Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

МНОГОМЕРНЫЙ АНАЛИЗ, ИНТЕГРАЛЫ И РЯДЫ
БИЛЕТЫ К ЭКЗАМЕНУ

II СЕМЕСТР

Лектор: *Редкозубов Вадим Витальевич*

h\nu

Автор: *Головко Денис*
Проект на Github

весна 2023

Содержание

1. Преобразование Абеля. Леммы Абеля для последовательностей и интегралов. Несобственные интегралы Римана и их свойства. Критерий Коши. Абсолютная и условная сходимости несобственных интегралов. Интегралы от неотрицательных функций. Признак сравнения и его следствия. Интегралы от знакопеременных функций. Признаки Дирихле и Абеля. Несобственные интегралы с несколькими особенностями.

Определение 1. Пусть $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ — (комлексные) последовательности, $m \in \mathbb{N}$, и пусть $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда $a_k = A_k - A_{k-1}$ $(A_0 = 0)$, и, значит,

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=m}^{n} A_k b_k - \sum_{k=m-1}^{n-1} A_k b_{k+1}.$$

Справедливо *преобразование Абеля*:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = A_n b_n - A_{m-1} b_m - \sum_{k=m}^{n-1} A_k (b_{k+1} - b_k).$$

Лемма 1 (Абель). *Пусть $\{a_n\}$ — (комплексная) последовательность, $\{b_n\}$ — монотонная последовательность, и пусть $\forall k$ $|A_k| \leqslant M$. Тогда:*

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k b_k \right| \leqslant 2M(|b_m| + |b_n|).$$

Доказательство. По монотонности $\{b_n\}$ знаки $b_{k+1} - b_k$ сохраняются, поэтому:

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k b_k \right| \leqslant M \left(|b_n| + |b_m| + \left| \sum_{k=m}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) \right| \right) = M \left(|b_n| + |b_m| + |b_n - b_m| \right).$$

□

Лемма 2 (Абель). *Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$, g монотонна на $[a, b]$, и пусть $\forall x \in [a, b]$ $\left| \int_a^x f(t)dt \right| \leqslant M$. Тогда:*

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| \leqslant 2M(|g(a)| + |g(b)|).$$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Положим $I = \int_a^b f(x)dx$. Тогда $\exists \delta > 0$ $\forall (T, \xi)$ $(|T| < \delta \to |\sigma_T(f, \xi) - I| < \frac{\varepsilon}{2})$.

Выберем одно такое разбиение $T = \{x_i\}_{i=0}^{n}$.

Пусть $T_k = \{x_i\}_{i=0}^{k}$ — соответствующее разбиение $[x_0, x_k], k = 1, \ldots, n$. По критерию Дарбу числа $\sigma_{T_k}(f, \xi_k)$ и $\int_{x_0}^{x_k} f(x)dx$ лежат на отрезке $[s_{T_k}(f), S_{T_k}(f)]$, и верно $S_{T_k}(f) - s_{T_k}(f) \leqslant S_T(f) - s_T(f)$.

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < \sigma_T(f, \xi) < I + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$I - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant s_T(f) \leqslant S_T(f) \leqslant I + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left|\sigma_{T_k}(f,\xi_k) - \int_{x_0}^{x_k} f(x)dx\right| \leqslant \varepsilon.$$

Положим $A_k = \sum_{i=1}^k f(c_i)\Delta x_i$. Тогда $A_k = \sigma_{T_k}(f,\xi_k)$ и, значит, из последнего неравенства $|A_k| \leqslant M+\varepsilon$. Применим лемму 1 для $a_k = f(c_k)\Delta x_k, b_k = g(c_k)$, получим

$$\left|\sum_{k=1}^n f(c_k)g(c_k)\Delta x_k\right| \leqslant 2(M+\varepsilon)(|g(c_1)|+|g(c_n)|).$$

Неравенство верно для любого набора отмеченных точек, в том числе и $c_1 = a$, $c_n = b$. Предельным переходом по мелкости разбиения в случае $c_1 = a, c_n = b$ получим искомое неравенство. □

Определение 2. Функция f называется *локально интегрируемой по Риману на промежутке* I, если $\forall [a,c] \subset I \hookrightarrow f \in \mathcal{R}[a,c]$.

Определение 3. Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, и f локально интегрируема на $[a,b)$. Предел

$$\int_a^b f(x)dx \coloneqq \lim_{c\to b-0}\int_a^c f(x)dx$$

называется *несобственным интегралом (Римана) от* f *на* $[a,b)$.

Если предел существует и конечен, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется *сходящимся*, иначе — *расходящимся*.

Свойство 1 (принцип локализации)**.** *Пусть* f *локально интегрируема на* $[a,b)$, $a^* \in (a,b)$. *Тогда интегралы* $\int_{a^*}^b f(x)dx$ *и* $\int_a^b f(x)dx$ *сходятся или расходятся одновременно, и если сходятся, то*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a^*} f(x)dx + \int_{a^*}^b f(x)dx$$

Доказательство. Если $c \in (a,b)$, то по свойству аддитивности определённого интеграла верно:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^{a^*} f(x)dx + \int_{a^*}^c f(x)dx.$$

Поэтому пределы $\lim_{c\to b-0}\int_{a^*}^c f(x)dx = \int_{a^*}^b f(x)dx$ и $\lim_{c\to b-0}\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ существуют (конечны) одновременно. Равенство 1 получается из равенства для определённых интегралов переходом к пределу $c \to b-0$. □

Следующие три свойства доказываются аналогично.

Свойство 2 (линейность)**.** *Пусть несобственные интегралы* $\int_a^b f(x)dx$ *и* $\int_a^b g(x)dx$ *сходятся, и* $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. *Тогда сходится интеграл* $\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx$ *и*

$$\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx.$$

Свойство 3 (формула Ньютона-Лейбница)**.** *Пусть* f *локально интегрируема на* $[a,b)$ *и* F *— первообразная* f *на* $[a,b)$. *Тогда*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b-0) - F(a) = F|_a^{b-0}.$$

Свойство 4 (интегрирование по частям). *Пусть F, G дифференцируемы, а их производные f, g локально интегрируемы на $[a, b)$. Тогда*

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(x)G(x)|_a^{b-0} - \int_a^b G(x)f(x)dx.$$

Существование двух из трёх конечных пределов влечёт существование третьего и выполнение равенства.

Свойство 5 (замена переменной). *Пусть f непрерывна на $[a, b)$, φ дифференцируема и строго монотонна на $[\alpha, \beta)$, причем φ' локально интегрируема на $[\alpha, \beta)$, $\varphi(\alpha) = a$, $\lim\limits_{t\to\beta-0}\varphi(t) = b$. Тогда*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Если существует один из интегралов, то существует и другой, и равенство выполняется.

Доказательство. Рассмотрим частичный интеграл $F(c) = \int_a^c f(x)dx$ на $[a, b)$, $\Phi(\gamma) = \int_\alpha^\gamma f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$. По свойству замены переменной в определенном интеграле $F(\varphi(\gamma)) = \Phi(\gamma)\ \forall\gamma \in [\alpha, \beta)$. Пусть (в $\overline{\mathbb{R}}$) определен интеграл $I = \int_a^b f(x)dx$. По свойству предела композиции существует $\lim_{\gamma\to\beta-0}\Phi(\gamma) = \lim_{c\to b-0} F(c) = I$. Следовательно, определен $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = I$.

Из условия следует, что существует обратная функция φ^{-1} и $\gamma = \varphi^{-1}(c) \to \beta$ при $c \to b - 0$. Делая соответствующую замену переменной, получим, что $\lim_{\gamma\to\beta-0}\Phi(\gamma)$ влечет существование равного $\lim_{c\to b-0} F(c)$, то есть интеграл в правой части влечет существование интеграла в левой и их равенство. □

Теорема 1 (критерий Коши). *Пусть f локально интегрируема на $[a, b)$. Для сходимости интеграла $\int_a^b f(x)dx$ необходимо и достаточно выполнения условия Коши:*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists b_\varepsilon \in [a, b)\ \forall\xi, \eta \in (b_\varepsilon, b)\ \left(\left|\int_\xi^\eta f(x)dx\right| < \varepsilon\right).$$

Доказательство. Положим $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in [a, b)$. Поскольку $\int_\xi^\eta f(x)dx = F(\eta) - F(\xi)$, то доказательство утверждения является переформулировкой критерия Коши существования предела F при $x \to b - 0$. □

Определение 4. Пусть f локально интегрируема на $[a, b)$. Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$. Если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, но не сходится абсолютно, то он называется *условно сходящимся*.

Следствие 1. Абсолютно сходящийся интеграл сходится.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $\int_a^b |f(x)|dx$ сходится, то по критерию Коши $\exists b_\varepsilon \in [a, b)\ \forall[\xi, \eta] \subset (b_\varepsilon, b)\ \left(\int_\xi^\eta |f(x)|dx < \varepsilon\right)$. Но тогда тем более $\left|\int_\xi^\eta f(x)dx\right| \leqslant \int_\xi^\eta |f(x)|dx < \varepsilon$. Следовательно, по критерию Коши, интеграл сходится. □

Лемма 3. *Пусть f локально интегрируема и неотрицательна на $[a, b)$. Тогда сходимость интеграла $\int_a^b f(x)dx$ равносильна ограниченности функции $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ на $[a, b)$.*

Доказательство. Функция F нестрого возрастает на $[a, b)$, так как

$$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \geqslant 0.$$

По теореме о пределах монотонной функции существует $\lim_{x\to b-0} F(x) = \sup_{[a,b)} F(x)$. Отсюда, учитывая неотрицательность, заключаем, что ограниченность F равносильна наличию конечного предела, то есть сходимости интеграла. $\square$

Теорема 2 (признак сравнения)**.** *Пусть функции f, g локально интегрируемы на $[a,b)$, и $0 \leqslant f \leqslant g$ на $[a,b)$.*

1. *Если $\int_a^b g(x)dx$ сходится, то $\int_a^b f(x)dx$ сходится.*
2. *Если $\int_a^b f(x)dx$ расходится, то $\int_a^b g(x)dx$ расходится.*

Доказательство. Для любого $x \in [a,b)$ выполнено $0 \leqslant \int_a^x f(t)dt \leqslant \int_a^x g(t)dt$. Если $\int_a^b g(x)dx$ сходится, то по лемме 3 функция $\int_a^x g(t)dt$ ограничена на $[a,b)$. Но тогда на $[a,b)$ ограничена и функция $\int_a^x f(t)dt$ и, значит, по лемме 3 интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится.

Второе доказываемое утверждение является контрапозицией первого. $\square$

Следствие 2. Пусть f, g локально интегрируемы и неотрицательны на $[a,b)$. Если $f(x) = O(g(x))$, то справедливо заключение теоремы 2.

Доказательство. По определению и неотрицательности функции

$$\exists C > 0\ \exists a^* \in [a,b)\ \forall x \in [a^*,b)\ (f(x) \leqslant Cg(x))\,.$$

Если $\int_a^b g(x)dx$ сходится, то сходится интеграл $\int_{a^*}^b Cg(x)dx$. Тогда по признаку сравнения сходится интеграл $\int_{a^*}^b f(x)dx$ и, значит, сходится интергал $\int_a^b f(x)dx$.

$\square$

Следствие 3. Пусть f, g локально интегрируемы и положительны на $[a,b)$.

Если существует $\lim_{x\to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0,+\infty)$, то интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. По условию также существует $\lim_{x\to b-0} \frac{g(x)}{f(x)} \in (0,+\infty)$. Поскольку существование конечного предела влечёт ограниченность функции в некоторой окрестности предельной точки, то утверждение вытекает из следствия 2. $\square$

Лемма 4 (метод выделения главной части)**.** *Пусть функции f, g локально интегрируемы на $[a,b)$.*

1. *Если $\int_a^b g(x)dx$ сходится, то интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b (f(x)+g(x))dx$ сходятся или расходятся одновременно.*
2. *Если $\int_a^b g(x)dx$ абсолютно сходится, то интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b (f(x)+g(x))dx$ либо одновременно расходятся, либо одновременно сходятся условно, либо одновременно сходятся абсолютно.*

Доказательство. Первый пункт вытекает из линейности несобственных интегралов. Одновременная расходимость вытекает из первого пункта по неравенствам $|f+g| \leqslant |f|+|g|$, $|f| \leqslant |f+g|+|g|$ и признаку сравнения. $\square$

Теорема 3 (признак Дирихле)**.** *Пусть f, g локально интегрируемы на $[a,b)$, причём*

1. *$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ограничена на $[a,b)$;*
2. *g монотонна на $[a,b)$;*
3. $\lim\limits_{x\to b-0} g(x) = 0$.

Тогда несобственный интеграл $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ сходится.

Доказательство. Покажем, что интеграл $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ удовлетворяет условию Коши.

Пусть $|F| < M$ на $[a, b)$, тогда для любого $\xi \in [a, b)$ выполнено:

$$\left|\int_\xi^x f(t)\,dt\right| = |F(x) - F(\xi)| < 2M.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда, по определению предела для $g(x)$, $\exists b' \in [a, b)\, \forall x \in (b', b)\ \left(|g(x)| < \frac{\varepsilon}{8M}\right)$. Тогда по лемме Абеля (1) для любого $[\xi, \eta] \subset (b', b)$:

$$\left|\int_\xi^\eta f(t)g(t)\,dt\right| \leqslant 2 \cdot 2M\,(|g(\xi)| + |g(\eta)|) < 4M\left(\frac{\varepsilon}{8M} + \frac{\varepsilon}{8M}\right) = \varepsilon.$$

По критерию Коши интеграл $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ сходится. □

Замечание. Условия последней теоремы выполнены, если f непрерывна и имеет ограниченную первообразную на $[a, b)$, g дифференцируема, g' сохраняет знак на $[a, b)$, $g(x) \to 0$ при $x \to b - 0$.

Теорема 4 (признак Абеля). *Пусть f, g локально интегрируемы на $[a, b)$, причём*

1. *$\int_a^b f(x)\,dx$ сходится;*
2. *g монотонна на $[a, b)$;*
3. *g ограничена на $[a, b)$.*

Тогда несобственный интеграл $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ сходится.

Доказательство. Так как g монотонна и ограничена на $[a, b)$, то $\exists \lim\limits_{x \to b-0} g(x) = c \in \mathbb{R}$.

Функции f и $g - c$ удовлетворяют условиям признака Дирихле (3), поэтому $\int_a^b f(x)\,(g(x) - c)\,dx$ сходится. Тогда $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b f(x)(g(x) - c)\,dx + c\int_a^b f(x)\,dx$ сходится как сумма сходящихся интегралов. □

Определение 5. Пусть $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ и функция f определена на (a, b), кроме, быть может, конечного множества точек.

Точка $c \in (a, b)$ называется *особенностью* f, если $f \notin \mathcal{R}[\alpha, \beta]$ для любого $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, $\alpha < c < \beta$.

Точка b называется *особенностью* f, если $b = +\infty$, или $b \in \mathbb{R}$ и $f \notin \mathcal{R}[\alpha, b]$, для любого $[\alpha, b]$.

Аналогично вводится особенность a.

Замечание. Если на (c, d) нет особенностей функции f, то f локально интегрируема на (c, d).

Доказательство. Пусть $[u, v] \subset (c, d)$. По условию $\forall x \in (u_x, v_x)$ и $f \in \mathcal{R}[u_x, v_x]$.

Тогда $\{(u_x, v_x)\}_{x \in [u,v]}$ образуют открытое покрытие $[u, v]$. По лемме Гейне-Бореля из открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Объединяя элементы этого подпокрытия и пользуясь аддитивностью интеграла, заключаем, что f интегрируема на отрезке, содержащем $[u, v]$, и, значит, f локально интегрируема на (c, d), так как $[u, v]$ выбирался произвольным. □

Определение 6. Пусть $c_1 < c_2 < \ldots < c_{N-1}$ – все особенности функции f на (a, b), $c_0 = a$, $c_N = b$. Пусть $\xi_k \in (c_{k-1}, c_k)$, $k = 1, \ldots, N$. *Несобственным интегралом функции f по (a, b)* называется

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^N \left(\int_{c_{k-1}}^{\xi_k} f(x)dx + \int_{\xi_k}^{c_k} f(x)dx\right),$$

если все интегралы в правой части (понимаются как несобственные) и их сумма имеет смысл в $\mathbb{R}$.

При этом $\int_a^b f(x)dx$ называется *сходящимся*, если все интегралы в правой части сходятся, иначе – *расходящимся.*

Замечание. Корректность (независимость от выбора ξ_k) следует из принципа локализации.

2. Числовые ряды и их свойства. Группировка ряда. Критерий Коши. Абсолютная и условная сходимости рядов. Связь сходимости ряда и интеграла от ступенчатой функции. Ряды с неотрицательными членами. Признак сравнения, интегральный признак. Признаки Коши, Даламбера, Гаусса (б/д). Знакопеременные ряды. Признак Лейбница. Признаки Дирихле (б/д) и Абеля (б/д). Перестановка членов абсолютно сходящегося ряда. Теорема Римана о перестановке (б/д). Произведение абсолютно сходящихся рядов.

Определение 7. Пусть $\{a_n\}$ – последовательность действительных (комплексных) чисел. Выражение

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots$$

называется *числовым рядом* с n-ым членом a_n.

Число

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + \ldots + a_N$$

называется *N-ой частичной суммой ряда 7*.

Предел

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{N\to+\infty} S_N$$

называется *суммой ряда 7*. Если предел конечен, то ряд называется *сходящимся*, иначе – *расходящимся*.

Лемма 5 (Принцип локализации). *Для каждого $m \in \mathbb{N}$ ряды $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n$ сходятся или расходятся одновременно, и если сходятся, то*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n.$$

Доказательство. Если $N > m$, то $\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{N} a_n$. Поэтому пределы последовательностей $\sum_{n=1}^{m} a_n$ и $\sum_{n=m+1}^{N} a_n$ при $N \to +\infty$ существуют (конечны) одновременно. □

Замечание. Ряд $r_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n$ называется *N-ым остатком* ряда 7.

Принцип локализации можно переформулировать так: если ряд сходится, то сходится и любой его остаток. И если сходится некоторый остаток ряда, то и весь ряд сходится.

Лемма 6 (Линейность). *Пусть ряды $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ сходятся, и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$, причем верно равенство*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.$$

Доказательство. Вытекает из линейности предела последовательности. □

Лемма 7 (Необходимое условие сходимости ряда). *Если $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, то $a_n \to 0$.*

Доказательство. Пусть $S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Так как $a_n = S_n - S_{n-1}$ (считаем, что $S_0 = 0$), то $a_n \to (S - S) = 0$. □

Определение 8. Пусть дана строго возрастающая последовательность целых чисел $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$

Ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$, где $b_k = a_{n_{k-1}+1} + \ldots + a_{n_k}$ называется *группировкой* ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Лемма 8. 1. *Если ряд сходится, то сходится и любая его группировка, причем к той же сумме.*

2. *Пусть $\exists L\ \forall k\ (n_k - n_{k-1} \leqslant L)$. Если $a_n \to 0$ и группировка $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$, где $b_k = \sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} a_j$, сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, причем к той же сумме.*

Доказательство. Пусть S_N обозначает N-ую частичную сумму 7, S_N^* – N-ую частичную сумму группировки.

1. Пусть $S_N \to S$. Так как $S_N^* = S_{n_N}$, то $S_N^* \to S$ как подпоследовательность.
2. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем такие $K, M \in \mathbb{N}$, что $\forall k \geqslant K \hookrightarrow |S_k^* - S| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\forall m \geqslant M \hookrightarrow |a_m| < \frac{\varepsilon}{2L}$. Положим $N = \max\{n_K, M + L\}$. Если $n \geqslant N$, то $n_k \leqslant n < n_{k+1}$, где $k \geqslant K$. Значит,
$$|S_n - S| = |S_{n_k} + a_{n_k+1} + \cdots + a_n - S| \leqslant |S_k^* - S| + |a_{n_k+1}| + \cdots + |a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + L\frac{\varepsilon}{2L} = \varepsilon.$$

□

Применяя критерий Коши для последовательности частичных сумм получаем критерий Коши сходимости числового ряда.

Теорема 5. *Для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ необходимо и достаточно выполнения условия Коши*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m \in \mathbb{N},\ N \leqslant m \leqslant n \left(\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Определение 9. Ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$.

