В дальнейшем важно рассматривать комплекснозначные функции.

Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$ измеримо. Будем говорить, что $f\colon E \to \mathbb{C}$ измерима (интегрируема), если $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ измеримы (интегрируемы) на E. В случае интегрируемости определим

$$\int_E f d\mu = \int_E \operatorname{Re} f d\mu + i \int_E \operatorname{Im} f d\mu.$$

Нетрудно проверить, что полученный интеграл обладает свойством линейности.

Замечание. Справедливо неравенство $\left|\int_E f d\mu\right| \leqslant \int_E |f| d\mu$.

В самом деле, число $\int_E f d\mu$ запишем в показательной форме $\int_E f d\mu = \left|\int_E f d\mu\right| e^{i\theta}$. Тогда

$$\left|\int_E f d\mu\right| = e^{-i\theta} \int_E f d\mu = \int_E e^{-i\theta} f d\mu = \int_E \operatorname{Re}[e^{-i\theta} f] d\mu \leqslant \int_E |e^{-i\theta} f| d\mu \leqslant \int_E |f| d\mu.$$

Третье равенство получено по определению, т.к. интеграл от функции $e^{-i\theta} f$ действителен.

При интегрировании в периодическом случае полезно иметь в виду

Замечание. Если функция f на $\mathbb{R}$ является ω-периодической, то интегралы по любым отрезкам длины ω от нее одновременно существуют и в случае существования равны.

В самом деле, пусть f интегрируема на отрезке $[a, a+\omega]$. Для произвольного $b \in \mathbb{R}$ найдем такое k, что $a + k\omega \in [b, b+\omega)$. Тогда

$$\int_a^{a+\omega} f d\mu = \int_{a+(k-1)\omega}^{a+k\omega} f d\mu = \left(\int_{a+(k-1)\omega}^{b} + \int_b^{a+k\omega}\right) f d\mu = \left(\int_b^{a+k\omega} + \int_{a+k\omega}^{b+\omega}\right) f d\mu = \int_b^{b+\omega} f d\mu.$$

Пространства Лебега

Пусть $1 \leqslant p < \infty$. Положим

$$L_p(E) = \Big\{ f\colon E \to \mathbb{C} :\ f \text{ измерима и } \int_E |f|^p d\mu < +\infty \Big\}.$$

Если $f, g \in L_p(E)$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, то очевидно, что $\lambda f \in L_p(E)$. Кроме того, выполнено $|f+g|^p \leqslant (2\max(|f|, |g|))^p \leqslant 2^p(|f|^p + |g|^p)$, а значит, также $f + g \in L_p(E)$. Следовательно, $L_p(E)$ является линейным пространством. Положим

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}.$$

Лемма 1. *Пусть a, $b > 0$, $1 < p, q < \infty$, и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, причем равенство имеет место только в случае $a^p = b^q$.*

▲ В силу строгой выпуклости экспоненты $e^{tx+(1-t)y} \leqslant te^x + (1-t)e^y$, $t \in (0,1)$, причем равенство возможно только при $x = y$. Осталось положить $t = \frac{1}{p}$ и $x = p\ln a$, $y = q \ln b$. ■

Теорема 1 (неравенство Гельдера). *Пусть $1 < p, q < \infty$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Если $f \in L_p(E)$, $g \in L_q(E)$, то $fg \in L_1(E)$ и*

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

▲ Если $\|f\|_p = 0$, то $f = 0$ п.в., а значит, $fg = 0$ п.в. Следовательно, $\|fg\|_1 = 0$ и утверждение верно. Аналогично для $\|g\|_q = 0$.

Далее считаем $\|f\|_p \|g\|_q > 0$. По лемме 1 для любого $x \in E$ выполнено

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leqslant \frac{1}{p}\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}\right)^q.$$

Проинтегрировав неравенство, получим

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int_E |f||g| d\mu \leqslant \frac{1}{p} \frac{\int_E |f|^p d\mu}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{\int_E |g|^q d\mu}{\|g\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

что равносильно заявленному неравенству. ■

Замечание. Равенство в теореме 1 имеет место лишь в случае неотрицательных α, β, не равных нулю одновременно, что $\alpha|f|^p = \beta|g|^q$ п.в. на E. Для $\|f\|_p\|g\|_q = 0$ это верно. В противном случае $\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} = \frac{1}{p}\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}\right)^q$ для п.в. $x \in E$, а значит, (для таких x) $\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} = \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$ по лемме 1.

Теорема 1′ (неравенство Минковского). *Если $f, g \in L_p(E)$, то $f + g \in L_p(E)$ и*

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

▲ Применим неравенство Гельдера для p и $q = \frac{p}{p-1}$:

$$\|f+g\|_p^p = \int_E |f+g|^p d\mu \leqslant \int_E |f| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu + \int_E |g| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_E |f+g|^p\right)^{1/q} + \left(\int_E |g|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_E |f+g|^p\right)^{1/q} =$$
$$= (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f+g\|_p^{p-1},$$

что равносильно заявленному неравенству. ■

Задача. Докажите, что равенство в теореме 1′ возможно лишь в случае неотрицательных α, β, не равных нулю одновременно, что $\alpha f = \beta g$ п.в. на E.

На $L_p(E)$, $p \geqslant 1$, введем отношение $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ п.в. на E. Тогда $\sim$ является отношением эквивалентности, согласованным с операциями сложения и умножения на скаляр. Полученное фактор-пространство будем также обозначать как $L_p(E)$, т.е. в дальнейшем будем отождествлять совпадающие п.в. функции.

Следствие. $L_p(E)$ относительно $\|\cdot\|_p$ является нормированным пространством:

1) $\|f\|_p \geqslant 0$, $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$ п.в. на E;

2) $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$;

3) $\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$.

Последнее неравенство очевидно при $p = 1$ и следует из теоремы 1′ при $p > 1$.

Задача. Докажите, что если $\mu(E) < \infty$ и $1 \leqslant p < q$, то $L_q(E) \subset L_p(E)$.

Напомним, что полное нормированное пространство называется банаховым.

Лемма 2. *Нормированное пространство X является банаховым $\Longleftrightarrow$ для всякой последовательности $\{x_n\}$ из X сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ влечет сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.*

▲ ($\Rightarrow$) Пусть $\{x_n\} \subset X$, такая что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$. Тогда $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ фундаментальна: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$ $\forall m, n \in \mathbb{N}\ \ m > n \geqslant N$

$$\|s_m - s_n\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\| \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} \|x_k\| < \varepsilon.$$

В силу полноты X последовательность $\{s_n\}$ сходится.

($\Leftarrow$) Пусть $\{y_n\}$ – фундаментальная последовательность в X. Тогда $\forall k\ \exists n_k\ \forall m, n \geqslant n_k$ $(\|y_m - y_n\| < 2^{-k})$. Без ограничения общности можно считать, что $n_{k+1} > n_k$. Положим $x_k = y_{n_{k+1}} - y_{n_k}$. Поскольку

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| = \sum_{k=1}^{\infty} \|y_{n_{k+1}} - y_{n_k}\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < \infty,$$

то по предположению $s_k = \sum_{i=1}^{k} x_i = y_{n_{k+1}} - y_{n_1}$ сходится в X. Таким образом, $\{y_{n_k}\}$ есть сходящаяся подпоследовательность $\{y_n\}$. Так как $\{y_n\}$ фундаментальна, то $\{y_n\}$ сходится. ■

Замечание. Если $y_n \to y$, то $\|y_n\| \to \|y\|$. Это следует из неравенства $|\|y_n\| - \|y\|| \leqslant \|y_n - y\|$.

Теорема 2. *Пространство $L_p(E)$ банахово.*

▲ Пусть $\{f_k\}$, такая что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p < \infty$. Рассмотрим $F(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$. Частичные суммы $F_m = \sum\limits_{k=1}^{m} |f_k|$ нестрого возрастуют, поэтому по теореме Леви $\int_E F^p d\mu = \lim\limits_{m\to\infty} \int_E F_m^p d\mu$. Так как $\|F_m\|_p \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p$, то функция F^p интегрируема на E. В частности, $F(x)$ конечно для п.в. x.Для таких x определена функция $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, т.к. $|f(x)|\leqslant F(x)$. Кроме того, $\|f\|_p\leqslant \|F\|_p$, т.е. $f\in L_p(E)$, и по замечанию

$$\|f-\sum_{k=1}^{n} f_k\|\leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty}\|f_k\|_p\to 0.$$

По лемме 2 заключаем, что $L_p(E)$ банахово. ■

Замечание. Из доказательств леммы 2 и теоремы 2 следует, что если $f_n\to f$ в $L_p(E)$, то существует подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, сходящаяся к f почти всюду.

Для понимания устройства $L_p(E)$ полезны следующие утверждения.

Будем называть функции с компактным носителем *финитными*. Обозначим через $C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ ($C_c(\mathbb{R}^m)$) множество всех финитных гладких (непрерывных) на $\mathbb{R}^m$ функций.

Лемма 3. *Пусть $f\in L_p(E)$ и $\varepsilon>0$. Тогда найдется такая финитная простая функция φ, что $\|f-\varphi\|_p<\varepsilon$.*

▲ Так как $|f-f\cdot I_{B_k(0)}|^p\leqslant |f|^p$ и $|f|^p$ интегрируема, то по теореме Лебега $\|f-f\cdot I_{B_k(0)}\|_p\to 0$ при $k\to\infty$. Заменяя функцию f на $f\cdot I_{B_k(0)}$, можно изначально считать, что f финитная.

Если $f\geqslant 0$, то найдется такая последовательность простых функций $\{\varphi_k\}$, что $0\leqslant\varphi_k\leqslant\varphi_{k+1}$ и $\varphi_k\to f$. Так как $|f-\varphi_k|^p\leqslant |f|^p$ и функция $|f|^p$ интегрируема, то по теореме Лебега $\|f-\varphi_k\|_p\to 0$ при $k\to\infty$, причем все φ_k финитны, поскольку $0\leqslant\varphi_k\leqslant f$.

Пусть f — произвольная вещественнозначная функция, $f=f^+-f^-$. По доказанному существуют такие финитные простые функции φ^+, φ^-, что $\|f^+-\varphi^+\|_p<\frac{\varepsilon}{2}$ и $\|f^--\varphi^-\|_p<\frac{\varepsilon}{2}$. Положим $\varphi=\varphi^+-\varphi^-$. Тогда φ — финитная простая функция и по неравенству треугольника

$$\|f-\varphi\|_p\leqslant\|f^+-\varphi^+\|_p+\|f^--\varphi^-\|_p<\varepsilon.$$

Если функция f комплекснозначная, то аппроксимируем $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$. ■

Теорема 3. *Пусть $f\in L_p(E)$ и $\varepsilon>0$. Тогда найдется такая функция $g\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, что $\|f-g|_E\|_p<\varepsilon$ (здесь $g|_E$ — сужение g на E).*

▲ По предыдущей лемме функция f является L_p-пределом финитных простых функций. Так как простая функция есть линейная комбинация индикаторов, то достаточно показать, что для каждого ограниченного измеримого A индикатор I_A является L_p-пределом гладких финитных функций.

По свойству регулярности меры Лебега найдутся открытые множества $G\supset A$ и $H\supset A^c$, такие что $\mu(G\setminus A)<\frac{\varepsilon}{2}$ и $\mu(H\setminus A^c)<\frac{\varepsilon}{2}$. Положим $K=H^c$. Тогда K — компакт, $K\subset A$ и $\mu(G\setminus K)\leqslant\mu(G\setminus A)+\mu(A\setminus K)<\varepsilon$. По теореме о существовании гладкого разбиения единицы найдется такая функция $g\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, что $0\leqslant g\leqslant 1$ и сужение $g|_K\equiv 1$. Тогда

$$\|I_A-g|_E\|_p^p=\int_E|I_A-g|^p d\mu=\int_{(G\cap E)\setminus K}|I_A-g|^p d\mu\leqslant\int_{G\setminus K}1\,d\mu=\mu(G\setminus K).$$

Поскольку $\mu(G\setminus K)<\varepsilon$, это завершает доказательство. ■

Пусть $1\leqslant p<\infty$. Обозначим через $L_p(\mathbb{T})$ линейное пространство 2π-периодических измеримых функций $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, для которых $f\in L_p(-\pi,\pi)$. Положим $\|f\|_p=\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f|^p\,d\mu\right)^{1/p}$.

Обозначим через $C(\mathbb{T})$ линейное пространство 2π-периодических непрерывных функций.

Следствие. *Пусть $f\in L_p(\mathbb{T})$ и $\varepsilon>0$. Тогда найдется такая функция $h\in C(\mathbb{T})$, что $\|f-h\|_p<\varepsilon$.*

▲ Без ограничения общности можно считать, что f вещественнозначна. По теореме 3 найдется финитная непрерывная функция, что $\|f-g\|_p<\frac{\varepsilon}{2}$. Функция g ограниченна, $|g|\leqslant M$. Для $\delta\in(0,\pi)$ определим функцию

$$h(x)=\begin{cases} g(x), & x\in[-\pi+\delta,\pi-\delta],\\ \frac{g(-\pi+\delta)}{\delta}(\pi+x), & x\in[-\pi,-\pi+\delta),\\ \frac{g(\pi-\delta)}{\delta}(\pi-x), & x\in(\pi-\delta,\pi]. \end{cases}$$

Так как $h(-\pi) = h(\pi)$, то h продолжима на $\mathbb{R}$ с периодом 2π. Очевидно, что $h \in C(\mathbb{T})$ и

$$\|g - h\|_p^p = \int_{-\pi}^{\pi} |g - h|^p \, d\mu = \left(\int_{-\pi}^{-\pi+\delta} + \int_{\pi-\delta}^{\pi} \right) |g - h|^p \, d\mu \leqslant (2M)^p \cdot 2\delta.$$

Уменьшив δ так, чтобы выполнилось неравенство $(2M)^p \cdot 2\delta < (\frac{\varepsilon}{2})^p$, получим $\|g - h\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $\|f - h\|_p \leqslant \|f - g\|_p + \|g - h\|_p < \varepsilon$. ■

Пусть $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ и $h \in \mathbb{R}^m$. Определим *сдвиг функции* $f_h\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$, $f_h(x) = f(x + h)$. Отметим, что f и f_h одновременно лежат в $L_p(\mathbb{R}^m)$, и в этом случае $\|f\|_p = \|f_h\|_p$.

Теорема 4 (непрерывность сдвига). *Если $f \in L_p(\mathbb{R}^m)$, то $\|f_h - f\|_p \to 0$ при $h \to 0$.*

▲ По теореме 3 для $\varepsilon > 0$ существует непрерывная функция g, такая что $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$ и $g = 0$ вне некоторого $B_r(0)$. Тогда, учитывая $\|(f - g)_h\|_p = \|f - g\|_p$, имеем

$$\|f_h - f\|_p \leqslant \|f_h - g_h\|_p + \|g_h - g\|_p + \|f - g\|_p < \tfrac{2\varepsilon}{3} + \|g_h - g\|_p.$$

По теореме Кантора g равномерно непрерывна на $\overline{B}_{r+1}(0)$. Поэтому существует $0 < \delta \leqslant 1$, что если $x, y \in \overline{B}_{r+1}(0)$ и $|x - y| < \delta$, то $|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{3M}$, где $M^p = \mu(B_{r+1}(0))$. Пусть $x, x+h \in \mathbb{R}^m$, причем $|h| < \delta$. Тогда либо $x, x+h \in B_{r+1}(0)$ и в этом случае $|g(x+h) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}$, либо $x, x + h \notin B_r(0)$ и в этом случае $g(x + h) - g(x) = 0$. Поэтому

$$\|g_h - g\|_p^p = \int_{B_{r+1}(0)} |g(x + h) - g(x)|^p \, d\mu < \tfrac{\varepsilon^p}{(3M)^p} \int_{B_{r+1}(0)} d\mu = \tfrac{\varepsilon^p}{3^p}.$$

Таким образом, $\|g_h - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$ при всех $|h| < \delta$. Следовательно, $\|f_h - f\|_p < \varepsilon$ при $|h| < \delta$. ■

Задача. Пусть $f \in L_p(\mathbb{T})$. Покажите, что $\|f_h - f\|_p \to 0$ при $h \to 0$.

Следующее утверждение играет ключевую роль в гармоническом анализе.

