t}(x,t)\, dt \wedge dx^I - \sum_{J,i} \frac{\partial b_J}{\partial x_i}(x,t)\, dt \wedge dx_i \wedge dx^J$$

$$\Phi(d\omega) = \sum_I \left(\int_0^1 \frac{\partial a_I}{\partial t}(x,t)\, dt \right) dx^I - \sum_{J,i} \left(\int_0^1 \frac{\partial b_J}{\partial x_i}(x,t)\, dt \right) dx_i \wedge dx^J$$

$$(d\Phi(\omega) + \Phi(d\omega))_p = \sum_I \left(\int_0^1 \frac{\partial a_I}{\partial t}(p,t)\, dt \right) dx^I = \sum_I (a_I(p,1) - a_I(p,0))\, dx^I = (i_1^*\omega - i_0^*\omega)_p$$

Применим полученное равенство. Пусть $\omega \in \Omega^k(G)$ замкнута. Рассмотрим отображение $H(x,t) = a + t(x-a)$, а также композиции $H \circ i_1 = id$, $H \circ i_0 = const$. Тогда $\omega = (H \circ i_1)^* \omega - (H \circ i_0)^* \omega = i_1^*(H^*\omega) - i_0^*(H^*\omega) = d\Phi(H^*\omega) + \Phi(d(H^*\omega))$. Но $d(H^*\omega) = H^* d\omega = 0$. Но тогда останется $d\Phi(H^*\omega)$, и $\omega = d\alpha$, где $\alpha = \Phi(H^*\omega)$. ■

Следствие. Лемма Пуанкаре остаётся справедливой, если G представляет собой $F(D)$ — диффеоморфный образ звёздной области.

Лекция 15 (14 декабря 2021)

Начнём с уточнения: из доказательства леммы о свойствах интегралах по многообразиям не следует, что при аддитивности интегралы в правой части существуют. Поэтому нужно потребовать такое существование.

Теория поля

Рассмотрим $\mathbb{R}^3_{xyz}$, где задан стандартный базис $e_1,\ e_2,\ e_3$, $G \subset \mathbb{R}^3$ — область. Рассмотрим вектор-функцию $\vec{F} : G \to \mathbb{R}^3$, $\vec{F} = P(x,y,z)\, e_1 + Q(x,y,z)\, e_2 + R(x,y,z)\, e_3$. $\vec{F}$ является векторным полем. По аналогии можно рассмотреть скалярную функцию $f : G \to \mathbb{R}$, f будет называться скалярным полем. $\mathfrak{X}(G)$ — множество гладких векторных полей на G.

Стандарные операции

Рассмотрим градиент:

$$grad\ f = \frac{\partial f}{\partial x} e_1 + \frac{\partial f}{\partial y} e_2 + \frac{\partial f}{\partial z} e_3$$

Рассмотрим ротор:

$$rot\ \vec{F} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) e_1 + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) e_2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) e_3$$

Рассмотрим дивергенцию:

$$div\ \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Рассмотрим оператор «набла»:

$$\bigtriangledown = \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Запишем операции из теории поля на языке дифференциальных форм. Потребуется «музыкальный» диффеоморфизм:

$$b\vec{F} = Pdx + Qdy + Rdz =: \omega$$

$$\#\omega = Pe_1 + Qe_2 + Re_3 =: \vec{F}$$

$$b \circ \# = \# \circ b = id$$

Для полноты картины потребуется ещё одна операция — звёздочка Ходжа:

$$* : A^k\left(\mathbb{R}^3\right) \to A^{3-k}\left(\mathbb{R}^3\right),\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$$

$$*\left(dx\right) = dy \wedge dz$$

$$*\left(dy\right) = dz \wedge dx$$

$$*\left(dz\right) = dx \wedge dy$$

$$*\left(*\right) = id$$

$$*\left(dx \wedge dy \wedge dz\right) = 1$$

Составим следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd} \Omega^0(G) \arrow[r, "d"] \arrow[d, equal] & \Omega^1(G) \arrow[r, "d"] & \Omega^2(G) \arrow[r, "d"] & \Omega^3(G) \\ C^\infty(G) \arrow[r, "grad"] & \mathfrak{X}(G) \arrow[r, "rot"] & \mathfrak{X}(G) \arrow[r, "div"] & C^\infty(G) \end{tikzcd}$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

