МФТИ ФПМИ

Случайные процессы

Гагаринов Даниил

Кулапин Артур

Рухадзе Альбина

Весна 2021

Содержание

1 Пункт 1

1.1 Понятие случайного процесса

Def. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ — вероятностное пространство, $(E, \mathcal{E})$ — измеримое пространство. Тогда отображение $X : \Omega \to E$ называется случайным элементом, если оно измеримо, то есть $\forall B \in \mathcal{E} \hookrightarrow X^{-1}(B) = \{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$.

Если $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, то X называется случайной величиной.

Если $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, то X называется случайным вектором.

Def. Пусть T — некоторое множество. Тогда набор $X = (X_t, t \in T)$ случайных элементов X_t, заданных на одном и том же вероятностноном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ называется случайной функцией.

Def. Если $T \subset \mathbb{R}$, то случайная функция называется случайным процессом.

Note. Области значений X_t не обязаны совпадать.

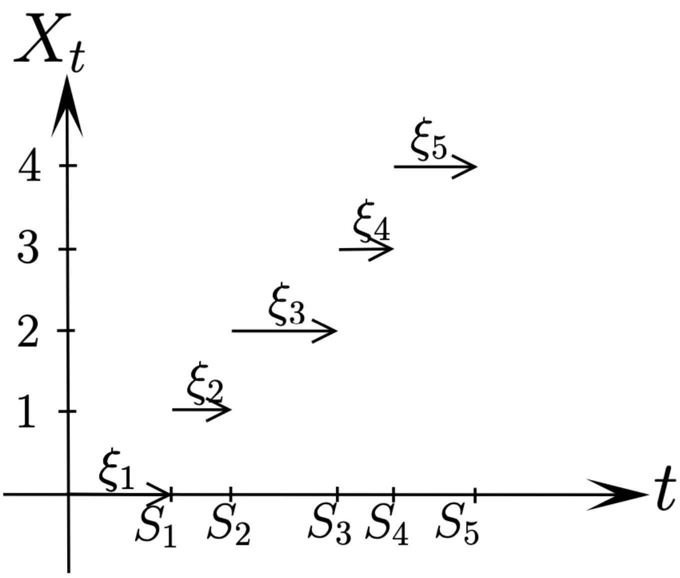
Note. Так же используется обозначение $(X(t), t \in T)$. На самом деле $X(t) = X(t, \omega)$ — функция двух переменных.

Def. При фиксированном $\omega_0 \in \Omega$ функция $\widetilde{X}_{\omega_0}(t) = X(t, \omega)|_{\omega=\omega_0}, t \in T$ называется траекторией (реализацией) случайной функции X.

1.2 Примеры случайных процессов

1. Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ — н.с. векторы из $\mathbb{R}^m$, тогда процесс $(S_n, n \in \mathbb{Z}_+)$, где $S_0 = 0, S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, называется случайным блужданием. Физическая модель: прыжки кузнечика.

2. Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ — н.о.р.с.в., неотрицательные и невырожденные ($\neq const$). Положим $S_0 = 0$, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Тогда процесс $X_t = \sup\{n : S_n \leqslant t\}, t \geqslant 0$ называется процессом восстановления, построенным по с.в $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$. Физическая модель: замена лампочки.



1.3 Модель страхования Спарре-Андерсена

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ - н.о.р.с.в. неотрицательные и невырожденные. $(X_t, t \geqslant 0)$ — процесс восстановления для них, $\{\eta_n, n \in \mathbb{N}\}$ - н.о.р.с.в. неотрицательные и независимые с $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$. Пусть $y_0, c > 0$ — константы.

Положим $Y_t = y_0 + c \cdot t - \sum\limits_{k=1}^{X_t} \eta_k, t \geqslant 0$ — модель страхования.

- y_0 — начальный капитал;
- c — скорость поступления страховых взносов;
- η_k — размер k-й выплаты;
- ξ_k — время между $(k-1)$-й и k-й выплатами;
- Y_t — текущий капитал компании.

1.4 Лемма о конечности процесса восстановления п.н.

Лемма. Процесс восстановления конечен п.н. или $P(\exists t : X_t = +\infty) = 0$.

Доказательство:

Если $E\xi_i = 0$, то $\xi = 0$ п.н. (так как $\xi \geqslant 0$), что противоречит невырожденности.

Пусть сначала $E\xi_i = a > 0$. Заметим, что $X_t = \sup\{n : S_n \leqslant t\} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} I\{S_n \leqslant t\}$.

С другой стороны, $S_{n+1} \geqslant S_n \Rightarrow \{S_{n+1} \leqslant t\} \subseteq \{S_n \leqslant t\}$, а $\{X_t = +\infty\} = \{\forall n : S_n \leqslant t\} = \bigcap\limits_n \{S_n \leqslant t\}$.

В силу непрерывности вероятностной меры

$$P(X_t = +\infty) = \lim_n P(S_n \leqslant t) = \lim_n P\left(\frac{S_n}{n} \leqslant \frac{t}{n}\right) \leqslant |\text{При больших } n| \leqslant \lim_n P\left(\frac{S_n}{n} \leqslant \frac{a}{2}\right)$$

По УЗБЧ $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} a \Rightarrow \frac{S_n}{n} \xrightarrow{d} a$. Тогда

$$\lim_n P\left(\frac{S_n}{n} \leqslant \frac{a}{2}\right) = |\text{из сходимости по распределению}| = P\left(a \leqslant \frac{a}{2}\right) = 0$$

Значит, $\forall t \geqslant 0 \hookrightarrow P(X_t = +\infty) = 0$

Заметим, что траектории процесса X_t не убывают $\Rightarrow P(\exists t : X_t = +\infty) = P(\exists m \in \mathbb{N} : X_m = +\infty) = 0$

Если $E\xi_i = +\infty$, то положим $\widetilde{\xi_i} = min(\xi_i, 1)$, тогда $E\widetilde{\xi_i} < +\infty$.
$\widetilde{S_n} = \widetilde{\xi_1} + \ldots + \widetilde{\xi_n} \leqslant S_n \Rightarrow P(S_n \leqslant t) \leqslant P(\widetilde{S_n} \leqslant t)$, а про $\widetilde{S_n}$ доказали выше $\Rightarrow \lim\limits_n P(S_n \leqslant t) \to 0$

■

2 Пункт 2

2.1 Производящие функции

Def. Пусть ξ — случайная величина, тогда её производящая функция $\varphi_\xi(z) = \mathbb{E}z^\xi$. Считаем $z \geqslant 0$.

Свойства:

1. $\varphi_\xi(1) = 1$.
2. $\varphi'_\xi(1) = \mathbb{E}\xi$.
3. Если $\xi \perp\!\!\!\perp \eta$, то $\varphi_{\xi+\eta}(z) = \varphi_\xi(z) \cdot \varphi_\eta(z)$.

Теперь, если $\xi \in \mathbb{Z}_+$ — дискретная случайная величина с неотрицательными значениями, тогда появляеются еще свойства:

4. $$\varphi_\xi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(\xi = k)$$
   Это ряд, который сходится и абсолютно равномерно на $\{|z| \leqslant 1\}$.
5. В области $\{|z| < 1\}$ производящая функция непрерывно дифференцируема бесконечное число раз.
6. $\varphi_\xi(0) = P(\xi = 0)$.
7. $$P(\xi = k) = \frac{1}{k!}\left(\varphi_\xi^{(k)}(z)\right)\Big|_{z=0}$$

2.2 Ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона

Пусть $\left\{\xi_k^{(n)},\ k, n \in \mathbb{N}\right\}$ — н.о.р.с.в., имеющее распределение с.в. ξ со значениями в $\mathbb{Z}_+$. Положим, что

$$X_0 = 1$$
$$X_n = \sum_{k=1}^{X_{n-1}} \xi_k^{(n)}, n \in \mathbb{N}$$

Def. Последовательность $\{X_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ — ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона с законом размножения частиц ξ.

Note. $\xi_k^{(n)}$ — число потомков k-й частицы в $(n-1)$-м поколении, а X_n — число частиц в n-м поколении.

Лемма. Рекуррентные соотношения

$$\varphi_{X_n}(z) = \varphi_{X_{n-1}}(\varphi_\xi(z))$$

Доказательство:

$$\varphi_{X_n}(z) = \mathbb{E}z^{X_n} = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(z^{X_n} \mid X_{n-1}\right)\right)$$

по телескопическому свойству УМО/по формуле полной вероятности.

Заметим, что сумма $\xi_k^{(n)}$ и X_{n-1} независимы, так как X_{n-1} зависит только от $\xi_k^{(j)}$, $j \leqslant n-1$.

$$\mathbb{E}\left(z^{X_n} \mid X_{n-1} = m\right) = \mathbb{E}\left(z^{\sum\limits_{k=1}^{X_{n-1}} \xi_k^{(n)}} \mid X_{n-1} = m\right) = \mathbb{E}z^{\sum\limits_{k=1}^{m} \xi_k^{(n)}} = \prod_{k=1}^{m} \varphi_{\xi_k^{(n)}}(z) = (\varphi_\xi(z))^m$$

Откуда

$$\varphi_{X_n}(z) = \mathbb{E}z^{X_n} = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(z^{X_n} \mid X_{n-1}\right)\right) = \mathbb{E}\left(\varphi_\xi(z)\right)^{X_{n-1}} = \varphi_{X_{n-1}}\left(\varphi_\xi(z)\right)$$

■

Следствие.

1. $\varphi_{X_n}(z) = \varphi_\xi\left(\varphi_\xi\left(\ldots\varphi_\xi(z)\right)\ldots\right)$ (n композиций)
2. $\varphi_{X_n}(z) = \varphi_\xi\left(\varphi_{X_{n-1}}(z)\right)$

2.3 Уравнение вероятности вырождения

Введём обозначения:

- $q_n = P(X_n = 0)$
- $q = P(\exists n: \ X_n = 0)$ — вероятность вырождения

Лемма. $\forall n \ q_n \leqslant q_{n+1}$ и $q = \lim\limits_{n\to\infty} q_n$

Доказательство: События вложенны, значит, монотонность верна.

А второе утверждение следует из непрерывности вероятностной меры:

$$q = P(\exists n: \ X_n = 0) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X_n = 0\}\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(X_n = 0\right) = \lim_{n\to\infty} q_n$$

■

Лемма. Вероятность вырождения q удовлетворяет соотношению:

$$q = \varphi_\xi(q) \tag{2.1}$$

Доказательство: Заметим, что

$$q_n = P(X_n = 0) = \varphi_{X_n}(0) = \{\text{следствие первой леммы}\} = \varphi_\xi\left(\varphi_{X_{n-1}}(0)\right) = \varphi_\xi\left(q_{n-1}\right)$$

Тогда, устремляя к бесконечности, по второй лемме и непрерывности производящей функции в круге $\{|z| \leqslant 1\}$, получаем требуемое.

■

3 Пункт 3

3.1 Теорема о вероятности вырождения

Теорема. Пусть $P(\xi = 1) < 1$. Пусть $\mathbb{E}\xi = \mu$ быть может бесконечное, тогда

1. $\mu \leqslant 1$, тогда уравнение $z = \varphi_\xi(z)$ имеет только решение 1 на $[0, 1]$ и $q = 1$.

2. $\mu > 1$, тогда уравнение $z = \varphi_\xi(z)$ имеет только одно решение z_0 на $[0, 1)$ и $q = z_0$.

Доказательство:

1. Пусть $\mu \leqslant 1$. Если $P(\xi = 0) = 1$, то вырождаемся на первом шаге. Иначе рассмотрим производную:
$$\varphi'_\xi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1}P(\xi = k)$$
Откуда получаем, что $\varphi'_\xi(z) > 0$ при $z > 0$, ведь не все $P(\xi = k) = 0$.
Тогда, так как $\varphi_\xi(z)$ строго возрастает на отрезке, по теореме Лагранжа о среднем:
$$1 - \varphi_\xi(z) = \varphi_\xi(1) - \varphi_\xi(z) = \varphi'_\xi(\theta) \cdot (1 - z), \text{ для некоторого } \theta \in (z, 1)$$
Проверим, что $\varphi'_\xi(\theta) < 1$.
Если $\exists k \geqslant 2$ $P(\xi = k) > 0$, то $\varphi''_\xi(z) > 0$ при $z > 0$, а тогда
$$\varphi'_\xi(\theta) < \varphi'_\xi(1) = \mu \leqslant 1$$
Если $\forall k \geqslant 2$ $P(\xi = k) = 0$, то $P(\xi \leqslant 1) = 1$ и $\mu < 1$, тогда
$$\varphi'_\xi(\theta) \leqslant \varphi'_\xi(1) = \mu < 1$$
Последнее неравенство строгое, потому что иначе $\xi = 1$ п.н., но по условию $P(\xi = 1) < 1$.
В итоге, $\forall z \in [0, 1) \hookrightarrow 1 - \varphi_\xi(z) < 1 - z \Longleftrightarrow z < \varphi_\xi(z)$, то есть нет других решений, кроме 1.

2. Пусть $\mu > 1$, тогда $\exists k \geqslant 2$ $P(\xi = k) > 0$, откуда
$$\forall z \in (0, 1)\ \varphi''_\xi(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)z^{k-2}P(\xi = k) > 0$$
Значит, $\varphi'_\xi(z)$ строго возрастает.
Теперь рассмотрим $f(z) = z - \varphi_\xi(z)$, тогда $f(1) = 0$.
Заметим, что $f'(z) = 1 - \varphi'_\xi(z)$ строго убывает и $f''(z) < 0$, то есть $f(z)$ строго выпукла вверх. Но ещё
$$f'(0) = 1 - \varphi'_\xi(0) = 1 - P(\xi = 1) > 0$$

$$f'(1) = 1 - \varphi'_\xi(1) = 1 - \mu < 0$$

Тогда $\exists! z_1 \in (0,1) : f'(z_1) = 0$, тогда z_1 — точка максимума $f(z)$.

Исследуем $f(0) = 0 - \varphi_\xi(0) = -P(\xi = 0) \leqslant 0$:

(a) Если $P(\xi = 0) = 0$, то $q = 0$.

(b) Если $P(\xi = 0) > 0$, то $f(0) < 0$ и $\exists! z_0 \in (0,1)$ — решение уравнения $f(z) = 0$.

Осталось узнать, чему равно q.

Заметим, что $f(z) < 0 \iff z < z_0$. Покажем, что $\forall n\ q_n < z_0$:

$$q_n = \varphi_\xi(q_{n-1}) < \varphi_\xi(q_n) \Longrightarrow f(q_n) < 0$$

Данное неравенство будет верно в силу строго возрастания $\varphi_\xi(z)$, если $q_n > q_{n-1}$:

$$q_n = q_{n-1} + \sum_{m=1}^{\infty} P(X_{n-1} = m) \cdot (P(\xi = 0))^m > q_{n-1}$$

так как не все $P(X_{n-1} = m) = 0$ и $P(\xi = 0) > 0$.

Значит, $f(q_n) < 0$. Следовательно, в пределе $q = z_0$.

■

4 Пункт 4

4.1 Пространство траекторий. Цилиндрическая сигма-алгебра

Пусть $(X_t, t \in T)$ — случайный процесс и $\forall t \in T\ X_t$ — случайная величина со значениям в $\mathbb{R}$.

Def. Пространство траекторий процесса X_t называется $\left\{ y(t) = X_t\big|_{\omega=\omega_0} \mid \omega_0 \in \Omega \right\} = S \subset \mathbb{R}^T = \{y = (y(t), t \in T),\ y(t) \in \mathbb{R}\}$ — множество вещественных функций на T.

Def. $\forall t \in T$ и $\forall B_t \in \beta(\mathbb{R})$ введём на S элементарный цилиндр:

$$C(t, B_t) = \{y \in S \mid y(t) \in B_t\}$$

То есть множество траекторий (или функций), которые в момент времени t проходят через B_t.

Def. Наименьшая σ-алгебра на S, содержащая все элементарные цилиндры, называется цилиндрической σ-алгеброй и обозначается β_T.

Note. Таким образом, получили измеримое пространство (S, β_T).

4.2 Эквивалентное определение случайного процесса

Лемма. Отображение $X : \Omega \to S$ измеримо относительно β_T. То есть $X : \Omega \to S$ является случайным процессом в смысле изначального определения тогда и только тогда, X измеримо относительно β_T, то есть $\forall E \in \beta_T\ X^{-1}(E) \in \mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ — σ-алгебра на Ω.