Лемма 4 (Римана об осцилляции). *Пусть I — промежуток в $\mathbb{R}$ и $f \in L_1(I)$. Тогда*

$$\int_I f(x) \, e^{i\lambda x} d\mu \to 0 \quad \text{при } \lambda \to \pm\infty.$$

В частности, $\int_I f(x) \cos \lambda x \, dx \to 0$, $\int_I f(x) \sin \lambda x \, dx \to 0$ при $\lambda \to \pm\infty$.

▲ Продолжив функцию f нулем вне I, можно считать, что $I = \mathbb{R}$. Сделаем в интеграле замену $x = t + \frac{\pi}{\lambda}$:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \, e^{i\lambda x} \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) \, e^{i\lambda\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)} \, d\mu = -\int_{\mathbb{R}} f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) \, e^{i\lambda t} \, d\mu.$$

Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \, e^{i\lambda x} \, d\mu = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right)\right) \, e^{i\lambda x} \, d\mu.$$

По непрерывности сдвига

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(x) \, e^{i\lambda x} \, d\mu \right| \leqslant \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left| f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right)\right| \, d\mu \to 0$$

при $\lambda \to \pm\infty$, что завершает доказательство. ■

Свертка и ее свойства

Определение. Пусть функции f и g измеримы в $\mathbb{R}^m$. Функция $f * g$, определяемая как

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x - t) \, g(t) \, d\mu(t),$$

называется *сверткой* f и g.

Замечание. Покажем, что функция $\varphi(x,t) = f(x-t)\,g(t)$ измерима в $\mathbb{R}^{2m}$. Для этого достаточно показать, что $f(x-t)$ измерима в $\mathbb{R}^{2m}$. Будем предполагать, что f вещественнозначна. Пусть $E_a = \{x \in \mathbb{R}^m \colon f(x) < a\}$ и $L : (x,t) \mapsto (x-t, t)$. Тогда

$$\{(x,t) \in \mathbb{R}^{2m} \colon f(x-t) < a\} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{2m} \colon (x-t) \in E_a\} = L^{-1}(E_a \times \mathbb{R}^m)$$

измеримо как линейный образ измеримого множества.

Свойства.

1) Если $f, g \in L_1(\mathbb{R}^m)$, то свертка определена почти всюду на $\mathbb{R}^m$ и $f * g \in L_1(\mathbb{R}^m)$.

▲ Введем обозначение $H(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} |f(x-t)\,g(t)|\,d\mu(t)$.

По теореме Тонелли

$$\int_{\mathbb{R}^m} H(x)\,d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x-t)|\,d\mu(x) \right) |g(t)|\,d\mu(t).$$

Сделаем во внутреннем интеграле замену $x - t = y$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^m} H(x)\,d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^m} |f(y)|\,d\mu(y) \cdot \int_{\mathbb{R}^m} |g(t)|\,d\mu(t) = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1.$$

Следовательно, H интегрируема, а значит, конечна почти всюду. Интегрируемость $f * g$ следует из оценки $\int\limits_{\mathbb{R}^m} |f * g|\,d\mu(x) \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^m} H(x)\,d\mu(x)$. ■

2) Если $f, g \in L_1(\mathbb{R}^m)$, то $f * g = g * f$ п.в.

▲ В интеграле из определения свертки достаточно сделать замену $x - t = y$. ■

3) Пусть $f \in L_p(\mathbb{R}^m)$, $g \in L_q(\mathbb{R}^m)$, где $1/p + 1/q = 1$. Тогда $f * g$ определена, равномерно непрерывна, и для всех $x \in \mathbb{R}^m$ верно $|(f * g)(x)| \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.

▲ По неравенству Гельдера

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_{\mathbb{R}^m} |f(x-t)|\,|g(t)|\,d\mu(t) \leqslant \\ &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x-t)|^p\,d\mu(t) \right)^{1/p} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^m} |g(t)|^q\,d\mu(t) \right)^{1/q} = \|f\|_p \cdot \|g\|_q \end{aligned}$$

Это доказывает существование свертки и неравенство из условия. Покажем равномерную непрерывность. Для $x, h \in \mathbb{R}^m$ имеем

$$\begin{aligned} |(f * g)(x+h) - (f * g)(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^m} (f_h(x-t) - f(x-t))\,g(t)\,d\mu(t) \right| = \\ &= |((f_h - f) * g)(x)| \leqslant \|f_h - f\|_p \cdot \|g\|_q \end{aligned}$$

Осталось применить непрерывность сдвига. Равномерная непрерывность следует из того, что правая часть не зависит от x.

Замечание. Утверждение п. 3 очевидно выполняется и для $p = 1$, если считать $q = \infty$, а g измеримой и ограниченной, $\|g\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}^m} |g|$. Это также дает важнейшее достаточное условие существования свертки.

В периодическом случае свертка определяется аналогично.

Определение. Пусть f и g — 2π-периодические измеримые функции на $\mathbb{R}$. *Сверткой* f и g называется функция вида $(f * g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,g(t)\,d\mu(t)$.

Условие существования (п. 1) и свойства 2 и 3 справедливы и в периодическом случае: в доказательствах достаточно заменить область интегрирования на интервал $(-\pi, \pi)$.

Определение. Семейство функций $\{\varphi_n \in C(\mathbb{T})\colon n \in \mathbb{N}\}$ называется *аппроксимативной единицей*, если

1) $\varphi_n(t) \geqslant 0$;

2) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t)dx = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} \varphi_n(t)dt = 0$ для любого $\delta \in (0,\pi)$.

Замечание. Если $\sup\limits_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} \varphi_n(t) \to 0$, то п. 3 очевидно выполняется.

Примеры. 1) Функции $\varphi_n(t) = \frac{1}{c_n}(1+\cos t)^n$, где $c_n = \int\limits_{-\pi}^{\pi}(1+\cos t)^n dt$, образуют аппроксимативную единицу. В проверке нуждается только п. 3 из определения единицы. Для этого оценим числа c_n снизу:

$$c_n = 2^{n+1}\int_0^\pi \cos^{2n}\tfrac{t}{2}dt \geqslant 2^{n+1}\int_0^\pi \cos^{2n}\tfrac{t}{2}\sin\tfrac{t}{2}dt = \tfrac{2^{n+2}}{2n+1} > \tfrac{2^n}{n}.$$

Тогда $\sup\limits_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} \varphi_n(t) = \frac{2^n}{c_n}\cos^{2n}\frac{\delta}{2} \leqslant n\cos^{2n}\frac{\delta}{2} \to 0$ для любого $\delta \in (0,\pi)$, т.к. $q = \cos^2\frac{\delta}{2} \in (0,1)$.

2) Для $n \in \mathbb{N}$ положим $c_n = \int\limits_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt$ и пусть $\varphi_n \in C(\mathbb{T})$, такая что $\varphi_n(t) = \frac{1}{c_n}(1-t^2)^n$ при $|t| \leqslant 1$, $\varphi_n(t) = 0$ при $1 \leqslant |t| \leqslant \pi$. Покажем, что функции φ_n образуют аппроксимативную единицу. Снова достаточно проверить п. 3 из определения единицы. Имеем

$$c_n = 2\int_0^1 (1-t^2)^n dt \geqslant 2\int_0^1 (1-t)^n dt = \tfrac{2}{n+1} \geqslant \tfrac{1}{n}.$$

Тогда $\sup\limits_{\delta\leqslant|t|\leqslant 1} \varphi_n(t) = \frac{2}{c_n}(1-\delta^2)^n \leqslant 2n(1-\delta^2)^n \to 0$ для любого $\delta \in (0,1)$, т.к. $q = 1-\delta^2 \in (0,1)$. Поскольку $\varphi_n(t) = 0$ при $1 \leqslant |t| \leqslant \pi$, то $\sup\limits_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} \varphi_n(t) \to 0$ для любого $\delta \in (0,\pi)$.

Задача. Покажите, что периодическая непрерывная функция равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

Теорема 5. *Пусть $\{\varphi_n\}$ — аппроксимативная единица и $f \in C(\mathbb{T})$. Тогда $f * \varphi_n \rightrightarrows f$ на $\mathbb{R}$.*

▲ Из п. 2 определения единицы имеем $f(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi_n(t)dt$. Поэтому

$$f * \varphi_n(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi}(f(x-t) - f(x))\varphi_n(t)dt.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и, пользуясь равномерной непрерывностью f, выберем такое $\delta \in (0,\pi)$, что $(|t| < \delta \Rightarrow |f(x-t) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2})$. Разобьем последний интеграл следующим образом:

$$f * \varphi_n(x) - f(x) = \Big(\int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\Big)(f(x-t) - f(x))\varphi_n(t)dt =: I_1 + I_2$$

и оценим каждое слагаемое справа. Имеем

$$|I_1| < \tfrac{\varepsilon}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_n(t)dt = \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Функция f, как периодическая непрерывная функция, ограничена, $|f| \leqslant M$ на $\mathbb{R}$. Поэтому

$$|I_2| \leqslant \int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}(|f(x-t)| + |f(t)|)\varphi_n(t)dt \leqslant 2M\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\varphi_n(t)dt.$$

По п. 3 определения единицы найдется такое $N = N(\delta)$, что $2M\int\limits_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\varphi_n(t)dt < \frac{\varepsilon}{2}$ при всех $n \geqslant N$. При таких n выполнено $|I_2| < \frac{\varepsilon}{2}$, а значит, $|f * \varphi_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Это доказывает, что $f * \varphi_n \rightrightarrows f$ на $\mathbb{R}$. ■

Определение. Функция $T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ называется *тригонометрическим многочленом.*

По формулам Эйлера $\cos kx = \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}$, $\sin kx = \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}$, поэтому всякий тригонометрический многочлен может быть записан в виде $T(x) = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$.

Следствие 1 (первая теорема Вейерштрасса). *Пусть $f \in C(\mathbb{T})$ и $\varepsilon > 0$. Тогда найдется тригонометрический многочлен $T(x)$, такой что*

$$\|f - T\|_\infty := \sup_{[-\pi,\pi]} |f(x) - T(x)| < \varepsilon.$$

▲ В качестве аппроксимативной единицы возьмем функции $\varphi_n(t) = \frac{2^n}{c_n} \cos^{2n} \frac{t}{2}$ из примера 1. По формуле бинома $\varphi_n(t) = \frac{2^n}{c_n} \left(\frac{e^{\frac{it}{2}} + e^{-\frac{it}{2}}}{2} \right)^{2n} = \sum\limits_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ikx}$, где $\alpha_k = \frac{1}{2^n c_n} C_{2n}^{n+k}$, поэтому все φ_n являются тригонометрическими многочленами. Покажем, что функции $f * \varphi_n$ являются тригонометрическими многочленами. В самом деле,

$$f * \varphi_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ik(x-t)} f(t) dt = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ikx} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} f(t) dt =: \sum_{k=-n}^{n} \beta_k e^{ikx}.$$

По теореме 5 $f * \varphi_n \rightrightarrows f$ на $\mathbb{R}$. Поэтому достаточно положить $T(x) = f * \varphi_n(x)$ для подходящего n. ■

Следствие 2 (вторая теорема Вейерштрасса). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $\varepsilon > 0$. Тогда найдется алгебраический многочлен $P(x)$, такой что*

$$\|f - P\|_\infty := \sup_{[a,b]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

▲ Утверждение теоремы не меняется при линейных заменах аргумента. Поэтому можно ограничиться доказательством для случая отрезка $[0, 1]$. Положим $Q(t) = f(0) + (f(1) - f(0))t$.

Свяжем с f функцию $g \in C(\mathbb{T})$, такую что

$$g(t) = \begin{cases} f(t) - Q(t), & t \in [0, 1], \\ 0, & t \in [-\pi, \pi] \setminus [0, 1], \end{cases}$$

и в качестве аппроксимативной единицы возьмем функции φ_n из примера 2. Тогда по теореме 5 $g * \varphi_n \rightrightarrows g$ на $\mathbb{R}$. Но при $x \in [0, 1]$ имеем

$$g * \varphi_n(x) = \int_0^1 g(t) \varphi_n(x - t) dt = \frac{1}{c_n} \int_0^1 g(t)(1 - (x - t)^2)^n dt = \sum_{k=0}^{2n} \alpha_k x^k =: p_{2n}(x).$$

Поэтому при достаточно большом n $\sup\limits_{[0,1]} |g(x) - p_{2n}(x)| < \varepsilon$, а значит, $\|f - P\|_\infty < \varepsilon$, где многочлен $P(x) = p_{2n}(x) + Q(x)$. ■

Определение. Пусть X — нормированное пространство. Система $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ называется *полной* в X, если

$$\forall x \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \ \left(\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| < \varepsilon \right).$$

Теорема 6. *Вещественная и комплексная тригонометрические системы $\{1/2, \cos kx, \sin kx\}_{k=1}^\infty$ и $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ полны в $L_p(\mathbb{T})$.*

▲ Пусть $f \in L_p(\mathbb{T})$ и $\varepsilon > 0$. По следствию теоремы 3 найдется такая функция $h \in C(\mathbb{T})$, что $\|f - h\|_p < \varepsilon$. По первой теореме Вейерштрасса существует такой тригонометрический многочлен T, что $\|h - T\|_\infty < \varepsilon$. Тогда

$$\|h - T\|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |h - T|^p \, d\mu \right)^{1/p} < \varepsilon \cdot (2\pi)^{1/p}.$$

Из неравенства треугольника получаем, что

$$\|f - T\|_p \leqslant \|f - h\|_p + \|h - T\|_p < (1 + (2\pi)^{1/p}) \cdot \varepsilon,$$

что доказывает утверждение. ■

Определение. Пусть V — комплексное линейное пространство. Функция $(\cdot,\cdot)\colon V\times V\to\mathbb{C}$ называется *скалярным произведением*, если она удовлетворяет следующим свойствам-аксиомам:

1) $\forall x\in V\colon (x,x)\geqslant 0,\ (x,x)=0\Leftrightarrow x=\bar{0}$;
2) $\forall\lambda\in\mathbb{C}\ \forall x,x',y\in V\colon\ (\lambda x+x',y)=\lambda(x,y)+(x',y)$;
3) $\forall x,y\in V\colon\ (x,y)=\overline{(y,x)}$.

Пространство V с фиксированным на нем скалярным произведением называется *предгильбертовым.*

Замечание. Каждое предгильбертово пространство является нормированным, если положить $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$. Неравенство треугольника следует из неравенства Коши-Буняковского-Шварца $|(x,y)|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$.

Примеры. 1) Пространство $L_2(\mathbb{T})$ является предгильбертовым относительно скалярного произведения

$$(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi}f\bar{g}\,d\mu.$$

Интегрируемость $f\bar{g}$ следует из неравенства $2|f\bar{g}|\leqslant|f|^2+|g|^2$.

2) Пространством l_2 называется множество последовательностей комплексных чисел $x=\{x_k\}$, удовлетворяющих условию $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2<\infty$, с операциями почленного умножения на числа, почленного сложения и со скалярным произведением $(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\overline{y_k}$. Корректность операции сложения следует из неравенства $|x_k+y_k|^2\leqslant 2(|x_k|^2+|y_k|^2)$, а из неравенства $|x_k\overline{y}_k|\leqslant|x_k|^2+|y_k|^2$ следует, что ряд в определении (x,y) сходится абсолютно.

Определение. Векторы $x,y\in V$ называются *ортогональными*, если $(x,y)=0$. Пишут $x\perp y$.

Лемма 1 (теорема Пифагора). *Если $x_1,\ldots,x_n\in V$ и $x_i\perp x_j$ при $i\neq j$, то*

$$\|x_1+\ldots+x_n\|^2=\|x_1\|^2+\ldots+\|x_n\|^2.$$

▲ В силу условия $(x_i,x_j)=0$ при $i\neq j$ имеем

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n}x_i\Big\|^2=\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i,\sum_{j=1}^{n}x_j\Big)=\sum_{i,j=1}^{n}(x_i,x_j)=\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2.\ ■$$

Определение. Семейство векторов $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется *ортогональной системой* (ОС), если $e_i\perp e_j$ при $i\neq j$ и $\|e_i\|\neq 0$ при любом i.

Замечание. Элементы, входящие в ОС, линейно независимы. В самом деле, домножая равенство $\lambda_1e_1+\ldots+\lambda_me_m=\bar{0}$ скалярно на e_i, получим $\lambda_i=0$ $(i=1,\ldots,m)$.

