Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

Д И Ф Ф Е Р Е Н Ц И А Л Ь Н Ы Е У Р А В Н Е Н И Я

III СЕМЕСТР

Лектор: *Жуковский Сергей Евгеньевич*

h\nu

Автор: *Лизюра Дмитрий*

Проект на Github

осень 2023

Содержание

1 Введение **3**
1.1 Простейшие типы дифференциальных уравнений 3
1.1.1 Уравнения с разделяющимися переменными 3
1.1.2 Линейные уравнения I порядка 4
1.1.3 Уравнение Бернулли 6
1.1.4 Уравнение Риккати 6
1.2 Уравнения в дифференциалах 6
1.2.1 Однородные уравнения 6
1.2.2 Уравнения в полных дифференциалах 7
1.2.3 Интегрирующий множитель 7

2 Методы понижения порядка ОДУ **8**

3 Задача Коши **9**
3.1 Теоремы о существовании и о единственности решения 9

4 Теоремы о продолжении решений **13**

5 Уравнения, не разрешённые относительно производной **15**

6 Некоторые следствия теорем о существовании решений **17**

7 Линейные однородные системы ОДУ **18**

8 Линейные неоднородные системы ОДУ.
Линейные ОДУ высших порядков **21**
8.1 Линейные неоднородные системы ОДУ 21
8.1.1 Метод вариации постоянных 21
8.2 Линейные однородные ОДУ 22

9 Линейные ОДУ с постоянными коэффициентами **25**
9.1 Линейные однородные ОДУ с постоянными коэффициентами 25
9.2 Линейные неоднородные ОДУ с постоянными коэффициентами 26
9.3 Вещественные решения 27

10 Системы линейных ОДУ с постоянными коэффициентами **28**
10.1 Комплексные однородные системы 28
10.2 Вещественные однородные системы 29

10.3 Компексные неоднородные системы 30
10.4 Вещественные неоднородные системы с правой частью специального вида . 31

11 Матричная экспонента **31**
11.1 Определение 31
11.2 Свойства 32

12 Теорема Штурма **34**
12.1 Свойства 34
12.2 Теорема Штурма 35

13 Зависимость решения задачи Коши от параметра **37**

14 Линейные уравнения, уравнение Эйлера **38**

1 Введение

Определение. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{k+1 \text{ раз}}$, $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$. *Обыкновенным дифференциальным уравнением (или системой) k-ого порядка* (ОДУ) называется уравнение

$$F(t, x, x', \dots, x^{(k)}) = 0.$$

Его *решением* называется функция $x : I \to \mathbb{R}^n$, где:

- $I \subset \mathbb{R}$ — интервал.
- $x \in C^k(I, \mathbb{R}^n)$ — k раз непрерывно дифференцируемая функция.
- Для любого $t \in I$ выполнено $(t, x(t), \dots, x^{(k)}(t)) \in \Omega$, то есть попадает в область определения F.
- $F(t, x(t), \dots, x^{(k)}(t)) \equiv 0$ на I.

Как правило, рассматривать совсем общие уравнения неинтерестно, так как они слишком сложные, поэтому мы обычно будем рассматривать частный случай.

Определение. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{k \text{ раз}}$, $F : \Gamma \to \mathbb{R}^n$. *Нормальным ОДУ* (или системой) k-ого порядка называется уравнение

$$x^{(k)} = F(t, x, x', \dots, x^{(k-1)}).$$

Примеры:

1. $x' = x$, решение — $x(t) = ce^t$ для всех $c \in \mathbb{R}$ и интервалов $I \subset \mathbb{R}$. Решением является и функция и область определения.
2. $t^2 + x^2 + (x')^2 = 0$. Решений нет, так как решение должно быть определено на *интервале*, то есть только в нуле определить нельзя.
3. $x' = 1 + x^2$. Понятно, что $x(t) = \operatorname{tg}(t)$ подходит, но что с областью определения? Нам подходят $t \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, откуда получается, что решения — это все функции, определённые на подынтервалах этого множества.

1.1 Простейшие типы дифференциальных уравнений

1.1.1 Уравнения с разделяющимися переменными

Пусть I, J — интервалы, $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции.

Определение. *Уравнение с разделяющимися переменными* — это уравнение вида $x' = f(t)g(x)$.

Рассмотрим два случая.

Второй — $g(\cdot)$ не обнуляется. Зафиксируем какое-то решение $x(\cdot)$. Заметим, что получится тождество $x'(t) \equiv f(t)g(x)$. Тогда можно разделить на $g(x(t))$:

$$\frac{x'(t)}{g(x(t))} \equiv f(t)$$

Проинтегрируем обе части. Здесь и далее под интегралом подразумевается какая-то фиксированная первообразная.

$$\int \frac{x'(t)}{g(x(t))}dt \equiv \int f(t)dt + C$$

Внесём x под дифференциал.

$$\int \frac{dx}{g(x(t))} \equiv \int f(t)dt + C$$

Положим $G(t) = \int \frac{dx}{g(x)}$ и $F(t) = \int f(t)dt$, тогда получаем

$$G(x(t)) \equiv F(t) + C$$

Теперь заметим, что $g(\cdot)$ — это непрерывная функция на интервале, которая не обнуляется. Иными словами, она строго больше нуля или строго меньше, а это значит, что $G(\cdot)$ строго возрастает или строго убывает, то есть к ней применима теорема об обратной функции.

$$x(t) \equiv G^{-1}(F(t) + C)$$

Так как везде были тождества, сие уравнение эквивалентно исходному. Важно только помнить, что G^{-1} определена на $G(J)$, так что подходят не совсем все пары (t, C).

Но что делать со случаем, когда $g(\cdot)$ всё-таки обнуляется? Тут возникают всякие неприятности, как минимум, если для какого-то $\overline{x} \in J$ выполнено $g(\overline{x}) = 0$, то $x(t) \equiv \overline{x}$ — решение для всех $t \in I$. Но можно пойти дальше.

Упражнение. Пусть существует $\overline{x} \in J$, такое что $g(\overline{x}) = 0$, а при $x > \overline{x}$ выполнено $g(x) \neq 0$. Пусть также найдётся $\overline{t} \in I$, такое что $f(\overline{t}) \neq 0$, а интеграл $\int_{\overline{x}}^{x} \frac{d\xi}{g(\xi)}$ сходится при $x > \overline{x}$. Тогда найдётся функция $y(t)$ для $t > \overline{t}$ и функция

$$\widehat{x}(t) = \begin{cases} \overline{x}, & t \leqslant \overline{t} \\ y(t), & t > \overline{t} \end{cases},$$

являющаяся решением.

Что это всё значит: мы нашли тривиальное решение $x(t) \equiv \overline{x}$, потом нашли решение уравнения $y(\cdot)$ методом выше (так как там уже $g(\cdot)$ не обнуляется), а теперь взяли, склеили их и получили новое решение. В виде картинки:

1.1.2 Линейные уравнения I порядка

Пусть задан интервал $I \subset \mathbb{R}$ и две непрерывные функции $a, b : I \to \mathbb{R}$.

Определение. Линейное уравнение первого порядка — уравнение вида $x' + a(t)x = b(t)$. Если $b(t) \equiv 0$, то уравнение называется *однородным*, иначе — *неоднородным*.

Однородное уравнение — это уравнение с разделяющей переменной. Его мы уже умеем решать:

$$\frac{dx}{dt} = -a(t)x$$

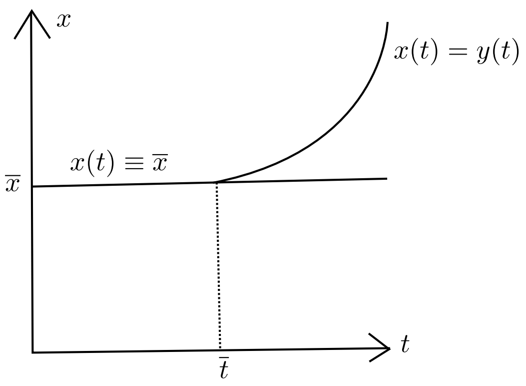

Рис. 1: Третье решение.

При $x(t) \equiv 0$ верно, далее рассматриваем на интервалах, на которых не обнуляется.

$$\frac{dx}{x} = -a(t)dt$$

$$\ln(|x|) = -\int a(t)dt + C$$

$$|x(t)| = \widetilde{C} \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)$$

$$x(t) = C \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right), t \in I$$

Здесь C несколько раз переопределялась, конкретные переходы должны быть понятны.

Для решения неоднородных уравнений можно использовать *метод вариации произвольной постоянной*. Пусть $C = C(t)$, тогда

$$x(t) = C(t) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right), t \in I$$

Подставим в исходное неоднородное уравнение:

$$C'(t) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right) - C(t) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right) a(t) + a(t)C \exp(\dots) = b(t)$$

$$C' = b(t) \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)$$

$$C(t) = \int_{t_0}^{t} b(s) \exp\left(\int_{t_0}^{s} a(\xi)d\xi\right) ds + C$$

По итогу

$$x(t) = \left(\int_{t_0}^{t} b(s) \exp\left(\int_{t_0}^{s} a(\xi)d\xi\right) ds + C\right) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right).$$

При желании эту формулу можно запомнить, но лучше просто знать метод и применять его.

1.1.3 Уравнение Бернулли

Пусть задан интервал $I \subset \mathbb{R}$, константа $\alpha \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ и две непрерывные функции $a, b : I \to \mathbb{R}$. Рассмотрим *уравнение Бернулли*:

$$x' = a(t)x + b(t)x^\alpha.$$

Для решения разделим на x^α:

$$x^{-\alpha}x' = x^{1-\alpha}a(t) + b(t)$$

Замена: $y(t) = x(t)^{1-\alpha}$, тогда уравнение выше перепишется в виде $y'(t) = (1-\alpha)x^{-\alpha}x'(t)$ или же

$$\frac{y'}{1-\alpha} = a(t)y + b(t)$$

Получили линейное уравнение первого порядка.

1.1.4 Уравнение Риккати

Пусть $a, b, c : I \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции, рассмотрим уравнение

$$x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t).$$

Пусть с небес нам дали одно из его решений $y(\cdot)$. Тогда можно сделать замену $z(t) = x(t) - y(t)$, тогда уравнение перепишется в виде

$$z' + y' = az^2 + 2azy + ay^2 + bz + by + c =$$

(По условию $ay^2 + by + c = y'$)

$$= az^2 + 2azy + bz + y'.$$

По итогу получается

$$z' = az^2 + (2ay + b)z$$

— уравнение Бернулли.

1.2 Уравнения в дифференциалах

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $M, N : \Omega \to \mathbb{R}$. Рассмотрим уравнение

$$M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0.$$

Здесь решением может является и функция $x = x(t)$, и функция $t = t(x)$, удовлетворяющая всем условиям.

1.2.1 Однородные уравнения

Пусть найдётся $p \geqslant 0$, такое что для любого $k > 0$ выполнено $M(kt, kx) \equiv k^p(t,x)$ и $N(kt, kx) = k^pN(t,x)$. Тогда уравнение будет называться *однородным*, и решается оно заменой $x(t) = t \cdot z(t)$. При $t > 0$ уравнение перепишется в виде

$$t \cdot z' + z = -\frac{M(1, z)}{N(1, z)},$$

а при $t < 0$ будет

$$t \cdot z' + z = -\frac{M(-1, -z)}{N(-1, -z)}.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными.

Замечание. Да, нужно рассматривать два случая отдельно, просто выносить $k < 0$ не получится. Например, для $M(t, x) = |x|$ отрицательные k не вынесутся, а с положительными всё в порядке.

1.2.2 Уравнения в полных дифференциалах

Пусть M и N непрерывны, Ω открыто и существует непрерывно дифференцируемая функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$, такая что $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \equiv M(t, x)$ и $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \equiv N(t, x)$. Тогда уравнение (1) будет называться *уравнением в полных дифференциалах*.

Теорема. (Из матанализа, б/д) Пусть множество Ω выпукло и $\frac{\partial M}{\partial x}(t, x) \equiv \frac{\partial N}{\partial t}(t, x)$. Тогда найдётся дважды непрерывно дифференцируемая функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$, такая что $\frac{\partial f}{\partial t} = M$ и $\frac{\partial f}{\partial x} = N$.

Утверждение. Уравнение в полных дифференциалах эквивалентно уравнению $f(t, x) = C$, где C — константа.

Доказательство. Пусть $x(\cdot)$ — решение уравнения (1). Запишем цепочку эквивалентных утверждений:

$$x'(t) \equiv -\frac{M(t, x(t))}{N(t, x(t))}$$

$$N(t, x(t))x' + M(t, x(t)) \equiv 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial t}(t, x(t)) \equiv 0$$

(Заметим, что это производная композиции)

$$\frac{d}{dt}(f(t, x(t))) \equiv 0$$

$$f(t, x(t)) = C.$$

□

1.2.3 Интегрирующий множитель

Пусть $M, N : \Omega \to \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемые функции, Ω — односвязная область, уравнение то же. Уравнение в дифференциалах можно свести к уравнению в полных дифференциалах умножением на специальную функцию $\mu(t, x)$, правда, новое уравнение не обязательно будет эквивалентно исходному.

Определение. Функция $\mu : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *интегрирующим множителем*, если $\mu \neq 0$ на Ω и уравнение $\mu M dt + \mu N dx = 0$ является уравнением в полных дифференциалах.