Если ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, но не сходится абсолютно, то он называется *условно сходящимся*.

Следствие 4. Абсолютно сходящийся ряд сходится.

Доказательство. Для любых $m, n \in \mathbb{N}, m \leqslant n$,

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \leqslant \sum_{k=m}^{n} |a_k|.$$

Поэтому, если ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ удовлетворяет условию Коши, то условию Коши удовлетворяет ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. □

Замечание. Если ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится абсолютно, то

$$\left| \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \right| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|.$$

Лемма 9. 1. *Если $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ сходится, то $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходятся или расходятся одновременно.*

2. *Если $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ абсолютно сходится, то $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+b_n)$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ либо одновременно расходятся, либо одновременно сходятся условно, либо одновременно сходятся абсолютно.*

Доказательство.

1. Следует из свойства линейности. Для всех $n \in \mathbb{N}$ верно
$$|a_n+b_n| \leqslant |a_n|+|b_n|,\ \ |a_n| \leqslant |a_n+b_n|+|b_n|.$$
Следовательно, по признаку сравнения ряды $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+b_n)$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ одновременно абсолютно сходятся.

2. Вытекает из пункта 1.

□

Определение 10. С действительным рядом 7 свяжем функцию $f_a : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = a_{[x]}$.

Лемма 10. *Ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\int_1^{+\infty} f_a(x)dx$ сходятся или расходтся одновременно, и если сходятся, то к одному значению.*

Доказательство. Пусть $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Так как $S_n = \int_1^{n+1} f_a(x)dx$, то сходимость интеграла влечет сходимость ряда. Обратное утверждение следует из оценки
$$\left|S_n - \int_1^x f_a(x)dx\right| \leqslant |a_n| \to 0,\ \ n=[x],$$
и необходимого условия сходимости ряда. □

Лемма 11. *Пусть $a_n \geqslant 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ равносильна ограниченности последовательности частичных сумм $\{S_n\}$.*

Доказательство. Все $S_n \geqslant 0$ и нестрого возрастают, так как $S_{n+1}-S_n = a_{n+1} \geqslant 0$. Следовательно, $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = \sup S_n$. □

Теорема 6 (признак сравнения). *Пусть $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;*

2. *Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Доказательство. Вытекает из леммы (10) и признака сравнения несобственных интегралов. □

Теорема 7 (интегральный признак сходимости). *Пусть функция f нестрого убывает и неотрицательна на $[1,+\infty)$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ и интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. Положим $u, v : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$, $u|_{[n,n+1)} = f(n)$, $v|_{[n,n+1)} = f(n+1)$.

Так как f нестрого убывает, то $v \leqslant f \leqslant u$ на $[1,+\infty)$.

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится, тогда по лемме (10) сходится $\int_1^{+\infty} u(x)\,dx$. Следовательно, по признаку сравнения для интегралов $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ также сходится.

Пусть $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, тогда по признаку сравнения сходится $\int_1^{+\infty} v(x)\,dx$. Следовательно, по лемме (10) сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n+1)$. □

Теорема 8 (признак Коши). *Пусть $a_n \geqslant 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $q = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.*

1. *Если $q < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;*

2. *Если $q > 1$, то $a_n \not\to 0$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.*

Доказательство. 1. Пусть $q_0 \in (q, 1)$. Выберем N так, что $\sup_{n \geqslant N} \sqrt[n]{a_n} < q_0$ при всех $n \geqslant N$ и, значит, $a_n < q_0^n$. Следовательно, ряд сходится по признаку сравнения с геометрическим рядом.

2. Так как q — частичный предел, то $\exists \{n_k\}$ $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \to q$. Поэтому $\exists k_0\, \forall k \geqslant k_0$ $(a_{n_k} > 1)$, следовательно, $a_n \not\to 0$ и ряд расходится.

$\square$

Теорема 9 (признак Даламбера)**.** *Пусть $a_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Если $\overline{r} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;*
2. *Если $\underline{r} = \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то $a_n \not\to 0$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.*

Доказательство. 1. Пусть $r \in (\overline{r}, 1)$. Выберем N так, что $\sup_{n \geqslant N} \frac{a_{n+1}}{a_n} < r$ при всех $n \geqslant N$, и, значит,

$$\forall n > N\ a_{n+1} < r a_n < \ldots < r^{n+1-N} a_N = r^{1-N} a_N r^n,$$

и, значит, ряд сходится по признаку сравнения с геометрическим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$.

2. Пусть $\underline{r} > 1$. Тогда $\exists N$ $\left(\inf_{n \geqslant N} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1\right)$ и, значит, $a_{n+1} > a_n > \ldots > a_N > 0$ для всех $n > N$. Следовательно, $a_n \not\to 0$ и ряд расходится.

$\square$

Теорема 10 (признак Гаусса)**.** *Пусть $a_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и существуют такие $s > 1$ и ограниченная последовательность $\{\alpha_n\}$, что для всех n выполнено*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{A}{n} + \frac{\alpha_n}{n^s}.$$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится при $A > 1$ и расходится иначе.

Теорема 11 (признак Лейбница)**.** *Пусть последовательность $\{\alpha_n\}$ монотонна и $\alpha_n \to 0$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \alpha_n$ сходится, причем*

$$|S - S_n| \leqslant |\alpha_{n+1}|.$$

Доказательство. Сходимость вытекает из признака Дирихле. Докажем ее прямо. Пусть для определенности $\{\alpha_n\}$ нестрого убывает, и, значит, все $\{\alpha_n\} \geqslant 0$.

$S_{2n+2} - S_{2n} = \alpha_{2n+1} - \alpha_{2n+2} \geqslant 0 \Rightarrow \{S_{2n}\}$ нестрого возрастает.

$S_{2n+1} - S_{2n-1} = -\alpha_{2n} + \alpha_{2n+1} \leqslant 0 \Rightarrow \{S_{2n-1}\}$ нестрого убывает.

Кроме того, $S_{2n} - S_{2n-1} = -\alpha_{2n} \leqslant 0$. Поэтому для любых $m, n \in \mathbb{N}$ имеем

$$S_{2n} \leqslant S_{2k} \leqslant S_{2k-1} \leqslant S_{2m-1},$$

где $k = \max\{m, n\}$. Следовательно, последовательности $\{S_{2n}\}$ и $\{S_{2n-1}\}$ сходятся, $S_{2n} \to S'$, $S_{2n-1} \to S''$, и, в частности,

$$S_{2n} \leqslant S' \leqslant S'' \leqslant S_{2n-1}.$$

Поскольку $S_{2n} - S_{2n-1} = -\alpha_{2n} \to 0$, то $S' = S'' = S$. $\square$

Теорема 12 (признак Дирихле)**.** *Пусть $\{a_n\}$ – комплексная последовательность, $\{b_n\}$ – действительная последовательность, причем*

1. *Последовательность* $A_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ *ограничена,*

2. $\{b_n\}$ *монотонна,*

3. $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ *сходится.*

Теорема 13 (признак Абеля). *Пусть* $\{a_n\}$ *– комплексная последовательность,* $\{b_n\}$ *– действительная последовательность, причем*

1. *Ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *сходится,*

2. $\{b_n\}$ *монотонна,*

3. $\{b_n\}$ *ограничена.*

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ *сходится.*

Определение 11. Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ и биекция $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Тогда $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\varphi(n)}$ называется *перестановкой* ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Теорема 14. *Если ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *сходится абсолютно, то любая его перестановка* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\varphi(n)}$ *сходится абсолютно, причем к той же сумме.*

Доказательство. Абсолютная сходимость перестановки следует из оценки

$$\sum_{n=1}^{N} |a_{\varphi(n)}| \leqslant \sum_{n=1}^{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant N}\{\varphi(k)\}} |a_n| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем номер m так, что $\sum_{n=m+1}^{+\infty} |a_n| < \varepsilon$. Выберем M так, что $\{1,\dots,m\} \subset \{\varphi(1),\dots,\varphi(M)\}$ (достаточно положить $M = \max_{1\leqslant j\leqslant m} \varphi^{-1}(j)$). Тогда для любого $N \geqslant M$ имеем $\{1,\dots,m\} \subset \{\varphi(1),\dots,\varphi(N)\}$ и $\left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \sum_{n=1}^{N} a_{\varphi(n)}\right| \leqslant \sum_{n=m+1}^{+\infty} |a_n| < \varepsilon$. Таким образом, частичные суммы перестановки сходятся у сумме исходного ряда. □

Теорема 15 (Риман). *Если ряд с действительными членами* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *сходится условно, то для любого* $L \in \overline{\mathbb{R}}$ *существует такая перестановка* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\varphi(n)}$, *что её сумма равна* L.

Теорема 16 (Коши). *Пусть ряды* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *сходятся абсолютно к* A *и* B *соответственно. Тогда ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{i_n} b_{j_n}$ *из всевозможных попарных произведений, занумерованных в произвольном порядке (то есть, с* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$, $\varphi(n) = (i_n, j_n)$ *– биекция) сходится абсолютно к* AB.

Доказательство. Покажем абсолютную сходимость ряда из произведений:

$$\sum_{n=1}^{N} |a_{i_n} b_{j_n}| \leqslant \sum_{i=1}^{\max_{1\leqslant k\leqslant N} i_k} \sum_{j=1}^{\max_{1\leqslant k\leqslant N} j_k} |a_i|\cdot|b_j| = \left(\sum_{i=1}^{\max_{1\leqslant k\leqslant N} i_k} |a_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{\max_{1\leqslant k\leqslant N} j_k} |b_j|\right) \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |a_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{+\infty} |b_j|\right).$$

По теореме (14) любая перестановка ряда из произведений сходится к той же сумме. Рассмотрим перестановку «по квадратам» и её частичную сумму $S_{N^2} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_i b_j$. Так как $S_{N^2} = \left(\sum_{i=1}^{N} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{N} b_j\right) \to AB$ и если последовательность сходится, то и любая подпоследовательность сходится к тому же пределу, то заключаем, что перестановка «по квадратам», а значит, и $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{i_n} b_{j_n}$, имеет сумму AB. □

Определение 12. Ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$, где $c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}$, называется *произведением по Коши* рядов $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Замечание. Если ряды $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ сходятся абсолютно, то их произведение по Коши сходится абсолютно к произведению сумм рядов.

3. Поточечная и равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов, супремум-критерий. Арифметические свойства. Критерий Коши равномерной сходимости. Непрерывность предельной функции и суммы ряда. Интегрируемость предельной функции и почленное интегрирование ряда. Дифференцируемость предельной функции и почленное дифференцирование ряда. Признаки Вейерштрасса, Дирихле, Абеля равномерной сходимости рядов. Пример ван-дер-Вардена (б/д).

Пусть $f_n, f : E \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), $n \in \mathbb{N}$.

Определение 13. Последовательность $\{f_n\}$ *поточечно сходится* к f на E, если $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ для всех $x \in E$.

Пишут $f_n \to f$ на E и f называют *предельной функцией* последовательности $\{f_n\}$.

Воспользуемся определением предела последовательности. $f_n \to f$ на E тогда и только тогда, когда $\forall x \in E\, \forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geqslant N\ \ (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$.

Если $N(x)$ удаётся выбрать одним для всех $x \in E$ (при фиксированном ε), то приходим к следующему понятию:

Определение 14. Последовательность $\{f_n\}$ *равномерно сходится* к f на E, если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geqslant N\, \forall x \in E\ \ (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)\,.$$

Пишут $f_n \rightrightarrows f$ на E или $f_n \rightrightarrows_E f$ при $n \to +\infty$.

Замечание. Равномерная сходимость, очевидно, влечёт поточечную, но поточечная сходимость не влечёт равномерную в общем случае.

Лемма 12 (супремум-критерий). *$f_n \rightrightarrows f$ на E тогда и только тогда, когда $\lim_{n\to+\infty} \rho_n = 0$, где $\rho_n = \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|$.*

Доказательство.

$$(\forall x \in E\ \ (|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon)) \Leftrightarrow \left(\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon\right).$$

□

Рассмотрим функциональный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$, где $f_n : E \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$)

Определение 15. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ *поточечно сходится* на E, если числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ сходится для любого $x \in E$. В этом случае $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$, $x \in E$, называется *суммой* ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ *равномерно сходится* на E, если последовательность частичных сумм $S_N = \sum_{n=1}^{N} f_n$ равномерно сходится на E.

Свойство 6 (линейность). *1. Пусть $f_n \rightrightarrows f$ на E, $g_n \rightrightarrows g$ на E и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$). Тогда $\alpha f_n + \beta g_n \rightrightarrows \alpha f + \beta g$ на E.*

2. Пусть $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ равномерно сходятся на E. Тогда $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha f_n + \beta g_n$ также равномерно сходится на E и $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha f_n + \beta g_n = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} f_n + \beta \sum_{n=1}^{+\infty} g_n$.

Доказательство. Пусть $x \in E$. По неравенству треугольника

$$|(\alpha f_n(x) + \beta g_n(x)) - (\alpha f(x) + \beta g(x))| \leqslant |\alpha| \cdot |f_n(x) - f(x)| + |\beta| \cdot |g_n(x) - g(x)|.$$

Далее по лемме (12).

Второй пункт вытекает из первого применением его к последовательности частичных сумм ряда. □

Свойство 7. *Пусть $g : E \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) ограничена.*

1. *Если $f_n \rightrightarrows f$ на E, то $gf_n \rightrightarrows gf$ на E.*
2. *Если $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ равномерно сходится на E, то $\sum_{n=1}^{+\infty} gf_n$ также равномерно сходится на E и*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} gf_n = g \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$$

Доказательство.

1. Пусть $|g(x)| \leqslant M$ для всех $x \in E$. Тогда

$$\sup_{x \in E} |g(x)f_n(x) - g(x)f(x)| \leqslant M \underbrace{\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)|}_{\to 0}.$$

   Значит, по супремум-критерию (12) $gf_n \rightrightarrows gf$ на E.

2. Вытекает из пункта 1 применением его к последовательности частичных сумм.

□

Теорема 17 (критерий Коши равномерной сходимости)**.** *Для равномерной сходимости $\{f_n\}$ на E необходимо и достаточно выполнения условия Коши:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n, m \geqslant N \ \forall x \in E \, (|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon).$$

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть $\varepsilon > 0$. Из условия равномерной сходимости:

$$\exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant N \ \forall x \in E \left(|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Тогда для всех $n, m \geqslant N$ и $x \in E$ имеем:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

($\Leftarrow$) Пусть $\{f_n\}$ удовлетворяет (17). Тогда для каждого $x \in E$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ фундаментальна и, значит, сходится. Положим $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in E$. Пусть $\varepsilon > 0$ и номер N из условия (17). Зафиксируем $n \geqslant N$ в неравенстве и перейдем к пределу при $m \to \infty$. Получим, что $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$ и $x \in E$. Так как $\varepsilon > 0$ – любое, то $f_n \rightrightarrows f$ на E. □

Следствие 5. Для равномерной сходимости $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ на E необходимо и достаточно выполнения условия Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n, m \geqslant N \ \forall x \in E \left(\left| \sum_{k=m}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon \right).$$

Теорема 18 (о непрерывности предельной функции)**.** *Пусть $E \subset \mathbb{R}$ и $f_n \rightrightarrows f$ на E. Если все f_n непрерывны в точке $a \in E$ (на E), то функция f также непрерывна в точке a (на E).*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Из условия равномерной сходимости:

$$\exists N\, \forall n \geqslant N\, \forall x \in E\ \left(|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Тогда для $x \in E$:

$$|f(x) - f(a)| \leqslant |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| < |f_N(x) - f_N(a)| + \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Так как f_N непрерывна в точке a, то

$$\exists \delta > 0\, \forall x \in B_\delta(a) \cap E\ \left(|f_N(x) - f_N(a)| < \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Следовательно, $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ для всех $x \in B_\delta(a) \cap E$. □

Следствие 6 (о непрерывности суммы ряда)**.** Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ равномерно сходится на $E \subset \mathbb{R}$ и все f_n непрерывны в точке $a \in E$. Тогда сумма ряда непрерывна в точке a (на E).

Теорема 19 (об интегрируемости предельной функции)**.** *Пусть $f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$ и $f_n \in \mathcal{R}[a, b]\ \forall n$. Тогда $f \in \mathcal{R}[a, b]$ и $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.*

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Из условия равномерной сходимости:

$$\exists N\ \forall n \geqslant N\ \forall x \in [a, b] \left(|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b - a)}\right).$$

Тогда на $[a, b]$:

$$f_N(x) - \frac{\varepsilon}{4(b - a)} < f(x) < f_N(x) + \frac{\varepsilon}{4(b - a)}.$$

Поскольку f_N интегрируема, то она ограничена на $[a, b]$, значит на $[a, b]$ ограничена f.

Пусть T – произвольное разбиение $[a, b]$. Тогда для верхних сумм Дарбу имеем:

$$S_T(f) = S_T(f - f_N + f_N) \leqslant S_T(f - f_N) + S_T(f_N) \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + S_T(f_N).$$

(так как $\sup_I (g(x) + h(x)) \leqslant \sup_I g(x) + \sup_I h(x)$ при $I \subset [a, b]$)
Аналогично для нижних сумм Дарбу $s_T(f) \geqslant s_T(f_N) - \frac{\varepsilon}{4}$. Так как $f_N \in \mathcal{R}[a, b]$, то существует T – разбиение $\left(S_T(f_N) - s_T(f_N) < \frac{\varepsilon}{2}\right)$, для такого T имеем

$$S_T(f) - s_T(f) \leqslant \varepsilon.$$

По критерию Дарбу $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Для $n \geqslant N$ имеем

$$\left|\int_a^b f_n(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx\right| \leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx \leqslant (b - a) \cdot \frac{\varepsilon}{(b - a)} < \varepsilon.$$

Следовательно, $\int_a^b f_n(x)\, dx \to \int_a^b f(x)\, dx$. □

Следствие 7 (о почленном интегрировании ряда)**.** Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ равномерно сходится на $[a, b]$, и все функции $f_n \in \mathcal{R}[a, b]$, то сумма ряда интегрируема на $[a, b]$ и

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x)dx\right).$$

Замечание. В условиях теоремы (19)

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

Теорема 20 (о дифференцируемости предельной функции)**.** *Если*

1. $f_n \to f$ *на* $[a,b]$*;*
2. $\forall n\in\mathbb{N}$ *функция* $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ *дифференцируема;*
3. $f_n' \rightrightarrows g$ *на* $[a,b]$*.*

Тогда f *дифференцируема на* $[a,b]$*, причем* $f'=g$ *на* $[a,b]$*.*

Доказательство. Докажем дифференцируемость функции f. Зафиксируем x. Рассмотрим последовательность

$$\varphi_n(t)=\begin{cases}\frac{f_n(t)-f_n(x)}{t-x}, & t\neq x;\\ f_n'(x), & t=x.\end{cases}$$

Тогда $\varphi_n\to\varphi$ на $[a,b]$, где

$$\varphi(t)=\begin{cases}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}, & t\neq x;\\ g(x), & t=x.\end{cases}$$

Покажем, что сходимость равномерная. При $t\neq x$ по теореме Лагранжа:

$$\varphi_n(t)-\varphi_m(t)=\frac{(f_n(t)-f_m(t))-(f_n(x)-f_m(x))}{t-x}=f_n'(\xi)-f_m'(\xi)$$

для некоторой точки ξ, лежащей между t и x. Поскольку $\{f_n'\}$ удовлетворяет условию Коши равномерной сходимости, то $\{\varphi_n\}$ удовлетворяет условию Коши. Следовательно, $\{\varphi_n\}$ равномерно сходится на $[a,b]$. Поскольку f_n дифференцируема в точке x, то φ_n непрерывна в точке x. По теореме (18) φ непрерывна в точке x. Тогда $\lim_{t\to x}\varphi(t)=\varphi(x)$, то есть $\exists f'(x)=g(x)$. □

Следствие 8 (о почленном дифференцировании ряда)**.** Пусть

1. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится поточечно на $[a,b]$;
2. $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ дифференцируема $\forall n$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ равномерно сходится на $[a,b]$.