Определение. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ОС и $x\in V$. Тогда числа $\hat{x}_k=\frac{(x,e_k)}{\|e_k\|^2}$ называются *коэффициентами Фурье* элемента x, а $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\hat{x}_ke_k$ — *рядом Фурье* x по системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. Пишут $x\sim\sum\limits_{k=1}^{\infty}\hat{x}_ke_k$.

Коэффициенты Фурье обладают *минимальным свойством*: n-я частичная сумма ряда Фурье дает наилучшее приближение x среди линейных комбинаций $e_1,\ldots,e_n$. А именно, справедлива

Теорема 1. *Минимум нормы $\Big\|x-\sum\limits_{k=1}^{n}c_ke_k\Big\|$ достигается в том и только в том случае, когда $c_k=\hat{x}_k$, $k=1,\ldots,n$. При этом справедливо* тождество Бéсселя

$$\Big\|x-\sum_{k=1}^{n}\hat{x}_ke_k\Big\|^2=\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}|\hat{x}_k|^2\|e_k\|^2.$$

▲ Положим $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\hat{x}_ke_k$.

1) Сначала проверим, что $x-S_n\perp y$ при любом y из линейной оболочки $L=\langle e_1,\ldots,e_n\rangle$. Достаточно установить, что $x-S_n\perp e_m$ при всех $m=1,\ldots,n$. Это так, поскольку

$$(x-S_n,e_m)=(x,e_m)-(S_n,e_m)=(x,e_m)-\sum_{k=1}^{n}\hat{x}_k(e_k,e_m)=(x,e_m)-\hat{x}_m\|e_m\|^2=0.$$

2) Пусть $y=\sum_{k=1}^{n} c_k e_k$. Так как $S_n-y\in L$, то $x-S_n \perp S_n-y$. Поэтому по лемме 1

$$\|x-y\|^2=\|(x-S_n)+(S_n-y)\|^2=\|x-S_n\|^2+\|S_n-y\|^2=\|x-S_n\|^2+\sum_{k=1}^{n}|c_k-\hat{x}_k|^2\|e_k\|^2.$$

Откуда $\|x-y\|\geqslant\|x-S_n\|$ и равенство возможно только когда все $c_k=\hat{x}_k$.

Тождество Бесселя получается, если в равенстве для $\|x-y\|^2$ положить $y=\bar{0}$. ■

Следствие 1 (неравенство Бесселя). *Пусть* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— ОС и* $x\in V$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\hat{x}_k|^2\|e_k\|^2\leqslant\|x\|^2.$$

▲ Из тождества Бесселя $\sum\limits_{k=1}^{n}|\hat{x}_k|^2\|e_k\|^2\leqslant\|x\|^2$ для любого $n\in\mathbb{N}$. Следовательно, ряд сходится и его сумма не превосходит $\|x\|^2$. ■

Следствие 2. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ОС и $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k e_k$. Тогда $c_k=\hat{x}_k$, $k=1,2,\dots$

▲ Если $c_m\neq\hat{x}_m$, то при $n\geqslant m$ имеем $\left\|x-\sum\limits_{k=1}^{n}c_k e_k\right\|^2\geqslant\sum\limits_{k=1}^{n}|\hat{x}_k-c_k|^2\|e_k\|^2\geqslant|\hat{x}_m-c_m|^2\|e_m\|^2>0$. ■

Теорема 2. *Если* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— ОС и* $x\in V$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) $\forall\varepsilon>0\ \exists c_1,\dots,c_n\colon\ \left\|x-\sum\limits_{k=1}^{n}c_k e_k\right\|<\varepsilon$;

2) $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\hat{x}_k e_k$;

3) $\|x\|^2=\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\hat{x}_k|^2\|e_k\|^2$ (равенство Парсевáля).

▲ $(1\Rightarrow 2)$ Пусть $\varepsilon>0$. В силу минимальности коэффициентов Фурье $\left\|x-\sum\limits_{k=1}^{n}\hat{x}_k e_k\right\|<\varepsilon$ и также при любом $m\geqslant n$

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{m}\hat{x}_k e_k\right\|\leqslant\left\|x-\sum_{k=1}^{n}\hat{x}_k e_k\right\|<\varepsilon.$$

Следовательно, $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\hat{x}_k e_k$. Импликация $(2\Rightarrow 1)$ очевидна.

Равносильность $(2\Leftrightarrow 3)$ имеет место в силу тождества Бесселя. ■

Определение. ОС $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ в предгильбертовом пространстве V называется (ортогональным) *базисом*, если $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\hat{x}_k e_k$ для любого $x\in V$.

Теорему 2 можно переформулировать в следующем виде.

Теорема 2′. *Если* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— ОС. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *полна;*

2) система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *является базисом;*

3) $\forall x\in V\ \left(\|x\|^2=\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\hat{x}_k|^2\|e_k\|^2\right)$.

Пример. Вещественная и комплексная тригонометрические системы $\{1/2,\cos kx,\sin kx\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ образуют базис в $L_2(\mathbb{T})$.

Проверим ортогональность $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{int}\,\overline{e^{imt}}\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(n-m)t}\,dt=\begin{cases}0, & n\neq m,\\ 2\pi, & n=m.\end{cases}$$

Аналогично устанавливается ортогональность $\{1/2, \cos kx, \sin kx\}_{k=1}^{\infty}$. При этом $\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{1}{2})^2dt = \frac{\pi}{2}$, $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 ktdt = \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 ktdt = \pi$.

Для функции $f \in L_2(\mathbb{T})$ коэффициенты Фурье вычисляются по формулам:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\cos kt\,d\mu(t), \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\sin kt\,d\mu(t),\ k \in \mathbb{N}_0,$$

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-int}\,d\mu(t),\ n \in \mathbb{Z}.$$

Такие коэффициенты связаны соотношениями:

$$\widehat{f}(\pm k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos kt \mp i\,\sin kt)d\mu(t) = \frac{a_k \mp ib_k}{2}, \quad \widehat{f}(0) = \frac{a_0}{2},\ k \in \mathbb{N}.$$

Откуда следуют равенства частичных сумм:

$$S_n(f,x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx + b_k\sin kx = \sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k)e^{ikx}.$$

Следовательно, ряды Фурье $S(f,x)$ функции f по тригонометрическим системам совпадают:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx + b_k\sin kx = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)e^{inx}.$$

В этом заключается эквивалентность записи ряда Фурье по действительной и комплексной системам. Комплексной форме в дальнейшем будем отдавать предпочтение.

Так как тригонометрические системы полны в $L_2(\mathbb{T})$, утверждение про базис следует по теореме $2'$. Таким образом,

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx + b_k\sin kx = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)\,e^{inx} \quad \text{в} \quad L_2(\mathbb{T}).$$

Запишем равенство Парсеваля для тригонометрических систем:

$$\|f\|_2^2 = |a_0|^2\,(1/2,1/2) + \sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2(\cos kx,\cos kx) + |b_k|^2(\sin kx,\sin kx) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(n)|^2(e^{inx},e^{inx}).$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2\,d\mu = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right) = 2\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(n)|^2.$$

Определение. Предгильбертово пространство, полное относительно нормы, порожденной скалярным произведением, называется *гильбертовым*.

Теорема 3 (Рисс-Фишер). *Пусть* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *ОС в гильбертовом пространстве* H *и* $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, *такая что* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2\|e_k\|^2 < \infty$. *Тогда существует такой* $x \in H$, *что* $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k$.

▲ Положим $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k e_k$ и $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n}|\alpha_k|^2\|e_k\|^2$. Для любых $n,p \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\|S_{n+p} - S_n\|^2 = \left(\sum_{k=n+1}^{n+p}\alpha_k e_k, \sum_{k=n+1}^{n+p}\alpha_k e_k\right) = \sum_{k=n+1}^{n+p}|\alpha_k|^2\|e_k\|^2 = |\sigma_{n+p} - \sigma_n| \qquad (*)$$

Поскольку $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2\|e_k\|^2$ сходится, то $\{\sigma_n\}$ фундаментальна, а значит, $\{S_n\}$ также фундаментальна в силу (*). Так как H полно, то $\{S_n\}$ сходится к некоторому $x \in H$, т. е. $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k$. ■

Определение. Система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ в предгильбертовом пространстве называется *замкнутой*, если из условия $(x, e_k) = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$ следует, что $x = \bar{0}$.

Теорема 4. *Ортогональная система в гильбертовом пространстве* H *замкнута тогда и только тогда, когда она полна.*

▲ Пусть $x \in H$, такой что $(x, e_k) = 0$. Если ОС $\{e_k\}$ полна, то по теореме 2 $x = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{x}_k e_k$. Поскольку все $\hat{x}_k = 0$, то $x = \bar{0}$.

Пусть $\{e_k\}$ замкнута, $x \in H$. По неравенству Бесселя ряд $\sum |\hat{x}_k|^2 \|e_k\|^2$ сходится, поэтому по теореме 3 существует $y = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{x}_k e_k$. Тогда по следствию 2 теоремы 1 все $\hat{x}_k = \hat{y}_k$. Откуда по линейности $\widehat{(y-x)}_k = 0$, а значит, $(y - x, e_k) = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$. В силу замкнутости системы $y = x$. Теперь полнота $\{e_k\}$ следует из $(1 \Leftrightarrow 2)$ теоремы $2'$. ■

Задача. Пусть $P_n(x) = (x^n(1-x)^n)^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (многочлены Лежандра). Докажите, что система $\{P_n\}$ образует базис в $L_2(-1, 1)$.

В этом разделе будем рассматривать функции из $L_1(\mathbb{T})$. Для таких функций определены коэффициенты Фурье по тригонометрической системе:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\cos kt\,d\mu(t), \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\sin kt\,d\mu(t),\ k\in\mathbb{N}_0,$$
$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-int}\,d\mu(t),\ n\in\mathbb{Z}.$$

Займемся вопросами поточечной и равномерной сходимостей рядов Фурье

$$S(f,x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx + b_k\sin kx = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)e^{inx}.$$

Отметим, что если $f,\ g\in L_1(\mathbb{T})$ и $\alpha,\ \beta\in\mathbb{C}$, то

1) $\widehat{\alpha f+\beta g}(n) = \alpha\widehat{f}(n)+\beta\widehat{g}(n)$; 2) $\widehat{f}(n)\to 0$ при $n\to\pm\infty$.

Первое свойство следует из линейности интеграла Лебега, второе — из леммы Римана об осцилляции.

Поточечная сходимость рядов Фурье

Исследование сходимости ряда Фурье начнем с интегрального представления $S_n(f,x)$, найденного Дирихле:

$$S_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,d\mu(t)\right)e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}d\mu(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)d\mu(t).$$

Функция $D_n(t) := \frac{1}{2}\sum\limits_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kt$ называется n-м *ядром Дирихле*. Непосредственно из определения следует, что функция D_n непрерывна, четна, 2π-периодична и $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = \pi$. Кроме того, $S_n(f,x) = (\frac{1}{\pi}f * D_n)(x)$.

Из периодичности подынтегральных функций $S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-s)\,D_n(s)\,d\mu(s)$. Теперь ввиду четности D_n, сумму $S_n(f,x)$ можно переписать в виде

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x+t)+f(x-t))D_n(t)\,d\mu(t).$$

Просуммировав геометрическую прогрессию при $t\neq 2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$, получим

$$D_n(t) = \frac{1}{2}e^{-int}(1+e^{it}+\dots+e^{2int}) = \frac{1}{2}e^{-int}\cdot\frac{e^{(2n+1)it}-1}{e^{it}-1} =$$
$$= \frac{e^{(n+1/2)it}-e^{-(n+1/2)it}}{2(e^{it/2}-e^{-it/2})} = \frac{\sin{(n+\frac{1}{2})t}}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

Лемма 1. *Пусть $f\in L_1(\mathbb{T})$ и $0<\delta\leqslant\pi$. Тогда для каждого $x\in\mathbb{R}$ выполнено*

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{t}\sin{(n+\tfrac{1}{2})t}\,d\mu(t)+\varepsilon_n(x), \tag{1}$$

где $\varepsilon_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$.

▲ Имеем

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x+t)+f(x-t))\frac{\sin{(n+\frac{1}{2})t}}{2\sin\frac{t}{2}}d\mu(t).$$

Пусть $0<\delta\leqslant\pi$. Тогда

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{t}\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\,d\mu(t)+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{t}\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\,d\mu(t)+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x+t)+f(x-t))\left(\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{t}\right)\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\,d\mu(t).$$

Функция $h(t) = f(x+t) + f(x-t)$ интегрируема на $(0, \pi]$, функция $g(t) = \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}$ непрерывна и ограничена на $(0, \pi]$ ($g(t) \to 0$ при $t \to 0$). Поэтому функция hg интегрируема на $(0, \pi]$. Аналогично устанавливается, что функция $h(t)/t$ интегрируема на $[\delta, \pi]$. Следовательно, второй и третий интегралы стремятся к нулю при $n \to \infty$ по лемме Римана, что доказывает утверждение. ■

Теорема 1. *Пусть $f \in L_1(\mathbb{T})$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(f,x) = S$ в том и только в том случае, когда найдется $\delta \in (0, \pi]$, что*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\delta \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2S}{t} \sin\left(n + \tfrac{1}{2}\right)t\, d\mu(t) = 0. \tag{2}$$

▲ Для функции $\tilde{f} \equiv 1$ все суммы $S_n(\tilde{f}, x) = 1$, поэтому по формуле (1) имеем

$$1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\delta \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t}\, dt + o(1).$$

Умножая это равенство на S и вычитая из (1), получим

$$S_n(f,x) - S = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2S}{t} \sin\left(n + \tfrac{1}{2}\right)t\, d\mu(t) + o(1),$$

что доказывает утверждение. ■

Задача. Докажите, что $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$.

Из признаков сходимости рядов Фурье на практике наиболее употребителен признак Ди́ни.

Теорема 2 (Дини). *Пусть $f \in L_1(\mathbb{T})$ и $x \in \mathbb{R}$. Если для числа $S \in \mathbb{C}$ существует такое $\delta > 0$, что*

$$\int_0^\delta \frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2S|}{t}\, d\mu(t) < \infty,$$

то ряд Фурье $S(f,x)$ сходится в точке x к числу S.

▲ Подынтегральная функция лежит в $L_1(0, \delta)$. Поэтому по лемме Римана выполнено (2) и утверждение вытекает из теоремы 1. ■

Следствие 1. *Пусть $f \in L_1(\mathbb{T})$ и $x \in \mathbb{R}$. Если существуют конечные односторонние пределы $f(x \pm 0)$ и конечные*

$$\alpha_\pm = \lim_{t \to \pm 0} \frac{f(x+t) - f(x \pm 0)}{t},$$

то ряд Фурье $S(f,x)$ сходится в точке x к числу $S = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

▲ Положим $\varphi_x(t) = \frac{f(x+t)+f(x-t)-2S}{t}$, $t > 0$. Функция φ_x измерима и

$$\varphi_x(t) = \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} + \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t} \xrightarrow{t \to +0} \alpha_+ - \alpha_-.$$

Следовательно, φ_x ограничена на некотором интервале $(0, \delta)$, и можно применить теорему 2. ■

Следствие 2. *Пусть 2π-периодическая функция f в каждой точке x имеет конечные односторонние производные $f'_\pm(x)$. Тогда $S(f,x) = f(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$.*

Приведем в качестве задачи признак Дирихле, дополняющий признак Дини.

Задача. Пусть $f \in L_1(\mathbb{T})$ и $x \in \mathbb{R}$. Покажите, что если существует такое $\delta > 0$, что на интервалах $(x - \delta, x)$ и $(x, x + \delta)$ функция f монотонна и ограничена, то ряд Фурье $S(f,x)$ сходится в точке x к числу $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Хотя коэффициенты Фурье функции f определены глобально, сходимость ряда Фурье f в точке зависит только от поведения функции в сколь угодно малой окрестности точки. Это вытекает из следующего *принципа локализации.*

Теорема 3 (Риман). *Пусть $f, g \in L_1(\mathbb{T})$. Если $f = g$ в некоторой окрестности точки x, то ряды Фурье $S(f,x)$ и $S(g,x)$ сходятся или расходятся одновременно, и если сходятся, то к одному значению.*

▲ Пусть $f = g$ на $(x-\delta, x+\delta)$ при некотором $\delta > 0$. Тогда $f(x+t)+f(x-t) = g(x+t)+g(x-t)$ при $0 \leqslant t < \delta$, а значит, по (1) имеем $S_n(f,x) = S_n(g,x) + o(1)$. ■

Почленное дифференцирование и интегрирование рядов Фурье

Определение. Функция f называется *кусочно-непрерывной* на отрезке $[a,b]$, если f имеет на $[a,b]$ лишь конечное число точек разрыва и все точки разрыва 1-го рода.

