Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

V-VI СЕМЕСТР

Лектор: *Коновалов Сергей Петрович*

КОНСПЕКТ НЕ ЗАКОНЧЕН
ОБ ОШИБКАХ СООБЩАТЬ СЮДА

Автор: *Хаймоненко Виктор*

Проект на Github

осень-весна 2021-22

Содержание

1 Линейные ограниченные (непрерывные) операторы

Пусть E_1, E_2 – линейные нормированные пространства над полем $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$).

Определение 1.1. Отображение $A : E_1 \to E_2$ называется *оператором*.

Определение 1.2. Отображение $A : E_1 \to \mathbb{K}$ называется *функционалом*.

Определение 1.3. Оператор A называется *ограниченным*, если для любого ограниченного множества $M \subset E_1$ множество $A(M) = \{y \in E_2 : \ \exists x \in M \hookrightarrow A(x) = y\}$ является ограниченным.

Замечание. Функция $I : E \to E$, такая что $I(x) = x \ \forall x \in E$ является ограниченной по определению выше, но не является ограниченной с точки зрения определения из математического анализа.

Определение 1.4. $ImA = \{y \in E_2 : \ \exists x \in E_1 \hookrightarrow A(x) = y\}$ – *образ* оператора A, $KerA = \{x \in E_1 : \ A(x) = \theta\}$, где θ – нулевой элемент пространства E_2, называется *ядром* отображения A.

Определение 1.5. Оператор $A : \ E_1 \to E_2$ называется *линейным*, если

1. $A(x + y) = Ax + Ay \ \forall x,y \in E_1$
2. $A(\lambda x) = \lambda Ax \ \forall x \in E_1, \forall \lambda \in \mathbb{K}$

Утверждение 1.1. *Пусть A – линейный оператор. Тогда следующие утверждения эквивалентны*

1. *A – ограниченный*
2. *$\exists K : \ \|Ax\| \leqslant K\|x\| \ \forall x \in E_1$*
3. *$A(B_1(\theta))$, где $B_1(\theta)$ – шар единичного радиуса с центром в нуле, является ограниченным множеством*

Доказательство. Пусть выполняется неравенство в пункте 2. Пусть $x \in B_1(\theta)$. Если $x = \theta$, то неравенство выполнено автоматически для любого неотрицательного K. Так как $\|x\| \leqslant 1$, то $\|Ax\| \leqslant K\|x\| \leqslant K$. Обратно, пусть выполнено условие пункта 3. Рассмотрим $x \in E_1 \backslash \{\theta\}$.Тогда $\|Ax\| = \left\|A\dfrac{x}{\|x\|}\|x\|\right\| \leqslant K\|x\|$ в силу ограниченности образа единичного шара. Если $x = \theta$, то неравенство выполнено автоматически для любого неотрицательного K.

Пусть выполнено условие пункта 3. Тогда, если $M \subset E_1$ – ограниченное множество, то $\exists n \in \mathbb{N} : \ M \subset B_n(\theta)$. Тогда $\forall x \in B_n(\theta) \hookrightarrow \dfrac{x}{n} \in B_1(\theta)$, то есть $\|Ax\| = \left\|A\dfrac{x}{n}\cdot n\right\| \leqslant Cn$. Следовательно, $A(M)$ – ограниченное множество. Обратно, так как единичный шар – ограниченное множество, то и его образ ограниченное множество. □

Определение 1.6. Назовем число $\|A\|$ *нормой* оператора A, если $\|A\| = \inf\limits_{K: \ \|Ax\| \leqslant K\|X\|} K$.

Утверждение 1.2. *$\|A\|$ удовлетворяет неравенству $\|Ax\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|$.*

Доказательство. Следует из определения точной нижней грани. □

Утверждение 1.3. *Пусть A – линейный ограниченный оператор. Тогда*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Ax\| = \sup_{\|x\|=1}\|Ax\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Доказательство. $\|A\| \geqslant \|A\|\cdot\|x\| \geqslant \|Ax\|$, $\|x\| \leqslant 1$. Следовательно, $\|A\| \geqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Ax\| \geqslant \sup_{\|x\|=1}\|Ax\|$. Так как $\forall x \neq 0 \hookrightarrow \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \left\|A\frac{x}{\|x\|}\right\|$, где $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1$, то $\sup_{\|x\|=1}\|Ax\| \geqslant \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$. Покажем, что $\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geqslant \|A\|$. Из определения точной нижней грани

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in E_1 :\ (\|A\| - \varepsilon)\|x_\varepsilon\| < \|Ax_\varepsilon\| \leqslant \|A\|\cdot\|x_\varepsilon\| \Leftrightarrow (\|A\| - \varepsilon) < \frac{\|Ax_\varepsilon\|}{\|x_\varepsilon\|} \leqslant \|A\|.$$

Следовательно, $\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|$. □

Замечание. 1) Если $\dim E_1 < \infty$, то все линейные операторы ограничены

2) Если $\dim E_1 = \infty$, то существуют такие E_1, E_2, что $A :\ E_1 \to E_2$, и A не является ограниченным.

