

### Задача 1: Парадокс Шокли-Джеймса

В 1905 году Альберт Эйнштейн предложил специальную теорию относительности, которая разрешила противоречия между классической механикой Ньютона и теорией электромагнетизма Максвелла. Детальная разработка теории привела к разрешению многих очевидных парадоксов. В то время, обсуждение сосредоточилось главным образом на проблеме распространения электромагнитных волн.

В этой задаче мы разрешим парадокс другого типа. Для довольно простой системы зарядов, рассмотренной В. Шокли и Р.П. Джеймсом в 1967 году, выполнение закона сохранения импульса требует тщательного релятивистского анализа. Если заряженная частица расположена около магнита с изменяющейся намагниченностью (то есть изменяющимся магнитным полем), то на заряд действует электрическая сила, но нет никакой очевидной противодействующей силы, приложенной к магниту. Процесс изменения намагниченности может быть сделан достаточно медленным, так что электромагнитным излучением (и уносимым им импульсом) можно пренебречь. Таким образом, мы получаем нечто вроде орудия без отдачи.

В нашем анализе достаточно простой системы мы продемонстрируем, что в релятивистской механике сложное тело может получить ненулевой момент импульса, оставаясь в то же время в состоянии покоя.

#### Часть I: Вычисление импульса точечной заряженной частицы (3.3 балла)

Рассмотрим круговой виток радиуса  $r$ , по которому течет ток  $I_1$ , и второй, гораздо больший круговой виток радиуса  $R \gg r$ , концентрический с первым (то есть центры окружностей совпадают) и лежащий в той же самой плоскости.

- a. (1 б.) Ток  $I_2$ , протекающий через виток 2 (больший виток), создает магнитный поток  $\Phi_{B1}$  через виток 1. Найдите отношение  $M_{21} = \Phi_{B1}/I_2$ . Его называют коэффициентом взаимной индукции.
- b. (0.8 б.) Учитывая, что коэффициенты взаимной индукции равны  $M_{12} = \Phi_{B2}/I_1 = M_{21}$ , то есть виток 1 тоже создает пропорциональный магнитный поток через виток 2, получите выражение для ЭДС  $\varepsilon_2$ , индуцированной в большей петле в результате изменения  $\dot{I}_1 = dI_1/dt$  электрического тока в меньшей петле. Самоиндукцией большего витка 2 пренебречь. *Указание: индуцированная ЭДС скорости изменения магнитного потока через виток.*
- c. (0.5 б.) ЭДС индукции, найденная вами в пункте (b), появляется благодаря касательной к витку составляющей вихревого электрического поля. Получите выражение для этой касательной составляющей электрического поля  $E$  в витке радиуса  $R$  как функцию скорости изменения тока  $\dot{I}_1$ .

Теперь удалим большой виток и вместо него рассмотрим массивный точечный заряд  $Q$ , расположенный на том же расстоянии  $R$  от витка 1, как показано в рисунке 1. Считайте, что точечный заряд не успевает значительно сместиться за время изменения тока в витке.

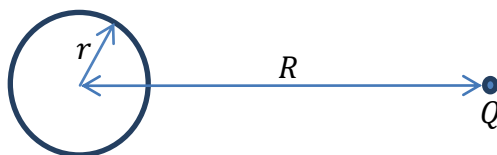


Рисунок 1: Круговой виток и точечный заряд  $Q$ .

- d. (1 б.) Найдите полный импульс  $\Delta p$ , полученный точечным зарядом за время, в течение которого ток в малом витке изменяется от начального значения  $I_1 = I$  до конечного значения  $I_1 = 0$ .

**Вторая часть: Вычисление импульса отдачи кругового витка с током (4.4 балла)**

Исследуем происхождение импульса отдачи, используя петлю другой, не круглой формы.