Теорема 4. *Пусть $f \in C(\mathbb{T})$ и f' кусочно-непрерывна на $[-\pi,\pi]$. Тогда ряд Фурье производной $S(f',x)$ получается почленным дифференцированием ряда $S(f,x)$, т.е. $S(f',x) = (S(f,x))'$.*

▲ По формуле интегрирования по частям имеем

$$2\pi\widehat{f'}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\, e^{-int}\, d\mu(t) = f(t)\, e^{-int}\Big|_{t=-\pi}^{\pi} + in\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, d\mu(t) = 2\pi in\widehat{f}(n).$$

Внеинтегральный член равен нулю в силу 2π-периодичности произведения f на экспоненту. Следовательно, $\widehat{f'}(n)\, e^{inx} = \left(\widehat{f}(n)\, e^{inx}\right)'$, что и утверждалось. ■

Замечание. Если f' кусочно-непрерывна на $[a,b]$, то сама f также кусочно-непрерывна на $[a,b]$. В самом деле, пусть $\alpha < \beta$ — две соседние точки разрыва функции f' и $c \in (\alpha,\beta)$. По формуле Ньютона–Лебница $f(x) = f(c) + \int_c^x f'(t)dt$. Тогда из непрерывности интеграла с переменным верхним пределом следует, что f непрерывна на (α,β) и существуют конечные $f(\alpha+0)$, $f(\beta-0)$.

Следствие. *Пусть $f, f', \dots, f^{(m-1)} \in C(\mathbb{T})$ и $f^{(m+1)}$ кусочно-непрерывна на $[-\pi,\pi]$ $(m \in \mathbb{N})$. Тогда $\widehat{f}(n) = O\left(\frac{1}{|n|^{m+1}}\right)$ при $n \to \pm\infty$.*

▲ По замечанию выше функция $f^{(m)}$ кусочно-непрерывна на $[-\pi,\pi]$. Последовательно применяя теорему 4, получим $\widehat{f^{(m)}}(n) = (in)^m \widehat{f}(n)$.

Добавим ко всем точкам разрыва $f^{(m+1)}$ точки $\pm\pi$ и полученное множество упорядочим по возрастанию: $-\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_N = \pi$. По формуле интегрирования по частям имеем

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} f^{(m+1)}(t)\, e^{-int} dt = f^{(m)}(t) e^{-int}\Big|_{t\to x_{j-1}+0}^{t\to x_j-0} + in\int_{x_{j-1}}^{x_j} f^{(m)}(t) e^{-int}\, dt.$$

Просуммировав равенства по всем j и разделив на 2π, получим $\widehat{f^{(m+1)}}(n) = \lambda_n + in\,\widehat{f^{(m)}}(n)$, где последовательность

$$\lambda_n = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N}\left(f^{(m)}(x_j-0)\, e^{-inx_j} - f^{(m)}(x_{j-1}+0)\, e^{-inx_{j-1}}\right)$$

ограничена. Так как $\widehat{f^{(m+1)}}(n) = o(1)$, то заключаем, что $in\,\widehat{f^{(m)}}(n) = O(1)$ при $n \to \pm\infty$. Откуда $(in)^{m+1}\widehat{f}(n) = O(1)$ при $n \to \pm\infty$, что завершает доказательство. ■

Задача. Докажите, что если в условиях следствия $\widehat{f}(n) = O\left(\frac{1}{|n|^{m+1+\varepsilon}}\right)$ для некоторого $\varepsilon > 0$, то $f^{(m)} \in C(\mathbb{T})$.

Теорема 5. *Пусть $f, f', \dots, f^{(m-1)} \in C(\mathbb{T})$ и $f^{(m)}$ кусочно-непрерывна на $[-\pi,\pi]$ $(m \in \mathbb{N})$. Тогда ряд Фурье $S(f,x)$ сходится к функции f равномерно на $\mathbb{R}$, причем справедлива оценка*

$$\|S_n(f) - f\|_\infty \leqslant Cn^{-m+\frac{1}{2}}\|f^{(m)}\|_2.$$

▲ По следствию 2 из признака Дини $f(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)e^{inx}$, причем по теореме 4 $\widehat{f^{(m)}}(k) = (ik)^m\widehat{f}(k)$ при всех $k \in \mathbb{Z}$. Тогда для всякого $x \in \mathbb{R}$ имеем

$$|S_n(f,x)-f(x)| = \Big|\sum_{|k|>n}\widehat{f}(n)e^{ikx}\Big| \leqslant \sum_{|k|>n}|\widehat{f}(k)| = \sum_{|k|>n}\tfrac{1}{|k|^m}\cdot|\widehat{f^{(m)}}(k)|.$$

Откуда по неравенству Коши-Буняковского-Шварца

$$\|S_n(f)-f\|_\infty \leqslant \Big(\sum_{|k|>n}\tfrac{1}{k^{2m}}\Big)^{1/2}\Big(\sum_{|k|>n}|\widehat{f^{(m)}}(k)|^2\Big)^{1/2}.$$

По неравенству Бесселя $2\pi\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{f^{(m)}}(k)|^2 \leqslant \|f^{(m)}\|_2^2$. Кроме того,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{2m}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty}\int_{k-1}^{k}\frac{dx}{x^{2m}} = \int_n^\infty\frac{dx}{x^{2m}} = \frac{n^{-2m+1}}{2m-1}.$$

Следовательно, $\|S_n(f)-f\|_\infty \leqslant Cn^{-m+\frac{1}{2}}\|f^{(m)}\|_2$, где C зависит только от m. ■

Лемма 2. *Пусть $f, f_k\in L_1(\mathbb{T})$, $\|f_k-f\|_1\to 0$ при $k\to\infty$. Тогда $\widehat{f_k}(n)\to\widehat{f}(n)$ для всех $n\in\mathbb{Z}$.*

▲ Вытекает из оценки

$$|\widehat{f_k}(n)-\widehat{f}(n)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-f_n(x))e^{ikx}dx\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\|f_k-f\|_1. \ ■$$

Теорема 6. *Пусть $f\in L_1(\mathbb{T})$ и $F(x)=\int_0^x f(t)\,d\mu(t)-\widehat{f}(0)\,x$. Тогда $F\in C(\mathbb{T})$ и ее ряд Фурье получается почленным интегрированием ряда $S(f,x)$:*

$$S(F,x) = \widehat{F}(0) + \sum_{n\neq 0}\frac{\widehat{f}(n)}{in}\,e^{inx},$$

причем такой ряд равномерно сходится к F.

▲ Функция F имеет период 2π:

$$F(x+2\pi)-F(x) = \int_x^{x+2\pi} f(t)\,d\mu(t) - 2\pi\widehat{f}(0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,d\mu(t) - 2\pi\widehat{f}(0) = 0.$$

По следствию теоремы 1.3 для каждого k найдется такая $f_k\in C(\mathbb{T})$, что $\|f_k-f\|_1<\frac{1}{k}$. Определим $F_k(x)=\int_0^x f_k(t)dt-\widehat{f_k}(0)x$. Тогда F_k — 2π-периодическая непрерывно-дифференцируемая функция и $F_k'=g_k$, где $g_k=f_k-\widehat{f_k}(0)$. По теореме 4 $\widehat{g_k}(n)=in\widehat{F_k}(n)$ при всех $n\in\mathbb{Z}$. Очевидно, $\widehat{g_k}(n)=\widehat{f_k}(n)$ при $n\neq 0$, так что

$$\widehat{F}_k(n) = \frac{1}{in}\widehat{f}_k(n),\ \ n\neq 0. \tag{3}$$

Далее, для $x\in[-\pi,\pi]$ имеем

$$|F_k(x)-F(x)| \leqslant \Big|\int_0^x(f_k-f)d\mu\Big| + |(\widehat{f_k}(0)-\widehat{f}(0))x| \leqslant \|f_k-f\|_1 + \pi|\widehat{f_k}(0)-\widehat{f}(0)|.$$

Следовательно, $F_k\rightrightarrows F$ на $[-\pi,\pi]$. Тогда F непрерывна на $[-\pi,\pi]$, а значит, и на $\mathbb{R}$. Так как $\|F_k-F\|_1\leqslant 2\pi\|F_k-F\|_\infty$, то $\|F_k-F\|_1\to 0$. Переходя в равенствах (3) к пределу при $k\to\infty$, по лемме получим $\widehat{F}(n)=\frac{1}{in}\widehat{f}(n)$ при $n\neq 0$.

Равномерная сходимость ряда $S(F,x)$ к F выполнена по следствию из теоремы Фейера. ■

Следствие 1. *Пусть $f\in L_1(\mathbb{T})$. Тогда*

$$\int_x^y f(t)d\mu(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)\int_x^y e^{int}dt.$$

▲ Следует по теореме в силу равенства $\int_x^y f(t)d\mu(t)=\widehat{f}(0)(y-x)+F(y)-F(x)$. ■

Замечание. Если в равенстве $F(x)=S(F,x)$ положить $x=0$, то получится

$$0 = \widehat{F}(0) + \sum_{n\neq 0}\frac{\hat{f}(n)}{in} = \widehat{F}(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hat{f}(n)-\hat{f}(-n)}{in} = \widehat{F}(0) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n(f)}{n}.$$

Функции из $L_1(\mathbb{T})$ полностью определяются своими коэффициентами Фурье (*теорема единственности*). А именно, верно

Следствие 2*. *Пусть $f, g \in L_1(\mathbb{T})$ и $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $f = g$ п.в. на $\mathbb{R}$.*

▲ По следствию 1 функции f и g имеют на каждом отрезке совпадающие интегралы. Поэтому они совпадают п.в. ■

Суммирование рядов Фурье методом средних арифметических

Ряд Фурье непрерывной функции может расходиться на множестве меры нуль. Тем не менее, он всегда суммируем методом средних арифметических, причем такие суммы равномерно сходятся к самой функции.

Определение. Пусть $f \in L_1(\mathbb{T})$. Определим

$$\sigma_N(f,x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n(f,x).$$

Суммы σ_N называются *суммами Фе́йера* функции f.

Задача. Докажите, что $\sigma_n(f,x) = \sum\limits_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)\hat{f}(k)\,e^{ikx}$.

Используя интегральное представление $S_n(f,x)$, получаем следующее:

$$\sigma_N(f,x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,D_n(t)\,d\mu(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,F_N(t)\,d\mu(t),$$

где $F_N = \frac{1}{N+1}\sum\limits_{n=0}^{N} D_n(t)$ — N-е *ядро Фейера*. Из свойств ядра Дирихле следует, что $F_N \in C(\mathbb{T})$ и $\int_{-\pi}^{\pi} F_N(t)\,dt = \pi$. Кроме того, ввиду равенства $D_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$, имеем

$$(N+1)F_N(t) = \sum_{n=0}^{N}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t\sin\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \sum_{n=0}^{N}\frac{\cos nt - \cos(n+1)t}{4\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{1-\cos(N+1)t}{4\sin^2\frac{t}{2}}.$$

Итак, $F_N(t) = \frac{1}{N+1}\frac{\sin^2\frac{(N+1)t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}$ $(t \neq 2\pi m)$. Поэтому $F_N \geqslant 0$ и $F_N(t) \leqslant \frac{1}{2(N+1)}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}}$ при $\delta \leqslant |t| \leqslant \pi$ для всякого $\delta \in (0,\pi)$.

Таким образом, $\left\{\frac{1}{\pi}F_N\right\}$ является аппроксимативной единицей. Поскольку $\sigma_N(f,x) = \frac{1}{\pi}f * F_N(x)$, то из теоремы 1.5 следует

Теорема 7 (Фейер). *Пусть $f \in C(\mathbb{T})$. Тогда $\sigma_N(f) \rightrightarrows f$ на $\mathbb{R}$.*

Получим один признак равномерной сходимости ряда Фурье. Нам понадобится

Лемма 3. *Пусть $\{a_n\}$ – последовательность комплекс чисел. Если $a_n \to 0$, то $\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \to 0$.*

▲ Пусть $\varepsilon > 0$. Найдется такое N, что $|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ при всех $n > N$. Положим $C = |a_1 + \ldots + a_N|$, тогда при $n > N$

$$\left|\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}\right| \leqslant \frac{|a_1+\ldots+a_N| + |a_{N+1}| + \ldots + |a_n|}{n} \leqslant \frac{C}{n} + \frac{n-N}{n}\frac{\varepsilon}{2}.$$

Второе слагаемое в правой части меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. При достаточно больших n первое слагаемое также можно сделать меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. ■

Следствие. *Пусть $f \in C(\mathbb{T})$, причем $\widehat{f}(n) = o\left(\frac{1}{|n|}\right)$ при $n \to \infty$. Тогда ряд Фурье $S(f,x)$ сходится равномерно к f на $\mathbb{R}$.*

▲ По теореме Фейера $\sigma_N(f) \rightrightarrows f$ на $\mathbb{R}$. Поэтому достаточно проверить, что $S_n(f) - \sigma_{n-1}(f) \rightrightarrows 0$. Имеем

$$|S_n(f,x) - \sigma_{n-1}(f,x)| = \left|\sum_{k=-n}^{n}\frac{|k|}{n}\widehat{f}(k)e^{ikx}\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=-n}^{n}|k||\widehat{f}(k)|.$$

По условию $|k\widehat{f}(k)| = o(1)$, а значит, по лемме 3 $\frac{1}{n}\sum_{k=-n}^{n} |k\widehat{f}(k)| = o(1)$ при $k \to \infty$. Поэтому

$$\|S_n(f) - \sigma_{n-1}(f)\|_\infty \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=-n}^{n} |k\widehat{f}(k)| \to 0. \quad \blacksquare$$

Интегралы, зависящие от параметра

Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$ измеримо, A — множество, пусть функция $f\colon E \times A \to \mathbb{C}$ такая, что $f(\cdot, \alpha) \in L_1(E)$ при каждом $\alpha \in A$. Рассмотрим функцию, определяемую равенством

$$I(\alpha) = \int_E f(x, \alpha)\, d\mu(x) \ \ (\alpha \in A).$$

Будем интересоваться вопросами, при каких условиях функция I непрерывна/дифференцируема? Для наглядности ограничимся случаем, когда A есть промежуток в $\mathbb{R}$.

Теорема 1 (о непрерывности). *Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$ измеримо, $A \subset \mathbb{R}$ — промежуток, $\alpha_0 \in A$. Пусть функция $f\colon E \times A \to \mathbb{C}$ такая, что*

1) $f(\cdot, \alpha)$ измерима на E для каждого $\alpha \in A$;

2) $f(x, \cdot)$ непрерывна в точке α_0 для п.в. $x \in E$;

3) существует интегрируемая функция $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$ такая, что для п.в. $x \in E$ и всех $\alpha \in A$ выполнено $|f(x, \alpha)| \leqslant \varphi(x)$.

Тогда функция I непрерывна в точке α_0.

▲ Из пп 1 и 3 следует, что функция $f(\cdot, \alpha)$ интегрируема на E при каждом $\alpha \in A$, а значит, функция $I(\alpha)$ корректно определена.

Возьмем произвольную последовательность $\alpha_k \in A$, $\alpha_k \to \alpha_0$. Определим $f_k(x) = f(x, \alpha_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Тогда из условий $f_k(x) \to f_0(x)$ и $|f_k(x)| \leqslant \varphi(x)$ для п.в. $x \in E$. По теореме Лебега о мажорированной сходимости получаем, что

$$I(\alpha_k) = \int_E f(x, \alpha_k)\, d\mu(x) \to \int_E f(x, \alpha_0)\, d\mu(x) = I(\alpha_0).$$

В силу произвольности $\{\alpha_k\}$ заключаем, что функция I непрерывна в точке α_0. ■

Следствие. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$ — компакт и A — промежуток. Если $f \in C(E \times A)$, то $I \in C(A)$.*

▲ Пусть $\alpha_0 \in A$. Найдем такое $\delta > 0$, что $J = A \cap [\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta]$ является отрезком. По теореме Вейерштрасса f ограничена на компакте $E \times J$. Поэтому по теореме 1 (в качестве φ можно взять константу, ограничивающую $|f|$) функция I непрерывна в точке α_0. ■

Пример. Рассмотрим интеграл $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx$, $\alpha \geqslant 0$. Подынтегральная функция очевидно непрерывна на $\mathbb{R}^2$. Тем не менее, функция I разрывна в $\alpha = 0$, т.к. $I(0) = 0$ и $I(\alpha) = 1$ при $\alpha > 0$ (достаточно внести α под дифференциал). Это показывает существенность условия (3) в теореме 1 и компактности в следствии.