Пример. Пусть $E_1 = C^1[0,1]$ с нормой из $C[0,1]$, $E_2 = C[0,1]$. Рассмотрим оператор $D : E_1 \to E_2$, $D(f) = \frac{df}{dx}$. Тогда $f_n = \frac{\sin nx}{n} \rightrightarrows 0$ при $n \to \infty$ по признаку Вейерштрасса, но $D(f_n) = \cos nx$ не имеет даже поточечного предела при $n \to \infty$ (И ЧТО ИЗ ЭТОГО? ДОДЕЛАТЬ!).

Замечание. Для нахождения нормы оператора $\|A\|$ рекомендуется изначально сделать оценку сверху, а потом показать, что эта оценка достигается.

Пример. Пусть $E_1 = E_2 = C[0,1]$. Рассмотрим *оператор Вольтерра:*

$$(Af)(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Тогда $ImA = \{g \in C[0,1],\ g(0) = 0\}$, $KerA = \{0\}$.

Теорема 1.1. *Пусть E_1,E_2 – линейные нормированные пространства, $A : E_1 \to E_2$ – линейный оператор. Тогда A – ограничен тогда и только тогда, когда A – непрерывен.*

Доказательство. Пусть A ограничен, $\{x_n\} \subset E_1 :\ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in E_1$. Тогда $\|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и $\|Ax_1 - Ax\| = \|A(x_1 - x)\| \leqslant \|A\|\cdot\|x_1 - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Обратно, пусть A непрерывен. Предположим, что A неограничен. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in E_1 :\ \|Ax_n\| > n\|x_n\|$. Рассмотрим $y_n := \frac{x_n}{\|x_n\|n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Тогда $\|Ay_n\| = \left\|A\frac{x_n}{\|x_n\|n}\right\| > \frac{n\|x_n\|}{n\|x_n\|} = 1$. Но так как образ нулевого элемента линейного оператора равняется нулю, то приходим к противоречию. □

Определение 1.7. Обозначим $\mathcal{L}(E_1,\, E_2)$ пространство линейных ограниченных операторов.

Определение 1.8. Пусть E – линейное нормированное пространство. Тогда пространство $E^* = \mathcal{L}(E,\, \mathbb{K})$ называется *сопряженным* пространством.

Теорема 1.2. *Пусть $E_1,\, E_2$ – линейные нормированные пространства. Тогда*

1. *$\mathcal{L}(E_1,\, E_2)$ – линейное нормированное пространство с нормой $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$,*

2. *Если E_2 – банахово, то $\mathcal{L}(E_1,\, E_2)$ – банахово.*

Доказательство.

1. Операции сложения двух линейных операторов и умножение на константу не выводят из пространства линейных операторов. Докажем, что $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$ является нормой. $\|A\| = 0 \Leftrightarrow \forall x \in E_1, \|x\| = 1 \hookrightarrow \|Ax\| = 0 \Leftrightarrow Ax = 0\ \forall x \in E_1$. В силу линейности $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ выполнено

$$\|\lambda A\| = \sup_{\|x\|=1} \|\lambda Ax\| = \sup_{\|x\|=1} |\lambda|\cdot \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} |\lambda|\cdot \|Ax\| = |\lambda| \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = |\lambda|\cdot \|A\|.$$

Пусть $A_1,\, A_2 \in \mathcal{L}(E_1,\, E_2)$. Тогда

$$\|A_1 + A_2\| = \sup_{\|x\|=1} \|(A_1 + A_2)x\| = \sup_{\|x\|=1} \|A_1x + A_2x\| \leqslant \sup_{\|x\|=1} (\|A_1x\| + \|A_2x\|) \leqslant \sup_{\|x\|=1} \|A_1x\| + \sup_{\|x\|=1} \|A_2x\| = \|A_1\| + \|A_2\|.$$