Доказательство:

$\Longleftarrow$ Зафиксируем $t \in T$ и $B_t \in \beta(\mathbb{R})$, тогда

$$\{X_t \in B_t\} = \{X \in C(t, B_t) \in \beta_T\} \in \mathcal{F} \Longrightarrow X_t \text{ — случайная величина}$$

$\Longrightarrow$ $\forall$ элементарного цилиндра

$$\{X \in C(t, B_t) \in \beta_T\} = \{X_t \in B_t\} \in \mathcal{F} \text{ (так как } X_t \text{ — случайная величина)}$$

Тогда элементарные цилиндры порождают β_T. Согласно достаточному условию измеримости отображения $\forall E \in \beta_T\ \{X \in E\} = X^{-1}(E) \in \mathcal{F}$

■

Note. Теперь можно смотреть на случайный процесс как на единый случайный элемент со значениями в измеримом пространстве (S, β_T).

5 Пункт 5

5.1 Конечномерные распределения случайного процесса

Def. Распределением случаного процесса X называется вероятностная мера P_X на (S, β_T), заданная по правилу $\forall E \in \beta_T\ P_X(E) = P(X \in E)$ — мера на $(\Omega, \mathcal{F})$.

Def. $\forall n \in \mathbb{N}\ t_1, \dots, t_n \in T$ обозначим через $P_{t_1,\dots,t_n}$ — распределение вектора $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ — конечномерное распределение процесса X.

Лемма. Пусть $(X_t, t \in T)$ и $(Y_t, t \in T)$ — два случайных процесса.
Тогда $P_X = P_Y \Longleftrightarrow$ все конечномерные распределения X и Y совпадают.

Доказательство:

$\Longleftarrow$ Пусть $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall t_1, \dots, t_n\ P^X_{t_1,\dots,t_n} = P^Y_{t_1,\dots,t_n}$. Рассмотрим для $B_{t_1}, \dots, B_{t_n} \in \beta(\mathbb{R})$ цилиндр (не элементарный!) в S:

$$C(t_1, \dots, t_n; B_{t_1}, \dots, B_{t_n}) = \left\{y \in S \mid \forall i \in \overline{1, n}\ y(t_i) \in B_{t_i}\right\} \text{ (пересечение } n \text{ элем. цилиндров)}$$

Множество цилиндров образует π-систему (пересечение двух цилиндров будет цилиндром). При этом наименьшая σ-алгебра, содержащая все цилиндры — это β_T. Тем самым достаточно проверить, что распределение совпадает на цилиндрах, тогда распределение совпадает на порождающих π-системах.

$$P_X(C(t_1,\ldots,t_n;B_{t_1},\ldots,B_{t_n})) = P(X_{t_1}\in B_{t_1},\ldots,X_{t_n}\in B_{t_n}) =$$
$$= P^X_{t_1,\ldots,t_n}(B_{t_1}\times\ldots\times B_{t_n}) = P^Y_{t_1,\ldots,t_n}(B_{t_1}\times\ldots\times B_{t_n}) = P_Y(C(t_1,\ldots,t_n;B_{t_1},\ldots,B_{t_n}))$$

$\Longrightarrow$ Из приведенных строчек выше следует, что $P^X_{t_1,\ldots,t_n} = P^Y_{t_1,\ldots,t_n}$ на прямоугольниках в $\mathbb{R}^n$, откуда по теореме о продолжении меры $P^X_{t_1,\ldots,t_n} = P^Y_{t_1,\ldots,t_n}$ на всей $\beta(\mathbb{R}^n)$.

■

Следствие. Конечномерные распределения однозначно определяют распределение процесса целиком.

5.2 Условия симметрии и согласованности

Лемма. Пусть процесс $(X = (X_t, t\in T))$ имеет конечномерные распределения $\{P_{t_1,\ldots,t_n}, n\in\mathbb{N}, t_1,\ldots,t_n\in T\}$. Тогда набор $P_{t_1,\ldots,t_n}$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $P_{t_1,\ldots,t_n}(B_{t_1}\times\ldots\times B_{t_n}) = P_{t_{\sigma(1)},\ldots,t_{\sigma(n)}}(B_{t_{\sigma(1)}}\times\ldots\times B_{t_{\sigma(n)}})$ для любой перестановки $\sigma\in S_n$.
2. $P_{t_1,\ldots,t_n}(B_{t_1}\times\ldots\times\mathbb{R}) = P_{t_1,\ldots,t_{n-1}}(B_{t_1}\times\ldots\times B_{t_{n-1}})$

Доказательство:

1. Очевидно, так как $P(X_{t_1}\in B_{t_1},\ldots,X_{t_n}\in B_{t_n}) = P^X_{t_1,\ldots,t_n}(B_{t_1}\times\ldots\times B_{t_n})$ не зависит от перестановки событий.
2. Очевидно, что $\{X_{t_n}\in\mathbb{R}\} = \Omega$, а пересечение с Ω тривиально.

■

Теорема (Колмогорова о существовании случайного процесса) (б/д).

Пусть $\forall n\ \forall t_1,\ldots t_n\in T$, где T — любое множество, задана вероятностная мера $P_{t_1,\ldots,t_n}$ на $(\mathbb{R}^n,\beta(\mathbb{R}^n))$. Если мера удовлетворяет условиям симметрии и согласованности, то существует вероятностное пространство $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$ и случайный процесс $X = (X_t, t\in T)$ на нём такие, что $P_{t_1,\ldots,t_n}$ будут конечномерными распределениями процесса X.

Теорема (условия симметрии и согласованности для хар. функций) (б/д).

Пусть T — некоторое множество, $\{P_{t_1\ldots t_n}, n \in \mathbb{N}, t_1 \ldots t_n \in T\}$ — набор вероятностных мер, а $\{\varphi_{t_1\ldots t_n}, n \in \mathbb{N}, t_1 \ldots t_n \in T\}$ — соответствующие им хар. функции. Тогда набор мер $P_{t_1\ldots t_n}$ удовлетворяет условиям симметрии и согласованности $\Leftrightarrow$ хар. функции $\varphi_{t_1\ldots t_n}$ удовлетворяют следующим условиям:

1. $\varphi_{t_1\ldots t_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \varphi_{t_{\sigma(1)}\ldots t_{\sigma(n)}}(\lambda_{\sigma(1)}, \ldots, \lambda_{\sigma(n)})$ для $\forall$ перестановки σ
2. $\varphi_{t_1\ldots t_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, 0) = \varphi_{t_1\ldots t_{n-1}}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$

Следствие. Если $T \subset \mathbb{R}$ и $\forall t_1 < \ldots < t_n,\ t_i \in T$ задана хар. функция $\varphi_{t_1\ldots t_n}$, причём набор $\{\varphi_{t_1\ldots t_n}\}$ удовлетворяет условию $\forall m = \overline{1,n}$:

$$\varphi_{t_1\ldots t_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)|_{\lambda_m=0} = \varphi_{t_1\ldots t_{m-1}t_{m+1}\ldots t_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}, \lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n)$$

то $\exists$ случайный процесс $(X_t, t \in T) : \varphi_{t_1\ldots t_n}$ — хар. фукнция вектора $(x_{t_1}, \ldots, x_{t_n})$.

6 Пункт 6

6.1 Процессы с независимыми приращениями

Def. Пусть $(X_t, t \geqslant 0)$ — случайный процесс. Он имеет независимые приращения, если $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall 0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ случайные величины $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ независимы в совокупности.

Note. Процесс с независимыми приращениями и дискретным временем — случайное блуждание.

6.2 Критерий существования через хар. функции

Теорема (о существовании процессов с независимыми приращениями).

Пусть $\forall 0 \leqslant s < t$ задано распределение $Q_{s,t}$ вероятностей на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ с хар. функцией $\varphi_{s,t}$. Пусть Q_0 — распределение вероятностей на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Тогда выполнен следующий критерий: существует случайный процесс $(X_t, t \geqslant 0)$ с независимыми приращениями и условиями:

- $X_t - X_s \stackrel{d}{=} Q_{s,t},\ 0 \leqslant s < t$
- $X_0 \stackrel{d}{=} Q_0$

$\Longleftrightarrow \forall 0 \leqslant s < u < t \hookrightarrow \varphi_{s,t}(\tau) = \varphi_{s,u}(\tau) \cdot \varphi_{u,t}(\tau)$

Доказательство:

$\Longrightarrow X_t - X_s = (X_t - X_u) + (X_u - X_s)$. Случайные величины в скобках независимы, поэтому $\varphi_{s,t}(\tau) = \varphi_{X_t - X_s}(\tau) = \varphi_{X_t - X_u}(\tau) \cdot \varphi_{X_u - X_s}(\tau) = \varphi_{s,u}(\tau) \cdot \varphi_{u,t}(\tau)$

$\Longleftarrow$ Пусть φ_0 — хар. функция Q_0. Предположим, что процесс существует и найдем хар. функцию вектора $(x_{t_0}, \ldots, x_{t_n}), t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_{t_n} \\ \vdots \\ x_{t_0} \end{pmatrix}}_{\xi} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_{t_n} - x_{t_{n-1}} \\ \vdots \\ x_{t_1} - x_{t_0} \\ x_{t_0} \end{pmatrix}}_{\eta}$$

Тогда хар. функция $(x_{t_0}, \ldots, x_{t_n})$ равна

$\varphi_{t_0 \ldots t_n}(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) = \mathbb{E} e^{i \sum\limits_{j=1}^{n} x_{t_j} \lambda_j} = \mathbb{E} e^{i<\vec{x}, \vec{\lambda}>} = \mathbb{E} e^{i<\xi, \vec{\lambda}>} = \mathbb{E} e^{i<\eta, A^T \vec{\lambda}>} = \varphi_{x_{t_n} - x_{t_{n-1}}}(\lambda_n) \varphi_{x_{t_{n-1}} - x_{t_{n-2}}}(\lambda_n + \lambda_{n-1}) \ldots \varphi_{x_{t_1} - x_{t_0}}(\lambda_n + \ldots + \lambda_1) \varphi_{x_{t_0}}(\lambda_n + \ldots + \lambda_0) = \varphi_0(\lambda_n + \ldots + \lambda_0) \varphi_{0,t_1}(\lambda_n + \ldots + \lambda_1) \ldots \varphi_{t_{n-1}, t_n}(\lambda_n) = \varphi_{0, t_1 \ldots t_n}(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$

Запомним последнее равенство

$$\varphi_0(\lambda_n + \ldots + \lambda_0) \varphi_{0,t_1}(\lambda_n + \ldots + \lambda_1) \ldots \varphi_{t_{n-1}, t_n}(\lambda_n) = \varphi_{0, t_1 \ldots t_n}(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \tag{6.1}$$

Теперь отвлечемся от процесса. Для $\forall$ набора индексов $0 < t_1 < \ldots < t_n$ зададим хар. фукнцию $\varphi_{0, t_1 \ldots t_n}$ по формуле 6.1

Также положим $\varphi_{t_1 \ldots t_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \varphi_{0, t_1 \ldots t_n}(0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

Проверим, что набор хар. фукнций $\{\varphi_{t_1 \ldots t_n}, n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n\}$ удовлетворяют следствию.

Проверим свойство: $\varphi_{0, t_1 \ldots t_n}(0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)|_{\lambda_m = 0} = |$ по формуле 6.1 $| = \varphi_0(\lambda_n + \ldots + \lambda_0) \varphi_{0,t_1}(\lambda_n + \ldots + \lambda_1) \ldots \varphi_{t_{n-1}, t_n}(\lambda_n)|_{\lambda_m = 0} = \varphi_{t_{n-1}, t_n}(\lambda_n) \varphi_{t_{n-2}, t_{n-1}}(\lambda_n + \lambda_{n-1}) \ldots \varphi_{t_m, t_{m+1}}(\lambda_n + \ldots + \lambda_{m+1}) \varphi_{t_{m-1}, t_m}(\lambda_n + \ldots + \lambda_{m+1} + 0) \ldots \varphi_0(\lambda_n + \ldots + \lambda_{m+1} + \lambda_{m-1} + \ldots + \lambda_0) = |$ условие теоремы $| = \varphi_{t_{n-1}, t_n}(\lambda_n) \varphi_{t_{n-2}, t_{n-1}}(\lambda_n + \lambda_{n-1}) \ldots \varphi_{t_{m-1}, t_{m+1}}(\lambda_n + \ldots + \lambda_{m+1}) \ldots \varphi_0(\lambda_n + \ldots + \lambda_{m+1} + \lambda_{m-1} + \ldots + \lambda_0) = |$ по формуле 6.1 $| = \varphi_{0, t_1, \ldots, t_{m-1}, t_{m+1}, \ldots, t_n}(\lambda_0, \ldots, \lambda_{m-1}, \lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n)$

По следствию $\exists$ процесс $(X_t, t \geqslant 0)$ такой, что $\varphi_{t_1 \ldots t_n}$ — хар. функция $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \Rightarrow$ по построению хар. функции приращения будут независимы, соответственно будут выполнятся свойства

- $X_t - X_s \stackrel{d}{=} Q_{s,t}, 0 \leqslant s < t$
- $X_0 \stackrel{d}{=} Q_0$

■

7 Пункт 7

7.1 Пуассоновский процесс

Def. Процесс $(N_t, t \geqslant 0)$ называется пуассоновским процессом интенсивности $\lambda > 0$, если выполнены следующие свойства:

1. $N_0 = 0$ п.н.;
2. N_t имеет независимые приращения;
3. $N_t - N_s \sim Pois(\lambda(t-s)),\ t \geqslant s \geqslant 0$.

Утверждение. Пуассоновский процесс существует.

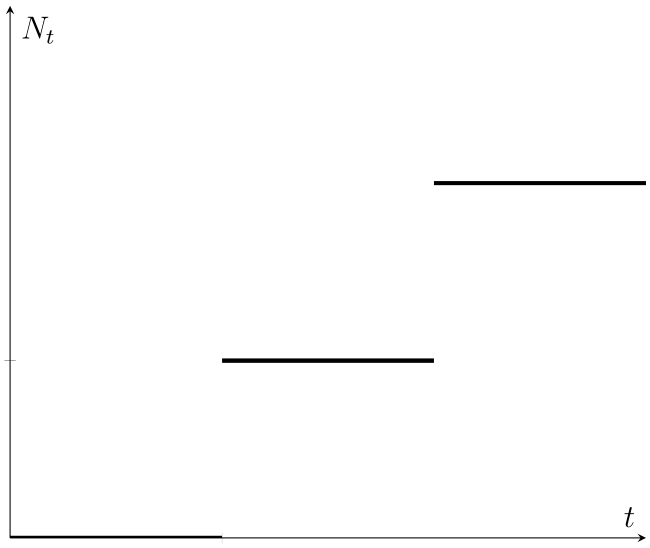
Доказательство: Пусть $\varphi_{s,t}(\tau)$ — хар. функция $Pois(\lambda(t-s))$. Тогда

$$\varphi_{s,t}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{i\tau k}\frac{(\lambda(t-s))^k}{k!}e^{-\lambda(t-s)} = e^{\lambda(t-s)(e^{i\tau}-1)} \Longrightarrow \varphi_{s,t}(\tau) = \varphi_{s,u}(\tau)\cdot\varphi_{u,t}(\tau)\ \forall 0 \leqslant s < u < t$$

По теореме процесс существует. ■

Наблюдения:

1. $N_t = N_t - N_0 + N_0 \sim Pois(\lambda t) \Longrightarrow N_t \in \mathbb{Z}_+$, то есть траектории целочислены.
2. $N_t - N_s \sim Pois(\lambda(t-s)) \Longrightarrow N_t \geqslant N_s\ \forall t \geqslant s \Longrightarrow$ траектории неубывающие.



7.2 Явная конструкция

Теорема (явная конструкция N_t).

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ — н.о.р.с.в. и $\xi_n \sim Exp(\lambda)$. Пусть $(X_t, t \geqslant 0)$ — процесс восстановления, построенный по ним, то есть

$$X_0 = 0,$$
$$X_t = \sup\{n : S_n \leq t\},\ t > 0$$

где $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$.

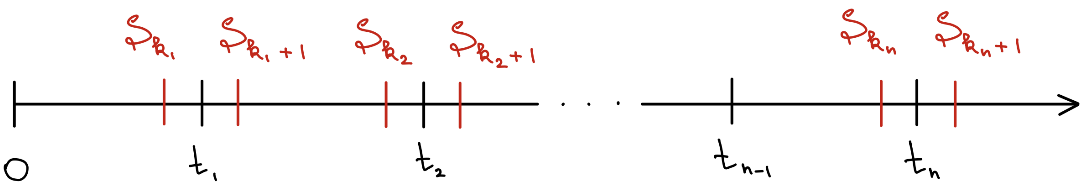
Тогда X_t — это пуассоновский процесс интенсивности $\lambda > 0$.

