Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

V СЕМЕСТР

Лектор: *Сергей Петрович Коновалов*

h\nu

Автор: Максимов Даниил

Проект на Github

осень 2023

Содержание

Предупреждение

Единственный, кто несёт ответственность материал в этом конспекте — его автор. Он не может гарантировать верность ни утверждений, ни приведённых доказательств, однако старается исправлять все поступающие замечания по мере сил.

Если вы увидели несостыковки либо ошибки, то смело сообщайте (имя автора на титульной странице кликабельно).

Обозначения

Всюду в конспекте приняты однозначные обозначения и соглашения следующего толку:

- ▷ $S_1 \subset S_2$ означает строгое вложение множеств (у лектора было $\subsetneq$)
- ▷ $S_1 \subseteq S_2$ означает нестрогое вложение множеств (у лектора было $\subset$)
- ▷ $\operatorname{cl} S$, $\overline{S}$ — замыкание множества S (у лектора было только $\overline{S}$)
- ▷ $[S]$ — линейная оболочка множества S (у лектора то же самое)

Замечание автора. Пожалуй, самым важным знанием, которое может пригодиться в будущем да и сейчас, является то, что само по себе слово «пространство» тождественно слову «множество».

1 Топологические и метрические пространства

1.1 Основные определения

Определение 1.1. Кортеж $(X, \mathcal{T})$ называется *топологическим пространством*, если $\mathcal{T} \subseteq 2^X$ — это система множеств, называемая *топологией* и обладающая следующими свойствами:

1. $\varnothing, X \in \mathcal{T}$
2. $\forall \mathfrak{A}\ \forall \{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}} \subseteq \mathcal{T}\ \ \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} G_\alpha \in \mathcal{T}$
3. $\forall \mathfrak{M}, |\mathfrak{M}| < \infty\ \ \forall \{G_\beta\}_{\beta \in \mathfrak{M}} \subseteq \mathcal{T}\ \ \bigcap_{\beta \in \mathfrak{M}} G_\beta \in \mathcal{T}$

Определение 1.2. Кортеж (X, ρ) называется *метрическим пространством*, где

- ▷ X — произвольное множество
- ▷ $\rho \colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ — *метрическая функция (метрика)*. Она по определению удовлетворяет следующим свойствам:
  1. (Неотрицательность и аксиома тождества) $\forall x, y \in X\ \ \rho(x, y) \geqslant 0 \land \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
  2. (Симметричность) $\forall x, y \in X\ \ \rho(x, y) = \rho(y, x)$
  3. (Неравенство треугольника) $\forall x, y, z \in X\ \ \rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Замечание. Если отказаться от аксиомы тождества, но потребовать $\rho(x, x) = 0$, то такую функцию называют *полуметрикой*. Такие метрики естественным образом возникают на факторпространствах, когда $x \sim y \Leftrightarrow \rho(x, y) = 0$.

Замечание. Довольно часто вместо кортежа пишут только множество, над которым определяется указанная структура. Тогда топологию, например, можно обозначить как $\mathcal{T}_X$, а метрику — ρ_X.

Замечание автора. Далее даются базовые определения, связанные с топологическими и метрическими пространствами. Они в большинстве своём «общие» (то есть называются одинаково), но, для удобства конспекта, вместо таблицы они приведены двумя отдельными списками.

Определения для метрических пространств

Замечание. Далее подразумевается, что (X, ρ) — метрическое пространство.

Определение 1.3. (Y, ρ) называется *подпространством метрического пространства* X, если $Y \subseteq X$, а метрика ρ естественно индуцирована из (X, ρ).

Определение 1.4. Подпространство $Y \subseteq X$ называется *ограниченным*, если существует $K \geqslant 0$ такое, что оно ограничивает расстояние между любыми двумя точками в Y:

$$\exists K \geqslant 0 \mid \forall x, y \in Y \quad \rho(x, y) \leqslant K$$

Определение 1.5. Пусть $A, B \subseteq X$. Тогда расстоянием $\rho(A, B)$ назовём минимальное расстояние между точками этих подмножеств:

$$\rho(A, B) := \inf_{a \in A, b \in B} \rho(a, b)$$

Определение 1.6. *Открытым шаром (или просто шаром)* $B(x, r)$, где $r > 0$, называется следующее множество в X:

$$B(x, r) := \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$$

Определение 1.7. *Замкнутым шаром* $\overline{B}(x, r)$, где $r > 0$, называется следующее множество в X:

$$\overline{B}(x, r) := \{y \in X : \rho(x, y) \leqslant r\}$$

Определение 1.8. Пусть $M \subseteq X$. Элемент $x \in X$ называется *точкой прикосновения множества* M, если пересечение любого шара с центром в x и M непусто:

$$\forall r > 0 \quad B(x, r) \cap M \neq \varnothing$$

Определение 1.9. Пусть $M \subseteq X$. Множество всех точек прикосновения M называется *замыканием множества* M. Обозначается разными способами:

$$\operatorname{cl} M = [M] = \overline{M} := \{x \in X : \forall r > 0 \ B(x, r) \cap M \neq \varnothing\}$$

Замечание автора. В силу использование обозначения $\overline{M}$ для замыкания множества, я буду избегать использования такого же обозначения для дополнения множества. Либо будем писать явно $X \backslash M$, либо давать свою букву дополнению.

Определение 1.10. Подмножество $M \subseteq X$ называется *замкнутым*, если $\operatorname{cl} M = M$.

Определение 1.11. Пусть $M \subseteq X$. Тогда $x \in M$ называется *внутренней точкой* M, если существует шар $B(x, r)$, вложенный в M:

$$\exists r > 0 \mid B(x, r) \subseteq M$$

Определение 1.12. Пусть $M \subseteq X$. Тогда *внутренностью множества* M называется множество всех внутренних точек M. Обозначается разными способами:

$$\operatorname{int} M = \overset{\circ}{M} = \{x \in M : \exists r > 0 \ B(x, r) \subseteq M\}$$

Определение 1.13. Множество $M \subseteq X$ называется *открытым*, если $\operatorname{int} M = M$

Определение 1.14. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$, $x \in X$. Тогда мы будем говорить, что x_n *сходится к x (существует предел $\lim_{n\to\infty} x_n = x$)*, если расстояние между элементами последовательности и пределом стремится к нулю:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \Longleftrightarrow \lim_{n \to \infty} \rho(x_n, x) = 0$$

Определения для топологических пространств

Замечание. Далее $(X, \mathcal{T}_X)$ — топологическое пространство

Определение 1.15. $(Y, \mathcal{T}_Y)$ называется *подпространством топологического пространства* X, если $Y \subseteq X$ и топология $\mathcal{T}_Y$ записывается так:

$$\mathcal{T}_Y = \{Y \cap G \colon G \in \mathcal{T}_X\}$$

Определение 1.16. Любой элемент топологии называется *открытым* множеством.

Определение 1.17. Любое подмножество $M \subseteq X$, которое является дополнением к открытому множеству, называется *замкнутым*:

$$\exists G \in \mathcal{T}_X \mid M = X \backslash G$$

Определение 1.18. Элемент топологии $G \in \mathcal{T}_X$ называется *окрестностью точки* $x \in X$, если $x \in G$. Иногда обозначается как $G(x)$.

Определение 1.19. Пусть $M \subseteq X$. Тогда $x \in X$ называется *точкой прикосновения* M, если любая окрестность $G(x)$ пересекается с M:

$$\forall G(x) \in \mathcal{T}_X \; G(x) \cap M \neq \varnothing$$

Определение 1.20. Пусть $M \subseteq X$. Множество всех точек прикосновения M называется *замыканием множества* M. Обозначается как $\operatorname{cl} M = [M] = \overline{M}$

Определение 1.21. Пусть $M \subseteq X$. Тогда $x \in M$ называется *внутренней точкой* M, если существует окрестность $G(x)$, лежащая в M:

$$\exists G(x) \in \mathcal{T}_X \mid G(x) \subseteq M$$

Определение 1.22. Пусть $M \subseteq X$. Множество всех внутренних точек M называется *внутренностью множества* M. Обозначается как $\operatorname{int} M = \overset{\circ}{M}$

Замечание. С данными определениями действительно имеются 2 эквивалентности:

- ▷ M — открытое $\Leftrightarrow \operatorname{int} M = M$
- ▷ M — замкнутое $\Leftrightarrow \operatorname{cl} M = M$

Мы докажем их явно, но в следующем параграфе.

Определение 1.23. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$, $x \in X$. Тогда x_n *сходится к* x, если выполнено следующее условие:

$$\forall G(x) \in \mathcal{T}_X \; \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n > N \quad x_n \in G(x)$$

Определение 1.24. Топологическое пространство X называется *несвязным*, если $X = G_1 \sqcup G_2$, где $G_i \neq \varnothing$ — непустые открытые множества.

Определение 1.25. Топологическое пространство X называется *связным*, если оно не несвязное, то есть

$$\forall G_1, G_2 \in \mathcal{T}_X,\; G_1 \cap G_2 = \varnothing, G_i \neq \varnothing \Rightarrow G_1 \sqcup G_2 \neq X$$

Определение 1.26. Пусть $(X, \mathcal{T})$ — топологическое пространство. Тогда набор $\Gamma = \{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}} \subseteq \mathcal{T}$ называется *базой топологии* $\mathcal{T}$, если любое множество топологии выражается как объединение элементов Γ:

$$\forall S \in \mathcal{T}\ \exists \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{A} \mid \bigcup_{\beta \in \mathfrak{M}} G_\beta = S$$

Определение 1.27. Пусть X — произвольное пространство. Тогда, зададим *порядок* $\preceq$ *на топологиях* пространства X:

$$\mathcal{T}_1 \preceq \mathcal{T}_2 \Longleftrightarrow \mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$$

Замечание автора. Как известно, вложение множеств не является порядком, ибо есть просто пересекающиеся множества (где ни одно не вложено в другое). Поэтому порядок на топологиях формально является предпорядком.

Определения, общие для метрических и топологических пространств

Замечание. Далее X — это непосредственно множество элементов топологического или метрического пространства.

Определение 1.28. Пусть $A, B \subseteq X$. Тогда мы говорим, что A *плотно в* B, если выполнено вложение $B \subseteq \operatorname{cl} A$.

Определение 1.29. Множество $A \subseteq X$ называется *всюду плотным*, если A плотно в X. Это означает, что $X = \operatorname{cl} A$.

Определение 1.30. Множество $A \subseteq X$ называется *нигде не плотным*, если в замыкании множества A нет ни одного непустого открытого множества.

Определение 1.31. Пространство X называется *сепарабельным*, если существует не более чем счётное всюду плотное подмножество $A \subseteq X$.

Связь метрического пространства с топологическим

Теорема 1.1. *(Двойственность открытых и замкнутых множеств) Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Тогда подмножество $G \subseteq X$ является открытым тогда и только тогда, когда $F := X \backslash G$ является замкнутым.*

Доказательство.

- $\Rightarrow$ Рассмотрим $x \in \operatorname{cl} F$. Если так оказалось, что $x \in G \cap \operatorname{cl} F$, то существует шар $B(x, r) \subseteq G$, и, следовательно, это противоречит исходному факту о принадлежности x замыканию F. Таким образом, остаётся лишь вариант $x \in F \cap \operatorname{cl} F$, то есть $F = \operatorname{cl} F$.

- $\Leftarrow$ Рассмотрим $x \in G$. Это же означает, что $x \notin F = \operatorname{cl} F$, то есть x — не точка прикосновения F:
$$\exists r > 0 \mid B(x, r) \cap F = \varnothing$$
Так как $F = X \backslash G$, то $B(x, r) \subseteq G$, а значит $x \in \operatorname{int} G$, что и требовалось доказать.

$\square$

Теорема 1.2. *Пусть* (X, ρ) *— метрическое пространство,* $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ *— семейство открытых множеств, а* $\{F_\beta\}_{\beta \in \mathfrak{M}}$ *— семейство замкнутых множеств. Тогда:*

1. $\forall \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{A}\ \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{N}} G_\alpha$ *— открытое множество*
2. $\forall \mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{A}, |\mathfrak{Z}| < \infty\ \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{Z}} G_\alpha$ *— открытое множество*
3. $\forall \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}\ \bigcap_{\beta \in \mathfrak{N}} F_\beta$ *— замкнутое множество*
4. $\forall \mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{M}, |\mathfrak{Z}| < \infty\ \bigcup_{\beta \in \mathfrak{Z}} F_\beta$ *— замкнутое множество*

Доказательство. Достаточно доказать утверждения для открытых множеств, потому что дальше мы используем правила де Моргана и получаем оставшиеся утверждения просто через дополнения. Итак, приступим:

1. Рассмотрим $x \in \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{N}} G_\alpha$. Тогда должен существовать $\alpha_0 \in \mathfrak{N}$, при котором этот x был включен в объедиение. Стало быть, $x \in G_{\alpha_0}$, а раз G_{α_0} — открытое множество, то $\exists B(x, r) \subseteq G_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{N}} G_\alpha$, что и требовалось.
2. Пусть $x \in \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{Z}} G_\alpha$. Тогда этот x был включен в каждое G_α, причём в каждом из них есть свой радиус шара $r_\alpha > 0$ с центром в x, что $B(x, r_\alpha) \subseteq G_\alpha$. Так как мы рассмотрели конечное пересечение открытых множеств, то, взяв $r = \min_{\alpha \in \mathfrak{Z}} r_\alpha$, мы нашли радиус шара, включённого во все G_α, а значит и в их пересечение.

□

Следствие. Любое метрическое пространство является топологическим, чья топология состоит из всех открытых множеств (по независимому определению конкретно в метрических пространствах).

Пример. Покажем, что существует счётное объединение замкнутых множеств, которое не является само по себе замкнутым. Достаточно рассмотреть числовую прямую и последовательность вложенных расширяющихся отрезков, которая пытается достичь другого отрезка. Например, зададим такую последовательность так:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \ [a_n; b_n] = \left[1 + \frac{1}{n}; 4 - \frac{1}{n}\right]$$

Казалось бы, это последовательность должна сходиться к $[1; 4]$, но на деле предел — это интервал $(1; 4)$! Он тривиально не является замкнутым множеством за счёт своих крайних точек.

Упражнение. *Топологическое пространство основных функций D не является метризуемым*

Лемма 1.1. *Пусть* (X, ρ) *— метрическое пространство,* $M_{1,2} \subseteq X$*. Если* $M_1 \subseteq M_2$*, то и* $\operatorname{int} M_1 \subseteq \operatorname{int} M_2$*.*

Доказательство. Факт, на самом деле, очевидный. Если $x \in \operatorname{int} M_1$, то какой-то шар с центром в этой точке включен в $M_1 \subseteq M_2$, то есть $x \in \operatorname{int} M_2$. □

Лемма 1.2. *Пусть* (X, ρ) *— метрическое пространство,* $M_{1,2} \subseteq X$*. Если* $M_1 \subseteq M_2$*, то и* $\operatorname{cl} M_1 \subseteq \operatorname{cl} M_2$*.*

Доказательство. Совсем тривиально, что точка прикосновения M_1 является точкой прикосновения $M_2 \supseteq M_1$. □

Теорема 1.3. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Тогда:*

1. *Открытый шар $B(x, r)$ является открытым множеством*
2. *Для любого множества $M \subseteq X$ верно, что $\operatorname{int} M$ — открытое множество, причём наибольшее из тех, что вложены в M*
3. *Для любого множества $M \subseteq X$ верно, что $\operatorname{cl} M$ — замкнутое множество, причём наименьшее из тех, что содержат M.*
4. *Замкнутый шар $\overline{B}(x, r)$ является замкнутым множеством*

Доказательство.