2. Пусть $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(E_1,\, E_2)$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N :\ \forall n,m \geqslant N \hookrightarrow \|A_n - A_m\| < \varepsilon$. Пусть $x \in E_1$, $\|x\| = 1$. Тогда $\varepsilon > \|A_n - A_m\| \geqslant \|(A_n - A_m)x\| = \|A_nx - A_mx\|$. Следовательно, $\forall x \in E_1$, $\|x\| = 1$ последовательность $\{A_nx\}$ является фундаментальной в E_2. Так как E_2 банахово, то $\exists y \in E_2$, такой что $A_nx \to y =: Ax\ \forall x \in E_1$, $\|x\| = 1$. Докажем, что оператор A, определяемый таким способом, является линейным. Покажем, что A – ограниченный оператор. Так как последовательность $\{A_n\}$ фундаментальна, то она ограничена. Следовательно, $\exists K :\ \|A_n\| \leqslant K\ \forall n \in \mathbb{N}$. Так как норма в линейном нормированном пространстве является непрерывной функцией, и $\forall x \in E_1 \hookrightarrow A_nx \xrightarrow[n\to\infty]{} Ax$, то $\|A_nx\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|Ax\|$. Из того, что $\|A_nx\| \leqslant \|A\|\cdot \|x\| \leqslant K\|x\| \Rightarrow \|Ax\| \leqslant K\|x\|$. Поэтому, A – ограниченный.

   Покажем, что $\|A_n - A\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Так как последовательность $\{A_n\}$ фундаментальна, то $\forall x \in E_1$, $\|x\| = 1$, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall n,m \geqslant N \hookrightarrow \|A_nx - A_mx\| < \varepsilon$. Устремляя m к бесконечности, получаем $\|A_nx - Ax\| \leqslant \varepsilon$. Следовательно, $\sup\limits_{\|x\|=1} \|A_nx - Ax\| = \|A_n - A\| < \varepsilon$.

□

Упражнение. *Пусть $A_n \in \mathcal{L}(E_1,\, E_2)\ \forall n \in \mathbb{N}$, и $\forall x \in E_1 \hookrightarrow A_nx \to Ax$. Следует ли из этого ограниченность оператора A?*

Пример. Пусть $H = l_2$, (e^n) – ОНБ, где e^n – последовательности, в которых на n-м месте стоит единица, а на других позициях – нули. Сопоставим элементу $x \in H$ его ряд Фурье по системе (e^n):

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x,\, e^n)\, e^n.$$

Обозначим $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(x,\, e^k\right) e^k$. Тогда $\forall x \hookrightarrow S_n(x) \to x$, то есть S_n сходится поточечно к тождественному оператору. С другой стороны, для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется $\left\|S_n\left(e^{n+1}\right) - I\left(e^{n+1}\right)\right\| = 1$, то есть $\|S_n - I\| \nrightarrow 0$ при $n \to \infty$.

2 Сопряженное пространство. Теорема Рисса-Фреше. Теорема Хана-Банаха

Теорема 2.1. *(Банах, б/д) Пусть E_1, E_2 – банаховы пространства, и отображение $A \in \mathcal{L}(E_1,\, E_2)$ является биекцией. Тогда $A^{-1} \in \mathcal{L}(E_2,\, E_1)$.*

Определение 2.1. Пространство $E^* := \mathcal{L}(E,\, \mathbb{H})$, где E – линейное нормированное пространство над $\mathbb{H}$ ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), называется *сопряженным пространством.*

Упражнение. *Пусть H – гильбертово пространство над $\mathbb{C}$, $A \in \mathcal{L}(H)$, и $\forall x \in H \hookrightarrow (Ax{,}x) = 0$. Следует ли из этого, что $A = 0$? Верно ли это, если H – гильбертово над $\mathbb{R}$?*

Определение 2.2. Пусть E – линейное нормированное пространство. Тогда $\{x_n\}$ сходится слабо к x в E, если $\forall f \in E^* \hookrightarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$.

Теорема 2.2. *(Рисса-Фреше) Пусть H – гильбертово пространство. Тогда для любого линейного непрерывного функционала $f \in H^*$ существует и единственный $y_0 \in H$: $f(x) = (x,\, y_0)$ $\forall x \in H$. При этом $\|f\| = \|y_0\|$.*

Доказательство. Приведем два варианта доказательства. Во втором, в отличии от первого, требуется сепарабельность пространства H.

1. Докажем сначала существование такого y_0.