Доказательство:

1. $X_0 = 0$ по построению. Надо проверить независимость приращений X_t и найти их распределение.

2. Зафиксируем $n \in \mathbb{N},\ t_n > t_{n-1} > \ldots > t_1 > 0,\ k_n \geq k_{n-1} \geqslant \ldots \geqslant k_1 \geqslant 0, k_i \in \mathbb{Z}_+$. Хотим найти

$$P(X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = k_n - k_{n-1}, \ldots, X_{t_2} - X_{t_1} = k_2 - k_1, X_{t_1} = k_1) =?$$



Эта вероятность равна

$$P\left((S_1, \ldots, S_{k_1}) \in (0, t_1], (S_{k_1+1}, \ldots, S_{k_2}) \in (t_1, t_2], \ldots, (S_{k_{n-1}+1}, \ldots, S_{k_n}) \in (t_{n-1}, t_n], S_{k_{n+1}} > t_n\right).$$

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 1 & & \ldots & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

$$t_0 = k_0 = 0$$

Плотность вектора $(S_1, \ldots, S_n)$ равна

$$p_{S_1,\ldots,S_n}(x_1, \ldots, x_n) = p_{\xi_1}(x_1) \cdot p_{\xi_2}(x_2 - x_1) \cdot \ldots \cdot p_{\xi_n}(x_n - x_{n-1}) =$$

$$= \lambda e^{-\lambda x_1} \cdot \lambda e^{-\lambda(x_2 - x_1)} \cdot \ldots \cdot \lambda e^{-\lambda(x_n - x_{n-1})} I\{0 < x_1 < \ldots < x_n\} =$$

$$= \lambda^n e^{-\lambda x_n} I\{0 < x_1 < \ldots < x_n\}$$

В итоге,

$$P\left((S_1,\dots,S_{k_1})\in(0,t_1],(S_{k_1+1},\dots,S_{k_2})\in(t_1,t_2],\dots,(S_{k_{n-1}+1},\dots,S_{k_n})\in(t_{n-1},t_n],S_{k_{n+1}}>t_n\right)=$$

$$=\underset{\substack{(x_1,\dots,x_{k_1})\in(0,t_1],\\ \dots\\ (x_{k_{n-1}+1},\dots,x_{k_n})\in(t_{n-1},t_n],\\ x_{k_n+1}>t_n}}{\int\dots\int}\lambda^{k_n+1}e^{-\lambda x_{k_n+1}}I\{0<x_1<\dots<x_n\}dx_1\dots dx_{k_n+1}=$$

$$=\lambda^{kn}\int\limits_{t_n}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x_{k_n+1}}dx_{k_n+1}\cdot\prod_{j=1}^{n}\int\limits_{(t_{j-1},t_j]^{k_j-k_{j-1}}}\dots\int I\{x_{k_{j-1}+1}<\dots<x_{k_j}\}dx_{k_{j-1}+1}\dots dx_{k_j}=$$

$$=\lambda^{kn}e^{-\lambda t_n}\cdot\prod_{j=1}^{n}\frac{(t_j-t_{j-1})^{k_j-k_{j-1}}}{(k_j-k_{j-1})!}=\lambda^{\sum\limits_{j=1}^{n}(k_j-k_{j-1})}\exp(-\lambda\sum_{j=1}^{n}(t_j-t_{j-1}))\cdot\prod_{j=1}^{n}\frac{(t_j-t_{j-1})^{k_j-k_{j-1}}}{(k_j-k_{j-1})!}=$$

$$=\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{(\lambda(t_j-t_{j-1}))^{k_j-k_{j-1}}}{(k_j-k_{j-1})!}e^{-\lambda(t_j-t_{j-1})}\right)=$$

$$=\prod_{j=1}^{n}\left(P\left(X_{t_j}-X_{t_{j-1}}=k_j-k_{j-1}\right)\right)\sim Pois(\lambda(t_j-t_{j-1})).$$

Следовательно, приращения независимые и имеют пуассоновское распределение: $X_t-X_s\sim Pois(\lambda(t-s))$.

■

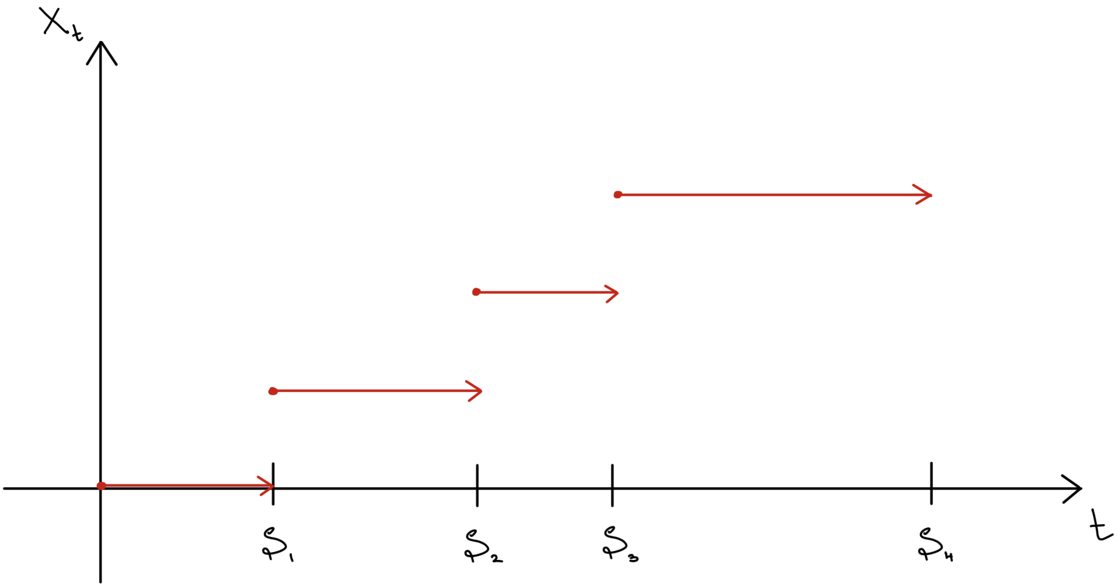
7.3 Свойства траекторий

Утверждение. У явной конструкции имеются следующие свойства траекторий:

1. Траектории не убывают и непрерывны справа.
2. Пусть Y_n — момент n-ого скачка X_t. Тогда $Y_1,Y_2-Y_1,\dots,Y_n-Y_{n-1}$ — независимые и $Y_j-Y_{j-1}\sim Exp(\lambda),\ Y_n\sim\Gamma(\lambda,n)$.
3. Процесс X_t п.н. имеет только единичные скачки.

Доказательство:

1. По построению.
2. У X_t скачки происходят в моменты времени S_n:



Но $S_j - S_{j-1} = \xi_j$ — независ. $Exp(\lambda)$, $S_n \sim \Gamma(\lambda, n)$, как сумма экспоненциальных распределений.

3. Можем «прыгнуть» на 2 и более только если какие-то из с.в. S_j совпали:

$$P(\exists \text{ скачки размера } \geqslant 2) \leqslant P(\exists n : S_n = S_{n+1}) = P(\exists n : \xi_n = 0) = 0,$$

т.к. с.в. имеют плотности. ■

Note. Всюду далее будем считать (когда потребуется), что задана именно явная конструкция пуассоновского процесса.

8 Пункт 8

8.1 Ковариационная функция

Def. Пусть $(X_t, t \in T)$ — случайный процесс. Функция

$$a(t) = \mathbb{E}X_t, \ t \in T$$

называется *функцией среднего процесса* X_t.
Функция

$$R(s,t) = cov(X_s, X_t), \ s, t \in T$$

называется *ковариационной функцией процесса* X_t.

Note. Конечномерное распределение гауссовского процесса определяется этими двумя функциями.

Def. Функция $r(s,t)$, $s,t \in T$ — *неотрицательно определенная* (в действительном смысле), если

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall t_1,\dots,t_n \in T\ \forall x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}\ \sum_{i,j=1}^{n} r(t_i,t_j)x_ix_j \geq 0$$

Утверждение. Ковариационная функция любого случайного L^2-процесса ($\mathbb{E}X_t^2 < \infty$) является симметричной и неотрицательно определенной.

Доказательство: Пусть X_t — L^2-процесс, а $R(s,t) = cov(X_s, X_t)$.

1. Симметрия следует из симметрии ковариации.

2. Докажем неотрицательную определенность. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $t_1,\dots,t_n \in T$ и $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}$, тогда

$$\sum_{i,j=1}^{n} R(x_i,x_j)x_ix_j = \sum_{i,j=1}^{n} cov(X_{t_i},X_{t_j})x_ix_j = \sum_{i,j=1}^{n} cov(x_i \cdot X_{t_i}, x_j \cdot X_{t_j}) =$$

$$= cov\left(\sum_{i=1}^{n} x_iX_{t_i}, \sum_{j=1}^{n} x_jX_{t_j}\right) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} x_iX_{t_i}\right) \geq 0$$

■

8.2 Гауссовский случайный процесс

Def. Случайный процесс $(X_t, t \in T)$ называется *гауссовским*, если все его конечномерные распределения — гауссовские, то есть $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall t_1,\dots,t_n \in T$ вектор $(X_{t_1},\dots,X_{t_n})$ является гауссовским.

Теорема (о существовании гауссовских процессов).

Пусть T — некоторое множество, пусть $(a(t), t \in T)$ — произвольная функция, а $(R(s,t), s,t \in T)$ — симметричная и неотрицательно определенная на $T \times T$, тогда существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ и гауссовский случайный процесс $(X_t, t \in T)$ на нём такой, что $a(t)$ — функция среднего, а $R(s,t)$ — ковариационная функция.

Доказательство: $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall t_1,\dots,t_n \in T$ рассмотрим $a(t_1,\dots a_n) = (a(t_1),\dots,a(t_n))$ и $\Sigma(t_1,\dots,t_n) \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ такая, что $\Sigma(t_1,\dots,t_n)_{i,j} = R(t_i,t_j)$. По свойствам $R(s,t)$ Σ неотрицательно определена и симметрична. Рассмотрим многомерное нормальное распределение $\mathcal{N}\left(a(t_1,\dots a_n), \Sigma(t_1,\dots a_n)\right))$.

Проверим условия симметрии и согласованности. Воспользуемся характеристическими функциями.

$$\varphi_{t_1,\dots,t_n}(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = e^{(\vec{\lambda}, a(t_1,\dots,t_n)) - \frac{1}{2}(\Sigma(t_1,\dots,t_n)\vec{\lambda},\vec{\lambda})} = e^{i\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j a(t_j) - \frac{1}{2}\sum\limits_{j,k=1}^{n} R(t_j,t_k)\lambda_j\lambda_k}$$

- Симметрия тривиальна

- Пусть $\lambda_n = 0$, тогда

$$\varphi_{t_1,\dots,t_n}(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1},0) = e^{i\sum\limits_{j=1}^{n-1}\lambda_j a(t_j) - \frac{1}{2}\sum\limits_{j,k=1}^{n-1} R(t_j,t_k)\lambda_j\lambda_k} = \varphi_{t_1,\dots,t_{n-1}}(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1})$$

В итоге по теореме Колмогорова существует случайный процесс с такими конечномерными распределениями. Так как эти распределения гауссовские, по построению и процесс будет гауссовским, при этом функции выше $(a(t), R(s,t))$ и будут его характеристиками.

■

9 Пункт 9

9.1 Винеровский процесс, два определения

Def. Процесс $(W_t, t \geqslant 0)$ называется винеровским (или процессом броуновского движения), если

1. $W_0 = 0$ п.н.
2. W_t имеет независимые приращения
3. $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s), \forall t > s \geqslant 0$

4* W_t имеет непрерывные траектории (пока это свойство игнорируем)

Утверждение. Винеровский процесс (свойства 1-3) существует

Доказательство:

По теореме о существовании процессов с независимыми приращениями достаточно проверить, что хар. функции правильно перемножаются:

Пусть $0 \leqslant s < u < t$

$\varphi_{W_t - W_s}(\tau) \stackrel{?}{=} \varphi_{W_t - W_u}(\tau) \cdot \varphi_{W_u - W_s}(\tau)$

Так как $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$, то $W_t - W_s = e^{-\frac{1}{2}\tau^2(t-s)} = e^{-\frac{1}{2}\tau^2(t-u)} \cdot e^{-\frac{1}{2}\tau^2(u-s)}$ ■

Дадим эквивалентное определение винеровского процесса

Теорема (эквивалентное определение винеровского процесса). Процесс $(W_t, t \geqslant 0)$ является винеровским $\Leftrightarrow$ выполняются следующие свойства

1. W_t — гаусовский процесс
2. $\mathbb{E}W_t = 0 \ \forall t \geqslant 0$
3. $cov(W_t, W_s) = min(t, s) \forall t, s \geqslant 0$

Доказательство:

$\Rightarrow$

1) Проверим, что W_t — гауссовский процесс. Для $\forall n \in N$ и $\forall 0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n$ рассмотрим вектор приращений $(W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}})^T$. По условию приращения независимые в совокупности и нормальные (или нули) $\Rightarrow$ это гауссовский вектор.

Но вектор $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n})^T$ есть линейное преобразование веткора приращений $\Rightarrow$ он тоже гауссовский $\Rightarrow W_t$ — гауссовский процесс.

2) $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s) \Rightarrow W_t - \underset{0}{W_0} \sim \mathcal{N}(0,t) \forall t \geqslant 0 \Rightarrow EW_t = 0$

3) Найдем ковар. функцию W_t. Рассмотрим $cov(W_t, W_s) = |$ пусть $t > s| = cov(W_t - W_s + W_s, W_s) =$ $\underbrace{cov(W_t - W_s, W_s)}_{0 \text{ т.к. независимы по опр.}} + cov(W_s, W_s) = DW_s = s$ (т.к. $W_s \sim \mathcal{N}(0, s)$)

Для случая $t <= s$ получили бы $t \Rightarrow cov(W_t, W_s) = min(t, s)$

$\Leftarrow$ Проверим существование процесса с указанными свойствами. Казалось бы, зачем нам это делать? «Это представляет определенный интерес». Согласно теореме о существовании гауссовских процессов необходимо проверить неотрицательную определенность ковариационной функции, то есть минимума на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, тогда

$$\sum_{i,j=1}^{n} \min(t_i, t_j) x_i x_j = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\int_0^\infty I_{[0,t_i]}(y) I_{[0,t_j]}(y) dy \right) x_i x_j =$$
$$= \int_0^\infty \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left(x_i I_{[0,t_i]}(y) \cdot x_j I_{[0,t_j]}(y) \right) dy \right) = \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^{n} x_i I_{[0,t_i]}(y) \right)^2 dy \geq 0$$

Значит по теореме такой процесс существует. Теперь надо проверить свойства из изначального определения.

1. Так как процесс W_t гауссовский, $W_0 \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$. По условию $a = 0$ и $\sigma^2 = \mathbb{D}W_0 = \min(0,0) = 0$, откуда $W_0 = 0$ почти наверное.

2. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $0 \leq 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. Надо проверить, что приращения независимы. Вектор приращений является линейным преобразованием гауссовского вектора, то есть гауссовский вектор. Тогда достаточно проверить некореллированность компонент вектора приращений $(W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_{n-1}} - W_{t_n})$. Посчитаем ковариации, зная ковариационную функцию. Пусть $t_0 = 0$ и $k > j \geq 1$

$$cov(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}, W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) =$$
$$= cov(W_{t_k}, W_{t_j}) - cov(W_{t_{k-1}}, W_{t_j}) - cov(W_{t_k}, W_{t_{j-1}}) + cov(W_{t_{k-1}}, W_{t_{j-1}}) =$$
$$= \min(t_k, t_j) - \min(t_{k-1}, t_j) - \min(t_k, t_{j-1}) + \min(t_{k-1}, t_{j-1}) =$$
$$= t_j - t_j - t_{j-1} + t_{j-1} = 0$$

3. Заметим, что $\forall t > s \geq 0$ $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$ так как это линейное преобразование гауссовского вектора. $a = 0$ по линейности, а дисперсия

$$\mathbb{D}(W_t - W_s) = cov(W_t - W_s, W_t - W_s) = cov(W_t, W_t) - 2 \cdot cov(W_t, W_s) + cos(W_s, W_s) = t - 2s + s = t - s$$

■

10 Пункт 10

10.1 Модификация случайного процесса

Def. Процесс $(X_t, t \in T)$ — модификация процесса $(Y_t, t \in T)$, если $\forall t \in T$ $P(X_t = Y_t) = 1$.