- e. (1.1 б.) Для начала рассмотрим прямолинейный проводник длиной  $l$  и поперечным сечением  $A$  по которому протекает электрический ток силой  $I$ . Ток обусловлен потоком заряженных частиц с массой покоя  $m$  и зарядом  $q$ , распределенных однородно в проводнике с концентрацией  $n$ . Считайте, что заряженные частицы движутся в проводнике с одной и той же скоростью. Найдите полный релятивистский импульс  $p$  заряженных частиц в проводнике.
- f. (3.3 б.) Теперь рассмотрим квадратный виток со стороной  $l$ . На расстоянии  $R \gg l$  от витка поместим точечный заряд  $Q$ ; см. рисунок 2. Пусть в витке течет ток  $I$ . Считайте, что каждый проводник в витке в целом нейтрален. Считайте, что носители заряда в проводнике могут двигаться свободно вдоль витка не взаимодействуя с кристаллической решеткой, а сталкиваясь упруго со стенками проводника и делая таким образом повороты в углах витка. Взаимодействием между носителями заряда полностью пренебречь. Предположим также, что все носители заряда в каждой стороне витка всегда двигаются с одной и той же скоростью. Петля достаточно тяжела, так что ее движением можно пренебречь. Вычислите полный импульс  $p_{hid}$  носителей в витке. Его называют «скрытым» импульсом.

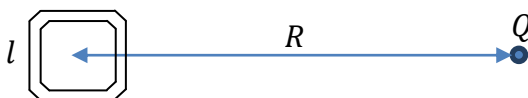


Рисунок 2: Квадратный виток с током и точечный заряд  $Q$ .

Когда ток прекращается, то этот «скрытый» импульс передается витку, и он получает импульс, равный со знаком минус импульсу, приобретенному точечным зарядом  $Q$ . Это и есть недостающая отдача, которую мы искали (заметьте, что в начальном состоянии импульс также сосредоточен в электромагнитном поле; что важно для выполнения закона сохранения импульса всей системы).

### Часть III: Подведение итогов (2.3 балла)

- g. (0.8 б.) Виток с током часто характеризуются магнитным моментом  $\mu = IS$ , где  $I$  есть ток и  $S$  есть площадь поперечного сечения витка. Выразите ответ, полученный в пункте (d) через  $\mu, r, R$  и  $Q$ . Аналогично, выразите полученный в пункте (f) ответ через  $\mu, l, R$  и  $Q$ . Помните, что электрические и магнитные постоянные связаны соотношением:

$$\frac{4\pi k}{\mu_0} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2$$

где  $c$  скорость света.

- h. (1.5 б.) В более реалистической модели, виток – это проводник, так что электрическое поле заряженной частицы  $Q$  не может в него проникнуть. Предположим, что электрический ток по прежнему обусловлен носителями заряда. Определите, какое из следующих утверждений правдиво или ложно, и обведите кружком правильный ответ в Листе Ответа. **Внимание: Вы можете оставить какое-то утверждение без ответа, но если Вы дадите хотя бы один неправильный ответ, то Вы не получите никаких баллов за весь пункт (h).**

A. (0.5 б.) Полный импульс витка с током и носителями зарядов равен нулю.

B. (0.5 б.) Поскольку ток в витке изменяется от  $I$  до нуля, значит носители заряда в проводнике замедляются, что приводит к появлению индуцированного тока в самом витке. Из-за этих индуцированных токов заряженная частица  $Q$  не получает никакого импульса.

C. (0.5 б.) При изменении силы тока в витке от  $I$  до нуля, внешний точечный заряд вызывает перераспределение носителей заряда по сечению проводника, что приводит к появлению дополнительной электрической силы. Таким образом, виток получает импульс, найденный в пункте (f).

## Задача 2: Скрипящая Дверь

Скрип очень распространен в повседневной жизни, и наблюдается при закрывании дверей, при письме мелом на доске, при игре на скрипке, при ходьбе в новой обуви и других явлениях. Здесь в Израиле, причины обуславливающие скрип, вызывают сильные землетрясения, повторяющиеся один раз в несколько десятилетий. Они происходят не далеко от Мертвого моря, чуть выше самого глубокого из известных разломов в земной коре.

Физический механизм скрипа кроется в различии между коэффициентом трения покоя и коэффициентом трения скольжения. В данной задаче мы изучим этот механизм применительно к открывающейся двери.