1. Рассуждение довольно геометрическое. Если $y \in B(x, r)$, то по определению y не лежит на границе шара, значит есть некоторое расстояние до неё и мы можем найти достаточно малый шарик, который тоже находится в $B(x, r)$. Если формально, то $\rho(x, y) < r$ и до границы у нас расстояние $l = r - \rho(x, y)$. Значит, можно рассмотреть шар $B(y, l/2)$. Покажем, что любая точка в нём действительно остаётся в шаре $B(x, r)$:

$$\forall z \in B(y, l/2)\ \rho(z, y) < \frac{l}{2} \Rightarrow$$
$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z) < \rho(x, y) + \frac{r - \rho(x, y)}{2} = \frac{r + \rho(x, y)}{2} < r$$

2. Настало время воспользоваться леммой для внутренностей. Если $x \in \operatorname{int} M$, то по определению $\exists r > 0 \mid B(x, r) \subseteq M$. Применив к этим множествам лемму, имеем $B(x, r) = \operatorname{int} B(x, r) \subseteq \operatorname{int} M$, что и требовалось показать.

3. Заметим тривиальную *микродвойственность*: точка $x \in X$ не лежит в замыкании M тогда и только тогда, когда она лежит во внутренности $X \setminus M$. Этот факт позволяет заявить, что $\operatorname{cl} M \sqcup \operatorname{int}(X \setminus M) = X$, а так как $\operatorname{int}(X \setminus M)$ по доказанному является открытым множеством, то в силу теоремы о двойственности мы тривиально имеем требуемое.

4. Любая точка множества изначально лежит в его замыкании. Остаётся показать, что если $\rho(x, y) > r$, то такая точка не лежит в замыкании, то есть находится во внутренности дополнения к шару. Это тривиально, делается точно так же, как и в первом пункте.

□

Утверждение 1.1. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Всегда верно, что $\overline{B(x, r)} \subseteq \overline{B}(x, r)$, но равенство выполнено не всегда.*

Доказательство. Для доказательства вложения достаточно заметить, что точки на расстоянии $l > r$ не могут быть точками прикосновения $B(x, r)$, ибо можно рассмотреть шар радиуса $(l - r)/2$, который не будет пересекать $B(x, r)$, а значит остаётся лишь вариант $\leqslant r$, который по определению соответствует $\overline{B}(x, r)$.

Контрпример нужно искать среди дискретных метрик, возможно на манхэттенской...

□

Определение 1.32. Пусть X, Y — топологические пространства, $f\colon X \to Y$. Тогда f называется *непрерывной в точке* $x_0 \in X$, если выполнено утверждение:

$$\forall\ V(f(x_0)) \in \mathcal{T}_Y\ \exists U(x_0) \in \mathcal{T}_X \mid f(U(x_0)) \subseteq V$$

Здесь нужна картинка с интерпретацией непрерывности

Определение 1.33. Пусть X, Y — топологические пространства, $f\colon X \to Y$ называется *непрерывной*, если для любой точки $x \in X$ верно, что f непрерывна в точке x.

Теорема 1.4. *Пусть X, Y — топологическое пространство, $f\colon X \to Y$. Тогда следующие свойства функции эквивалентны:*

1. *f непрерывна*
2. *$\forall G \in \mathcal{T}_Y\ f^{-1}(G) \in \mathcal{T}_X$*
3. *$\forall F \subseteq Y$ — замкнутое множество, тогда $f^{-1}(F) \subseteq X$ — тоже замкнутое*

Доказательство.

$2 \Rightarrow 1$ Тривиально

$1 \Rightarrow 2$ Рассмотрим $G \in \mathcal{T}_Y$ и соответствующий прообраз $f^{-1}(G)$. По определению это такое подмножество X:

$$f^{-1}(G) = \{x \in X\colon f(x) \in G\}$$

Покажем, что у каждой точки $x \in f^{-1}(G)$ есть некоторая окрестность $U(x) \in \mathcal{T}_X$, которая находится тоже в $f^{-1}(G)$. Действительно, если рассмотреть $f(x) \in G$, то по тому, что G является окрестностью $f(x)$ и f непрерывна, должна существовать окрестность $U(x) \in \mathcal{T}_X$ такая, что $f(U(x)) \subseteq G$, а это эквивалентно как раз требованию $U(x) \subseteq f^{-1}(G)$. Осталось заметить, что прообраз G можно представить через объединение таких окрестностей:

$$\left(f^{-1}(G) = \bigcup_{x \in f^{-1}(G)} U(x),\, U(x) \in \mathcal{T}_X\right) \Rightarrow f^{-1}(G) \in \mathcal{T}_X$$

$2 \Leftrightarrow 3$ Прообраз сохраняет все стандартные операции над множествами, поэтому эквивалентность тривиальна за счёт двойственности открытых и замкнутых множеств. □

Определение 1.34. Пусть X, Y — топологические пространства. Тогда мы говорим, что они *гомеоморфны*, если существует функция $f\colon X \to Y$ такая, что она удовлетворяет двум свойствам:

1. f — биекция
2. f, f^{-1} непрерывны на всём своем пространстве

Гомеоморфизм топологических пространств обозначается как $X \simeq Y$

Упражнение. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Тогда $x \in X$ — точка прикосновения множества M тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{m_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq M$ такая, что $\lim_{k\to\infty} m_k = x$*

Упражнение. *В метрическом пространстве определение предела через шары и произвольные открытые множества эквивалентны.*

Упражнение. *Если $(X, \mathcal{T})$ — связное топологическое пространство и $f: X \to Y$ — непрерывное отображение в тоже топологическое пространство Y, то $f(X)$ является связаным топологическим пространством.*

2 Полные метрические пространства

Определение 2.1. Метрическое пространство X называется *полным*, если в нём любая фундаментальная последовательность сходится.

Пример.

- ▷ Полные метрические пространства:
  - $\mathbb{R}$
  - $\mathbb{C}$
  - $L_p[a; b]$, $p \geqslant 1$
- ▷ Неполные метрические пространства:
  - $\mathbb{Q}$
  - $C_p[a; b]$, $p \geqslant 1$

Теорема 2.1. *(Принцип вложенных шаров) Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство, а $\{\overline{B}_n(x_n, r_n)\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность замкнутых вложенных шаров, $r_n \to 0$. Тогда существует и единственна точка $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}_n$.*

Доказательство. Интуитивно понятно, что к гипотетической точке x должна сходиться последовательность центров шаров. Действительно, покажем существование такого предела. В силу полноты X, нам достаточно показать фундаментальность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. А это просто, ибо верно неравенство $\rho(x_{n+p}, x_n) \leqslant r_n$. Осталось воспользоваться условием, что $r_n \to 0$, и фундаментальность тривиально установлена. Обозначим $x := \lim_{n\to\infty} x_n$. Если мы снова посмотрим на оценку выше и устремим p в бесконечность (в силу сходимости это уже можно), то получится замечательный факт:

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ \rho(x, x_n) \leqslant r_n \Leftrightarrow x \in \overline{B}_n(x_n, r_n)$$

Осталось показать, что x — единственная точка пересечения шаров. Действительно, если есть отличная y, то $\rho(x, y) > 0$, а тогда мы знаем, что начиная с некоторого номера все шары находятся в сколь угодно малой окрестности x, отсюда противоречие с y. □

Замечание. Все условия теоремы существенны:

- ▷ При отсутствии замкнутости существует такое равенство: $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0; \frac{1}{n}\right) = \varnothing$
- ▷ При отсутствии вложенности тривиально, что пересечение может быть пустым

▷ Если радиусы шаров не стремятся к нулю, то можно рассмотреть $X = \mathbb{N}$ с такой метрикой:

$$\rho(m,n) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{m+n}, \ m \neq n \\ 0, \ m = n \end{cases}$$

Тогда последовательность шаров $\overline{B}\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$ является искомым контрпримером

Замечание. Принцип вложенных шаров является критерием полноты метрического пространства. Доказываться этот факт не будет.

Утверждение 2.1. *Следующие свойства эквивалентны:*

▷ $M \subseteq X$ *— нигде не плотное множество*

▷ $\forall B(x)\ \exists B(y) \subseteq B(x) \ \big| \ B(y) \cap M = \varnothing$

▷ $\forall G\ \exists G_1 \subseteq G \ \big| \ M \cap G_1 = \varnothing$

Теорема 2.2. *(Бэра) Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство. Тогда X нельзя представить в виде $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, где M_n — нигде не плотное множество.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, где M_n — нигде не плотное множество. Дальнейшая идея состоит в том, чтобы воспользоваться принципом вложенных шаров и найти точку, которая не будет принадлежать ни одному M_n (а должна, как точка X). Итак, найдём наши шары:

1. Рассмотрим $x_1 \in X$ и шар, скажем, $B(x_1, 1)$. Так как M_1 нигде не плотно, то должен найтись шар $B(x_1, r) \subseteq B(x_1, 1)$ такой, что $B(x_1, r) \cap M_1 = \varnothing$. В этом шаре мы можем выбрать замкнутый шар $\overline{B}(x_1, r_1) \subseteq B(x_1, r)$, который послужит отправной точкой

2. Для нахождения следующего замкнутого шара, рассмотрим произвольный шар $B(x_k, r') \subset \overline{B}(x_{k-1}, r_{k-1})$ и повторим процедуру выше для него. Важно также потребовать, что $r' \leqslant \frac{r_{k-1}}{2}$.

Итак, мы получили последовательность вложенных замкнутых шаров. В силу полноты метрического пространства, их пересечение соответствует ровно одной точке $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} B(x_k, r_k)$. Осталось формально увидеть 2 уже оговоренных факта:

▷ $x \in X \Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N} \ \big| \ x \in M_{k_0}$

▷ $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{B}(x_k, r_k) \wedge \left(\forall k \in \mathbb{N}\ \overline{B}(x_k, r_k) \cap M_k\right) = \varnothing \Longrightarrow \forall k \in \mathbb{N}\ x \notin M_k$

Достигнуто явное противоречие. □

Пример. (из книги К. Иосида «Функциональный Анализ», 1967г.) Покажем пространство, где можно применить теорему Бэра. Пространство $C[0;1]$ — это полное метрическое пространство, а $M \subset C[0;1]$ — это множество всех непрерывных функций, у которых хотя бы в одной точке есть хотя бы одна односторонняя производная. Несложно показать, что M представимо в виде счётного объединения нигде не плотных множеств. Это интуитивно означает, что даже таких функций как из M невероятно мало.

Обозначение. Далее мы начинаем активно пользоваться довольно популярным обозначением значения функции в функциональном анализе (особенно будет актуально при рассмотрении линейных отображений):

$$fx := f(x)$$

Определение 2.2. Пусть X — полное метрическое пространство. Тогда отображение $f\colon X \to X$ называется *сжимающим*, если выполнено утверждение:

$$\exists \alpha \in (0;1) \;\Big|\; \forall x, y \in X \;\; \rho(f(x), f(y)) \leqslant \alpha\rho(x, y)$$

Теорема 2.3. *(Банаха, 1922г.) Пусть X — полное метрическое пространство, $f\colon X \to X$ — сжимающее отображение. Тогда существует и единственна неподвижная точка отображения f.*

Доказательство. Сразу отметим, что сжимающее отображение обязано быть непрерывным. Действительно, если $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ сходится к $y \in X$, то верна оценка:

$$\rho(fy, fy_n) \leqslant \alpha\rho(y, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Что по определению означает непрерывность f. Теперь мы готовы доказывать основной факт теоремы:

- ▷ Существование. Пусть $x_0 \in X$. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, называемую *орбитой* x_0 и полученную по правилу $x_{n+1} = fx_n$. Покажем, что эта последовательность сходится. Это эквивалентно её фундаментальности:

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \;\; \rho(x_{n+m}, x_n) \leqslant \rho(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + \ldots + \rho(x_{n+1}, x_n) \leqslant \rho(x_1, x_0)(\alpha^{n+m-1} + \ldots + \alpha^n) < \rho(x_1, x_0)\frac{\alpha^n}{1-\alpha}$$

  За счёт этого неравенства, фундаментальность показывается уже тривиально. Осталось обозначить $x := \lim_{n\to\infty} x_n$ и сделать следующее забавное наблюдение:

$$fx = \lim_{n\to\infty} fx_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x$$

- ▷ Единственность. Пусть $x, y \in X$ — две неподвижные точки. Тогда, в силу свойств f верно неравенство:

$$\rho(x, y) = \rho(fx, fy) \leqslant \alpha\rho(x, y)$$

  Так как $\alpha \in (0;1)$, то такое возможно тогда и только тогда, когда $\rho(x, y) = 0$, а в силу определения метрики это гарантирует равенство $x = y$.

□

Определение 2.3. (не по лектору) Пусть X, Y — метрические пространства. Тогда *изометрией* называется отображение $f\colon X \to Y$, которое *сохраняет (или, говорят, уважает)* метрики пространств:

$$\forall x_1, x_2 \in X \;\; \rho_X(x_1, x_2) = \rho_Y(f(x_1), f(x_2))$$

Теорема 2.4. *(Хаусдорфа, без доказательства) Пусть X — неполное метрическое пространство. Тогда существует и единственно (с точностью до изометрии) полное метрическое пространство Y такое, что существует изометрия $\pi\colon X \to Y$ со следующим свойством:*

$$\mathrm{cl}(\pi X) = Y$$

Замечание. Можно вспомнить, как из $\mathbb{Q}$ строится $\mathbb{R}$ — фактически добавляются все возможные пределы. Так и тут основная идея состоит в том, чтобы разрешить всем сходящимся последовательностям из X сходиться, нужно произвести пополнение пространства X этими пределами.

Упражнение. *Пусть X_1 и X_2 — гомеоморфные метрические пространства. Если X_1 полное, то верно ли, что и X_2 такое?*

Решение. Нет, неверно. Достаточно посмотреть изоморфизм между половиной окружности с выколотыми точками и прямой

3 Компактные топологические и метрические пространства

Определение 3.1. Топологическое пространство X называется *компактным*, если для любого открытого покрытия X можно выделить конечное подпокрытие:

$$\forall \mathfrak{A} \mid \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} G_\alpha \supseteq X \Longrightarrow \exists \mathfrak{M}, |\mathfrak{M}| < \infty \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{M}} G_\alpha \supseteq X$$

Определение 3.2. Пусть X — произвольное множество. Произвольный набор множеств $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}} \subseteq 2^X$ называется *центрированной системой множеств*, если любая конечная подсистема из этих множеств имеет непустое пересечение.

Теорема 3.1. *Топологическое пространство X является компактным тогда и только тогда, когда любая центрированная система замкнутых множеств имеет непустое пересечение (то есть пересечение всех множеств системы непусто).*

Доказательство.

- $\Rightarrow$ Пусть $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ — центрированная система замкнутых множеств. Введём $G_\alpha := X \backslash F_\alpha$ и заметим, что из этого набора нельзя выделить конечное покрытие X. Действительно, предположим противное: $\bigcup_{k=1}^n G_k = X$. Но тогда:

  $$\bigcup_{k=1}^{n} X \backslash F_k = X \backslash \left(\bigcap_{k=1}^{n} F_k \right) = X$$

  Последнее равенство является противоречием, ведь F_k были взяты из центрированной системы множеств.