Теорема (о непрерывной модификации, Колмогоров) (б/д).

Пусть $(X_t, t \in [a, b])$ таков, что $\exists C, \varepsilon, \alpha > 0$ такие, что $\forall s, t \in [a, b]$

$$\mathbb{E}|X_t - X_s|^\alpha \leq c \cdot |t - s|^{1+\varepsilon}$$

Тогда у процесса X_t существует модификация, все траектории которой непрерывны.

10.2 Непрерывная модификация для винеровского процесса

Утверждение. У винеровского процесса существует непрерывная модификация (модификация с непрерывными траекториями).

Доказательство: Пусть $\alpha = 4$, тогда $\mathbb{E}(W_t - W_s)^4 = 3(t-s)^2$. Тогда по теореме Колмогорова W_t допускает непрерывную модификацию на $[a, b]$ $\forall a < b$. Пусть $(W_t^{(n)}, t \in [n, n+1])$ — непрерывная модификация W_t на $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Рассмотрим $\widetilde{W}_t = W_t^{(n)}$, если $t \in [n, n+1)$, а $n \in \mathbb{Z}_+$. Проблема в том, что в целых точках (и только в них) может быть разрыв при склейке различных модификаций.

$$\begin{cases} P\left(W_{n+1}^{(n)} = W_{n+1})\right) = 1 \\ P\left(W_{n+1}^{(n+1)} = W_{n+1})\right) = 1 \end{cases} \Longrightarrow P\left(W_{n+1}^{(n)} = W_{n+1}^{(n+1)}\right) = 1 \Longrightarrow P\left(\exists n: \ W_{n+1}^{(n)} \neq W_{n+1}^{(n+1)}\right) = 0$$

А значит $\widetilde{W}_t$ имеет почти непрерывные траектории. Тогда положим

$$\widetilde{\widetilde{W}}_t(\omega) = \begin{cases} \widetilde{W}_t(\omega), & \text{если траектория } \widetilde{W}_t(\omega) \text{ непрерывна} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Тогда $\widetilde{\widetilde{W}}_t$ является модификацией $\widetilde{W}_t$, которая является модификацией W_t (модификация моей модификации — моя модификация). Значит построили нужную непрерывную модификацию.

■

Теорема (б/д). (Пэли, Зигмунд, Винер)

С вероятностью 1 траектория W_t не дифференцируема ни в одной точке $\mathbb{R}_+$

10.3 ЗПЛ для винеровского процесса

Теорема (б/д). Для винеровского процесса верен закон повторного логарифма в следующем виде

$$P\left(\lim_{t\to\infty}\sup_{s\geq t}\frac{W_s}{\sqrt{2s\log\log s}}=1\right)=1$$

11 Пункт 11

11.1 Пространство $L^2(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathcal{P})$ случайных величин

Def. Пусть $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$ — вероятностное пространство. Тогда пространством $L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$ называется пространство случайных величин на $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$ с конечным вторым моментом:

$$L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})=\{\xi\mid E|\xi|^2<+\infty\}$$

11.1.1 Свойства пространства L^2

1. Линейное пространство
   Если $\xi,\eta\in L^2, a,b\in\mathbb{R}$, то $a\xi+b\eta\in L^2$
2. "Почти"нормированное пространство
   Функция $||\xi||=\sqrt{E\xi^2}$ обладает свойствами нормы:
   - $||a\xi||=|a|\cdot||\xi||, a\in\mathbb{R}$
   - $||\xi+\eta||\leqslant||\xi||+||\eta||$

   Note. если вместо случайных величин рассмотреть их классы эквивалентности
   $$\overline{\xi}=\{\eta|\eta=\xi \text{ п.н. }\}$$
   то $||\cdot||$ станет настоящей нормой,
   $$||\overline{\xi}||=0\Leftrightarrow\overline{\xi}=0$$
3. Сходимость в пространстве L^2
   Сходимость задается следующим образом:
   $\xi_n\xrightarrow{L^2}\xi$, если $\underbrace{E|\xi_n-\xi|^2}_{||\xi_n-\xi||^2}\to 0$ при $n\to\infty$
   Пространство L^2 относительно такой сходимости является полным:
   последовательность $\{\xi_n, n\in\mathbb{N}\}$ сходится в L^2 $\Leftrightarrow$ она фундаментальна, т.е. $||\xi_n-\xi_m||\to 0$ при $n,m\to+\infty$

4. Скалярное произведение в L^2
   Задается по формуле $<\xi,\eta>_{L^2}= E\xi\eta$
   Выполнено неравенство Коши-Буnаковского:

$$|<\xi,\eta>| = |E\xi\eta| \leqslant \sqrt{E\xi^2\cdot E\eta^2} = ||\xi||\cdot||\eta||$$

11.2 Скалярное произведение

Лемма. (непрерывность скалярного произведения)

Если $\xi_n \xrightarrow{L^2} \xi, \eta_n \xrightarrow{L^2} \eta$, где $\xi_n, \xi, \eta_n, \eta \in L^2$, то $|<\xi,\eta>| = E\xi_n\eta_n \to E\xi\eta =<\xi,\eta>$

Доказательство:

Рассмотрим $|E\xi_n\eta_n - E\xi\eta| = |E\xi_n\eta_n - E\xi\eta_n + E\xi\eta_n - E\xi\eta| \leqslant |E(\xi_n-\xi)\eta_n| + |E(\eta_n-\eta)\xi|) \leqslant$ |нер-во КБ| $\leqslant \sqrt{E(\xi_n-\xi)^2E\eta_n^2} + \sqrt{E(\eta_n-\eta)^2E\xi^2}$

$E(\eta_n-\eta)^2 \to 0$ так как $\eta_n \xrightarrow{L^2} \eta$, а $E\xi^2 = \text{const}$

Аналогично $E(\xi_n-\xi)^2 \to 0$.

Осталось проверить, что $E\eta_n^2$ ограничено:

$||\eta_n|| \leqslant$ |нер-во треугольника| $\leqslant ||\eta-\eta_n|| + ||\eta||$, где $||\eta-\eta_n|| \to 0$ и $||\eta|| = const \Rightarrow ||\eta_n||$ ограничена.

Следовательно, $E\xi_n\eta_n \to E\xi\eta$ ■

Следствие. Если $\xi_n \xrightarrow{L^2} \xi$, то

1. $E\xi_n \to E\xi$
2. $E\xi_n^2 \to E\xi^2$
3. $\xi_n \xrightarrow{L^1} \xi, E|\xi_n-\xi| \to 0$

12 Пункт 12

12.1 Функции Хаара и Шаудера

$(H_k(t), k\in\mathbb{N}, t\in[0,1])$ — функции Хаара.

$H_1(t) = 1 \forall t\in[0,1]$

$H_2(t) = I_{[0,\frac{1}{2}]}(t) - I_{(\frac{1}{2},1]})(t)$

Далее $H_k(t) = 2^{\frac{n}{2}}(I_{A_k}(t) - I_{B_k}(t))$, где

$2^n < k \leqslant 2^{n+1}, A_k = [(k-2^n-1)2^{-n}, (k-2^n-1)2^{-n}+2^{-(n+1)}], B_k = ((k-2^n-1)2^{-n}+2^{-(n+1)}, (k-2^n)2^{-n}]$

Лемма. (свойства функций Хаара)

Последовательность $(H_k(t), k \in \mathbb{N})$ является полной ортонормированной системой функций в $L^2[0,1]$

Тогда выполнено равенство Парсеваля:

$$\forall f, g \in L^2[0,1] < f, g >= \int\limits_0^1 f(x)g(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} < f, H_k >< g, H_k >$$

Def. Функциями Шаудера $(S_k(t), t \in [0,1]), k \in \mathbb{N}$ называются $S_k = \int\limits_0^t H_k(x)dx$

Note. Носители функций $S_k(t), 2^n < k \leqslant 2^{n+1}$ не пересекаются

12.2 Вспомогательные леммы

Лемма. 1.

Пусть $\{a_k, k \in \mathbb{N}\}$ — последовательность такая, что $a_k = O(k^\varepsilon)$ для фиксированного $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$. Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot S_k(t)$$

задает непрерывную функцию на $[0,1]$ и сходится равномерно на $[0,1]$.

Доказательство: Рассмотрим частичные суммы, то есть $\sum\limits_{k=1}^{N} a_k S_k(t)$ и проверим, что они сходятся равномерно по $t \in [0,1]$. Оценим

$$\sup_{t \in [0,1]} \sum_{k > 2^m} |a_k| S_k(t)$$

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} |a_k| S_k(t) \le \left\{ |a_k| \le C \cdot k^\varepsilon \le C \cdot 2^{n+1} \right\} \le C \cdot 2^{(n+1)\varepsilon} \cdot \underbrace{\sum_{2^n+1}^{2^{n+1}} S_k(t)}_{\le 2^{-1-n/2}} \le$$

$$\le |\text{носители не пересекаются}| \le C \cdot 2^{(n+1)\varepsilon} \cdot 2^{-1-n/2} = C \cdot 2^{(n+1)\varepsilon - 1 - n/2} \le C \cdot 2^{(\varepsilon - 0.5)n} \to 0$$

Откуда

$$\sup_{t \in [0,1]} \sum_{k > 2^m} |a_k| S_k(t) \le \sum_{n > m} C \cdot 2^{(\varepsilon - 0.5)n} \to 0$$

Тогда получили равномерную сходиомсть и, так как частичные суммы непрерывны, непрерывен и ряд.

■

Лемма. 2.

Пусть $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ — независимые из $\mathcal{N}(0,1)$ Тогда $\forall C > \sqrt{2}$ с вероятностью 1 будет верно, что, начиная с некоторого $n = n(\omega)$ $|\xi_n| \le C \cdot \sqrt{\log n}$.

Доказательство: Надо доказать, что $P\left(\{A_n\} \text{ б.ч.}\right) = 0$, где $A_n = \left\{|\xi_n| > C \cdot \sqrt{\log n}\right\}$. По лемме Бореля-Кантелли достаточно показать, что $\sum\limits_n P(A_n) < \infty$.

$$P(A_n) = P(|\xi_n| > C \cdot \sqrt{\log n}) = 2 \int\limits_{C\cdot\sqrt{\log n}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2 \int\limits_{C\cdot\sqrt{\log n}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}+x-x} dx \le$$

$$\le \left\{e^{x-\frac{x^2}{2}} \text{ убывает при } x > 1\right\} \le \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{C\sqrt{\log n} - \frac{C^2 \log n}{2}} \int\limits_{C\cdot\sqrt{\log n}}^{\infty} e^{-x} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot e^{-\frac{C^2 \log n}{2}} = O\left(n^{-\frac{C^2}{2}}\right)$$

Так как $C > \sqrt{2}$, получаем, что ряд сходится. Откуда получаем требуемое.

■

Лемма. 3.

Пусть $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ — последовательность гауссовских векторов из $\mathbb{R}^m$. Если $\xi_n \xrightarrow{L_2} \xi$, то ξ тоже гауссовский.

Доказательство: Векторная сходимость расносильна покомпонентная. Пусть $\xi_n = (\xi_n^1, \ldots, \xi_n^m)$, а $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^m)$. В силу непрерывности скалярного произведения $\forall i \in \overline{1,m}$ $\mathbb{E}\xi_n^i \to \mathbb{E}\xi^i$. И еще верен такой факт: $\forall i,j \in \overline{1,m}$ $\mathbb{E}\xi_n^i\xi_n^j \to \mathbb{E}\xi^i\xi^j$. Векторная сходимость расносильна покомпонентная, отсюда $\mathbb{E}\xi_n \to \mathbb{E}\xi$ и $\mathbb{D}\xi_n \to \mathbb{D}\xi$.

Из схоимости векторов в L_2 следует сходимость по распределению. Тогда рассмотрим характеристические функции:

$$\varphi_{\xi_n}(t) = e^{i<\mathbb{E}\xi,t> - \frac{1}{2}<\mathbb{D}\xi\cdot t,t>} \varphi_{\xi_n}(t) \to \varphi_\xi(t)\, e^{i<\mathbb{E}\xi,t> - \frac{1}{2}<\mathbb{D}\xi\cdot t,t>} \to e^{i<\mathbb{E}\xi,t> - \frac{1}{2}<\mathbb{D}\xi\cdot t,t>}$$

Тогда ξ — гауссовский вектор.

■

12.3 Явная конструкция винеровского процесса

Теорема (явная конструкция винеровского процесса).

Пусть $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ — независимые случайные величины из $\mathcal{N}(0,1)$. Тогда

$$W_t = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k S_k(t),\ \ t \in [0,1]$$

является винеровским процессом на $[0,1]$ и имеет непрерывные траектории с вероятностью 1.

Доказательство: По лемме 2 с вероятностью 1 последовательность $|\xi_k| = O(\sqrt{\log k})$. Тогда по лемме 1 с вероятностью 1 (когда верна лемма 2) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k S_k(t)$ сходится равномерно и задает на $[0,1]$ непрерывную функцию. Осталось проверить, что данный процесс винеровский. $\forall n \in \mathbb{N}$ рассмотрим

$$W_t^n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k S_k(t)$$

Проверим, что $W_t^n \xrightarrow{L_2} W_t$. Покажем, что последовательность $\{W_t^n\}$ фундаментальна.

$$\left\|W_t^n - W_t^{m+n}\right\|^2 = \mathbb{E}\left(\sum_{k=n+1}^{m} \xi_k S_k(t)\right)^2 = \{\text{пользуемся независимостью } \xi_k\} = \sum_{k=n+1}^{m} S_k^2(t) \leq$$
$$\leq \{n = 2^s\} \leq \sum_{l=s}^{\infty} \left(2^{\left(-1-\frac{j}{2}\right)}\right)^2 \to 0 \text{ равномерно по } m$$

Это и означает, что последовательность фундаментальна. В силу полноты L_2, ряд W_t^n сходится в L_2, то есть $W_t^n \xrightarrow{L_2} Z_t$. Но $W_t^n \xrightarrow{\text{п.н.}} W_t$ по построению, откуда следует, что $W_t = Z_t$ почти наверное. Значит $W_t^n \xrightarrow{L_2} W_t$.

Воспользуемся определением винеровского процесса через гауссовский.

1. $\mathbb{E}W_t = \{$ непрерывность скалярного произведения $\} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}W_t^n = 0$
2. Проверим ковариацию:

$$cov(W_t, W_s) = \mathbb{E}W_t W_s = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}W_t^n W_s^n = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k S_k(t)\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k S_k(s)\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} S_k(t) S_k(s) = \sum_{k=1}^{\infty} S_k(t) S_k(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle I_{[0,t]}, H_k\rangle \langle I_{[0,s]}, H_k\rangle =$$
$$= \{\text{равенство Парсеваля}\} = \langle I_{[0,t]}, I_{[0,s]}\rangle = \min\{t, s\}$$

3. Проверим, что $\forall N \in \mathbb{N}$ W_t^N — гауссовский процесс. Возьмем $\forall m \in \mathbb{N}$ и $t_1, \ldots, t_m \in [0,1]$, тогда $(W_{t_1}^m, \ldots, W_{t_m}^N)$ — гауссовский вектор, так как является линейным преобразованием вектора $(\xi_1, \ldots, \xi_N)$. Тогда все конечномерные распределения W_t^N гауссовские, откуда W_t^N гауссовский.

   Пусть $m \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_m \in [0,1]$ фиксированы. Тогда гауссовский вектор $(W_{t_1}^m, \ldots, W_{t_m}^N) \xrightarrow{L_2} (W_{t_1}, \ldots, W_{t_m})$. По лемме 3 вектор $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_m})$ гауссовский, откуда все конечномерные распределения W_t гауссовские, откуда W_t гауссовский

Тогда W_t винеровский.