Теорема 2 (о дифференцируемости). *Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$ измеримо, $A \subset \mathbb{R}$ — промежуток. Пусть функция $f\colon E \times A \to \mathbb{C}$ такая, что*

1) $f(\cdot, \alpha)$ интегрируема на E для каждого $\alpha \in A$;

2) $f(x, \cdot)$ дифференцируема на A для п.в. $x \in E$;

3) существует интегрируемая функция $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$ такая, что для п.в. $x \in E$ и всех $\alpha \in A$ выполнено $|\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)| \leqslant \varphi(x)$.

Тогда функция I дифференцируема на A и

$$I'(\alpha) = \int_E \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) d\mu(x).$$

▲ Зафиксируем $\alpha_0 \in A$ и пусть $\alpha_k \in A \setminus \{\alpha_0\}$, $\alpha_k \to \alpha_0$. Положим $g_k(x) = \frac{f(x,\alpha_k) - f(x,\alpha_0)}{\alpha_k - \alpha_0}$. Тогда $g_k(x) \to \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)$ для п.в. x. По теореме Лагранжа о среднем $g_k(x) = \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, c_k)$ для некоторой точки c_k между α_0 и α_k. Поэтому $|g_k(x)| \leqslant \varphi(x)$ для п.в. x. По теореме Лебега получаем, что

$$\frac{I(\alpha_k) - I(\alpha_0)}{\alpha_k - \alpha_0} = \int\limits_E g_k(x)\, d\mu(x) \to \int\limits_E \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha_0)\, d\mu(x).$$

В силу произвольности $\{\alpha_k\}$ существует

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\frac{I(\alpha)-I(\alpha_0)}{\alpha-\alpha_0}=\int_E\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha_0)\,d\mu(x),$$

т. е. $I'(\alpha_0)=\int\limits_E\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha_0)\,d\mu(x)$. ■

Следствие. *Пусть $E\subset\mathbb{R}^m$ — компакт, A — промежуток, f, $\frac{\partial f}{\partial\alpha}\in C(E\times A)$. Тогда $I\in C^1(A)$ и $I'(\alpha)=\int_E\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)d\mu(x)$.*

Пример. Рассмотрим интеграл $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\alpha^2e^{-\alpha x}dx$, $\alpha\geqslant 0$. Этот интеграл вычисляется явно: $I(\alpha)=\alpha$, так что $I'(0)=1$. С другой стороны, подынтегральная функция всюду дифференцируема и $\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)=(2\alpha-x\alpha^2)e^{-\alpha x}$. Но поскольку $\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,0)=0$, равенство в теореме 2 при $\alpha=0$ не выполнено. Это показывает существенность условия (3) в теореме 2 и компактности в следствии.

Задача. Пусть $f,\frac{\partial f}{\partial\alpha}\in C([a,b]\times[c,d])$, а функции φ, $\psi:[c,d]\to[a,b]$ дифференцируемы на $[c,d]$, и $a\leqslant\varphi(\alpha)\leqslant\psi(\alpha)\leqslant b$ для всех $\alpha\in[c,d]$. Докажите, что $J(\alpha)=\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)}f(t,\alpha)dt$ дифференцируема на $[c,d]$. Найдите $J'(\alpha)$.

Вместе с исследованием дифференцируемости естественно поставить вопрос об интегрируемости по параметру. Поскольку он в большой общности решен в теореме Фубини, здесь нет необходимости его касаться.

Иногда приходится иметь дело с условно сходящимися интегралами с параметром. В этом случае теоремы 1 и 2 неприменимы. При перенесении результатов нам потребуется новое понятие — равномерная сходимость несобственного интеграла. Имеет смысл рассмотреть вопрос с более общих позиций, чему и посвящен следующий раздел.

Равномерная сходимость семейства функций

Определение. Пусть X — произвольное множество, Y — метрическое пространство, y_0 — предельная точка Y. Пусть заданы функции $f\colon X\times Y\to\mathbb{C}$, $g\colon X\to\mathbb{C}$.

Говорят, что функция f *равномерно на X сходится к g при $y\to y_0$*, если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall y\in\mathring{B}_\delta(y_0)\ \forall x\in X\ \ (|f(x,y)-g(x)|<\varepsilon)$$

или, что эквивалентно,

$$\sup_{x\in X}|f(x,y)-g(x)|\xrightarrow{y\to y_0}0.$$

Пишут $f(x,y)\underset{X}{\rightrightarrows}g(x)$ при $y\to y_0$ или $\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=g(x)$ равномерно по $x\in X$.

Отметим, что на f полезно смотреть как на семейство функций $\{f(\cdot,y)\}_{y\in Y}$, индексированных параметром y.

Замечание. Множество $Y=\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ является метрическим пространством с метрикой $\rho(m,n)=\left|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right|$ ($\frac{1}{\infty}=0$). Положим $f_n(x):=f(x,n)$, $y_0=\infty$. Тогда понятие $f(x,n)\underset{X}{\rightrightarrows}g(x)$ при $n\to\infty$ в смысле данного выше определения в точности совпадает с понятием равномерной сходимости последовательности $\{f_n\}$ к g на множестве X. С другой стороны, само определение равномерной сходимости семейства функций можно сформулировать на языке последовательностей.

Задача. Покажите: $f(x,y)\underset{X}{\rightrightarrows}g(x)$ при $y\to y_0\Leftrightarrow\forall\{y_n\}\subset Y\backslash\{y_0\}$ $(y_n\to y_0\Rightarrow f(x,y_n)\underset{X}{\rightrightarrows}g(x))$.

Теорема 3 (критерий Коши равномерной сходимости). *Пусть Y — метрическое пространство, y_0 — предельная точка Y. Для того, чтобы функция $f\colon X\times Y\to\mathbb{C}$ при $y\to y_0$ равномерно на X сходилась к некоторой функции, необходимо и достаточно выполнения условия Коши*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall y',y''\in\mathring{B}_\delta(y_0)\ \forall x\in X\quad(|f(x,y')-f(x,y'')|<\varepsilon).\tag{1}$$

▲ (⇒) Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Если $f(x,y)\underset{X}{\rightrightarrows} g(x)$ при $y \to y_0$, то существует такое $\delta > 0$, что для всех $y \in \overset{\circ}{B}_\delta(y_0)$ и $x \in X$ выполнено $|f(x,y) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда для $y', y'' \in \overset{\circ}{B}_\delta(y_0)$ и $x \in X$ имеем

$$|f(x,y') - f(x,y'')| \leqslant |f(x,y') - g(x)| + |g(x) - f(x,y'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(⇐) Если f удовлетворяет условию (1), то в каждой точке $x \in X$ для функции $f(x,\cdot)$ выполняется условие Коши существования предела при $y \to y_0$. Положим $g(x) := \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, $x \in X$. Перейдем в неравенстве (1) к пределу при $y'' \to y_0$ (при фиксированном y'). Тогда заключаем, что неравенство $|f(x,y') - g(x)| \leqslant \varepsilon$ выполняется при любых $y' \in \overset{\circ}{B}_\delta(y_0)$ и $x \in X$. Это означает, что $f(x,y)\underset{X}{\rightrightarrows} g(x)$ при $y \to y_0$. ■

Следующая теорема о перестановке пределов является ключевой в данном разделе.

Теорема 4. *Пусть X, Y — метрические пространства, x_0, y_0 — предельные точки X и Y соответственно. Пусть функция $f\colon (X \setminus \{x_0\}) \times (Y \setminus \{y_0\}) \to \mathbb{C}$ такова, что*

1) $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = \varphi(x)$ существует равномерно по $x \in X \setminus \{x_0\}$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = \psi(y)$ существует для каждого $y \in Y \setminus \{y_0\}$.

Тогда пределы $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ и $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ существуют и равны.

▲ Пусть $\varepsilon > 0$. По п. 1 имеем

$$\exists \delta > 0\, \forall y \in \overset{\circ}{B}_\delta(y_0)\, \forall x \in X \setminus \{x_0\}\ (|f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon). \tag{2}$$

Фиксируем $y \in \overset{\circ}{B}_\delta(y_0)$. По п. 2 найдется такое $\sigma > 0$, что $|f(x,y) - \psi(y)| < \varepsilon$ при всех $x \in \overset{\circ}{B}_\sigma(x_0)$.

Пусть x, $x' \in \overset{\circ}{B}_\sigma(x_0)$. Тогда по неравенству треугольника

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| \leqslant |\varphi(x) - f(x,y)| + |f(x,y) - \psi(y)| + |\psi(y) - f(x',y)| + |f(x',y) - \varphi(x')|,$$

откуда $|\varphi(x) - \varphi(x')| < 4\varepsilon$. Таким образом, в точке x_0 для функции φ выполняется условие Коши, а значит, существует $a = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$. Если в неравенстве (2) перейти к пределу при $x \to x_0$ (при фиксированном y), то получим $|\psi(y) - a| \leqslant \varepsilon$ для всех $y \in \overset{\circ}{B}_\delta(y_0)$. Следовательно, $\lim\limits_{y\to y_0} \psi(y) = a$. ■

Замечание. Из доказательства теоремы 4 следует, что оба повторных предела равны двойному $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$. Так что теорема дает достаточное условие существования двойного предела.

Следствие 1. *Пусть X и Y — метрические пространства, y_0 — предельная точка Y. Пусть функция $F\colon X \times (Y \setminus \{y_0\}) \to \mathbb{C}$ такова, что*

1) функция $F(\cdot,y)$ непрерывна в точке $x_0 \in X$ при каждом $y \neq y_0$;

2) $F(x,y)\underset{X}{\rightrightarrows}\varphi(x)$ при $y \to y_0$.

Тогда функция φ непрерывна в точке x_0.

▲ Если x_0 — изолированная точка X, то φ непрерывна в точке x_0 по определению. Если x_0 — предельная точка X, то $\lim\limits_{x\to x_0} F(x,y) = F(x_0,y)$ для каждого $y \in Y \setminus \{y_0\}$. По теореме 4 имеем

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} F(x,y) = \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} F(x,y) = \lim_{y\to y_0} F(x_0,y) = \varphi(x_0). \ ■$$

Следствие 2. *Пусть A — промежуток, Y — метрическое пространство и y_0 — предельная точка Y. Пусть функция $H\colon A \times (Y \setminus \{y_0\}) \to \mathbb{C}$ такова, что*

1) функция $H(\cdot,y)$ дифференцируема на A при каждом $y \neq y_0$;

2) $\frac{\partial H}{\partial x}(x,y)\underset{A}{\rightrightarrows} v(x)$ при $y \to y_0$;

3) $H(x,y) \to u(x)$ при $y \to y_0$ для всех $x \in A$.

Тогда функция u дифференцируема на A, причем $u' = v$.

▲ Зафиксируем $x_0 \in A$ и рассмотрим функцию

$$W(x,y) = \frac{H(x,y) - H(x_0,y)}{x - x_0},\ x \neq x_0.$$

По п. 3 существует $\lim\limits_{y\to y_0} W(x,y) = \frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}$. Покажем, что этот предел равномерен по x. Пусть $y_1,\ y_2 \in Y \setminus \{y_0\}$. По теореме Лагранжа о среднем, примененной к функции $H(\cdot, y_2) - H(\cdot, y_1)$, найдется θ между x и x_0, что

$$W(x,y_2) - W(x,y_1) = \frac{[H(x,y_2) - H(x,y_1)] - [H(x_0,y_2) - H(x_0,y_1)]}{x - x_0} = \tfrac{\partial H}{\partial x}(\theta,y_2) - \tfrac{\partial H}{\partial x}(\theta,y_1).$$

По п. 2 функция $\frac{\partial H}{\partial x}$ удовлетворяет условию Коши равномерной сходимости. Поэтому

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y_1, y_2 \in \mathring{B}_\delta(y_0)\ \forall x \in A\ (|W(x,y_2) - W(x,y_1)| < \varepsilon).$$

По критерию Коши $\lim\limits_{y\to y_0} W(x,y)$ равномерен по x. По п. 1 при каждом $y \neq y_0$ существует $\lim\limits_{x\to x_0} W(x,y) = \frac{\partial H}{\partial x}(x_0,y)$. Следовательно, по теореме 4 существует

$$\lim_{x\to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} W(x,y) = \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} W(x,y) = \lim_{y\to y_0} \tfrac{\partial H}{\partial x}(x_0,y),$$

т.е. $u'(x_0) = v(x_0)$, что завершает доказательство. ■

Несобственные интегралы с параметром

Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, A — множество и задана функция $f\colon [a,b) \times A \to \mathbb{C}$, непрерывная при любом $\alpha \in A$. Пусть при любом $\alpha \in A$ существует конечный (комплекснозначный) предел $\lim\limits_{y\to b-0} \int_a^y f(x,\alpha)\,dx =: \int_a^b f(x,\alpha)\,dx$ (интеграл сходится). Под *несобственным интегралом с параметром* будем понимать функцию, определяемую равенством

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)dx\ \ (\alpha \in A).$$

Аналогично определяется несобственный интеграл с особой точкой в левом конце промежутка интегрирования.

Определение. Говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x,\alpha)dx$ *сходится равномерно* на A (или по $\alpha \in A$), если он сходится при каждом $\alpha \in A$ и

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists b' \in [a,b)\ \forall y \in (b',b)\ \forall \alpha \in A\ \left(\left|\int_a^y f(x,\alpha)dx - \int_a^b f(x,\alpha)dx\right| < \varepsilon\right)$$

или, что эквивалентно,

$$\sup_{\alpha\in A}\left|\int_y^b f(x,\alpha)dx\right| \xrightarrow{y\to b-0} 0.$$

Замечание. Положим $I(\alpha,y) = \int_a^y f(x,\alpha)dx,\ I(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)dx$. Тогда равномерная сходимость $I(\alpha)$ означает, что $I(\alpha,y) \underset{A}{\rightrightarrows} I(\alpha)$ при $y \to b-0$.

Свойства несобственных интегралов с параметром

С1 (непрерывность). *Пусть функция f непрерывна на $[a,b) \times [c,d]$ и $\int_a^b f(x,\alpha)dx$ равномерно сходится на $[c,d]$. Тогда функция $I(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)dx$ непрерывна на $[c,d]$.*

▲ Положим $I(\alpha,y) = \int_a^y f(x,\alpha)\,dx$. По следствию из теоремы 1 функция $I(\cdot,y)$ непрерывна на $[c,d]$ при каждом $y \in [a,b)$. Равномерная сходимость интеграла означает, что $I(\alpha,y) \underset{[c,d]}{\rightrightarrows} I(\alpha)$ при $y \to b-0$. Тогда по следствию 1 из теоремы 4 заключаем, что функция I также непрерывна на $[c,d]$. ■

C2 (дифференцируемость). *Пусть* $f, \frac{\partial f}{\partial \alpha}$ *непрерывны на* $[a,b)\times[c,d]$, $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)dx$ *равномерно сходится на* $[c,d]$ *и* $\int_a^b f(x,\alpha)dx$ *сходится при любом* $\alpha\in[c,d]$. *Тогда функция* $I(\alpha)$ *непрерывно дифференцируема на* $[c,d]$ *и*

$$I'(\alpha)=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)dx.$$

▲ Положим $I(\alpha,y)=\int_a^y f(x,\alpha)\,dx$. По следствию из теоремы 2 функция $I(\cdot,y)$ дифференцируема на $[c,d]$ при каждом $y\in[a,b)$ и $\frac{\partial I}{\partial\alpha}(\alpha,y)=\int_a^y\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)dx$. По условию $\frac{\partial I}{\partial\alpha}\underset{[c,d]}{\rightrightarrows}\int_a^b\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)dx$ при $y\to b-0$. Тогда по следствию 2 из теоремы 4 получаем, что функция I дифференцируема на $[c,d]$, причем $I'(\alpha)=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)dx$. Непрерывность I' на $[c,d]$ следует по предыдущему утверждению. ■

C3 (интегрируемость). *Пусть функция* f *непрерывна на* $[a,b)\times[c,d]$ *и* $\int_a^b f(x,\alpha)dx$ *равномерно сходится на* $[c,d]$. *Тогда*

$$\int_c^d I(\alpha)d\alpha=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,\alpha)d\alpha\right)dx.$$

▲ Отметим, что интеграл в левой части существует, т.к. I непрерывна на $[c,d]$. Положим $I(\alpha,y)=\int_a^y f(x,\alpha)\,dx$. По условию $I(\alpha,y)\underset{[c,d]}{\rightrightarrows}I(\alpha)$ при $y\to b-0$. Тогда $\int_c^d I(\alpha,y)d\alpha\to\int_c^d I(\alpha)d\alpha$ при $y\to b-0$. Это следует из оценки

$$\left|\int_c^d I(\alpha,y)d\alpha-\int_c^d I(\alpha)d\alpha\right|\leqslant\int_c^d|I(\alpha,y)-I(\alpha)|d\alpha\leqslant(d-c)\sup_{\alpha\in[c,d]}|I(\alpha,y)-I(\alpha)|.$$

Функция f непрерывна на компакте $[a,y]\times[c,d]$, а значит, интегрируема на этом множестве. Поэтому по теореме Фубини $\int_c^d I(\alpha,y)d\alpha=\int_a^y\left(\int_c^d f(x,\alpha)d\alpha\right)dx$. Осталось в этом равенстве перейти к пределу при $y\to b-0$. ■

Признаки равномерной сходимости несобственных интегралов с параметром

Пусть $-\infty<a<b\leqslant+\infty$, A — множество и задана функция $f\colon[a,b)\times A\to\mathbb{C}$, непрерывная при любом $\alpha\in A$.