Тогда сумма ряда дифференцируема и для каждой точки $x\in[a,b]$ выполнено

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Теорема 21 (признак Вейерштрасса)**.** *Пусть* $f_n:E\to\mathbb{C}$*,* $a_n\in\mathbb{R}$ $\forall n$*. Пусть*

1. $\forall n\in\mathbb{N}\ \forall x\in E\ (|f_n(x)|\leqslant a_n)$*;*
2. *числовой ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*

Тогда функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *сходится равномерно и абсолютно на* E*.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Пользуясь критерием Коши как необходимым условием, найдем N, что $\sum_{k=m}^{n} a_k < \varepsilon$ при всех $n \geqslant m \geqslant N$. Тогда для таких n, m и всех $x \in E$ справедлива оценка:

$$\left| \sum_{k=m}^{n} f_k(x) \right| \leqslant \sum_{k=m}^{n} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=m}^{n} a_k < \varepsilon.$$

Пользуясь теперь критерием Коши как достаточным условием, получаем, что $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ равномерно сходятся на E. □

Определение 16. Последовательность g_n называется *равномерно ограниченной* на E, если найдется такое $C > 0$, что $|g_n(x)| \leqslant C$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $x \in E$.

Теорема 22 (признак Дирихле)**.** *Пусть $a_n : E \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), $b_n : E \to \mathbb{R}$ $\forall n$ такие, что:*

1. *$A_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ равномерно ограничена на E;*
2. *$\{b_n(x)\}$ монотонна при каждом $x \in E$;*
3. *$b_n \rightrightarrows 0$ на E.*

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ равномерно сходится на E.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Отметим, что при $n \geqslant m$

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k(x) \right| = |A_n(x) - A_{m-1}(x)| \leqslant 2C$$

для всех $x \in E$.

Из равномерной сходимости $\{b_n\}$ следует, что

$$\exists N \, \forall n \geqslant N \, \forall x \in E \, \left(|b_n(x)| < \frac{\varepsilon}{8C} \right).$$

Тогда при $n \geqslant m \geqslant N$ и $x \in E$ по лемме Абеля

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k(x) b_k(x) \right| \leqslant 2 \cdot 2C \left(|b_m(x)| + |b_n(x)| \right) < \varepsilon.$$

По критерию Коши $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится равномерно на E. □

Теорема 23 (признак Абеля)**.** *Пусть $a_n : E \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), $b_n : E \to \mathbb{R}$, такие, что*

1. *$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ равномерно сходится на E;*
2. *$\{b_n(x)\}$ монотонна при любом $x \in E$;*
3. *$\{b_n\}$ равномерно ограничена на E.*

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ равномерно сходится на E.

Доказательство. Из равномерной сходимости ряда

$$\exists N \, \forall n, m \, (n \geqslant m \geqslant N) \, \forall x \in E \, \left(\left| \sum_{k=m}^{n} a_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{4C} \right).$$

Тогда при всех $x \in E$ и $n \geqslant m \geqslant N$ по лемме Абеля

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k(x)b_k(x)\right| \leqslant 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4C}\left(|b_m(x)| + |b_n(x)|\right) \leqslant 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4C}(C + C) = \varepsilon.$$

Доказательство завершается ссылкой на критерий Коши (17). □

Пример (ван-дер-Варден)**.** Существует $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, непрерывная на $\mathbb{R}$, но не дифференцируемая ни в одной точке.

Пусть $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \varphi(x \pm 2) = \varphi(x), \varphi|_{[-1,1]}(x) = |x|$. Отметим, что если $(x, y) \cap \mathbb{Z} = \varnothing$, то φ кусочно-линейная с угловым коэффициентом ± 1, поэтому

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |x - y|.$$

Положим $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), f_n(x) = \frac{1}{4^n}\varphi(4^n x)$. Функция f непрерывна как сумма равномерно сходящегося ряда (по признаку Вейерштрасса) из непрерывных функций, но не дифференцирума ни в одной точке.

4. Степенные ряды. Теорема Коши-Адамара. Радиус и круг сходимости, равномерная сходимость степенных рядов. Теорема Абеля. Дифференцируемость суммы степенного ряда. Теорема единственности, ряд Тейлора. Пример бесконечно дифференцируемой функции, не разлагающейся в степенной ряд. Достаточное условие разложимости функции в степенной ряд. Ряды Тейлора e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^\alpha$, $\ln(1+x)$.

Определение 17. *Степенным рядом* называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n,$$

где $a_n, x_0 \in \mathbb{R}$ и x — действительная переменная, или $a_n, x_0 \in \mathbb{C}$ и x — комплексная переменная *(комплексный степенной ряд)*.

Теорема 24 (Коши-Адамар). *Пусть* $R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Тогда:

1. *при* $|x-x_0| < R$ *ряд (17) сходится, причём абсолютно;*
2. *при* $|x-x_0| > R$ *ряд (17) расходится;*
3. *если* $r \in (0, R)$, *то ряд (17) равномерно сходится на* $\overline{B_r}(x_0) = \{x : |x-x_0| \leqslant r\}$.

Доказательство. Пусть $x \neq x_0$, тогда

$$q := \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = |x-x_0| \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x-x_0|}{R}.$$

Если $|x-x_0| < R$, то $q < 1$ и, значит, по признаку Коши $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-x_0)^n|$ сходится, то есть, ряд (17) сходится абсолютно.

Если $|x-x_0| > R$, то $q > 1$ и, значит, по признаку Коши n-й член ряда не стремится к нулю, ряд (17) расходится и *абсолютно расходится* (то есть, расходится ряд из модулей членов).

Пусть $r \in (0, R)$. По доказанному ряд (17) абсолютно сходится в точке $x = x_0 + r$, то есть сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$. Если $|x-x_0| \leqslant r$, то $|a_n(x-x_0)^n| \leqslant |a_n| r^n$. Тогда по признаку Вейерштрасса ряд (17) равномерно сходится на $B_r(x_0)$. □

Определение 18. Величина R из теоремы (24) называется *радиусом сходимости* ряда (17).

$B_R(x_0) = \{x : |x-x_0| < R\}$ называется *интервалом сходимости* (*кругом сходимости* в комлексной плоскости).

Из теоремы (24) получаем:

Следствие 9. Пусть для $R \in [0, +\infty]$ выполнено следующее: при $|x-x_0| < R$ ряд абсолютно сходится и при $|x-x_0| > R$ ряд абсолютно расходится, то R — радиус сходимости.

Теорема 25 (Абель). *Если степенной ряд (17) сходится в точке* $x_1 \neq x_0$, *то он сходится равномерно на отрезке с концами* x_1, x_0.

Доказательство. По условию ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_1-x_0)^n$ сходится. Рассмотрим последовательность $\{t^n\}$: она монотонна при любом $t \in [0,1]$ и равномерно ограниченна. По признаку Абеля (23) ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_1-x_0)^n t^n$ равномерно сходится на $[0,1]$. Сделав замену $t = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$, получим, что ряд (17) равномерно сходится на $\{x : x = x_0 + t(x_1-x_0)\}$. □

Замечание. Если $x_1 \in B_R(x_0)$, то предыдущая теорема вытекает из теоремы Коши–Адамара (24), поэтому интерес представляет случай, когда x_1 лежит на границе круга сходимости.

Лемма 13. *Если ряд (17) имеет радиус сходимости R, то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ также имеет радиус сходимости R.*

Доказательство. Так как $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, то последовательности $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ и $\{\sqrt[n]{n|a_n|}\}$ имеют одинаковое множество частичных пределов, значит $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ и $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n|a_n|}$ равны. Тогда по формуле Коши–Адамара ряды $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-x_0)^n$ имеют одинаковые радиусы сходимости.

Ряды $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-x_0)^n$ отличаются при $x \neq x_0$ ненулевым множителем (при $x = x_0$ оба сходятся). Следовательно, эти ряды сходятся одновременно. Тогда, радиусы сходимости этих рядов также совпадают. $\square$

Теорема 26. *Если $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ – сумма степенного ряда с радиусом сходимости $R > 0$, то функция f бесконечно дифференцируема в $B_R(x_0)$, и для всякого $m \in \mathbb{N}$ выполнено:*

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{+\infty} n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)a_n(x-x_0)^{n-m}.$$

Доказательство. По лемме (13) при дифференцировании радиус сходимости ряда не меняется, поэтому нам достаточно доказать утверждение для $m = 1$, после чего применить индукцию.

Пусть $0 < r < R$. По теореме (24) исходный ряд и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ равномерно сходятся на отрезке $[x_0-r, x_0+r]$. Обозначим через g сумму продифференцированного ряда. Тогда по следствию о почленном дифференцировании ряда из теоремы (20) функция f дифференцируема на $[x_0-r, x_0+r]$, причем $f' = g$. Так как $r \in (0, R)$ – любое, то равенство выполняется на (x_0-R, x_0+R). $\square$

Следствие 10 (теорема о единственности)**.** Если степенные ряды $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ и $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(x-x_0)^n$ сходятся в круге $B_\delta(x_0)$, и их суммы там совпадают, то $a_n = b_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Следствие 11. Сумма степенного ряда с радиусом сходимости $R > 0$ имеет первообразную $F(x) = C + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$ при $|x-x_0| < R$.

Определение 19. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 и в точке x_0 имеет производные любого порядка. Тогда $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ называется *рядом Тейлора* функции f с центром в точке x_0. Для $x_0 = 0$ ряд называют *рядом Маклорена.*

Пример. Рассмотрим $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0. \end{cases}$$

Существование производных любого порядка в точке $x \neq 0$ следует из теоремы о дифференцировании композиции. Более того, $f^{(n)}(x) = 0$ при $x < 0$ и $f^{(n)}(x) = p_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}$, где $p_n(t)$ – многочлен степени $2n$. последнее утверждение можно установить по индукции: $p_0(t) = 1$ и дифференцирование $f^{(n)}$ дает соотношение $p_{n+1}(t) = t^2[p_n(t) - p_n'(t)]$.

Индукцией по n покажем, что $f^{(n)}(0) = 0$. Для $n = 0$ это верно по условию. Если предположить, что $f^{(n)}(0) = 0$, то $(f^{(n)})'_-(0) = 0$ и

$$(f^{(n)})'_+(0) = \lim_{h\to+0} \frac{f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)}{h} = \lim_{h\to+0} \frac{p_n(\frac{1}{h})e^{-\frac{1}{h}}}{h} = \lim_{t\to+\infty} \frac{tp_n(t)}{e^t} = 0,$$

поскольку по правилу Лопиталя $\lim_{t\to+\infty}\frac{t^m}{e^t}=0$ для всех $m\in\mathbb{N}_0$. Это доказывает, что $f^{(n+1)}(0)=0$.

Таким образом, ряд Маклорена функции f нулевой, но он не сходится к f ни в какой окрестности нуля.

Лемма 14 (Достаточное условие представимости функции степенным рядом.). *Если на $(x_0-\rho,x_0+\rho)$ функция f имеет производные всех порядков и*

$$\exists C>0\ \forall n\in\mathbb{N}_0\ \forall x\in(x_0-\rho,x_0+\rho)\left(\left|f^{(n)}(x)\right|\leqslant\frac{Cn!}{\rho^n}\right),$$

то

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

для всех $x\in(x_0-\rho,x_0+\rho)$.

Доказательство. Так как $\sqrt[n]{\frac{f^{(n)}(x)}{n!}}\leqslant\frac{C^{\frac{1}{n}}}{\rho}\to\frac{1}{\rho}$, то по формуле Коши-Адамара (24) для $x\in(x_0-\rho,x_0+\rho)$ найдется c между x_0 и x, что

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|.$$

Поскольку $|f^{(n+1)}(c)|\leqslant C$, то справедлива оценка:

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}\right|\leqslant C\left|\frac{x-x_0}{\rho}\right|^{n+1}\to 0,$$

что завершает доказательство. □

Следствие 12. Ряды Маклорена функций $\exp,\sin,\cos$ сходятся на $\mathbb{R}$ к самим функциям, то есть $\forall x\in\mathbb{R}:$

$$e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!},$$

$$\sin(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},$$

$$\cos(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}.$$

Доказательство. Все указанные функции бесконечно дифференцируемы на $\mathbb{R}$, причем $(e^x)^{(n)}=e^x$, $\sin^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{\pi n}{2})$, $\cos^{(n)}(x)=\cos(x+\frac{\pi n}{2})$.

Пусть $\delta>0$ и $|x|<\delta$. Тогда $(e^x)^{(n)}\leqslant e^\delta$, $|\sin^{(n)}(x)|\leqslant 1$, $|\cos^{(n)}(x)|\leqslant 1$.

Следовательно, по следствию 11 ряды Маклорена этих функций сходятся к самим функциям на $(-\delta,\delta)$. Так как $\delta>0$ – любое, то предположение верно и на $\mathbb{R}$. □

Пример. Так как $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}$ при $|x|<1$, то по (11)

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n},\ \ |x|<1.$$

Ряд в правой части сходится при $x = 1$, поэтому его сумма непрерывна на $(-1, 1]$ и, значит, равенство имеет место при $x = 1$. Получаем известный нам результат, что $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

Теорема 27 (биномиальный ряд)**.** *Если* $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ *и* $C_\alpha^n = \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}$, $C_\alpha^0 = 1$, *то*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} C_\alpha^n x^n, \ |x| < 1.$$

Доказательство. Пусть $f(x) = (1+x)^\alpha$. Тогда $f^{(n)}(x) = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-n+1) \cdot (1+x)^{\alpha-1}$ и, значит, $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = C_\alpha^n$. При $x \neq 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|C_\alpha^{n+1} x^{n+1}|}{|C_\alpha^n x^n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|\alpha-n||x|}{n+1} = |x|.$$

Если $|x| < 1$, то ряд абсолютно сходится по признаку Даламбера. Если $|x| > 1$, то ряд абсолютно расходится по признаку Даламбера. Следовательно, $R_{\text{сх}} = 1$.

Обозначим $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_\alpha^n x^n$, и покажем, что $g \equiv f$ на $(-1, 1)$, т.е. $(1+x)^{-\alpha} g(x) = 1$ при $x \in (-1, 1)$. Для этого найдем производную функции $(1+x)^{-\alpha} g(x)$. По теореме (26) имеем

$$((1+x)^{-\alpha} g(x))' = (1+x)^{-\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} nC_\alpha^n x^{n-1} - \alpha(1+x)^{-\alpha-1} \sum_{n=0}^{+\infty} C_\alpha^n x^n =$$
$$= (1+x)^{-\alpha-1} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} nC_\alpha^n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} nC_\alpha^n x^n - \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} C_\alpha^n x^n\right].$$

В первой сумме произведем замену индекса суммирования. После приведения подобных слагаемых получим

$$((1+x)^{-\alpha} g(x))' = (1+x)^{-\alpha-1} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) C_\alpha^{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha-n) C_\alpha^n x^n\right] = 0.$$

Отсюда следует, что $(1+x)^{-\alpha} g(x)$ постоянна на $(-1, 1)$. Из условия $g(0) = 1$ получаем, что $(1+x)^{-\alpha} g(x) = 1$ для всех $x \in (-1, 1)$. $\square$

5. Метрические и нормированные пространства, p-нормы на $\mathbb{R}^n$. Топология метрических пространств: открытые и замкнутые множества, их свойства. Предельные точки. Критерии замкнутости множества. Замыкание множества. Подпространства метрического пространства, описание открытых множеств подпространства. Компакты и их свойства. Теорема о секвенциальной компактности. Описание компактов в $\mathbb{R}^n$. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Полные метрические пространства. Полнота пространств $\mathbb{R}^n$ и $B(E)$.

Определение 20. Пусть $X \neq \varnothing$. Функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ называется *метрикой* на X, если для любых $x, y, z \in X$ выполнено:

1. $\rho(x, y) \geqslant 0,\ \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3. $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (*неравенство треугольника*).

Пара (X, ρ) называется *метрическим пространством.*

В дальнейшем часто под метрическим пространтвом будем понимать само множество X, предполагая наличие связанной с ним метрики.

Определение 21. Пусть V – линейное пространство. Функция $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ называется *нормой*, если для любых $x, y \in V$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ выполнено:

1. $\|x\| \geqslant 0,\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (*неравенство треугольника*).

Пара $(V, \|\cdot\|)$ называется *нормированным пространством.*

Пример. $X = \mathbb{R}^n,\ x = (x_1, \dots, x_n)^T,\ y = (y_1, \dots, y_n)^T$.

1. $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$, $\rho_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$.
2. $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$, $\rho_p(x, y) = (\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$, $p \geqslant 1$.
3. $\|x\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$, $\rho_\infty(x, y) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i - y_i|$.

Доказательство. Покажем, что $\|\cdot\|_p$ — норма на $\mathbb{R}^n$.

Проверим сначала, что если $\|x\|_p \leqslant 1, \|y\|_p \leqslant 1, \alpha + \beta = 1, \alpha \geqslant 0, \beta \geqslant 0$, то $\|\alpha x + \beta y\|_p \leqslant 1$.

Функция $\varphi(s) = s^p$ — выпуклая на $[0, +\infty)$, следовательно $|\alpha x_i + \beta y_i|^p \leqslant \alpha|x_i|^p + \beta|x_i|^p$.

Просуммируем по $i = 1, \dots, n$. $\|\alpha x + \beta y\|_p^p \leqslant \alpha\|x\|_p^p + \beta\|y\|_p^p \leqslant \alpha + \beta = 1$.

Пусть x, y произвольны. Если $x = 0$ или $y = 0$, то неравенство выполняется. Будем предполагать, что $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Покажем, что $\|x + y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$ (индекс p будем опускать)

Введём обозначения $\alpha = \frac{\|x\|}{\|x\|+\|y\|}, \beta = \frac{\|y\|}{\|x\|+\|y\|}, \hat{x} = \frac{x}{\|x\|}, \hat{y} = \frac{y}{\|y\|}$. Тогда, учитывая, что $\|\alpha\hat{x} + \beta\hat{y}\| \leqslant 1$, имеем

$$\|x + y\| = (\|x\| + \|y\|) \left\| \frac{x}{\|x\| + \|y\|} + \frac{y}{\|x\| + \|y\|} \right\| = (\|x\| + \|y\|) \|\alpha\hat{x} + \beta\hat{y}\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

Проверка, что $\|\cdot\|_\infty$ является нормой, легко следует из свойств модуля числа. □

Определение 22. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $x \in X$.

Множество $B_r(x) = \{y \in X \mid \rho(y, x) < r\}, r > 0$ называется *открытым шаром* с центром в точке x и радиуса r.

Множество $\overline{B}_r(x) = \{y \in X \mid \rho(y, x) \leqslant r\}$ называется *замкнутым шаром* с центром в точке x и радиуса r.

Определение 23. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $E \subset X$ и $x \in X$.

1. Точка x называется *внутренней точкой* множества E, если $\exists \varepsilon > 0 \ (B_\varepsilon(x) \subset E)$.
2. Точка x называется *внешней точкой* множества E, если $\exists \varepsilon > 0 \ (B_\varepsilon(x) \subset X \setminus E)$.

   Обозначим $\operatorname{ext} E$ — множество внешних точек E. Очевидно, $\operatorname{ext} E = \operatorname{int}(X \setminus E)$.
3. Точка x называется *граничной точкой* множества E, если

$$\forall \varepsilon > 0 \begin{cases} B_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing \\ B_\varepsilon(x) \cap (X \setminus E) \neq \varnothing \end{cases}$$

   Обозначим ∂E — множество граничных точек E.

Замечание. $X = \operatorname{int} E \cup \operatorname{ext} E \cup \partial E$, причём $\operatorname{int} E, \operatorname{ext} E, \partial E$ попарно не пересекаются.

Определение 24. Множество $G \subset X$ называется *открытым*, если все точки G являются внутренними (то есть $G = \operatorname{int} G$).

Множество $F \subset X$ называется *замкнутым*, если $X \setminus F$ открыто.

Аналогично случаю $X = \mathbb{R}$ доказывается следующая лемма.

Лемма 15. *Объединение произвольного семейства открытых множеств и пересечение* конечного *семейства открытых множеств являются открытыми множествами.*

Объединение конечного *семейства замкнутых множеств и пересечение произвольного семейства замкнутых множеств являются замкнутыми множествами.*

Определение 25. Точка x называется *предельной точкой* множества E, если $\forall \varepsilon > 0 \ (\mathring{B}_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing)$. Здесь и далее $\mathring{B}_\varepsilon(x) = B_\varepsilon(x) \setminus \{x\}$.