  Так как X по условию было компактом, то $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ не является покрытием X. Коль скоро это так, мы доказали требуемое:

  $$\bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} F_\alpha = \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} X \backslash G_\alpha = X \backslash \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} G_\alpha \neq \varnothing$$

$\Leftarrow$ Пусть $X = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} G_\alpha$ — произвольное покрытие открытыми множествами. Введём $F_\alpha = X \backslash G_\alpha$, тогда $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ не образуют центрированную систему замкнутых множеств (иначе тривиальное противоречие по уже сказанному выше). Стало быть, существует конечная подсистема F_k с пустым пересечением:

$$\bigcap_{k=1}^{n} F_k = \varnothing = \bigcap_{k=1}^{n} X \backslash G_k = X \backslash \bigcup_{k=1}^{n} G_k \Longleftrightarrow X = \bigcup_{k=1}^{n} G_k$$

□

Упражнение. *Компактность топологических пространств сохраняется при непрерывном отображении*

Определение 3.3. Множество Y в метрическом пространстве X называется *вполне ограниченным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное множество $\{a_k\}_{k=1}^n \subseteq X$ такое, что выполнено условие:

$$\forall y \in Y \quad \min_{k \in \{1, \ldots, n\}} \rho(y, a_k) < \varepsilon$$

При этом множество $\{a_k\}_{k=1}^n$ называется *ε-сетью.*

Замечание. Для $\mathbb{R}^n$ с любой метрикой свойства вполне ограниченности и ограниченности эквивалентны.

Теорема 3.2. *Пусть X — метрическое пространство. Тогда следующие свойства эквивалентны:*

1. *X — компакт*
2. *X — полное и вполне ограниченное множество*
3. *Из любой последовательности элементов X можно выделить сходящуюся подпоследовательность*
4. *У любого бесконечного множества есть предельная точка*
5. *Верны включения $C(X, \mathbb{R}) \subseteq B(X, \mathbb{R})$ и $C(X, \mathbb{C}) \subseteq B(X, \mathbb{C})$ — любая непрерывная функция из X в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ является ограниченной*

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$ ▷ Покажем, что X — полное. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ — фундаментальная последовательность. Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \Big| \; \forall n \geqslant N, p \in \mathbb{N} \quad \rho(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon$$

Рассмотрим множества $A_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Если $n \geqslant N$, то выполнена цепочка вложений:

$$A_n \subseteq B(x_n, \varepsilon) \Longrightarrow \operatorname{cl} A_n \subseteq \operatorname{cl} B(x_n, \varepsilon) \subseteq \overline{B}(x_n, \varepsilon)$$

При этом $\{\operatorname{cl} A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — центрированная система замкнутых множеств. В силу компактности X, пересечение всех $\operatorname{cl} A_n$ непусто. Обозначим $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{cl} A_n$. Осталось показать, что $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. А из выше сказанного, это уже тривиально:

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{cl} A_n \Rightarrow x \in \bigcap_{n=N}^{\infty} A_n \subseteq \bigcap_{n=N}^{\infty} \overline{B}(x_n, \varepsilon)$$

Это и есть ровно то, что мы хотели: $\forall n \geqslant N \;\; \rho(x, x_n) \leqslant \varepsilon$.

- ▷ Осталось разобраться с вполне ограниченностью. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдём ε-сеть. Рассмотрим самое простое открытое покрытие X — покрытие шарами с центрами в каждой точке X, $X = \bigcup_{x\in X} B(x, \varepsilon)$. В силу компактности, существует конечное подпокрытие $X = \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \varepsilon)$. Несложно понять, что $\{x_i\}_{i=1}^{k}$ — искомая сеть.

$2 \Rightarrow 3$ Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. В силу полноты, нам достаточно найти фундаментальную подпоследовательность. Итак, в силу вполне ограниченности X:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \{y_j\}_{j=1}^{k} \;\; \Big| \; X = \bigcup_{j=1}^{k} \overline{B}(y_j, \varepsilon)$$

Заметим, что любой $\overline{B}(y_j, \varepsilon)$ тоже является полным и вполне ограниченным пространством. Применим итерационный метод, $\varepsilon = \frac{1}{m}$, $m \to \infty$. На итерации $m = 1$ мы находим шар $\overline{B}(y_1, 1)$, в котором содержится бесконечное число элементов $\{x_n\}_{n=1}^{n}$. Выделяем эти элементы в последовательность $\{x_{1,m}\}_{n=1}^{\infty}$ На итерации $m > 1$ мы уже используем $\frac{1}{m}$-сеть из пространства $\overline{B}(y_{j_{m-1}}, \frac{1}{m-1})$, в ней находим шар $\overline{B}(y_{j_m}, \frac{1}{m})$, который снова содержит бесконечное число элементов $\{x_{n,m-1}\}_{n=1}^{\infty}$ и продолжаем так счётное число раз. Осталось применить диагональный метод Кантора и показать, что последовательность $\{t_m := x_{m,m}\}_{m=1}^{\infty}$ является фундаментальной. Это действительно так:

$$\forall m_1 \leqslant m_2 \;\; t_{m_2} \in \overline{B}\left(t_{m_1}, \frac{1}{m_1}\right)$$

$3 \Rightarrow 1$

- ▷ Докажем вполне ограниченность от противного. Предположим существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что любой конечный набор $\{x_n\}_{n=1}^{k} \subseteq X$ не является ε_0-сетью. Стало быть, $\{x_1\}$ не является ε_0-сетью, то есть найдётся x_2: $\rho(x_1, x_2) > \varepsilon_0$. Аналогично повторяем для $\{x_1, x_2\}$ и так далее. Этим методом мы нашли последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что $\rho(x_n, x_m) > \varepsilon_0$ для любого $n \neq m$. Стало быть, из такой последовательность нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность, противоречие
- ▷ Имея на руках доказанную вполне ограниченность X, мы готовы доказать исходную импликацию. Снова предположим противное: $X = \bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} G_\alpha$, причём в этом открытом покрытии нельзя выделить конечное подпокрытие. С другой стороны, у нас есть ε-сети $X = \bigcup_{i=1}^{k} \overline{B}(x_k, \varepsilon)$. Несложно понять, что в силу определения открытого покрытия, должен существовать хотя бы один шар $\overline{B}(x_k, \varepsilon)$, который не может быть покрыт конечным числом G_α. Снова прибегнем к итерационному методу $\varepsilon = \frac{1}{n}$ и будем искать соответствующие шары из ε-сетей для X. Получим $\overline{B}(x_n, 1/n)$ — последовательность шаров, каждый из которых нельзя покрыть

конечным числом G_α. По условию, мы можем выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. Коль скоро $x_0 \in X = \bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} G_\alpha$, то существует $\alpha_0 \colon x_0 \in G_{\alpha_0}$. Так как G_{α_0} — открытое, то существует $r_0 \colon B(x_0, r_0) \subseteq G_{\alpha_0}$. В силу уже упомянутого предела, $\exists K \in \mathbb{N} \colon B(x_{n_K}, \frac{1}{n_K}) \subseteq B(x_0, r_0) \subseteq G_{\alpha_0}$, получили противоречие с построением $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

$3 \Leftrightarrow 4$ В сторону из $3 \Leftarrow 4$ доказательство тривиальное, поэтому нас интересует только $3 \Rightarrow 4$. Пусть M бесконечно. Раз так, то в нём есть как минимум 1 элемент $x_1 \in M$, причём $M \backslash x_1 \neq \varnothing$. Повторив эту итерацию счётное число раз (при этом требуя $x_n \in M\backslash\{x_k\}_{k=1}^{n-1}$), мы получили какую-то произвольную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$, причём все элементы различны. Стало быть, из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность, предел которой будет сразу предельной точкой M.

$2 \Leftarrow 5$ Докажем отрицание: если X - неполное или не вполне ограниченное, то $C(X, \mathbb{K}) \not\subseteq B(X, \mathbb{K})$. Приведём соответствующие 2 конкретных примера, когда в таких пространствах найдётся соотвествующая непрерывная неограниченная функция, и мы обобщим их идеи на общий случай:

(a) $X = (0; 1)$ - неполное пространство. На нём определена $f(x) = 1/x$. Заметим, что эту функцию можно переписать так:

$$f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{\rho(x, 0)}$$

Похожую функцию f мы будем строить. Если X - произвольное неполное пространство, то по теореме Хаусдорфа есть изометрия $\pi \colon X \to Y$ такая, что $\operatorname{cl}\pi(X) = Y$. Коль скоро X неполно, то должен существовать $y_0 \in Y \colon \forall x \in X\ \pi(x) \neq y_0$, при этом y_0 является предельной точкой для X. Стало быть, мы можем рассмотреть функцию $f(x) = \frac{1}{\rho(x,y_0)}$. Эта функция обязана быть непрерывной в X, но при этом она неограничена (в силу, опять же, возможности стремления к y_0 из X)

(b) $X = \mathbb{R}$ - полное, не вполне ограниченное пространство. На нём есть $f(x) = x$. Будем действовать схожим образом: раз X полно и не вполне ограничено, то существует $\varepsilon_0 > 0$ при котором любая ε_0-сеть не покрывает полностью X. Значит, можно взять любую точку x_1, её окрестность $B(x_1, \varepsilon_0)$ и она не покроет X. Возьмём аналогично $x_2 \in X \backslash B(x_1, \varepsilon_0)$ и продолжим этот процесс итеративно, тем самым получим последовательность точек $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, которые попарно удалены друг от друга на расстояние $\geqslant \varepsilon_0$. Зададим функцию f так, что вне окрестностей $B(x_n, \frac{\varepsilon_0}{2})$ она была нулевой, а внутри было равенство $f(x_n) = n$, причём от соответствующей точки до границы $B(x_n, \frac{\varepsilon_0}{2})$ происходит убывание до нуля. Формально, такую функцию можно записать так:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{\varepsilon_0}{2} - \rho(x, x_n)\right)^+$$

где $a^+ = \max\{a, 0\}$. Тривиальным образом эта функция непрерывна, но неограничена в силу последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

$1 \Rightarrow 5$ Пусть $f \in C(X, \mathbb{R})$. В силу упражнения выше, $f(X) \subset \mathbb{R}$ тоже является компактом, а значит и вполне ограниченным множеством. В силу замечания перед теоремой, это означает ограниченность $f(X)$, а значит $f \in B(X, \mathbb{R})$, что и требовалось.

$\square$

Упражнение.

1. *Если $Y \subseteq X$ — компакт в метрическом пространстве, то Y замкнуто в X*
2. *Если X — компактное метрическое пространство, то X сепарабельно*
3. *Если X — полное метрическое пространство, тогда $Y \subseteq X$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и вполне ограничено*

Замечание. Далее, если явно не оговорено иного, мы используем обозначение $\mathbb{K}$ для либо пространства $\mathbb{R}$, либо пространства $\mathbb{C}$.

Замечание. $C(X, \mathbb{K})$ — обозначение класса непрерывных функций из X в $\mathbb{K}$, $\widehat{C}(X, \mathbb{K})$ — класс равномерно непрерывных функций.

Теорема 3.3. *(Кантора) Пусть X — компактное метрическое пространство, а также $f \in C(X, \mathbb{K})$. Тогда $f \in \widehat{C}(X, \mathbb{K})$:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \mid \forall x, y \in X,\ \rho(x, y) < \delta \quad |fx - fy| < \varepsilon$$

Доказательство. (Прямое доказательство) Раз X — компактное метрическое пространство, то мы можем рассмотреть любой $x \in X$ и для него существует шар $B(x, r_x) \subseteq X$. В силу непрерывности f на X, у нас имеется непрерывность и в каждой точке:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists B(x, r_x) \mid \forall y \in B(x, r_x) \quad |fx - fy| < \varepsilon$$

Чтобы найти r, подходящее для каждой точки при фиксированном $\varepsilon > 0$, вспомним о компактности и наличии покрытия $X = \bigcup_{x \in X} B\left(x, \frac{r_x}{2}\right)$. Выделим из покрытия конечное, пусть в нём n элементов. Тогда $\delta := \min_{k \in \{1, \dots, n\}} \frac{r_k}{2}$ и его достаточно. Действительно, пусть $\rho(x, y) < \delta$. В таком случае, есть шар $B(x_k, r_k)$, содержащий обе этих точки. Но шары выбирались исходя из непрерывности f, то есть:

$$|fx - fy| \leqslant |fx - fx_k| + |fx_k - fy| < 2\varepsilon$$

$\square$

Доказательство. (Косвенное доказательство) Предположим противное. Тогда для f не выполнено условие равномерной непрерывности:

$$\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall \delta > 0 \mid \exists x, y \in X,\ \rho(x, y) < \delta \quad |fx - fy| \geqslant \varepsilon_0$$

Дальше схема обычная. Рассмотрим $\delta = \frac{1}{n}$, получим последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$. В силу компактности X, можем выделить сходящуюся к некоторому x_0 подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Но тогда есть предел $\lim_{k \to \infty} y_{n_k} = x_0$, а это уже ведёт к противоречию с фактом $|fx_{n_k} - fy_{n_k}| \geqslant \varepsilon_0$. $\square$

Определение 3.4. Пусть X — метрическое пространство. $Y \subseteq X$ называется *предкомпактным*, если $\operatorname{cl} Y$ — компактно. В такой ситуации говорят, что Y *компактно относительно* X.

Упражнение. *Если X — полное метрическое пространство, то для предкомпактности $Y \subseteq X$ необходимо и достаточно только условия вполне ограниченности.*

Теорема 3.4. *(Арцéла-Аскóли) Пусть X — компактное метрическое пространство, $M \subseteq C(X, \mathbb{K})$. Множество M является предкомпактным тогда и только тогда, когда выполнено 2 условия:*

1. *M ограничено*
2. *M равностепенно непрерывно, то есть выполено условие:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ \Big|\ \forall x, y \in X,\ \rho(x, y) < \delta\ \forall f \in M \quad |fx - fy| < \varepsilon$$

Доказательство.

- $\Rightarrow$ Будем доказывать каждый пункт отдельно:
  1. Коль скоро M предкомпактно, оно вполне ограничено. Отсюда по определению:
  $$\forall \varepsilon > 0\ \exists \{\varphi_k\}_{k=1}^n \ \Big|\ \forall f \in M\ \exists \varphi_m \quad \rho(f, \varphi_m) = \|f - \varphi_m\| < \varepsilon$$
  Стало быть, при фиксированном $\varepsilon > 0$ можно оценить $\|f\|$ таким образом:
  $$\forall f \in M \quad \|f\| \leqslant \|f - \varphi_m\| + \|\varphi_m\| < \varepsilon + \max_{k \in \{1, \ldots, n\}} \|\varphi_k\|$$
  2. Снова пойдём через ε-сеть. Заметим, что $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$ являются равномерно непрерыными в силу теоремы Кантора. Это означает, что для каждой функции верно утверждение:
  $$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_k > 0 \ \Big|\ \forall x, y \in X,\ \rho(x, y) < \delta_k \quad |\varphi_k x - \varphi_k y| < \varepsilon$$
  Положим $\delta := \min_{k \in \{1, \ldots, n\}} \delta_k$. Тогда для любой пары точек $x, y \in X$ с расстоянием $\rho(x, y) < \delta$ можно записать несложную оценку для любой $f \in M$ (полагая, что φ_m — это функция, соответствующая f по определению вполне ограниченности):
  $$|fx - fy| \leqslant |fx - \varphi_m x| + |\varphi_m x - \varphi_m y| + |\varphi_m y - fy| < 3\varepsilon$$
- $\Leftarrow$ Докажем только частный случай $X = [a; b]$. Во-первых, $C(X, \mathbb{K})$ является полным метрическим пространством, а потому надо проверить только вполне ограниченность M. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и покажем, что у нас найдётся ε-сеть для любой функции из M. В силу ограниченности M:
  $$\exists C > 0 \ \Big|\ \forall f \in M \quad \|f\| = \max_{x \in [a;b]} |f(x)| \leqslant C$$
  Это значит, что график любой функции f зажат в прямоугольнике $[a; b] \times [-C; C]$

  Здесь должен быть рисунок

Более того, у нас есть равностепенная непрерывность M, то есть для ε найдётся $\delta > 0$. Итак, «порежем» прямоугольник на одинаковые части по горизонтали так, что они были меньше δ, а по вертикали меньше ε. У нас возникнут узлы полученной сетки. Обозначим за $\{x_k\}_{k=1}^n$ горизонтальные координаты разрезов по возрастанию (при этом $x_1 = a$, $x_n = b$ и $|x_{k+1} - x_k| < \delta$). Кандидат в искомую ε-сеть — это множество всех ломаных функций, которые проходят по узлам решётки, причём обязательно соседние узлы функции лежат в соседних горизонтальных разрезах (то есть, если взять соседние узлы ломаной, то эти точки соответствуют аргументам x_k и x_{k+1} при некотором k).