Общего способа подбора интегрирующего множителя нет (как правило, это не проще, чем решить само уравнение), и здесь будет рассмотрен только самый простой случай.

Утверждение. Если $M(t,x) \neq 0$ при всех $(t,x) \in \Omega$ и $(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t})\frac{1}{N}$ зависит только от t, то существует интегрирующий множитель μ, зависящий только от t и такой, что $\mu(t) \neq 0$ при всех t.

Доказательство. Чтобы уравнение было уравнением в полных дифференциалах, дифференциалы должны совпадать (по теореме выше). То есть

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(t)M(t,x)\right) \equiv \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu(t)N(t,x)\right)$$

Раскроем производные:

$$\mu\frac{\partial M}{\partial x} \equiv \mu_t' N + \mu\frac{\partial N}{\partial t}$$

$$\mu_t' = \frac{\mu}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}\right)$$

По условию дробь зависит только от t, откуда получается уравнение с разделяющимися переменными для функции $\mu(t)$, и её можно найти стандартными техниками.

$\square$

2 Методы понижения порядка ОДУ

(Не знаю, откуда взялся этот параграф в конспекте, но на всякий случай оставлю его)

Пусть у нас есть ОДУ $F(t,x,x',x'',\dots,x^{(n)}) = 0$ (1). Рассмотрим случаи:

1) $F(t,x^{(k)},\dots,x^{(n)}) = 0$. Сделаем замену $y(t) = x^{(k)}$, порядок понизился.

2) $F(x,x',\dots,x^{(n)}) = 0$. Введём новую функцию $p(x) = x'$, тогда $x'' = p_x'(x)x' = p_x'p$. Исходное уравнение можно записать в виде $F(x,p,p_x'p,\dots) = 0$. Теперь решаем уравнение относительно p и x.

3) $F(y,x,x',\dots,x^{(n)}) = 0$ и при фиксированном t функция $F(t,\cdot)$ *положительно однородная*, то есть

$$F(t,\lambda x,\lambda x',\dots,\lambda x^{(n)}) = 0 \iff F(t,x,x',\dots,x^{(n)}) = 0 \;\forall \lambda > 0, x, x', \dots$$

Пример положительно однородной функции: $t(x')^2 + (x'')^2 + e^t x^2 = 0$. Решается заменой: $x' = xz$, где z — новая функция от t. Тогда $x'' = x'z + xz' = x(z^2 + z')$. Подставляя в исходное уравнение, имеем $F(t,x,xz,x(z^2+z'),\dots) = 0$. Вспоминая про положительную однородность, мы можем избавиться от x, рассмотрев случаи, когда $x > 0$ и $x < 0$:

$$\left[\begin{array}{l} F(x,1,z,z^2+z',\dots) = 0 \\ F(x,-1,-z,-z^2-z',\dots) = 0. \end{array}\right.$$

Эта система **не эквивалентна** исходной, у неё могут быть новые решения.

3 Задача Коши

Определение. Пусть у нас есть нормальная система ОДУ, а также $t_0 \in \mathbb{R}$ и $x_0, x_0^1, \ldots, x_0^{k-1} \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} F(t, x, x', \ldots, x^{(k)}) = 0 \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_0^1 \\ \vdots \\ x^{(k-1)}(t_0) = x_0^{k-1} \end{cases}.$$

Соотношения про значения в точке t_0 принято называть *начальным условием*. Важно, что в задаче Коши k-ого порядка должно быть ровно k начальных условий. Решение задачи Коши — решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию. На данный момент у дифференциального уравнения есть одно решение с точностью до области определения. Чтобы убрать и эту неоднозначность, введём следующее

Определение. Функция $x : I \to \mathbb{R}^n$ называется *непродолжаемым (глобальным)* решением системы, если для любого решения $\tilde{x} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$, такого что $I \subset \tilde{I}$ и $x \equiv \tilde{x}$ на I, выполняется $I = \tilde{I}$.

Дальше нас будут в основном интересовать непродолжаемые решения.

3.1 Теоремы о существовании и о единственности решения

В этом пункте мы будем рассматривать только нормальные задачи Коши первого порядка. Напоминание:

Определение. Пусть X, Y — метрические пространства, $\beta \geqslant 0$, $g : X \to Y$. Отображение g называется *липшицевым* (с константной Липшица β), если выполняется неравенство

$$\rho_Y(g(x), g(u)) \leqslant \beta \rho_X(x, u)$$

Теорема. (О существовании и единственности решения задачи Коши) Пусть $f : \Gamma \to \mathbb{R}^n$, $(t_0, x_0) \in \Gamma$ — непрерывное отображение. Пусть $r > 0$, такое что $B := B((t_0, x_0), r) \subset \Gamma$ (следует из открытости). Положим $m := \sup_{(t,x)\in B} |f(t, x)|$ и $d := \frac{r}{\sqrt{1+m^2}}$. Пусть существуют $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x)$ для всех $(t, x) \in \Gamma$ и все $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ непрерывны на Γ. Тогда задача Коши имеет решение $x : (t_0 - d, t_0 + d) \to \mathbb{R}^n$, такое что для любого другого решения $\widehat{x} : J \to \mathbb{R}^n$ верно, что $x \equiv \widehat{x}$ на $(t_0 - d, t_0 + d) \cap J$.

Для доказательства нам потребуется несколько вспомогательных фактов.

Теорема. Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство, и существует такое отображение $\Phi : X \to X$, что $f \circ \Phi$ — липшицево с $\beta \in [0, 1)$. Тогда у Φ существует единственная стационарная точка.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, такую что $x_{n+1} = \Phi(x_n)$. Будем доказывать, что последовательность фундаментальна, и поэтому она сходится в силу полноты пространства. Оценим $\rho(x_n, x_{n+k})$. По неравенству треугольника

$$\rho(x_n, x_{n+k}) \leqslant \sum_{i=n}^{n+k-1} \rho(x_i, x_{i+1}) = \sum_{i=n}^{n+k-1} \rho(\Phi^i(x_0), \Phi^{i+1}(x_0)) =$$

$$= \sum_{i=n}^{n+k-1} \rho(\Phi^i(x_0), \Phi^i(\Phi(x_0))) \leqslant$$

Применим определение сжимающего отображения:

$$\leqslant \sum_{i=n}^{n+k-1} \beta^i \rho(x_0, \Phi(x_0)) \leqslant \sum_{i=n}^{\infty} \beta^i \rho(x_0, \Phi(x_0)) = \frac{\beta^n}{1-\beta} \rho(x_0, \Phi(x_0)).$$

Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна, и в силу полноты пространства $\exists x \in X : x_n \to x$. Докажем, что эта точка x и есть искомая неподвижная.

$$\rho(x, \Phi(x)) \leqslant \rho(x, x_n) + \rho(x_n, \Phi(x_n)) + \rho(\Phi(x_n), \Phi(x)) \leqslant$$

$$\leqslant \rho(x, x_n) + \frac{\beta^n}{1-\beta} \rho(x_0, \Phi(x_0)) + \beta\rho(x_n, x).$$

Заметим, что левая часть не зависит от n, а правая стремится к нулю при росте n, поэтому $\rho(x, \Phi(x))$ можно сделать меньше любого $\varepsilon > 0$.

Докажем единственность. Пусть $\xi = \Phi(\xi)$. Тогда

$$\rho(x, \xi) = \rho(\Phi(x), \Phi(\xi)) \leqslant \beta\rho(x, \xi).$$

Так как $\beta < 1$, это возможно только при $x = \xi$.

$\square$

Пример. Как найти решение уравнения $x = \cos(x)$, используя только калькулятор с тригонометрическими функциями? Можно просто применять косинус к нулю, пока не сойдётся, так как $X = [0, \frac{\pi}{2} - \varepsilon]$ является подходящим под условие теоремы полным метрическим пространством.

Следствие. Пусть (X, ρ) — полное метрические пространство, $\Phi : X \to X$ — произвольное отображение, но $\exists N$, такое что Φ^N сжимающее. Тогда у Φ существует единственная неподвижная точка.

Доказательство. Существование. Возьмём единственный x, такой что $x = \Phi^N(x)$. Тогда $\Phi(x) = \Phi^N(\Phi(x))$. Следовательно, $\Phi(x)$ — неподвижная точка Φ^N, то есть $x = \Phi(x)$.

Единственность. Пусть ξ — неподвижная точка Φ, то есть $\xi = \Phi(x)$. Применим Φ $N-1$ раз: $\xi = \Phi^N(\xi)$, то есть $\xi = x$.

$\square$

Утверждение. Пусть $T \subset \mathbb{R}$, $K \subset \mathbb{R}^n$ — компакт, $K \neq \varnothing$. $C(T, K)$ — пространство непрерывных функций, действующих из T в K с метрикой $\rho(x_1, x_2) = \sup_{t \in T} |x_1(t) - x_2(t)|$, и оно является полным.

Утверждение. $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}, x \in \mathbb{R}^n$ выполнено $\|Ax\| \leqslant \|A\| \cdot |x|$, было доказано в прошлом семестре.

Утверждение. Пусть Γ открыто, f — непрерывное отображение, частные производные $\frac{\partial f_i}{x_j}$ существуют. Тогда найдётся $l \geqslant 0$, такой что для всех $(t, x_1), (t, x_2) \in B$ выполнено $|f(t, x_1) - f(t, x_2) \leqslant l|x_1 - x_2|$ (отображение липшицево).

Доказательство. Зафиксируем t, x_1, x_2. Положим $a(s) := f(t, x_1 + s(x_2 - x_1))$ для $s \in [0, 1]$. Тогда

$$|f(t, x_2) - f(t, x_1)| = |a(1) - a(0)| = \left| \int_0^1 a'(s) ds \right| =$$

$$= \left| \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_1 + s(x_2 - x_1))(x_2 - x_1) ds \right| \leqslant$$

(по утверждению про норму матрицы)

$$\leqslant \left| \int_0^1 \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_1 + s(x_2 - x_1)) \right\| \cdot |x_2 - x_1| ds \right| =$$

$$= \left| \int_0^1 \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_1 + s(x_2 - x_1)) \right\| ds \right| \cdot |x_2 - x_1| \leqslant l |x_2 - x_1|,$$

где $l = \max_{(\tau, x) \in B} \|\frac{\partial f}{\partial x}(\tau, x)\|$, он достигается в силу замкнутости шара B.

$\square$

Доказательство главной теоремы. Возьмём произвольный интервал T, такой что $t_0 \in T \subset (t_0 - d, t_0 + d)$. Положим $R := \sqrt{r^2 - d^2}$ (можно проверить, что выражение под корнем положительное), $X := C(R, B(x_0, R))$ — полное метрическое пространство.

Замечание: $\forall x \in X, t \in T$ $(t, x(t)) \in B$, так как

$$|t - t_0|^2 + |x(t) - x_0|^2 \leqslant d^2 + R^2 = r^2.$$

Зададим отображение $\Phi : X \to X$ так, что $\Phi(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$. Необходимо проверить корректность определения, ибо $\Phi(x)$ не обязательно лежит в X, то есть $\Phi(x)(t)$ должно лежать в $B(x_0, R)$:

$$|\Phi(x)(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right| \leqslant \left| \int_{t_0}^t |f(s, x(s))| ds \right| \leqslant$$

(два модуля нужны, так как t_0 может превосходить t)

$$\leqslant \left| \int_{t_0}^t m ds \right| = m|t - t_0| \leqslant md = \frac{rm}{\sqrt{1 + m^2}} = R.$$

Последнее равенство получено подстановкой d в определение R. Докажем, что

$$|\Phi^N(x_1)(t) - \Phi^N(x_2)(t)| \leqslant \frac{(l|t - t_0|)^N}{N!} \rho(x_1, x_2)$$

для всех $x_1, x_2 \in X, N \in \mathbb{N}, t \in T$. Здесь l берётся из утверждения про липшицевость. Имеем

$$|\Phi^N(x_1)(t) - \Phi^N(x_2)(t)| = \left| \int_{t_0}^t \big(f(x, \Phi^{N-1}(x_1)(s)) - f(s, \Phi^{N-1}(x_2)(s) \big) ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant l \left| \int_{t_0}^t |\Phi^{N-1}(x_1)(s) - \Phi^{N-1}(x_2)(s) ds| \right|$$

Посмотрим на первые несколько N. При $N = 1$:

$$\left| \Phi^1(x_1)(t) - \Phi^1(x_2)(t) \right| \leqslant l \left| \int_{t_0}^t |x_1(s) - x_2(s)| ds \right| \leqslant$$

(по определению расстояния между функциями)

$$\leqslant l \left| \int_{t_0}^{t} \rho(x_1, x_2) ds \right| = l\rho(x_1, x_2)|t - t_0|.$$

При $N = 2$:

$$\left|\Phi^2(x_1)(t) - \Phi^2(x_2)(t)\right| \leqslant l \left| \int_{t_0}^{t} |\Phi^1(x_1)(s) - \Phi^1(x_2(s)|ds \right| \leqslant$$

(применим доказанное в предыдущем пункте)

$$\leqslant l^2\rho(x_1, x_2) \left| \int_{t_0 t}^{t} |s - t_0| ds \right| = \frac{l^2}{2!}|t - t_0|^2 \rho(x_1, x_2).$$

При $N = 3$:

$$\left|\Phi^3(x_1)(t) - \Phi^3(x_2)(t)\right| \leqslant l \left| \int_{t_0}^{t} |\Phi^2(x_1)(s) - \Phi^2(x_2(s)|ds \right| \leqslant$$

(применим доказанное)

$$\leqslant \frac{l^3}{2!}\rho(x_1, x_2) \left| \int_{t_0}^{t} |s - t_0|^2 ds \right| = \frac{l^3}{3!}|t - t_0|^3 \rho(x_1, x_2).$$

Аналогично можно доказать и для всех N, формально нужно применить математическую индукцию.