Определение 26. Точка x называется *изолированной точкой* множества E, если $x \in E$ и x не предельная.

Теорема 28. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *E замкнуто;*
2. *E содержит все свои граничные точки;*
3. *E содержит все свои предельные точки;*

Доказательство.

(1 $\Rightarrow$ 2) $x \in \underbrace{X \setminus E}_{\text{откр.}} \Rightarrow \exists B_\varepsilon(x) \subset X \setminus E \Rightarrow x \neq \partial E \Rightarrow \partial E \subset E$.

(2 $\Rightarrow$ 3) Любая предельная точка является внутренней или граничной, значит E содержит все предельные точки.

(3 $\Rightarrow$ 1) Пусть $x \in X \setminus E$. Точка x не является предельной для E, т.е. $\exists \varepsilon > 0 \ (\mathring{B}_\varepsilon(x) \cap E = \varnothing) \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset X \setminus E$. Значит, $X \setminus E$ открыто.

$\square$

Определение 27. $\overline{E} = E \cup \partial E$ — *замыкание* E.

Замечание. $x \in \overline{E} \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset E \ \ (x_n \to x)$.

Доказательство. Если $x \in E \cup \partial E$, то $\forall \varepsilon > 0 \ (B_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing)$. Выберем точку $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap E$. Так как $\rho(x_n, x) < \frac{1}{n}$, то $x_n \to x$.

Обратно, если $x \in X \setminus \overline{E}$, то x – внешняя точка E и, значит, x не может быть пределом последовательности точек из E. □

Следствие 13. Множество E замкнуто $\Leftrightarrow \forall \{x_n\},\ x_n \in E \ \ (x_n \to x \Rightarrow x \in E)$.

Определение 28. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $E \subset X, E \neq \varnothing$. Сужение $\rho|_{E\times E}$ является метрикой на E. Пара $(E, \rho|_{E\times E})$ называется *подпространством* (X, ρ), а функция $\rho|_{E\times E}$ — *индуцированной метрикой.*

Рассмотрим $B_r^E(x) = \{y \in E \mid \rho(x, y) < r\} = B_r^X(x) \cap E$.

Лемма 16. *Пусть* (X, ρ) *— метрическое пространство,* $E \subset X$*.*

$$\underbrace{U}_{\textit{откр. в } E} \Leftrightarrow \exists \underbrace{V}_{\textit{откр. в } X} \quad (U = V \cap E).$$

Доказательство. *(⇒)* Пусть U открыто в E. Тогда $\forall x \in U\ \exists B_{\varepsilon_x}^E(x) \subset U$ и, значит, $U = \bigcup_{x\in U} B_{\varepsilon_x}^E(x)$. Положим $V = \bigcup_{x\in U} B_{\varepsilon_x}^X(x)$. Тогда V открыто в X и $V \cap E = \bigcup_{x\in U}(B_{\varepsilon_x}^X(x) \cap E) = \bigcup_{x\in U} B_{\varepsilon_x}^E(x) = U$.

(⇐) Пусть $x \in U$ и $U = \underbrace{V}_{\text{откр. в } X} \cap E$, тогда $x \in V \Rightarrow \exists B_\varepsilon^X(x) \subset V \Rightarrow B_\varepsilon^E(x) = B_\varepsilon^X(x) \cap E \subset V \cap E = U$, то есть U открыто в E. □

Следствие 14.

$$\underbrace{Z}_{\text{замк. в } E} \Leftrightarrow \exists \underbrace{F}_{\text{замк. в } X} \quad (Z = F \cap E).$$

Определение 29. Пусть X — множество, $Y \subset X$. Семейство $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ подмножеств X называется *покрытием* Y, если $Y \subset \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$.

Если $B \subset A$ и $\{X_\alpha\}_{\alpha\in B}$ также является покрытием Y, то оно называется *подпокрытием.*

Определение 30. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $K \subset X$. K называется *компактом* (в X), если из любого его открытого покрытия $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ можно выделить конечное подпокрытие, то есть $\exists \lambda_1, \ldots \lambda_m \in \Lambda \ (K \subset G_{\lambda_1} \cup \ldots \cup G_{\lambda_m})$.

Лемма 17. *Пусть* (X, ρ) *— метрическое пространство,* $K \subset X$*. Если* K *— компакт, то* K *ограничено и замкнуто в* X*.*

Доказательство. Пусть $a \in K$. Так как $\bigcup_{n=1}^\infty B_n(a) = X$, то $\{B_n(a)\}_{n\in\mathbb{N}}$ — открытое покрытие K. Следовательно, $K \subset B_{n_1}(a) \cup \ldots \cup B_{n_m}(a) = B_N(a)$, где $N = \max_{1\leqslant i\leqslant m}\{n_i\}$, и, значит, K ограничено.

Пусть $a \in X \setminus K$. Так как $\bigcup_{n=1}^\infty \left(X \setminus \overline{B}_{\frac{1}{n}}(a)\right) = X \setminus \{a\}$, то $\{X \setminus \overline{B}_{\frac{1}{n}}(a)\}_{n\in\mathbb{N}}$ — открытое покрытие K. Следовательно, $K \subset \left(X \setminus \overline{B}_{\frac{1}{n_1}}(a)\right) \cup \ldots \cup \left(X \setminus \overline{B}_{\frac{1}{n_m}}(a)\right) = X \setminus \overline{B}_{\frac{1}{N}}(a)$, где $N = \max_{1\leqslant i\leqslant m}\{n_i\}$. Тогда $\overline{B}_{\frac{1}{N}}(a) \subset X \setminus K$ и, значит, $X \setminus K$ открыто, а значит, K – замкнуто. □

Лемма 18. *Замкнутое подмножество компакта — компакт.*

Доказательство. Пусть K — компакт в X, $\underbrace{F}_{\text{замк. в } X} \subset K$. Покажем, что F – компакт. Рассмотрим открытое покрытие $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ множества F, тогда $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \cup \{X \setminus F\}$ — открытое покрытие K, так как $\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda\right) \cup (X \setminus F) = X$. Поскольку K — компакт, то $K \subset G_{\lambda_1} \cup \ldots \cup G_{\lambda_m} \cup (X \setminus F) \overset{F\subseteq K}{\Rightarrow}$ $F \subset G_{\lambda_1} \cup \ldots \cup G_{\lambda_m}$. Значит, F – компакт. □

Теорема 29 (о секвенциальной компактности)**.** *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $K \subset X$. K — компакт тогда и только тогда, когда из любой последовательности элементов K можно выделить сходящуюся в K подпоследовательность.*

Доказательство. *($\Rightarrow$)* Пусть $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in K$. Предположим, что из $\{x_n\}$ нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность в K. Тогда $\forall a \in K\ \exists \delta_a > 0\ \exists N_a\ \forall n \geqslant N_a\ (x_n \notin B_{\delta_a}(a))$.

Рассмотрим $\{B_{\delta_a}(a)\}_{a\in K}$ — открытое покрытие K. Следовательно, $K \subset B_{\delta_{a_1}}(a_1) \cup \ldots \cup B_{\delta_{a_m}}(a_m)$.

Положим $N = \max_{1\leqslant i\leqslant m}\{N_{a_i}\}$. Так как $N \geqslant N_{a_i}$, то $x_N \notin B_{\delta_{a_i}}(a_i)$ $i = 1, \ldots, m \Rightarrow x_N \notin K$ — противоречие.

($\Leftarrow$) Пусть из любой последовательности элементов K можно выделить сходящуюся в K подпоследовательность.

1. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ K можно покрыть конечным набором открытых шаров радиуса ε.

   Докажем от противного – пусть нельзя покрыть. Индуктивно построим последовательность $\{x_n\}$, $x_1 \in K, x_n \in K \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B_\varepsilon(x_i)$.

   По построению $\rho(x_i, x_j) \geqslant \varepsilon$, и, значит, из $\{x_n\}$ нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность – противоречие.

2. Пусть $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — открытое покрытие K, тогда $\exists \varepsilon > 0\, \forall x \in K\, \exists \lambda \in \Lambda\ (B_\varepsilon(x)\ \subset G_\lambda)$. Предположим, что это не выполняется, тогда $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists x_n \in K\, \forall \lambda \in \Lambda \left(B_{\frac{1}{n}}(x_n) \not\subset G_\lambda\right)$.

   Имеем $\{x_n\} \subset K \Rightarrow \exists x_{n_k} \to x \in K$, следовательно, $\exists \lambda_0 \in \Lambda(x \in \underbrace{G_{\lambda_0}}_{\text{откр.}}) \Rightarrow \exists B_\alpha(x) \subset G_{\lambda_0}$.

   Выберем k так, чтобы $x_{n_k} \in B_{\frac{\alpha}{2}}(x)$ и $\frac{1}{n_k} < \frac{\alpha}{2}$. Если $z \in B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k}) \Rightarrow \rho(z, x) \leqslant \rho(z, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x) < \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$.

   Следовательно, $z \in B_\alpha(x)$, $B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k}) \subset B_\alpha(x) \subset G_{\lambda_0}$ — противоречие.

3. Пусть $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ – открытое покрытие K. Тогда по (2):

   $$\exists \varepsilon > 0\ \forall x \in K\ \exists \lambda \in \Lambda\ (B_\varepsilon(x) \subset G_\lambda)$$

   По (1) $\exists x_1, x_2, ..., x_m \in K$, что $K \subset B_\varepsilon(x_i) \cup ... \cup B_\varepsilon(x_m) \subset G_{\lambda_1} \cup ... \cup G_{\lambda_m}$, где λ_i удовлетворяет условию $B_\varepsilon(x_i) \subset G_{\lambda_i}$.

   Следовательно, K – компакт.

□

Следствие 15. Множество K является компактом в $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow K$ ограничено и замкнуто

Доказательство. $\Rightarrow$ лемма (17).

$\Leftarrow$ Если K ограничено, то $K \subset B_r(x)$ для некоторой точки $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ и $r > 0$. Рассмотрим замкнутый брус $[x_1 - r, x_1 + r] \times \ldots \times [x_n - r, x_n + r]$. Этот брус содержит $B_r(x)$, а значит, и K.

Тогда K – компакт по лемме (18). □

Следствие 16 (теорема Больцано–Вейерштрасса)**.** Из любой ограниченной последовательности в $\mathbb{R}^n$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Если последовательность ограничена, то она лежит в некотором замкнутом шаре. Этот шар – компакт по следствию (15). Осталось применить теорему (29). $\square$

Пусть (X, ρ) – метрическое пространство.

Определение 31. Последовательность $\{x_n\}$ в X называется *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall n, m \geqslant N \; (\rho(x_n, x_m) < \varepsilon).$$

Лемма 19. *Всякая сходящаяся последовательность фундаментальна.*

Доказательство. $x_n \in X$, $x_n \to a$. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда $\exists N \; \forall n \geqslant N \; (\rho(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2})$. Следовательно, $\forall n, m \geqslant N$:

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, a) + \rho(x_m, a) < \varepsilon.$$

$\square$

Определение 32. Метрическое пространство называется *полным*, если всякая фундаментальная последовательность в нем сходится.

Теорема 30. *Евклидово пространство* $\mathbb{R}^n$ *– полное.*

Доказательство.

Пусть $\{x_k\}$ – фундаментальная последовательность в $\mathbb{R}^n$, $x_k = (x_{1,k}, \ldots, x_{n,k})^T$. Так как $|x_{i,k} - x_{i,m}| \leqslant \rho_2(x_k, x_m)$, то из фундаментальности $\{x_k\}$ следует фундаментальность $\{x_{i,k}\}$ в $\mathbb{R}$ для $i = 1, \ldots, n$. По критерию Коши для числовых последовательностей $x_{i,k} \to a_k \in \mathbb{R}$. Рассмотрим $a = (a_1, \ldots, a_n)^T$. $\rho_2(x_k, a) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{k,i} - a_i)^2} \to 0$ при $k \to \infty$. Значит, $x_k \to a \Rightarrow \mathbb{R}^n$ – полное метрическое пространство. $\square$

Пример. $B(E)$ – линейное пространство всех *ограниченных* функций $f : E \to \mathbb{R}$.

$B(E)$ является нормированным пространством относительно $\|f\| = \sup_{x \in E} |f(x)|$. Имеем $\sup |f(x) + g(x)| \leqslant \sup |f(x)| + \sup |g(x)|$. Имеем $f_n \to f$ в $B(E) \Leftrightarrow \|f_n - f\| \to 0 \Leftrightarrow \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \Leftrightarrow f_n \rightrightarrows f$ на E.

Теорема 31. $B(E)$ *– полное.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ фундаментальна в $B(E)$, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists N \; \forall n, m \geqslant N \; (\sup_{x \in E} |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon).$$

По критерию Коши равномерной сходимости $\exists f : f_n \rightrightarrows f$ на E. Осталось доказать, что равномерный предел ограниченных функций – ограниченная функция. Для $\varepsilon = 1 \; \exists N : |f_N(x) - f(x)| \leqslant 1 \; \forall x \in E \Rightarrow |f(x)| \leqslant |f_N(x)| + 1 \Rightarrow f \in B(E) \Rightarrow B(E)$ – полное. $\square$

6. Предел функции, отображающей метрическое пространство в метрическое пространство, его свойства. Предел по подмножествам. Равносильные условия непрерывности. Непрерывность композиции. Критерий непрерывности через прообразы. Непрерывные функции на компактах. Теорема Вейерштрасса. Эквивалентность норм в конечномерных пространствах (б/д). Теорема Кантора о равномерной непрерывности. Связные множества в метрических пространствах. Теорема о промежуточном значении. Линейно связные множества. Линейные отображения из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, операторная норма.

Пусть $(X, \rho_x), (Y, \rho_y)$ – метрические пространства, a – предельная точка X, и задана функция $f : X \setminus \{a\} \to Y$.

Определение 33 (Коши)**.** Точка $b \in Y$ называется *пределом* функции f в точке a, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X (0 < \rho_X(x, a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), b) < \varepsilon)$$

или, что эквивалентно,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X (x \in \mathring{B}_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b).$$

Определение 34 (Гейне)**.** Точка $b \in Y$ называется *пределом* функции f в точке a, если

$$\forall \{x_n\}, x_n \in X \setminus \{a\} (x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to b).$$

Как и в случае числовых функций, доказывается равносильность определений по Коши и по Гейне, поэтому в обоих случаях пишут $\lim_{x\to a} f(x) = b$, или $f(x) \to b$ при $x \to a$.

Свойство 8 (единственность)**.** *Если* $\lim_{x\to a} f(x) = b$ *и* $\lim_{x\to a} f(x) = c$, *то* $b = c$.

Доказательство. Пусть $x_n \to a$ и $x_n \neq a$. По определению Гейне $f(x_n) \to b$ и $f(x_n) \to c$. Так как последовательность в метрическом пространстве имеет не более одного предела, то $b = c$. □

Свойство 9. $f, g : X \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ *и* $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$. *Тогда* $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = b + c$, $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = bc$.

Доказательство. $x_n \in X \setminus \{a\}$, $x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to b$, $g(x_n) \to c \Rightarrow f(x_n) + g(x_n) \to b + c$, $f(x_n)g(x_n) \to bc$. Утверждение следует по определению Гейне. □

В дальнейшем, говоря о «пределе по подможеству», всегда будем иметь в виду подпространство с индуцированной метрикой.

Свойство 10 (предел по подмножеству)**.** *Пусть* $E \subset X$, a *– предельная точка множества* E. *Если* $\lim_{x\to a} f(x) = b$, *то* $\lim_{x\to a}(f|_E)(x) = b$.

Доказательство. Пусть $x_n \subset E$, $x_n \to a$ и $x_n \neq a$. Тогда $(f|_E)(x_n) = f(x_n) \to b$. По определению Гейне $\lim_{x\to a}(f|_E)(x) = b$. □

Свойство 11 (локальная ограниченность)**.** *Если существует* $\lim_{x\to a} f(x)$, *то* $\exists \delta > 0 : f(\mathring{B}_\delta(a))$ *ограничено.*

Доказательство. Достаточно положить в определении Коши $\varepsilon = 1$. □

Определение 35. Функция f *непрерывна в точке* $a \in X$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X\ (\rho_X(x, a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon)$$

или, что эквивалентно,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X\ (x \in B_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(f(a)))\,.$$

Лемма 20. *Пусть $f : X \to Y$, $a \in X$. Следующие условия эквивалентны:*

1. *функция f непрерывна в точке a;*
2. *$\forall \{x_n\}$, $x_n \in X$ $(x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a))$;*
3. *a – изолированная точка множества X или a – предельная точка X и $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) Выберем $\varepsilon > 0$ и соответствующее $\delta > 0$ из определения непрерывности. Если $x_n \to a$ (в X), то существует такой номер N, что $\rho_X(x_n, a) < \delta$ при всех $n \geqslant N$, но тогда $\rho_Y(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$ при $n \geqslant N$. Это означает, что $f(x_n) \to f(a)$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Если a – предельная точка X, то из условия $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ по определению Гейне.

(3) $\Rightarrow$ (1) Если a изолирована, то $B_{\delta_0}(a) \cap X = \{a\}$ для некоторого $\delta_0 > 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ определение непрерывности в точке a выполняется при $\delta = \delta_0$. Пусть a предельная для X. По определению предела по Коши $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E\ (0 < \rho_X(x, a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon)$. Но последняя импликация верна и для $x = a$. Значит, функция f непрерывна в точке a. $\square$

Теорема 32 (о непрерывности композиции). *Пусть (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) и (Z, ρ_Z) – метрические пространства. Если функция $f : X \to Y$ непрерывна в точке $a \in X$, и функция $g : Y \to Z$ непрерывна в точке $f(a) \in Y$, то их композиция $g \circ f : X \to Z$ непрерывна в точке a.*

Доказательство. Пусть $x_n \to a$, тогда $f(x_n) \to f(a)$ и, значит, $g(f(x_n)) \to g(f(a))$. $\square$

Теорема 33 (критерий непрерывности). *Функция $f : X \to Y$ непрерывна $\Leftrightarrow$ для любого открытого $V \subset Y$ множество $f^{-1}(V)$ открыто в X.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть V открыто в Y. Если $x \in f^{-1}(V)$, то $f(x) \in V$ и, значит, существует такое $\varepsilon > 0$, что $B_\varepsilon(f(x)) \subset V$. Функция f непрерывна в точке x, поэтому найдется такое $\delta > 0$, что $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$. Отсюда следует, что $B_\delta(x) \subset f^{-1}(V) \Rightarrow f^{-1}(V)$ открыто в X.

($\Leftarrow$) Пусть $x \in X$, и $\varepsilon > 0$. Шар $B_\varepsilon(f(x))$ открыт в Y, поэтому множество $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ открыто в X и, значит, существует $\delta > 0$, что $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$, или $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$. Так как $\varepsilon > 0$ – любое, то f непрерывна в точке x. $\square$

Следствие 17. Функция $f : X \to Y$ непрерывна на $X \Leftrightarrow$ для каждого замкнутого множества $F \subset Y$ множество $f^{-1}(F)$ замкнуто в X.

Доказательство. Следует из теоремы в силу равенства $X \setminus f^{-1}(F) = f^{-1}(Y \setminus F)$, верного для любого $F \subset Y$. $\square$

Теорема 34. *Если функция $f : K \to Y$ непрерывна, и K компакт, то $f(K)$ – компакт в Y.*

Доказательство. Пусть $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ – открытое покрытие $f(K)$. Если $x \in K$, то существует такое $\lambda_0 \in \Lambda$, что $f(x) \in G_{\lambda_0}$ и, значит, $x \in f^{-1}(G_{\lambda_0})$. Следовательно, семейство $\{f^{-1}(G_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ образует открытое покрытие K. Это покрытие открыто по критерию непрерывности. Поскольку K компакт, то $K \subset f^{-1}(G_{\lambda_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(G_{\lambda_m})$.

Покажем, что $f(K) \subset G_{\lambda_1} \cup \ldots \cup G_{\lambda_m}$. Действительно, если $y \in f(K)$, то $y = f(x)$ для некоторого $x \in K$. Найдем такое k, что $x \in f^{-1}(G_{\lambda_k})$, тогда, в свою очередь, $y = f(x) \in G_{\lambda_k}$. Следовательно, $f(K)$ – компакт. $\square$

Следствие 18 (теорема Вейерштрасса)**.** Если функция $f : K \to \mathbb{R}$ непрерывна, и K компакт, то существуют точки $x_m, x_M \in K$, такие что $f(x_M) = \sup\limits_{x\in K} f(x)$ и $f(x_m) = \inf\limits_{x\in K} f(x)$.