Если $f = 0$, то $y_0 = 0$, и $f(x) = (x,\, y_0)$ $\forall x \in H$.

Если $f \neq 0$, то $M := Kerf \neq H$. По теореме Рисса о проекции $H = M \oplus M^\perp$. Значит, $\forall x \in H \hookrightarrow x = z + \alpha x_0$, где $z \in Kerf$, $x_0 \in [Kerf]^\perp$. Значит, $x - \alpha x_0 \in Kerf$. Тогда $f(x - \alpha x_0) = f(x) - \alpha f(x_0) = 0 \Rightarrow \alpha = \dfrac{f(x)}{f(x_0)}$. Следовательно,

$$\forall x \in H \hookrightarrow x = z + \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0 \Rightarrow (x,\, x_0) = \frac{f(x)}{f(x_0)} \|x_0\|^2 \Rightarrow \left(x,\, \frac{f(x_0)}{\|x_0\|^2} x_0\right) = f(x).$$

Обозначив $y_0 := \dfrac{f(x_0)}{\|x_0\|^2} x_0$, получим требуемое.

Докажем единственность y_0. Пусть $\exists y_1,\, y_2 \in H :\ \forall x \hookrightarrow\ (x,\, y_1) = (x,\, y_2) = f(x)$. Тогда $(x,\, y_1 - y_2) = 0$. Взяв $x = y_1 - y_2$, получим $(y_1 - y_2,\, y_1 - y_2) = 0 \Rightarrow y_1 - y_2 = 0$.

2. В предположении сепарабельности пространства H существует ортонормированный базис $\{e_n\}$, что $\forall x \in H \hookrightarrow x = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(x,\, e_n)e_n$. Пусть $f \in H^*$. Тогда так как f – непрерывный оператор, то $f(S_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$, где $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(x,\, e_k)e_k$. С другой стороны, $f(S_n) = f\left(\sum\limits_{k=1}^{n}(x,\, e_k)e_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n}(x,\, e_k)f(e_k) = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(x,\, \overline{f(e_k)}e_k\right) = \left(x,\, \sum\limits_{k=1}^{n}\overline{f(e_k)}e_k\right)$. Докажем, что $y_0 := \sum\limits_{k=1}^{\infty}\overline{f(e_k)}e_k \in H$. Вспомним, что, если $\{e_n\}$ – ортонормированная система векторов, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2$. Покажем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\overline{f(e_n)}\right|^2$ сходится. С одной стороны, $\sum\limits_{n=1}^{N}\left|\overline{f(e_n)}\right|^2 = \left\|\sum\limits_{n=1}^{N}\overline{f(e_n)}e_n\right\|^2$. С другой стороны,

$$\sum_{n=1}^{N}\left|\overline{f(e_n)}\right|^2 = \sum_{n=1}^{N}\overline{f(e_n)}f(e_n) = f\left(\sum_{n=1}^{N}\overline{f(e_n)}e_n\right) \leqslant \|f\|\left\|\sum_{n=1}^{N}\overline{f(e_n)}e_n\right\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\|\sum_{n=1}^{N}\overline{f(e_n)}e_n\right\|^2 \leqslant \|f\|\left\|\sum_{n=1}^{N}\overline{f(e_n)}e_n\right\| \Rightarrow \left\|\sum_{n=1}^{N}\overline{f(e_n)}e_n\right\| \leqslant \|f\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|f\|^2 \geqslant \sum_{n=1}^{N}\left|\overline{f(e_n)}\right|^2 \Rightarrow \text{ряд } \sum_{n=1}^{N}\left|\overline{f(e_n)}\right|^2 \text{ сходится.}$$

Из этого получаем, что ряд $y_0 := \sum\limits_{k=1}^{\infty}\overline{f(e_k)}e_k$ сходится к элементу из H. Единственность доказывается аналогично. □

Теорема 2.3. *(Хан-Банах) Пусть E – линейное нормированное пространство, $M \subset E$ – линейное многообразие, f – линейный ограниченный функционал на M. Тогда $\exists \tilde{f} \in E^*$:*

1. $\tilde{f}\Big|_M = f$.

2. $\left\|\tilde{f}\right\| = \|f\|$.