### Первая часть: Простейшая модель (7.5 баллов)

Рассмотрите следующую систему (см. рисунок 1):

К телу массой  $m$  присоединена длинная идеальная пружина с коэффициентом жесткости  $k$ , другой конец которой тянут с постоянной скоростью  $u$ . Коэффициент трения покоя и коэффициент трения скольжения о поверхность равны  $\mu_s$  и  $\mu_k$ , причем  $\mu_k < \mu_s$ .

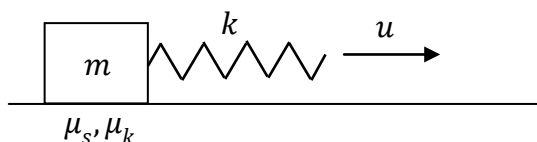


Рисунок 1: Простейшая модель для изучения скрипа

Эта простейшая модель допускает два различных режима движения:

1. Движение всегда сопровождается проскальзыванием. Назовем этот режим **чистым скольжением**.
  2. Движение, при котором происходит поочередная смена проскальзывания и покоя относительно поверхности. Это явление назовем **прерывистым скольжением**. Такое прерывистое скольжение является источником скрипящего звука, с которым мы часто сталкиваемся в повседневной жизни.
- а. (1 балл.) Рассмотрите случай, когда в начальный момент времени  $t = 0$ , тело тянут по полу со скоростью  $v_0$ , и сила упругости пружины уравнивается силой трения скольжения. Принять, что  $0 < v_0 < u$ . При этом **удлинение пружины** будет периодически изменяться как функция времени  $t$ .
- а1. (0.6 баллов) Найдите период  $T_0$  и амплитуду  $A$  этих колебаний.
  - а2. (0.4 балла) Изобразите качественно график зависимости удлинения пружины от времени  $x(t)$  в интервале  $0 < t < 3T_0$ .

- b. (1.2 балла.) Рассмотрите другой случай, когда в начальный момент времени  $t = 0$  тело находится в покое, а начальное удлинение пружины  $x$ , точно такое же, как в пункте (а). Изобразите качественный график зависимости скорости тела от времени  $v(t)$  **относительно поверхности** в интервале  $0 < t < 3T$ , где  $T$  - новый период колебаний  $x(t)$ . Движение направо соответствует положительному знаку скорости  $v$ . Укажите на Вашем графике приблизительное положение горизонтальной линии  $v = u$ .
- c. (0.5 балла.) Для начальных условий пункта (b), найдите среднее по времени значение удлинения пружины  $\bar{x}$  за один период колебаний.
- d. (2.4 балла.) Для условий пункта (b), найдите период  $T$  колебаний  $x(t)$ .

Режим движения с **прерывистым скольжением** прекращается при достаточно больших значениях скорости  $u$ . Давайте рассмотрим один из возможных механизмов для объяснения этого явления.

- e. (2.4 балла.) Будем считать, что за каждый период колебаний  $T$  небольшое количество полной энергии колебаний рассеивается и переходит в тепло. Пусть  $\eta = |\Delta A/A|$  есть относительная потеря амплитуды за один период при движении в режиме прерывистого скольжения. Полагая  $\eta \ll 1$ , найдите критическую скорость  $u_c$ , по достижении которой движение с **прерывистым скольжением** становится невозможным.

Затухание, рассмотренное в части (e), не надо учитывать во второй части этой задачи.

### Вторая часть: Дверь со скрипом (2.5 балла)

Дверная петля представляет собой полый, открытый металлический цилиндр радиуса  $r$ , высотой  $h$  и толщиной стенок  $\Delta r$ . Нижнее основание цилиндра находится на металлической опоре, прикрепленной к стене (область контакта – это кольцо радиуса  $r$  и толщиной  $\Delta r \ll r$ ) см. рисунок 2. Коэффициенты трения скольжения и трения покоя между цилиндром и его опорой равны соответственно  $\mu_k$  и  $\mu_s$ , причем  $\mu_k < \mu_s$ . Верхнее основание цилиндра жестко прикреплено к двери, которая считается абсолютно твердым телом. Обычно дверь висит на двух или трех петлях, но ее вес падает только на одну петлю – ту, которая и будет скрипеть. Цилиндр этой петли давит на свою металлическую опору с силой, равной весу всей двери, масса которой  $M$ .