Из доказанной формулы получаем, что для всех $x_1, x_2 \in X$

$$\rho(\Phi^N(x_1), \Phi^N(x_2)) = \sup_{t\in T} \left|\Phi^N(x_1)(t) - \Phi^N(x_2)(t)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{l^N}{N!} \sup_{t\in T} |t - t_0|^N \rho(x_1, x_2) \leqslant \frac{l^N d^N}{N!}\rho(x_1, x_2).$$

Последний переход сделан из соображения, что $T \subset B(t_0, d)$. Так как последнее выражение стремится к нулю при увеличении N, найдётся N, такое что $\frac{l^N d^N}{N!} < 1$, и, значит, Φ^N — сжимающее отображение. По следствию из принципа сжимающих отображений существует единственная неподвижная точка x у $\Phi(\cdot)$. То есть для всех $t \in T$

$$x = \Phi(x) \iff x(t) \equiv \Phi(x)(t) \iff x(t) \equiv x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) ds \iff$$

$$\iff \begin{cases} x'(t) \equiv f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Последний переход получен дифференцированием, теоремы про дифференцирование интегралов будут позже в матанализе. Следовательно, x — решение задачи Коши, и оно единственно на любом интервале $T \subset (t_0 - d, t_0 + d)$.

Докажем вторую часть теоремы. Возьмём произвольное решение $\widehat{x} : J \to \mathbb{R}^n$ и положим $T := (t_0 - d, t_0 + d) \cap J$. Из доказанного следует, что $x(t) \equiv \widehat{x}(t)$ на T, что и требовалось доказать.

$\square$

4 Теоремы о продолжении решений

Пусть дано открытое множество $\Gamma \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ и отображение $f : \mathrm{cl}(\Gamma) \to \mathbb{R}^n$ (замыкание Γ), $(t_0, x_0) \in \Gamma$ — решение задачи Коши.

Теорема. Пусть $\mathrm{cl}(\Gamma)$ — компакт, f непрерывно, существуют непрерывные $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ на Γ. Тогда существует решение задачи Коши $x : (a, b) \to \mathbb{R}^n$, такое что $(a, x(a+0)), (b, x(b-0)) \in \partial\Gamma$ (нули — это пределы справа/слева, $\partial\Gamma$ — граница Γ).

Иными словами, решение можно продолжить до границ области определения функции.

Доказательство. Поскольку $\mathrm{cl}(\Gamma)$ — компакт и f непрерывно, функция f ограничена, то есть $\exists M \geqslant 0 : |f(t, x)| \leqslant M$. Положим $r_0 := \rho((t_0, x_0), \partial\Gamma)$ — инфимум расстояния от точки до точки во множестве, $d_0 := \frac{r_0}{\sqrt{1+M^2}}$. Тогда по теореме 2 существует решение задачи Коши $\varphi_1 : (t_0 - d_0, t_0 + d_0) \to \mathbb{R}^n$. Построим решение $x(t)$. Определим $x(t) := \varphi_1(t)$ при $t \in (t_0 - d_0, t_0 + \frac{d_0}{2})$

Теперь положим $t_1 := t_0 + \frac{d_0}{2}$, $x_1 := \varphi_1(t_1)$, $r_1 := \rho((t_1, x_1), \partial\Gamma)$, $d_1 := \frac{r_1}{\sqrt{1+M^2}}$. Вновь по теореме о существовании и единственности найдётся единственное решение задачи Коши $\varphi_2 : (t_1 - d_1, t_1 + d_1) \to \mathbb{R}^n$. Определим $x(t) = \varphi_2(t)$ при $t \in (t_1, t_1 + \frac{d_1}{2})$. Тогда имеем, что x — единственное решение задачи Коши на $(t_0 - d_0, t_0 + d_0) \cap (t_1 - d_1, t_1 + d_1)$, так как на этом интервале $\varphi_1 \equiv \varphi_2$.

Продолжаем так строить и доопределять x на полуинтервалах вида $[t_k, t_k + \frac{d_k}{2})$. Теперь у нас есть два случая. Первый — процесс завершился, то есть $\exists k : (t_k, x(t_k - 0)) \in \partial\Gamma$. Тогда $b := t_k$. Второй — такого k нет. Так как $\mathrm{cl}(\Gamma)$ — компакт, последовательность $\{t_k\}$ ограничена, а по построению она возрастает. Значит, существует предел $b := \lim_{k\to\infty}(t_k)$.

Докажем, что существует предел $x(b - 0)$. Функция x определена на $\bigcup_{k=0}^{\infty}[t_k, t_{k+1})$, поэтому $x(\cdot)$ определена на $[t_0, b)$. Тогда имеем

$$|x'(t)| = |f(t, x(t))| \leqslant M \Rightarrow |x(t) - x(s)| \leqslant M|t - s|.$$

Иными словами, функция x липшицева, и по критерию Коши существует предел $x(b-0)$.

Докажем, что $(b, x(b - 0)) \in \partial\Gamma$. По построению имеем $t_{k+1} = t_0 + d_0 + \frac{d_1}{2} + \cdots + \frac{d_k}{2} \to_{k\to\infty} b$, то есть $d_k \to 0$. По определению d_k — это расстояние до границы, умноженное на константу, поэтому $\rho((t_k, x_k), \partial\Gamma) \to 0$. Имеем $\mathrm{cl}(\Gamma)$ — компакт, поэтому и $\partial\Gamma$ — это компакт. По определению расстояния до множества найдётся пара $(t'_k, x'_k) \in \partial\Gamma$, такая что $\rho((t_k, x_k), \partial\Gamma) = |(t_k, x_k) - (t'_k, x'_k)|$. Тогда получаем

$$|(b, x(b - 0) - (t'_k, x'_k)| \leqslant |(b, x(b - 0)) - (t_k, x_k)| + \rho((t_k, x_k), \partial\Gamma) \to 0.$$

Первое слагаемое стремится к нулю, так как это предел, второе — так как точки стремятся к границе. Следовательно, $(t'_k, x'_k) \to (b, x(b - 0))$, и, так как $\partial\Gamma$ — компакт, предел этой последовательности тоже лежит в $\partial\Gamma$, то есть $(b, x(b - 0)) \in \partial\Gamma$.

Аналогично можно доказать существование решения слева от t_0.

$\square$

Замечание. Данная теорема не гарантирует существование решения на всей проекции множества по одной из координат.

Лемма. (О дифференцируемом множестве) Пусть $I \subset \mathbb{R}$ — интервал, $t_0 \in I$, $z \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, $A > 0$, $B \geqslant 0$, $|z'(t)| \leqslant |A(z(t))| + B$ для всех $t \in I$. Тогда

$$|z(t)| \leqslant |z(t_0)|e^{A(t-t_0)} + \frac{B}{A}\left(e^{A|t-t_0|} - 1\right).$$

Замечание. При $A = 0$ имеем $z'(t) \leqslant B$. Тогда $|z(t)| \leqslant |z(t_0)| + B|t - t_0|$ для всех $t \in I$.

Доказательство. При $t > t_0$ (при $t = t_0$ очевидно, при $t < t_0$ аналогично). Пусть $z(t) \neq 0$, при равенстве нулю очевидно. Если $z(\tau) \neq 0$ при $\tau \in (t_0, t)$, то положим $t^* := t_0$. В противном случае положим $t^* = \sup\{\tau \in (t_0, t) : z(\tau) = 0\}$. Тогда $z(t) \neq 0$ на интервале (t^*, t). Докажем, что $\frac{d}{dt}|z(\tau)| \leqslant |z'(\tau)|$ при $\tau \in (t^*, t)$. Замечание: продифференцировать модуль можно, так как он не обращается в ноль.

Имеем тождество $|z(\tau)|^2 \equiv \langle z(\tau), z(\tau)\rangle$ (скалярное произведение). Продифференцируем его:

$$2|z(\tau)|\frac{d}{dt}|z(\tau)| \equiv 2\left\langle z(\tau), z'(\tau)\right\rangle \leqslant 2|z(\tau)| \cdot |z'(\tau)|.$$

Последнее неравенство — по неравенству Коши-Буняковского. В процессе мы продифференцировали скалярное произведение. Выведем его: пусть $\gamma(\tau) := \langle z(\tau), z(\tau)\rangle$. Распишем, как сумму координат и заметим, что получится ровно $\gamma' = \sum_{i=1}^n 2z_i z_i'$.

Обратно к исходной задаче. Мы получили, что $\frac{d}{dt}|z(\tau)| \leqslant |z'(\tau)| \leqslant A|z(\tau)| + B$. Тогда, домножая обе стороны, получаем

$$\left(\frac{d}{dt}|z(\tau)| - Az(\tau)\right) e^{-A(\tau - t^*)} \leqslant Be^{-A(\tau - t^*)}.$$

Дальше можно вынести производную и получить

$$\frac{d}{dt}\left(|z(\tau)|e^{-A(\tau - t^*)}\right) \leqslant Be^{-A(\tau - t^*)}.$$

Возьмём определённый интеграл от обеих частей:

$$|z(t)|e^{-A(t-t^*)} - |z(t^*)| \leqslant -\frac{B}{A}e^{-A(t-t^*)} + \frac{B}{A}.$$

Тогда

$$|z(t)| \leqslant |z(t^*)|e^{A(t-t^*)} + \frac{B}{A}\left(e^{A(t-t^*)} - 1\right).$$

Получили почти то, что нужно, но тут вместо t_0 стоит t^*. Но по построению имеем, что $t - t^* \leqslant t - t_0$ и $|z(t^*)| \leqslant |z(t_0)|$ (менее очевидно, но делается разбором случаев: либо равны, либо $z(t^*) = 0$).

$\square$

Обозначение. $O(x, R)$ — открытый шар радиуса R с центром в x. $B(x, R)$ — замкнутый.

Теорема. (Вторая о продолжении решения) Пусть $I \subset \mathbb{R}$ — интервал, $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Пусть:

- ▷ Для f выполняются предположения теоремы 2 (о существовании и единственности решения).
- ▷ $\exists a, b \in C(I, \mathbb{R}_+) : |f(t, x)| \leqslant a(t)|x| + b(t)\ \forall t \in I, x \in \mathbb{R}^n$ — условие ограниченного роста.

Тогда существует решение $x : I \to \mathbb{R}^n$ задачи Коши. От предыдущих теорем эта отличается тем, что решение определено на всём данном интервале.

Доказательство. I. Возьмём числа $\alpha, \beta \in I$, такие что $\alpha < t_0 < \beta$. Тогда $\exists A, B > 0$, такие что $|a(t)| \leqslant A$ и $|b(t)| \leqslant B$ для всех $t \in [\alpha, \beta]$. Положим $\Gamma := (\alpha, \beta) \times O(0, R + 1) \subset$

$I \times \mathbb{R}^n$. Здесь

$$R := \max_{\alpha \leqslant t \leqslant \beta} \left(|x_0| e^{A|t-t_0|} + \frac{B}{A} \left(e^{A|t-t_0|} - 1 \right) \right)$$

Из теоремы 3 следует, что существует решение $x : (\overline{\alpha}, \overline{\beta}) \to \mathbb{R}^n$, такое что $\forall t \ x(t) \in \Gamma$ и $(\alpha, x(\overline{\alpha}+0)), (\beta, x(\overline{\beta}-0)) \in \partial\Gamma$. Из леммы имеем, что $|x(t)| \leqslant R + R + 1$. Поэтому $\overline{\alpha} = \alpha$ и $\overline{\beta} = \beta$, так как их проекция на $\mathbb{R}^n$ не может лежать на границе $O(0, R+1)$, то есть проекция на I лежит на границе. Таким образом, решение $x(\cdot)$ определено на (α, β).

II. Возьмём числа α_i, β_i, такие что $\alpha_i \to \inf(I)$, $\beta_i \to \sup(I)$, причём обе монотонны. Тогда $\forall i \ \alpha_i < t_0 < \beta_i$, они вложены и $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\alpha_i, \beta_i)$. Для всех i существует решение $x^i : (\alpha_i, \beta_i) \to \mathbb{R}^n$. Рассмотрим произвольный $t \in I$. Для всех пар индексов i, j, таких что $t \in (\alpha_i, \beta_i)$ и $t \in (\alpha_j, \beta_j)$ верно по теореме 2, что $x^i(t) = x^j(t)$. Поэтому можно положить $x(t) := x^i(t)$, и оно будет определено однозначно вне зависимости от i. Следовательно, это и есть искомое решение задачи Коши.

□

5 Уравнения, не разрешённые относительно производной

Рассмотрим уравнение $f(t, x, x') = 0$. Здесь $f : \Omega \to \mathbb{R}$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Пример. (Задача Коши, у которого много решений) $(x')^2 - x^2 = 0$. Оно эквиваленно одному из двух уравнений $x' = x$ и $x' = -x$. Их решениями являются $x = x_0 e^{-t}$ и $x = x_0 e^t$ — два решения задачи Коши.