■

Note. Построим винеровский процесс на $\mathbb{R}^+$. Для этого построим винеровский процесс W_t^1 на $[0,1]$ по прошлой теореме, потом к нему «приклеим» W_t^2 на $[1,2]$, взятый независимо от W_t^1 (в плане набора ξ_i

из формулировки теоремы). «приклеем» значит, что запустим W_t^2 из точки W_1^1. И так далее строим винеровский процесс W_t, строя последовательность W_t^m, будем приклеивать их последовательно друг к другу. Теперь формально

Следствие. Пусть $\left\{W_t^{(k)},\ t \in [0,1]\right\}$, $k \in \mathbb{N}$ — независимые (в плане $\xi_i^{(k)}$) явные конструкции винеровского процесса на $[0,1]$. Тогда

$$W_t = \left\{\sum_{l=1}^{k} W_1^{(l)} + W_{t-k}^{(k+1)},\ t \in (k, k+1]\right\}$$

являетcя винеровским процессом на $\mathbb{R}^+$ с почти наверное непрерывными траекториями.

Доказательство: Нужно проверить, что приращения распределены нормально и что они независимы.

Докажем независимость, рассмотрим $\forall 0 < s < u < t$.

$$W_t - W_u = W_t - \sum_{k=[u]+1}^{[t]} W_k + \sum_{k=[u]+1}^{[t]} W_k - W_u = (W_t - W_{[t]}) + (W_{[t]} - W_{[t]-1}) + \ldots + (W_{[u]+1} - W_u)$$

Все слагаемые такого вида независмы по построению (так как лежат внутри одного отрезка единичной длины). Аналогично

$$W_u - W_s = W_u - \sum_{k=[s]+1}^{[u]} W_k + \sum_{k=[s]+1}^{[u]} W_k - W_s = (W_u - W_{[u]}) + (W_{[u]} - W_{[u]-1}) + \ldots + (W_{[s]+1} - W_s)$$

Отсюда получаем, что это $W_t - W_u$ и $W_u - W_s$ независимы как функции от независимых случайных величин. Независимость в совокупности через аналогичное представление и переход к харфункциям приращений.

Осталось показать, что $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$. Воспользуемся тем же представлением

$$W_t - W_s = W_t - \sum_{k=[s]+1}^{[t]} W_k + \sum_{k=[s]+1}^{[t]} W_k - W_s = (W_t - W_{[t]}) + (W_{[t]} - W_{[t]-1}) + \ldots + (W_{[s]+1} - W_s)$$

И вспомним, что у независимых нормальных величин (внутри отрезка единичной длины нормальность и независимость по построению) при сложении складываются дисперсии, откуда следует нужный факт. Непрерывность траекторий и равенство в нуле нулю почти наверное очевидны из построения.

■

13 Пункт 13

13.1 Фильтрация

Def. Пусть $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathcal{P})$ — вероятностное пространство, пусть $T \subseteq \mathbb{R}$. Тогда набор σ-алгебр $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \in T)$ называется *фильтрацией* на $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathcal{P})$, если $\forall t, s \in T, s \le t$ выполнено

$$\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}.$$

Def. Случайный процесс $(X_t, t \in T)$ называется *согласованным с фильтрацией* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \in T)$, если $\forall t \in T$ X_t измерим относительно $\mathscr{F}_t$, т.е. $\mathscr{F}_{X_t} \subset \mathscr{F}_t$, где $\mathscr{F}_{X_t}$ — σ-алгебра, порожденная X_t.

Def. Если ξ — случайная величина, то *σ-алгеброй, порожденной* ξ, называется

$$\mathscr{F}_\xi = \{\{\xi \in B\}, B \in \beta(\mathbb{R})\} =: \sigma(\xi)$$

Def. Пусть $\{\xi_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ — набор случайных величин на $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathcal{P})$. Тогда *$\sigma$-алгеброй, порожденной наборами* $\{\xi_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$, называется наименьшая σ-алгебра, содержащая внутри все σ-алгебры $\mathscr{F}_{\xi_\alpha}, \alpha \in \mathfrak{A}$. Формально

$$\sigma\left(\xi_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\right) := \sigma\left(\bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathscr{F}_{\xi_\alpha}\right). (\subset \mathscr{F})$$

Def. Если $(X_t, t \in T)$ — случайный процесс, $T \subset \mathbb{R}$, то его *естественной фильтрацией* называется $\mathbb{F}^X = (\mathscr{F}_t^X, t \in T)$, где

$$\mathscr{F}_t^X = \sigma(X_s, s \le t, s \in T).$$

Note. Любой процесс согласован со своей естественной фильтрацией.

13.2 Марковский момент

Def. Пусть $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathcal{P})$ — вероятностное пространство, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \in T)$ — фильтрация на нем. Отображение

$$\tau : \Omega \to T \cup \{+\infty\}$$

называется *марковским моментом* относительно фильтрации $\mathbb{F}$, если $\forall t \in T$

$$\{\tau \le t\} \in \mathscr{F}_t.$$

Если к тому же $P(\tau < +\infty) = 1$, то τ называется *моментом остановки* относительно фильтрации $\mathbb{F}$.

Пример: Пусть $(X_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ — случайный процесс, а $\mathbb{F}^X$ — его естественная фильтрация. Тогда $\forall B \in \beta(\mathbb{R})$

$$\tau_B = \min\{n : X_n \in B\}$$

является марковским моментом относительно $\mathbb{F}^X$.

Доказательство:

$$\{\tau_B \le n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{X_k \in B\} \in \mathscr{F}_n^X; X_k \in \mathscr{F}_k^X \subset \mathscr{F}_n^X$$
$$\Rightarrow \tau_B \text{ — марковский момент.}$$

■

Наблюдается случайный процесс $(X_t, t \in T)$, в его рамках происходит случайный момент времени τ. Если $\forall t$ по значениям процесса до момента времени t мы можем однозначно сказать, наступил ли уже τ или нет, то τ является марковским моментом. Иначе τ не марковский момент.

13.3 Процессы Леви́

Def. Случайный процесс $(X_t, t \ge 0)$ называется *процессом Леви́*, если

1. $X_0 = 0$ п.н.
2. X_t имеет независимые приращения
3. Распределение приращений стационарное, т.к. $\forall t > s \ge 0, \forall h > 0$

$$X_t - X_s \overset{d}{=} X_{t+h} - X_{s+h}.$$

   (распределение $X_t - X_s$ зависит только от $t - s$)

Примеры. Винеровский процесс W_t, пуассоновский процесс N_t.

Def. Пусть τ — марковский момент относительно $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \in T)$, тогда

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : \ \forall t \in T \ \ \{t \le \tau\} \cap A \in \mathcal{F}_t\}$$

Note. Часто добавляют четвертое свойство, гласящее, что такой процесс должен иметь траектории, непрерывные справа. (Мы его заявим в теореме)

Теорема (строго марковское свойство).

Пусть $(X_t, t \ge 0)$ — процесс Леви с непрерывными справа траекториями, τ — момент остановки относительно $\mathbb{F}^X$ — естественной фильтрации процесса X_t. Тогда процесс

$$Y_t = X_{t+\tau} - X_\tau, t \ge 0$$

имеет те же конечномерные распределения, что и X_t и не зависит от $\mathscr{F}_\tau$.

Утверждение.

1. Пусть ξ, η — случайные векторы из $\mathbb{R}^m$. Если $\forall\ f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — ограниченной и непрерывной, $\mathbb{E}f(\xi) = \mathbb{E}f(\eta)$, то $\xi \stackrel{d}{=} \eta$.

2. Пусть ξ — случайный вектор из $\mathbb{R}^m$, $\mathscr{A}$ — σ-алгебра. Тогда ξ и $\mathscr{A}$ независимы $\Leftrightarrow \forall\ f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — ограниченной и непрерывной функции и $\forall\ A \in \mathscr{A}$ выполнено

$$\mathbb{E}(f(\xi) \cdot I_A) = \mathbb{E}f(\xi) \cdot P(A)$$

Доказательство:

1. $(\Leftarrow)$ Очевидно.

   $(\Rightarrow)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}^m$ $\cos\langle\lambda, x\rangle, \sin\langle\lambda, x\rangle$ — ограниченные непрерывные функции $\Rightarrow$ характеристические функции ξ и η одинаковы $\Rightarrow \xi \stackrel{d}{=} \eta$.

2. $(\Rightarrow)$ Очевидно.

   $(\Leftarrow)$ Проверим, что ξ и I_A независимы для $\forall\ A \in \mathscr{A}$. Рассмотрим совместную характеристическую функцию ξ и I_A:

$$\varphi_{\xi, I_A}(\lambda, t) = \mathbb{E}e^{i\langle\lambda,\xi\rangle + it\cdot I_A} = \mathbb{E}\left(e^{i\langle\lambda,\xi\rangle}\left(e^{it} \cdot I_A + I_{\overline{A}}\right)\right) = |\text{условие}| =$$
$$= \mathbb{E}e^{i\langle\lambda,\xi\rangle} \cdot e^{it} \cdot P(A) + \mathbb{E}e^{i\langle\lambda,\xi\rangle} \cdot P(\overline{A}) = \mathbb{E}e^{i\langle\lambda,\xi\rangle} \cdot \underbrace{\left(e^{it}P(A) + P(\overline{A})\right)}_{=\varphi_{I_A}(t)} = \varphi_\xi(\lambda)\varphi_{I_A}(t)$$

■

Доказательство строго марковского свойства (часть 1):

Убедимся в том, что X_τ — это случайная величина.

Рассмотрим для $n \in N$

$$\tau_n = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{k}{2^n} I\left\{\dfrac{k-1}{2^n} < \tau \le \dfrac{k}{2^n}\right\}, & \tau < +\infty \\ +\infty, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Заметим, что

1. $\tau_n \downarrow \tau$ п.н.

2. $X_{\tau_n} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} X_{k/2^n} I\left\{\dfrac{k-1}{2^n} < \tau \le \dfrac{k}{2^n}\right\}$ — это случайная величина, причем в силу непрерывности справа траекторий X_t выполнено

$$X_{\tau_n} \xrightarrow{\text{п.н.}} X_\tau \Rightarrow X_\tau \text{ — это случайная величина.}$$

3. τ_n — момент остановки относительно $\mathbb{F}^X$.

$$P(\tau_n < +\infty) = P(\tau < +\infty) = 1$$
$$\{\tau_n \le t\} = \left\{\tau_n \le \frac{l}{2^n}\right\} = \left| l = [t2^n] \right| = \left\{\tau \le \frac{l}{2^n}\right\} \stackrel{(*)}{\in} \mathscr{F}^X_{l/2^n} \subset \mathscr{F}^X_t$$

   $(*)$ т.к. τ — момент остановки.

Доказательство строго марковского свойства (часть 2):

Рассмотрим процесс $Y_t^n = X_{t+\tau_n} - X_{\tau_n}$.

Проверим, что он независим с $\mathscr{F}_\tau$ и что его конечномерные распределения совпадают с конечномерными распределениями исходного X_t

Зафиксируем $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}_+,\ A \in \mathscr{F}_\tau$. Пусть $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — ограниченная непрерывная функция. Хотим проверить, что

1. $\mathbb{E} f\left(Y_{t1}^n, \dots, Y_{tm}^n\right) = \mathbb{E} f\left(X_{t1}, \dots, X_{tm}\right)$
2. $\mathbb{E}[f\left(Y_{t1}^n, \dots, Y_{tm}^n\right) \cdot I_A] = \mathbb{E} f\left(Y_{t1}^n, \dots, Y_{tm}^n\right) \cdot P(A)$

В случае успеха будет доказана независимость Y_t^n и $\mathscr{F}_\tau$, а также совпадение конечномерных распределений.

$$\mathbb{E}\left[f\left(Y_{t1}^n, \dots, Y_{tm}^n\right) \cdot I_A\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(f\left(Y_{t1}^n, \dots, Y_{tm}^n\right) \cdot I_A \cdot I\left\{\tau_n = \frac{k}{2^n}\right\}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[f\left(X_{t1+k/2^n} - X_{k/2^n}, \dots, X_{tm+k/2^n} - X_{k/2^n}\right) \cdot I_A \cdot I\left\{\tau_n = \frac{k}{2^n}\right\}\right] =$$

Согласно марковскому свойству $\left(X_{t1+k/2^n} - X_{k/2^n}, \dots, X_{tm+k/2^n} - X_{k/2^n}\right)$ не зависит от $\mathscr{F}^X_{k/2^n}$ и распределен так же, как $(X_{t1}, \dots, X_{tm})$.

$$A \cap \left\{\tau_n = \frac{k}{2^n}\right\} = \underbrace{\left(\underbrace{A}_{\in \mathscr{F}_\tau} \cap \left\{\tau_n \le \frac{k}{2^n}\right\}\right)}_{\in \mathscr{F}^X_{k/2^n}} \setminus \underbrace{\left(A \cap \left\{\tau_n = \frac{k-1}{2^n}\right\}\right)}_{\mathscr{F}^X_{(k-1)/2^n}} \in \mathscr{F}^X_{k/2^n}$$

Продолжим:

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} f\left(X_{t1+k/2^n} - X_{k/2^n}, \dots, X_{tm+k/2^n} - X_{k/2^n}\right) \cdot \mathbb{E}\left[I_A \cdot I\left\{\tau_n = \frac{k}{2^n}\right\}\right] =$$

$$= \mathbb{E} f\left(X_{t1}, \dots, X_{tm}\right) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(I_A \cdot I\left\{\tau_n = \frac{k}{2^n}\right\}\right) = \mathbb{E} f\left(X_{t1}, \dots, X_{tm}\right) \cdot P(A).$$

1. $\Rightarrow$ подставляем $A = \Omega$.
2. используем п. (1):

$$\mathbb{E}[f\left(Y_{t1}^n, \dots, Y_{tm}^n\right) \cdot I_A] = \mathbb{E} f\left(Y_{t1}^n, \dots, Y_{tm}^n\right) \cdot P(A)$$

Доказательство строго марковского свойства (часть 3):

В силу непрерывности справа траекторий X_t, вектор

$$(Y_{t1}^n, \dots, Y_{tm}^n) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} (Y_{t1}, \dots, Y_{tm})$$

По теореме о наследовании сходимости

$$f\left(Y_{t1}^n, \dots, Y_{tm}^n\right) \xrightarrow{\text{п.н.}} f\left(Y_{t1}, \dots, Y_{tm}\right)$$

Функция f ограничена, по теореме Лебега

$$\mathbb{E}f\left(Y_{t1}^n, \dots, Y_{tm}^n\right) \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathbb{E}f\left(Y_{t1}, \dots, Y_{tm}\right)$$

$$\mathbb{E}\left(f\left(Y_{t1}^n, \dots, Y_{tm}^n\right) I_A\right) \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathbb{E}\left(f\left(Y_{t1}, \dots, Y_{tm}\right) \cdot I_A\right)$$

Следовательно,

$$\mathbb{E}\left(f\left(Y_{t1}, \dots, Y_{tm}\right) I_A\right) = \lim_n \mathbb{E}\left(f\left(Y_{t1}^n, \dots, Y_{tm}^n\right) \cdot I_A\right) \overset{(*)}{=}$$
$$\lim_n \mathbb{E}f\left(Y_{t1}^n, \dots, Y_{tm}^n\right) \cdot P(A) = \mathbb{E}f\left(Y_{t1}, \dots, Y_{tm}\right) \cdot P(A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_t \text{ независим с } \mathscr{F}_\tau. \text{ Также}$$

$$\mathbb{E}f\left(Y_{t1}, \dots, Y_{tm}\right) = \lim_n \mathbb{E}f\left(Y_{t1}^n, \dots, Y_{tm}^n\right) \overset{(**)}{=} \mathbb{E}f\left(Y_{t1}, \dots, Y_{tm}\right)$$

$(*)$ воспользовались п. (2) из второй части доказательства.

$(**)$ воспользовались п. (1) из второй части доказательства. ■

Следствие.

Если $(W_t, t \geq 0)$ — винеровский процесс, то для $\forall \tau$ — момента остановки относительно $\mathbb{F}^W$, процесс $X_t = W_{t+\tau} - W_\tau$ является винеровским и не зависит от $\mathscr{F}_\tau$.

14 Пункт 14

14.1 Закон 0 или 1 Колмогорова

Def. Пусть $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathcal{P})$ — вер. пр-во., $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ — н.с.в. Положим $\mathscr{F}_{\geqslant n} = \sigma(\xi_k, k \geqslant n)$

Хвостовой σ-алгеброй называется $X = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{\geqslant n}$

Теорема (Закон 0 или 1 Колмогорова). $\forall A \in X$ верно, что $P(A) \in \{0, 1\}$.

Доказательство: Пусть $\mathscr{A} = \sigma(\xi_n,\ n \in \mathbb{N}) = \mathscr{F}_{\geq 1}$, положим $\mathscr{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Тогда $\mathscr{F}_{\geq k}$ независима с $\mathscr{F}_n$ для $\forall k \geq n+1$. Тогда X независима с $\mathscr{F}_n$, это верно $\forall n \in \mathbb{N}$.