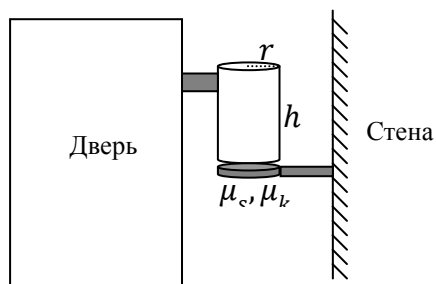


Рисунок 2: Схематический рисунок

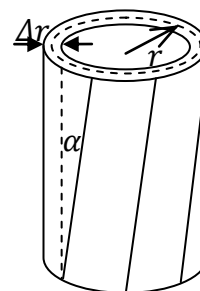


Рисунок 3: Деформированный

Цилиндр самой петли не является абсолютно твердым телом, он подвергается деформации сдвига без изменения своей формы, так что вертикальные линейные сегменты становятся наклонными с некоторым маленьким углом  $\alpha$  (см. рисунок 3). Сила упругости, действующая на элемент малой площади  $dS$  и обусловленная деформацией сдвига, определяется как:

$$dF = G\alpha dS,$$

где  $G$  - модуль сдвига (константа, характеризующая упругие свойства материала). Для расчетов используйте следующие значения  $r = 5\text{мм}$ ,  $h = 3\text{см}$ ,  $\Delta r = 1\text{мм}$ ,  $\mu_s = 0.75$ .  $\mu_k = 0.55$ ,  $G = 8 \cdot 10^{10}\text{Па}$ ,  $M = 30\text{кг}$ ,  $g = 9.8\text{ м/с}^2$ . Используйте приближение  $\Delta r \ll r$ .

- f. (1 балл.) Дверь начинают очень медленно поворачивать из состояния покоя. Для маленьких углов поворота двери, получите выражение для коэффициента кручения  $\kappa = \tau/\theta$ , где  $\tau$  – вращающий момент, необходимый для поворота двери на угол  $\theta$ .
- g. (1.5 балла.) При вращении двери с малой угловой скоростью происходит переход к режиму прерывистого трения, сопровождающийся испусканием звукового импульса – скрипа. Найдите угловую скорость  $\Omega$  двери, при которой частота звука достигает слышимого диапазона с  $f = 20\text{Гц}$ . Считайте, что частота звуковых колебаний  $f_0$ , возбуждаемых в стержне при самом скольжении велика, так что  $f_0 \gg f$ . Получите аналитический и численный результаты.



### Задача 3: Воздушный шарик

На рисунке изображен длинный резиновый воздушный шарик, который популярен на вечеринках по случаю дней рождения. Частично надутый воздушный шар обычно разделяется на две цилиндрические области с сильно отличающимися радиусами. Используя простую модель, попробуем разобраться в причинах такого разделения.



Рисунок 1: частично надутый воздушный шарик

Воздушный шарик имеет форму однородного цилиндра (за исключением концов). Все процессы будем считать изотермическими и происходящими при комнатной температуре. Давление  $P$  в воздушном шарике превышает атмосферное давление  $P_0$  на очень малую величину, так что воздух можно рассматривать как несжимаемую жидкость. Силой тяжести и весом воздушного шарика можно пренебречь. Процесс изменения объема воздушного шарика считайте медленным и квазистатическим. В частях (a) – (d) предполагается, что воздушный шарик надут всюду однородно по его длине. Обозначим как  $r_0$  и  $L_0$  начальные радиус и длину воздушного шарика до его надувания.

- a. (1.8 балла) Воздушный шарик удерживается за один из его концов, по которому поступает воздух, в то время как остальная часть шарика висит свободно. Вычислите отношение  $\sigma_L/\sigma_t$  между продольным «поверхностным» натяжением  $\sigma_L$  (в направлении, параллельном оси воздушного шарика) и поперечным «поверхностным» натяжением  $\sigma_t$  (в направлении, касательном к поперечному сечению воздушного шарика).

