ФИЗ	Проводящие сферы	04 сентября 2022

Как известно, проводник – это такой материал, в котором имеются свободные заряды. Давайте вспомним одно из основных свойств таких материалов:

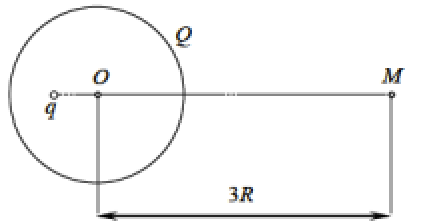
- **Напряженность поля** внутри проводника равна нулю вне зависимости от его заряда

В этом нетрудно убедиться используя соображения о невозможности бесконечного движения зарядов. В самом деле: при существовании электрического поля на заряды действовала бы сила, вследствие чего они, придя в движение, разогревали бы проводник, то есть выделяли тепло (энергию), чего не происходит бесконечно. Так же можно поразмышлять над минимумом потенциальной энергии зарядов взаимодействия и доказать данный факт более строго. Как бы то ни было, положение равновесия существует, и в нем напряженность электрического поля внутри проводящего материала отсутствует.

Нетрудно понять, что раз отсутствует напряженность, то и потенциал в каждой точке проводника одинаков (напряженность – это производная потенциала по координате). Также можно заметить, что в силу отсутствия тангенциальной составляющей поля на поверхности проводника (поле в каждой точке нулевое), то снаружи рядом с проводником оно направлено перпендикулярно его поверхности. Ее так же называют **эквипотенциальной поверхностью** вследствие данного свойства. Данные свойства потребуются нам для решения задач на сегодняшнем занятии.

Недаром в названии листочка присутствует слово «**сфера**». Давайте рассмотрим таковую: а что, если взять тонкую и проводящую и зарядить? Пусть имеется сфера с зарядом Q и радиусом R. Нетрудно заметить из соображении симметрии, что заряды на ней распределятся равномерно по всей верхней поверхности. А потому из геометрических соображений можно получить, что такая сфера в любой точке вне себя создает электрическое поле, эквивалентное тому, которое бы создавал точечный заряд Q, помещенный туда, где находится центр сферы! А значит, по теореме Гаусса, его модуль на расстоянии r от центра сферы, где $r \geq R$ равен: $\boldsymbol{E} = k\frac{q}{r^2}$ и направлен от центра сферы с учетом знака. Внутри сферы $\boldsymbol{E} = 0$. Потенциал, соответственно, при $r \geq R$ равен $\boldsymbol{\varphi} = k\frac{q}{r}$ и $\boldsymbol{\varphi} = k\frac{q}{R}$ при $r < R$. Для шара аналогично: заряды в любом случае будут располагаться на поверхности. А теперь перейдем к задачам.

Задача 0.1. Внутри проводящей сферы радиусом R, несущей заряд Q, на расстоянии $\frac{R}{2}$ от её центра O находится точечный заряд q. Найдите потенциал φ в точке M. Точка M, центр сферы O и заряд q лежат на одной прямой. Распределён ли заряд на внутренней поверхности равномерно или неравномерно? А на внешней?



Решение. Поле на поверхности сферы в каждой ее точке одинаково в силу эквипотенциальности. Аналогично и за ее пределами: на сфере одного радиуса, концентрической с нашей, поле неизменно из соображений гомотетии. Но разве может заряд, распределившись равномерно, дать такой эффект с учетом точечного заряда внутри? Нетрудно понять, что нет: на верхней он будет равномерен, а вот на внутренней – нет (для получения эффекта отсутствия тангенциальной составляющей поля внутри и за пределами сферы. Но нас и не просят найти функцию распределения. Применим теорему Гаусса, выбрав за замкнутую поверхность сферу радиуса r и с совпадающим центром (в O). Тогда: $E * 4\pi r^2 = \frac{Q+q}{\varepsilon_0}$, откуда $E = \frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. Как мы видим, поле вне сферы эквивалентно полю точечного заряда $Q + q$, помещенного в O. А значит, ответ на задачу: $\varphi = \frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 * 3r} = \frac{\boldsymbol{k(Q+q)}}{\boldsymbol{3r}}$.

Задача 0.2. Точечный заряд q расположен на расстоянии r от центра проводящей сферы радиуса R. Заряд сферы равен Q. Найдите потенциал сферы в случаях $r > R$ и $r < R$.