Теорема. (О существовании и единственности решения задачи Коши для неявного уравнения) Пусть $(t_0, x_0, v_0) \in \Omega$, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$. Если $f(t_0, x_0, v_0) = 0$ и $\frac{\partial f}{\partial x'}(t_0, x_0, v_0) \neq 0$, то существует $d > 0$ и решение $x : (t_0 - d, t_0 + d) \to \mathbb{R}$ задачи Коши, являющееся единственным, удовлетворяющим равенству $x'(t_0) = v_0$.

Доказательство. Посмотрим на $f(t, x, x') = 0$, как на уравнение относительно трёх переменных и разрешим его относительно x'. По теореме о неявной функции найдутся числа $r, \varepsilon > 0$ и отображение $g : O((t_0, x), r) \to \mathbb{R}$, такие что $g \in C^1$, $f(t, x, g(t, x)) \equiv 0$, $g(t_0, x_0) = v_0$ (следует из того, что $f(t_0, x_0, v_0) = 0$ и производная не равна нулю) и данное решение единственно в ε-окрестности точки v_0. Рассмотрим новую задачу Коши:

$$\begin{cases} x' = g(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Теперь у нас явно выражен x', поэтому можно применить теорему 2:

$$\exists d > 0, x : (t_0 - d, t_0 + d) \to \mathbb{R} : x(\cdot) \text{ — решение}$$

Проверим, что это решение подходит в исходную систему:

$$f(t, x(t), x'(t)) \equiv f(t, x(t), g(t, x(t))) \equiv 0, t \in (t_0 - d, t_0 + d).$$

Выполнение начального условия следует из того, что x удовлетворяет начальному условию в новой задаче Коши. Проверим для $x'(t_0)$:

$$x'(t_0) = g(t_0, x(t_0)) = g(t_0, x_0) = v_0.$$

Следовательно, мы нашли решение исходной задачи Коши. Докажем, что оно единственно. Уменьшим d так, чтобы $(t, x(t)) \in O((t_0, x_0), \frac{r}{2})$. Предположим противное: существует ещё одно решение $\varphi : I \to \mathbb{R}$, такое что $\varphi'(t_0) = v_0$ и существует $\widehat{t} \in J := (t_0 - d, t_0 + d) \cap I$, такое что $\varphi(t) \neq x(t)$. Не умаляя общности, $\widehat{t} > t_0$. Положим $t_1 = \inf\{t \in J : t > t_0, x(t) \neq \varphi(t)\}$. Теперь мы можем взять t_2 и t_3 так, что $t_1 < t_2 < t_3$ и $x(t_2) \neq \varphi(t_2)$ (так как t_1 — это инфимум тех, что не равны, и множество открыто и не содержит нижнюю грань) и $\varphi(t) \in O((t_0, x_0, r))$ при $t \in [t_0, t_3]$. Поскольку $f(t, \varphi(t), \varphi'(t)) \equiv 0$ на $[t_0, t_3]$, имеем $\varphi'(t) \equiv g(t, \varphi(t))$ (так как в теореме о неявной функции утверждается единственность). Кроме того, $\varphi(t_0) = x_0$, поэтому φ — это решение новой задачи Коши на $[t_0, t_3]$. Следовательно, $\varphi(t_2) = x(t_2)$, так как по построению $t_2 \in [t_0, t_3)$.

□

Замечание. Из того, что в теореме о неявной функции и в теореме о решении задачи Коши есть единственность, единственность напрямую не следует, так как мы фиксируем переменные не в том порядке (подробнее на 6 лекции на ~ 35 минуте).

Определение. Множество

$$\left\{(t, x) \mid \exists v : (t, x, v) \in \Omega, f(t, x, v) = 0, \frac{\partial f}{\partial x'}(t, x, v) = 0\right\}$$

называется *дискриминантной кривой*. На нём решение может не быть единственным.

Определение. $\widehat{x}(\cdot)$ называется *особым решением* ОДУ $f(t, x, x') = 0$, если для всех t_0 существует решение $x(\cdot)$, такое что $\widehat{x}(t_0) = x(t_0)$, $\widehat{x}'(t_0) = x'(t_0)$ и $\widehat{x}(t) \not\equiv x(t)$ на интервале $(t_0 - d, t_0 + d)$ для всех d. Они нас интересуют из-за того, что в них можно "склеивать" два других решения.

Пример. $x' = \sqrt[3]{x}$. $x(t) \equiv 0$ — особое решение.

Утверждение. Если $\widehat{x} : I \to \mathbb{R}$ — особое решение, то для всех $t \in I$ точка $(t, \widehat{x}(t))$ лежит на дискриминантной кривой.

Доказательство. Зафиксируем $\tau \in I$. Так как $\widehat{x}$ — решение, $f(\tau, \widehat{x}(\tau), \widehat{x}'(\tau)) \equiv 0$ на I. Если $\frac{\partial f}{\partial x'}(\tau, \widehat{x}(\tau), \widehat{x}'(\tau)) \neq 0$, то $\widehat{x}(\cdot)$ — единственное решение задачи Коши

$$\begin{cases} f(t, x, x') = 0 \\ x(\tau) = \widehat{(}\tau) \end{cases},$$

удовлетворяющее условию $x'(\tau) = \widehat{x}'(\tau)$. Тогда $\widehat{x}$ — это единственное решение, поэтому особым оно быть не может. Таким образом, $\frac{\partial f}{\partial x'}(\tau, \widehat{x}(\tau), \widehat{x}'(\tau)) = 0$, то есть $(\tau, \widehat{x}(\tau))$ лежит в дискриминантной кривой.

□

Пример. $(x')^2 - 4x^3(1 - x) = 0$. Найдём дискриминатную кривую:

$$\begin{cases} v^2 - 4x^2(1 - x) = 0 \\ 2v = 0. \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что дискриминатная кривая — это две прямые $(t, 0)$ и $(t, 1)$. Чтобы найти особые решения, нужно решить исходное уравнение: $x(t) = \frac{1}{(t+c)^2+1}$, $x(t) = 0$ и $x(t) = 1$. Особым решением является $x \equiv 1$, так как его касаются все решения $\frac{1}{(t+c)^2+1}$, и по этой прямой можно склеивать решения для разных c.

6 Некоторые следствия теорем о существовании решений

Мы будем рассматривать два типа уравнений:

1. Уравнения старших порядков. Дано открытое множество $\Gamma \subset \mathbb{R}^{k+1}$, отображение $f : \Gamma \to \mathbb{R}$, вектор $(t_0, x_0^0, x_0^1, \dots, x_0^{k-1}) \in \Gamma$. Задача Коши вида

$$\begin{cases} x^{(k)} = f(t, x, x', \dots, x^{(k-1)}) \\ x(t_0) = x_0^0 \\ \vdots \\ x^{(k-1)}(t_0) = x_0^{k-1} \end{cases}$$

Хотелось бы свести эту задачу к задаче с меньшим порядком производной, чтобы применить теорему 5 о существовании и единственности. Положим $y_i := x^{i-1}$ для $i \in [1, k]$. Тогда система сводится к виду

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{k-1}' = y_k \\ y_k' = f(t, y_1, y_2, \dots, y_k) \\ y_1(t_0) = x_0^0 \\ y_2(t_0) = x_0^1 \\ \vdots \\ y_k(t_0) = x_0^{k-1} \end{cases}$$

Введём отображение $F : \Gamma \to \mathbb{R}^k$, такое что $F(t, y) = (y_2, y_3, \dots, f(t, y))^T$. Положим $y_0 = (x_0^0, x_0^1, \dots, x_0^{k-1})$, тогда эту задачу можно записать в виде

$$\begin{cases} y' = F(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}.$$

В частности, если x — решение исходной задачи, то $y = (x, x', \dots)$ — это решение новой, и, наоборот, если y — решение новой задачи, то $x = y_1$ — решение исходной.

Теорема. Пусть f непрерывна, для всех $(t, x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$ существуют частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial x^{(j)}}$ и $\frac{\partial f_i}{\partial x^{(j)}}$ непрерывны. Тогда существует $d > 0$ и решение $x : (t_0 - d, t_0 + d) \to \mathbb{R}$, являющееся единственным решением задачи Коши. Следует напрямую из теоремы о существовании и единственности и замены, описанной выше.

2. Пусть нам дана непрерывная функция $A : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$, функция $b : I \to \mathbb{R}^n$, число $t_0 \in I$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x' = A(t) \cdot x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Теорема. Если A и b непрерывны, то существует единственное решение $x : I \to \mathbb{R}^n$ данной задачи Коши.

Доказательство. Положим $\widehat{a}(t) := \|A(t)\|$, $t \in I$ и $\widehat{b}(t) = |b(t)|$, $t \in I$. Тогда

$$|A(t)x + b(t)| \leqslant |A(t)x| + |b(t)| \leqslant \|A(t)\| \cdot |x| + |b(t)| \leqslant \widehat{a}(t)|x| + \widehat{b}(t).$$

Применяя теорему выше, получаем, что решение существует на всём интервале I. Докажем единственность. Пусть $\widehat{x}, \varphi : I \to \mathbb{R}^n$ — решения, покажем, что они совпадают. Не умаляя общности, существует $t > t_0$, такое что $\widehat{x}(t) \neq \varphi(t)$. Положим $\tau = \inf\{t > t_0 : \widehat{x}(t) \neq \varphi(t)\}$, тогда $\widehat{x}(\tau) = \varphi(\tau)$ (доказывается от противного, получится, что τ — не инфимум). Следовательно, в любой окрестности точки τ задача Коши

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t) \\ x(\tau) = \widehat{x}(\tau) \end{cases}$$

имеет хотя бы два решения — противоречие.

□

7 Линейные однородные системы ОДУ

Пусть нам дан интервал $I \subset \mathbb{R}$ и линейные пространства $C(I, \mathbb{R}^n)$, $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ (непрерывные и непрерывно дифференцируемые функции).

Напоминание. Система функций $x^1, \ldots, x^k \in C(I, \mathbb{R}^n)$ называется *линейно зависимой*, если существует линейная комбинация с не всеми нулевыми коэффициентами, тождественно равная нулю.

Упражнение. Если $x^1, \ldots, x^k$ линейно зависимы, то для всех $t \in I$ векторы $x^1(t), \ldots, x^k(t)$ линейно зависимы.

Замечание. В обратную сторону неверно, например, $x^1(t) = 1$ и $x^2(t) = t$.

Определение. Пусть даны функции $x^1, \ldots, x^n \in C(I, \mathbb{R}^n)$. *Определителем Вронского* этой системы $\omega(t) = \det(x^1(t), \ldots, x^n(t))$. Нетрудно заметить, что если векторы линейно зависимы, то $\omega(t) \equiv 0$, и обратно неверно: $x^1(t) = (1\ 1)^T$, $x^2(t) = (t\ t)^T$.

Пусть нам даны функции $a_{j,k} \in C(I, \mathbb{R})$, где $j, k \in [1, n]$. Положим матрицу $A(t) = (a_{j,k}(t))_{j,k \in [1,n]}$. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n \end{cases}$$

Или, что эквивалентно, $x' = A(t)x$.

Определение. Эта система называется *линейной однородной системой ОДУ*.

Замечание. Почему эта система называется линейной? Введём линейный оператор $L : C^1(I, \mathbb{R}^n) \to C(I, \mathbb{R}^n)$, такой что $(Lx)(t) = x'(t) - A(t)x(t)$. Заметим, что множество решений уравнений совпадает с ядром данного линейного оператора.

Утверждение. Пусть $x^1, \ldots, x^n$ — решения системы (1). Если существует $\tau \in I$, такое что $\omega(\tau) = 0$, то все решения $x^1, \ldots, x^n$ линейно зависимы.

Доказательство. Если $\omega(\tau) = 0$, то $x^1(\tau), \ldots, x^n(\tau)$ линейно зависимы (именно значения в этой точке), то есть существуют $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, такие что $\sum_{j=1}^n \lambda_j x^j(\tau) = 0$. Положим $x := \sum_{j=1}^n \lambda_j x^j$. По построению $x(\tau) = 0$, то есть x является решением задачи Коши

$$\begin{cases} x' = A(t)x \\ x(\tau) = 0. \end{cases}$$

У этой задачи есть очевидное и единственное решение — $x \equiv 0$. Следовательно, $x(t) \equiv 0$, то есть $\sum_{j=1}^n \lambda_j x^j(t) \equiv 0$, то есть $x^1, \ldots, x^n$ линейно зависимы.

$\square$

Замечание. Это утверждение является обратным к предыдущему утверждению, которое в общем случае работает только в одну сторону.

Определение. *Фундаментальной системой решений* называется упорядоченный набор из n линейно независимых решений системы (1).

Утверждение. ФСР существует.

Доказательство. Зафиксируем t_0 и рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} x' = A(t) \cdot x \\ x(t_0) = e_j \end{cases},$$

где e_j — базисный вектор. По теореме о существовании у неё существует решение $x^j \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ при любом $j \in [1, n]$. Покажем, что все x^j линейно независимы. Действительно, $x^j(t_0) = e_j$, то есть все $x^j(t_0)$ линейно независимы, поэтому можно доказать от противного, что и сами решения линейно независимы.