Пусть $\mathcal{E} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_n$, тогда $\mathcal{E}$ — алгебра, причем $\sigma(\mathcal{E}) = \mathscr{A}$. Тогда X независим как с $\mathcal{E}$, так и с $\mathscr{A}$. Но $X \subset \mathscr{A}$, откуда X независим сам с собой. Значит $\forall A \in X$ A независимо с самим собой. Откуда $P(A) \in \{0, 1\}$.

■

14.2 Момент достижения уровня винеровским процессом

Def. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ — винеровский процесс с непрерывными траекториями. Тогда для $\forall x \neq 0$:

$$\tau_x = \min\{t : W_t = x\} \text{ — первый момент достижения уровня } x.$$

Лемма. 1. τ_x — момент остановки относительно $\mathbb{F}^W$.

Доказательство: считаем, что траектории W_t непрерывны. Без ограничения общности считаем, что $x > 0$. Рассмотрим событие $\{\tau_x > t\} = \{\forall s \in [0,t], W_s \neq x\} = \{\forall s \in [0,t], W_s < x\} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \{\forall s \in [0,t], W_s \leqslant x - \frac{1}{k}\} = |\text{ непрерывность траекторий }| = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \bigcap\limits_{s \in [0,t] \cap \mathbb{Q}} \{W_s \leqslant x - \frac{1}{k}\} \in \mathbb{F}_t^W \Rightarrow \tau_x$ — марковский момент относительно $\mathbb{F}^W$.

Лемма. 2. Траектории W_t растут вверх неограниченно:

$$P\left(\overline{\lim_n} \frac{W_n}{\sqrt{n}} = +\infty\right) = 1$$

Доказательство: Пусть $\xi_n = W_n - W_{n-1}$, тогда ξ_n — н.с.в. Рассмотрим их хвостовую сигма-алгебру X. Для $C > 0$ введем

$$\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{W_n}{\sqrt{n}} < C\right\} \in X$$

Проверим принадлежность X. Рассмотрим $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{W_n}{\sqrt{n}} < C\right\} = \left\{\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{W_n - W_k}{\sqrt{n}} < C\right\} \in \mathscr{F}_{\geq k} = \sigma(\xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \ldots)$$

Значит $\left\{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{W_n}{\sqrt{n}} < C\right\} \in X$, откуда $P\left(\left\{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{W_n}{\sqrt{n}} < C\right\}\right) \in \{0, 1\}$ (по закону 0 или 1). Покажем, что 1 невозможна.

$$P\left(\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{W_n}{\sqrt{n}} < C\right\}\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m \geq n} \left\{\frac{W_m}{\sqrt{m}} \leq C - \frac{1}{k}\right\}\right) \ominus$$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m \geq n} \left\{\frac{W_m}{\sqrt{m}} \leq C - \frac{1}{k}\right\}\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{m \geq n} \left\{\frac{W_m}{\sqrt{m}} \leq C - \frac{1}{k}\right\}\right) \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{W_n}{\sqrt{n}} \leq C - \frac{1}{k}\right) = \Phi\left(C - \frac{1}{k}\right) \leq \Phi(C)$$

$$\ominus \lim_{k\to\infty} P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m\geq n} \left\{\frac{W_m}{\sqrt{m}} \leq C - \frac{1}{k}\right\}\right) \leq \Phi(C) < 1$$

Откуда единица недостижима, а значит вероятность нулевая.

Из леммы 2 следует, что уровень x будет превзойден п.н. Значит, п.н. найдется такое t, что $W_t = x$, т.е. $\tau_x < +\infty$ ■

■

15 Пункт 15

15.1 Принцип отражения

Теорема (Принцип отражения).

Пусть $(W_t,\ t \geq 0)$ — винеровский, τ — момент остановки относительно $\mathbb{F}^W$. Тогда процесс

$$Z_t = \begin{cases} W_t, & t \leq \tau \\ 2W_\tau - W_t, & t > \tau \end{cases} \text{ является винеровским}$$

Доказательство: Рассмотрим процесс $B_t = W_{t+\tau} - W_\tau$ — винеровский по строго марковскому свойству, который не зависит от $\mathscr{F}_\tau$. Тогда (B, τ, W^τ) совпадает по распределению с $(-B, \tau, W^\tau)$, где $W^\tau = \big(W_{\min\{t,\tau\}}, t \geq 0\big)$. Заметим, что

$$Z_t = W_{\min\{t,\tau\}} - B_{\max\{(t-\tau),0\}}$$
$$W_t = W_{\min\{t,\tau\}} + B_{\max\{(t-\tau),0\}}$$

Z_t и W_t — одинаковые функции от одинаково распределенных троек выше. Получаем, что Z и W одинаково распределены. Осталось проверить измеримость отображений из тройки (B, τ, W^τ) в $W_{\min\{t,\tau\}} - B_{\max\{(t-\tau),0\}}$ (проверяется как в доказательстве строго марковского свойства).

■

Таким образом, к τ_x можно применять как строго марковское свойство, так и принцип отражения. То есть в винеровском процессе можно сдвигать кооординаты не только по времени в марковских моментах, но и по времени первого достижения уровня.

15.2 Совместное распределение максимума и правого конца

Def. $M_t = \max\limits_{s\in[0,t]} W_s$.

Заметим, что $\{M_t \geq x\} = \{\tau_x \leq t\}$, откуда M_t — процесс, согласованный с $\mathbb{F}^W$.

Теорема (совместное распределение W_t и M_t).

Пусть $x, y \geq 0$, $t > 0$, тогда $P(W_t < y - x,\ M_t \geq y) = P(W_t > x + y)$

Доказательство: Если $y = 0$, то $P(W_t < -x) = P(W_t > x)$ — верно в силу симметрии распределения W_t. Если $y > 0$, то рассмотрим $\tau_y = \min\{t:\ W_t = y\}$ и отраженный процесс Z_t. Тогда

$$P(W_t < y - x,\ M_t \geq y) = P(W_t < y - x,\ \tau_y \leq t) = P(2W_{\tau_y} - Z_t < y - x,\ \tau_y \leq t) =$$
$$= P(Z_t > y + x,\ \tau_y \leq t) = P(Z_t > y + x) = \{\text{принцип отражения}\} = P(W_t > y + x)$$

■

15.3 Теорема Башелье

Теорема (Башелье).

M_t равно по распределению $|W_t|$.

Доказательство: Для $y > 0$ рассмотрим

$$P(M_t \geq y) = P(M_t \geq y,\ W_t < y) + P(M_t \geq y,\ W_t \geq y) = \{\text{первая вер-ть — теорема выше с } x = 0\} =$$
$$= P(W_t > y) + P(M_t \geq y,\ W_t \geq y) = P(W_t > y) + P(W_t \geq y) = 2P(W_t \geq y) = P(|W_t| \geq y)$$

■

16 Пункт 16

16.1 Мартингалы

Пусть $T \subseteq \mathbb{R}$

Def. Случайный процесс $(X_t, t \in T)$ называется мартингалом относительно фильтрации $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \in T)$ если

1. X_t согласован с $\mathbb{F}$
2. X_t — это L^1-процесс, то есть $E|X_t| < +\infty$
3. $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$ для $\forall t \geqslant s,\ s, t \in T$

Def. Если в свойстве 3) условие $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$ заменить на $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \geqslant X_s$, то процесс X_t называется субмартингалом относительно $\mathbb{F}^X$. Если $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \leqslant X_s$, то X_t называется супермартингалом относительно $\mathbb{F}$

Note. Если X_t — мартингал (суб, супер) относительно своей естественной фильтрации $\mathbb{F}^X$, то будем называть X_t просто мартингалом

16.2 Критерий мартингальности для процессов с незав. приращ.

Лемма. (критерий мартингальности для процессов с независимыми приращениями)

Пусть $(X_t, t \in T)$ — L^1-процесс с независимыми приращениями, тогда X_t это (суб, супер) мартингал $\Leftrightarrow$ $EX_t = a = const\ \forall t \in T$ (EX_t не убывает для субмартингалов, EX_t не возрастает для супермартингалов)

Доказательство: Заметим, что $X_t - X_s$ не зависит от $\mathcal{F}_s$, тогда

$$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(X_t - X_s|\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(X_s|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(X_t - X_s) + X_s$$

Откуда верно, что условие три для определения мартингала верно тогда и только тогда, когда верно условие теоремы.

■

Примеры.

1. Винеровский процесс — мартингал.

2. Пуассоновский процесс — субмартингал.

3. Случайное блуждание — мартингал тогда и только тогда, когда $\forall n\ \mathbb{E}\xi_n = 0$ (тут случайное блуждание — сумма независимых, но необязательно одинаково распределенных случайных величин).

4. Пусть ξ_n — независимые неотрицательные случайные величины, $\forall n \mathbb{E}\xi_n > 0$ (заметим, что случай, когда все ξ_i равны нулю почти наверное нам не подходит). Тогда пусть $\Pi_n = \prod\limits_{i=1}^{n} \xi_i$, $\Pi_0 = 0$. Откуда Π_n — мартингал относительно $(\sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n))$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{E}\xi_n = 1$.

5. Пусть ξ — случайная величина и $\mathbb{E}|\xi| < \infty$. Пусть $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \in T))$. Тогда $X_t = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_t)$ — мартингал относительно $\mathbb{F}$ — мартингалы Леви.

   Доказательство: Пусть $t > s$, тогда по телескопическому свойству УМО

   $$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_s) = X_s$$

   ■

6. Пусть $(X_t, t \in T)$ — мартингал относительно $\mathbb{F}$, $h(x)$ — выпуклая книзу функция. Тогда $Y_t = h(X_t)$ — субмартингал относительно $\mathbb{F}$.

Доказательство: Воспользуемся неравенством Йенсена при условии, что $t > s$:

$$\mathbb{E}(Y_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(h(X_t)|\mathcal{F}_s) \geq h(\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s)) = h(X_s) = Y_s$$

■

Следствие. $(W_t)^2$, e^{W_t} — субмартингалы.

16.3 Разложение Дуба для дискретного времени

Def. Процесс $(X_n, n \in \mathbb{N})$ предсказуемый относительно $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{Z}_+)$, если $\forall n$ X_n измерим относительно $\mathcal{F}_{n-1}$.

Теорема (разложение Дуба-Мейера).

Пусть $(X_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ — L^1-процесс, согласованный с фильтрацией $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{Z}_+)$. Тогда существует единственное (с точностью до равенства почти наверное) разложение следующего вда: $X_n = M_n + A_n$, где $(M_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ — мартингал относительно $\mathbb{F}$, а $(A_n, n \in \mathbb{N})$ — предсказуемый процесс относительно $\mathbb{F}$ и $A_0 = 0$ почти наверное.

Доказательство: Допустим, что разложение существует, и докажем его единственность. То есть $X_n = M_n + A_n$, тогда

$$A_n - A_{n-1} = \{\text{предсказуемость}\} = \mathbb{E}(A_n - A_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}) =$$
$$= \mathbb{E}(X_n - M_n - (X_{n-1} - M_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}) - \mathbb{E}(M_n - M_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1})$$

Отсюда в силу условия $A_0 = 0$ почти наверное получаем, что

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k - X_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}), \tag{16.1}$$

откуда A_n однозначно определен, а отсюда вытекает единственность разложения.

Теперь докажем существование разложения. Для этого определим A_n по формуле 16.1 и заметим, что такой процесс является предсказуемым. Осталось проверить мартингальность $M_n = X_n - A_n$ относительно $\mathbb{F}$.

$$\mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(X_n - A_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) - A_n = \{\text{по формуле 16.1}\} =$$
$$= \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) - A_{n-1} - \mathbb{E}(X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}) - A_{n-1} = \{\text{согласованность}\} =$$
$$= X_{n-1} - A_{n-1} = M_{n-1}$$

■

Следствие. X_n — субмартингал $\iff$ $(A_n, n \in \mathbb{N})$ в его разложении Дуба-Мейера является неубывающей.

17 Пункт 17

17.1 Теорема об остановке

Теорема (об остановке).

Пусть $(X_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ — L^1-процесс, согласованный с фильтрацией $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{Z}_+)$, тогда X_n — мартингал (субмартингал) $\iff$ для любых τ, σ — ограниченных марковских моментов относительно $\mathbb{F}$ с условием, что $\tau \le \sigma$ п. н. выполнено

$$\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_\sigma \text{ в случае субмартингальности } \le$$

Доказательство:

$\Longrightarrow$ пусть τ, σ — ограниченные марковские моменты и $\tau \le \sigma \le m$ почти наверное, тогда $\mathbb{E}|X_\sigma| \le \sum\limits_{i=1}^{m} \mathbb{E}|X_i| < \infty$, то есть $\mathbb{E}X_\tau$ и $\mathbb{E}X_\sigma$ конечны.

Пусть $l < m$, рассмотрим

$$\mathbb{E}(X_\tau \cdot I\{\tau = l\}) = \mathbb{E}(X_l \cdot I\{\tau = l, \sigma \ge l\}) = \mathbb{E}(X_l \cdot I\{\tau = l, \sigma = l\}) + \mathbb{E}(X_l \cdot I\{\tau = l, \sigma > l\}) =$$
$$= \left\{ \ \sigma, \tau \text{ — марк. м-ты, } \{\tau = l, \sigma > l\} \in \mathcal{F}_l \text{ и } \mathbb{E}(X_{l+1} | X_l) = X_l, \text{ по инт. св-ву УМО } \right\} =$$
$$= \mathbb{E}(X_l \cdot I\{\tau = l, \sigma = l\}) + \mathbb{E}(X_{l+1} \cdot I\{\tau = l, \sigma > l\}) =$$
$$= \sum_{k=l}^{l+1} \mathbb{E}(X_k \cdot I\{\tau = l, \sigma = k\}) + \mathbb{E}(X_{l+1} \cdot I\{\tau = l, \sigma > l+1\}) = \ldots =$$
$$= \sum_{k=l}^{m} \mathbb{E}(X_k \cdot I\{\tau = l, \sigma = k\}) + \mathbb{E}(X_{m+1} \cdot I\{\tau = l, \sigma > m\}) = \{\sigma \le m\} =$$
$$= \sum_{k=l}^{m} \mathbb{E}(X_k \cdot I\{\tau = l, \sigma = k\}) = \sum_{k=l}^{m} \mathbb{E}(X_\sigma \cdot I\{\tau = l, \sigma = k\}) =$$
$$= \mathbb{E}(X_\sigma \cdot I\{\tau = l, \sigma \ge l\}) = \mathbb{E}(X_\sigma \cdot I\{\tau = l\})$$

Суммируя по всем l от 0 до m, получаем, что $\mathbb{E}X_\sigma = \mathbb{E}X_\tau$.

Заметим, что в случае субмартингальности в третьем переходе и до конца меняем знаки с равенства на соответствующее неравенство.

$\Longleftarrow$ Пусть $k < n$, возьмем $A \in \mathcal{F}_k$, рассмотрим

$$\tau_A(\omega) = \begin{cases} k, & \omega \in A \\ n, & \omega \notin A \end{cases}$$

Заметим, что $\tau_A \le n = \sigma_A$ и τ_A — марковский момент относительно $\mathbb{F}$.

$$\{\tau_A \le t\} = \begin{cases} \varnothing, & t < k \text{ что лежит в } \mathcal{F}_t \\ \Omega, & t \ge n \text{ что лежит в } \mathcal{F}_t \\ A, & k \le t < n \text{ что лежит в } \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_t \end{cases}$$

Откуда во всех случаях $\{\tau_A \le t\} \in \mathcal{F}_t$. По условию $\mathbb{E}X_{\tau_A} = \mathbb{E}X_\sigma = \mathbb{E}X_n$ (в случае субмартингальности не больше). Разложим

$$\mathbb{E}X_{\tau_A} = \mathbb{E}(X_k \cdot I_A) + \mathbb{E}(X_n \cdot I_{\overline{A}}) = \mathbb{E}(X_n \cdot I_A) + \mathbb{E}(X_n \cdot I_{\overline{A}}) \Longrightarrow \forall A \in \mathcal{F}_k \ \mathbb{E}(X_k \cdot I_A) = \mathbb{E}(X_n \cdot I_A)$$

Учитывая, что X_k является $\mathcal{F}_k$-измеримой величиной получаем, что $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_k) = X_k$ (в случае субмартингальности не больше).