Теорема 5 (критерий Коши). *Несобственный интеграл* $\int_a^b f(x,\alpha)\,dx$ *равномерно сходится на* A *тогда и только тогда, когда*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists b_\varepsilon\in[a,b)\ \forall\xi,\eta\in(b_\varepsilon,b)\ \forall\alpha\in A\ \left(\left|\int_\xi^\eta f(x,\alpha)\,dx\right|<\varepsilon\right).\tag{3}$$

▲ ($\Rightarrow$) Пусть $\varepsilon>0$. Так как интеграл $\int_a^b f(x,\alpha)dx$ сходится равномерно на A, то найдется такое $b_\varepsilon\in[a,b)$, что

$$\forall y\in(b_\varepsilon,b)\ \forall\alpha\in A\ \left(\left|\int_y^b f(x,\alpha)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Следовательно, для любого отрезка $[\xi,\eta]\subset(b_\varepsilon,b)$ имеем

$$\left|\int_\xi^\eta f(x,\alpha)\,dx\right|\leqslant\left|\int_\xi^b f(x,\alpha)\,dx\right|+\left|\int_\eta^b f(x,\alpha)\,dx\right|<\varepsilon.$$

($\Leftarrow$) Пусть для интеграла $\int_a^b f(x,\alpha)\,dx$ выполняется условие Коши (3). Тогда при любом фиксированном $\alpha\in A$ этот интеграл сходится по критерию Коши для интегралов без параметра. Перейдем в (3) к пределу при $\eta\to b-0$. Тогда

$$\forall\varepsilon>0\ \exists b_\varepsilon\in[a,b)\ \forall\xi\in(b_\varepsilon,b)\ \forall\alpha\in A\ \left(\left|\int_\xi^b f(x,\alpha)\,dx\right|\leqslant\varepsilon\right).$$

Это означает, что интеграл сходится равномерно на A. ■

Замечание. Данная теорема — результат применения критерия Коши равномерной сходимости (теорема 3) к функции $I(\alpha, y) = \int_a^y f(x,\alpha)\,dx$ на множестве A при $y \to b-0$.

Теорема 6 (признак Вейерштрасса). *Пусть на множестве $[a,b)\times A$ заданы непрерывные функции f и φ, удовлетворящие условиям:*

1) $|f(x,\alpha)| \leqslant \varphi(x)$ для всех $x \in [a,b)$ и всех $\alpha \in A$;

2) $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ сходится.

Тогда $\int_a^b f(x,\alpha)\,dx$ равномерно сходится на A.

▲ Утверждение следует из неравенства $\sup\limits_{\alpha\in A}\left|\int_\xi^\eta f(x,\alpha)\,dx\right| \leqslant \int_\xi^\eta \varphi(x)\,dx$ и критерия Коши. ■

Установим признак равномерной сходимости несобственных интегралов от произведения функций. Как и в случае интегралов без параметра, доказательство опирается на лемму Абеля, формулировку которой напоминаем.

Лемма (Абель). *Пусть функции f, g непрерывны на $[a,b]$, причем g монотонна. Если $\left|\int_a^x f(t)dt\right| \leqslant M$ для всех $x\in[a,b]$, то справедлива оценка*

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leqslant 2M(|g(a)|+|g(b)|).$$

Теорема 7 (признак Дирихле). *Пусть на множестве $[a,b)\times A$ заданы непрерывные функции f и g, удовлетворящие условиям:*

1) функция $F(x,\alpha) = \int_a^x f(t,\alpha)\,dt$ ограничена на $[a,b)\times A$;

2) функция $g(\cdot,\alpha)$ монотонна на $[a,b)$ при любом $\alpha\in A$;

3) $g(x,\alpha) \underset{A}{\rightrightarrows} 0$ при $x\to b-0$.

Тогда несобственный интеграл $J(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)g(x,\alpha)dx$ равномерно сходится на A.

▲ Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем $C>0$ так, что $|F| \leqslant C$ на $[a,b)\times A$. Поскольку $g(x,\alpha) \underset{A}{\rightrightarrows} 0$ при $x\to b-0$, то существует $b_\varepsilon \in [a,b)$, такое что $|g(x,\alpha)| < \frac{\varepsilon}{8C}$ для всех $x\in(b_\varepsilon,b)$ и $\alpha\in A$. Зафиксируем $\alpha\in A$ и пусть $[\xi,\eta]\subset(b_\varepsilon,b)$. Имеем $\left|\int_\xi^x f(t,\alpha)dt\right| = |F(x,\alpha)-F(\xi,\alpha)| \leqslant 2C$ для всех $x\in[\xi,\eta]$. Тогда по лемме Абеля

$$\left|\int_\xi^\eta f(x,\alpha)g(x,\alpha)dx\right| \leqslant 4C(|g(\xi,\alpha)|+|g(\eta,\alpha)|) < 4C\frac{\varepsilon}{4C} = \varepsilon.$$

По критерию Коши интеграл $\int_a^b f(x,\alpha)g(x,\alpha)dx$ сходится равномерно на A. ■

Пример. Вычислим *интеграл Дирихле* $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$.

Рассмотрим интеграл $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,e^{-\alpha x}\,dx$ ($\alpha\geqslant 0$). Имеем $\left|\int\limits_0^x \sin t dt\right| \leqslant 2$, $\left|\frac{e^{-\alpha x}}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x}\to 0$ при $x\to+\infty$. Следовательно, интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно на $[0,+\infty)$ по признаку Дирихле. Поскольку подынтегральная функция непрерывна (считаем, что при $x=0$ она равна единице), то функция I непрерывна на луче $[0,+\infty)$.

Покажем, что I можно дифференцировать по параметру. Пусть $0<c<d<\infty$. Для любого $\alpha\in[c,d]$ выполнено $\left|\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)\right| = |e^{-\alpha x}\sin x| \leqslant e^{-cx}$ и функция $\varphi(x) = e^{-cx}$ интегрируема на $[0,+\infty)$. Аналогично устанавливается интегрируемость функции $f(x,\alpha) = \frac{\sin x}{x}\,e^{-\alpha x}$ на $[0,+\infty)$ для $\alpha\in[c,d]$. Тогда по теореме 2 имеем

$$I'(\alpha) = -\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x\,dx = e^{-\alpha x}\cos x\Big|_0^{+\infty} + \alpha\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos x\,dx =$$
$$= -1 + \alpha\left(e^{-\alpha x}\sin x\Big|_0^{+\infty} + \alpha\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x\,dx\right) = -1 - \alpha^2\,I'(\alpha).$$

Откуда $I'(\alpha) = -\frac{1}{1+\alpha^2}$ на $[c,d]$. В силу произвольности выбора отрезка $[c,d]$ заключаем, что равенство верно и на их объединении, т. е. на луче $(0,+\infty)$. Следовательно, $I(\alpha) = -\operatorname{arctg}\alpha + C$, $C \in \mathbb{R}$, при $\alpha > 0$.

Из оценки $|I(\alpha)| \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}$ получаем, что $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I(\alpha) = 0$. Следовательно, $C = \frac{\pi}{2}$ и $I(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\alpha$ на $(0,+\infty)$. Поскольку $I(\alpha)$ непрерывна в точке $\alpha = 0$, то $I(0) = \frac{\pi}{2}$. Таким образом, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

Приложение: доказательство леммы Абеля

Пусть $T_n = \{x_i\}_{i=0}^n$ — разбиение $[a,b]$ на n равных частей. Положим $C = \sup\limits_{[a,b]}|f|$, $\Delta_k g = g(x_{k-1}) - g(x_k)$ и

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n g(\xi_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx, \quad \xi_k \in [x_{k-1}, x_k].$$

В силу монотонности g все $\Delta_k g$ одного знака и на k-м отрезке разбиения $|g(x) - g(\xi_k)| \leqslant |\Delta_k g|$. Поэтому

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx - \sigma_n\right| = \left|\sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)(g(x) - g(\xi_k))dx\right| \leqslant \sum_{k=1}^n |\Delta_k g|\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f|dx \leqslant C\frac{b-a}{n}\left|\sum_{k=1}^n \Delta_k g\right| =: \alpha_n.$$

Так как $\sum\limits_{k=1}^n \Delta_k g = g(b) - g(a)$, то $\alpha_n \to 0$, а значит, $\sigma_n \to \int_a^b fg dx$.

Применим неравентсво Абеля для последовательностей, положив $a_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f$ и $b_k = g(\xi_k)$. Тогда, учитывая, что $\left|\sum\limits_{i=1}^k a_i\right| = \left|\int\limits_a^{x_k} f dx\right| \leqslant M$, имеем $|\sigma_n| \leqslant 2M(|g(\xi_1)| + |g(\xi_n)|)$. Свобода при выборе ξ_k, позволяет считать $\xi_1 = a$, $\xi_n = b$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в оценке для σ_n, получаем требуемое неравенство.

Замечание. В лемме Абеля функция f комплекснозначна, а функция g вещественнозначна, т.к. монотонна.

Интегралы Эйлера

Определение. Функция

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

называется *гамма-функцией Эйлера.*

Для установления области определения, исследуем этот интеграл на сходимость.

Поскольку $t^{x-1}e^{-t} \sim t^{x-1}$ при $t \to +0$, то интеграл $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt$ сходится $\Leftrightarrow x > 0$.

Поскольку $t^{x-1}e^{-t} = (t^{x-1}e^{-t/2}) \cdot e^{-t/2} = o(e^{-t/2})$ при $t \to +\infty$, то интеграл $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ сходится при любом x.

Следовательно, функция Γ определена при любом $x > 0$.

Лемма 1. $\Gamma(x+1) = x\cdot\Gamma(x)$, $x > 0$. *В частности,* $\Gamma(n+1) = n!$ при $n \in \mathbb{N}$.

▲ По формуле интегрирования по частям

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,dt = -t^x e^{-t}\Big|_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt = x\cdot\Gamma(x).$$

Последовательно применяя полученную формулу, имеем $\Gamma(n+1) = n(n-1)\cdot\ldots\cdot1\cdot\Gamma(1)$. Прямое вычисление дает $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$. ■

Лемма 2. *Функция* $\Gamma \in C^\infty(0,+\infty)$, *причем*

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ln^k t\,dt.$$

▲ Надо обеспечить шаг индукции. Имеем $\frac{\partial}{\partial x}(t^{x-1}e^{-t}\ln^k t) = t^{x-1}e^{-t}\ln^{k+1} t$. Пусть $0 < c < d$. На отрезке $[c,d]$ справедливы оценки $|t^{x-1}e^{-t}\ln^{k+1} t| \leqslant t^{c-1}e^{-t}|\ln t|^{k+1}$ при всех $t \in (0,1)$ и

$|t^{x-1}e^{-t}\ln^{k+1}t| \leqslant t^{d-1}e^{-t}\ln^{k+1}t$ при всех $t \in [1,+\infty)$, причем функции в правых частях итегрируемы на указанных промежутках. Тогда $\Gamma^{(k+1)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ln^{k+1}t\,dt$ на $[c,d]$ по теореме 2. Так как $[c,d]$ произвольный, то формула верна при всех $x \in (0,+\infty)$. ■

Определение. Функция

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

называется *бета-функцией Эйлера.*

Это несобственный интеграл с особенностями в точке $t=0$ (при $x<1$) и в точке $t=1$ (при $y<1$). Для подынтегральной функции $f(t) = t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ верно $f(t) \sim t^{x-1}$ при $t \to +0$, а значит, в окрестности нуля f интегрируема при $x>0$, и $f(t) \sim (1-t)^{y-1}$ при $t \to 1-0$, а значит, в окрестности точки 1 f интегрируема при $y>0$.

Следовательно, функция B определена при любых $x>0$, $y>0$.

Теорема 8. *Справедлива формула* $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ *при* $x>0$, $y>0$.

▲ Запишем $\Gamma(x)\Gamma(y)$ в виде двойного интеграла

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\left(\int_0^\infty s^{y-1}e^{-s}\,ds\right)dt = \iint_{(0,+\infty)^2} t^{x-1}e^{-t}s^{y-1}e^{-s}\,dsdt.$$

Сделаем замену $s = u(1-v)$ и $t = uv$, диффеоморфно отображающую $E = (0,\infty)\times(0,1)$ на $(0,+\infty)^2$. Учитывая, что якобиан замены $J = u$, получаем

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \iint_E (uv)^{x-1}e^{-uv}u^{y-1}(1-v)^{y-1}e^{-u(1-v)}u\,du\,dv = \iint_E u^{x+y-1}e^{-u}(1-v)^{y-1}v^{x-1}dudv =$$
$$= \int_0^{+\infty} u^{x+y-1}e^{-u}\left(\int_0^1 v^{x-1}(1-v)^{y-1}\,dv\right)du = B(x,y)\Gamma(x+y).\ ■$$

Лемма 3 (формула удвоения Лежандра). $\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\Gamma(2x)$, $x>0$.

▲ Учитывая, что $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ формулу удвоения можно переписать следующим образом:

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(x)}{\Gamma(2x)} = \frac{1}{2^{2x-1}}\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(x)}{\Gamma(x+1/2)} \Leftrightarrow B(x,x) = \frac{1}{2^{2x-1}}B\Big(\frac{1}{2},x\Big).$$

Поскольку $\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{x-1}dt = \int_{1/2}^1 t^{x-1}(1-t)^{x-1}dt$, то $B(x,x) = 2\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{1-x}dt$. Сделав в последнем интеграле замену $t = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{s}}{2}$, получим

$$\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{1-x}dt = \frac{1}{2^{2x}}\int_0^1 (1-\sqrt{s})^{x-1}(1+\sqrt{s})^{x-1}\frac{1}{\sqrt{s}}ds = \frac{1}{2^{2x}}\int_0^1 s^{-1/2}(1-s)^{x-1}ds.$$

Умножая на 2 обе части, получим $B(x,x) = \frac{B(\frac{1}{2},x)}{2^{2x-1}}$. ■

Теорема 9 (формула дополнения). $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}$, $x \in (0,1)$.

▲ Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin\pi x$ $(x \in (0,1))$. Отметим, что $\varphi(x)>0$ и $\varphi(1-x) = \varphi(x)$ на $(0,1)$. Поскольку $\varphi(x) = \frac{\sin\pi x}{\pi x}\Gamma(x+1)\Gamma(1-x)$, то $\lim\limits_{x\to+0}\varphi(x) = 1$. Положим $\varphi(0) = 1 = \varphi(1)$. Имеем

$$\varphi'(0) = \lim_{x\to+0}\frac{\varphi(x)-1}{x} = \lim_{x\to+0}\frac{(1+o(x)))\Gamma(x+1)\Gamma(1-x)-1}{x} =$$
$$= \lim_{x\to+0}\left(\frac{\Gamma(x+1)\Gamma(1-x)-1}{x} + o(1)\Gamma(x+1)\Gamma(1-x)\right) = (\Gamma(x+1)\Gamma(1-x))'\Big|_{x=0} =$$
$$= \Gamma'(1)\Gamma(1) - \Gamma(1)\Gamma'(1) = 0.$$

Следовательно, $(\ln\varphi)'(0) = \frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)} = 0$. Ввиду равенства $\varphi(x) = \varphi(1-x)$ также $\varphi'(1) = 0$, $(\ln\varphi)'(1) = 0$.