$\square$

Определение. *Общим решением* называется множество всех решений системы (1).

Теорема. Если $x^1, \ldots, x^n$ — ФСР, то общее решение — это линейная оболочка $x^1, \ldots, x^n$.

Доказательство. Докажем два вложения. $\supset$: очевидно. $\subset$. Пусть $\widehat{x}(\cdot)$ — решение системы (1). Возьмём произвольное $t_0 \in I$, тогда, так как x^j образуют ФСР, $x^j(t_0)$ линейно независимы по утверждению выше. Следовательно, существует представление $\widehat{x}(t_0) = \sum_{j=1}^n \lambda_j x^j(t_0)$. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} x' = A(t) \cdot x \\ x(t_0) = \widehat{x}(t_0). \end{cases}$$

У неё есть два решения — $\widehat{x}(\cdot)$ и $\sum_{j=1}^n \lambda_j x^j(\cdot)$. Следовательно, они совпадают, и что доказывает включение.

$\square$

Определение. Пусть $x^1, \ldots, x^n \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ — ФСР. Тогда $X(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$ для $t \in I$ называется *фундаментальной матрицей решений* (ФМР).

Замечание. Общее решение системы (1) можно переписать через ФМР: $\{X(\cdot) \cdot c : c \in \mathbb{R}^n\}$.

Утверждение. $X'(t) \equiv A(t)X(t)$, $t \in I$. Доказывается прямой проверкой.

Теорема. (Об описании множества всех ФМР) Пусть $X(\cdot)$ — фундаментальная матрица решений. Тогда множество всех ФМР системы (1) записывается в виде $\{X(\cdot)C : C \in \mathbb{R}^{n \times n}, \det(C) \neq 0\}$.

Доказательство. $\supset$. Возьмём такую матрицу C. Тогда

$$X(t)C = \left(\sum_{j=1}^n C_{j1} x^j(t) \ \ldots \ \sum_{j=1}^n C_{jn} x^j(t) \right).$$

Каждый столбец является линейной комбинацией столбцов X, то есть решением системы. Более того, $\det(XC) = \det(X) \cdot \det(C) \neq 0$, поэтому столбцы линейно независимы, то есть образуют ФМР.

$\subset$. Пусть $Y(\cdot)$ — фундаментальная матрица решений, зафиксируем произвольное $t_0 \in I$ и положим $C = X^{-1}(t_0) \cdot Y(t_0)$. Рассмотрим матрицу $X(\cdot)C$ — она является ФМР по первому пункту и совпадает с Y в точке t_0. Теперь применим теорему о существовании к каждому столбцу матриц XC и Y и получим, что они совпадают (подробнее на $\sim$ 1:05 лекции 7).

$\square$

Теорема. (Формула Лиувилля-Остроградского) Пусть $x^1, \ldots, x^n$ — ФСР, $\omega(\cdot)$ — определитель Вронского, тогда для всех $t_0 \in I$ верно

$$\omega(t) \equiv \omega(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \mathrm{tr}(A(s)) ds \right).$$

Лемма. Пусть

$$\omega_j(t) = \det \begin{pmatrix} x_1^1(t) & \ldots & x_1^n(t) \\ \vdots & & \\ (x_j^1)'(t) & \ldots & (x_j^n)'(t) \\ \vdots & & \\ x_n^1(t) & \ldots & x_n^n(t) \end{pmatrix}$$

(производные только в j-ой строке). Тогда $\omega'(t) = \sum_{j=1}^n \omega_j(t)$ для всех $t \in I$.

Доказательство. Вспомним, что определитель — это сумма произведений по всех перестановкам.

$$\omega'(t) = \frac{d}{dt} \left(\sum_\pi \sigma(\pi) x_1^{\pi(1)}(t) \ldots x_n^{\pi(n)}(t) \right) =$$

Теперь продифференцируем:

$$= \sum_\pi \left((x_1^{\pi(1)})' x_2^{\pi(2)} \ldots x_n^{\pi(n)} + \cdots + x_1^{\pi(1)} \ldots (x_n^{\pi(n)})' \right).$$

Разобъём на n сумм, где в i-ой сумме берётся производная у x_i, и получим искомое.

$\square$

Доказательство теоремы. По лемме

$$\omega'(t) = \sum_{i=1}^n \det \begin{pmatrix} x_1^1(t) & \ldots & x_1^n(t) \\ \vdots & & \\ (x_j^1)'(t) & \ldots & (x_j^1)'(t) \\ \vdots & & \\ x_n^1(t) & \ldots & x_n^b(t) \end{pmatrix}$$

Теперь вспомним, что каждый столбец является решением системы, поэтому можно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^{n} \det \begin{pmatrix} x_1^1(t) & \dots & x_1^n(t) \\ \vdots & & \\ \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(t)x_k^1 & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(t)x_k^n(t) \\ \vdots & & \\ x_n^1(t) & \dots & x_n^n(t) \end{pmatrix}$$

Теперь умножим i-ую строку ($i \neq j$) на x_{ji} и вычтем из j-ой строки. Получится

$$\omega'(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}(t)\omega(t) \equiv \omega(t)\operatorname{tr}(A(t)).$$

Теперь посмотрим на это, как на дифференциальное уравнение. Это линейное уравнение или с разделяющими переменными. В любом случае, получаем

$$\omega(t) = C\exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr}(A(s))ds\right).$$

Теперь подставим t_0 и получим, что $C = \omega(t_0)$.

□

Замечание. Звучит, как что-то странное и нигде не нужное, но на практике это помогает, когда мы смогли угадать одно решение системы и хотим найти остальные.

8 Линейные неоднородные системы ОДУ. Линейные ОДУ высших порядков

8.1 Линейные неоднородные системы ОДУ

Пусть нам даны $n \in \mathbb{N}$, интервал $I \subset \mathbb{R}$ и функции $A \in C(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $b \in C(I, \mathbb{R}^n)$. Мы уже умеем решать систему вида

$$x' = A(t)x$$

Нас интересуют решения системы

$$x' = A(t)x + b(t).$$

Теорема. Пусть $\widehat{x}(\cdot)$ — частное решение системы (2). Тогда общее решение системы (2) — множество всех функций вида $x(\cdot) + \widehat{x}(\cdot)$, где $x(\cdot)$ — решение системы (1). Очевидно, так как это линейное уравнение.

8.1.1 Метод вариации постоянных

Позволяет находить частное решение системы (2).

Пусть $X(\cdot) = (x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot))$ — фундаментальная матрица решений (1), $t_0 \in I$. Тогда $x(t) = X(t)C$ — общее решение (1). Найдём частное решение (2) в виде

$$x(t) + X(t)C(t), t \in I.$$

Продифференцируем:

$$X'(t)C(t) + X(t)C'(t) = A(t)X(t)C(t) + b(t).$$

Так как $A(t)X(t) = X'(t)$, можно упростить:

$$X(t)C'(t) = b(t).$$

Тогда

$$C'(t) = X^{-1}(t)b(t),$$

то есть

$$C(t) = \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)b(s)ds.$$

Таким образом, частное решение записывается в виде

$$\widehat{x}(t) = X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)b(s)ds.$$

И общее решение — это

$$x(t) = X(t)C + X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)b(s)ds.$$

Корректность следует из того, что все переходы верны в обе стороны.

8.2 Линейные однородные ОДУ

Пусть даны $n \in \mathbb{N}$, интервал $I \subset \mathbb{R}$ и функции $b, a_0, a_1, \dots, a_n \in C(I, \mathbb{R}(\mathbb{C}))$ — можно и для вещественных, и для комплексных функций. Дополнительное ограничение: a_0 не обращается в ноль. Нас интересует уравнение

$$\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}(t)x^{(j)} = 0 \sim a_n(t)x^{(n)} + \dots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0.$$

И уравнение

$$\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}(t)x^{(j)} = b(t) \sim a_n(t)x^{(n)} + \dots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = b(t).$$

(В обоих случаях написаны две эквивалентные формы)

Сделаем замену:

$$y^1 = x, y^2 = x', \dots, y^n = x^{(n-1)}.$$

Тогда система (3) записывается в виде

$$\begin{cases} (y^1)' = y^2 \\ \vdots \\ (y^{n-1})' = y^n \\ (y^n)' = -\frac{a_1(t)}{a_0(t)}y^n - \dots - \frac{a_n(t)}{a_0(t)}y^1. \end{cases}$$

Сделаем то же самое для системы (4):

$$\begin{cases} (y^1)' = y^2 \\ \vdots \\ (y^{n-1})' = y^n \\ (y^n)' = -\frac{a_1(t)}{a_0(t)}y^n - \dots - \frac{a_n(t)}{a_0(t)}y^1 + \frac{b(t)}{a_0(t)}. \end{cases}$$

Эквивалентности (3) $\sim$ (6) и (4) $\sim$ (7) доказываются прямой проверкой.

Лемма. Пусть $x_1(\cdot), \dots, x_k(\cdot)$ — решения уравнения (3), а $y_1(\cdot), \dots, y_k(\cdot)$ — соответствующие после замены решения системы (6). Система функций $x_1, \dots, x_k$ линейно зависима тогда и только тогда, когда система $y_1, \dots, y_k$ линейно зависима.

Доказательство. Из определения линейной зависимости существует ненулевой $\lambda \in \mathbb{R}^k(\mathbb{C}^k)$, такой что $\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j(t) \equiv 0$. Продифференцируем сумму n раз:

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^k(\mathbb{C}^k) : \begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j(t) \equiv 0 \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j'(t) \equiv 0 \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j''(t) \equiv 0 \\ \vdots \end{cases}$$

Подставим y_i и просуммируем покоординатно:

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^k(\mathbb{C}^k) : \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j(t) \equiv 0$$

Первое утверждение эквивалентно линейной зависимости $x_1, \dots, x_k$, второе — $y_1, \dots, y_k$.

□

Теорема. Существуют линейно независимые решения $x_j(\cdot)$, где $j \in [1, n]$, уравнения (3). Более того, решений ровно n, то есть общее решение системы (3) имеет вид

$$x(t) = c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t), t \in I, c_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C}).$$

Следует из эквивалентности системе (6), для которой аналогичные утверждения были доказаны ранее.

□

Замечание. Для комплексных чисел аналогичной утверждение не было доказано, но в этом случае на систему из n комплексных уравнений можно смотреть, как на систему из $2n$ вещественных уравнений.

Определение. Пусть $x_1, \dots, x_{n-1} \in C^{n-1}(I, \mathbb{R}(\mathbb{C}))$. *Определителем Вронского* этой системы функций называется

$$\omega(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & \dots & x_n(t) \\ x_1'(t) & \dots & x_n'(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

Нетрудно проверить, что для линейно зависимых функций определитель Вронского равен нулю, но в обратную сторону это неверно: $x_1(t) = t^2$, $x_2(t) = t|t|$. (Здесь небольшое дежавю, но ранее мы определяли его для более узкого случая).

Утверждение. (О связи определителя Вронского для функций и для вектор-функций) Пусть $x_1, \dots, x_n$ — решение системы (3), $y_1, \dots, y_n$ — решение системы (6), связанные с $x_1, \dots, x_n$ заменой (5). Тогда $\omega(t)$ совпадает с определителем Вронского вектор-функций $y_1, \dots, y_n$. Доказывается прямой проверкой.

Утверждение. Пусть $x_1, \dots, x_n$ — решение системы (3). Тогда если существует τ, такое что $\omega(\tau) = 0$, то $\omega(\tau) \equiv 0$ и функции линейно зависимы.

Доказывается переходом к вектор-функциям y_i: возьмём τ, получим линейную зависимость функций y_i в какой-то точке, значит, они линейно зависимы, и исходные функции линейно зависимы.

Утверждение. (Формула Лиувилля-Остроградского)

$$\omega(t) \equiv \omega(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{a_1(s)}{a_0(s)} ds\right).$$

Доказательство. Найдём матрицу A для вектор-функций y_i:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_n}{a_0} & -\frac{a_{n-1}}{a_0} & -\frac{a_{n-2}}{a_0} & \dots & -\frac{a_1}{a_0} \end{pmatrix}$$

Соответственно её след равен $-\frac{a_1}{a_0}$.

□

Теорема. (О решении системы (4)) $x_{\text{общ.}(4)} = x_{\text{част.}(4)} + x_{\text{общ.}(3)}$. Частное решение системы (4) можно найти методом вариации постоянной: пусть $x_1, \dots, x_n$ — линейно независимые решения системы (3). Тогда частное решение (4) записывается в виде

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} C_j(t) x_j(t).$$

Возьмём $C_j(t)$, которые получаются при применении метода вариации постоянной для системы (4), то есть они удовлетворяют $X(t)C' = b(t)$ или же

$$\begin{pmatrix} x_1(t) & \dots & x_n(t) \\ x_1'(t) & \vdots & x_n'(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{b(t)}{a_0(t)} \end{pmatrix}$$

Теперь заметим, что они подходят, здесь не понял, $\sim$ 1:05 лекция 8.