Доказательство. Если $M = E$, то, взяв $\tilde{f} = f$, получим требуемое. Пусть теперь $M \neq E$. Предположим, что E – вещественное, сепарабельное пространство. Рассмотрим многообразие $M_1 = M \oplus [x_0]$, где $x_0 \notin M$. Тогда $\forall y \in M_1 \hookrightarrow y = x + \alpha x_0$, где $x \in M$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Определим функционал f_1 на M_1 как $f_1(y) = f(x) + \alpha f(x_0)$. Тогда $\|f_1\| \geqslant \|f\|$, т.к. $f_1|_M = f$. Покажем, что $\|f_1\| \leqslant \|f\|$. Если $\alpha = 0$, то выполняется неравенство $|f_1(y)| = |f(x)| \leqslant \|f\|\cdot\|x\|$. Пусть $\alpha \neq 0$. Достаточно доказать верность неравенства

$$\forall y \in M_1 \hookrightarrow |f_1(y)| = |f(x) + \alpha f(x_0)| \leqslant \|f\|\cdot\|x + \alpha x_0\|.$$

Обозначим $z := \dfrac{x}{\alpha}$. Если неравенство верно, то

$$\forall z \hookrightarrow -\|f\|\cdot\|z+x_0\| \leqslant f(z)+f(x_0) \leqslant \|f\|\cdot\|z+x_0\| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\|f\|\cdot\|z+x_0\| - f(z) \leqslant f(x_0) \leqslant \|f\|\cdot\|z+x_0\| \ - \ f(z).$$

Существование такого $f(x_0)$ равносильно

$$\sup_z -\|f\|\cdot\|z+x_0\| - f(z) \leqslant \inf_z \|f\|\cdot\|z+x_0\| - f(z) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall z_1, z_2 \in M \hookrightarrow -\|f\|\cdot\|z_1+x_0\| - f(z_1) \leqslant \|f\|\cdot\|z_2+x_0\| - f(z_2) \Leftrightarrow$$
$$f(z_2)-f(z_1) \leqslant \|f\|(\|z_1+x_0\|+\|z_2+x_0\|).$$

Последнее неравенство следует из неравенства

$$|f(z_2)-f(z_1)| = f(z_2-z_1) \leqslant \|f\|\cdot\|z_2-z_1\| \leqslant \|f\|(\|z_1+x_0\|+\|z_2+x_0\|),$$

которое выполнено. Таким образом, существует такое число $f(x_0)$, что выполняется неравенство $|f(x)+\alpha f(x_0)| \leqslant \|f\|\cdot\|x+\alpha x_0\|$, и, следовательно, $\|f_1\| \leqslant \|f\|$.

Продолжим этот процесс, определив $M_2 = M_1 \oplus [x_1]$, где $x_1 \notin M_1$, если $M_1 \neq E$, и т.д. Если за конечное количество шагов k получилось, что $M_k = E$, то функционал $f_k|_M = f$, и $\|f_k\| = \|f\|$.

Иначе, получим последовательность линейных многообразий $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$, что $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow M_n \neq E$. Из сепарабельности пространства E следует, что $\exists X = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, что X – всюду плотно. Тогда построим последовательность $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ следующим образом: по очереди перебирая $x_i \in X$, проверяем, лежит ли x_i в M_j. Если да, то переходим к x_{i+1}. Иначе, строим $M_{j+1} = M_j \oplus [x_i]$. Обозначим $M_\infty := \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} M_n$, где $M_0 = M$. Так как $X \subset M_\infty$, то M_∞ всюду плотно в E. Определим на M_∞ функционал $f_\infty : \ f_\infty|_{M_n} = f_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $\|f_\infty\| = \|f\|$.

Вспомним Теорему 5.3, в которой утверждается, что, если E_1 – линейное нормированное пространство, E_2 – банахово пространство, $D(A) \subset E_1$ – линейное многообразие, являющееся всюду плотным в E_1, $A : D(A) \to E_2$ – линейный ограниченный функционал, то $\exists! \tilde{A} \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, что $\tilde{A}|_{D(A)} = A$, $\left\|\tilde{A}\right\| = \|A\|$.

Таким образом, f_∞ удовлетворяет условиям теоремы, следовательно, $\exists! \tilde{f}$, являющееся продолжением f_∞ на все E_1. □

Замечание. Вообще говоря, продолжение на все пространство не единственно.

Упражнение. *Доказать теорему Хана-Банаха для случая, когда E не является сепарабельным.*

Следствие. Пусть E – линейное нормированное пространство.

1. Пусть $M \subset E$ – линейное многообразие, $M \neq E$, $x_0 \notin \overline{M}$. Тогда $\exists f \in E^*$, что $f|_M = 0$, $f(x_0) = 1$, $\|f\| = \dfrac{1}{\rho(x_0, M)}$.