Теперь, рассмотрим произвольную $f \in M$. Так как $|x_{k+1} - x_k| < \delta$, то $|fx_{k+1} - fx_k| < \varepsilon$. Значит, за 1 сдвиг по горизонтали f двигается не более чем на 1 сдвиг по вертикали (где сдвиг — это ширина либо высота квадратика, на которые мы поделили прямоугольник соответственно). Это позволяет выбрать ломаную функцию ψ из полученного выше множества так, что $|fx_k - \psi x_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ (то есть просто выбирали лучший приближающий узел с каждым сдвигом). Осталось показать, что $\|f - \psi\| < \varepsilon$, а для этого рассмотрим произвольный $x \in [a; b]$. Тогда верно, что $x \in [x_k; x_{k+1}]$ для некоторого k. Осталось записать неравенство на расстояние значений:

$$|fx - \psi x| \leqslant |fx - fx_k| + |fx_k - \psi x_k| + |\psi x_k - \psi x| \leqslant \\ |fx - fx_k| + |fx_k - \psi x_k| + |\psi x_k - \psi x_{k+1}|$$

Последний переход верен в силу линейности ψ между $[x_k; x_{k+1}]$. Первое слагаемое меньше ε по равностепенной непрерывности, второе меньше ε в силу построения, осталось формально разобраться с последним, но здесь мы снова можем сослаться на построение ψ и получить не больше ε (формально можно написать такое: $|\psi x_k - \psi x_{k+1}| \leqslant |\psi x_{k+1} - fx_{k+1}| + |fx_{k+1} - fx_k| + |fx_k - \psi x_k| < 2\varepsilon$). Итого:

$$|fx - \psi x| \leqslant \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon < 3\varepsilon$$

□

4 Линейные нормированные пространства

Упражнение. *Пусть E — линейное нормированное пространство над $\mathbb{K}$, $M = [e_1, \dots, e_n]$. Докажите, что M является замкнутым множеством.*

Определение 4.1. Пространство E называется *линейным нормированным*, если выполнено 2 условия:

1. E — линейное пространство над $\mathbb{K}$
2. В пространстве E существует *оператор нормы* $\|\cdot\|\colon E \to \mathbb{R}_+$. Он удовлетворяет следующим условиям:
   (a) $\forall x \in E \quad \|x\| \geqslant 0 \land \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   (b) $\forall x \in E,\ \alpha \in \mathbb{R} \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
   (c) $\forall x, y \in E \quad \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Утверждение 4.1. *Любое линейное нормированное пространство является метрическим с индуцированной нормой метрикой $\rho(x,y) = \|x-y\|$.*

Доказательство. Проверим все свойства метрики:

1. (Неотрицательность и аксиома тождества) $\forall x,y \in X\ \ \rho(x,y) = \|x-y\| \geqslant 0$. Если $\rho(x,y) = \|x-y\| = 0$, то по определению нормы $x-y=0 \Leftrightarrow x=y$

2. (Симметричность)

$$\forall x,y \in X\ \ \rho(x,y) = \|x-y\| = \|(-1)\cdot(y-x)\| = |-1|\cdot\|y-x\| = \|y-x\| = \rho(y,x)$$

3. (Неравенство треугольника)

$$\forall x,y,z \in X\ \ \rho(x,z) = \|x-z\| \leqslant \|x-y\| + \|y-z\| = \rho(x,y)+\rho(y,z)$$

□

Определение 4.2. Полное линейное нормированное пространство называется *банаховым.*

Пример.

1. $\mathbb{R}^n$ является банаховым пространством

2. $C[a;b]$ со своей собственной нормой $\|f\| = \min_{[a;b]}|f|$ является банаховым

3. $C[a;b]$ с нормой $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p}$

Замечание. Далее буква E закрепляется за линейным нормированным пространством.

Определение 4.3. *Линейным многообразием* $L \subseteq E$ называется такое подмножество, которое само по себе является линейным пространством.

Определение 4.4. Пространство $L \subseteq E$ называется *подпространством в* E, если L — замкнутое линейное многообразие.

Пример. Рассмотрим множество многочленов $\mathcal{P}$ в пространстве $C[a;b]$. По теореме Вейерштрасса $\operatorname{cl}\mathcal{P} = C[a;b] \neq \mathcal{P}$, поэтому $\mathcal{P}$ является только линейным многообразием.

Определение 4.5. *Линейной оболочкой множества* $S \subseteq E$ называется множество всех конечных линейных комбинаций элементов из S. Обозначается как $[S]$ или $\operatorname{Lin} S$

Замечание автора. В этот момент читатель мог заметить, что обозначение с квадратными скобками может обозначать как замкнутость множества, так и теперь линейную оболочку. Здесь могу лишь отослать к странице про обозначения: для замыкания в конспекте везде используется cl, а для линейной оболочки будет $[\cdot]$.

Определение 4.6. Норма $\|\cdot\|_1$ *слабее, чем* норма $\|\cdot\|_2$, если выполнено условие:

$$\exists C > 0 \bigm| \forall x \in E\ \ \|x\|_1 \leqslant C\|x\|_2$$

Пример. В пространстве $C[a;b]$ норма $\|\cdot\|_1$ слабее нормы $\|\cdot\|_{C[a;b]}$:

$$\int_a^b |f(x)|dx \leqslant \max_{x\in[a;b]} |f(x)| \cdot (b-a) = \|f\|_C \cdot (b-a)$$

Упражнение. *(от автора) Докажите, что отношение слабости на нормах является предпорядком.*

Определение 4.7. Нормы $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ эквивалентны, если выполнено условие:

$$\exists C_1, C_2 > 0 \;\Big|\; \forall x \in E \;\; C_1\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C_2\|x\|_1$$

Упражнение. *(от автора) Докажите, что введённое отношение эквивалентности норм соответствует аксиомам отношения эквивалентности.*

Упражнение. *Верно ли, что если E является линейным нормированным пространством с нормой $\|\cdot\|_1$, то для эквивалентной нормы $\|\cdot\|_2$ это тоже так?*

Определение 4.8. Пусть E — линейно нормированное пространство над $\mathbb{R}$. Тогда множество $S \subseteq E$ называется *выпуклым*, если выполнено утверждение:

$$\forall x, y \in S \; \forall \lambda \in [0;1] \;\; \lambda x + (1-\lambda)y \in S$$

Определение 4.9. *Базисом Гамеля в пространстве E* называется набор векторов $\{e_k\}_{k\in\mathcal{K}} \subseteq E$ такой, что верно 2 условия:

1. Любой конечный поднабор $\{e_{k_t}\}_{t=1}^n$ линейно независим

2. Любой вектор пространства E выражается конечной линейной комбинацией векторов из $\{e_k\}_{k\in\mathcal{K}}$

Замечание автора. Базис Гамеля может быть любым с точки зрения мощности $\mathcal{K}$. Наглядный пример: если считать $\mathbb{R}$ линейным пространством над $\mathbb{Q}$, то в нём имеется несчётный базис Гамеля.

Определение 4.10. *Базисом Шаудера в пространстве E* называется набор векторов $\{e_k\}_{k\in\mathcal{K}}^{\infty} \subseteq E$, $\mathcal{K}$ не более чем счётно, такой, что любой вектор из E раскладывается по этой системе единственным образом:

$$\forall v \in E \;\; \exists! \{\alpha_k\}_{k\in\mathcal{K}} \subseteq \mathbb{K} \;\Big|\; v = \sum_{k\in\mathcal{K}} \alpha_k e_k$$

Утверждение 4.2. *(от автора) Если в пространстве E существует конечный базис Гамеля или Шаудера, то он является также базисом Шаудера или Гамеля соответственно. Стало быть, такую конструкцию можно называть просто базисом.*

Определение 4.11. (Не по лектору) *Размерностью E* называется мощность базиса в пространстве E. Если конечного базиса не существует, то размерность равна бесконечности. Обозначается как $\dim E$

Определение 4.12. Пусть E_1, E_2 — линейные нормированные пространства. Отображение $A\colon E_1 \to E_2$ называется *оператором*.

Определение 4.13. Пусть E — линейное нормированное пространство над $\mathbb{K}$. Тогда отображение $f\colon E \to \mathbb{K}$ называется *функционалом.*

Замечание автора. Норма — это как раз пример функционала.

Теорема 4.1. *Пусть* $\dim E < \infty$*. Тогда на* E *все нормы эквивалентны.*

Лемма 4.1. *(Непрерывность нормы) Если* $x \in E, \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq E$*, причём* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$*, то* $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$.

Доказательство. Для сходимости элементов E есть тривиальная эквивалентность $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$. Для доказательства требуемого достаточно воспользоваться неравенством с модулями:

$$\forall a, b \in \mathbb{K} \quad \big||a| - |b|\big| \leqslant |a - b| \Longrightarrow \big|\|x_n\| - \|x\|\big| \leqslant \|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

□

Утверждение 4.3. *Если* $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$*, то и* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

Доказательство. Просто заметить, что $\lim_{n\to\infty} \|x_n - 0\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$ □

Доказательство. (теоремы) Для простоты, приведём доказательство в случае $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (остаётся не рассмотренным $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, но он отличается только сопряжением). Рассмотрим ортонормированный базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Покажем, что произвольная норма $\|\cdot\|_1$ является эквивалентной к евклидовой норме, порождённой ортогональным базисом:

$$\|x\| = \left\|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2}$$

- $\Rightarrow$ Обозначим $\varkappa = \max_{k\in\{1,\ldots,n\}} \|e_k\|_1$. Имеет место цепочка неравенств:

  $$\|x\|_1 = \left\|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right\|_1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|\alpha_k e_k\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \cdot \|e_k\|_1 \leqslant \varkappa \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \leqslant \varkappa\sqrt{n} \cdot \|x\|$$

  Последний переход — неравенство Коши между средним арифметическим и квадратичным.

- $\Leftarrow$ Предположим противное. Тогда, верно утверждение $\forall C > 0 \ \exists x \in E \ \big| \ C\|x\| \geqslant \|x\|_1$. Стало быть, для $C_n = \frac{1}{n}$ найдётся соответствующая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. По ней построим $y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$ — последовательность точек на единичной сфере в евклидовой норме. Заметим, что единичная сфера в таком пространстве является замкнутым и ограниченным множеством, то есть компактом. Стало быть, из y_n можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $y_0 = \lim_{k\to\infty} y_{n_k}$, причём $\|y_0\| = 1$. Осталось заметить противоречие:

  $$\|y_{n_k}\|_1 = \frac{\|x_{n_k}\|_1}{\|x_{n_k}\|} \leqslant \frac{1}{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = 0$$

  Этого не может быть, коль скоро предел единственен и он уже должен не равняться нулю.

□

Теорема 4.2. *Пусть* $\{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq E$. *Тогда* $[e_1, \ldots, e_n]$ *является подпространством* E.

Доказательство. Для того, чтобы $L = [e_1, \ldots, e_n]$ стало подпространством, нам нехватает замкнутости. Однако её можно тривиально получить, если доказать, что L — банахово пространство. Итак, мы знаем, что $\dim L = d \leqslant n < \infty$, то есть конечномерное пространство. Значит, в L все нормы эквивалентны. Вспомним об изоморфизме $L \cong \mathbb{R}^d$ из алгебры. Так как в $\mathbb{R}^d$ полно, то то же самое верно и про L с евклидовой метрикой. Осталось сказать, что евклидова норма в L эквивалентна индуцированной из E норме, а тогда L полно и с индуцированной метрикой, что и требовалось показать. □

Теорема 4.3. *(Ф. Рисса) Пусть* E *— бесконечномерное пространство. Тогда единичная сфера в* E *не является вполне ограниченной.*

Следствие. Единичная сфера не компактна.

Замечание. Наша цель — доказать теорему Рисса. Проникнемся интуицией к доказательству, рассмотрев частный случай $E = \ell_2$. Несложно заметить, что единичной нормой (то есть лежат на единичном шаре в ℓ_2) обладают элементы такого вида:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad e_n = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 0, \ldots)$$

Более того, любые из этих двух элементов всегда удалены на расстояние, большее единицы (а если быть точным, то $\rho(e_n, e_m) = \sqrt{2}$). Стало быть, никакой конечной ε-сетью (для, например, $\varepsilon \leqslant 1$) это множество не покрыть. Возможно ли применить ту же идею в общем случае?

Лемма 4.2. *(о «почти перпендикуляре») Пусть* $E_1 \subset E$ *— подпространство. Тогда:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists y \in E \colon \begin{cases} \|y\| = 1 \\ \rho(y, E_1) > 1 - \varepsilon \end{cases}$$

Замечание. Тот факт, что E_1 — не просто линейное многообразие, а подпространство, существенно.

Рассмотрим $E = C[0;1]$, $E_1 = \mathcal{P}$. Тогда E_1 — не подпространство. Более того, $\operatorname{cl} E_1 = E$, поэтому отдалиться от E_1 на хоть какое-то ненулевое расстояние просто невозможно.

Доказательство. Коль скоро $E_1 \neq E$, то существует $y_0 \notin E_1$. Введём обозначение $d = \rho(y_0, E_1)$. Сразу понятно, что в силу замкнутости не может быть $d = 0$, иначе $y_0 \in E_1$. Из определения расстояния, в частности, верно утверждение:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists z_0 \in E_1 \ \Big| \ d \leqslant \|y_0 - z_0\| < d(1 + \varepsilon)$$

Посмотрим на вектор $y = \frac{y_0 - z_0}{\|y_0 - z_0\|}$. Обозначим коэффициент при векторе за α. Сразу видно, что $\|y\| = 1$, поэтому осталось проверить только расстояние до E_1:

$$\forall z \in E_1 \quad \rho(y, z) = \|y - z\| = \|\alpha(y_0 - z_0) - z\| = |\alpha| \cdot \left\| y_0 - \underbrace{\left(z_0 + \frac{z}{\alpha}\right)}_{\in E_1} \right\| \geqslant \alpha \cdot d$$

То есть $\rho(y, E_1) \geqslant \alpha d$. Выстроим оценку на αd из неравенства, связывающего y_0 и z_0:

$$d \leqslant \frac{1}{\alpha} < d(1+\varepsilon) \Longrightarrow \frac{1}{d} \geqslant \alpha > \frac{1}{d(1+\varepsilon)}$$

Таким образом, $\alpha d > \frac{1}{1+\varepsilon}$. Последняя оценка стремится к единице с уменьшением ε, а поэтому для произвольного ε' мы можем подобрать ε так, чтобы выполнить неравенство $\frac{1}{1+\varepsilon} > 1 - \varepsilon'$. □

Доказательство. (теоремы Рисса) Рассмотрим произвольный $x_1 \in E$: $\|x_1\| = 1$. Тогда он не является базисом в силу условия. Рассмотрим $E_1 = [x_1]$. Тогда $E_1 \neq E$ и можно воспользоваться леммой о почти перпендикуляре. Так мы находим x_2. Дальше повторяем то же самое с $E_2 = [x_1, x_2]$. Получаем в итоге последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ со следующими свойствами:

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \quad \|x_n\| = 1 \\ \forall n \neq m \quad \rho(x_n, x_m) > 1 - \varepsilon \end{cases}$$

Понятно, что существование такого подмножества сферы полностью ломает вполне ограниченность (нет $\frac{1-\varepsilon}{2}$-сети, например). Следовательно, сфера не может быть компактом. □

Определение 4.14. Линейное пространство E над K называется *евклидовым*, если в нём определена билинейная симметричная (полуторалинейная) положительно определённая форма $(\cdot,\cdot)\colon E^2 \to \mathbb{K}$:

1. $\forall x \in E \quad (x, x) \geqslant 0 \wedge \Big((x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0\Big)$
2. $\forall x, y \in E \quad (x, y) = \overline{(y, x)}$
3. $\forall \alpha \in \mathbb{K}\ \forall x, y \in E \quad (\alpha x, y) = \alpha(x, y)$
4. $\forall x_1, x_2, y \in E \quad (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$

Замечание автора. В комплексном случае нельзя забывать, что $(x, \alpha y) = \overline{(\alpha y, x)} = \overline{\alpha}(x, y)$. В этом и есть суть названия «полуторалинейная».