Доказательство. $f(K)$ — компакт в $\mathbb{R}$, следовательно, $f(K)$ замкнуто и ограничено.

Так как $f(K)$ ограничено, то $M = \sup_K f(x) \in \mathbb{R}$. M — граничная точка $f(K)$, следовательно, $M \in f(K)$ и, значит, $\exists x_M \in K\ f(x) = M$.

Доказательство для $\inf_K f$ аналогично. □

Определение 36. Пусть V – линейное пространство, $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|^*$ нормы на V. Нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|^*$ называются *эквивалентными*, если существуют такие $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, что

$$\forall x \in V\ \ (\alpha\|x\| \leqslant \|x\|^* \leqslant \beta\|x\|)\,.$$

Следствие 19. На конечномерном пространстве V все нормы эквивалентны.

Определение 37. Функция $f : X \to Y$ называется *равномерно непрерывной* (на X), если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, x' \in X\ (\rho_X(x, x') < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon).$$

Теорема 35 (Кантор)**.** *Если функция $f : K \to Y$ непрерывна, и K компакт, то f равномерно непрерывна.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. По определению непрерывности

$$\forall a \in K\ \exists \delta_a > 0\ \forall x \in X\ \left(\rho_X(x, a) < \delta_a \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

Семейство $\{B_{\frac{\delta_a}{2}}\}_{a\in K}$ — открытое покрытие K. Так как K — компакт, то $K \subset B_{\frac{\delta_{a_1}}{2}}(a_1) \cup \ldots \cup B_{\frac{\delta_{a_m}}{2}}(a_m)$.

Положим $\delta = \min_{1\leqslant i\leqslant m} \left\{\frac{\delta_{a_i}}{2}\right\}$. Покажем, что δ будет удовлетворять определению равномерной непрерывности для ε.

Пусть $\rho_K(x, x') < \delta$. Найдётся $i, 1 \leqslant i \leqslant m$, что $x \in B_{\frac{\delta_{a_i}}{2}}(a_i)$. Тогда

$$\rho_K(x', a_i) \leqslant \rho_K(x', x) + \rho_K(x, a_i) < \frac{\delta_{a_i}}{2} + \frac{\delta_{a_i}}{2} = \delta_{a_i},$$

и, значит, $x, x' \in B_{\delta_{a_i}}(a_i)$. Поэтому

$$\rho_Y(f(x), f(x')) \leqslant \rho_Y(f(x), f(a_i)) + \rho_Y(f(a_i), f(x')) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Определение 38. Метрическое пространство X называется *несвязным*, если существуют непустые открытые $U, V \subset X$, что $X = U \cup V$ и $U \cap V = \varnothing$.

Метрическое пространство X называется *связным*, если оно не является несвязным.

Множество $E \subset X$ называется *несвязным (связным)*, если оно несвязно (связно) как подпространство X.

Замечание. Согласно устройству открытых множеств подпространства получаем, что $E \subset X$ несвязно, если существуют открытые $U, V \subset X$, такие что $E \subset U \cup V$ и $E \cap U \neq \varnothing$, $E \cap V \neq \varnothing$, $U \cap V \cap E = \varnothing$.

Покажем, что U и V можно всегда выбрать непересекающимися.

Лемма 21. *Множество $E \subset X$ несвязно $\Leftrightarrow$ существуют открытые $U, V \subset X$, такие что $E \subset U \cup V$ и $E \cap U \neq \varnothing$, $E \cap V \neq \varnothing$, $U \cap V = \varnothing$.*

Доказательство. Достаточность очевидна. Для доказательства необходимости предположим, что множество E несвязно. Тогда существуют непустые открытые $U_E, V_E \subset E$, такие что $E = U_E \cup V_E$, $U_E \cap V_E = \varnothing$.

Для каждого $x \in U_E$ найдется такое $\delta_x > 0$, что $B_{\delta_x}(x) \cap E \subset U_E$ и, значит, $B_{\delta_x}(x) \cap V_E = \varnothing$. Аналогично, для каждого $y \in V_E$ найдется такое $\delta_y > 0$, что $B_{\delta_y}(y) \cap E \subset V_E$ и $B_{\delta_y}(y) \cap U_E = \varnothing$.

Положим $U = \bigcup\limits_{x \in U_E} B_{\frac{\delta_x}{2}}(x), V = \bigcup\limits_{y \in V_E} B_{\frac{\delta_y}{2}}(y)$. Если существует $z \in U \cap V$, то $z \in B_{\frac{\delta_x}{2}}(x)$ и $z \in B_{\frac{\delta_y}{2}}(y)$ для некоторых $x \in U_E$ и $y \in V_E$, тогда

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y) < \frac{\delta_x + \delta_y}{2} \leqslant max\{\delta_x, \delta_y\}.$$

Если $max\{\delta_x, \delta_y\} = \delta_x$, то $y \in B_{\delta_x}(x)$; если же $max\{\delta_x, \delta_y\} = \delta_y$, то $x \in B_{\delta_y}(y)$. Обе эти ситуации невозможны. Следовательно, $U \cap V = \varnothing$. □

Теорема 36. *Множество $I \subset \mathbb{R}$ связно $\Leftrightarrow$ I – промежуток.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Если I не является промежутком, то существуют $x, y \in I$ и $z \in \mathbb{R}$, такие что $x < z < y$ и $z \notin I$. Рассмотрим $(-\infty, z) \cap I$ и $(z, +\infty) \cap I$. Это непустые (содержат соответственно точки x, y), непересекающиеся, открытые в I множества, объединение которых совпадает с I. Значит, множество I несвязно.

($\Leftarrow$) Предположим, что промежуток I не является связным множеством. Тогда найдутся открытые (в $\mathbb{R}$) множества U и V, такие что $I \subset U \cup V$, $I \cap U \neq \varnothing$, $I \cap V \neq \varnothing$ и $U \cap V \cap I = \varnothing$. Пусть $x \in I \cap U$ и $y \in I \cap V$. Без ограничения общности можно считать, что $x < y$ (тогда $[x,y] \subset I$).

Положим $S = \{z \in [x, y] : z \in U\}$. Так как S не пусто и ограничено, то существует $c = \sup S$. В силу замкнутости отрезка $c \in [x, y]$. Отрезок $[x, y] \subset I \subset U \cup V$, поэтому $c \in U$ или $c \in V$.

Если $c \in U$, то $c \neq y$, и значит, найдется $\varepsilon > 0$, что полуинтервал $[c, c+\varepsilon)$ лежит одновременно в U и $[x, y]$. Но тогда $[c, c+\varepsilon) \subset S$, что противоречит $c = \sup S$.

Если $c \in V$, то $c \neq x$, и значит, найдется $\varepsilon > 0$, что полуинтервал $(c-\varepsilon, c]$ лежит одновременно в V и $[x, y]$. В частности, отрезок $[c - \frac{\varepsilon}{2}, c]$ не пересекается с S, что противоречит $c = \sup S$.

Значит, I связно. □

Теорема 37. *Если функция $f : S \to Y$ непрерывна, и множество S связно, то множество $f(S)$ связно в Y.*

Доказательство. Предположим, что $f(S)$ несвязно, тогда существют открытые в Y множества U и V, такие что $f(S) \subset U \cup V$, $f(S) \cap U \neq \varnothing$, $f(S) \cap V \neq \varnothing$ и $f(S) \cap U \cap V = \varnothing$. Множества $f^{-1}(U)$ и $f^{-1}(V)$ не пусты, не пересекаются, открыты в S (по критерию непрерывности) и $S = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ (так как U, V образуют покрытие $f(S)$). Это противоречит связности S. □

Следствие 20 (Теорема о промежуточных значениях)**.** Если функция $f : S \to \mathbb{R}$ непрерывна, и множество S связно, то f принимает все промежуточные значения (то есть если $u, v \in f(S)$ и $u < v$, то $[u, v] \subset f(S)$).

Доказательство. По теореме (37) множество $f(S)$ связно в $\mathbb{R}$ и, значит, по теореме (36) является промежутком. □

Определение 39. Открытое связное множество в метрическом пространстве называется *областью.*

Выделим класс множеств, для которых проверка связности осуществляется несколько проще.

Определение 40. Метрическое пространство X называется *линейно связным*, если для любых точек $x, y \in X$ существует такая непрерывная функция $\gamma : [0,1] \to X$, что $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$.

Теорема 38. *Всякое линейно связное метрическое пространство связно.*

Доказательство. Предположим, что линейно связное пространство X несвязно. Тогда найдутся непустые открытые множества U и V, такие что $X = U \cup V$ и $U \cap V = \varnothing$. Пусть $x \in U$ и $y \in V$. Так как X линейно связно, то существует непрерывная функция $\gamma : [0,1] \to X$, такая что $\gamma(0) = x$ и $\gamma(1) = y$. Тогда $\gamma^{-1}(U)$ и $\gamma^{-1}(V)$ не пусты, не пересекаются, открыты в $[0,1]$, и $[0,1] = \gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V)$, что невозможно, так как отрезок $[0,1]$ связен. $\square$

Лемма 22. *Связное открытое множество E в нормированном пространстве линейно связно.*

Доказательство. Пусть $x \in E$. Рассмотрим множество U тех точек y, которые можно соединить с x кривой, то есть существует непрерывная функция $\gamma : [0,1] \to E$, что $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$. Покажем, что U открыто. Для $y \in U$ в силу открытости E найдется такое $\varepsilon > 0$, что $B_\varepsilon(y) \subset E$. Любая пара точек в шаре может быть соединена открезком: для $z \in B_\varepsilon(y)$ рассмотрим $\sigma : [0,1] \to B_\varepsilon(y)$, $\sigma(t) = (1-t)y + tz$. Тогда кривая

$$\gamma \circ \sigma(t) = \begin{cases} \gamma(2t), \ 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ \sigma(2t-1), \ \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

соединяет x и z, поэтому $B_\varepsilon(y) \subset U$. Аналогично устанавливается, что $E \setminus U$ открыто. В силу связности $E \setminus U$ пусто, то есть $E = U$. $\square$

Определение 41. Отображение L называется *линейным*, если $\forall x_1, x_2 \in X$ и $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ выполнено $L(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 L(x_1) + \alpha_2 L(x_2)$.

Определение 42. Для $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ определим $\|L\| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{|L(x)|}{|x|}$.

Замечание. $\|L\| \in \mathbb{R}$. По определению супремума $|L(x)| \leqslant \|L\| \|x\|$ для всех $x \in X$, и для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $x_\varepsilon \in X$, что $|L(x)| > (\|L\| - \varepsilon)|x_\varepsilon|$. Это означает, что $\|L\|$ – наименьшее из чисел $C > 0$, таких что $|L(x)| \leqslant C|x|$ для всех $x \in X$.

Нетрудно проверить, что $(\mathcal{L}(X,Y), \| \cdot \|)$ является нормированным пространством, причем $\|L_2 L_1\| \leqslant \|L_2\| \|L_1\|$.

7. Дифференцируемость функции из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Производная по вектору и ее связь с дифференциалом. Дифференцируемость композиции. Связь дифференцируемости функции с дифференцируемостью ее координатных функций. Частные производные, необходимые условия дифференцируемости. Градиент. Матрица Якоби. Достаточные условия дифференцируемости. Частные производные высших порядков. Независимость смешанной производной от порядка дифференцирования. Дифференциалы высших порядков и кратная дифференцируемость. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, в форме Пеано (б/д).

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$, U – открытое и задана функция $f : U \to \mathbb{R}^m$.

Определение 43. Функция f называется *дифференцируемой* в точке a, если существует такое непрерывное линейное отображение $L_a : X \to Y$, что

$$f(a+h) = f(a) + L_a(h) + \alpha(h)\|h\|,$$

для некоторой функции α, такой что $\alpha(h) \to 0$.

Замечание. Формула (43) не определяет значение α в нуле. В дальнейшем будем считать, что $\alpha(0) = 0$ и, значит, функция α непрерывна в нуле.

Формулу (43) можно написать в виде

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + o(\|h\|),\ h \to 0.$$

Линейное отображение L_a называется *дифференциалом* f в точке a и обозначается df_a.

Определение 44. Пусть $v \in \mathbb{R}^n$ и функция f определена на множестве $\{a + tv : |t| < \delta\}$ для некоторого $\delta > 0$. Предел

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t},$$

если этот предел существует, называется *производной* f *по вектору* v в точке a и обозначается $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ (а также $f'_v(a)$ и $\partial_v f(a)$).

Теорема 39. *Если $f : U \to \mathbb{R}^n$ дифференцируема в точке a, $v \in \mathbb{R}^n$, то существует $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = df_a(v)$.*

Доказательство. Для $v = 0$ утверждение верно. Пусть $v \neq 0$. Выберем $\delta > 0$ так, что $B_\delta(a) \subset U$. Тогда для всех $t \in \mathbb{R}$ с $|t| < \frac{\delta}{|v|}$, получим

$$f(a+tv) = f(a) + df_a(tv) + \alpha(tv)\|tv\|.$$

В силу линейности $df_a(tv) = tdf_a(v)$. Далее, по непрерывности α в 0 имеем $\alpha(tv) \to 0$ при $t \to 0$, поэтому

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \lim_{t\to 0}(df_a(v) \pm \alpha(tv)\|v\|) = df_a(v).$$

□

Теорема 40 (дифференцирование композиции). *Пусть* $\underbrace{U}_{\text{откр.}} \subset \mathbb{R}^n$, $\underbrace{V}_{\text{откр.}} \subset \mathbb{R}^m$.

Если $f : U \to \mathbb{R}^m$ дифференцируема в точке a, $g : V \to \mathbb{R}^k$ дифференцируема в точке $f(a)$, $f(U) \subset V$, то композиция $g \circ f : U \to \mathbb{R}^k$ дифференцируема в точке a и

$$d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a.$$

Доказательство. Положим $b = f(a)$. По определению

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \alpha(h)\|h\|, h \to 0 \Rightarrow \alpha(h) \to 0,$$
$$g(b+u) = g(b) + dg_b(u) + \beta(u)\|u\|, u \to 0 \Rightarrow \beta(u) \to 0,$$

Подставим вместо u во второе равенство выражение $\varkappa(h) = df_a(h) + \alpha(h)\|h\|$.

$$\begin{aligned} g(f(a+h)) = g(b+\varkappa(h)) = g(b) + dg_b(df_a(h) + \alpha(h)\|h\|) + \beta(\varkappa(h))\|\varkappa(h)\| = \\ = g(b) + dg_b(df_a(h)) + dg_b(\alpha(h)) \cdot \|h\| + \beta(\varkappa(h)) \cdot \|\varkappa(h)\| = \\ = g(b) + dg_b(df_a(h)) + \gamma(h)\|h\|, \gamma(h) = dg_b(\alpha(h)) + \beta(\varkappa(h))\frac{\|\varkappa(h)\|}{\|h\|}. \end{aligned}$$

По теореме о непрерывности композиции $dg_b(\alpha(h))$ и $\beta(\varkappa(h))$ непрерывны при $h = 0$ со значением 0. Также $\exists C \geqslant 0$ $(\|df_a(h)\| \leqslant C\|h\|)$. Следовательно, $\frac{\|\varkappa(h)\|}{\|h\|}$ ограничена в некоторой проколотой окрестности $h = 0$ и, значит, $\gamma(h)$ — бесконечно малая при $h \to 0$ (как сумма двух бесконечно малых). □

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ открыто, и функция $f : U \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \ldots, f_m)^T$.

Лемма 23. *Функция f дифференцируема в точке a тогда и только тогда, когда все координатные функции f_i дифференцируемы в точке a.*

Доказательство. Пусть f дифференцируема в точке a. Распишем формулу (1) покоординатно:

$$f_i(a+h) = f_i + L_i(h) + \alpha_i(h)|h|.$$

Координатные функции L_i дифференциала L_a линейны, а условие "$\alpha(h) \to 0$ при $h \to \overline{0}$" равносильно "$\alpha_i(h) \to 0$ при $h \to 0$" , где $i = 1, \ldots, m$, поэтому функция f_i дифференцируема в точке a и ее дифференциал $d(f_i)_a = L_i$.

Обратно, если все функции f_i дифференцируемы, то верна и формула (1) с $L_a = (L_1, \ldots, L_m)^T$ и $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)^T$. □

Определение 45. Производная по вектору e_k в точке a, т.е. $\frac{\partial f}{\partial e_k}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+te_k) - f(a)}{t}$, называется *частной производной* функции f по переменной x_k в точке a и обозначается $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ (а также $f'_{x_k}(a)$ и $\partial_k f(a)$).

Из теоремы 1 получим необходимое условие дифференцируемости.

Следствие 21. Если $f : U \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке a, то она имеет в этой точке частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$, $k = 1, \ldots, n$, и $df_a(h) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)h_k$ для всех $h \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. По теореме (39) существуют $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = df_a(e_k)$, следовательно, в силу линейности

$$df_a(h) = df_a\left(\sum_{k=1}^n h_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n h_k df_a(e_k) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)h_k.$$

□

Определение 46. Вектор $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a))^T$ называется *градиентом* функции f в точке a и обозначается $gradf(a)$ или $\nabla f(a)$.

Следствие 22. Пусть f дифференцируема в точке a, и $gradf(a) \neq 0$. Тогда для любого $v \in \mathbb{R}^n$ с $|v| = 1$ выполнено

$$\left|\frac{\partial f}{\partial v}(a)\right| \leqslant |gradf(a)|,$$

причем равенство достигается лишь при $v = \pm\frac{gradf(a)}{|gradf(a)|}$.

Доказательство. Так как $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = df_a(v) = (gradf(a), v)$, то по неравенству Коши-Буняковского-Шварца $\left|\frac{\partial f}{\partial v}(a)\right| \leqslant |gradf(a)| \cdot |v| = |gradf(a)|$, причем равенство достигается лишь в случае коллинеарности $gradf(a)$ и v, то есть $v = \pm\frac{gradf(a)}{|gradf(a)|}$. □

Поскольку действие линейного отображения из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ на вектор есть умножение этого вектора слева на матрицу, поэтому найдется такая матрица Df_a размера $m \times n$, что $df_a(h) = Df_a \cdot h$ для всех $h \in \mathbb{R}^n$.

Определение 47. Матрица Df_a называется *матрицей Якоби* функции f в точке a.

Замечание. По лемме 1 следует, что $df(h) = (df_1(h), \ldots, df_m(h))^T$, поэтому ij-й элемент матрицы Якоби в точке a равен значению $d(f_i)_a(e_j)$, то есть $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$. Таким образом, строками матрицы Якоби являются градиенты ее координатных функций в этой точке.

Теорема 41 (Достаточное условие дифференцируемости)**.** *Пусть $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, точка $a \in U$. Если все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ определены в окрестности a и непрерывны в точке a, то f дифференцируема в точке a.*

Доказательство. Пусть все $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ определены в $B_r(a) \subset U$. Рассмотрим $h = (h_1, \ldots, h_n)^T$ с $|h| < r$, и определим точки $x_0 = a$, $x_k = a + \sum_{j=1}^k h_j e_j$. Тогда приращение

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \sum_{k=1}^n (f(x_{k-1} + h_k e_k) - f(x_{k-1})).$$

Функция $g(t) = f(x_{k-1} + te_k) - f(x_{k-1})$ на отрезке с концами 0 и h_k (при $h_k \neq 0$) имеет производную $g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_{k-1} + t_{e_k})$. По теореме Лагранжа о среднем $g(h_k) - g(0) = g'(\xi_k)h_k$ для некоторого ξ_k между 0 и h_k. Положим $c_k(h) = x_{k-1} + \xi_k e_k$, тогда последнее равенство перепишется в виде $f(x_k) - f(x_{k-1}) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(c_k)h_k$, причем $c_k \to a$ при $h \to 0$. Поэтому

$$f(a+h) - f(a) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)h_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(c_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\right) h_k =$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(c_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\right) \frac{h_k}{|h|}|h| =: \alpha(h)|h|.$$

В силу непрерывности $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ в точке a и неравенства $|h_k| \leqslant |h|$ функция $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$. Следовательно, f дифференцируема в точке a. □

Пусть $\underbrace{U}_{\text{откр.}} \subset \mathbb{R}^n, f : U \to \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$.