По формуле удвоения Лежандра

$$\varphi\Big(\frac{x}{2}\Big)\varphi\Big(\frac{1}{2}+\frac{x}{2}\Big) = \frac{1}{\pi}\Gamma\Big(\frac{x}{2}\Big)\Gamma\Big(1-\frac{x}{2}\Big)\sin\frac{\pi x}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\Gamma\Big(\frac{1}{2}+\frac{x}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{1}{2}-\frac{x}{2}\Big)\cos\frac{\pi x}{2} =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\pi 2^{x-1}}\Gamma(x)\frac{\sqrt{\pi}}{\pi 2^{-x}}\Gamma(1-x)\frac{1}{2}\sin\pi x = \varphi(x).$$

Определим на $[0,1]$ функцию $g = (\ln\varphi)'$. Логарифмируя равенство $\varphi\big(\frac{x}{2}\big)\varphi\big(\frac{1}{2}+\frac{x}{2}\big) = \varphi(x)$ и беря производную, получаем

$$\frac{1}{2}g\Big(\frac{x}{2}\Big) + \frac{1}{2}g\Big(\frac{1}{2}+\frac{x}{2}\Big) = g(x). \tag{4}$$

Докажем, что $g \equiv 0$. Функция g по теореме Вейерштрасса достигает своих точных граней. Проверим, что $g(0) = \max g$. Если $\max g = g(x_0)$ для $x_0 \in (0,1)$, то из (4) по индукции $g(x_0) = g(\frac{x_0}{2^n})$. Тогда $g(0) = \lim\limits_{n\to\infty} g(\frac{x_0}{2^n}) = g(x_0)$. Аналогично устанавливается, что $g(0) = \min g$. Следовательно, $g \equiv g(0) = 0$. Тогда $\ln\varphi = C$ на $[0,1]$. Учитывая условие $\varphi(0) = 1$, получим $C = 0$, а значит, $\varphi \equiv 1$, что и требовалось. ■

Задача. Докажите, что

а) $\Gamma(x+a) \sim x^a\Gamma(x)$ при $x \to +\infty$; б) $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)}$.

Преобразование Фурье

Определение. Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$. *Преобразованием Фурье* функции f называется функция $\widehat{f}$, определяемая равенством

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-iyx}\, d\mu(x) \ \ (y \in \mathbb{R}).$$

Замечание. Существование интеграла в формуле $\widehat{f}$ следует из равенства $|f(x)\, e^{-iyx}| = |f(x)|$ и интегрируемости f.

Пример. Найдем преобразование Фурье индикатора $I_{[-1,1]}$.

По формуле Эйлера $e^{-iyx} = \cos yx - i \sin yx$. Тогда ввиду нечетности функции синус имеем

$$\widehat{I_{[-1,1]}}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-iyx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} \cos yx\, dx.$$

Следовательно, $\widehat{I_{[-1,1]}}(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin y}{y}$ при $y \neq 0$ и $\widehat{I_{[-1,1]}}(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

Отметим, что поскольку несобственный интеграл от функции $y \mapsto \frac{\sin y}{y}$ по $\mathbb{R}$ не сходится абсолютно, то $\widehat{I_{[-1,1]}} \notin L_1(\mathbb{R})$.

Свойства преобразования Фурье. Пусть $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Тогда

1) $\widehat{\alpha f + \beta g} = \alpha \widehat{f} + \beta \widehat{g}$;

2) функция $\widehat{f}$ ограничена;

3) если $f_h = f(\cdot + h)$ и $\delta_t f = f(t\cdot)$ $(t > 0)$, то $\widehat{f_h}(y) = e^{ihy} \widehat{f}(y)$ и $\widehat{\delta_t f}(y) = \frac{1}{t} \widehat{f}\left(\frac{y}{t}\right)$ для всех $y \in \mathbb{R}$;

4) функция $\widehat{f}$ непрерывна и $\widehat{f}(y) \to 0$ при $y \to \pm\infty$.

▲ Линейность следует из линейности интеграла Лебега. Ограниченность следует из оценки

$$|\widehat{f}(y)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x)\, e^{-iyx}| d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} |f| d\mu = \|f\|_1, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Соответствующими заменами в интеграле устанавливается п. 3.

Докажем п. 4. Для любых $y, h \in \mathbb{R}$ имеет место оценка:

$$\left|\widehat{f}(y+h) - \widehat{f}(y)\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x)\, (e^{-ixh} - 1)\, e^{-iyx}\, d\mu(x) \right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, |e^{-ihx} - 1|\, d\mu(x).$$

Так как $|f(x)|\, |e^{-ihx} - 1| \leqslant 2|f(x)|$ и $f \in L_1(\mathbb{R})$, то последний интеграл стремится к нулю при $h \to 0$ по теореме 4.1 о непрерывности интеграла с параметром. Это доказывает непрерывность $\widehat{f}$ (и даже равномерную непрерывность, т.к. оценка интеграла равномерна по y). Второе утверждение вытекает из леммы Римана об осцилляции. ■

Замечание. Под преобразованием Фурье также понимают отображение $F\colon L_1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$, $F[f] = \hat{f}$, где $C_0(\mathbb{R})$ — пространство непрерывных на $\mathbb{R}$ функций, стремящихся к нулю при $y \to \pm\infty$, с sup-нормой.

5) $\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi}(\widehat{f} \cdot \widehat{g})$.

▲ Для фиксированного $y \in \mathbb{R}$ функция $(x, t) \mapsto f(x - t)\, g(t)\, e^{-iyx}$ интегрируема на $\mathbb{R}^2$, т.к. произведение первых двух сомножителей интегрируемо (см. свертка), а экспонента ограничена. Поэтому по теореме Фубини

$$\sqrt{2\pi}\, (\widehat{f * g})(y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x - t)\, g(t)\, d\mu(t) \right) e^{-iyx}\, d\mu(x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x - t)\, e^{-i(x-t)y}\, d\mu(x) \right) g(t)\, e^{-ity}\, d\mu(t) = 2\pi \widehat{f}(y) \widehat{g}(y),$$

что завершает доказательство. ■

Задача. Пусть $f_k, f \in L_1(\mathbb{R})$ и $f_k \to f$ по норме $L_1(\mathbb{R})$. Докажите, что $\widehat{f_k} \rightrightarrows \widehat{f}$ на $\mathbb{R}$.

Следующие свойства ввиду их особой важности сформулируем в виде теорем.

Теорема 1 (преобразование Фурье производной). *Пусть функция $f \in C^1(\mathbb{R})$ и $f,\ f' \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда* $\widehat{f'}(y) = iy \cdot \widehat{f}(y)$ *для всех $y \in \mathbb{R}$.*

▲ Убедимся сначала, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Действительно, по формуле Ньютона–Лейбница $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt$. Так как по условию функция f' интегрируема, то правая часть этого равенства имеет конечные пределы при $x \to \pm\infty$. Следовательно, конечные пределы существуют и у функции f. Эти пределы обязаны равняться нулю, т.к. в противном случае $|f| \geqslant c > 0$ в некоторой окрестности $+\infty$ или $-\infty$, что противоречит интегрируемости f. Теперь в равенстве

$$\sqrt{2\pi}\ \widehat{f'}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\, e^{-iyx}\, dx = f(x)\, e^{-iyx}\Big|_{x\to-\infty}^{x\to+\infty} - (-iy)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-iyx}\, dx$$

внеинтегральный член равен нулю, что завершает доказательство. ■

Замечание. Теорема 1 остается справедливой, если $f \in L_1(\mathbb{R})$ и $f(x) = \int_{-\infty}^x \varphi d\mu$ для некоторой $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$.

Следствие. *Пусть $f \in C^n(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$ и $f,\ f', \ldots, f^{(n)} \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда $\widehat{f^{(n)}}(y) = (iy)^n \widehat{f}(y)$ и $\widehat{f}(y) = o\left(\frac{1}{y^n}\right)$ при $y \to \pm\infty$.*

Теорема 2 (производная преобразования Фурье). *Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$ и $(x \mapsto x\, f(x)) \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R})$, причем $\frac{d}{dy}\widehat{f} = F[-ixf(x)]$.*

▲ При любом $y \in \mathbb{R}$ выполнено $|-ix\, f(x)\, e^{-iyx}| = |x\, f(x)|$. Поэтому по теореме 4.2 о дифференцировании интеграла по параметру

$$\sqrt{2\pi}\ \frac{d}{dy}\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial y}(f(x)\, e^{-iyx})\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} -ix\, f(x)\, e^{-iyx}\, d\mu(x),$$

что завершает доказательство. ■

Следствие. *Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$ и $(x \mapsto x^n\, f(x)) \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда $\widehat{f} \in C^n(\mathbb{R})$.*

▲ Так как $|x^k| \leqslant 1 + |x|^n$, то $x^k f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ для $k = 0, \ldots, n-1$. Осталось последовательно применить теорему 2. ■

Пример. Найдем преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-x^2/2}$.

Функция f удовлетворяет на $\mathbb{R}$ равенству $f'(x) = -x\, f(x)$. Применив к обеим частям полученной формулы преобразование Фурье, по теоремам 1 и 2 получим $iy\widehat{f}(y) = -i(\widehat{f}(y))'$. Таким образом, функция $\widehat{f}$ является решением дифференциального уравнения $z'(y) = -yz(y)$. Решая это уравнение, находим $\widehat{f}(y) = Ce^{-y^2/2}$. Поскольку $\hat{f}(0) = 1$, то $C = 1$, и $\widehat{f} = f$.

Задача. Покажите, что если $f \in L_1(\mathbb{R})$, такая что $(x \mapsto \frac{f(x)}{x}) \in L_1(\mathbb{R})$, то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y)dy = 0$ (интеграл понимается как несобственный).

Интеграл Фурье

Определение. Пусть функция f интегрируема на любом $[a, b] \subset \mathbb{R}$ (*локально интегрируема*). *Интегралом f в смысле главного значения* (principal value) называется следующий предел:

$$\text{v. p.} \int_{\mathbb{R}} f\, d\mu := \lim_{u\to+\infty} \int_{-u}^{u} f\, d\mu.$$

Замечание. Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то по теореме Лебега о мажорированной сходимости существует

$$\text{v. p.} \int_{\mathbb{R}} f\, d\mu = \lim_{u\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f \cdot I_{[-u,u]}\, d\mu = \int_{\mathbb{R}} f\, d\mu.$$

Обратное утверждение неверно: например, для любой непрерывной нечетной функции интеграл в смысле главного значения определен и равен нулю, но сама функция может быть неинтегрируемой на $\mathbb{R}$.

Определение. Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$. *Интегралом Фурье* функции f называется

$$S(f,x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{v.\,p.} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)\, e^{iyx}\, d\mu(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{u\to+\infty} \int_{-u}^{u} \widehat{f}(y)\, e^{iyx} d\mu(y).$$

Замечание. Если преобразование Фурье служит в непериодическом случае аналогом коэффициентов Фурье, то интеграл Фурье служит аналогом ряда Фурье. Чтобы усилить эту аналогию, получим еще один вид для $S(f,x)$. Подставив интегральное представление $\widehat{f}$ в выражение $\widehat{f}(y)e^{iyx} + \widehat{f}(-y)e^{-iyx}$, получим интеграл (по t) от функции $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(t)(e^{iy(x-t)} + e^{-iy(x-t)})$. Выражение в скобках равно $2\cos y(x-t) = 2(\cos yt \cos yx + \sin yt \sin yx)$. Поэтому

$$S(f,x) = \int_0^{+\infty} (a(y)\cos yx + b(y)\sin yx)\, dy,$$
$$a(y) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} f(t)\cos yt\, d\mu(t), \qquad b(y) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} f(t)\sin yt\, d\mu(t)$$

(в первом равенстве интеграл понимается как несобственный).

Исследуем вопрос сходимости интеграла Фурье. Для этого рассмотрим частичные интегралы

$$S_u(f,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-u}^{u} \widehat{f}(y)\, e^{iyx}\, d\mu(y).$$

Покажем, что $S_u(f,x) = \frac{1}{\pi}(f * D_u)(x)$, где $D_u(t) = \frac{\sin ut}{t}$. По определению $\widehat{f}$ имеем

$$S_u(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-u}^{u} e^{iyx} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-iyt}\, d\mu(t) \right) d\mu(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-u}^{u} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{iy(x-t)}\, d\mu(t) \right) d\mu(y).$$

Так как функция $(y,t) \mapsto f(t)\, e^{iy(x-t)}$ интегрируема на $[-u,u]\times\mathbb{R}$, то по теореме Фубини получаем

$$\begin{aligned} S_u(f,x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(t) \left(\int_{-u}^{u} e^{iy(x-t)}\, d\mu(y) \right) d\mu(t) = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(t)\cdot \frac{e^{iy(x-t)}}{i(x-t)}\bigg|_{y=-u}^{y=u} d\mu(t) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} f(t)\cdot\frac{\sin u(x-t)}{x-t}\, d\mu(t) = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x-s)\cdot\frac{\sin us}{s}\, d\mu(s) = \frac{1}{\pi}(f * D_u)(x). \end{aligned}$$

Запись $S_u(f,x)$ в виде свертки с D_u позволяет получить результат, аналогичный лемме 3.1 для рядов Фурье.

Лемма 1. *Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$ и $x \in \mathbb{R}$. Тогда*

1) для любого $\delta > 0$ выполнено

$$S_u(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{t}\sin ut\, d\mu(t) + o(1), \quad u\to+\infty.$$

2) $\lim\limits_{u\to+\infty} S_u(f,x) = S$ в том и только в том случае, когда найдется $\delta > 0$, что

$$\lim_{u\to+\infty}\int_0^{\delta} \frac{f(x+t)+f(x-t)-2S}{t}\sin ut\, d\mu(t) = 0.$$

▲ Пользуясь четностью функции D_u, интеграл $S_u(f,x)$ можно переписать в виде

$$S_u(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} (f(x+t)+f(x-t))D_u(t)d\mu(t) = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{\infty}\right) \frac{f(x+t)+f(x-t)}{t}\sin ut\, d\mu(t).$$

Функция $\frac{f(x+t)+f(x-t)}{t}$ интегрируема на $[\delta, +\infty)$ как произведение интегрируемой функции на ограниченную непрерывную функцию $1/t$. Поэтому второй интеграл стремится к нулю при $u \to +\infty$ по лемме Римана об осцилляции, что доказывает п. 1.

Поскольку $\int_0^\delta \frac{\sin ut}{t} dt = \int_0^{\delta u} \frac{\sin s}{s} ds \to \frac{\pi}{2}$, то

$$S = \frac{2S}{\pi} \int_0^\delta \frac{\sin ut}{t}\, d\mu(t) + o(1), \quad u \to +\infty.$$

Вычитая полученное равенство из равенства п. 1 имеем второе утверждение. ■

Как следствие п. 2 леммы 1 и леммы Римана об осцилляции справедлива

Теорема 3 (признак Дини). *Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$ и $x \in \mathbb{R}$. Если для $S \in \mathbb{C}$ существует такое $\delta > 0$, что*

$$\int_0^\delta \frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2S|}{t}\, d\mu(t) < \infty,$$

то интеграл Фурье функции f в точке x сходится к S, т. е. $S(f, x) = S$.

Дословно повторяя доказательства следствий признака Дини для рядов, получаем

Следствие (формула обращения). *Если $f \in L_1(\mathbb{R})$ и в точке $x \in \mathbb{R}$ существуют конечные $f'_\pm(x)$, то $S(f, x) = f(x)$, т.е.*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ v. p.} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)\, e^{iyx}\, d\mu(y).$$

В связи с формулой обращения наряду с преобразованием Фурье полезно ввести следующее понятие.

Определение. Для $f \in L_1(\mathbb{R})$ *обратным преобразованием Фурье* называется функция, определяемая равенством

$$\check{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{iyx}\, d\mu(x) \ \ (y \in \mathbb{R}).$$

Замечание. Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то $\check{f}(y) = \hat{f}(-y)$. Если к тому же $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R})$, то интеграл Фурье $S(f, x) = (\widehat{f})^\vee(x)$ и формула обращения примет вид $f(x) = (\widehat{f})^\vee(x)$ (чем и мотивируется термин «обратное преобразование Фурье»).