Утверждение 4.4. *Всякое евклидово пространство является линейным нормированным с нормой* $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$.

Доказательство. Проверим аксиомы нормы:

1. (Неотрицательность и единственность нуля) Так как $(x, x) \geqslant 0$ по определению, то и $\sqrt{(x, x)} \geqslant 0$. Если $\|x\| = 0$, то $(x, x) = 0$. А это эквивалентно равенству $x = 0$ по определению.
2. (Линейность нормы) $\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}(x, x)} = |\alpha|\sqrt{(x, x)} = |\alpha| \cdot \|x\|$
3. (Неравенство треугольника) Пусть $x, y \in E$. Тогда, вместо рассмотрения нормы, мы посмотрим на её квадрат:

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (y, y) + 2\operatorname{Re}(x, y) \leqslant (x, x) + (y, y) + 2|(x, y)| \leqslant$$
$$(x, x) + (y, y) + 2\sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)} = \left(\sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)}\right)^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

Остаётся без зазрения совести снять квадрат и получится требуемое.

□

Определение 4.15. Линейное пространство называется *гильбертовым*, если оно является полным евклидовым пространством.

Замечание. Иногда к этому определению добавляют ещё разные комбинации из следующих свойств:

- ▷ Бесконечномерность
- ▷ Сепарабельность

Напоминание. (Неравенство Бесселя) Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ — ортогональная система, $x \in E$. Тогда, если $\alpha_n = \frac{(x,e_n)}{\|e_n\|^2}$ (коэффициент проекции x на e_n), то выполнено неравенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \|e_n\|^2 \leqslant \|x\|^2$$

Доказательство. (от автора) Доказательство целиком опирается на так называемом *равенстве Бесселя*:

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{N} (x, e_n) e_n \right\|^2 = \left(x - \sum_{n=1}^{N} (x, e_n) e_n, x - \sum_{n=1}^{N} (x, e_n) e_n \right) =$$
$$\|x\|^2 - 2\left(x, \sum_{n=1}^{N} (x, e_n) e_n \right) + \left\| \sum_{n=1}^{N} (x, e_n) e_n \right\|^2 =$$
$$\|x\|^2 - 2\sum_{n=1}^{N} |(x, e_n)|^2 + \sum_{n=1}^{N} |(x, e_n)|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{N} |(x, e_n)|^2$$

Осталось заметить, что квадрат нормы с самого начала является неотрицательной величиной, отсюда и неравенство:

$$0 \leqslant \left\| x - \sum_{n=1}^{N} (x, e_n) e_n \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{N} |(x, e_n)|^2$$
$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{N} |(x, e_n)|^2 \leqslant \|x\|^2 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \leqslant \|x\|^2$$

Приведение к искомому виду уже тривиально. □

Утверждение 4.5. *(Неравенство Коши-Буняковского) Имеет место неравенство:*

$$\forall x, y \in E \quad |(x, y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$$

Причём равенство достигается тогда и только тогда, когда x, y линейно зависимы.

Доказательство. (через неравенство Бесселя) Запишем неравенство Бесселя, если ортонормированная система состоит из одного вектора e:

$$\forall v \in E \quad |(v, e)| \leqslant \sqrt{(v, v)} = \|v\|$$

Откуда в неравенстве Коши-Буняковского получить единичный вектор (который и составит ортогональную систему)? Занести норму множителя справа в скалярное произведение!

$$|(x,y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\| \Leftrightarrow \left|\left(x, \frac{y}{\|y\|}\right)\right| \leqslant \|x\|$$

Второе неравенство тогда верно по неравенству Бесселя и всё доказано. □

Теорема 4.4. *(фон Нейман, Фреше, 1930 гг., без доказательства) Пусть E — линейное нормированное пространство. Тогда норма $\|\cdot\|_E$ согласована с каким-либо скалярным произведением на E тогда и только тогда, когда выполнено равенство параллелограмма:*

$$\forall x, y \in E \quad \|x+y\|_E^2 + \|x-y\|_E^2 = 2\|x\|_E^2 + 2\|y\|_E^2$$

Замечание. Базис — это довольно «связывающая» конструкция, он не всегда существует. Что можно использовать вместо него? Оказывается, что для большинства результатов нам нужна только связь скалярного произведения с нормой, равенство параллелограмма.

Замечание. С возникшим вопросом о базисах есть ещё две связанные темы:

- ▷ *Дополняемость.* Верно ли, что для некоторого линейного нормированного пространства E, если взять подпространство $E_1 \subset E$, то найдётся некоторое другое подпространство E_2, что $E_1 \oplus E_2 = E$?
- ▷ *Существование базиса Шаудера.* Верно ли, что если линейное нормированное пространство E хотя бы сепарабельно, то в нём найдётся базис Шаудера? (Базис Гамеля можно построить, если у нас есть аксиома выбора, поэтому тут вопрос неинтересный)

Оказывается, что для гильбертовых пространств на оба вопроса ответ положителен, а для банаховых — отрицателен (таким образом, евклидовость является существенной характеристикой пространств).

Определение 4.16. Пусть $S \subseteq E$ — подпространство евклидова пространства. Тогда *аннулятором* S называется следующее множество:

$$S^\perp = \{y \in E \colon \forall x \in S \ (x,y) = 0\}$$

Определение 4.17. Пусть $S \subseteq E$ — подпространство метрического пространства, $x \notin S$. Тогда *элементом наилучшего приближения множества* S называется следующий элемент y:

$$y \in S \mid \rho(x,y) = \rho(x,S)$$

Замечание. Естественно, элемент наилучшего приближения не обязательно существует в произвольном случае.

Теорема 4.5. *(о проекции) Пусть H — гильбертово пространство, $M \subseteq H$ — подпространство. Тогда верно равенство:*

$$H = M \oplus M^\perp$$

Лемма 4.3. *(о существовании и единственности элемента наилучшего приближения) Пусть $M \subseteq H$ — подпространство гильбертова пространтва. Тогда:*

$$\forall h \in H \ \exists! x \in M \mid \|h-x\| = \rho(h,x) = \rho(h,M)$$

Доказательство. Докажем две отдельные части:

1. (Единственность) Пусть существуют элементы наилучшего приближения $x_1 \neq x_2$ для фиксированного h. Тогда, получим противоречие с равенством параллелограмма:

$$0 < \|x_1 - x_2\|^2 = \|(x_1 - h) + (h - x_2)\|^2 = -\|x_1 + x_2 - 2h\|^2 + 2\|x_1 - h\|^2 + 2\|x_2 - h\|^2$$

   Обозначим $d = \rho(h, M)$. Тогда:

$$0 < -4\left\|\frac{x_1 + x_2}{2} - h\right\|^2 + 4d^2 \Longrightarrow \left\|\frac{x_1 + x_2}{2} - h\right\| < d$$

   Требуемое противоречие достигнуто, ибо $\frac{x_1+x_2}{2} \in M$

2. (Существование) Пусть $d = \rho(h, M)$. Рассмотрим ещё два подслучая:

   (a) $d = 0$. Так как M замкнуто, то $h \in M$ и является искомым элементов наилучшего приближения.

   (b) $d > 0$. Так как $d = \inf_{x \in M} \rho(x, M)$, то найдётся последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $\lim_{n\to\infty} \|h - x_n\| = d$. Покажем, что последовательность сходится, тогда её предел есть элемент наилучшего приближения. Будем доказывать фундаментальность, а для этого воспользуемся уже известным равенством параллелограмма:

$$\|x_n - x_m\|^2 = -\|x_n + x_m - 2h\|^2 + 2\|x_n - h\|^2 + 2\|x_m - h\|^2$$

   Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда найдётся такой номер $N \in \mathbb{N}$, что будет выполнено неравенство:

$$\forall n \geqslant N \quad d^2 \leqslant \|x_n - h\|^2 \leqslant d^2(1 + \varepsilon)$$

   Пусть $n \leqslant m$, тогда

$$\|x_n - x_m\|^2 \leqslant -4d^2 + 4d^2(1 + \varepsilon) = 4d^2\varepsilon$$

   Получили нужную оценку. Итак, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, а стало быть её предел x — кандидат в искомый элемент. Осталось проверить, что действительно на x достигается равенство, а это просто в силу непрерывности нормы:

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - h\| = \|x - h\| = d \text{ — в силу единственности предела}$$

□

Доказательство. (теоремы о проекции) Наша задача состоит в том, чтобы показать, что любой элемент $h \in H$ представим в виде $h = x + y$, где $x \in M, y \in M^{\perp}$. Зафиксируем произвольный $h \notin M$ (иначе разложение тривиально). Пусть x — элемент наилучшего приближения $\rho(h, M)$. Утверждается, что $y := h - x \in M^{\perp}$. Проверим по определению этот факт. Пусть $z \in M$. Тогда, будем работать с $\alpha z \in M$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Воспользуемся определением x (далее $d = \rho(h, M)$):

$$0 \leqslant d^2 = \|h - x\|^2 \leqslant \|h - x - \alpha z\|^2 = d^2 \underbrace{-(y, \alpha z) - (\alpha z, y)}_{-2\,\mathrm{Re}((\alpha(z,y))} + |\alpha|^2\|z\|^2$$

Отсюда $2\operatorname{Re}(\alpha(z,y)) \leqslant \alpha^2\|z\|^2$. Если рассмотреть $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\alpha = \pm\varepsilon$, то получится оценка $|2\operatorname{Re}((z,y))| \leqslant \varepsilon\|z\|^2$. Так как ε произвольно, то такое возможно тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re}((z,y)) = 0$. Аналогично смотрим $\alpha = \pm i\varepsilon$, что даёт оценку $|2\operatorname{Im}((z,y))| \leqslant \varepsilon\|z\|^2$ и делаем вывод $\operatorname{Im}((z,y)) = 0$. Стало быть, $(z,y) = 0$, что и требовалось доказать. □

Нужна картинка схемы доказательства

Теорема 4.6. *(1907г. Ф. Рисс, Фишер) Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, $e = \{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq H$ — ортонормированная система. Тогда следующие условия равносильны:*

1. *e — базис Шаудера*
2. *e — полная система*
3. *$e^{\perp} = \{0\}$*
4. *Выполнено равенство Парсеваля: $\forall x \in H\ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(x,e_i)|^2$*

Лемма 4.4. *(Минимальное свойство коэффициентов Фурье) Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{N} \subseteq H$ — ортонормированная система. Тогда выполнено неравенство:*

$$\forall \{\alpha_n\}_{n=1}^{N} \subset \mathbb{R} \quad \left\| x - \sum_{n=1}^{N} (x,e_n)e_n \right\| \leqslant \left\| x - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n e_n \right\|$$

Иначе говоря, сумма Фурье является наилучшим приближением среди всех других сумм.

Доказательство. Во-первых, базовое правило для выведения неравенств состоит в том, что надо работать с квадратом нормы. Во-вторых, мы просто оценим квадрат нормы справа, расписав его в явном виде (а чтобы выделить в равенствах выражение слева, мы вычтем и добавим соответствующие суммы):

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n e_n \right\|^2 = \|x\|^2 + \left\| \sum_{n=1}^{N} \alpha_n e_n \right\|^2 - 2\sum_{n=1}^{N} \alpha_n (x,e_n) =$$
$$\|x\|^2 - \sum_{n=1}^{N} |(x,e_n)|^2 + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^2 - 2\sum_{n=1}^{N} \alpha_n (x,e_n) + \sum_{n=1}^{N} |(x,e_n)|^2 =$$
$$\left\| x - \sum_{n=1}^{N} (x,e_n)e_n \right\|^2 + \sum_{n=1}^{N} (\alpha_n - (x,e_n))^2 \geqslant \left\| x - \sum_{n=1}^{N} (x,e_n)e_n \right\|^2$$

□

Доказательство. (теоремы Рисса-Фишера)

0 (Предварительные сведения) Не знаю, что сюда написать. Что-то про ряды Фурье

$1 \Leftrightarrow 4$ Воспользуемся равенством Бесселя:

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{N} (x,e_n)e_n \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{N} |(x,e_n)|^2$$

Так как сходимость частичных сумм ряда к x эквивалентна стремлению нормы слева к нулю, то всё доказано автоматически.

$1 \Rightarrow 2$ Тривиально

$1 \Leftarrow 2$ Для доказательства воспользуемся леммой о минимальном свойстве коэффициентов Фурье. Итак, e — полная система. Это значит, что любой $x \in H$ можно сколь угодно хорошо приблизить:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists T = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n e_n \ \left\| x - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n e_n \right\| < \varepsilon$$

Стало быть, в силу минимального свойства сумм Фурье верно следующее:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \mid \|S_N(x) - x\| \leqslant \|T - x\| < \varepsilon$$

Отсюда же мы сразу получаем сходимость сумм Фурье:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant N \quad \|S_n(x) - x\| \leqslant \|S_N(x) - x\| < \varepsilon$$

$1 \Leftrightarrow 3$ Пусть $M = \mathrm{cl}[e]$. Тогда, по теореме о проекции $M \oplus M^{\perp} = H$. Дальше всё просто:

- $\Rightarrow$ Тривиально, раз $M = H$ сразу.
- $\Leftarrow$ Понятно, что $M^{\perp}$ требует ортогональности своих элементов к каждому элементу M, в частности e. Поэтому, если $e^{\perp} = \{0\}$, то $M^{\perp} = \{0\}$ и тогда $M = H$.

□

Теорема 4.7. *Пусть H — бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство. Тогда в H существует ортонормированный базис.*

Замечание. Должно быть очевидно, что, если в H есть не более чем счётный базис, то H — сепарабельно.

Доказательство. Пусть $X = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — это всюду плотное счётное множество в H. Так как у нас имеется процесс Грама-Шмидта, то мы можем выделить в X ортонормированный базис. Коль скоро $H = [X]$, то этот базис X будет полным в H, а по уже доказанному, стало быть, эта система будет базисом H. □

Определение 4.18. *Изоморфизмом евклидовых пространств* E_1, E_2 называется отображение $\varphi\colon E_1 \to E_2$, которое является изоморфизмом линейных пространств и *уважает скалярное произведение*:

$$\forall x, y \in E_1 \quad (x, y)_1 = (\varphi(x), \varphi(y))_2$$

Теорема 4.8. *Если H — сепарабельное гильбертово пространство, то H изоморфно пространству $\ell_2(\mathbb{K})$.*

Доказательство. В сепарабельном гильбертвом пространстве есть ортонормированный базис e. Если рассмотреть H как пространство с евклидовой метрикой, порождённой базисом e, то будет тривиальный изоморфизм пространств $H \cong \ell_2(\mathbb{K})$ (каждому вектору ставим в соответствие его коэффициенты разложения по базису e). □

5 Линейные ограниченные (непрерывные) операторы

Замечание. Далее обозначения E_1, E_2 используются для обозначения линейных нормированных пространств.

Определение 5.1. Любое отображение $A\colon E_1 \to E_2$ называется *оператором.*

Напоминание. По возможности скобки для аргумента опускаются, $Ax := A(x)$.