$$grad\ f = \#df$$

$$d\left(b\vec{F}\right) = \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz\right) \wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz\right) \wedge dz = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial Y}\right) dx \wedge dy$$

$$rot\ \vec{F} = \# * d\left(b\vec{F}\right)$$

$$*b\vec{F} = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$$

$$d\left(*b\vec{F}\right) = \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right) \wedge dy \wedge dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz\right) \wedge dz \wedge dx + \left(\frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz\right) \wedge dx \wedge dy = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \wedge dx \wedge dy \wedge dz$$

$$div\ \vec{F} = *d\left(*b\vec{F}\right)$$

Всё это помогает ввести определения:

Def. Векторное поле $\vec{F}$ называется потенциальным в области G, если найдётся гладкое скалярное поле $f : G \to \mathbb{R}$, такое что $\vec{F} = grad\ f$.

Def. Векторное поле $\vec{F}$ называется соленоидальным в G, если найдётся гладкое векторное поле $\vec{a} : G \to \mathbb{R}^3$, такое что $\vec{F} = rot\ \vec{a}$.

Th. Пусть G — область, $\vec{F} \in \mathfrak{X}(G)$. Тогда:

1. Если $\vec{F}$ потенциально в G, то $rot\ \vec{F} = \vec{0}$. Если G — звёздная, то верно обратное;
2. Если $\vec{F}$ соленоидально в G, то $div\ \vec{F} = 0$. Если G — звёздная, то тоже верно обратное.

Доказательство: Докажем первый пункт.

$\Longrightarrow$ Если $\vec{F}$ потенциально, то $\vec{F} = grad\ f$. Запишем ротор:

$$rot\ grad\ f = \# * d\left(b\#df\right) = \# * d^2 f = 0$$

$\Longleftarrow$ Пусть G — звёздная область. Пусть $rot\ \vec{F} = \vec{0}$ в звёздной области G. Тогда $\# * d\left(b\vec{F}\right) = \vec{0}$, откуда $d\left(b\vec{F}\right) = \vec{0}$, то есть $b\vec{F}$ — замкнутая форма. Применим лемму Пуанкаре:

$$\exists f \in C^\infty(b)\left(b\vec{F} = df\right)$$
$$\vec{F} = \#df = grad\ f$$

Пункт 2 лектор оставил на самостоятельное доказательство в качестве задачи. ■

Частные случаи теоремы Стокса

О внешних векторах

Def. Пусть M — гладкое ориентированное многообразие с краем, $p \in \partial M$. Вектор v принадлежащий T_pM, $v = [\gamma]_p$, называется внешним, если существует карта (U, φ) на M, согласованная с ориентацией и содержащая точку p, такая что:

$$(\varphi \circ \gamma)'(0) = a, a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n,\ a_1 > 0$$

Note. Определение не зависит от выбора карты, согласованной с ориентацией и содержащей p.

Доказательство: Пусть b — координатное представление v в карте (V, ψ). Тогда:

$$\Phi = \psi \circ \varphi^{-1},\ \varphi(p) = \left(0, \tilde{x_0}\right)$$
$$b = D\Phi_{\varphi(p)}a \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & 0 & \ldots & 0 \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$
$$a_1 > 0 \Longrightarrow b_1 > 0$$

■

Def. Пусть M — гладкое n-мерное ориентированное подмногообразие $\mathbb{R}^n$ с краем. Вектор $n \in \mathbb{R}^n$ называется единичным вектором внешней (для ∂M) нормали к M в точке p, если:

1. $|n| = 1$
2. $n \in (T_p\partial M)^\perp$
3. Существует $t_0 > 0$, такое что для любого $t \in (0, t_0)$ выполняется, что $p + nt \notin M$.