■

17.2 Следствие из теоремы об остановке

Следствие. Пусть $(X_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ — мартигнал относительно $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_n, n \in \mathbb{Z}_+)$. Пусть τ — момент остановки относительно $\mathbb{F}$, причем $\exists C > 0$, т.ч. $\forall n \in Z_+$

$$|X_{\min(\tau,n)}| \le C$$

Тогда

$$\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_0.$$

Доказательство:

Рассмотрим $\tau_n = \min(\tau, n)$ — ограниченный марковский момент относительно $\mathbb{F}$. Тогда по теореме об остановке $\mathbb{E}X_{\tau_n} = \mathbb{E}X_0$.

Заметим, что $X_{\tau_n} \xrightarrow{n} X_\tau, |X_{\tau_n}| \le C \Rightarrow$ по теореме Лебега $\mathbb{E}X_{\tau_n} \to \mathbb{E}X_\tau$. Но $\forall n$ $\mathbb{E}X_{\tau_n} = \mathbb{E}X_0$ Следовательно, $\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_0$. ■

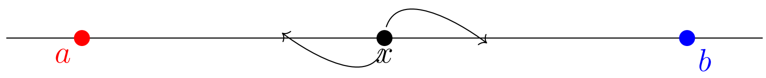
18 Пункт 18

18.1 Задача о разорении игрока

Игрок играет в казино.

- начальные деньги: $x \in \mathbb{Z}$ (каждая ставка — 1 ед. денег);
- вероятность выигрыша: p, проигрыша — $1 - p$;
- цель: набрать $b > x$ денег;
- проигрыш: деньги равны $a < x$;
- вопрос: какова вероятность проигрыша?

Наблюдаем блуждание на прямой:



Формально: $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ — н.о.р.с.в., $P(\xi_n = 1) = p$, $P(\xi_n = -1) = 1 - p = q$.

$$S_n = x + \xi_1 + \ldots + \xi_n, \quad S_0 = x$$

$$\tau = \min\{n : S_n \in \{a, b\}\} \text{ — окончание игры.}$$

Вопрос: $P(S_\tau = a) =?$ (вероятность проигрыша)

Наблюдение. τ — марковский момент относительно $\mathbb{F}^S$.

Утверждение. τ — момент остановки относительно $\mathbb{F}^S$.

Доказательство:

$$P(\tau = +\infty) = P(\forall n : a < S_n < b) = \lim_{k\to\infty} P\left(\forall n \le k \cdot (b-a),\ a < S_n < b\right) \le$$

Рассмотрим значения ξ блоками размера a:

$$|\xi_1, \ldots, \xi_{b-a}| \quad |\xi_{b-a+1}, \ldots, \xi_{2(b-a)}| \quad \ldots$$

$S_n \in (a, b) \Rightarrow$ блок не состоит из только 1 или только -1 (т.к. иначе вышли бы за границу).

$$\le \lim_{k\to\infty} P\left(\left(\xi_1, \ldots, \xi_{(b-a)}\right), \ldots, \left(\xi_{(k-1)(b-a)+1}, \ldots, \xi_{k(b-a)}\right) \neq (1, \ldots, 1), (-1, \ldots, -1)\right) =$$
$$= \lim_{k\to\infty} (\underbrace{1 - p^{b-a} - q^{b-a}}_{<1})^k$$

■

Теперь рассмотрим два случая: симметричный и несимметричный.

1. $p = q = \frac{1}{2}$. Здесь S_n — мартингал. Заметим, что $|S_{\min(\tau,n)}| \le max(|a|, |b|)$, откуда, по следствию из теоремы об остановке, $\mathbb{E}S_\tau = \mathbb{E}S_0 = x$, но $S_\tau \in \{a, b\}$, следовательно

$$\mathbb{E}S_\tau = a \cdot P(S_\tau = a) + b \cdot P(S_\tau = b).$$

Так как $P(S_\tau = a) + P(S_\tau = b) = 1$, откуда $P(S_\tau = a) = \frac{b-x}{b-a}$.

2. $p \neq q$. Тут нужен другой мартингал, что неприятно. Заметим, что $X_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$ — мартингал относительно $\mathbb{F}^S$, то есть

$$\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} = \left(\frac{q}{p}\right)^{x} \cdot \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{q}{p}\right)^{\xi_j} \iff \mathbb{E}\left(\frac{q}{p}\right)^{\xi_j} = 1$$

Проверим, что матожидание равно единице:

$$\mathbb{E}\left(\frac{q}{p}\right)^{\xi_j} = \frac{q}{p} \cdot p + \left(\frac{q}{p}\right)^{-1} \cdot q = 1$$

Значит X_n — мартингал. S_n ограничен до τ, а значит и $\forall n \ |X_{\min(\tau,n)}| \leq \max\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{a}, \left(\frac{q}{p}\right)^{b}\right)$, откуда, по следствию из теоремы об остановке, $\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_0 = \left(\frac{q}{p}\right)^{x}$, но

$$\mathbb{E}X_\tau = \left(\frac{q}{p}\right)^{a} \cdot P(S_\tau = a) + \left(\frac{q}{p}\right)^{b} \cdot P(S_\tau = b)$$

Откуда $P(S_\tau = a) = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{b} - \left(\frac{q}{p}\right)^{x}}{\left(\frac{q}{p}\right)^{b} - \left(\frac{q}{p}\right)^{a}}$

19 Пункт 19

19.1 Опциональный момент

Def. Пусть $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ — фильтрация на $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathcal{P})$. Отображение $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ называется опциональным моментом относительно $\mathcal{F}$, если $\forall t \geq 0\ \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$.

Утверждение. τ — марковский $\Longrightarrow$ τ — опциональный.

Доказательство: $\{\tau < t\} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \left\{\tau \leq t - \frac{1}{k}\right\} \in \mathcal{F}_t$.

■

Пример: Пусть G — открытое множество, $(X_t, t \geq 0)$ — процесс с непрерывными справа траекториями. Тогда $\tau_G = \inf\{t \mid X_t \in G\}$ — опциональный момент относительно $\mathbb{F}^X$.

Доказательство:

$$\{\tau_G \geq t\} = \{\forall s < t\ X_s \notin G\} = \{\text{траектории непрерывны справа и } G \text{ открыто}\} =$$
$$= \{\forall s < t, s \in \mathbb{Q}\quad \underbrace{X_s \notin G}_{\in \mathcal{F}_s^X \subset \mathcal{F}_t^X}\} \Longrightarrow \{\tau_G \geq t\} \in \mathcal{F}_t^X$$

■

Теорема (об остановке для непрерывного времени) (б/д).

Пусть $(X_t, t \geq 0)$ — мартингал относительно $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$, имеющий непрерывные справа траектории. Пусть τ — ограниченный опциональный момент относительно $\mathbb{F}$. Тогда $\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_0$.

19.2 Модель Крамера-Лундберга

Пусть $X_t = y_0 + c\cdot t - \sum\limits_{k=1}^{N_t} \eta_k$, η_k — н.о.р.с.в. неотрицательные и независимые с пуассоновским процессом N_t интенсивности λ.

Разорение $X_t < 0$.

Предположения.

1. $\forall v > 0$ $\psi(v) = \mathbb{E}e^{v\eta_t} < \infty$ — хвосты легкие
2. Пусть $\mathbb{E}\eta_1 = a$ и $c - \lambda a > 0$

Лемма. Процесс X_t имеет независимые приращения.

Доказательство: Достаточно доказать, что процесс $Z_t = \sum\limits_{k=1}^{N_t} \eta_k$ имеет независимые приращения.

Пусть $0 < t_1 < \ldots < t_n, n \in \mathbb{N}$ фиксированы.

Рассмотрим совместную характеристическую функцию вектора $\left(Z_{t_1}, Z_{t_2} - Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_n} - Z_{t_{n-1}}\right)$: $|t_0 = 0, Z_0 = 0|$

$$\varphi_{Z_{t_1}, Z_{t_2} - Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_n} - Z_{t_{n-1}}}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \mathbb{E}e^{i\sum\limits_{j=1}^{n}\left(Z_{t_j} - Z_{t_{j-1}}\right)\lambda_j} =$$

$$= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(e^{i\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j\left(Z_{t_j} - Z_{t_{j-1}}\right)}\middle| N_{t_n} = k_n, \ldots, N_{t_1} = k_1\right)\right) \ominus$$

$$\mathbb{E}\left(e^{i\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j\left(Z_{t_j} - Z_{t_{j-1}}\right)}\middle| N_{t_n} = k_n, \ldots, N_{t_1} = k_1\right) =$$

$$= \mathbb{E}\left(e^{i\cdot\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j\cdot\left(\sum\limits_{k=k_{j-1}+1}^{k_j}\eta_k\right)}\middle| N_{t_n} = k_n, \ldots, N_{t_1} = k_1\right) = \{\eta_k \text{ независимы с } N_t\} =$$

$$= \mathbb{E}\left(e^{i\cdot\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j\cdot\left(\sum\limits_{k=k_{j-1}+1}^{k_j}\eta_k\right)}\right) = \prod_{j=1}^{n}\varphi_{\eta_1}(\lambda_j)^{k_j - k_{j-1}}$$

$$\ominus\ \mathbb{E}\prod_{j=1}^{n}\varphi_{\eta_1}(\lambda_j)^{N_{t_j} - N_{t_{j-1}}} = \{\text{независимость приращений } N_t\} = \prod_{j=1}^{n}\mathbb{E}\varphi_{\eta_1}(\lambda_j)^{N_{t_j} - N_{t_{j-1}}} =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} e^{\lambda\left(\varphi_{\eta_i}(\lambda_j) - 1\right)(t_j - t_{j-1})} = \prod_{j=1}^{n}\varphi_{Z_{t_j} - Z_{t_{j-1}}}(\lambda_j)$$

Лемма. $\mathbb{E}e^{-v(X_t - X_s)} = e^{(t-s)g(v)}$, где $g(v) = \lambda(\psi(v) - 1) - vc$, $t \geq s$, $v > 0$

Доказательство:

$$\mathbb{E}\left(e^{-v(X_t-X_s)}|N_t=m,N_s=k\right)=\mathbb{E}\left(e^{-vc(t-s)+v\cdot\sum\limits_{j=N_s+1}^{N_t}\eta_j}|N_t=m,N_s=k\right)=$$

$$=e^{-vc(t-s)}\cdot\mathbb{E}\left(e^{v\cdot\sum\limits_{j=k+1}^{m}\eta_j}|N_t=m,N_s=k\right)=e^{-vc(t-s)}\cdot\prod_{j=k+1}^{m}\mathbb{E}e^{v\eta_j}=e^{-vc(t-s)}\cdot(\psi(v))^{m-k}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(e^{-vc(t-s)}|N_t,N_s\right)\right)=e^{-vc(t-s)}\mathbb{E}\left(\psi(v)\right)^{N_t-N_s}=e^{-vc(t-s)}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(\psi(v))^k\cdot\frac{(\lambda(t-s))^k}{k!}e^{-\lambda(t-s)}=$$
$$=e^{-\lambda(t-s)(\psi(v)-1)-vc(t-s)}=e^{(t-s)g(v)}$$

■

Лемма. $Y_t=e^{-vX_t-tg(v)}$ — мартингал относительно $\mathbb{F}^X$.

Доказательство: Пусть $t>s$, рассмотрим

$$\mathbb{E}(Y_t|\mathcal{F}_s^X)=\mathbb{E}\left(e^{-v(X_t-X_s)-vX_s-tg(v)}|\mathcal{F}_s^X\right)=\{\text{лемма 1}\}=e^{-vX_s-tg(v)}\cdot\mathbb{E}e^{-v(X_t-X_s)}=$$
$$=\{\text{лемма 2}\}=e^{-vX_s-sg(v)}$$

■

Рассмотрим $\tau=\inf\{t\mid X_t<0\}$ — момент разорения. Процесс имеет непрерывные справа траектории, значит τ — опциональный момент относительно $\mathbb{F}^X$, причем $X_\tau\leq 0$. Тогда по теореме об остановке:

$$\mathbb{E}Y_0=e^{-vy_0}=\mathbb{E}Y_{\min(\tau,t)}\geq\mathbb{E}(Y_{\min(\tau,t)}\cdot I\tau\leq t)=\mathbb{E}(Y_\tau\cdot I\{\tau\leq t\})=\mathbb{E}\left(e^{-vX_\tau-\tau g(v)}\cdot I\left\{\tau\leq t\right\}\right)\geq$$
$$\geq\mathbb{E}\left(e^{-\tau g(v)}\cdot I\left\{\tau\leq t\right\}\right)\geq\min\left\{e^{-sg(v)}|s\in[0,t]\right\}\cdot P(\tau\leq t)\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow P(\tau\leq t)\leq e^{-vy_0}\cdot\max\left\{e^{sg(v)}|s\in[0,t]\right\}=\{\text{подберем } v \text{ так, чтобы } g(v)=0\}=e^{-vy_0}$$

1. Если $g(v)>0$, то $\max\limits_{0\leq s\leq t}e^{g(v)s}=e^{g(v)t}\xrightarrow[t\to+\infty]{}+\infty$;

2. Если $g(v)\leq 0$, то $\max\limits_{0\leq s\leq t}e^{g(v)s}=1$;

   Тогда
   $$P(\tau\leq t)\leq e^{-y_0v}\xRightarrow[t\to+\infty]{}P(\tau<+\infty)\leq e^{-y_0v}.$$

Вывод: надо взять наибольшее v, т.ч. $g(v)\leq 0$.

Изучим функцию $g(v)=\lambda(\psi(v)-1)-vc$, $t\geq s$, $v>0$.

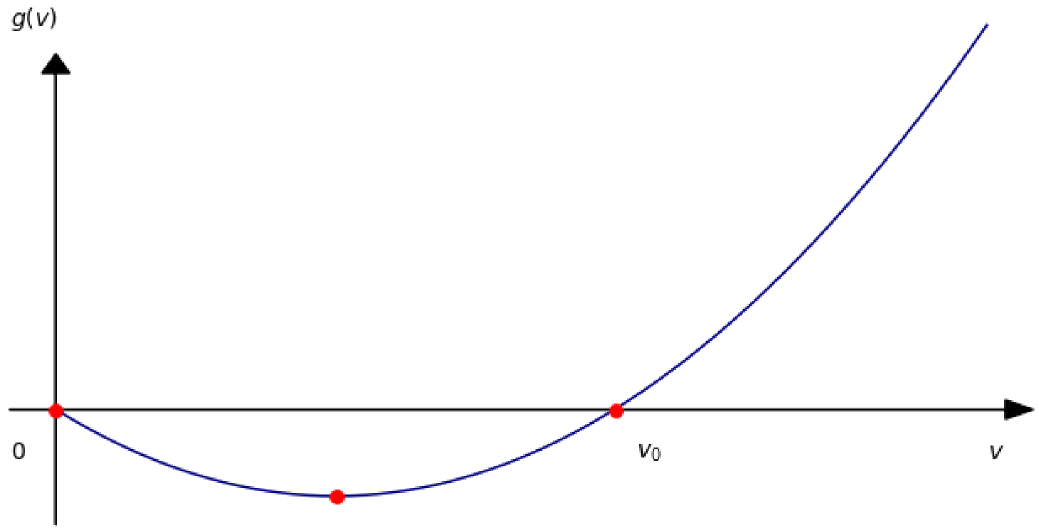
1. $g(0)=0$;

2. $g'(v)=\lambda\mathbb{E}\eta_1e^{v\eta_1}-c$ — возрастает,

   $g'(0)=\lambda a-c<0$;

3. $g''(0) = \lambda\mathbb{E}\left(\eta_1^2 e^{v\eta_1}\right) > 0$ — возрастающая функция;

4. $g(v)$ растет неограниченно вместе со своими производными.



Теорема (о вероятности разорения в модели Крамера-Лундберга).

Пусть $c - \lambda a > 0, \psi(v) = \mathbb{E}e^{v\eta_1}$ конечно для $\forall v > 0, g(v) = \lambda(\psi(v) - 1) - vc, v_0$ — единственный корень уравнения $g(v) = 0$ из $(0, +\infty)$. Тогда

$$P(\tau < +\infty) \leq e^{-y_0 v_0},$$

где $\tau = \inf\{t : X_t < 0\}$ — момент разорения.

20 Пункт 20

20.1 Марковские цепи с дискретным временем

Пусть $\mathcal{X}$ — не более чем счетное.