Определение 5.2. Оператор $A\colon E_1 \to E_2$ называется *линейным*, если выполнено утверждение:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, x,y \in E_1 \quad A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$$

Утверждение 5.1. *(не по лектору) Если A — линейный оператор, то* $A0 = 0$.

Доказательство. Действительно, если A линеен, то верно такое равенство:

$$A0 = A(0 + 0) = A0 + A0 \Rightarrow A0 = 0$$

□

Определение 5.3. Оператор $A\colon E_1 \to E_2$ называется *ограниченным*, если образ любого ограниченного множества из E_1 является ограниченным в E_2:

$$\forall S \subseteq E_1 \text{ — ограниченное} \quad A(S) \subseteq E_2 \text{ — тоже ограниченное}$$

Утверждение 5.2. *Пусть $A\colon E_1 \to E_2$ — линейный оператор. Тогда следующие свойства эквивалентны:*

1. *A ограничен*
2. $\exists K \geqslant 0 \mid \forall x \in E_1 \quad \|Ax\| \leqslant K\|x\|$
3. $\exists K \geqslant 0 \mid \forall x \in S(0, 1) \quad \|Ax\| \leqslant K$

Доказательство.

$2 \Leftrightarrow 3$ Так как $A0 = 0$, то можно исключить его из условия:

$$\exists K \geqslant 0 \mid \forall x \in E_1 \backslash \{0\} \quad \|Ax\| \leqslant K\|x\|$$

В силу линейности и того, что $\|x\| \neq 0$, мы можем внести норму $\|x\|$ под норму слева, и даже внутрь аргумента по линейности:

$$\exists K \geqslant 0 \mid \forall x \in E_1 \backslash \{0\} \quad \left\| A\frac{x}{\|x\|} \right\| \leqslant K$$

Теперь аргумент оператора — это единичный вектор $y = \frac{x}{\|x\|}$. Замена обозначений приводит к третьему условию.

$1 \Leftarrow 2$ Пусть $S \subseteq E_1$ — ограниченное множество. По определению:

$$\exists M > 0 \mid \forall x \in S \quad \|x\| \leqslant M$$

В силу условия, можно записать следующее:

$$\exists M > 0, K \geqslant 0 \;\Big|\; \forall x \in S \;\; \|Ax\| \leqslant K\|x\| \leqslant KM$$

Это по определению означает ограниченность образа S.

$1 \Rightarrow 3$ Единичная сфера является ограниченным множеством по определению. Стало быть, её образ тоже должен быть ограниченным, а это в точности соответствует третьему условию.

□

Определение 5.4. *Нормой оператора* A называется инфимум по всем ограничивающим константам:

$$\|A\| := \inf\{K\colon \forall x \in E_1 \;\|Ax\| \leqslant K\|x\|\}$$

Утверждение 5.3. *(не по лектору) Для нормы оператора A всегда выполнено неравенство:*

$$\forall x \in E_1 \;\;\|Ax\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|$$

Причём оператор ограничен тогда и только тогда, когда $\|A\| < \infty$.

Доказательство. Эквивалентность очевидна. Нужно лишь пояснить, почему в конечном случае для точной нижней грани, коей является $\|A\|$, действительно работает неравенство. Это несложно, ведь точно существует последовательность подходящих сверху констант $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\lim_{n\to\infty} K_n = \|A\|$. А тогда мы при каждом отдельном $x \in E_1$ просто используем предельный переход в неравенстве, требуемое доказано. □

Утверждение 5.4. *Для нормы оператора A верны равенства:*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Доказательство. Определение ограниченности линейного оператора имеет эквивалентный вид, как мы уже доказали:

$$\exists K \in \mathbb{K} \;\Big|\; \forall y \in S(0,1) \;\; \|Ay\| \leqslant K$$

По определению, $\|A\|$ — точная нижняя грань всех подходящих констант. В силу эквивалентного определения должно быть очевидно, что $\sup_{y\in S(0,1)} \|Ay\|$, во-первых, будет оценивать сверху необходимую норму, а во-вторых, меньше взять не получится уже в силу определения точной верхней грани, то есть равенство определения и второго выражения установлено.

Для установления равенства между первым и вторым выражениями достаточно заметить, что все точки $0 < \|x\| < 1$ являются на самом деле некоторым αy, где $\alpha \in (0;1)$ и $\|y\| = 1$, поэтому $\|Ax\| = |\alpha| \cdot \|Ay\| \leqslant \|Ay\|$, то есть особого смысла точки внутри единичного шара не несут.

Третье выражение вообще получается почти без изменений определения ограниченности. Заметим, что его также можно записать в таком виде:

$$\exists K \in \mathbb{K} \;\Big|\; \forall x \neq 0 \;\|Ax\| \leqslant K\|x\| \Leftrightarrow \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leqslant K$$

Дальше идея та же, что и для второго выражения. □

Замечание. Эти формулы играют очень важную роль при поиске нормы оператора, ибо для этой задачи нет какого-то общего алгоритма. Однако обычно делают так: вначале находят оценку в духе определения ограниченности, а затем, если вера в её неулучшаемость непоколебима, используют одно из супремумных определений. Если значение супремума сошлось к тому, что мы получили ранее, то норма оператора найдена.

Утверждение 5.5. *Пусть A — линейный непрерывный в точке $x_0 \in E_1$ оператор. Тогда A непрерывен.*

Доказательство. Действительно, рассмотрим произвольную точку $x \in E_1$. Тогда мы хотим доказать следующее утверждение:

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq E_1 \left(\lim_{n\to\infty} x_n = x \to \lim_{n\to\infty} Ax_n = Ax \right)$$

Идея состоит в том, что линейность оператора даёт нам в каком-то смысле параллельный перенос аргумента. Действительно, мы можем сказать следующее:

$$x_0 = x - (x - x_0) = \lim_{n\to\infty} x_n - (x - x_0) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} A(x_n - (x - x_0)) = Ax_0$$

Переход к пределу с оператором мы сделали по условию. Осталось просто переставить части выражения, ибо есть линейность:

$$\lim_{n\to\infty} A(x_n - (x - x_0)) = \lim_{n\to\infty} (Ax_n - Ax + Ax_0) = Ax_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} Ax_n = Ax$$

□

Теорема 5.1. *Пусть $A\colon E_1 \to E_2$ — линейный оператор. Тогда A ограничен тогда и только тогда, когда он непрерывен.*

Доказательство.

$\Rightarrow$ По условию мы знаем, что

$$\forall x \in E_1 \quad \|Ax\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|$$

С другой стороны, рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq E_1$, сходящуюся к $x \in E_1$. Тогда:

$$\|Ax_n - Ax\| = \|A(x_n - x)\| \leqslant \|A\| \cdot \|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\Leftarrow$ Пойдём от противного. Тогда оператор должен быть и непрерывен, и неограничен. Последнее можно записать так:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in E_1 \backslash \{0\} \mid \|Ax_n\| > n\|x_n\|$$

Занесём всю правую часть в аргумент оператора. Тогда:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in E_1 \backslash \{0\} \mid \left\| A \underbrace{\frac{x_n}{n\|x_n\|}}_{y_n} \right\| > 1$$

Несложно увидеть, что $\lim_{n\to\infty} \|y_n\| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, а стало быть $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$. Но так как оператор A непрерывен, отсюда мы также получаем предел $\lim_{n\to\infty} Ay_n = A0 = 0$, чья норма противоречит неравенству выше.

$\square$

Определение 5.5. *Множество всех линейных ограниченных операторов* обозначается как $\mathcal{L}(E_1, E_2)$.

Замечание. Укажем 2 важных частных случая:

- $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E)$
- $\mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E^*$ — сопряжённое пространство

Теорема 5.2. *Имеет место 2 утверждения:*

1. *$\mathcal{L}(E_1, E_2)$ — нормированное пространство с нормой, порождённой нормой операторов*
2. *Если E_2 — банахово пространство, то и $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ — банахово пространство*

Доказательство.

1. Линейность пространства тривиальна. Для того, чтобы доказать корректность нормы, нам достаточно проверить неравенство треугольника (остальное просто очевидно):

$$\|A_1 + A_2\| = \sup_{\|x\|=1} \|A_1x + A_2x\| \leqslant \sup_{\|x\|=1} \|A_1x\| + \sup_{\|x\|=1} \|A_2x\| = \|A_1\| + \|A_2\|$$

2. Нужно показать полноту пространства. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}(E_1, E_2)$ — фундаментальная последовательность:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \Big| \ \forall n, m \geqslant N \quad \|A_n - A_m\| < \varepsilon$$

Покажем, что есть поточечная сходимость. Действительно:

$$\forall x \in E_1 \quad \|A_nx - A_mx\| \leqslant \|A_n - A_m\| \cdot \|x\| < \varepsilon\|x\|$$

Стало быть, последовательность $\{A_nx\}_{n=1}^{\infty} \subseteq E_2$ фундаментальна при любом фиксированном $x \in E_1$, а в силу банаховости E_2 сходится. Определим оператор A следующим образом:

$$\forall x \in E_1 \quad Ax := \lim_{n\to\infty} A_nx$$

Осталось показать, что этот оператор удовлетворяет всем требованиям:

- A линеен. Здесь мы просто воспользуемся свойствами пределов:

$$\forall x, y \in E_1, \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad A(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} A_n(\alpha x + \beta y) = \alpha \lim_{n\to\infty} A_nx + \beta \lim_{n\to\infty} A_ny = \alpha Ax + \beta Ay$$

- A ограничен. Мы уже знаем в силу определения этого оператора, что $\lim_{n\to\infty}\|A_n x\| = \|Ax\|$, причём $\|A_n x\| \leqslant \|A_n\| \cdot \|x\|$. Если бы у всех норм операторов была общая оценка сверху, то по предельному неравенству мы бы получили оценку и для A. В самом деле, последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, а стало быть ограничена.
- Верно, что $\lim_{n\to\infty} A_n = A$. По определению мы должны показать предел $\lim_{n\to\infty}\|A_n - A\| = 0$. Это можно сделать так: зафиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим произвольный $x \in E_1$. За счёт фундаментальности $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall x \in E_1\ \forall m > n \geqslant N\ \ \|A_n x - A_m x\| \leqslant \|A_n - A_m\| \cdot \|x\| < \varepsilon\|x\|$$

Устремим m в бесконечность. Так можно сделать, в силу существования этого предела:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall x \in E_1\ \forall n \geqslant N\ \ \|A_n x - Ax\| < \varepsilon\|x\|$$

В силу линейности, можно переписать это утверждение, рассматривая только единичную сферу:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall x \in S(0,1)\ \forall n \geqslant N\ \ \|A_n x - Ax\| < \varepsilon$$

Итак, осталось воспользоваться эквивалентным определением нормы оператора:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant N\ \ \|A_n - A\| = \sup_{\|x\|=1}\|A_n x - Ax\| < \varepsilon$$

□

Следствие.

- Если E — банахово пространство, то и $\mathcal{L}(E)$ банахово.
- Для любого линейного нормированного пространства E верно, что E^* — банахово пространство

Пример. Существует ли оператор, который был бы линейным, но не ограниченным?

Оказывается, что в конечномерном случае нет, а в бесконечномерном — да. Рассмотрим $E_1 = C^1[0;1]$ с нормой $C[0;1]$, $E_2 = C[0;1]$ и пространство $\mathcal{L}(E_1, E_2)$. Оператор дифференцирования $\frac{d}{dx}$ является линейным, но при этом неограничен (это то же самое, что и не непрерывен):

$$\frac{\sin(nx)}{n} \rightrightarrows 0; \quad \frac{d}{dx}\frac{\sin(nx)}{n} = \cos(nx) \not\rightrightarrows \frac{d}{dx}0 = 0$$

Теорема 5.3. *(о продолжении линейного ограниченного оператора) Пусть $D(A) \subseteq E_1$ — линейное многообразие, причём $\operatorname{cl} D(A) = E_1$ Тогда для любого линейного ограниченного оператора $A\colon D(A) \to E_2$ существует согласованный оператор $\tilde{A} \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ такой, что*

1. $\tilde{A}|_{D(A)} = A$
2. $\|\tilde{A}\| = \|A\|$

Доказательство. Доказательство после пары теорем дальше □

Теорема 5.4. *(1927г. Банаха-Штейнгауза-Хана, принцип равномерной ограниченности) Пусть E_1 — банахово пространство, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Тогда верна импликация:*

$$\left(\forall x \in E \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n x\| < \infty\right) \Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < \infty$$

Доказательство. Запишем утверждение теоремы в эквивалентной форме:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| = \infty \Rightarrow \left(\exists x \in E_1 \mid \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n x\| = \infty\right)$$

Именно в такой форме мы и докажем требуемое. Далее мы считаем, что $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| = \infty$. Проведём доказательство в 2 шага (основная идея схожа с теоремой Бэра, и даже есть доказательства, которые на неё прямо опираются, но мы пойдём другой дорогой):

1. Покажем, что если последовательность операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно ограничена хотя бы на каком-то замкнутом шаре $\overline{B}(x_0, r)$, то уже $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < \infty$. Действительно, это утверждение можно записать так:

   $$\exists M > 0 \mid \forall x \in \overline{B}(x_0, r), n \in \mathbb{N} \quad \|A_n x\| \leqslant M$$

   Сюда надо картинку из 11й лекции, 53:10

   Идея состоит в том, что у этого замкнутого шара для любой точки $x \in E_1$ есть соответствующий радиус-вектор $y - x_0$, который сонаправлен x (важно: радиус-вектор не ко сфере, ограничивающей шар, а по сути может идти к любой точке шара). Их связь можно записать так:

   $$r \cdot \frac{x}{\|x\|} = y - x_0 \Rightarrow x = \frac{\|x\|}{r}(y - x_0)$$

   Через линейность получаем оценку нормы $A_n x$:

   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|A_n x\| = \frac{\|x\|}{r}\|A_n y - A_n x_0\| \leqslant \frac{2M}{r}\|x\|$$

   Что и требовалось.

2. В силу доказанного и имеющегося предположения, у нас нет ни одного замкнутого шара, где последовательность операторов была бы равномерно ограничена. В силу банаховости E_1, мы получим искомую точку x через последовательность вложенных замкнутых шаров. Возьмём произвольный $\overline{B_0}(x_0, 1)$ и рассмотрим также $\overline{B_0}(x_0, 1/2)$ В силу уже сказанного, найдётся точка x_1:

   $$\exists x_1 \in \overline{B}_0(x_0, 1/2), n_1 \in \mathbb{N} \mid \|A_{n_1} x_1\| > 1$$

   Коль скоро оператор A_{n_1} непрерывен, мы найдём некоторый шарик $\overline{B}_1(x_1, r_1)$, $r_1 < 1/2$, в котором любая точка также будет удовлетворять неравенству. В шаре $\overline{B}_1(x_1, r_1/2)$ аналогично ищем x_2 и $n_2 > n_1$ такие, чтобы выполнилось неравенство $\|A_{n_2} x_2\| > 2$. Продолжая алгоритмические действия счётное число раз, мы получим последовательность вложенных вложенных шаров $\overline{B}_k(x_k, r_k)$, чьи радиусы тривиально стремятся к нулю (если говорить строго, то верно соотношение $r_k < r_{k-1}/2$), причём верно утверждение:

$$\forall x \in \overline{B}_k(x_k, r_k) \ \ \|A_{n_k} x\| > k$$

В силу полноты пространства E_1, верна теорема о вложенных шарах и, следовательно, есть точка в пересечении:

$$\exists x = \lim_{k\to\infty} x_k \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{B}_k(x_k, r_k) \Longrightarrow \forall k \in \mathbb{N} \ \ \|A_{n_k} x\| > k \Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n x\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} \|A_{n_k} x\| = \infty$$

□

Замечание автора. По сути теорема Банаха-Штейнгауза-Хана говорит нам, что при наличии поточечной ограниченности (то есть $A_n x$ не убегает куда-то в бесконечность с ростом n), у нас имеется ограниченность последовательности операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. Этот важный факт позволяет доказать полноту $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ относительно поточечной сходимости.