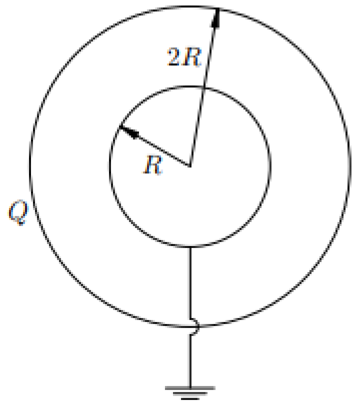
Решение. Поле внутри сферы отсутствует в силу экранирования (иначе заряды на внутренней поверхности перераспределялись). Следовательно, потенциалы всех точек одинаковы и нам достаточно найти лишь в одной. Пусть это будет центр сферы. Тогда: $\varphi = \varphi_q + \varphi_Q$ в силу принципа суперпозиции (φ_q – потенциал, создаваемый полем точечного заряда, а φ_Q – зарядами на сфере). При $r > R$: $\varphi_q = \frac{kq}{r}, \varphi_Q = \Sigma\frac{k\Delta Q}{R}$, где ΔQ – малая часть заряда на сфере. По условию, суммарный заряд на ней равен Q, следовательно, ответ будет $\varphi = \frac{\boldsymbol{kq}}{\boldsymbol{r}} + \frac{\boldsymbol{kQ}}{\boldsymbol{R}}$. При $r < R$: как и в прошлой задаче, заряды на внутренней поверхности сферы распределяются так, чтобы тангенциальная составляющая поля была равна нулю, а поле снаружи сферы превращалось в поле точечного заряда, равного суммарному $Q + q$. Следовательно, потенциал: $\varphi = \frac{\boldsymbol{k(Q+q)}}{\boldsymbol{3r}}$.

Задачи

Задача 1. Имеются две концентрические проводящие сферы. Внутренняя сфера имеет радиус R и заряд Q; внешняя сфера имеет радиус r и заряд q. Найдите потенциалы сфер.

$$\boxed{\varphi_1 = \frac{kQ}{R} + \frac{kq}{r},\ \varphi_2 = \frac{k(Q+q)}{r}}$$

Задача 2. Проводящую сферу радиуса R окружают концентрической сферической проводящей оболочкой радиуса $2R$, несущей заряд Q. Чему станет равен потенциал оболочки после заземления сферы (см. рисунок)?



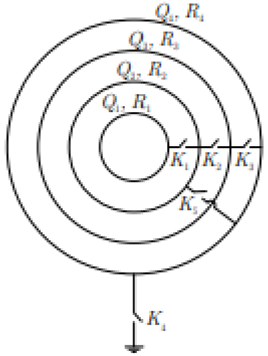
$$\boxed{\varphi = \frac{kq}{4R}}$$

Задача 3. Два небольших проводящих заряженных шара радиусом r расположены на расстоянии a друг от друга. Шары поочерёдно на некоторое время заземляют. Определите потенциал шара, который был заземлён первым, если первоначально каждый шар имел заряд q.

$$\boxed{\varphi = \frac{kq}{a}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)}$$

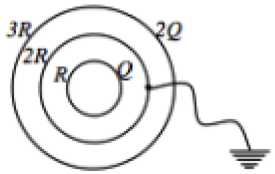
Задача 4. Четыре концентрические сферы радиусами $R_1 < R_2 < R_3 < R_4$ имеют заряды Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 соответственно. Все ключи изначально разомкнуты, и перед выполнением каждого из пунктов задачи система возвращается в исходное состояние, то есть на момент до пункта 1.

1) Какой заряд протечет через K_1 при его замыкании?
2) Какой заряд протечет через K_2 при его замыкании?
3) Какой заряд протечет через K_3 при его замыкании?
4) Какой заряд протечет через K_4 при его замыкании?
5) Какой заряд протечет через K_5 при его замыкании?



1) Q_1
2) $Q_1 + Q_2$
3) $Q_1 + Q_2 + Q_3$
4) $Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$
5) $Q_1 + Q_2 - Q_3\frac{\frac{1}{R_4}-\frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_4}}$

Задача 5. Три металлических концентрических сферы имеют радиусы R, $2R$ и $3R$. Меньшую сферу заряжают зарядом Q , большую — зарядом $2Q$, а среднюю заземляют с помощью проводника малой ёмкости. Найти потенциал меньшей сферы после установления равновесия.



$$\boxed{\frac{kQ}{2R}}$$

Задача 6. Проводящий шар радиусом R имеет сферическую полость радиусом r, касающуюся наружной поверхности шара. Заряд шара равен Q. В полости, на расстоянии r_1 от её центра, находится точечный заряд q_1. Вне шара, на расстоянии r_2 от его центра, находится точечный заряд q_2.

1) Найдите потенциал $\varphi_ш$ шара.
2) Найдите потенциал $\varphi_о$ в центре O полости.

Потенциал бесконечно удаленных точек примите равным нулю.

$$\varphi_{ш} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q + q_1}{R} + \frac{q_2}{r_2}\right)$$

$$\varphi_o = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} - \frac{q_1}{r} + \frac{Q + q_1}{R} + \frac{q_2}{r_2}\right)$$