2. $\forall x \in E$, $x \neq 0$ $\exists f \in E^*$, что $\|f\| = 1$, $f(x) = \|x\|$.

3. Если $f(x) = 0 \ \forall f \in E^*$, то $x = 0$. Другими словами, если $f(x) = f(y) \ \forall f \in E^*$, то $x = y$.

4. $\forall x \in E \hookrightarrow \|x\| = \sup\limits_{\|f\|=1} |f(x)|$.

Доказательство.

1. Пусть $M_1 = M \oplus [x_0]$. Тогда $\forall y \in M_1 \hookrightarrow y = x + \alpha x_0$, где $x \in M$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Определим $f(y) = f(x) + \alpha f(x_0) = 0 + \alpha \cdot 1$. Тогда по теореме Хана-Банаха существует и единственно продолжение $\tilde{f} \in E^* : \ \tilde{f}|_{M_1} = f, \ \left\|\tilde{f}\right\| = \|f\|$.

   Докажем, что $\|f\| = \dfrac{1}{\rho(x_0, M)}$. Сперва, найдем верхнюю грань $\|f\|$:

   $$\frac{\|f(y)\|}{\|y\|} = \frac{|\alpha|}{\|y\|} = \begin{cases} \leqslant \dfrac{1}{\rho(x_0, M)} & , \alpha = 0 \\ \dfrac{1}{\left\|\dfrac{y}{\alpha}\right\|} & , \alpha \neq 0 \end{cases}.$$

   Далее, $\left\|\dfrac{y}{\alpha}\right\| = \left\|\dfrac{x}{\alpha} + x_0\right\| \geqslant \rho(x_0, M) \Rightarrow \dfrac{1}{\left\|\dfrac{y}{\alpha}\right\|} \leqslant \dfrac{1}{\rho(x_0, M)}$.

   Так как $\rho(x_0, M) = \inf\limits_{x \in M} \rho(x_0, x)$, то $\exists \{z_n\} \subset M : \ \rho(x_0, z_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho(x_0, M)$.

   $$\frac{|f(y)|}{\|y\|} = \frac{|\alpha|}{\|y\|} = \frac{1}{\left\|\dfrac{x}{\alpha} + x_0\right\|}, \ \alpha \neq 0.$$

   Так как $\dfrac{x}{\alpha}$ принимает всевозможные значения из M, то

   $$\sup_{x \in M} \frac{1}{\left\|\dfrac{x}{\alpha} + x_0\right\|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\|z_n + x_0\|} = \frac{1}{\rho(x_0, M)}.$$

2. Пусть $M = \{0\}$, $x_0 = \dfrac{1}{\|x\|} x$, где $x \neq 0$. Тогда из предыдущего пункта существует функционал f, что $f(x_0) = f\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right) = 1 \Rightarrow f(x) = \|x\|$, а $\|f\| = \dfrac{1}{\rho(x_0, M)} = 1$.

□

Пример.

1. Пусть $E \neq \{0\}$ – нормированное пространство. Докажем, что $E^* \neq \{0\}$. Так как $E \neq \{0\}$, то $\exists x \in E : \ x \neq 0$. Тогда по второму пункту следствия $\exists f : \ f(x) = \|x\| \neq 0$. Следовательно, $E^* \neq \{0\}$.

2. Пусть E – линейное нормированное пространство. Докажем, что $\forall x_0 \in S(\theta, 1) \ \exists f \in E^*$, что шар $\overline{B}(\theta, 1)$ лежит по одну сторону от гиперплоскости $f(x) = f(x_0)$. Так как $x_0 \in S(\theta, 1)$, то $\|x_0\| = 1 \Rightarrow x_0 \neq 0$. Тогда по второму пункту следствия $\exists f \in E^*$, что $|f(x)| \leqslant \|f\| \cdot \|x\| = 1 = f(x_0)$.

3. Введем определение, которое появится в следующем параграфе, но понадобится сейчас для примера.

   Определение 2.3. Последовательность $\{x_n\} \subset E$ называется *слабо сходящейся* к элементу $x \in E$ (обозначение $x_n \xrightarrow[\text{сл}]{E} x$), если $\forall f \in E^* \hookrightarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$.