Теорема 5.5. *(Полнота $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ относительно поточечной сходимости) Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Если для любого $x \in E_1$ последовательность $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в E_2, то существует такой оператор $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, что A_n сходятся поточечно к A.*

Доказательство. Зафиксируем $x \in E_1$. Раз $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty} \subseteq E_2$ фундаментальна, то у неё есть предел (за счёт банаховости E_2). Положим значение оператора A по определению этим пределом:

$$Ax := \lim_{n\to\infty} A_n x$$

Покажем, что определённый таким образом оператор принадлежит $\mathcal{L}(E_1, E_2)$:

▷ A линеен. Это на самом деле так, в силу линейности предела и A_n:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, a, b \in E_1 \ \ A(\alpha a + \beta b) = \lim_{n\to\infty} A_n(\alpha a + \beta b) = \alpha \lim_{n\to\infty} A_n a + \beta \lim_{n\to\infty} A_n b = \alpha A a + \beta A b$$

▷ A ограничен. Мы хотим проделать те же действия, что и при доказательстве обычной полноты $\mathcal{L}(E_1, E_2)$. Коль скоро $\lim_{n\to\infty} \|A_n x\| = \|Ax\|$, то последовательность норм $\{\|A_n x\|\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена при любом x, а значит по теореме Банаха-Штейнгауза-Хана должна быть ограничена последовательность норм операторов $\{\|A_n\|\}_{n=1}^{\infty}$. Если обозначить константу ограничения за $M > 0$, то мы получаем знакомое предельное неравенство:

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in E_1 \ \|A_n x\| \leqslant M\|x\| \Longrightarrow \|Ax\| \leqslant M\|x\|$$

□

Замечание. Поточечная сходимость операторов $A_n \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ не влечёт за собой сходимость непосредственно операторов по норме $\lim_{n\to\infty} A_n = A$. Контрпример достаточно просто увидеть в пространстве ℓ_2. Определим A_n как срезку аргумента:

$$A_n x = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots)$$

Стало быть, при каждом фиксированном $x \in \ell_2$ есть предел $\lim_{n\to\infty} A_n x = Ix = x$. Однако совершенно понятно, что $\lim_{n\to\infty} \|A_n - I\| \neq 0$, ибо всегда можно подобрать «ломающий» x, у которого есть единичная координата в позиции больше n.

Теорема 5.6. *(Критерий поточечной сходимости последовательности линейных ограниченных операторов) Пусть E_1 — банахово пространство, $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{L}(E_1, E_2)$ — последовательность линейных ограниченных операторов, $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Тогда A_n поточечно сходятся к A тогда и только тогда, когда выполнено 2 условия:*

- ▷ *Последовательность норм $\{\|A_n\|\}_{n=1}^\infty$ ограничена*
- ▷ $\exists Y \subseteq E_1\colon \operatorname{cl}[Y] = E_1 \land \forall y \in Y\ \lim_{n\to\infty} A_n y = Ay$

Замечание автора. Критерий немного напоминает аналогичные критерии независимости сигма-алгебр в теории вероятностей. С маленьким условием на сами операторы и с наличием хорошего множества Y мы умеем распространять сходимость на всё пространство.

Доказательство.

$\Rightarrow$ Коль скоро есть поточечная сходимость, то в каждой точке $x \in E_1$ последовательность норм $\{\|A_n x\|\}_{n=1}^\infty$ ограничена. Стало быть, по теореме Банаха-Штейнгауза-Хана последовательность норм операторов ограничена. За Y мы можем смело взять E_1 и не думать вообще.

$\Leftarrow$ Рассмотрим $x \in E_1$. За счёт существования всюду плотного $[Y]$, мы можем всегда найти близкую точку из Y для x:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists y \in [Y]\ \big|\ \|x - y\| < \varepsilon$$

Показывать сходимость будем через оценку нормы разности $A_n x - Ax$ при помощи неравенства треугольника:

$$\|A_n x - Ax\| \leqslant \|A_n x - A_n y\| + \|A_n y - Ay\| + \|Ay - Ax\|$$

Разберёмся с каждым слагаемым отдельно (далее $M > 0$ — это константа ограничения последовательности норм):

- $\|A_n x - A_n y\| \leqslant \|A_n\| \cdot \|x - y\| < M\varepsilon$
- $A_n y - Ay = (A_n - A)y$. Коль скоро на Y операторы A_n сходятся поточечно к A, то есть поточечная сходимость к любой точке $y \in [Y]$ (ибо это конечная линейная комбинация точек из Y). Стало быть:

$$\forall y \in [Y]\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \big|\ \forall n \geqslant N\ \ \|A_n y - Ay\| < \varepsilon$$

- $\|Ay - Ax\| \leqslant \|A\| \cdot \|y - x\| < \|A\|\varepsilon$

Итого:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \big|\ \forall n \geqslant N\ \ \|A_n x - Ax\| \leqslant (M + 1 + \|A\|)\varepsilon$$

Это напрямую означает поточечную сходимость A_n к A.

□

Следствие. Если в условиях последней теоремы $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ сходятся на Y не просто поточечно, а по норме операторов, то в теореме можно не требовать от A быть заранее линейным ограниченным оператором.

Доказательство. (теоремы 5.3)

1. (Идея) Пусть $\widetilde{A}$ — некоторое продолжение оператора A по условию теоремы. Тогда несложно заметить, что по условию выполнено утверждение:

$$\forall x \in E_1\ \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq D(A) \ \Big| \ \lim_{n\to\infty} x_n = x \wedge \widetilde{A}x_n = Ax_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \widetilde{A}x$$

Стало быть, нужно отталкиваться от поточечного определения $\widetilde{A}$.

2. (Существование) Определим $\widetilde{A}$ согласно идее (оператор A непрерывен, поэтому пределы всегда есть):

$$\forall x \in E_1\ \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq D(A) \ \Big| \ \lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow \widetilde{A}x := \lim_{n\to\infty} Ax_n$$

Теперь, покажем корректность такого определения:

▷ Значение $\widetilde{A}$ не зависит от рассматриваемой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq D(A)$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Действительно, рассмотрим 2 последовательности $\lim_{n\to\infty} x_{n,1} = \lim_{n\to\infty} x_{n,2} = x$. Тогда, можно написать следующее неравенство:

$$\|Ax_{1,n} - Ax_{2,m}\| \leqslant \|A\| \cdot \|x_{1,n} - x_{2,m}\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

Более строго, нужно поочерёдно устремить в бесконечность $n, m \to \infty$ и тем самым сделать 2 предельных перехода.

▷ Почему $\widetilde{A}$ — линейный оператор? Это тривиально из линейности предела:

$$\forall x, y \in E_1,\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}\ \ \widetilde{A}(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} A(\alpha x_n + \beta y_n) = \\ \alpha \lim_{n\to\infty} Ax_n + \beta \lim_{n\to\infty} Ay_n = \alpha Ax + \beta Ay$$

▷ Почему $\widetilde{A}$ — ограниченный оператор? Воспользуемся старым добрым предельным переходом:

$$\|\widetilde{A}x_n\| = \|Ax_n\| \leqslant \|A\| \cdot \|x_n\| \Rightarrow \|\widetilde{A}x\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\| \Rightarrow \|\widetilde{A}\| \leqslant \|A\|$$

При этом из определения $\widetilde{A}$ сразу следует, что $\|\widetilde{A}\| \geqslant \|A\|$. Таким образом, мы сразу установили равенство $\|\widetilde{A}\| = \|A\|$

3. (Единственность) Предположим, есть 2 продолжающих оператора: $\widehat{A}$ и $\widetilde{A}$. Как мы и требовали, они должны быть согласованы с A. Стало быть, можно записать следующее:

$$\forall x \in E_1\ \ \widehat{A}x = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \widetilde{A}x$$

Следовательно, $\widehat{A} = \widetilde{A}$.

□

Применение теоремы Банаха-Штейнгауза

Проблема. *Вернёмся на семестр назад, в гармонический анализ. Если $f \in C_{2\pi} = CP[-\pi;\pi]$ (Continuous Periodic), то такой функции мы сопоставляли ряд Фурье:*

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

И мы также изучили условия, при которых этот ряд сходится к f. Эту тему мы можем перевести на язык функционального анализа. Пусть $S_n(f,x)$ означает, как и раньше, частичную сумму ряда Фурье. Тогда её можно записать в виде интеграла с ядром Дирихле:

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t)f(t)dt,\ D_n(t) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}$$

Эти частичные суммы можно рассмотреть как оператор $S_n \in \mathcal{L}(C_{2\pi})$, то есть S_n переводит f в какую-то ещё одну функцию, причём из $C_{2\pi}$. Изучение равномерной сходимости ряда Фурье к функции f это в точности изучение поточечной сходимости операторов S_n к тождественному оператору I.

Можно задаться вопросом: а можем ли мы обобщить S_n, если рассматривать его как оператор в пространстве $\mathcal{L}(C_{2\pi})$? Во-первых, можем, а во-вторых, как следствие, мы получим интересное доказательство того факта, что не у всех функций из $C_{2\pi}$ может быть поточечная сходимость ряда Фурье, без построения точного контрпримера!

Определение 5.6. Пусть $f \in C[a;b]$, $K \in C\big([a;b]^2\big)$. Тогда *оператором Фредгольма с ядром K* называется следующий оператор A:

$$\forall x \in [a;b]\ (Af)(x) := \int_a^b K(x,t)f(t)dt$$

Замечание. Далее мы живём в пространстве $C[a;b]$.

Утверждение 5.6. *Оператор Фредгольма с ядром K принадлежит к классу $\mathcal{L}(C[a;b])$.*

Доказательство. Линейность и непрерывность получаются в силу свойств интеграла (второе следует из интегрирования непрерывной функции). □

Утверждение 5.7. *Если A — оператор Фредгольма с ядром K, то норму оператора можно найти явно:*

$$\|A\| = \max_{x\in[a;b]} \int_a^b |K(x,t)|dt$$

Доказательство.

$\leqslant$ В эту сторону показать неравенство крайне просто:

$$\|A\| = \sup_{\|f\|=1} \|Af\| = \sup_{\|f\|=1} \max_{x\in[a;b]} \left| \int_a^b K(x,t)f(t)dt \right| \leqslant$$
$$\sup_{\|f\|=1} \max_{x\in[a;b]} \int_a^b |K(x,t)| \cdot |f(t)|dt \leqslant$$
$$\sup_{\|f\|=1} \|f\| \cdot \max_{x\in[a;b]} \int_a^b |K(x,t)|dt = \max_{x\in[a;b]} \int_a^b |K(x,t)|dt$$

$\geqslant$ Обозначим потенциальное выражение нормы за M. По сути нам нужно для любого $\varepsilon > 0$ просто найти $f \in C[a;b]$, $\|f\| = 1$ такую, что $\|Af\| \geqslant M\varepsilon$. Идея состоит в том, в цепочке неравенств выше у нас лишь одно проблемное место, где просто так равенства не получить — это переход к модулю под знаком интеграла. Если бы мы мысленно забыли, что нам нужна непрерывная f, то мы бы могли взять $f_0(t) = \operatorname{sgn} K(x_0, t)$ и нужные равенства бы соблюлись. Значит, попробуем приближать эту функцию знака, например через линейное сглаживание (считаем, что x фиксирован):

Тут должна быть картинка, когда $K(x_0, t)$ один раз пересекает ноль в $[a; b]$, но такое может быть и чаще!

Более формально, можно записать так:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(K(x,t)), |K(x,t)| \geqslant \dfrac{1}{n} \\ linear, |K(x,t)| < \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

Используя подобную последовательность f_n, мы можем оценить снизу норму оператора:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|A\| = \sup_{\|f\|=1} \|Af\| \geqslant \|Af_n\| = \max_{x\in[a;b]} \left| \int_a^b K(x,t)f_n(t)dt \right| \geqslant$$
$$\left| \int_a^b K(x_0,t)f_n(t)dt \right| = \left| \int_{|K(x_0,t)|\geqslant\frac{1}{n}} K(x_0,t)f_n(t)dt + \int_{|K(x_0,t)|<\frac{1}{n}} K(x_0,t)f_n(t)d\mu(t) \right| \geqslant$$
$$\int_{|K(x_0,t)|\geqslant\frac{1}{n}} K(x_0,t)f_n(t)dt - \left| \int_{|K(x_0,t)|<\frac{1}{n}} K(x_0,t)f_n(t)d\mu(t) \right|$$

Последний переход сделан при помощи неравенства $||a|-|b|| \leqslant |a-b|$. Второй интеграл стремится к нулю с ростом n, поэтому его вклад в модуль можно забыть. При этом же для первого интеграла мы в силу определения f_n имеем право написать следующее:

$$\int_{|K(x_0,t)|\geqslant\frac{1}{n}} K(x_0,t)f_n(t)dt = \int_{|K(x_0,t)|\geqslant\frac{1}{n}} |K(x_0,t)|dt =$$
$$M - \int_{|K(x_0,t)|<\frac{1}{n}} |K(x_0,t)|d\mu(t) \geqslant M - \frac{b-a}{n}$$

Стало быть, с ростом n оценка нормы $\|A\|$ стремится снизу к M, что мы и хотели показать.

$\square$

Следствие. Формула нормы оператора Фредгольма верна и в случае оператора $S_n \in \mathcal{L}(C_{2\pi})$. Более того, норма этих операторов стремится в бесконечность, то есть $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|S_n\| = \infty$

Доказательство. Оценим норму $\|S_n\|$ через полученную формулу:

$$\|S_n\| = \frac{1}{\pi}\max_{x\in[-\pi;\pi]}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(x-t)|dt \geqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(-t)|dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|\sin((n+1/2)t)|}{2|\sin\frac{t}{2}|}dt \geqslant$$
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|\sin((n+1/2)t)|}{t/2}dt = [s=(n+1/2)t] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{(n+1/2)\pi}\frac{|\sin s|}{s}ds \approx \ln n$$

Отсюда $\lim_{n\to\infty}\|S_n\| = \infty$, что и требовалось. $\square$

Упражнение. *Доказать, что для любой точки $x_0 \in [-\pi;\pi]$ существует функция $f \in C_{2\pi}$ такая, что частные суммы Фурье $S_n(f, x_0)$ расходятся.*

6 Сопряжённое пространство

Замечание. Далее E — линейное нормированное пространство, $\mathbb{K}$ — либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$.

Определение 6.1. *Сопряжённым пространством* E^* называется пространство $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Теорема 6.1. *(Рисса-Фреше) Пусть H — гильбертово пространство. Тогда выполнено утверждение:*

$$\forall f \in H^*\ \exists! y_0 \in H \mid \forall x \in H \quad f(x) = (x, y_0)$$

Замечание. Пафос теоремы состоит в том, что она даёт полное описание сопряжённого пространства в случае гильбертова пространства. К сожалению, такая роскошь недоступна в более общих случаях, но и там есть результат — теорема Хана-Банаха.