Пример. Найдем преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-|x|}$ $(x \in \mathbb{R})$.

По определению

$$\widehat{f}(y) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} e^{-ixy} d\mu(x) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\, \mathrm{Re} \int_0^{+\infty} e^{-(1+iy)x} dx = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\, \mathrm{Re}\, \tfrac{1}{1+iy} = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\, \tfrac{1}{1+y^2}.$$

Всюду функция f имеет конечные односторонние производные и $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R})$, поэтому по формуле обращения

$$e^{-|x|} = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)\, e^{iyx}\, d\mu(y) = \tfrac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{iyx}}{1+y^2} dy = \tfrac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos yx}{1+y^2} dy.$$

Таким образом, мы получаем значение интеграла Лапласа $\int_0^{+\infty} \frac{\cos yx}{1+y^2} dy = \frac{\pi}{2} e^{-|x|}$.

Формула обращения верна для п.в. x *без предположения гладкости*, однако это потребует развития техники. Начнем с леммы, которая имеет самостоятельный интерес.

Лемма 2. *Если $f, g \in L_1(\mathbb{R})$, то*

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f} g\, d\mu = \int_{\mathbb{R}} f \widehat{g}\, d\mu.$$

▲ Интегрируемость $|f(\xi)\, g(x)\, e^{-ix\xi}|$ следует из условия $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ по теореме Тонелли. Тогда по теореме Фубини

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(\xi)\, e^{-ix\xi}\, d\mu(\xi) \right) g(x)\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} g(x)\, e^{-ix\xi}\, d\mu(x) \right) f(\xi)\, d\mu(\xi). \ ■$$

Лемма 3. *Пусть $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$, такая что $\varphi \geqslant 0$ и $\int_{\mathbb{R}} \varphi d\mu = 1$. Пусть $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$. Тогда для любой $f \in L_1(\mathbb{R})$ выполнено $\|\varphi_\varepsilon * f - f\|_1 \to 0$ при $\varepsilon \to +0$.*

▲ Так как $\int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(t) d\mu(t) = 1$, то $f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_\varepsilon(t) d\mu(t)$. Поэтому по теореме Тонелли

$$\begin{aligned}\|\varphi_\varepsilon * f - f\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} (f(x-t) - f(x))\, \varphi_\varepsilon(t)\, d\mu(t) \right| d\mu(x) \leqslant \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-t) - f(x)|\, \varphi_\varepsilon(t)\, d\mu(t) \right) d\mu(x) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-t) - f(x)|\, d\mu(x) \right) \varphi_\varepsilon(t)\, d\mu(t) = \int_{\mathbb{R}} \|f_{-t} - f\|_1\, \varphi_\varepsilon(t)\, d\mu(t)\end{aligned}$$

(где $f_{-t} = f(\cdot - t)$ – функция сдвига). Зафиксируем $\sigma > 0$. По теореме 1.4 о непрерывности сдвига найдется такое $\eta > 0$, что $\|f_{-t} - f\|_1 \leqslant \sigma$ при $|t| \leqslant \eta$. Это позволит нам «отделиться от нуля» и оценить последний интеграл. Так как $\|f_{-t}\|_1 = \|f\|_1$, то

$$\left(\int_{|t|\leqslant\eta} + \int_{|t|>\eta} \right) \|f_{-t} - f\|_1\, \varphi_\varepsilon(t)\, d\mu(t) \leqslant \sigma + 2\|f\|_1 \int_{|t|>\eta} \varphi_\varepsilon(t)\, d\mu(t).$$

Заменой $s = \frac{t}{\varepsilon}$ последний интеграл сводится к $\int_{|s|>\frac{\eta}{\varepsilon}} \varphi(s)\, d\mu(s)$, а значит, он стремится к нулю при $\varepsilon \to +0$ по теореме Лебега. Поэтому найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что последнее слагаемое будет меньше σ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Следовательно, $\|\varphi_\varepsilon * f - f\|_1 < 2\sigma$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, что завершает доказательство. ■

Теорема 4 (формула обращения). *Если $f, \widehat{f} \in L_1(\mathbb{R})$, то $(\widehat{f})^\vee = (\check{f})^\wedge = f$ п.в. на $\mathbb{R}$.*

Замечание. Функция $(\check{f})^\wedge$ непрерывна по свойству 4, т.к. $\check{f}(x) = \widehat{f}(-x) \in L_1(\mathbb{R})$. Поэтому если функция f удовлетворяет условиям теоремы, то она п.в. совпадает с непрерывной функцией.

▲ Пусть $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$. Так как $\varphi > 0$ и $\int_{\mathbb{R}} \varphi d\mu = 1$, то семейство $\varphi_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi(\frac{t}{\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, удовлетворяет лемме 3.

Зафиксируем $x \in \mathbb{R}$ и положим $\psi_\varepsilon(t) = \varphi(\varepsilon t) \cdot e^{ixt}$. Вычислим преобразование Фурье функции ψ_ε, используя замену $\tau = t\varepsilon$:

$$\widehat{\psi_\varepsilon}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(\varepsilon t) \cdot e^{-i(y-x)t} dt = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(\tau) \cdot e^{-i\frac{y-x}{\varepsilon}\tau} d\tau = \frac{1}{\varepsilon} \widehat{\varphi}\left(\frac{y-x}{\varepsilon} \right).$$

Так как функция $e^{-\tau^2/2}$ инвариантна относительно преобразования Фурье, то $\widehat{\varphi}\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right) = \varphi\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right)$ и, значит, $\widehat{\psi_\varepsilon}(y) = \varphi_\varepsilon(y-x)$.

Следовательно, равенство из леммы 2 примет вид

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)\, \psi_\varepsilon(y)\, d\mu(y) = (\varphi_\varepsilon * f)(x). \tag{1}$$

Поскольку $|\widehat{f}\,\psi_\varepsilon| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}|\widehat{f}|$, то левая часть (1) при $\varepsilon \to +0$ стремится к $(\widehat{f})^\vee(x)$ по теореме 4.1 о непрерывности интеграла с параметром. По лемме 3 правая часть (1) стремится к f по L_1-норме. Рассмотрим произвольную положительную последовательность $\{\varepsilon_n\}$, сходящуюся к нулю. Согласно замечанию после теоремы 1.2 существует подпоследовательность $\{\varepsilon_{n_k}\}$, такая что $\varphi_{\varepsilon_{n_k}} * f \to f$ п.в. на $\mathbb{R}$. Полагая в формуле (1) $\varepsilon = \varepsilon_{n_k}$ и переходя к пределу при $k \to \infty$, получим, что $(\widehat{f})^\vee(x) = f(x)$ для п.в. $x \in \mathbb{R}$. Если в левой части последнего равенства сделать замену y на $(-y)$, то получим $(\check{f})^\wedge(x) = f(x)$ для п.в. $x \in \mathbb{R}$. ■

Следствие (единственность). Если $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ и $\widehat{f} = \widehat{g}$, то $f = g$ почти всюду.

▲ Пусть $h = f - g$, тогда $\hat{h} = 0$. По теореме 4 получаем, что $h = 0$ почти всюду. ■

Приведем один признак интегрируемости преобразования Фурье.

Лемма 4. *Если $f \in C^2(\mathbb{R})$ и $f, f', f'' \in L_1(\mathbb{R})$, то $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R})$.*

▲ По следствию теоремы 1 $\widehat{f}(y) = o\big(\frac{1}{y^2}\big)$ при $y \to \pm\infty$. Тогда существует такое $K > 0$, что $|\widehat{f}(y)| \leqslant \frac{1}{y^2}$ при всех $|y| \geqslant K$. Функция $\widehat{f}$ непрерывна, поэтому найдется такое $C > 0$, что $|\widehat{f}| \leqslant C$ на $[-K, K]$. Следовательно,

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(y)|dy \leqslant \int_{|y|\leqslant K} |\widehat{f}(y)|dy + \int_{|y|\geqslant K} \frac{dy}{y^2} \leqslant 2KC - \frac{2}{y}\Big|_K^{+\infty} = 2KC + \frac{2}{K} < +\infty. \blacksquare$$

Пространство Шварца

Определим класс Шварца $S(\mathbb{R}) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})\colon \forall m, k \in \mathbb{N}_0 \ x^m\varphi^{(k)}(x) \to 0 \text{ при } x \to \infty\}$.

Относительно стандартных операций сложения и умножения на скаляр $S(\mathbb{R})$ является линейным пространством.

Примером функции, входящим в класс $S(\mathbb{R})$, может служить функция $f(x) = e^{-x^2}$. Это следует из того, что $x^m(e^{-x^2})^{(k)} = P(x)e^{-x^2}$ для некоторого многочлена P, и $e^{-x^2} = o(x^{-n})$ при $x \to \infty$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Замечание. 1) $C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset S(\mathbb{R}) \subset L_p(\mathbb{R})$. Левое включение очевидно, докажем правое. Пусть $\varphi \in S$. Так как φ непрерывна, то достаточно установить интегрируемость в некоторых окрестностях $\pm\infty$. Зафиксируем целое $m \geqslant 2/p$. Тогда найдется $K \geqslant 1$, что $|x^m\varphi(x)| \leqslant 1$ при всех $|x| \geqslant K$. Следовательно, $|x^{2/p}\varphi(x)| \leqslant 1$ или $|\varphi(x)|^p \leqslant 1/x^2$ при $|x| \geqslant K$, что и требовалось.

2) Если $\varphi \in S(\mathbb{R})$, то а) $\varphi' \in S(\mathbb{R})$, т.к. $(\varphi')^{(k)} = \varphi^{(k+1)}$, и

б) $x\varphi(x) \in S(\mathbb{R})$, т.к. $(x\varphi(x))^{(k)} = x\varphi^{(k)}(x) + k\varphi^{(k-1)}(x)$.

Роль класса S проясняет следующее свойство.

Лемма 5. *Если $\varphi \in S(\mathbb{R})$, то $\widehat{\varphi} \in S(\mathbb{R})$.*

▲ Так как $x^k\varphi(x) \in S \subset L_1$ для всех k, то по следствию из теоремы 2 $\widehat{\varphi} \in C^\infty(\mathbb{R})$. Далее,

$$y^m\widehat{\varphi}^{(k)}(y) = y^m F[(-ix)^k\varphi(x)](y) = \frac{1}{i^m}(iy)^m F[(-ix)^k\varphi(x)](y) = \frac{1}{i^m}F[\tfrac{d^m}{dx^m}\big((-ix)^k\varphi(x)\big)](y). \quad (2)$$

Функция $h(x) := \frac{d^k}{dx^k}\big((-ix)^k\varphi(x)\big) \in S \subset L_1$, поэтому $\widehat{h}(y) \to 0$ при $y \to \infty$, что завершает доказательство.

Класс S используется в следующих ситуациях. Во-первых, он позволяет определить преобразование Фурье на $L_2(\mathbb{R})$, продолжив F с S «по непрерывности» с сохранением скалярного произведения $(\varphi, \psi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi\overline{\psi}dx$. В этой связи важна

Теорема 5. *Отображение $F\colon S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R})$, $F[\varphi] = \widehat{\varphi}$, является унитарным оператором, т.е. линейной биекцией, такой что $(F[\varphi], F[\psi]) = (\varphi, \psi)$ для всех $\varphi, \psi \in S(\mathbb{R})$. В частности,*

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(x)|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^2\, dx.$$

■1) По лемме 5 $F[S(\mathbb{R})] \subset S(\mathbb{R})$. Далее, пусть $f \in S$. Так как $f, \widehat{f} \in S \subset L_1$ и $f \in C^\infty$ то $(\widehat{f})^\vee = (\check{f})^\wedge = f$ всюду на $\mathbb{R}$. Это означает, что отображение F биективно и $F^{-1} = \check{}$ – обратное преобразование Фурье.

2) Пусть $g := F^{-1}[\overline{\psi}]$ (черта сверху – комплексное сопряжение). Тогда $F[g] = \overline{\psi}$ и

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x)}e^{iyx}\, dx = \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \psi(x)e^{-iyx}\, dx} = \overline{F[\psi]}.$$

Полагая в лемме 2 $f = \varphi$, получим $(F[\varphi], F[\psi]) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}\overline{\widehat{\overline{\psi}}}dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi\overline{\psi}dx = (\varphi, \psi)$. ■

Коснемся другого приложения класса S.

Определение. *Пространством Шварца* называется $S(\mathbb{R})$ со сходимостью, определяемой следующим образом. Пусть $\varphi_n, \varphi \in S(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$, тогда

$\varphi_n \to \varphi$ в $S(\mathbb{R}) \iff \forall m, k \in \mathbb{N}_0 \ \ x^m\varphi_n^{(k)}(x) \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} x^m\varphi^{(k)}(x)$ при $n \to \infty$.

Замечание. 1) Непосредственно из определения получаем, что если $\varphi_n \to 0$ в $S(\mathbb{R})$, то в $S(\mathbb{R})$ также $\varphi_n' \to 0$ и $P\varphi_n \to 0$, где P – многочлен.

2) Если $\varphi_n \to 0$ в $S(\mathbb{R})$, то $\varphi_n \to 0$ в $L_1(\mathbb{R})$. Действительно, из условия $(1+x^2)\varphi_n(x) \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} 0$. Поэтому для $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для всех $n \geqslant N$ и $x \in \mathbb{R}$ выполнено $|(1+x^2)\varphi_n(x)| \leqslant \varepsilon$, а значит, $\int_{\mathbb{R}} |\varphi_n(x)|dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon}{1+x^2}dx = \varepsilon\pi$ при $n \geqslant N$.

Пример. Пусть $\varphi \in S(\mathbb{R})$ и $\varphi_n(x) = \varphi(x + \frac{1}{n})$ — сдвиг φ $(n \in \mathbb{N})$. Покажем, что $\varphi_n \to \varphi$ в $S(\mathbb{R})$. Зафиксируем $m, k \in \mathbb{N}_0$. По теореме Лагранжа $x^m\big(\varphi^{(k)}\big(x + \frac{1}{n}\big)\big) - \varphi^{(k)}(x)\big) = x^m\varphi^{(k+1)}(c)\frac{1}{n}$ для некоторого $c = c(x, n)$, лежащего между x и $x + \frac{1}{n}$. Тогда верна оценка

$$|x|^m|\varphi^{(k+1)}(c)| \leqslant (|c| + 1)^m|\varphi^{(k+1)}(c)| = \sum_{p=0}^{m} C_m^p|c|^p|\varphi^{(k+1)}(c)|.$$

Так как $\varphi \in S$, то последняя сумма, как функция от c, непрерывна и стремится к нулю при $c \to \infty$. Следовательно, она ограничена, $\sum C_m^p|c|^p|\varphi^{(k+1)}(c)| \leqslant M$ для всех $c \in \mathbb{R}$. Такая оценка выполнена и для $c = c(x, n)$, откуда $\sup_{\mathbb{R}} |x|^m\big|\varphi_n^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x)\big| \leqslant \frac{M}{n} \to 0$.

Сопряженное пространство S' всех непрерывных функционалов на S называется пространством *обобщенных функций*. Это приводит к значительному расширению понятия «функции» (отражено в названии), что имеет первостепенное значение в различных вопросах математической физики. В связи с определением преобразования Фурье в S' важна

Теорема 6. *Отображение $F\colon S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R})$ непрерывно.*

■ Нам нужно показать, что если $\varphi_n \to \varphi$ в $S(\mathbb{R})$, то $F[\varphi_n] \to F[\varphi]$ в $S(\mathbb{R})$.

Зафиксируем $k, m \in \mathbb{N}_0$ и определим $f_n(x) = \varphi_n(x) - \varphi(x)$, $g_n(x) = \frac{d^m}{dx^m}\big((-ix)^k f_n(x)\big)$. Так как $f_n \to 0$ в S, то $g_n \to 0$ в S, а значит, $g_n \to 0$ в L_1. Следовательно, $\sup_{\mathbb{R}} |F[g_n]| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|g_n\|_1 \to 0$. По формуле (2) имеем $y^m\widehat{f}_n^{(k)}(y) = \frac{1}{i^m}F[g_n](y) \rightrightarrows 0$. Заключаем, что $\widehat{f}_n = \widehat{\varphi}_n - \widehat{\varphi} \to 0$ в S, что завершает доказательство. ■