   Докажем корректность данного определения, т.е., если $x_n \xrightarrow[\text{сл}]{E} x'$, $x_n \xrightarrow[\text{сл}]{E} x''$, то $x' = x''$. Действительно, из определения $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x')$, $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x'')$. Так как последовательность $\{f(x_n)\}$ числовая, то $f(x') = f(x'')$ $\forall f \in E^*$. Тогда из пункта 3 следствия получаем, что $x' = x''$.

4. Определим функционал $F_x : E^* \to \mathbb{K}$ следующим образом: $\forall x \in E \hookrightarrow F_x(f) = f(x)$, $f \in E^*$. Также определим $\pi : E \to E^{**}$ как $\pi(x) = F_x$, $x \in E$.

   Определение 2.4. Если $\pi E = E^{**}$, то пространство E называется *рефлексивным.*

   Докажем, что π – изометрия, то есть $\forall x \in E \hookrightarrow \|x\| = \|F_x\|$. Из пункта 4 следствия имеем$\|x\| = \sup\limits_{\|f\|=1} |f(x)| = \sup\limits_{\|f\|=1} |F_x(f)| = \|F_x\|$.

5. Пусть H – гильбертово пространство, $x_n \xrightarrow[\text{сл}]{H} x$, $\|x_n\| \leqslant 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Докажем, что $\|x\| \leqslant 1$. По неравенству Коши-Буняковского $|(x_n,\, x)| \leqslant \|x_n\| \cdot \|x\| \leqslant \|x\|$. Так как $f : H \to \mathbb{K}$, что $f(y) = (y,\, x)$ – линейный ограниченный оператор, то он непрерывен, и, переходя к пределу, получаем $\|x\|^2 \leqslant \|x\| \Rightarrow \|x\| \leqslant 1$.

   Теперь пусть E – линейное нормированное пространство, $\{x_n\} \subset E$, $x_n \xrightarrow[\text{сл}]{E} x$, $\|x_n\| \leqslant 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Докажем, что $\|x\| \leqslant 1$. Из пункта 2 следствия $\exists f \in E^* :\ f(x) = \|x\|$, $\|f\| = 1$. Тогда $|f(x_n)| \leqslant \|f\| \cdot \|x_n\| \leqslant 1$. Следовательно, т.к. $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$, то $|f(x_n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} |f(x)|$. Значит, $|f(x)| \leqslant 1$.

3 Слабая сходимость

Определение 3.1. Пусть E – линейное нормированное пространство. Тогда $x_n \xrightarrow[\text{сл}]{E} x$, если $\forall f \in E^* \hookrightarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$. Обратное, вообще говоря, неверно.

Утверждение 3.1. *Если $\|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то $x_n \xrightarrow[\text{сл}]{E} x$.*

Доказательство. Пусть $f \in E^*$. Тогда $|f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \leqslant \|f\| \cdot \|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Докажем, что из $x_n \xrightarrow[\text{сл}]{} x$ в общем случае не следует сходимость по норме. Пусть $E = l_2$. Рассмотрим последовательность $\{e^n\}$, где e^n – n-ый вектор стандартного базиса в l_2. Тогда $\forall y \in l_2 \hookrightarrow (e^n{,}y) = y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то есть $(e^n{,}y) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0{,}y)$. Но $\|e^n\| = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. □

Замечание. Если $\dim E < \infty$, то сходимость по норме эквивалентна слабой сходимости.

Теорема 3.1. *(т-ма 9.2) Пусть E_1, E_2 – линейные нормированные пространства, $A \in \mathcal{L}(E_1{,}E_2)$, $x_n \xrightarrow[\text{сл}]{E_1} x$. Тогда $Ax_n \xrightarrow[\text{сл}]{E_2} Ax$.*

Доказательство. Пусть $g \in E_2^*$ – произвольный функционал, $f = g \circ A$ – линейный непрерывный функционал, т.е. $f \in E_1^*$. Тогда $f(x_n) = g(Ax_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(Ax) = f(x)\ \forall g \in E_2^*$. $\square$

Теорема 3.2. *Пусть E – линейное нормированное пространство, $\{x_n\} \subset E$. Тогда*

$$x_n \xrightarrow[\text{сл}]{E} x \Leftrightarrow \{\|x_n\|\} \text{ – ограничена, } \forall f \in S \subset E^* : \ \overline{[S]} = E^* \hookrightarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x).$$