Доказательство. (безкоординатный метод)

▷ (Существование) Если $f = 0$, то можно взять $y_0 = 0$ и всё. Иначе $f \neq 0$, а значит $\ker f \neq H$. Ядро является подпространством, поэтому к нему применима теорема о проекции: $\ker f \oplus (\ker f)^\perp = H$. Стало быть, существует $x_0 \in (\ker f)^\perp$. Покажем, что $\ker f \oplus [x_0] = H$. Для этого нам надо представить произвольный $x \in H$ в виде $x = z + \alpha x_0$, где $z \in \ker f$ и $\alpha \in \mathbb{K}$. Покажем, что мы можем подобрать α так, чтобы $z := x - \alpha x_0$ действительно лежал в ядре:

$$x = z + \alpha x_0 \Longrightarrow fx = fz + \alpha f x_0 = \alpha f x_0 \Longrightarrow \alpha = \frac{fx}{fx_0}$$

Мы почти у цели, ведь в коэффициенте проявилось значение fx, которое нужно выразить. Применим к равенству выше слева скалярное произведение с x_0:

$$(x, x_0) = (z, x_0) + \frac{fx}{fx_0}\|x_0\|^2 = \frac{fx}{fx_0}\|x_0\|^2 \Rightarrow fx = \left(x, \underbrace{\frac{\overline{fx_0}}{\|x_0\|^2}x_0}_{y_0}\right)$$

Искомый элемент y_0 найден.

- ▷ (Единственность) Если $f(x) = (x, y_1) = (x, y_2)$, то $(x, y_1 - y_2) = 0$ для любого $x \in H$. Если $y_1 \neq y_2$ (а мы это предполагаем), то можно рассмотреть $x = y_1 - y_2$, тогда $\|y_1 - y_2\|^2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = y_2$, противоречие.

□

Доказательство. (координатный метод) Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Тогда в нём существует ортонормированный базис $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, причём верно разложение:

$$\forall x \in H \quad x = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n = \lim_{N\to\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{N}(x, e_n)e_n}_{S_N}$$

Пусть $f \in H^*$, $x \in H$, тогда $\lim_{N\to\infty} f(S_N) = f(x)$. Заметим, что $f(S_N)$ можно переписать в таком виде:

$$f(S_N) = \sum_{n=1}^{N}(x, e_n)f(e_n) = \sum_{n=1}^{N}(x, \overline{f(e_n)}e_n) = \left(x, \sum_{n=1}^{N}\overline{f(e_n)}e_n\right)$$

Кандидатом в искомый элемент y_0 будет потенциально существующий предел частичных сумм $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\overline{f(e_n)}e_n$.

- ▷ (Сходимость ряда, существование y_0) Так как $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$ в гильбертовом пространстве H сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2$. Посмотрим на соответствующую частичную сумму у рассматриваемого ряда:

$$\left\|\sum_{n=1}^{N}\overline{f(e_n)}e_n\right\|^2 = \sum_{n=1}^{N}|\overline{f(e_n)}|^2 = \sum_{n=1}^{N}f(e_n)\overline{f(e_n)} = f\left(\sum_{n=1}^{N}\overline{f(e_n)}e_n\right)$$

Если обозначить величину слева за σ_N^2, то верны оценки:

$$\sigma_N^2 = \sum_{n=1}^{N}|\overline{f(e_n)}|^2 \leqslant \|f\| \cdot \left\|\sum_{n=1}^{N}\overline{f(e_n)}e_n\right\| = \|f\|\sigma_N \Rightarrow \sigma_N \leqslant \|f\|$$

Значит, сходится ряд $\sigma_\infty^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|\overline{f(e_n)}|^2$, а стало быть, сходится и $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{f(e_n)}e_n$.

- ▷ (Единственность y_0) Доказательство повторяет то, что было написано в безкоординатном методе.

□

Упражнение. *Пусть $L \subset H$ — подпостранство гильбертова пространства, f — линейный ограниченный функционал на L. Докажите, что существует и единственен функционал $\widetilde{f} \in H^*$ такой, что он согласован с f:*

1. $\widetilde{f}|_L = f$

2. $\|\widetilde{f}\| = \|f\|$

Задача. *Если f — линейный функционал и $\ker f$ замкнуто, то f непрерывен.*

Замечание. Далее E закрепляется за обозначением линейного нормированного пространства над полем $\mathbb{K}$.

Теорема 6.2. *(Хана-Банаха) Пусть $M \subseteq E$ — линейное многообразие, $f \in M^*$. Тогда существует (не обязательно единственный!) функционал $\widehat{f} \in E^*$ такой, что он является продолжением f на всё пространство E:*

1. $\widehat{f}|_M = f$

2. $\|\widehat{f}\| = \|f\|$

Доказательство. Будем считать, что E — вещественное и сепарабельное пространство. Также исключим из рассмотрения случай, когда $\operatorname{cl} M = E$ как тривиальный (тогда просто используем теорему о продолжении линейного ограниченного оператора)

1. (Присоединение ещё одного измерения) Коль скоро $\operatorname{cl} M \subset E$, мы можем найти вектор $x_0 \notin \operatorname{cl} M$. Покажем, как строить последовательность расширений M_k и соответственно функционалов f_k на них, где $M_0 = M$ и $M_k \supset M_{k-1}$. На примере получения M_1 сделаем это так:

$$M_1 = M_0 \oplus [x_0]$$

Если существует функционал f_1, который является продолжением f на M_1, то он должен лежать в M_1^* и, следовательно, быть линейным. За счёт этого его значения можно получить по линейности, именно так мы и зададим их по определению:

$$\forall y \in M_1 \ \exists! z \in M_0, \alpha \in \mathbb{R} \ \Big| \ y = z + \alpha x_0 \to f_1(y) = f_1(z) + \alpha f_1(x_0)$$

Теперь идея состоит в том, чтобы определить $a = f_1(x_0)$ таким образом, чтобы f_1 сохранил норму f: $\|f_1\| = \|f\|$. Заметим сначала, что всегда $\|f_1\| \geqslant \|f\|$. Неравенство в другую сторону будет справедливо, если:

$$\forall y \in M_1 \quad \|f_1(y)\| \leqslant \|f\| \cdot \|y\|$$

Будем искать a, используя неравенство как ориентир, верное предположение:

$$\|f_1(z + \alpha x_0)\| \leqslant \|f\| \cdot \|z + \alpha x_0\| \Leftrightarrow \left\|f_1\left(\frac{z}{\alpha} + x_0\right)\right\| \leqslant \|f\| \cdot \left\|\frac{z}{\alpha} + x_0\right\|$$

Для удобства обозначим $w = z/\alpha$. В самом начале мы потребовали жить в вещественном пространстве, поэтому можем переписать неравенство так:

$$-\|f\| \cdot \|w + x_0\| \leqslant f_1(w) + f_1(x_0) \leqslant \|f\| \cdot \|w + x_0\|$$

Итак, требуемое неравенство выполняется, если:

$$\forall w \in M_0 \quad -f(w) - \|f\| \cdot \|w + x_0\| \leqslant a \leqslant -f(w) + \|f\| \cdot \|w + x_0\|$$

Можно заметить, что это неравенство справедливо, если:

$$\forall w_1, w_2 \in M_0 \quad -f(w_1) - \|f\| \cdot \|w_1 + x_0\| \leqslant a \leqslant -f(w_2) + \|f\| \cdot \|w_2 + x_0\|$$

Более того, если мы просто покажем, что выполнено неравенство между левой и правой частями, то уж хоть одно a мы найдём, поэтому займёмся именно этим вопросом. Перепишем последнее неравенство в таком виде:

$$\forall w_1, w_2 \in M_0 \quad f(w_2) - f(w_1) \leqslant \|f\|(\|w_2 + x_0\| + \|w_1 + x_0\|)$$

А это, неожиданно, является верным утверждением в силу линейности и ограниченности f:

$$\forall w_1, w_2 \in M_0 \quad |f(w_2) - f(w_1)| = |f(w_2 - w_1)| \leqslant \|f\| \cdot \|w_2 - w_1\| = \\ \|f\| \cdot \|w_2 - w_1 - x_0 + x_0\| \leqslant \|f\|(\|w_2 + x_0\| + \|w_1 + x_0\|)$$

2. (Расширение до E) Мы потребовали, что E сепарабельно. Стало быть, существует счётное всюду плотное множество $X = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$. Теперь мы будем итеративно брать не просто произвольные точки из $E \setminus \operatorname{cl} M_k$, а будем добирать из X. Отсюда возникает последовательность расширений и, следовательно, можно рассмотреть объединение этих расширений:

$$M_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} M_n \Rightarrow \operatorname{cl} M_\infty \supseteq \operatorname{cl} X = E$$

Определим f_∞ поточечно:

$$\forall x \in E \ \Big(x \in M_n \to f_\infty(x) = f_n(x)\Big)$$

Сразу из определения нельзя сказать, что f_∞ является искомым расширением. У нас возникают 2 случая:

- ▷ $M_\infty = E$. Тогда f_∞ действительно искомый функционал в силу определения.
- ▷ $M_\infty \neq E$. В силу того, что $\operatorname{cl} M_\infty = E$, мы можем получить искомый функционал $\widehat{f}$ по теореме 5.3 о продолжении линейного ограниченного оператора. Тогда $\|f\| = \|f_\infty\| = \|\widehat{f}\|$, причём $\widehat{f}$ совпадает с f_∞ на M_∞, а следовательно и с f на M, что мы и хотели.

□

Замечание. Возможны обобщения теоремы Хана-Банаха (если смотреть с точки зрения того, какое доказательство мы привели. Иначе из-за формулировки теоремы первые 2 пункта не актуальны):

1. Отказ от сепарабельности E
2. Рассмотрение комплексного случая
3. Отказ от рассмотрения равенства норм. Вместо этого рассмотрим однородно-выпуклый функционал $p\colon E \to \mathbb{K}$ (то есть он является выпуклой вниз функцией, а также имеется однородность по аргументу). Если f — просто линейный функционал на M, причём везде на M верно неравенство $f(x) \leqslant p(x)$, то можно продолжить f на всё пространство E так, что есть согласованность по значениям, а также $\widehat{f}(x) \leqslant p(x)$ на всём E.

Доказательства первого и последнего варианта можно найти в книге А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин «Элементы теории функций и функционального анализа». Второй факт — в книге Л.В. Канторович, Г.П. Акилов «Функциональный анализ и прикладная математика»

Следствие. Пусть $M \subset E$ — линейное многообразие, причём $\operatorname{cl} M \neq E$ и дополнительно $x_0 \notin \operatorname{cl} M$. Тогда существует функционал $f \in E^*$, обладающий следующими свойствами:

1. $\ker f \supseteq M$
2. $f(x_0) = 1$
3. $\|f\| = \frac{1}{\rho(x_0, M)}$

Доказательство. Построим функционал f_1 на пространстве $M_1 = M \oplus [x_0]$. В предположении линейности, должно быть верно следующее:

$$\forall x \in M, \alpha \in \mathbb{K} \quad f_1(x + \alpha x_0) = f_1(x) + \alpha f_1(x_0)$$

Тогда, чтобы получить вложение $\ker f \supseteq M$, потребуем $f_1(x) = 0$, а $f(x_0) = 1$ как того и требует условие, этим мы однозначно определили оператор f_1. Покажем, что $\|f_1\| = \frac{1}{\rho}$, где $\rho := \rho(x_0, M)$:

- $\leqslant$ Для любого $y = x + \alpha x_0$, $\alpha \neq 0$ можно написать неравенство:

$$|f_1(y)| = |\alpha| = |\alpha| \cdot \frac{\|x + \alpha x_0\|}{\|x + \alpha x_0\|} = |\alpha| \cdot \frac{\|y\|}{|\alpha| \cdot \|\frac{x}{\alpha} + x_0\|} \leqslant \frac{\|y\|}{\rho}$$

  Последний переход работает, потому что $\frac{x}{\alpha} \in M$, а значит расстояние $\|x_0 - (-\frac{x}{\alpha})\| \geqslant \rho$. Случай $\alpha = 0$ тривиален и не влияет на значение нормы.

- $\geqslant$ По определению, $\rho = \inf_{x \in M} \rho(x_0, x)$. Стало быть, можно найти последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, что есть предел $\lim_{n \to \infty} \|x_0 + x_n\| = \rho$. Запишем норму функционала через супремум:

$$\|f_1\| = \sup_{z \in M_1} \frac{|f_1(z)|}{\|z\|} = \sup_{z \in M_1} \frac{|\alpha|}{\|z\|} \geqslant \frac{|1|}{\|x_0 + x_n\|} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{\rho}$$

Осталось применить теорему Хана-Банаха на многообразии M, это даст искомый оператор. □

Следствие. Пусть $x \in E \backslash \{0\}$. Тогда существует функционал $f \in E^*$, обладающий следующими свойствами:

1. $\|f\| = 1$
2. $f(x) = \|x\|$

Замечание автора. Интерес этого следствия состоит в том, что мы не только добились конкретного значения нормы, но и смогли определить точку, в которой достигается равенство с заданной нормой функционала.

Доказательство. Рассмотрим $M = \{0\}$ и $x_0 = \frac{x}{\|x\|} \neq 0$ и применим предыдущее следствие. Тогда:

$$\exists f \in E^* \colon \begin{cases} \ker f \supseteq \{0\} \\ f(x_0) = 1 \\ \|f\| = \dfrac{1}{\rho(x_0, M)} = \dfrac{1}{\|x_0\|} = 1 \end{cases}$$

Первый факт тривиален. В силу линейности, мы можем вытащить из второго условия значение $f(x)$:

$$f(x_0) = 1 = f(x/\|x\|) = f(x)/\|x\| \Rightarrow f(x) = \|x\|$$

□

Следствие. Если точки $x, y \in E$ таковы, что $\forall f \in E^*\ f(x) = f(y)$, то $x = y$.

Доказательство. Положим $z = x - y$. Теперь покажем, что если $f(z) = 0$ при любом $f \in E^*$, то это должен быть нулевой элемент. Предположим противное, тогда по последнему следствию найдётся функционал $f \in E^*$ такой, что $f(z) = \|z\| \neq 0$, противоречие найдено. □

Следствие. Для нормы любого элемента $x \in E$ верна формула:

$$\forall x \in E\ \|x\| = \sup_{\|f\|_{E^*}=1} |f(x)|$$

Доказательство. С одной стороны, для любого функционала f с условием $\|f\|_{E^*} = 1$ верно неравенство $|f(x)| \leqslant \|f\| \cdot \|x\| = \|x\|$. С другой стороны, неравенство достигается в силу второго следствия. □

Пример. Приведём пару примеров использования следствий теоремы Хана-Банаха (далее номер примера соответствует следствию, которое оно использует):

2. Можно задаться серьёзным вопросом: «А верно ли, что если $E \neq \{0\}$, то и $E^* \neq \{0\}$?» То есть всегда ли есть нетривиальный функционал для нетривиального пространства E? Оказывается да, ровно это нам доказывается второе следствие.

2. При помощи этого следствия можно, например, провести *опорную гиперплоскость*. Рассмотрим вещественное пространство E, сферу $S := S(0, 1)$ и точку $x_0 \in S$. Гиперплоскость должна задаваться уравнением $f(x) = \alpha$, где $f \in E^*$ как минимум. И нам нужна такая гиперплоскость, что $f(x_0) = \alpha$, а сфера лежит по одну сторону от этой гиперплоскости, то есть (не умаляя общности, можем выбрать знак неравенства):

   $$\forall x \in S \quad f(x) \leqslant \alpha = f(x_0)$$

   Итак, соответствующее следствие говорит, что есть функционал $f \in E^*$ такой, что $f(x_0) = \|x_0\| = 1$, причём $\|f\| = 1$. Распишем тогда оценку на норму $\|f(x)\|$:

   $$\forall x \in S \quad |f(x)| = \|f(x)\| \leqslant \|f\| \cdot \|x\| = 1 = f(x_0)$$

   Требуемая плоскость найдена.

3. В будущем мы будем изучать понятие *слабой сходимости*, которое в одном виде уже встречалось в теории вероятностей. В случае функционального анализа, $x_n \xrightarrow{w} x$, если выполнено условие:
$$\forall f \in E^* \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$
Возникает вопрос: а почему будет предел единственен? Именно это гарантирует нам соответствующее следствие.