$\square$

Пример. $x'' - 3x' + 2x = e^{-t}$. Здесь $n = 2$, $a_0(t) \equiv 1$, $a_1(t) \equiv -3$, $a_2(t) \equiv 2$, $b(t) \equiv e^{-1}$ — линейное ОДУ. Будем искать решение вида $x(t) = e^{\lambda t}$. Тогда однородное уравнение переписывается в виде $(\lambda^2 - 3\lambda + 2)e^{\lambda t} = 0$, то есть решение — $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$. Найдём частное решение:

$$\begin{pmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^t & 2e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

Умножим на обратную матрицу:

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{e^{3t}} \begin{pmatrix} 2e^{2t} & -e^{2t} \\ -e^t & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

То есть $c_1' = -e^{-2t}$ и $c_2' = e^{-3t}$. Интегрируя, получаем $c_1 = \frac{1}{2}e^{-2t}$ и $c_2 = -\frac{1}{3}e^{-3t}$. Тогда частным решением будет

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{-2t}e^t - \frac{1}{3}e^{-3t}e^{2t} = \frac{1}{6}e^{-t}.$$

Общее решение — сумма общего однородного и частного.

9 Линейные ОДУ с постоянными коэффициентами

9.1 Линейные однородные ОДУ с постоянными коэффициентами

Пусть $n \in N$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, причём $a_0 \neq 0$. Рассмотрим уравнение

$$a_0 x^{(n)} + \dots + a_n x = 0.$$

Сделаем замену $x(t) = e^{\lambda t}$, тогда уравнение приводится к виду $M(\lambda) = a_0\lambda^n + \dots + a_n = 0$. Тогда, если $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — корни этого уравнения, решением задачи будут функции $x(t) = e^{\lambda_i t}$ и любые их линейные комбинации.

Положим $Lx(t) = \sum_{j=0}^n a_{n-j} x^{(j)}(t)$.

Лемма. Пусть $\gamma \in \mathbb{C}$ — корень M кратности $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, s — неотрицательное целое число. Тогда

$$L(t^s e^{\gamma t}) = \begin{cases} 0, & s \leqslant k-1 \\ P(t)e^{\gamma t}, & s \geqslant k \end{cases},$$

где P — какой-то многочлен степени $s - k$.

Доказательство.

$$L(t^s e^{\gamma t}) \equiv \sum_{j=0}^n a_{n-j} \frac{\partial^j}{\partial t^j}(t^s e^{\gamma t}) \equiv \sum_{j=0}^n a_{n-j} \frac{\partial^j}{\partial t^j}\left(\frac{\partial^s}{\partial \gamma^s} e^{\gamma t}\right) \equiv$$

(Поменяем частные производные местами)

$$\equiv \sum_{j=0}^n a_{n-j} \frac{\partial^s}{\partial \gamma^s}(\gamma^j e^{\gamma t}) \equiv \frac{\partial^s}{\partial \gamma^s}(e^{\gamma t} M(\gamma)) \equiv$$

(так как γ — корень кратности k)

$$\equiv \sum_{j=0}^{s} C_s^j M^{(j)}(\gamma) t^{s-j} e^{\gamma t}.$$

Получили искомый многочлен.

□

Теорема. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — попарно различные корни кратностей $k_1, \dots, k_m$ соответственно. Тогда $t^s e^{\lambda_j t}$ ($s \in [0, k_j], j \in [1, m]$) — фундаментальная система решений.

Доказательство. Очевидно, что эти функции являются решениями. Докажем, что они линейно независимы. Пусть $\sum c_{j,s} \cdot t^s e^{\lambda_j t} \equiv 0$. Тогда существуют многочлены, такие что

$$p_1(t)e^{\lambda_1 t} + \dots + p_m(t)e^{\lambda_m t} \equiv 0.$$

Разделим:

$$p_1(t) + \dots + p_m(t)e^{(\lambda_m - \lambda_1)t} \equiv 0.$$

Продифференцируем достаточное число раз, чтобы $p_1(t)$ обнулился. Получаем новые многочлены

$$\widehat{p}_2(t)e^{\lambda_2 - \lambda_1)t} + \dots + \widehat{p}_m e^{(\lambda_m - \lambda_1)t} \equiv 0.$$

Нетрудно доказать, что $\deg(p_i) = \deg(\widehat{p}_i)$, поэтому эту операцию можно дальше продолжать, пока не получим

$$\widehat{p}_m(t)e^{(\lambda_m - \lambda_{m-1})t} \equiv 0.$$

Получаем, что многочлен $\widehat{p}_m$ нулевой, то есть у него степень $-\infty$, то есть и у исходного многочлена p_m была такая степень. Повторяя эту процедуру для остальных многочленов, получаем, что все многочлены нулевые. Следовательно, все коэффициенты линейной комбинации нулевые.

□

9.2 Линейные неоднородные ОДУ с постоянными коэффициентами

Всё то же самое, но теперь

$$a_0 x^{(n)} + \dots + a_{n-1}x' + a_n x = b(t).$$

Если $b(t)$ — многочлен, то очевидно решается по линейности (?). Рассмотрим случай, когда $b(t) = p(t)e^{\gamma t}$ — квазимногочлен.

Теорема. Существует решение $x(\cdot)$ уравнения (2) вида $x(t) = t^k q(t) e^{\gamma t}$, где k — кратность корня γ многочлена M, а q — какой-то многочлен, степень которого не превосходит степень p.

Доказательство. Пусть $m = \deg(p)$, $p(t) = q_0 t^m + \dots + q_{m-1}t + q_m$. Положим $x_1(t) = at^{m+k}e^{\gamma t}$ (число a определим позже). Тогда по лемме

$$Lx_1(t) = a(\Theta t^m + r(t))e^{\gamma t}, \deg(r) < m.$$

Положим $a = \frac{p_0}{\Theta}$. Тогда $Lx_1(t) = (p_0 t^m + \widehat{r}(t))e^{\gamma t}$. Докажем теорему индукцией по m. При $m = 0$ имеем $x = x_1$ — искомый многочлен. Пусть теорема верна для многочленов степени меньше m. Будем искать решение в виде $x = x_1 + x_2$, где x_2 — квазимногочлен, то есть мы хотим, чтобы $L(x_1 + x_2)(t) \equiv p(t)e^{\gamma t}$. Распишем x_1 и x_2:

$$(p_0 t^m + \widehat{r}(t))e^{\gamma t} + Lx_2(t) = (p_0 t^m + p_1 t^{m-1} + \dots + p_m)e^{\gamma t}.$$

Сократим $p_0 t^m e^{\gamma t}$:

$$Lx_2(t) \equiv (-\widehat{r}(t) + p_1 t^{m-1} + \dots + p_m)e^{\gamma t}.$$

Справа имеем многочлен степени менее m, поэтому можно применить предположение индукции:

$$\exists q_2 : L(t^k q_2(t)e^{\gamma t}) \equiv (-\widehat{r}(t) + p_1 t^{m-1} + \dots)e^{\gamma t}, \deg(q_2) \leqslant m-1.$$

Таким образом,

$$x(t) = \frac{p}{\Theta} t^{m+k} e^{\gamma t} + t^k q_2(t) e^{\gamma t}$$

является решением уравнения (2).

□

Пример. $x'' - x = t^3 e^t$. Характеристический многочлен — $\lambda^2 - 1 = 0$. Возьмём корень $\gamma = 1$ кратности 1. Тогда решение имеет вид

$$x(t) = t^1(q_0 t^3 + q_1 t^2 + q_2 t + q_3)e^t.$$

Теперь это можно поставить в исходное уравнение и получить систему уравнений, из которой получается решение.

9.3 Вещественные решения

Теперь коэффициенты вещественные, уравнение однородное и мы хотим найти вещественные решения. Тогда характеристический многочлен имеет решения трёх типов: вещественные и пары сопряжённых комплексных. Рассмотрим пары комплексных $\lambda = \alpha \pm i\beta$. Тогда $t^s e^{\lambda t}$ и $t^s e^{\overline{\lambda} t}$ — решения (1). В силу линейности решениями также являются

$$\frac{t^s e^{\lambda t} + t^s e^{\overline{\lambda} t}}{2}, \ \frac{t^s e^{\lambda t} - t^s e^{\overline{\lambda} t}}{2i}.$$

Складывая эти решения, получаем по определению синуса и косинуса решения вида $t^s e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ и $t^s e^{\alpha t}\sin(\beta t)$ — вещественные.

Теорема. Вместе с корнями $\lambda \in \mathbb{R}$ многочлена M эти решения образуют фундаментальную систему решений.

Доказательство. Пусть $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$, $\overline{\lambda_j} = \alpha_j - i\beta_j$ для $j \in [1, l]$ и $\lambda_j \in \mathbb{R}$ для $j \in [2l+1, n]$ — все решения в комплексных числах. Положим $z_j^s(t) = t^s e^{\lambda_j t}$, $z_{j+l}^s(t) = t^s e^{\overline{\lambda_j} t}$, $z_j^s(t) = t^s e^{\lambda_j t}$ — соответствующие этим λ решения. Докажем линейную независимость, пусть

$$\sum_s \left(\sum_{j=1}^{l} c_j^s \frac{z_j^s + z_{j+l}^s}{2} + \sum_{j=1}^{l} c_{j+l}^s \frac{z_j^s - z_{j+l}^s}{2i} + \sum_{j=2l+1}^{m} c_j^s z_j \right) \equiv 0.$$

Приведём подобные слагаемые:

$$\left(\frac{c_1^s}{2}+\frac{c_{l+1}^s}{2i}\right)+z_1^s+\left(\frac{c_1^s}{2}-\frac{c_{l+1}^s}{2i}\right)z_{l+1}^s+\dots+\sum_{j=2l+1}^{m}c_j^s z_j^s\equiv 0.$$

В силу равенства нулю все коэффициенты равны нулю. Из этих слагаемых видим, что $c_1^s=c_{l+1}^s=c_{2l+1}^s=0$. Аналогично для остальных.

Случай неоднородных уравнений: выражение в правой части можно привести к виду $(P_1(t)\cos(\mu t)+B(t)\sin(\mu t))e^{\eta t}$. Решение тогда ищется в виде

$$x(t)=t^k(Q_1(t)\cos(\mu t)+Q_2(t)\sin(\mu t))e^{\eta t},$$

где k — кратность корня $\gamma=\eta+i\mu$.

□

10 Системы линейных ОДУ с постоянными коэффициентами

10.1 Комплексные однородные системы

Пусть нам даны $n\in\mathbb{N}$ и матрица $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$. Рассмотрим систему

$$x'=Ax.$$

Как мы знаем из алгема, матрицу A можно привести к жордановой нормальной форме, то есть найдутся матрицы $B,C\in\mathbb{C}^{n\times n}$, причём $\det(C)\neq 0$, такие что $B=C^{-1}AC$, и матрица B имеет вид

$$\begin{pmatrix}K_1 & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & K_s\end{pmatrix},$$

где K_j — жорданова клетка с собственным значением λ_j и собственным вектором h_j.

Определение. $h_{j,1},\dots,h_{j,k_j}$ называется *серией* с собственным значением λ_j, если $Ah_{j,1}=\lambda_j h_{j,1}$, $Ah_{j,2}=\lambda_j h_{j,2}+h_{j,1}$, и так далее, $Ah_{j,k_j}=\lambda h_{j,k_j}+h_{j,k_j-1}$. У Штепина это, кажется, называлось жордановой диаграммой.

Научимся их находить проще. Пусть $e_1,\dots,e_n$ — базис, тогда, просто подставляя в определение B, получаем $Be_1=\lambda_1 e_1$, $Be_2=\lambda_1 e_2+e_1$, и так далее, $Be_{k_1}=\lambda_1 e_{k_1}+e_{k_1-1}$. Теперь выразим B через A:

$$C^{-1}ACe_1=\lambda_1 e_1\Rightarrow A(Ce_1)=\lambda_1(Ce_1).$$

Аналогично $A(Ce_2)=\lambda_1(Ce_2)+Ce_1$.

Таким образом, зная матрицу C, мы можем вычислить серию довольно нехитрым образом: $h_{1,i}=Ce_i$, аналогично для остальных клеток.

На этом воспоминания из алгема заканчиваются, вернёмся к диффурам. Положим

$$\omega_{j,r}(t):=\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}h_{j,1}+\frac{t^{r-2}}{(r-2)!}h_{j,2}+\dots+h_{j,r},$$

где $j = \overline{1,s}$ и $r = \overline{1,k_j}$. Заметим, что всего функций будет n из простых комбинаторных соображений.

Теорема. Набор функций $\omega_{j,r}(t)e^{\lambda_j t}$ является фундаментальной системой решений. Так, мы научились явно строить решение системы.

Доказательство. Проверим, что все n функций действительно являются решениями. Для этого нам понадобится два тождества. Первое:

$$\omega'_{j,r}(t) \equiv \omega_{j,r-1}(t).$$

(здесь мы считаем, что $\omega_{j,0}(t) \equiv 0$)

Второе:

$$A\omega_{j,r}(t) \equiv \lambda_j \omega_{j,r}(t) + \omega_{j,r-1}(t).$$

Следует из соотношений на $h_{j,\cdot}$, как на серию.

Теперь подставим в систему:

$$\frac{d}{dt}\left(\omega_{j,r}(t)e^{\lambda_j t}\right) \equiv \left(\omega'_{j,r}(t) + \lambda_j \omega_{j,r}\right)e^{\lambda_j t} \equiv (\omega_{j,r-1}(t) + \lambda_j \omega_{j,r})e^{\lambda_j t} \equiv$$

$$\equiv A\omega_{j,r}(t) \cdot e^{\lambda_j t} \equiv A(\omega_{j,r}(t)e^{\lambda_j t}).$$

Следовательно, решением являются.