Лемма. Пусть M — гладкое n-мерное подмногообразие $\mathbb{R}^n$ с краем, ориентированное стандартной системой координат, $p \in \partial M$, $n(p)$ — единичный вектор внешней нормали в точке p. Пусть $(y_2, \ldots, y_n)$ — координаты на ∂M в окрестности точки p. Тогда координаты $(y_2, \ldots, y_n)$ соответствуют согласованной ориентации ∂M тогда и только тогда, когда $\left(n, \frac{\partial}{\partial y_2}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}\Big|_p\right)$ — правый базис в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство: Достаточно доказать, что n — внешний вектор по отношению к стандартной ориентации $\mathbb{R}^n$. Лектор вновь вынес доказательство в качестве задачи. ■

Пусть (U, φ) — карта на M, согласованная с ориентацией M. Можно считать, что отображение φ является гладким в некоторой окрестности точки p. Тогда $\det D\varphi_p > 0$. Действительно, если рассмотреть $D\varphi^{-1}$, то столбцы этой матрицы соответствуют базисным векторам в T_pM, и ориентация стандартна. Тогда по теореме об обратной функции φ — локальный диффеоморфизм. Имеем:

$$\varphi\left(p+tn\right) = \varphi\left(p\right) + tD\varphi_p n + o\left(t\right) = x_0 + tb + o\left(t\right),\, t \to 0$$

Тогда $x_0 + tb$ не принадлежит $\mathbb{H}^n$. Следовательно, первая компонента b положительна, то есть b — внешний вектор.

Формула Грина

Пусть $M^2 \subset \mathbb{R}^2_{xy}$ — гладкое двумерное многообразие с краем, ориентированное стандартной системой координат. Пусть $M^2 \subset G \subset \mathbb{R}^2$, G — область, $\vec{F} : G \to \mathbb{R}^2$, $\vec{F} = (P, Q)$ — гладкое векторное поле. Тогда:

$$\int\limits_{\partial M^2} Pdx + Qdy = \int\limits_{M^2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

Формула Гаусса — Остроградского

Пусть $M^3 \subset \mathbb{R}^3_{xyz}$ — гладкое трёхмерное многообразие с краем, ориентированное стандартной системой координат. Пусть $M^3 \subset G$, $\vec{F} : G \to \mathbb{R}^3$ — гладкое векторное поле, $\vec{F} = (P, Q, R)$. Тогда:

$$\int\limits_{\partial M} \left(\vec{F}, \vec{n}\right) = \int\limits_{\partial M} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy = \int\limits_{M} div\ \vec{F} dx \wedge dy \wedge dz$$

Здесь $\vec{n}$ — вектор внешней нормали. Ориентации согласованы.

Формула Стокса

Пусть $S \subset \mathbb{R}^3$ — гладкое двумерное подмногообразие с краем. Пусть $S \subset G$, G — область, $\vec{F} : G \to \mathbb{R}^3$ — гладкое векторное поле. Тогда:

$$\int\limits_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{S} \left(rot\ \vec{F}, n\right) dS$$

Здесь n — направленное поле нормалей на S.

Note. Ориентации S и ∂S согласованы тогда и только тогда, когда (τ, ν, n) — правый базис, где:

$$\tau = \left(\varphi^{-1}\right)'_v$$

$$\nu = -\left(\varphi^{-1}\right)'_u$$

$$n = \frac{\left(\varphi^{-1}\right)'_u \times \left(\varphi^{-1}\right)'_v}{|(\varphi^{-1})'_u \times (\varphi^{-1})'_v|}$$

Существование гладкого разбиения единицы

Начнём с примера:

Пример: Существует функция $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$, такая что:

1. $\theta|_{\{|x|\leqslant 1\}} \equiv 1$
2. $\theta|_{\{|x|\geqslant 2\}} \equiv 2$
3. $0 \leqslant \theta \leqslant 1$

Доказательство: Рассмотрим следующие функции:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, x > 0 \\ 0, x \leqslant 0 \end{cases}$$

$$f \in C^\infty(\mathbb{R})$$

$$g(x) = \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}$$

$$g \in C^\infty(\mathbb{R})$$

$$\theta(x) = g(x+2)\,g(2-x)$$

■

Лемма. Пусть M — гладкое многообразие (с краем или без), (U, φ) — карта на M, содержащая точку p. Тогда существует окрестность точки p $W \subset U$ и функция $\beta \in C^\infty(M)$ со следующими свойствами:

1. $\beta|_W \equiv 1$
2. $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ на M
3. $supp(\beta) \subset U$