«Поверхностное» натяжение воздушного шарика – это сила, с которой соседние части воздушного шарика действуют друг на друга, отнесенная к единице длины границы между ними.

При малых растяжениях шарика справедлив линейный закон Гука. Будем считать, что длина воздушного шара остается постоянной и равной  $L_0$ , в то время как «поверхностное» натяжение  $\sigma_t$  линейно зависит от изменения отношения  $r/r_0$ :

$$\sigma_t = k \left( \frac{r}{r_0} - 1 \right) \quad (1)$$

- b. (1 балл) Используя формулу (1), получите выражение для зависимости давления  $P$  в воздушном шарике от его объема  $V$ . Изобразите (качественно) зависимость  $P - P_0$  как функцию объема  $V$ . Исходя из закона Гука, найдите максимальное давление внутри воздушного шарика  $P_{max}$ .

В действительности отношение  $r/r_0$  достаточно велико (см. рисунок 1), так что нужно учитывать нелинейное поведение резины и связанное с ним изменением длины воздушного шарика. Учет этих нелинейных свойств материала резины позволяет существенно уточнить формулу для давления внутри шарика, которое оказывается выше, чем результат, полученный в пункте (b). В реальном воздушном шарике график зависимости  $\sigma_t(r)$  от радиуса шарика состоит из трех частей:

1. Для малых изменений  $r$ ,  $\sigma_t(r)$  растет по закону Гука.
2. При  $r - r_0 \sim r_0$ , длина воздушного шара  $L$  начинает увеличиваться, и  $\sigma_t(r)$  приближается к насыщению, то есть растет очень медленно.

3. При больших значениях  $r$  резина начинает сильно сопротивляться дальнейшему растяжению, что приводит к резкому росту  $\sigma_t(r)$ .

Описанная выше зависимость показана на рисунке 2.

- с. (1.3 балла.) Изобразите качественно график зависимости разности давлений  $P - P_0$  как функцию объема  $V$  однородно надутого воздушного шара, материал резины которого ведет себя согласно рисунку 2. Укажите точки экстремумов на графике, на том же графике укажите точки, соответствующие значениям  $r = 1$  см и  $r = 2.5$  см. Вычислите разность давлений  $P - P_0$  для этих двух значений радиуса с 10%-ой точностью.

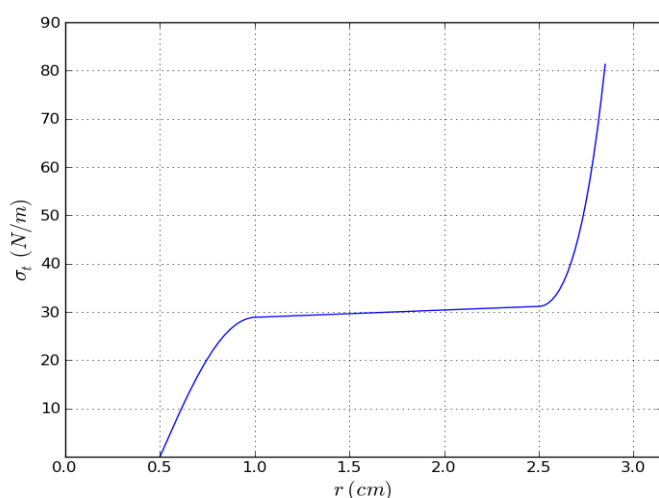


Рисунок 2: Натяжение  $\sigma_t(r)$  реального шарика

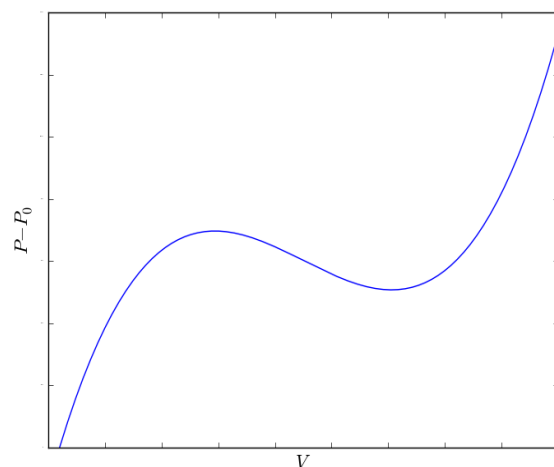


Рисунок 3: Зависимость (2).