Проверим линейную независимость. Заметим, что $\omega_{j,r}(t)e^{\lambda_j t}|_{t=0} = h_{j,r}$. Из простых соображений все $h_{j,r}$ линейно независимы, откуда и $\omega_{j,r}(t)e^{\lambda_j t}$ линейно независимы.

□

10.2 Вещественные однородные системы

Пусть нам даны $n \in \mathbb{N}$ и $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, система та же. Теперь нас напрягают комплексные собственные значения.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_l \in \mathbb{C}$, а $\lambda_{l+1}, \ldots, \lambda_{2l}$ — сопряжённые к ним соответственно, и оставшиеся $\lambda_{2l+1}, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{R}$. Тогда серию можно построить так, что $h_{l+1,r} = \overline{h}_{1,r}, \ldots, h_{2l,r} = \overline{h}_{l,r}$.

Определение $\omega_{j,r}$ остаётся тем же, но теперь для $j = \overline{1,l}$ мы рассмотрим функции

$$\frac{1}{2}\left(\omega_{j,r}(t)e^{\lambda_j t} + \overline{\omega_{j,r}(t)e^{\lambda_j t}}\right)$$

и

$$\frac{1}{2i}\left(\omega_{j,r}(t)e^{\lambda_j t} - \overline{\omega_{j,r}(t)e^{\lambda_j t}}\right).$$

Нетрудно заметить, что они вещественные, являются решениями и линейно независимы (это доказывалось в предыдущем параграфе). Остаются вещественные собственные значения, но для них всё просто: $\omega_{j,r}(t)e^{\lambda_j t}$ подойдёт.

Перепишем решения для $j = \overline{1,l}$ в более удобном виде. Пусть $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$, $h_{j,r} = a_{j,r} + ib_{j,r}$ — алгебраическая форма записи комплексного числа. Тогда первая группа решений будет иметь вид

$$Re\left(\omega_{j,r}(t)e^{\lambda_j t}\right) = \left(\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}a_{j,1} + \cdots + a_{j,r}\right)\cos(\beta_j t)e^{\alpha_j t} -$$

$$- \left(\frac{t^{r-1}}{(r-1)!} b_{j,1} + \dots + b_{j,r} \right) \sin(\beta_j t) e^{\alpha_j t}$$

— произведение действительных частей минус произведение мнимых.

Вторая —

$$\left(\frac{t^{r-1}}{(r-1)!} b_{j,1} + \dots + b_{j,r} \right) \cos(\beta_j t) e^{\alpha_j t} + \left(\frac{t^{r-1}}{(r-1)!} a_{j,1} + \dots + a_{j,r} \right) \sin(\beta_j t) e^{\alpha_j t}.$$

10.3 Компексные неоднородные системы

Как и ранее, у нас есть $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, многочлен $p : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ и число $\gamma \in \mathbb{C}$. Рассмотрим систему

$$x' = Ax + p(t)e^{\gamma t}.$$

Определение. $p(t)e^{\gamma t}$ будем называть *правой частью специального вида*. В этом случае мы умеем находить частное решение даже без метода вариации постоянной.

Перепишем систему в более удобном виде

$$z' = Bz + \tilde{p}(t)e^{\gamma t},$$

где $B = C^{-1}AC$ и $\tilde{p}(t) = C^{-1}p(t)$.

Какая связь между системами (2) и (3)? Пусть $z(\cdot)$ — решение (3), положим $x(\cdot) := Cz(\cdot)$, тогда $z = C^{-1}x$. Подставим в систему (2): $C^{-1}x' = BC^{-1}x + \tilde{p}e^{\gamma t}$, откуда $x' = CBC^{-1}x + C\tilde{p}e^{\gamma t}$, то есть $x' = Ax + pe^{\gamma t}$. Иными словами, системы эквивалентны, засим будем решать систему (3), ибо она проще из жордановых соображений. В частности, нас только интересует какое-то одно частное решение, ибо остальные получаются по линейности.

Пусть

$$B = \begin{pmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & K_s \end{pmatrix},$$

k_i — размер клетки K_i, λ_i — собственные значения. Напишем систему (3) построчно:

$$\begin{cases} z_1' = \lambda_1 z_1 + z_2 + \tilde{p}_1 e^{\gamma t} \\ \vdots \\ z_{k_1-1}' = \lambda_1 z_{k_1-1} + z_{k_1} + \tilde{p}_{k_1-1} e^{\gamma t} \\ z_{k_1}' = \lambda_1 z_{k_1} + z_{k_1} + \tilde{p}_{k_1} e^{\gamma t} \\ \vdots \end{cases}$$

Проанализируем эти уравнения. Если $\gamma \neq \lambda_1$, то решение k_1-ой строчки можно написать в виде $z_{k_1}(t) = q_{k_1} e^{\gamma t}$, где $\deg(q_{k_1}) \leqslant \deg(p)$, по теореме для линейных однородных уравнений. Аналогично $z_{k_1-1}(t) = q_{k_1-1}(t)e^{\gamma t}$, где $\deg(q_{k_1-1}) \leqslant \deg(p)$. Такую штуку можно провернуть для всех уравнений, что даёт нам искомое решение.

Если же $\gamma = \lambda_1$, то k_1-ое уравнение решается, как $z_{k_1}(t) = t \cdot q_{k_1}(t)e^{\gamma t}$ для $\deg(q_{k_1}) \leqslant \deg(p)$. Загоним t в q_{k+1}, тогда у нас получится всё, как в предыдущем случае, но теперь $\deg(q_{k_1}) \leqslant 1 + \deg(p)$, $\deg(q_{k_1-1}) \leqslant 2 + \deg(p)$ и так далее. По итогу,

Теорема. Если $\gamma \neq \lambda_j$ для всех j, то существует частное решение системы (2), имеющее вид $x(t) = P(t)e^{\gamma t}$, где $\deg(P) \leqslant \deg(p)$.

А если же $\gamma = \lambda_j$, то существует частное решение системы (2), имеющее вид $x(t) = P(t)e^{\gamma t}$, где $\deg(P) \leqslant \deg(p) + \max\{k_l\}$, где максимум берётся по таким l, что $\lambda_l = \lambda_j$, ибо в таких клетках как раз реализуется второй случай и оценка на степень ухудшается.

Таким образом, для нахождения частного решения можно просто применить метод неопределённых коэффициентов.

10.4 Вещественные неоднородные системы с правой частью специального вида

Пусть дана $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и многочлены $U, V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Рассмотрим систему

$$x' = Ax + e^{\alpha t}(V(t)\cos(\beta t) + V(t)\sin(\beta t))$$

и систему

$$z' = Az + (U(t) - iV(t))e^{(\alpha+i\beta)t}.$$

У второй системы, как известно, есть решение вида

$$z(t) = (F(t) + iG(t))e^{(\alpha+i\beta)t},$$

где F и G — многочлены, степени которых не превосходят $\max(\deg(U), \deg(V)) + k$, где k — размер наибольшей жордановой клетки, содержащей собственное значение $\lambda = \alpha + i\beta$, в жордановой форме A.

Решение первой системы тогда записывается в виде

$$x(t) = Re(z(t)) = e^{\alpha t}(F(t)\cos(\beta t) - G(t)\sin(\beta t)).$$

Проверим это: при подстановке $Re(z(t))$ во вторую систему мы получим в точности систему (1).

11 Матричная экспонента

11.1 Определение

Пусть дана матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (можно и в $\mathbb{C}^{n\times n}$). Тогда

$$e^A := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!},$$

где $0! = 1$ и $A^0 = E$.

Лемма. Для любого $r > 0$ ряд $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j A^j}{j!}$ сходится абсолютно и равномерно при $|t| \leqslant r$.

Доказательство. Оценим норму одного слагаемого:

$$\left\| \frac{t^j A^j}{j!} \right\| \leqslant \frac{t^j}{j!}\|A\|^j,$$

так как норма произведение не превосходит произведение норм. Ряд слагаемых справа сходится абсолютно и равномерно, как экспонента, поэтому и слева то же самое. Более того, норма суммы не превосходит сумму норм, поэтому

$$\left\|\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^jA^j}{j!}\right\| \leqslant \sum_{j=0}^{\infty}\left\|\frac{t^jA^j}{j!}\right\| \leqslant e^{t\|A\|}.$$

$\square$

11.2 Свойства

Свойство 1. Пусть матрицы A и B коммутируют, тогда $e^{A+B}=e^Ae^B$.

Доказательство. Вычислим левую и правую части:

$$e^{A+B}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(A+B)^j}{j!}=\sum_{j,k=0}^{\infty}\Theta_{j,k}A^jB^k.$$

$$e^Ae^B=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{A^j}{j!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B^k}{k!}=\sum_{j,k=0}^{\infty}\mu_{j,k}A^jB^k.$$

Можно вычислить значения $\Theta_{j,k}$ и $\mu_{j,k}$, но лучше заметим, что они не зависят от n, поэтому их можно вычислить при $n=1$ и подставить в общую формулу. Так вот, при $n=1$ получаем, что A и B — это числа, и свойство заведомо верно. Следовательно, $\Theta_{j,k}=\mu_{j,k}$ при $n=1$ и при всех n.

Замечание. Если $AB\neq BA$, то свойство не обязательно верно. Возьмём

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

Тогда $A^2=B^2=0$ и

$$A+B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, BA=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

То есть $e^Ae^B\neq e^Be^A$, но $e^{A+B}=e^{B+A}$.

Свойство 2. Функция $t\to e^{tA}$ дифференцируема и $\frac{d}{dt}e^{tA}=Ae^{tA}$.

Доказательство. Продифференцируем ряд $e^{tA}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^jA^j}{j!}$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t^jA^j}{j!}\right)\equiv\frac{t^{j-1}A^j}{(j-1)!}.$$

Оценим норму одного слагаемого производной:

$$\leqslant\frac{|t|^{j-1}}{(j-1)!}\|A\|^j.$$

Этот ряд сходится абсолютно и равномерно. Следовательно, функция дифференцируема и её можно дифференцировать почленно.

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) \equiv \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^{j-1}A^j}{(j-1)!} \equiv A \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^{j-1}A^{j-1}}{(j-1)!} \equiv Ae^{tA}.$$

□

Замечание. Матрицу A можно было вынести и справа и получить $e^{tA}A$.

Свойство 3. $X(t) = e^{tA}$ является решением задачи Коши $X' = AX$, $X(0) = E$. Первое следует из свойства 2, второе — из определения. В частности, $X(t)$ является фундаментальной системой решений системы $x = Ax$.

Свойство 4. $\det(e^{tA}) \equiv e^{t\cdot \operatorname{tr}(A)}$. Следует из теоремы Лиувилля-Остроградского: берём $t_0 = 0$, тогда матрица $A(s)$ не зависит от s и интеграл тривиален.

Свойство 5. Пусть

$$K = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(то есть $K = \lambda E + F$ — жорданова клетка, матрицы размера $m \times m$). Тогда

$$e^{tF} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t^j F^j}{j!} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{t}{1!} & \dots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Также

$$e^{t\lambda E} \equiv e^{t\lambda}E.$$

И по итогу

$$e^{tK} = e^{t\lambda E + tF} \equiv e^{t\lambda E}e^{tF} \equiv e^{t\lambda}e^{tF}.$$

Свойство 6. Пусть

$$B = \begin{pmatrix} K_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & K_s \end{pmatrix},$$

где K_i — жордановы клетки. Тогда

$$e^{tB} = \begin{pmatrix} e^{tK_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{tK_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{tK_s} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, так как мы возводим блочную матрицу в степень понятным образом.

Свойство 7. Если $B, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ и $\det(C) \neq 0$, причём $B = C^{-1}AC$, то $e^{tA} = Ce^{tB}C^{-1}$.

Доказательство. Распишем e^{tB}, в каждом множителе C^{-1} и C посередине сократятся, а вхождения по краям можно вынести и получить искомое.

$\square$

12 Теорема Штурма

Пусть $I \subset \mathbb{R}$ — интервал, $a \in C^1(I, \mathbb{R})$, $b \in C(I, \mathbb{R})$ — функции. Рассмотрим уравнение

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0.$$

Правильной заменой его можно свести к уравнению

$$y'' + q(t)y = 0.$$

Найдём такую замену: пусть $x(t) = u(t)y(t)$, тогда $x' = u'y + uy'$ и $x'' = u''y + 2u'y' + uy''$. Тогда уравнение (1) записывается в виде

$$u''y + 2u'y' + au'y + auy' + buy = 0.$$

Теперь будем искать решение, удовлетворяющее уравнению $2u' + au = 0$, тогда $u' = -\frac{1}{2}au$ и

$$u'' = -\frac{1}{2}a'u - \frac{1}{2}au' = \left(-\frac{1}{2}a' + \frac{1}{4}a^2\right)u.$$

Подставим в исходное:

$$uy'' + \left(\left(-\frac{1}{2}a' + \frac{1}{4}a^2\right)u - \frac{1}{2}a^2u + bu\right)y = 0.$$

Если $2u' + au = 0$, то

$$u(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right),$$

поэтому она всегда положительна и можно разделить:

$$y'' + \left(-\frac{1}{2}a' - \frac{1}{4}a^2 + b\right)y = 0.$$

Теперь будем рассматривать только уравнение (2).