Доказательство: Введём обозначение: $V = \varphi(U)$. Примем $a = \varphi(p)$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$. Существует замкнутый куб с центром в точке a $\overline{Q_{2\delta}}(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i - a_i| \leqslant 2\delta\} \subset V$. Рассмотрим функцию $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$h(x) = \theta\left(\frac{x_1-a_1}{\delta}\right) \cdot \ldots \cdot \theta\left(\frac{x_n-a_n}{\delta}\right)$$

Рассмотрим следующее:

$$W = \varphi^{-1}\left(Q_\delta\left(a\right)\right), \text{ где } Q_\delta\left(a\right) \text{ — открытый куб}$$
$$\beta\left(p\right) = \begin{cases} h \circ \varphi\left(p\right), p \in U \\ 0, p \notin U \end{cases}$$
$$supp\left(\beta\right) \subset \varphi^{-1}\left(\overline{Q_{2\delta}}(a)\right)$$

Лемма доказана в предположении, что многообразие M без края. Если M имеет край, то вместо V рассмотрим $\mathbb{H}^n \cap V$ и повторяем аналогичные рассуждения. ■

Th. (о существовании гладкого разбиения единицы) Пусть $K \subset M$ — компакт, M — гладкое многообразие, пусть $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^N$ — конечный набор карт, покрывающих K. Тогда существует $\{\rho_i\}_{i=1}^N$, $\rho_i \in C^\infty\left(M\right)$, что:

1. $0 \leqslant \rho_i \leqslant 1$ для любого i на M;
2. $supp\left(\rho_i\right) \subset U_i$;
3. $\sum\limits_{i=1}^N \rho_i \equiv 1$ на K.

Доказательство: Для любой точки $p \in K$ найдётся $i_p \in \{1, \ldots, N\}$, что $p \in U_{i_p}$. Тогда по лемме найдутся окрестность W_p точки p в U_{i_p} и гладкая функция $\beta_p \in C^\infty\left(M\right)$, удовлетворяющие каждому из трёх пунктов. Из покрытия $\{W_p\}_{p\in K}$ выделим конечное подпокрытие $K \subset \bigcup\limits_{j=1}^m W_{p_j}$. Отметим, что:

$$\forall\ j \in \{1, \ldots, m\}\ \exists\ i \in \{1, \ldots, N\} : supp\left(\beta_{p_j}\right) \subset U_i\ (1)$$
$$\forall\ q \in K\ \exists\ j \in \{1, \ldots, m\} : \beta_{p_j}\left(q\right) = 1\ (2)$$

Положим $\eta_1 = \beta_{p_1}$, $\eta_2 = \left(1 - \beta_{p_1}\right)\beta_{p_2}$, $\ldots$, $\eta_m = \left(1 - \beta_{p_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \beta_{p_{m-1}}\right) \cdot \beta_{p_m}$. Тогда $supp\left(\eta_j\right) \subset supp\left(\beta_{p_j}\right)$, $j = 1, \ldots, m$. Вынесем общий множитель:

$$1 - \left(\eta_1 + \cdots + \eta_m\right) = \left(1 - \beta_{p_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \beta_{p_m}\right)$$

Одна из этих скобок тождественно равна нулю, и по (2) $\sum\limits_{j=1}^m \eta_j \equiv 1$ на K.

Для любого $i \in \{1, \ldots, N\}$ положим $J_i = \{j \in \{1, \ldots, m\} : supp\left(\eta_j\right) \subset U_i \wedge supp\left(\eta_j\right) \not\subset U_k, k = \overline{1, i-1}\}$. Свойства множества:

$$J_{i_1} \cap J_{i_2} = \emptyset \text{ при } i_1 \neq i_2$$
$$\bigcup_{i=1}^N J_i = \{1, \ldots, m\} \text{ в силу (1)}$$

Определим $p_i = \sum\limits_{j \in J_i} \eta_j$. Имеем $supp\,(\rho_i) \subset \bigcup\limits_{j \in J_i} supp\,(\eta_j) \subset U_i$. Кроме того:

$$\sum_{i=1}^{N} \rho_i = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \in J_i} \eta_j = \sum_{j=1}^{m} \eta_j \equiv 1 \text{ на } K$$

■