Доказательство. Уже известно, что $x_n \xrightarrow[\text{сл}]{E} x \Leftrightarrow F_{x_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} F_x$ поточечно, где $F_x : \ E^* \to \mathbb{K}$, $F_x(f) = f(x)$. Следствие из теоремы Банаха-Штейнгауза утверждает, что, если E_1 – банахово пространство, E_2 – линейное нормированное пространство, $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(E_1,\, E_2)$, $A \in \mathcal{L}(E_1,\, E_2)$, то $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$ поточечно тогда и только тогда, когда $\{\|A_n\|\}$ – ограниченная последовательность, $A_n s \to As\ \forall s \in S : \ \overline{[S]} = E_1$. Теперь возьмем в качестве E_1 пространство E^*, а в качестве E_2 – $\mathbb{K}$. Тогда $\{F_{x_n}\} \subset \mathcal{L}\left(E^*,\, \mathbb{K}\right)$, $F_x \in \mathcal{L}\left(E^*,\, \mathbb{K}\right)$, и $F_{x_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} F_x$ поточечно тогда и только тогда, когда $\{\|F_{x_n}\|\}$ – ограниченная последовательность, и $F_{x_n}(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_x(f)\ \forall f \in S : \ \overline{[S]} = E^*$. Тогда $\|F_{x_n}\| = \sup\limits_{\|f\|=1} |F_{x_n}(f)| = \sup\limits_{\|f\|=1} |f(x_n)| = \|x_n\|$ по следствию из теоремы Хана-Банаха, $F_{x_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} F_x\ \forall f \in S \Leftrightarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)\ \forall f \in S$. $\square$

Пример. Пусть $E = l_p(\mathbb{R})$, где $p > 1$. Тогда $(l_p)^* \cong l_q$, где $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. То есть $\forall f \in l_p^*\ f(x) = \sum x_n y_n$ для $y \in l_q$. Пусть $\{e_n\}$ – стандартный базис в l_q. Тогда по теореме получаем, что

$$x_n \xrightarrow[\text{сл}]{l_p} x \Leftrightarrow \{\|x_n\|\} \text{ – ограничена, } \forall f \in S : \ \overline{[S]} = l_p^* \hookrightarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x).$$

Взяв в качестве S – множество функционалов, порожденных $\{e_n\}$ получаем, что $\forall f \in S\ \exists e_k : \ f(x_n) = \langle x_n, e_k\rangle = x_n^k \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) = \langle x, e_k\rangle = x^k$. То есть, слабая сходимость в l_p эквивалентна ограниченности норм элементов и их покоординатной сходимости.

$\widetilde{BV}$ – множество функций ограниченной вариации, определенных в точках разрыва полусуммой односторонних пределов в этих точках.

Упражнение. *Как связана сепарабельность E с сепарабельностью E^* и наоборот?*

Определение 3.2. Множество $M \subset E$ называется *секвенциально слабо замнкутым*, если из $\{x_n\} \subset M$, $x_n \xrightarrow[\text{сл}]{E} x$ следует, что $x \in M$.

Определение 3.3. Последовательность $\{x_n\} \subset E$ называется слабо фундаментальной, если $\forall f \in E^* \hookrightarrow \{f(x_n)\}$ – фундаментальная последовательность.

Определение 3.4. Пространство E называется секвенциально слабо полным, если любая слабо фундаментальная последовательность является слабо сходящейся.

Определение 3.5. $E \supset S$ – *секвенциально слабо компактно*, если из любой последовательности $\{s_n\} \subset S$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность.

Упражнение. *Является ли $\overline{B}(0,\, 1)$ в l_2 секвенциально слабо компактным? Использовать теорему Банаха-Алаоглу.*

	E	$E \cong \ldots$	$f(x)$	критерий слабой сходимости (в дополнение к ограниченности норм)
1	$l_p,\ p > 1$	l_q	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$	координатная сходимость
2	l_1	l_∞	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$	координатная сходимость
3	$L_p[a,\ b]$	$L_q[a,\ b]$	$\int_a^b f(x)g(x)dx$	$\forall t \in [a,\ b]\ \int_a^t f_n(x)dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^t f(x)dx$
4	$C[a,\ b]$	$\widetilde{BV}[a,\ b]$	$\int_a^b f(x)dg(x)$	$f_n \to f$ поточечно

4 Сопряженные операторы

Пусть $E_1,\ E_2$ – линейные нормированные пространства, $A \in \mathcal{L}(E_1,\ E_2)$, $g \in E_2^*$.

Определение 4.1. Оператор $A^* :\ E_2^* \to E_1^*$, $(A^* g)(x) = g(Ax)$ называется *сопряженным оператором* к A.