Определение 48. Частной производной нулевого порядка в точке a называют $f(a)$.

Если частная производная $\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}}\ldots\partial x_{i_1}}$ $k-1$-го порядка определена в некоторой окрестности точки a и меет в точке a частную производную по x_{i_k}, то

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k}\partial x_{i_{k-1}}\ldots\partial x_{i_1}} := \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}}\ldots\partial x_{i_1}}\right)\Bigg|_{x=a}$$

называется *частной производной k-го порядка функции f в точке a.*

Теорема 42 (Юнг). *Пусть $\underbrace{U}_{\text{откр.}} \subset \mathbb{R}^2, f : U \to \mathbb{R}$. Если частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ определены в некоторой окрестности точки (a, b) и дифференцируемы в точке (a, b), то*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b).$$

Доказательство. Выберем окрестность $B_\delta(a, b)$, в которой определены $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$. Рассмотрим выражение

$$\Delta(t) = f(a+t, b+t) - f(a+t, b) - f(a, b+t) + f(a, b),\ 0 < |t| < \delta.$$

Функция $g(s) = f(a+s, b+t) - f(a+s, b)$ на отрезке с концами 0 и t имеет производную $g'(s) = \frac{\partial f}{\partial x}(a+s, b+t) - \frac{\partial f}{\partial x}(a+s, b)$. По теореме Лагранжа $g(t) - g(0) = g'(\xi)t$ для некоторого ξ между 0 и t. Тогда в силу равенства $\Delta(t) = g(t) - g(0)$ и дифференцируемости $\frac{\partial f}{\partial x}$ имеем

$$\Delta(t) = g'(\xi)t = \frac{\partial f}{\partial x}(a+\xi, b+t)t - \frac{\partial f}{\partial x}(a+\xi, b)t =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(a,b)\xi + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a,b)t + \alpha(t)\sqrt{\xi^2+t^2}\right)t - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(a,b)\xi + \beta(t)|\xi|\right)t =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a,b) \pm \alpha(t)\sqrt{1+\frac{\xi^2}{t^2}} \pm \beta(t)\frac{|\xi|}{|t|}\right)t^2,$$

где $\alpha(t) \to 0$, $\beta(t) \to 0$ при $t \to 0$. Следовательно, существует $\lim_{t\to 0}\frac{\Delta(t)}{t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a,b)$.

Аналогично $\lim_{t\to 0}\frac{\Delta(t)}{t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)$, что и доказывает теорему. □

Распространим теорему на случай n переменных.

Следствие 23. Пусть $k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2$. Если все частные производные до порядка $k-2$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки a, а все частные производные порядка $k-1$ дифференцируемы в точке a, то

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{ik}\ldots\partial x_{i1}}(a) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{jk}\ldots\partial x_{j1}}(a)$$

при условии, что списки $(i_1, \ldots, i_k)$ и $(j_1, \ldots, j_k)$ отличаются лишь порядком.

Доказательство. Индукция по k. Пусть $k = 2$. Положим $x_r = a_r, r \neq i_1, i_2$, тогда имеем функцию двух переменных x_{i_1} и x_{i_2}, и равенство вытекает по теореме Юнга (42).

Пусть $k > 2$. Можно считать, что список $(j_1, \ldots, j_k)$ получен из $(i_1, \ldots, i_k)$ с помощью одной транспозиции, то есть обменом i_r и i_{r-1}.

Рассмотрим $g = \frac{\partial^{r-2} f}{\partial x_{i_{r-2}}\ldots\partial x_{i_1}}$. По теореме Юнга в окрестности точки a имеет место равенство $\frac{\partial^2 g}{\partial x_{i_r}\partial x_{i_{r-1}}} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_{i_{r-1}}\partial x_{i_r}}$. При $r = k$ имеем $\frac{\partial^2 g}{\partial x_{i_r}\partial x_{i_{r-1}}}(a) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_{i_{r-1}}\partial x_{i_r}}(a)$, что лишь формой записи отличается от требуемого равенства; при $r < k$ еще надо продифференцировать по переменным $x_{i_{r+1}}, \ldots, x_{i_k}$ и подставить $x = a$. □

Дифференциалы высших порядков определяются индуктивно.

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ открыто.

Определение 49. Положим $d^1 f = df$. Пусть $k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2$. Пусть $d^{k-1}f$ определен в некоторой окрестности точки a и дифференцируем в точке a, то $d^k f_a := d(d^{k-1}f)_a$, понимаемый как k-линейное отображение, называется *дифференциалом* k-го порядка функции f в точке a. При этом функция f называется *k раз дифференцируемой* в точке a.

Лемма 24. *Дифференциал $d^k f$ симметричен, то есть на наборах k векторов, отличающихся лишь порядком, принимает одинаковые значения.*

Доказательство. Достаточно установить совпадение на наборах векторов стандартного базиса и воспользуемся линейностью.

Покажем по индукции, что $d^k f_a(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \ldots \partial x_{i_1}}(a)$. При $k = 1$ это следует из теоремы 1 и определения частной производной. Если равенство верно для $k-1$, то $\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \ldots \partial x_{i_1}} = d^{k-1} f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_{k-1}})$ дифференцируема в точке a. Следовательно,

$$d^k f_a(e_{i_1,\ldots,e_{i_k}}) = d\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \ldots \partial x_{i_1}}\right)_a (e_{i_k}) = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \ldots \partial x_{i_1}}\right)|_{x=a} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \ldots \partial x_{i_1}}(a).$$

Симметричность $d^k f$ на наборах базисных векторов теперь вытекает из следствия теоремы Юнга (42). □

Следствие 24. Функция f дифференцируема k раз в точке a, тогда и только тогда, когда все частные производные до порядка $k-2$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки a, а все частные производные порядка $k-1$ дифференцируемы в точке a.

Теорема 43 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа)**.** *Пусть* $f : \underbrace{U}_{\text{откр.}} \to \mathbb{R}$ *дифференцируема $(p+1)$ раз на U. Если $a \in U$, $h \in \mathbb{R}^n$, такие что $[a, a+h] \subset U$, то $\exists \Theta \in (0,1)$, что*

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} d^k f_a(h) + \frac{1}{(p+1)!} d^{p+1} f_{a+\Theta h}(h).$$

Доказательство. $[a, a+h] = \{a + th \mid t \in [0,1]\}$ — отрезок с концами a и $a+h$.

Рассмотрим функцию $g(t) = f(a+th)$, определённую на интервале, содержащем $[0,1]$. Так как $t \mapsto \underbrace{a}_{\text{пост.}} + \underbrace{th}_{\text{линейн.}} \Rightarrow \forall \tau \in \mathbb{R}\ d(a+th)_t(\tau) = \tau h$. Тогда по теореме о дифференцировании композиции

$$dg_t(\tau) = df_{a+th}(\tau h).$$

По индукции

$$d^k g_t(\tau) = d^k f_{a+th}(\tau h) \quad k = 1, \ldots, p+1.$$

Имеем $d^k g_t(\tau) = g^{(k)}(t)\tau^k \overset{\tau=1}{\Rightarrow} g^{(k)}(t) = d^k f_{a+th}(h), \quad k = 1, \ldots, p+1.$

По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$g(t) = g(0) + \sum_{k=1}^{p} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} t^k + \frac{g^{(p+1)}(\theta_t)}{(p+1)!} t^{p+1}.$$

При $t = 1$ и $\theta = \theta_1$ получаем искомую формулу. □

Теорема 44 (остаточный член в форме Пеано). *Если функция* $f : \underbrace{U}_{\text{откр.}} \to \mathbb{R}$ *дифференцируема* p *раз в точке* a*, то*

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} d^k f_a(h) + o(|h|^p),\ \ h \to 0.$$

8. Брусы в $\mathbb{R}^n$ и их объем. Представление открытого множества в виде объединения кубов. Алгебры и σ-алгебры, борелевская σ-алгебра. Внешняя мера Лебега и ее свойства. Измеримые множества, измеримость множеств внешней меры нуль и полупространств. Теорема Каратеодори: σ-алгебра измеримых множеств, мера Лебега и ее счетная аддитивность. Непрерывность меры Лебега. Измеримость брусов, борелевских имножеств. Критерии измеримости множества: приближение борелевскими, приближение брусами. Пример неизмеримого множества.

Определение 50. *Брусом* в $\mathbb{R}^n$ называется множество вида $B = I_1 \times \ldots \times I_n$, где I_k – ограниченный промежуток. Если $a_k \leqslant b_k$ – концы I_k, то $|B| = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$ называется *объемом* бруса B.

Если хотя бы один из промежутков I_k вырожденный, то брус B называется *вырожденным*, в частности, $\varnothing$ — вырожденный брус. Объём вырожденного бруса равен 0.

Если все I_k – отрезки, то брус называется *замкнутым*.

Если все I_k – интервалы, то брус называется *открытым*.

Свойство 12. *Если $B, B_1, \ldots, B_m$ — брусы и $B \subset \bigcup_{i=1}^m B_i$, то $|B| \leqslant \sum_{i=1}^m |B_i|$.*

Доказательство. Если $I \subset \mathbb{R}$ — ограниченный промежуток, то

$$|I| - 1 \leqslant \#(I \cap \mathbb{Z}) \leqslant |I| + 1,$$
$$N|I| - 1 \leqslant \#(NI \cap \mathbb{Z}) \leqslant N|I| + 1,$$
$$|I| - \frac{1}{N} \leqslant \frac{1}{N}\#\left(I \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right) \leqslant |I| + \frac{1}{N},$$
$$|I| = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#\left(I \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right).$$

Пусть $B = I_1 \times \ldots \times I_n$, тогда

$$|B| = \lim_{N\to\infty} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{N}\#\left(I_j \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}\right) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^n}\#\left(B \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^n\right).$$

Если $B \subset \bigcup_{i=1}^m B_i$, то

$$\frac{1}{N^n}\#\left(B \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^n\right) \leqslant \frac{1}{N^n}\sum_{i=1}^{n}\#\left(B_i \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^n\right).$$

Предельный переход $N \to \infty$ завершает доказательство. □

Свойство 13. *Для любого бруса B и $\varepsilon > 0$ найдутся замкнутый брус B' и открытый брус B^o, так что $B' \subset B \subset B^o$ и $|B'| > |B| - \varepsilon$, $|B^o| < |B| + \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть $B = I_1 \times \ldots \times I_n$, где I_k — ограниченный промежуток с концами $a_k \leqslant b_k$.

Если $|B| > 0$, то положим

$$B'_\delta = [a_1 + \delta, b_1 - \delta] \times \ldots \times [a_n + \delta, b_n - \delta]$$
$$B^o_\delta = (a_1 - \delta, b_1 + \delta) \times \ldots \times (a_n - \delta, b_n + \delta)$$

Так как $|B'_\delta|$, $|B^o_\delta| \to |B|$ при $\delta \to +0$, то искомые брусы существуют и определяются выбором δ. Если же B – вырожденный брус, то положим $B' = \varnothing$, B^o_δ как выше. □

Лемма 25. *Каждое непустое открытое множество U в $\mathbb{R}^n$ представимо в виде счетного объединения непересекающихся кубов (брусов, у которых длины ребер равны).*

Доказательство. Куб $\left[\frac{k_1}{2^m}; \frac{k_1+1}{2^m}\right) \times \ldots \times \left[\frac{k_n}{2^m}; \frac{k_n+1}{2^m}\right)$, где $k_i \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant 0$, будем называть двоичным m-го ранга.

Обозначим через A_0 множество всех кубов ранга 0, содержащихся в U. Если множества $A_0, \ldots, A_{m-1}$ уже определены, то обозначим через A_m множество всех кубов ранга m, содержащихся в U и не лежащих ни в одном кубе из $A_0, \ldots, A_{m-1}$. Положим $A = \bigcup_{m=0}^\infty A_m$. Тогда A – счетное множество непересекающихся кубов. Покажем, что $U = \bigcup_{Q\in A} Q$. Пусть $x \in U$. Ввиду открытости U существует шар $\overline{B_r}(x) \subset U$. Если m таково, что $\frac{\sqrt{n}}{2^m} \leqslant r$, то содержащий точку x куб $Q_m(x)$ ранга m удовлетворяет включению $Q_m(x) \subset \overline{B_r}(x)$ и, значит, множество $\{m \in \mathbb{N}_0 : Q_m(x) \subset U\}$ непусто. Обозначим через m_0 его минимум. Тогда $Q_m(x) \not\subset U$ при $m < m_0$, а $Q_{m_0}(x) \subset U$. Следовательно, $Q_{m_0}(x) \in A_{m_0}$ и поэтому $x \in \bigcup_{Q\in A} Q$. Учитывая, что обратное включение очевидно, равенство установлено. □

Определение 51. Семейство $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ называется *алгеброй*, если

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$;
2. если $E \in \mathcal{A}$, то $E^c = \mathbb{R}^n \setminus E \in \mathcal{A}$;
3. если $E, F \in \mathcal{A}$, то $E \cup F \in \mathcal{A}$.

Алгебра $\mathcal{A}$ называется *σ-алгеброй*, если выполнено условие

3'. если $E_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}$, то $\bigcup_{k=1}^\infty E_k \in \mathcal{A}$.

Пример.

1. σ-алгебра, содержащая все одноэлементные множества, также содержит все не более чем счетные множества и множества, дополнение к которым не более чем счетно.
2. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ – минимальная по включению σ-алгебра, содержащая все открытые множества (*борелевская σ-алгебра*). Чтобы установить существование $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, необходимо рассмотреть пересечение всех σ-алгебр, содержащие открытые множества.

Определение 52. *Внешней мерой Лебега* множества $E \subset \mathbb{R}^n$ называется величина

$$\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^\infty |B_i| : E \subset \bigcup_{i=1}^\infty B_i\right\},$$

где инфимум берется по всем счетным наборам $\{B_i\}$, покрывающих E.

Очевидно, $0 \leqslant \mu^*(E) \leqslant +\infty$.

Теорема 45. *Внешняя мера обладает следующими свойствами*

1. *если $E \subset F$, то $\mu^*(E) \leqslant \mu^*(F)$ (монотонность);*
2. *если $E = \bigcup_{k=1}^\infty E_k$, то $\mu^*(E) \leqslant \sum_{k=1}^\infty \mu^*(E_k)$ (счетная полуаддитивность);*
3. *$\mu^*(R) = |R|$ для любого бруса R (нормировка).*

Доказательство. Докажем пункт 2. Будем предполагать, что $\mu^*(E) < +\infty$, иначе утверждение очевидно. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим семейство брусов $\{B_{i,k}\}_{i=1}^{\infty}$, образующее покрытие E_k, такие что

$$\sum_{i=1}^{\infty} |B_{i,k}| < \mu^*(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Семейство $\{B_{i,k}\}_{i,k=1}^{\infty}$ образуют покрытие $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ и

$$\mu^*(E) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{+\infty} |B_{i,k}| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\mu^*(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu^*(E_k) + \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ – любое, то пункт 2 установлен.

Докажем пункт 3. Так как $\{R\}$ – покрытие R брусом, то $\mu^*(R) \leqslant |R|$. Покажем, что $\mu^*(R) \geqslant |R|$.

Сначала для случая, когда R – замкнуто. Нам достаточно показать, что $|R| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |B_i|$ для всякого покрытия R брусами B_i. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда по свойству брусов (13) $\exists \underbrace{B_i^o}_{\text{отк. брус}} \supset B_i$ и $|B_i^o| < |B_i| + \frac{\varepsilon}{2^i}$. Так как $R \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_k^o$ и R – компакт, то по свойству брусов (12)

$$R \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_i^o \Rightarrow |R| \leqslant \sum_{i=1}^{N} |B_i^o| \Rightarrow |R| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \left(|B_i| + \frac{\varepsilon}{2^i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} |B_i| + \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ – любое, то $|R| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |B_i|$.

Пусть R – произвольный брус. Тогда для $\varepsilon > 0$ по свойству (13) $\exists \underbrace{R'}_{\text{замк. брус}} \subset R$ $(|R'| > |R| - \varepsilon)$. Тогда

$$\mu^*(R) \geqslant \mu^*(R') = |R'| > |R| - \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ – любое, то $\mu^*(R) \geqslant |R|$. □

Определение 53. Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *измеримым (по Лебегу)*, если для любого $A \subset \mathbb{R}^n : \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$.

Пример. Если $\mu^*(E) = 0$, то E измеримо.

Действительно, $\mu^*(A \cap E) \leqslant \mu^*(E) = 0$, $\mu^*(A \cap E) \leqslant \mu^*(A)$ из монотонности μ^*. Тогда $\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$.

Пример. Для всякого $a \in \mathbb{R}$ и $k \in \{1, \ldots, n\}$ полупространство $H = H_{a,k} = \{x = (x_1, \ldots, x_n)^T : x_k < a\}$ измеримо.

Рассмотрим $A \subset \mathbb{R}^n$ и произвольное покрытие $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$. Брусами определим

$$B_i^1 = B_i \cap H,\ B_i^2 = B_i \cap H^c.$$

Тогда B_i^1, B_i^2 – брусы. $\{B_i^1 \cap H\}_{i=1}^{\infty}$ – покрытие $A \cap H$. $\{B_i^2 \cap H^c\}_{i=1}^{\infty}$ – покрытие $A \cap H^c$.

$$\sum_{i=1}^{\infty} |B_i| = \sum_{i=1}^{\infty} |B_i^1| + \sum_{i=1}^{\infty} |B_i^2| \geqslant \mu^*(A \cap H) + \mu^*(A \cap H^c).$$

Следовательно, переходя к inf, $\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A \cap H) + \mu^*(A \cap H^c)$.

Аналогичное утверждение верно и для других неравенств между x_k и a.

Теорема 46 (Каратеодори). *Совокупность $\mathcal{M}$ всех измеримых множеств в $\mathbb{R}^n$ образует σ-алгебру. Сужение $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ счетно аддитивно.*

Доказательство. $\varnothing \in \mathcal{M}$, $E \in \mathcal{M} \Rightarrow E^c \in \mathcal{M}$.

1. Пусть $E, F \in \mathcal{M}$. Покажем, что $E \cup F \in \mathcal{M}$.
   Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$, тогда
   $$\mu^*(A \cap (E \cup F)) + \mu^*(A \cap (E \cup F)^c) = \mu^*(A \cap (E \cup F) \cap E) + \mu^*(A \cap (E \cup F) \cap E^c) + \mu^*(A \cap (E \cup F)^c) =$$
   $$= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c \cap F) + \mu^*(A \cap E^c \cap F^c) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) = \mu^*(A).$$
2. Пусть $\{E_k\} \subset \mathcal{M}$, причем $E_i \cap E_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Покажем, что $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{M}$.
   Положим $F_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$. Если $A \subset \mathbb{R}^n$, то
   $$\mu^*(A \cap F_n) = \mu^*(A \cap F_n \cap E_n) + \mu^*(A \cap F_n \cap E_n^c) = \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*(A \cap F_{n-1}).$$
   Продолжая процесс, получим $\mu^*(A \cap F_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k)$.
   Поскольку $F_n \in \mathcal{M}$, то
   $$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A \cap F_n^c) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \cap F^c).$$
   Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим $\mu^*(A) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \cap F^c)$. Откуда по свойству счетной полуаддитивности
   $$\mu^*(A) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \cap F_c) \geqslant \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap F^c) \geqslant \mu^*(A).$$
   Это доказывает, что $F \in \mathcal{M}$. Если еще положить $A = F$, то $\mu^*(F) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k)$.
3. Пусть $\{A_k\} \subset \mathcal{M}$. Покажем, что $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}$.
   Положим $E_1 = A_1$, $E_k = A_k \setminus \bigcup_{i<k} E_i$. Тогда E_k попарно не пересекаются, и $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{M}$ по предыдущему пункту.

□

Определение 54. $\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}}$ – мера Лебега.