Def. Процесс $(X_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ со значениями в $\mathcal{X}$ называется марковской цепью (цепью Маркова), если выполняется марковское свойство: $\forall n\ \forall m < n - 1\ \forall 0 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_m < k < n\ \forall a_1, \ldots, a_m \in \mathcal{X}$ выполнено

$$P\left(X_n = j \mid X_k = i, X_{k_m} = a_m, \ldots, X_{k_1} = a_1\right) = P(X_n = j \mid X_k = i)$$

всегда, если вероятность $P(X_k = i, X_{k_m} = a_m, \ldots, X_{k_1} = a_1) > 0$

Пример немарковской цепи

Пусть $(S_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ — простейшее случайное блуждание. $X_n = sgn(S_n)$. Рассмотрим вероятности

$$\frac{1}{2} = P(X_n = 1 | X_{n-1} = 1, X_{n-2} = 0, X_{n-3} = -1) \neq$$

$$\neq P(X_n = 1 | X_{n-1} = 1, X_{n-2} = 1, X_{n-3} = 1, X_{n-4} = 0) = \frac{3}{4}$$

20.2 Независимость будущего и прошлого

Теорема (о независимости будущего и прошлого).

Пусть $(X_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ — марковская цепь. Обозначим

$$\begin{aligned} A &= \{X_n = a_n, \ldots, X_{k+1} = a_{k+1}\} \\ B &= \{X_k = a_k\} \\ C &= \{X_{k-1} = a_{k-1}, \ldots, X_0 = a_0\} \end{aligned}$$

Тогда $P(A \cap C|B) = P(A|B)P(C|B)$.

Доказательство: Если $P(B \cap C) = 0$, то все очевидно. Пусть $P(A \cap B \cap C) > 0$, тогда $P(A|BC) = P(A|B)$.

$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap C) &= P(X_n = a_n, \ldots, X_0 = a_0) = \\ &= P(X_n = a_n | X_{n-1} = a_{n-1} \ldots, X_0 = a_0) \cdot \\ &\cdot P(X_{n-1} = a_{n-1} | X_{n-2} = a_{n-2} \ldots, X_0 = a_0) \cdot \\ &\ldots \\ &\cdot P(X_{k+1} = a_{k+1} | X_k = a_k \ldots, X_0 = a_0) \cdot P(B \cap C) \end{aligned}$$

Но по марковскому свйству получаем, что

$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap C) &= P(X_n = a_n, \ldots, X_0 = a_0) = \\ &= P(X_n = a_n | X_{n-1} = a_{n-1}) \cdot \\ &\cdot P(X_{n-1} = a_{n-1} | X_{n-2} = a_{n-2}) \cdot \\ &\ldots \\ &\cdot P(X_{k+1} = a_{k+1} | X_k = a_k) \cdot P(B \cap C) = \prod_{j=k+1}^{n} P(X_j = a_j | X_{j-1} = a_{j-1}) \cdot P(B \cap C) \end{aligned}$$

Аналогично $P(A \cap B) = \prod\limits_{j=k+1}^{n} P(X_j = a_j | X_{j-1} = a_{j-1}) \cdot P(B)$. Отсюда получаем, что $P(A \cap B \cap C) = P(A|B) \cdot P(B \cap C)$, делим на $P(B)$ и получаем искомое.

■

20.3 Уравнения Колмогорова-Чепмена

Def. Множество значений $\mathcal{X}$ — фазовое пространство цепи.

Def. Распределение X_0 — начальное распределение цепи $\Pi(0)$, $p_i(0) = P(X_0 = i)$.

Def. Переходные вероятности цепи — $p_{ij}(k, n) = P(X_n = j | X_k = i)$, $k < n$, $i, j \in \mathcal{X}$.

Def. Матрицами переходных вероятностей $P(k, n) = (p_{ij}(k, n),\ i, j \in \mathcal{X})$.

Лемма. Свойства переходных вероятностей:

1. $p_{ij}(k,n) \in [0,1]$

2. $\forall i \in \mathcal{X} \ \sum\limits_{j \in \mathcal{X}} p_{ij}(k,n) = 1$

3. $p_{ij}(n,n) = I(i=j)$

4. Уравнения Колмогорова-Чепмена. $\forall k \leq l \leq n \ p_{ij}(k,n) = \sum\limits_{\alpha \in \mathcal{X}} p_{i\alpha}(k,l) p_{\alpha j}(l,n)$ То есть $P(k,n) = P(k,l) \cdot P(l,n)$.

Доказательство: Если вам это неочевидно, то как вы вообще до этого места дочитали? В четвертом просто представьте это как граф и все будет хорошо в вашей жизни. Формально:

$$p_{ij}(k,n) = P(X_n = j | X_k = i) = \sum_{\alpha \in \mathcal{X}} P(X_n = j, X_l = \alpha | X_k = i) =$$
$$= \sum_{\alpha \in \mathcal{X}} P(X_n = j | X_l = \alpha, X_k = i) \cdot P(X_l = \alpha | X_k = i) =$$
$$= \sum_{\alpha \in \mathcal{X}} P(X_n = j | X_l = \alpha) \cdot P(X_l = \alpha | X_k = i) = \sum_{\alpha \in \mathcal{X}} p_{i\alpha}(k,l) p_{\alpha j}(l,n)$$

■

Вся цепь определяется начальным распределением и переходными матрицами.

Теорема (о существовании цепи) (б/д).

Пусть $\forall i,j \in \mathcal{X}$ и $\forall 0 \leq k < n$ заданы $p_{ij}(k,n)$, удовлетворяющие свойствам выше, тогда существует марковская цепь $(X_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ с данными переходными вероятностями и произвольным начальным распределением.

21 Пункт 21

21.1 Однородные марковские цепи

Def. Марковская цепь $(X_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ называется *однородной*, если $\forall i,j \in \mathcal{X} \ \forall k,n,h \in \mathbb{Z}_+ : \ k \leqslant n \hookrightarrow p_{ij}(k,n) = p_{ij}(k+h, n+h)$

Note. Неформально это означает, что p_{ij} зависит только от $i, j, n-k$

Введем следующие обозначения:

- $p_{ij}(n) = p_{ij}(0,n) = p_{ij}(h, n+h)$ — переходные вероятности за n шагов
- $p(n) = (p_{ij}(n) | i,j \in \mathcal{X})$ — матрица переходных вероятностей за n шагов

- $p = p(1) = (p_{ij} | i, j \in \mathcal{X})$ — матрица переходных вероятностей за 1 шаг

Наблюдение Из уравнений Колмогорова-Чепмена: если $k \leqslant l \leqslant n$, то

$$P(k, n) = P(k, l)P(l, n)$$

В случае однородной цепи $\forall k, l$:

$$P(k + l) = P(k)P(l) \Rightarrow P(n) = P^n$$

Примеры.

1. Простейшее случайное блуждание $(S_n, n \in \mathbb{Z}_+)$, где $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ н.о.р.с.в., $P(\xi_n = 1) = p, P(\xi_n = -1) = 1 - p = q$

   Покажем, что является однородной марковской цепью

   $P(S_n = j | S_{n-1} = i, S_{n-2} = a_{n-2}, \ldots, S_1 = a_a) = P(S_{n-1} + \xi_n = j | S_{n-1} = i, S_{n-2} = a_{n-2}, \ldots, S_1 = a_a) = P(\underbrace{\xi_n = j - i | S_{n-1} = i, S_{n-2} = a_{n-2}, \ldots, S_1 = a_a}_{\text{независимые события}}) = P(\xi_n = j - i) = P(S_n = j | S_{n-1} = i)$

   $\Rightarrow S_n$ — однородная марковская цепь ($P(\xi_n = j - i)$ не зависит от n)

2. Ветвящиеся процессы

   $(X_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ — ветв. процесс Гальтона-Ватсона с законом размножения частиц ξ

   Покажем, что является однородной марковской цепью:

$$P(X_n = j | X_{n-1} = i, X_{n-2} = a_{n-2}, \ldots, X_1 = a_1) =$$
$$= P\left(\sum_{k=1}^{X_{n-1}} \xi_k^{(n)} = j | X_{n-1} = i, X_{n-1} = a_{n-2}, ..., X_1 = a_1\right) =$$
$$= P\left(\sum_{k=1}^{i} \xi_k^{(n)} = j | X_{n-1} = i, X_{n-2} = a_{n-2}, ..., X_1 = a_1\right) = P\left(\sum_{k=1}^{i} \xi_k^{(n)} = j\right) = P(X_n = j | X_{n-1} = i)$$

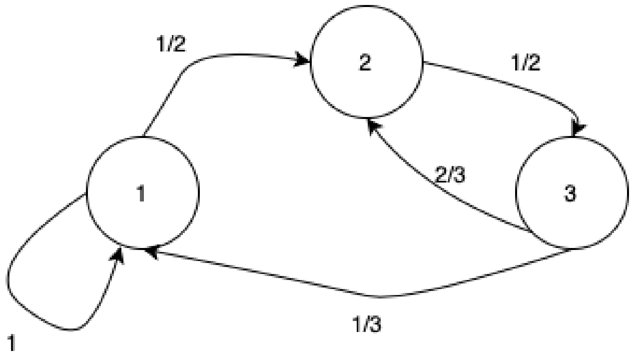
   Предпоследнее равенство следует из независимости величин.

   Заметим, что $P\left(\sum\limits_{k=1}^{i} \xi_k^{(n)} = j\right)$ не зависит от n, потому что все $\xi_k^{(n)}$ одинаково распределены $\Rightarrow X_n$ — однородная марковская цепь

   Note. Посмотрим на $P(X_n = j | X_{n-1} = i)$ которая в однородной марковской цепи должна быть равна $P(X_1 = j | X_0 = i)$. Здесь абстрагируемся от того, что X_0 это константа. Важно понимать, что можно игнорировать распределение X_0

3. Графы переходов

   Пусть $(X_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ — однородная марковская цепь с фазовым пространством $\mathcal{X} = \{1, 2, 3\}$ и матрицей переходных вероятностей $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$



Такую цепь удобно нарисовать графом

Тогда вершина 1 называется поглощающим состоянием

Def. Распределение $\Pi = (\pi_j, j \in \mathcal{X})$ вероятностей на $\mathcal{X}$ называется *стационарным* для матрицы переходных вероятностей P, если

$$\Pi P = \Pi$$

или

$$\forall j \in \mathcal{X}\ \pi_j = \sum_{\alpha \in \mathcal{X}} \pi_\alpha P_{\alpha,j}$$

Утверждение. Пусть $(X_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ — однородная марковская цепь с матрицей переходных вероятностей P. Пусть $\Pi(n) = (p_j(n), j \in \mathcal{X})$ — распределение цепи в момент времени n. Тогда если $\Pi(0)$ является стационарным для P, то

$$\forall n\ \Pi(n) = \Pi(0)$$

Доказательство:

По формуле полной вероятности

$$p_j(n) = P(X_n = j) = \sum_{\alpha \in \mathcal{X}} P(X_n = j | X_0 = \alpha) P(X_0 = \alpha)$$

т.е. $\Pi(n) = \Pi(0)P^n = |$ в силу стационарности $| = \Pi(0)$ ■

Смысл: если начальное распределение стационарно, то распределение цепи не меняется со временем.

Def. Распределение $\Pi = (\pi_j, j \in \mathcal{X})$ вероятностей на $\mathcal{X}$ называется *предельным* для матрицы переходных вероятностей P, если $\forall$ начального распределения $\Pi(0)$ выполнено:

$$\Pi(n) = \Pi(0)P^n \underset{n\to\infty}{\to} \Pi$$

то есть

$$p_j(n) \underset{n\to\infty}{\to} \pi_j\ \forall j \in \mathcal{X}$$

21.2 Эргодическая теорема

Теорема (Эргодическая).

Пусть P — матрица переходных вероятностей для конечного фазового пространства $\mathcal{X}$, $|\mathcal{X}| = N$. Если $\exists n_0 \in \mathbb{N}:$ все элементы матрицы P^{n_0} положительны, то $\exists$ такой набор $(\pi_j, j \in \mathcal{X})$, что

1. $\pi_j > 0$ и $\sum\limits_{j=1}^{N} \pi_j = 1$
2. Для $\forall i, j \in \mathcal{X}$ $p_{i,j}(n) \underset{n\to\infty}{\to} \pi_j$

Доказательство:

Обозначим $m_j(n) = \underset{i}{min}\, p_{i,j}(n)$ и $M_j(n) = \underset{i}{max}\, p_{i,j}(n)$.

Проверим, что $m_j(n) \leqslant m_j(n+1)$ и $M_j(n) \geqslant M_j(n+1)$.

Согласно уравнениям Колмогорова-Чепмена:

$$p_{i,j}(n+1) = \sum_{\alpha\in\mathcal{X}} p_{i,\alpha} \cdot \underbrace{p_{\alpha,j}(n)}_{\geqslant m_j(n)} \geqslant m_j(n) \cdot \underbrace{\sum_{\alpha\in\mathcal{X}} p_{i,\alpha}}_{1} = m_j(n) \Rightarrow m_j(n+1) \geqslant m_j(n)$$

Неравенство для $M_j(n)$ доказывается аналогично.

Будем доказывать, что $M_j(n) - m_j(n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Положим $\varepsilon = \underset{i,j}{min}\, p_{i,j}(n_0) > 0$. Тогда по уравнениям Колмогорова-Чепмена:

$$p_{i,j}(n+n_0) = \sum_{\alpha\in\mathcal{X}} p_{i,\alpha}(n_0) p_{\alpha,j}(n) = \sum_{\alpha\in\mathcal{X}} \left(p_{i,\alpha}(n_0) + \varepsilon p_{j,\alpha}(n) - \varepsilon p_{j,\alpha}(n)\right) p_{\alpha,j}(n) =$$

$$= \sum_{\alpha\in\mathcal{X}} \underbrace{p_{\alpha,j}(n)}_{m_j(n)\leq\cdot\leq M_j(n)} \underbrace{\left(p_{i,\alpha}(n_0) - \varepsilon p_{j,\alpha}(n)\right)}_{\geqslant 0} + \varepsilon \underbrace{\sum_{\alpha\in\mathcal{X}} p_{j,\alpha}(n) \cdot p_{\alpha,j}(n)}_{=p_{j,j}(2n)}$$

Отсюда получаем, что $p_{i,j}(n+n_0) \leqslant M_j(n) \underbrace{\sum_{\alpha\in\mathcal{X}} \left(p_{i,\alpha}(n_0) - \varepsilon p_{j,\alpha}(n)\right)}_{=1-\varepsilon} + \varepsilon p_{j,j}(2n) = M_j(n)(1-\varepsilon) + \varepsilon p_{j,j}(2n)$

Аналогично $p_{i,j}(n+n_0) \geqslant m_j(n)(1-\varepsilon) + \varepsilon p_{j,j}(2n)$.

Таким образом, $M_j(n+n_0) - m_j(n+n_0) \leq (1-\varepsilon)(M_j(n) - m_j(n))$. Учитывая, что последовательность $M_j(n) - m_j(n)$ монотонно убывает, их разность стремится к нулю (экспоненциально убывает).

Обозначим за $\pi_j = \lim\limits_{n\to\infty} m_j(n)$, $j \in \mathcal{X}$. Тогда

$$|p_{i,j}(n) - \pi_j| \leq |p_{i,j}(n) - m_j(n)| + \pi_j - m_j(n) \leq \underbrace{M_j(n) - m_j(n)}_{\to 0} + \underbrace{\pi_j - m_j(n)}_{\to 0} \to 0$$

Заметим, что $\pi_j \geq m_j(n_0) \geq \varepsilon > 0$, значит все числа положительные. И $\forall i \in \mathcal{X}$ $\underbrace{\sum\limits_{j=1}^{N} p_{i,j}(n)}_{\to \sum\limits_{j=1}^{N} \pi_j} = \underbrace{1}_{\to 1}$.

■

Def. Распределение из теоремы выше — эргодическое.

Следствие. Эргодическое распределение является предельным и единственным стационарным.

Доказательство: Из уравнений Колмогорова-Чепмена:

$$\underbrace{p_{i,j}(n+1)}_{\to \pi_j} = \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{N} p_{i,\alpha}(n) p_{\alpha,j}}_{\to \sum\limits_{\alpha=1}^{N} \pi_\alpha p_{\alpha,j}} \Longleftrightarrow \Pi = \Pi P$$

То есть P — стационарное. Пусть $\Pi(0)$ — произвольное начальное распределение и

$$\Pi(n) = \Pi(0) \cdot P^n \to \Pi(0) \cdot \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_N \end{pmatrix} = \Pi$$

Отсюда Π — предельное. А, так как предельное существует, получаем, что стационарное единственное.

■