Нелинейное поведение материала резины, исследованное в пункте (с), приводит к тому, что зависимость разности давлений  $P - P_0$  внутри воздушного шарика от его объема  $V$  аппроксимируется следующей кубической зависимостью:

$$P - P_0 = a((V - u)^3 - b(V - u) + c) \quad (2)$$

где  $a, b, c$  и  $u$  – положительные константы. Пусть объем  $u$  больше, чем объем не надутного воздушного шара  $V_0$ , а  $c$  принимает такие значения, при которых функция (2) положительна для всех  $V > V_0$ . См. рисунок (3).

Воздушный шарик соединен с большим воздушным резервуаром, в котором может поддерживаться контролируемое насосом давление  $P$ . Может случиться так, что некоторым значениям давления  $P$  соответствуют несколько равновесных значений  $V$ . Если воздушный шарик, находящийся в равновесии, испытывает случайные возмущения (такие как локальное растяжение внешними силами), то он может перейти в другое равновесное состояние с отличным объемом. Такой переход возможен, только если он будет энергически выгодным для всей системы, состоящей из воздушного шарика, атмосферы и насоса, поддерживающего давление  $P$ . Пусть давление медленно увеличивается от значения  $P_0$ , и на каждом шаге существуют достаточные возмущения. Тогда резкое увеличение объема шарика может произойти только по достижении критического давления  $P_c$ , при котором полная энергия, необходимая для перехода между



двумя равновесными состояниями равна нулю. Выше этого критического давления, переход от меньшего объема к большему, сопровождается выделением энергии и наоборот. Такие резкие переходы часто встречаются в природе, и иногда называются фазовыми переходами.

- d. (2.3 балла) Используя зависимость (2), получите выражения для  $P_c$ , объема  $V_1$  воздушного шарика перед скачком и объема  $V_2$  после скачка. Выразите ответы через  $a, b, c$  и  $u$ .

В реальности мальчик на дне рождения неспособен подавать достаточно воздуха для мгновенного изменения объема воздушного шарика, описанного выше. Вместо этого воздух накачивается в воздушный шарик постепенно, эффективно контролируя увеличение объема воздушного шара, а не давление в нем. В этом случае становится возможным новый тип поведения шарика. Если сложится ситуация благоприятная для минимизации полной энергии системы, то воздушный шарик разделится на две цилиндрические области с различными радиусами, длины которых будут постепенно изменяться. Энергией границы раздела можно пренебречь. Мы также пренебрежем длиной пограничного слоя (эти предположения действительны для очень длинного воздушного шара).

- e. (1 балл) Изобразите качественный график зависимости разности давлений  $P - P_0$  от объема  $V$ , учитывая разделение объема шарика на две части. Укажите на осях давление  $P_c - P_0$  и объемы  $V_1$  и  $V_2$ .
- f. (1.4 балла) Пусть шарик находится в условиях, при которых возможно его разделение на две цилиндрические области различных радиусов. Найдите длину  $L_{thin}$  более тонкой области как функция полного объема воздушного шара  $V$ . Выразите свой ответ через  $V_1, V_2$  и радиус  $r_1$  более тонкой области.
- g. (1.2 балла) Пусть шарик опять находится в условиях, при которых возможно его разделение на две цилиндрические области различных радиусов. Найдите удельную работу  $\Delta W / \Delta L_{thin}$ , которую необходимо совершить, чтобы преобразовать единицу длины тонкой области в толстую область. Выразите свой ответ через  $P_c, V_1, V_2$  и радиус  $r_1$  более тонкой области.