Теорема 47 (непрерывность меры)**.** *1.* $A_i \in \mathcal{M}$, $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. *Тогда* $\mu(A) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$ *(непрерывность снизу).*

2. $A_i \in \mathcal{M}$, $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, $\mu(A_1) < \infty$. *Тогда* $\mu(A) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$ *(непрерывность сверху).*

Доказательство. 1. Положим $B_1 = A_1$, $B_i = A_i \setminus A_{i-1}$. Тогда $B_i \in \mathcal{M}$, $B_i \cap B_j = \varnothing$ при $i \neq j$, и $\bigcup_{i=1}^{m} B_i = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$ для всех $m \in \mathbb{N} \cup \infty$. Поэтому
$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \mu(B_i) = \lim_{m\to\infty} \mu(A_m).$$

2. Рассмотрим $A_1 \setminus A_i$. Применим прошлый пункт к этим множествам. Тогда $\bigcup_{i=1}^{\infty}(A \setminus A_i) = A_1 \setminus A$ и
$$\mu(A_1) - \mu(A) = \mu(A_1 \setminus A) = \lim_{m\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_m) = \mu(A_1) - \lim_{m\to\infty} \mu(A_m).$$
Осталось из обоих частей вычесть $\mu(A_1)$ и изменить знак.

□

Лемма 26. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}$.

Доказательство. Брус измерим, так как его можно записать в виде пересечения конечного числа полупространств (измеримы по примеру). По лемме 25 тогда всякое открытое множество измеримо. $\square$

Лемма 27 (регулярность меры). *Если* $E \in \mathcal{M}$, *то* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \underbrace{G}_{\text{откр.}} \supset E\,(\mu(G \setminus E) < \varepsilon)$.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда E ограничено, а значит, $\mu^*(E) < \infty$. Для $\varepsilon > 0$ рассмотрим покрытие E счетным семейством брусов $\{B_k\}$ с $\sum_{i=1}^{\infty} |B_i| < \mu(E) + \frac{\varepsilon}{2}$. По свойству брусов $\exists \underbrace{B_i^o}_{\text{откр.}} \supset B_i \left(|B_i^o| < |B_i| + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\right)$. Определим $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i^o$. Тогда G – открытое, $G \supset E$ и

$$\mu(G \setminus E) = \mu(G) - \mu(E) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |B_i^0| - \mu(E) < \varepsilon.$$

Перейдем к общему случаю. Поскольку $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, где $A_k = \{x \in \mathbb{R}^n : k-1 \leqslant |x| < k\}$, то E есть счетное объединение непересекающихся играниченных измеримых множеств $E_k = E \cap A_k$. По доказанному существует такое открытое множество $G_k \supset E_k$, что $\mu(G_k \setminus E_k) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^k}$. Тогда множество $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$ открыто, содержит E и

$$\mu(G \setminus E) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k \setminus E\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(G_k - E_k) < \varepsilon.$$

$\square$

Определение 55. Счетное пересечение открытых множеств называется множествами типа G_δ.

Счетное объединение замкнутых множеств называется множествами типа F_σ.

Замечание. Множества типа G_δ и F_σ являются борелевскими.

Теорема 48 (критерий измеримости). *Множество* E *измеримо* $\Leftrightarrow$ *существует множество* Ω *типа* G_δ, *что* $E \subset \Omega$ *и* $\mu(\Omega \setminus E) = 0$.

Доказательство. Докажем первое утверждение.

($\Rightarrow$) Из регулярности меры следует, что для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдется такое открытое $G_k \supset E$ с $\mu(G_k \setminus E) \leqslant \frac{1}{k}$. Положим $\Omega = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$, тогда $E \subset \Omega$, и $\mu(\Omega \setminus E) \leqslant \mu(G_k \setminus E) \leqslant \frac{1}{k}$, откуда $\mu(\Omega \setminus E) = 0$.

($\Leftarrow$) Поскольку $E = \Omega \setminus (\Omega \setminus E)$ есть разность двух измеримых множеств, то E измеримо. $\square$

Замечание. Множество E измеримо $\Leftrightarrow$ существует множество Δ типа F_σ, что $\Delta \subset E$ и $\mu(E \setminus \Delta) = 0$.

Теорема 49 (критерий измеримости). *Пусть* $\mu^*(E) < \infty$. *Множество* E *измеримо* $\Leftrightarrow$ *существуют брусы* $B_1, \ldots, B_N$, *такие что* $\forall \varepsilon > 0\ \mu^*(E \triangle \bigcup_{k=1}^{N} B_k) < \varepsilon$.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Если E измеримо, то $\exists \underbrace{\{B_k\}_{k=1}^{\infty}}_{\text{брусы}}$, такие что $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ и $\sum_{k=1}^{+\infty} |B_k| < \mu^*(E) + \frac{\varepsilon}{2}$. Так как ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} |B_k|$ сходится, то $\exists N \left(\sum_{k=N+1}^{+\infty} |B_k| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Положим $C = \bigcup_{k=1}^{N} B_k$. Тогда:

$$\mu^*(E \triangle C) \leqslant \mu^*(E \setminus C) + \mu^*(C \setminus E) \leqslant \mu^*\left(\bigcup_{k=N+1}^{+\infty} B_k\right) + \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k \setminus E\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty}|B_k| + \sum_{k=1}^{+\infty}|B_k| - \mu^*(E) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

($\Leftarrow$) Пусть $\mu^*(E\triangle C) < \varepsilon$. Тогда тем более $\mu^*(E\setminus C) < \varepsilon$ и $\mu^*(C\setminus E) < \varepsilon$. Поскольку $E \subset C\cup(E\setminus C)$ и $E^c \subset C^c \cup (C\setminus E)$, то для любого $A\subset \mathbb{R}^n$ имеем

$$\mu^*(A\cap E) + \mu^*(A\cap E^c) \leqslant \mu^*(A\cap C) + \mu^*(A\cap(E\setminus C)) + \mu^*(A\cap C^c) + \mu^*(A\cap(C\setminus E)) \leqslant$$

$$\leqslant \mu^*(A\cap C) + \mu^*(A\cap C^c) + \mu^*(E\setminus C) + \mu^*(C\setminus E) < \mu^*(A) + 2\varepsilon.$$

Следовательно, $\mu^*(A\cap E) + \mu^*(A\cap E^c) \leqslant \mu^*(A)$. Значит, E измеримо. □

Построим пример неизмеримого множества.

Пример (множество Витали)**.** На $[0,1]$ введём отношение эквивалентности $x\sim y \Leftrightarrow x-y\in\mathbb{Q} \Rightarrow [0,1] = \bigsqcup_\alpha H_\alpha$, H_α – классы эквивалетности.

V – множество, содержащее ровно один элемент из каждого H_α и только такие элементы (такое множество существует по аксиоме выбора).

Пусть R означает множество всех рациональных чисел, принадлежащих отрезку $[-1,1]$. Для каждого $r\in R$ положим $V_r = V + r = \{v + r : v\in V\}$.

Во-первых, «сдвинутые копии» множества V (то есть V_n) попарно не пересекаются, так как

$$v\in V_i\cap V_j \Rightarrow v_i + r_i = v_j + r_j \Rightarrow v_j - v_i \in \mathbb{Q}.$$

Во-вторых, имеют место включения

$$[0,1] \subset \bigsqcup_{r\in R}^{\infty} V_r \subset [-1,2].$$

Значит,

$$1 \leqslant \sum_{r\in R}\mu(V_r) \leqslant 3.$$

В силу инвариативности меры относительно сдвигов, $\mu(V) = \mu(V_r)$. Тогда рассмотрим два случая:

1. $\mu(V) = 0$. Тогда мера отрезка $[0,1]$ тоже равна нулю, противоречие.

2. $\mu(V) > 0$. Тогда мера отрезка $[-1,2]$ будет бесконечной в силу счетной аддитивности меры, противоречие.

Значит, V – пример неизмеримого множества.

9. Измеримые функции. Согласованность измеримости функций с арифметическими операциями. Измеримость точных граней и предела последовательности измеримых функций. Сходимость почти всюду. Простые функции. Теорема о приближении измеримой функции простыми.

Пусть E измеримо и $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$.

Определение 56. Функция f называется *измеримой* (по Лебегу), если $\{x \in E : f(x) < a\} = f^{-1}([-\infty, a))$ измеримо для всех $a \in \mathbb{R}$.

Лемма 28. *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *f измеримо;*
2. *$f^{-1}(U)$ измеримо для любого открытого U в $\overline{\mathbb{R}}$;*
3. *$f^{-1}(\Omega)$ измеримо для любого борелевского Ω в $\overline{\mathbb{R}}$.*

Доказательство. Рассмотрим $\mathcal{A} = \{A \in B(\overline{\mathbb{R}}) : f^{-1}(A)$ измеримо$\}$. Так как $\varnothing \in \mathcal{A}$, $E \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(\overline{\mathbb{R}} \setminus A) \Rightarrow (A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{\mathbb{R}} \setminus A \in \mathcal{A})$ и $f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(A_i) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$, то $\mathcal{A}$ образует σ-алгебру. $\mathcal{A}$ содержит все лучи $[-\infty, a)$. Следовательно, $B(\overline{\mathbb{R}}) = \mathcal{A}$, то есть $(1 \Rightarrow 3)$.

Импликации $(3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1)$ очевидны. □

Теорема 50. *Если $f, g : E \to \mathbb{R}$ измеримые и $\lambda \in \mathbb{R}$, то $f+g, \lambda f, |f|, fg$ также измеримы.*

Доказательство. 1. Докажем измеримость суммы. Поскольку $\alpha < \beta \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{Q}(\alpha < r < \beta)$, $\mathbb{Q} = \{r_k\}_{k=1}^{\infty}$, то

$$\{x \in E : f(x) + g(x) < a\} = \{x \in E : f(x) < a - g(x)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in E : f(x) < r_k < a - g(x)\} =$$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in E : f(x) < r_r\} \cap \{x \in E : g(x) < a - r_k\}.$$

Следовательно, $\{x \in E : f(x) + g(x) < a\}$ измеримо.

2. Пусть $\lambda > 0$, тогда $\{x \in E : \lambda f(x) < a\} = \{x \in E : f(x) < \frac{a}{\lambda}\}$ измеримо.

   Если $\lambda = 0$, то тривиально. Если $\lambda < 0$, то аналогично.

3. Так как $\{x \in E : f^2(x) < a\} = \{x \in E : f(x) < \sqrt{a}\} \cap \{x \in E : f(x) > -\sqrt{a}\}$ измеримо $\forall a > 0$.

   Если $a \leqslant 0$, то $\{x \in E : f^2(x) < a\} = \varnothing$ – измеримо.

   Следовательно, f^2 – измеримая функция. Аналогично для $|f|$.

   Так как $fg = \frac{1}{2}\left((f+g)^2 - f^2 - g^2\right)$, то fg измерима.

□

Теорема 51. *Если $f_k : E \to \overline{\mathbb{R}}$ – измеримы, то $\sup\limits_k f_k$, $\inf\limits_k f_k$, $\overline{\lim}_{k\to+\infty} f_k$, $\underline{\lim}_{k\to+\infty} f_k$ также измеримы на E.*

Доказательство. Измеримость $g = \sup\limits_k f_k$ следует из равенства:

$$\{x \in E : g(x) \leqslant a\} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \{x \in E : f_k(x) \leqslant a\}$$

Измеримость $h = \inf\limits_k f_k$ следует из $\inf\limits_k f_k = -\sup\limits_k(-f_k)$.

Далее, поскольку $\overline{\lim}_{k\to+\infty} f_k = \inf\limits_k \sup\limits_{m\geqslant k} f_m$, $\underline{\lim}_{k\to+\infty} f_k = \sup\limits_k \inf\limits_{m\geqslant k} f_m$, то оба предела измеримы. □

Следствие 25. Если $f_k : E \to \overline{\mathbb{R}}$ измеримы, и $f(x) = \lim_{k\to+\infty} f_k(x)$ для всех $x \in E$, то f измерима на E.

Доказательство. Вытекает из предыдущей теоремы, но докажем непосредственно.

Имеем $f(x) < a \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{N}\ \exists N\ \forall k \geqslant N\ (f_k(x) < a - \frac{1}{j})$.

$\{x : f(x) < a\} = \bigcup_{j=1}^{+\infty} \bigcup_{N=1}^{+\infty} \bigcap_{k=N}^{+\infty} \{x : f_k(x) < a - \frac{1}{j}\}$ – измеримо как операции над измеримыми множествами. □

Определение 57. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, Q – формула на E.

Говорят, что Q верна *почти везде на* E, если $\mu(x \in E : Q(x)$ ложно$) = 0$.

Лемма 29. *Пусть $f, g : E \to \mathbb{R}$. Если $f = g$ почти везде и f измерима, то g измерима.*

Доказательство. По условию, $Z = \{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$ имеет меру нуль. Тогда для любого $a \in \mathbb{R}$ имеем $\{x \in E : g(x) < a\} = (\{x \in E : f(x) < a\} \cap Z^c) \cup (\{x \in E : g(x) < a\} \cap Z)$ – измеримо. □

Следствие 26. Если $f_k : E \to \overline{\mathbb{R}}$ измеримы и $f_k \to f$ почти везде на E, где $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, то f измерима.

Доказательство. $g = \overline{\lim}_{k\to+\infty} f_k$ измерима на E, $f = g$ почти везде на E, значит f измерима (по лемме). □

Определение 58. Функция $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *простой*, если φ измерима и множество её значений конечно.

Пример. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$, Определим *индикатор (характеристическую функцию)* A:

$$\mathbb{I}_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Поскольку $\{x : \mathbb{I}_A(x) < a\}$ пусто при $a \leqslant 0$, совпадает с A^c при $a \in (0, 1]$ и совпадает с $\mathbb{R}^n$ при $a > 1$, то функция $\mathbb{I}_A$ является измеримой $\Leftrightarrow$ A измеримо.

Замечание. Любая линейная комбинация индикаторов измеримых множеств является простой функцией.

С другой стороны, для любой простой функции φ существует разбиение $\mathbb{R}^n$ конечным числом измеримых множеств, на которых φ постоянна (допустимое разбиение для φ). Такое разбиение можно построить следующим образом: пусть $\varphi(\mathbb{R}^n) = \{a_1, \ldots, a_m\}$, где a_i попарно различны, определим $A_i = \varphi^{-1}(a_i)$. Тогда $\varphi = \sum_{i=1}^m a_i \mathbb{I}_{A_i}$ и $\{A_i\}$ – допустимое разбиение.

Теорема 52. *Если $f : E \to [0, +\infty]$ – неотрицательная измеримая функция, то существует последовательность $\{\varphi_k\}$ неотрицательных простых функций, таких что $\forall x \in E$ выполняется*

1. $0 \leqslant \varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x) \leqslant \ldots$

2. $\lim_{k\to+\infty} \varphi_k(x) = f(x)$

Доказательство. Для $k \in \mathbb{N}$ определим множества:

$$E_{k,j} = \left\{x \in E : \frac{j-1}{2^k} \leqslant f(x) < \frac{j}{2^k}\right\},\ j = 1, \ldots, k \cdot 2^k,$$

$$F_k = \{x \in E : f(x) \geqslant k\}.$$

Множества $E_{k,j}$ и F_k измеримы и в объединении дают E.

Определим $\varphi_k = \sum_{j=1}^{k\cdot 2^k} \frac{j-1}{2^k}\mathbb{I}_{E_{k,j}} + k \cdot \mathbb{I}_{F_k}$. Пусть $x \in E$. Покажем, что $\{\varphi_k(x)\}$, возрастая, стремится к $f(x)$.

Если $f(x) = +\infty$, то $\varphi_k(x) = k$ для всех k и утверждение верно.

Пусть $f(x) \in \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{N}$. Если $f(x) \geqslant k+1$, то $\varphi_{k+1}(x) = k+1 > k = \varphi_k(x)$. Если $k \leqslant f(x) < k+1$, то $\varphi_{k+1}(x) \geqslant k = \varphi_k(x)$.

Пусть $f(x) < k$, тогда $\frac{j-1}{2^k} \leqslant f(x) < \frac{j}{2^k}$ для некоторого j, $1 \leqslant j \leqslant k\cdot 2^k$. Возможны два варианта: $\frac{2j-2}{2^{k+1}} \leqslant f(x) < \frac{2j-1}{2^{k+1}}$ или $\frac{2j-1}{2^{k+1}} \leqslant f(x) < \frac{2j}{2^{k+1}}$. В обоих случаях $\varphi_{k+1}(x) \geqslant \frac{2j-2}{2^{k+1}} = \frac{j-1}{2^k} = \varphi_k(x)$ и возрастание установлено. Кроме того, $0 \leqslant f(x) - \varphi_k(x) < 2^{-k}$ при всех $k \geqslant [f(x)] + 1$, откуда следует, что $\varphi_k(x) \to f(x)$. $\square$

10. Интеграл от неотрицательной простой функции и его свойства. Интеграл от неотрицательной измеримой функции. Монотонность интеграла по функциям и по множествам. Теорема Леви о монотонной сходимости. Аддитивность интеграла по функциям. Счетная аддитивность интеграла по множествам. Неравенство Чебышева. Интеграл Лебега от произвольной измеримой функции. Интегрируемые функции. Одновременная интегрируемость функции и ее модуля. Конечность почти всюду интегрируемой функции. Пренебрежение при интегрировании множествами меры нуль. Монотонность и линейность интеграла. Теорема Лебега о мажорированной сходимости. Связь интеграла Лебега и определенного интеграла Римана. Формула суммирования Эйлера (б/д). Формула Стирлинга.

Определение 59. Пусть φ – неотрицательная простая функция, $\varphi = \sum_{i=1}^m a_i \mathbb{I}_{A_i}$, где $\{A_i\}_{i=1}^m$ – допустимое разложение.

Интегралом от φ по измеримому множеству E называется

$$\int_E \varphi d\mu = \sum_{i=1}^m a_i \mu(E \cap A_i).$$

Лемма 30. *Пусть φ, ψ – неотрицательные простые функции. Тогда:*

1. *Если $\varphi \leqslant \psi$ на E, то $\int_E \varphi d\mu \leqslant \int_E \psi d\mu$ (монотонность).*
2. *Если $\alpha \in [0, +\infty)$, то $\int_E \alpha\varphi d\mu = \alpha \int_E \varphi d\mu$ (положительная однородность).*
3. *$\int_E (\varphi + \psi) d\mu = \int_E \varphi d\mu + \int_E \psi d\mu$ (аддитивность по функциям).*

Доказательство. Пусть $\{A_i\}_{i=1}^m$, $\{B_j\}_{j=1}^k$ – допустимые разбиения φ и ψ соответственно ($\varphi|_{A_i} = a_i$, $\varphi|_{B_j} = b_j$). Положим $C_{ij} = A_i \cap B_j$.

Тогда $\{C_{ij}\}$ – общее допустимое разбиение для φ и ψ. Поскольку $A_i = A_i \cap \mathbb{R}^n = A_i \cap (\bigcup_{j=1}^k B_j) = \bigcup_{j=1}^k C_{ij}$, то по свойству аддитивности меры $\int_E \varphi d\mu = \sum_{i=1}^m a_i \mu(E \cap A_i) = \sum_{i=1}^m a_i \mu(\bigcup_{j=1}^k (E \cap C_{ij})) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k a_i \mu(E \cap C_{ij})$.

Аналогично, $\int_E \psi d\mu = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m b_j \mu(E \cap C_{ij})$. Если $E \cap C_{ij} \neq \varnothing$, то для любого $x \in E \cap C_{ij}$ имеем $a_i = \varphi(x) \leqslant \psi(x) = b_j$, что завершает доказательство.

Доказательство пункта 2 очевидно.

Доказательство пункта 3 аналогично пункту 1. □

Определение 60. Пусть $f : E \to [0, +\infty]$ – неотрицательная измеримая функция. Тогда:

$$\int_E f d\mu = \sup \left\{ \int_E \varphi d\mu,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant f,\ \varphi - \text{простая} \right\}.$$

Замечание. Покажем, что определение согласуется с интегралом от простой функции. Чтобы их различить, перед знаком введенного ранее интеграла поставим (s).

Пусть f – простая неотрицательная функция. Если $0 \leqslant \varphi \leqslant f$ и φ – простая, то по свойству монотонности $(s)\int_E \varphi d\mu \leqslant (s)\int_E f d\mu$. Переходя к супремуму по φ, получим $\int_E f d\mu \leqslant (s)\int_E f d\mu$. Противоположное неравенство очевидно, так как f сама является простой функцией.

Пусть $f, g : E \to [0, +\infty]$ — неотрицательные измеримые функции.