12.1 Свойства

Свойство 1. Если $y(\cdot)$ — нетривиальное решение, то все нули функции $y(\cdot)$ являются простыми, то есть если $y(t_0) = 0$, то $y'(t_0) \neq 0$.

Доказательство. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} y'' + q(t)y = 0 \\ y(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = 0 \end{cases}$$

У неё есть ровно одно решение $y(t) \equiv 0$ — тривиальное.

□

Определение. $\widehat{t}$ называется *точкой прикосновения множества* $T \subset \mathbb{R}$, если $\forall \varepsilon > 0$ $T \cap O_\varepsilon(\widehat{t}) \neq \varnothing$. В отличие от предельных точек здесь шар не проколотый.

Свойство 2. Если $y(\cdot)$ — нетривиальное решение, то множество нулей $\{t \in I : y(t) = 0\}$ не имеет предельных точек, то есть нет сходящейся последовательности нулей.

Доказательство. От противного: существует последовательность $\{t_j\} \subset I$ и $t \in I$, такие что $t_j \to t$, все $y(t_j) = 0$ и $y(t) = 0$. Тогда между соседними t_j производная y' обращается в ноль по теореме Ролля, так как значения на концах равны. Тогда $y'(t) = 0$.

□

12.2 Теорема Штурма

Пусть даны $q, Q \in C(I, \mathbb{R})$, числа $t_1, t_2 \in I$, такие что $t_1 < t_2$ и уравнение

$$z'' + Q(t)z = 0.$$

Пусть также:

1. $q(t) \leqslant Q(t)$ на I.
2. y — нетривиальное решение (2).
3. $y(t_1) = y(t_2) = 0$.
4. $y(t) \neq 0$ на (t_1, t_2) (по свойству 2 это натуральное предположение).
5. z — нетривиальное решение (3).

Тогда либо

- ▷ Существует $t_0 \in (t_1, t_2)$, такое что $z(t_0) = 0$.
- ▷ $z(t_1) = z(t_2) = 0$.

Доказательство. Пусть для определённости $y(t) > 0$ на (t_1, t_2) (так как она непрерывна и не равна нулю на интервале, так считать можно). Тогда $y'(t_1) \geqslant 0$ и $y'(t_2) \leqslant 0$. Более того, по свойству 1 $y'(t_1) > 0$ и $y'(t_2) < 0$. Умножим (2) на z, (3) — на y и вычтем:

$$y''(t)z(t) - z''(t)y(t) \equiv (Q(t) - q(t))y(t)z(t).$$

Заметим, что в левой части производная:

$$\frac{d}{dt}\left(y'(t)z(t) - y(t)z'(t)\right) \equiv (Q(t) - q(t))y(t)z(t).$$

Проинтегрируем по t от t_1 до t_2:

$$y'(t_2)z(t_2) - y(t_2)z'(t_2) - y'(t_1)z(t_1) + y(t_1)z'(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} (Q(t) - q(t))y(t)z(t)dt.$$

Вспомним, что t_1 и t_2 — нули функции y:

$$y'(t_2)z(t_2) - y'(t_1)z(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} (Q(t) - q(t))y(t)z(t)dt.$$

Предположим, что $z(t) > 0$ на (t_1, t_2) (при $z(t) < 0$ аналогично). Тогда есть 3 случая: $z(t) > 0$ на $[t_1, t_2]$, $z(t) > 0$ на $[t_1, t_2)$ и $z(t_2) = 0$ и наоборот. Во всех трёх случаях правая часть уравнения (5) неотрицательна, а левая — отрицательна, так как мы вычитаем из неположительного неотрицательное, и хотя бы одно из них отлично от нуля, противоречие.

Таким образом, мы предположили отрицание первого следствия и получили второе следствие, то есть теорема доказана.

$\square$

Пример.

$$y'' + \frac{1}{4(1+t^2)}y = 0, t > 0.$$

Тогда его решение $y(\cdot)$ имеет не более двух нулей. Рассмотрим уравнение

$$z'' + \frac{1}{4t^2}z = 0.$$

Его решением является $z(t) = \sqrt{t}(c_1 \ln(t) + c_2)$ — не более одного нуля. Положим

$$q(t) := \frac{1}{4(1+t)^2}, Q(t) := \frac{1}{4t^2}.$$

По теореме Штурма и перебору случаев получаем искомое.

Пример 2.

$$z'' + (1 + t^2)z = 0, t \in [1, 5].$$

Любое нетривиальное решение имеет хотя бы один нуль. Рассмотрим уравнение

$$y'' + 1 \cdot y = 0.$$

Его решением является $y(t) = c_1 \sin(t + c_2)$. У него либо 1, либо 2 нуля в зависимости от c_2. Рассмотрим решения с двумя. По теореме Штурма между этими двумя нулями есть нуль функции $z(t)$.

Следствие 1. Пусть $q(t) \leqslant 0$. Тогда для любого нетривиального решения $y(\cdot)$ мощность множества его нулей не превосходит 1.

Доказательство. Положим $Q(t) \equiv 0$. Тогда уравнение (3) имеет вид $z'' = 0$ и $z(t) \equiv 1$ — нетривиальное решение. Если у решения $y(\cdot)$ хотя бы 2 нуля, то по теореме Штурма у $z(t) \equiv 1$ есть хотя бы один нуль.

$\square$

Следствие 2. Пусть y_1, y_2 — линейно независимые решения (2), t_1 и t_2 — последовательные нули $y_1(t)$. Тогда существует единственная точка $t \in (t_1, t_2)$, такая что $y_2(t) = 0$. Иными словами, их нули чередуются (если два нуля совпали, то решения линейно зависимы).

Доказательство. Положим $Q(t) = q(t)$, тогда по теореме Штурма существует $t \in [t_1, t_2]$, такое что $y_2(t) = 0$. Если $t = t_1$, то определитель Вронского

$$\omega(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$$

равен нулю, так как верхняя строчка равна нулю, что противоречит линейной независимости y_1 и y_2. При $t = t_2$ то же самое, поэтому все нули лежат в интервале. Докажем единственность. Пусть существуют $\tau_1, \tau_2 \in (t_1, t_2)$, такие что $\tau_1 < \tau_2$ и $y_2(\tau_1) = y_2(\tau_2) = 0$. Тогда по теореме Штурма существует нуль решения y_1 в интервале (τ_1, τ_2) — противоречие.

□

Следствие 3. Пусть существует нетривиальное решение $\widehat{y}$ уравнения (2), такое что множество его нулей бесконечно. Тогда для любого решения y этого уравнения множество его нулей тоже бесконечно. Очевидно из следствия 2: либо линейно зависимы, тогда множества нулей совпадают, либо независимы, тогда бесконечно между нулями $\widehat{y}$.

13 Зависимость решения задачи Коши от параметра

Теорема 1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ открыто, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ непрерывно, $\frac{\partial f}{\partial x}$ существует и непрерывна, $(t_0, x_0) \in \Omega$ — произвольные, $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ решение задачи Коши, $[\alpha, \beta]$ — отрезок, такой что $t_0 \in [\alpha, \beta] \subset I$, $\rho > 0$ — число, такое что $V = \{(t, x) : |x - \varphi(t)| \leqslant \rho, t \in [\alpha, \beta]\} \subset \Omega$.

Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ с теми же ограничениями, что и на f, таких что $|f - g| \leqslant \delta$ на V, решение $y(\cdot)$ задачи Коши с (t_0, y_0) существует на $[\alpha, \beta]$ и $|\varphi(t) - y(t)| < \varepsilon$ на $[\alpha, \beta]$.

Доказательство. Функция f ограничена числом m и липшицева с константой k. Пусть $J \subset [\alpha, \beta]$ — отрезок, такой что $t_0 \in J$ и при $t \in J$ $(t, y(t)) \in V$. Тогда

$$|y'(t) - \varphi'(t)| = |g(t, y(t)) - f(t, \varphi(t))| \leqslant$$

$$\leqslant |g(t, y(t)) - g(t, y(t)) - f(t, y(t))| + |f(t, y(t)) - f(t, \varphi(t))| \leqslant$$
$$\leqslant \delta + k|\varphi(t) - y(t)|, \forall t \in J.$$

Положим $r = \beta - \alpha$, тогда $|\varphi(t) - y(t)| \leqslant \delta e^{kr} + \frac{\delta}{k}(e^{kr} - 1)$. Выберем δ так, чтобы это было меньше ε. По теореме о продолжении решения решение $y(\cdot)$ определено на всём отрезке $[\alpha, \beta]$, так как мы сделали разность достаточно малой. Оценка на модуль разности решений следует из выбора δ.

□

Теорема 2. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ открыто, $M \subset \mathbb{R}^m$, $M \neq \varnothing$, $f : \Omega \times M \to \mathbb{R}^n$ непрерывно, $a : M \to \mathbb{R}^n$ непрерывно, $\frac{\partial f}{\partial x}$ существует и непрерывна, $\varphi(\cdot, \mu)$ — непродолжаемое решение задачи Коши

$$\begin{cases} x' = f(t, x, \mu) \\ x(t_0) = a(\mu) \end{cases},$$

$D := \{(t, \mu) : \varphi(t, \mu)$ определено$\}$. Тогда отображние $\varphi(\cdot, \cdot)$ непрерывно и множество D открыто.

Доказательство. Докажем непрерывность. Зафиксируем $(\widehat{t}, \widehat{\mu}) \in D$. Возьмём отрезок $[\alpha, \beta]$, такой что $t_0 \in (\alpha, \beta)$ и $\widehat{t} \in (\alpha, \beta)$. Зафиксируем $\rho > 0$, такое что

$$V := \{(t, x) : t \in [\alpha, \beta], |\varphi(t, \widehat{\mu}) - x| \leqslant \rho\} \subset \Omega.$$

Тогда по теореме 1 $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0$. Пусть $O(\widehat{\mu}) \subset M$ — такая окрестность $\widehat{\mu}$, что

$$\begin{cases} |f(t,x,\mu) - f(t,x,\widehat{\mu})| \leqslant \delta, \forall (t,x) \in V \\ |a(\mu) - a(\widehat{\mu})| \leqslant \delta \end{cases}.$$

Почему так можно выбрать: второе условие очевидно в силу непрерывности, а первое можно от противного, доказывается через компактность и выбор сходящейся подпоследовательности.

Тогда по теореме 1 для всех $\mu \in O(\widehat{\mu})$ имеем, что $\varphi(\cdot,\mu)$ определено на $[\alpha,\beta]$ и $|\varphi(t,\mu) - \varphi(t,\widehat{\mu})| < \varepsilon$ на $[\alpha,\beta]$. Из этого напрямую следует, что D открыто. Так как при фиксированном μ функция $\varphi(\cdot,\mu)$ является решением задачи Коши, она непрерывна. Следовательно, существует окрестность $T \ni \widehat{t}$, такая что $|\varphi(t,\widehat{\mu}) - \varphi(\widehat{t},\widehat{\mu})| < \varepsilon$. Тогда для всех $(t,\mu) \in T \times O(\widehat{\mu})$ имеем

$$|\varphi(t,\mu) - \varphi(\widehat{t},\widehat{\mu})| \leqslant |\varphi(t,\mu) - \varphi(t,\widehat{\mu})| + |\varphi(t,\mu) - \varphi(\widehat{t},\widehat{\mu})| < \varepsilon + \varepsilon.$$

Таким образом, $\varphi(\cdot,\cdot)$ непрерывна.

□

Теорема 3. (б/д) Дополнительно к условиям теоремы 2 предположим, что $M \subset \mathbb{R}$ открыто, $\frac{\partial f}{\partial \mu}$ и a' существуют и непрерывны. Тогда φ непрерывно дифференцируема, существует и непрерывны производные $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial \mu}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu \partial t}$, и $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu \partial t} \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial \mu}$. Более того, $\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}(t,\widehat{\mu})$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} v' = \frac{\partial f}{\partial x}(t,\varphi(t,\widehat{\mu}))v + \frac{\partial f}{\partial \mu}(t,\varphi(t,\widehat{\mu}),\widehat{\mu}) \\ v(t_0) = a'(\widehat{\mu}) \end{cases}.$$

14 Линейные уравнения, уравнение Эйлера

Эта тема должна была быть раньше, но Жуковский забыл про неё.

Пусть $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна. Рассмотрим *уравнение Эйлера*

$$a_0 t^n x^{(n)} + \dots + a_{n-1} t x' + a_n x = b(t).$$

Правильной заменой его можно свести к уравнению с постоянными коэффициентами. Решим его при $t > 0$, сделав замену $t = e^s$, $y(s) = x(e^s)$. Получим $y' = x' e^s$, $y'' = x'' e^{2s} + x' + e^s = x'' e^{2s} + y'$ и так далее. Теперь можно выразить $x' = e^{-s} y'$, $x'' = (y'' - y) e^{-2s}$ и так далее. Можно доказать, что k-ая производная — это линейная комбинация производных y, умноженная на e^{-ks}.

Дальше для $n = 2$: $a_0 t^2 x'' + a_1 t x' + a_2 x = b(t)$. После подстановки получим

$$a_0 e^{2s} (y'' - y') e^{-2s} + a_1 e^s y' e^{-s} + a_2 y = b(e^s).$$

Потом нужно отдельно решить для $t < 0$, после чего не гарантируется, что решения получится склеить, например, если $x(t) = \frac{1}{t}$: решение не может содержать точку $t = 0$.