Свойство 14 (монотонность)**.** *Если* $f \leqslant g$ *на* E*, то* $\int_E f\,d\mu \leqslant \int_E g\,d\mu$*.*

Свойство 15 (однородность)**.** *Если* $\lambda \in [0, +\infty)$*, то* $\int_E \lambda f\,d\mu = \lambda \int_E f\,d\mu$*.*

Свойство 16. *Если* $E_0 \subset E$ *измеримо, то* $\int_{E_0} f\,d\mu = \int_E f \cdot \mathbb{I}_{E_0}\,d\mu$*.*

Доказательство. Пусть $0 \leqslant \underbrace{\varphi}_{\text{прост.}} \leqslant f$ на E_0, тогда

$$\int_{E_0} \varphi\,d\mu = \int_E \varphi \cdot \mathbb{I}_{E_0}\,d\mu \leqslant \int_E f \cdot \mathbb{I}_{E_0}\,d\mu,$$
$$\int_{E_0} f\,d\mu \leqslant \int_E f \cdot \mathbb{I}_{E_0}\,d\mu.$$

Обратно, пусть $0 \leqslant \underbrace{\psi}_{\text{прост.}} \leqslant f \cdot \mathbb{I}_{E_0}$ на E. Тогда $\psi = 0$ на $E \setminus E_0$ и, значит, $\psi = \psi \cdot \mathbb{I}_{E_0}$ на E. Следовательно,

$$\int_E \psi\,d\mu = \int_E \psi \cdot \mathbb{I}_{E_0}\,d\mu = \int_{E_0} \psi\,d\mu \leqslant \int_{E_0} f\,d\mu.$$

и, переходя к супремуму по всем таким ψ, $\int_E f \cdot \mathbb{I}_{E_0}\,d\mu \leqslant \int_{E_0} f\,d\mu$. $\square$

Свойство 17. *Если* $E_0 \subset E$ *измеримо, то* $\int_{E_0} f\,d\mu \leqslant \int_E f\,d\mu$*.*

Доказательство. По свойствам (14) и (16) имеем

$$\int_{E_0} f\,d\mu = \int_E f \cdot \mathbb{I}_{E_0}\,d\mu \leqslant \int_E f\,d\mu.$$

$\square$

Теорема 53 (Беппо Леви)**.** *Пусть* $f_k : E \to [0, +\infty]$ *измеримы, и* $f_k \to f$ *на* E*. Если* $0 \leqslant f_k(x) \leqslant f_{k+1}(x)$ *для всех* $x \in E$ *и* $k \in \mathbb{N}$*, то*

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k\,d\mu = \int_E f\,d\mu.$$

Доказательство. Интегрируя $f_k \leqslant f_{k+1} \leqslant f$ на E, получим

$$\int_E f_k\,d\mu \leqslant \int_E f_{k+1}\,d\mu \leqslant \int_E f\,d\mu.$$

Следовательно, $\left\{\int_E f\,d\mu\right\}$ нестрого возрастает (в $\overline{\mathbb{R}}$) и, значит, существует

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k\,d\mu \leqslant \int_E f\,d\mu.$$

Докажем противоположное неравенство. Для этого достаточно доказать, что $\lim_{k\to\infty} \int_E f_k\,d\mu \geqslant \int_E \varphi\,d\mu$ для всех простых φ, $0 \leqslant \varphi \leqslant f$ на E.

Рассмотрим такую функцию φ. Зафиксируем $t \in (0, 1)$. Положим $E_k = \{x \in E : f_k(x) \geqslant t\varphi(x)\}$.
Ввиду монотонности $\forall k\ E_k \subset E_{k+1}$. Докажем, что $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = E$. Включение «$\subset$» очевидно.
Пусть $x \in E$. Если $\varphi(x) = 0$, то $\forall k\ x \in E_k$.
Если $\varphi(x) > 0$, то $f(x) \geqslant \varphi(x) > t\varphi(x)$. Тогда $\exists m \in \mathbb{N}\ \ (f_m(x) \geqslant t\varphi(x))$, то есть $x \in E_m$.

По монотонности
$$\int_E f_k\,d\mu \geqslant \int_{E_k} f_k\,d\mu \geqslant t\int_{E_k} \varphi\,d\mu.$$
Пусть $\varphi = \sum_{i=1}^N a_i \cdot \mathbb{I}_{A_i}$, где $\{A_i\}_1^N$ — допустимое разбиение.
Тогда по свойству монотонности меры:
$$\int_{E_k} \varphi\,d\mu = \sum_{i=1}^N a_i \mu(A_i \cap E_k) \underset{k\to\infty}{\to} \sum_{i=1}^N a_i \mu(A_i \cap E) = \int_E \varphi\,d\mu.$$
Переходя к пределу в неравенстве (53)
$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k\,d\mu \geqslant t\int_E \varphi\,d\mu,\ t\to 1-0.$$
□

Свойство 18 (аддитивность)**.** *Если $f, g \geqslant 0$ измеримы на E, то $\int_E (f+g)\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu$.*

Доказательство. Пусть $\varphi_k \uparrow$ (возрастает и стремится к)$f, \psi_k \uparrow g$ на E. Тогда $\varphi_k + \psi_k \uparrow f + g$ на E и, значит, по теореме Леви
$$\int_E (f+g)\,d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_E (\varphi_k + \psi_k)\,d\mu =$$
$$= \lim_{k\to\infty} \int_E \varphi_k\,d\mu + \lim_{k\to\infty} \int_E \psi_k\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu.$$
□

Следствие 27 (теорема Леви для рядов)**.** Если $f_k \geqslant 0$ измерима на E, то
$$\int_E \sum_{k=1}^\infty f_k\,d\mu = \sum_{k=1}^\infty \int_E f_k\,d\mu.$$

Доказательство. По предыдущему свойству
$$\int_E \sum_{k=1}^m f_k\,d\mu = \sum_{k=1}^m \int_E f_k\,d\mu.$$

Поскольку $f_k \geqslant 0$, то последовательность частичных сумм ряда нестрого возрастает (по m). Поэтому по теореме Леви $\lim_{m\to\infty} \int_E \sum_{k=1}^m f_k\,d\mu = \int_E \sum_{k=1}^\infty f_k\,d\mu$. □

Теорема 54 (счётная аддитивность интеграла)**.** *Пусть E_k измеримы и попарно не пересекаются, $E = \bigsqcup_{k=1}^\infty E_k$. Если $f \geqslant 0$ на E, то*
$$\int_E f\,d\mu = \sum_{k=1}^\infty \int_{E_k} f\,d\mu.$$

Доказательство. Поскольку $\{E_k\}$ образуют разбиение E, то $\mathbb{I}_E = \sum_{k=1}^\infty \mathbb{I}_{E_k}$, $f = f\cdot\mathbb{I}_E = \sum_{k=1}^\infty f\cdot \mathbb{I}_{E_k}$ на E. Следовательно, по теореме Леви для рядов и
$$\int_E f\,d\mu = \sum_{k=1}^\infty \int_E f\cdot\mathbb{I}_{E_k}\,d\mu = \sum_{k=1}^\infty \int_{E_k} f\,d\mu.$$

□

Теорема 55 (неравенство Чебышёва). *Если $f \geqslant 0$ измерима на E, то* $\forall t \in (0, +\infty)$

$$\mu\{x \in E : f(x) \geqslant t\} \leqslant \frac{1}{t} \int_E f\, d\mu.$$

Доказательство. Рассмотрим $E_t = \{x : f(x) \geqslant t\}$, тогда

$$\int_E f\, d\mu \geqslant \int_{E_t} f\, d\mu \geqslant t \int_{E_t} d\mu = t \cdot \mu(E_t).$$

□

Определение 61. Функции $f^+ = \max\{f, 0\}$ и $f^- = \max\{-f, 0\}$ называются *положительной* и *отрицательной* частями f соответственно.

Замечание. Из определения следует, что $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$ и $0 \leqslant f^\pm \leqslant |f|$.

Определение 62. Пусть $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима, тогда

$$\int_E f\, d\mu := \int_E f^+\, d\mu - \int_E f^-\, d\mu,$$

при условии, что хотя бы один из $\int_E f^\pm\, d\mu$ конечен.

Функция f называется *интегрируемой* (по Лебегу), если оба интеграла $\int_E f^\pm\, d\mu$ конечны.

Замечание. Если f измерима на E, то условия интегрируемости f и $|f|$ равносильны. В случае интегрируемости $\left|\int_E f\, d\mu\right| \leqslant \int_E |f|\, d\mu$.

Доказательство. Если f интегрируема на E, то $\int_E f^\pm d\mu < +\infty$. Тогда в силу оценки $|f| = f^+ + f^-$ интеграл $\int_E |f| d\mu < +\infty$. Если $|f|$ интегрируема на E, то в силу оценки $0 \leqslant f^\pm \leqslant |f|$ получаем, что $\int_E f^\pm d\mu < +\infty$, то есть f интегрируема на E.

Имеем

$$\left|\int_E f d\mu\right| = \left|\int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu\right| \leqslant \int_E f^+ d\mu + \int_E f^- d\mu = \int_E |f| d\mu.$$

□

Замечание. Если f интегрируема на E, то f конечна почти всюду на E.

Доказательство. Определим $A = \{x \in E : |f(x)| = +\infty\}$. Тогда по неравенству Чебышева для любого $t \in (0; +\infty) : \mu(A) \leqslant \mu\{x : |f(x)| \geqslant t\} \leqslant \frac{1}{t} \int_E |f| d\mu$. Устремляя $t \to +\infty$, получаем, что $\mu(A) = 0$. □

Лемма 31. *Если* $\underbrace{E_0}_{\text{изм.}} \subset E$ *и* $\mu(E \setminus E_0) = 0$, *то интегралы* $\int_E f d\mu$ *и* $\int_{E_0} f d\mu$ *существуют одновременно и в случае существования совпадают.*

Доказательство. Отметим, что f на E и f на E_0 измеримы одновременно. По свойству аддитивности по множествам:

$$\int_E f^\pm d\mu = \int_{E_0} f^\pm d\mu + \int_{E \setminus E_0} f^\pm d\mu = \int_{E_0} f^\pm d\mu.$$

Учтем, что интеграл по множеству меры 0 от произведения измеримых функций равен 0. Это вытекает из определения интеграла, для простых функций также следует учесть, что она ограничена. □

Следствие 28. Пусть $f, g : \underbrace{E}_{\text{изм.}} \to \mathbb{R}$. Если f интегрируема на E и $f = g$ почти всюду на E, то g интегрируема на E и $\int_E g d\mu = \int_E f d\mu$.

Теорема 56. *Пусть $f, g : E \to \mathbb{R}$ интегрируема и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда:*

1. *Если $f \leqslant g$ на E, то $\int_E f d\mu \leqslant \int_E g d\mu$;*
2. *$\int_E \alpha f d\mu = \alpha \int_E f d\mu$;*
3. *$\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$.*

Доказательство.

1. Пусть $f \leqslant g$ на E. Тогда $f^+ \leqslant g^+$, $f^- \geqslant g^-$ и, значит, $\int_E f^+ d\mu \leqslant \int_E g^+ d\mu$ и $\int_E f^- d\mu \geqslant \int_E g^- d\mu$. Вычтем одно неравенство из другого, получаем $\int_E f d\mu \leqslant \int_E g d\mu$.

2. Пусть $\alpha \geqslant 0$. Тогда $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$, $(\alpha f)^- = \alpha f^-$ и, значит, $\int_E \alpha f d\mu = \int_E (\alpha f)^+ d\mu - \int_E (\alpha f)^- d\mu = \alpha \int_E f^+ d\mu - \alpha \int_E f^- d\mu = \alpha \int_E f d\mu$. Так как $(-f)^+ = \max\{-f, 0\} = f^-$, $(-f)^- = \max\{f, 0\} = f^+$, то:
$$\int_E (-f) d\mu = \int_E (-f)^+ d\mu - \int_E (-f)^- d\mu = \int_E f^- d\mu - \int_E f^+ d\mu = -\int_E f d\mu.$$
Случай $\alpha < 0$ сводится к рассмотренному, так как $\alpha = (-1)|\alpha|$.

3. Так как f и g конечны почти всюду на E (из интегрируемости), то $\exists E_0 \subset E$ и $\mu(E \setminus E_0) = 0$, на котором определена функция $h = f + g$. Функция $h = f + g$ интегрируема на E_0 (так как $|h| \leqslant |f| + |g|$) и $h^+ - h^- = h = f + g = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-)$ или $h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$ на E_0. Следовательно, $\int_{E_0} h^+ d\mu + \int_{E_0} f^- d\mu + \int_{E_0} g^- d\mu = \int_{E_0} h^- d\mu + \int_{E_0} f^+ d\mu + \int_{E_0} g^+ d\mu$.

   Все интегралы в предыдущем равенстве конечны, их перегруппировка дает $\int_{E_0} h d\mu = \int_{E_0} f d\mu + \int_E g d\mu$.

   Так как $\mu(E \backslash E_0)$, то доопределим на $E_0 \cup (E \backslash E_0)$ произвольным образом. Получаем равенство для интегралов из 3 пункта.

$\square$

Теорема 57 (Лебег). *Пусть $f_k : E \to \overline{\mathbb{R}}$ измеримы и $f_k \to f$ почти всюду на E. Если существует интегрируемая на E функция g, такая что $|f_k| \leqslant g$ $\forall k$, то $\lim_{k \to +\infty} \int_E f_k d\mu = \int_E f d\mu$*

Доказательство. Поскольку при интегрируемости можно пренебрегать множествами меры 0, будем считать, что $f_k \to f$ всюду на E и g конечна на E. Так как $|f_k| \leqslant g$ на E, то все f_k интегрируемы на E. Переходя к пределу при $k \to +\infty$, получаем $|f| \leqslant g$ на E. Следовательно, f интегрируема.

Определим $h_k = \sup_{m \geqslant k} |f_m - f|$ на E, тогда имеем $0 \leqslant h_{k+1}(x) \leqslant h_k(x)$ на E и $\lim_{k \to +\infty} h_k(x) = \inf_k sup_{m \geqslant k} |f_m(x) - f(x)| = \overline{\lim}_{k \to +\infty} |f_k(x) - f(x)| = 0$. Функция h_k интегрируема на E и $|h_k| \leqslant 2g$ ($|f_k| \leqslant g$, $|f| \leqslant g$). Применим теорему Леви к последовательности $\{2g - h_k\}$:
$$\lim_{k \to +\infty} \int_E (2g - h_k) d\mu = \int_E 2g d\mu,$$
откуда $\lim_{k \to +\infty} \int_E h_k d\mu = 0$. Для завершения доказательства $\int_E |f_k - f| d\mu \leqslant \int_E h_k d\mu \to 0$ при $k \to +\infty$ и, значит, $\left|\int_E f_k d\mu - \int_E f d\mu\right| \leqslant \int_E |f_k - f| d\mu \to 0$. $\square$

Теорема 58. *Пусть f ограничена на $[a, b]$. f интегрируема по Риману на $[a, b] \Leftrightarrow f$ непрерывна почти всюду на $[a, b]$. В этом случае функция интегрируема по Лебегу и оба интеграла совпадают.*

Доказательство. 1. Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$, $J = \int_a^b f(x)dx$. Покажем, что f непрерывна почти всюду на $[a, b]$ и $\int_{[a,b]} f d\mu = J$.

Для разбиения $T = \{x_k\}_{k=0}^m$ открытого на $[a, b]$ положим $M_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f$, $m_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f$ и определим простые функции

$$\varphi_T = \sum_{i=1}^m m_i \cdot \mathbb{I}_{[x_{i-1},x_i)},\ \psi_T = \sum_{i=1}^m \mathbb{I}_{[x_{i-1},x_i)} \cdot M_i.$$

В последний промежуток включим точку $b = x_n$. Очевидно, что $\int_{[a,b]} \varphi_T d\mu = s_T$, $\int_{[a,b]} \psi_T d\mu = S_T$ (сумма Дарбу).

Рассмотрим последовательность разбиений $\{T_k\}$, $T_k \subset T_{k+1}$ и $|T| \to 0$. Положим $\varphi_k = \varphi_{T_k}$, $\psi_k = \psi_{T_k}$. Имеем $\varphi_k(x) \leqslant \varphi_{k+1}(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi_{k+1}(x) \leqslant \psi_k(x)$ для всех $x \in [a, b]$. Следовательно, существуют $\varphi(x) = \lim_{k\to+\infty} \varphi_k(x)$, $\psi(x) = \lim_{k\to+\infty} \psi_k(x)$.

Функции φ, ψ измеримы (как предел измеримых функций) и если $|f| \leqslant M$, то $|\varphi|, |\psi| \leqslant M$ и, значит, по теореме Лебега о мажорированной сходимости

$$\int_{[a,b]} (\psi - \varphi)d\mu = \lim_{k\to+\infty} \int_{[a,b]} (\psi_k - \varphi_k)d\mu = \lim_{k\to+\infty} (S_{T_k} - s_{T_k}) = 0,$$

откуда следует, что $\psi - \varphi = 0$ почти всюду на $[a, b]$.

Пусть $Z = \{x : \varphi(x) \neq \psi(x)\}$. Рассмотрим $x \notin Z \cup (\bigcup_{k=1}^{+\infty} T_k)$ и $\varepsilon > 0$. Выберем k, так что $\psi_k(x) - \varphi_k(x) < \varepsilon$ и рассмотрим соотвествующее T_k. Выберем $(x-\delta, x+\delta)$, лежащий в одном отрезке разбиения T_k. Тогда $|f(t) - f(x)| < \psi_k(x) - \varphi_k(x) < \varepsilon\ \forall t \in (x - \delta, x + \delta)$. Это означает, что f непрерывна в точке x. Следовательно, f непрерывна почти всюду на $[a, b]$. По теореме Лебега

$$J = \lim_{k\to+\infty} S_{T_k} = \lim_{k\to+\infty} \int_{[a,b]} \varphi_k d\mu = \int_{[a,b]} f d\mu.$$

2. Пусть f непрерывна почти всюду на $[a, b]$ и $\varepsilon > 0$. Рассмотрим $\{T_k\}$ – разбиение $[a, b]$ на 2^k равных отрезка, тогда $T_{k+1} \subset T_k$. Пусть x не является точкой разрыва f и $x \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} T_k$. Тогда, как и первом пункте , имеем $\varphi_k(x) \uparrow f(x)$ и $\psi_k \downarrow f(x)$ (учли непрерывность в точке x). По теорме Лебега $S_{T_k} = \int_{[a,b]} \psi_k d\mu \to \int_{[a,b]} f d\mu$, $s_{T_k} = \int_{[a,b]} \varphi_k d\mu = \int_{[a,b]} f d\mu$. Тогда, по критерию Дарбу $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

□

Теорема 59 (Эйлер)**.** *Пусть $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ дифференцируема и f' локально интегрируема на $[1, +\infty)$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство*

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^n f(t)dt + \frac{f(1) + f(n)}{2} + \int_1^n \left(\{t\} - \frac{1}{2}\right) f'(t)dt.$$

Следствие 29. Пусть $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ дифференцируема, f' монотонна и $f'(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^n f(t)dt + C_f + \frac{f(n)}{2} + \varepsilon_n,$$

где $C_f = \frac{f(1)}{2} + \int_1^{+\infty} \left(\{t\} - \frac{1}{2}\right) f'(t)dt$, $\varepsilon_n = -\int_n^{+\infty} \left(\{t\} - \frac{1}{2}\right) f'(t)dt$.

Пример (формула Стирлинга)**.** При $n \to +\infty$ справедлива оценка

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Доказательство. Применим следствие к функции $f(t) = \ln t$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \ln k = n \ln n - n + 1 + C + \frac{\ln n}{2} + \varepsilon_n,$$

$$\ln n! = \ln(n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{C+1} e^{\varepsilon_n}),$$

$$n! = c\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + o(1)),\ n \to +\infty.$$

Для нахождения константы c воспользуемся формулой Валлиса:

$$\pi = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$$

Имеем

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n} c^2 n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} (1+o(1))^2}{c\sqrt{2n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} (1+o(1))} = \frac{c\sqrt{n}}{\sqrt{2}}(1 + o(1)),$$

значит,

$$\pi = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \frac{c^2 n}{2} (1 + o(1))^2 = \frac{c^2}{2} \Rightarrow c = \sqrt{2\pi}.$$

□