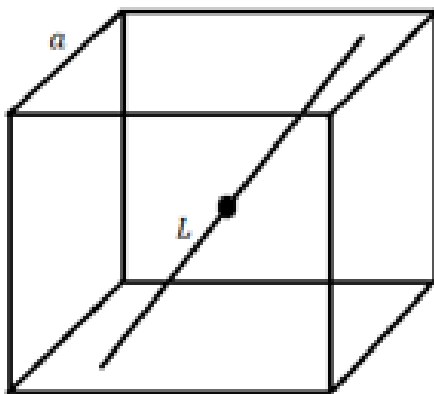
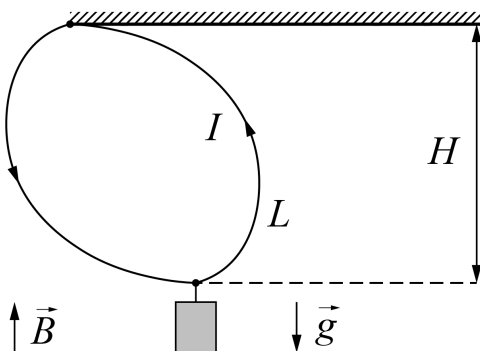


Набор отдельных задач (10 баллов)**Часть А. Кубические осцилляции (2.5 балла)**

- A.1** Через центр неподвижного куба со стороной a , равномерно заряженного по объёму с плотностью заряда ρ , проходит узкий прямолинейный канал. Расстояние от центра куба до пересечения канала с гранями равно L . В канале находится частица с массой m и зарядом q . Найдите период малых колебаний частицы вблизи центра. Гравитационным взаимодействием частицы и куба можно пренебречь. Заряды куба и частицы разноимённые. 2.5pt

**Часть В. Груз на петле с током (3 балла)**

- B.1** Невесомый гибкий провод с током I образует петлю, верхняя точка которой прикреплена к потолку, а к нижней подвешен груз. Длина половины петли L . Под воздействием вертикального магнитного поля B установилось устойчивое равновесие, при котором точка подвеса к потолку и точка подвеса груза оказались НЕ на одной вертикали. Найдите натяжение провода T и вес груза P , если расстояние от потолка до нижней точки петли равно H . 3.0pt



Часть С. Стержень в магнитном поле (4.5 балла)

- C.1** Перпендикулярно направлению однородного магнитного поля с индукцией \vec{B} расположен невесомый стержень длины $2R$, на концах которого закреплены 2 одинаковых маленьких шарика массы m и заряда q . Введём ось z такую, что её единичный вектор сонаправлен с направлением магнитного поля, а начало находится в центре стержня. Шарикам сообщаются одинаковые скорости v таким образом, что они направлены противоположно и одна из них по направлению совпадает с магнитным полем. Найдите максимальные координаты z_{\max} шариков? ответ выразите через q, B, m, v, R . Найдите модули ускорений шариков в этот момент, ответ выразите через q, B, m, v, R и z_{\max} . 4.5pt

Пружина нулевой длины и слинки (10 баллов)

Пружина эффективной нулевой длины (ПНД) это пружина, у которой сила пропорциональна длине пружины: $F = kL$ для $L > L_0$, где L_0 — минимальная длина (длина нерастянутой пружины). На рис. 1 показана зависимость силы F от длины L для ПНД, где наклон есть жесткость пружины k .

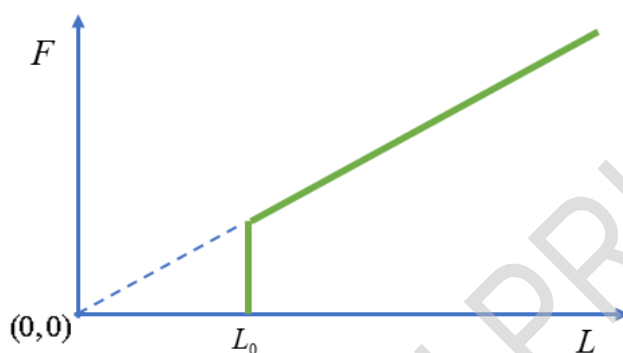


Рис. 1. зависимость силы F от длины пружины L

ПНД используются в сейсмографии и позволяют очень точно измерять изменения в ускорении свободного падения g . Здесь и далее мы рассматриваем однородную ПНД, у которой вес Mg превышает kL_0 . Введём безразмерный коэффициент $\alpha = kL_0/Mg < 1$, характеризующий относительную жесткость пружины. Игрушка-пружинка «сlinky» может являться примером такой ПНД (но не обязательно).

Часть А. Статика (3.0 балла)

A.1 Рассмотрим кусочек нерастянутой ПНД длиной $\Delta\ell$. Пружину растянули силой F в условиях невесомости. Какова длина Δy этого кусочка в зависимости от F , $\Delta\ell$ и параметров пружины? 0.5pt

A.2 Для кусочка длиной $\Delta\ell$ вычислите работу ΔW , необходимую для его растяжения от длины $\Delta\ell$ до длины Δy . 0.5pt

Далее в этой задаче мы будем обозначать точки пружины с помощью расстояния ℓ ($0 \leq \ell \leq L_0$), которое измеряется от нижней точки пружины, когда она не растянута. В частности, для каждой точки пружины значение ℓ остаётся неизменным при растяжении пружины.

A.3 Предположим, что мы удерживаем пружину за верхний конец так, что пружина растягивается под собственным весом. Определите полную длину H растянутой пружины в положении равновесия. Выразите ответ через L_0 и α . 2.0pt

Часть В. Динамика (5.5 балла)

Проведем следующий эксперимент. Пружина подвешена за верхний конец и находится в покое. В некоторый момент пружину отпускают, и она начинает сжиматься, причем, сжатие происходит постепенно, сверху вниз, и нижняя часть остаётся неподвижной (рис. 2). С течением времени сжа-

тая часть движется как твердое тело и собирает остальные витки пружины, а неподвижная часть становится короче. Каждая точка пружины начинает движение только тогда, когда движущаяся часть достигнет этой точки. Нижний конец пружины начинает движение только тогда, когда пружина полностью сожмется и приобретёт длину L_0 . После этого, сжатая пружина падает, как твердое тело в поле тяжести.

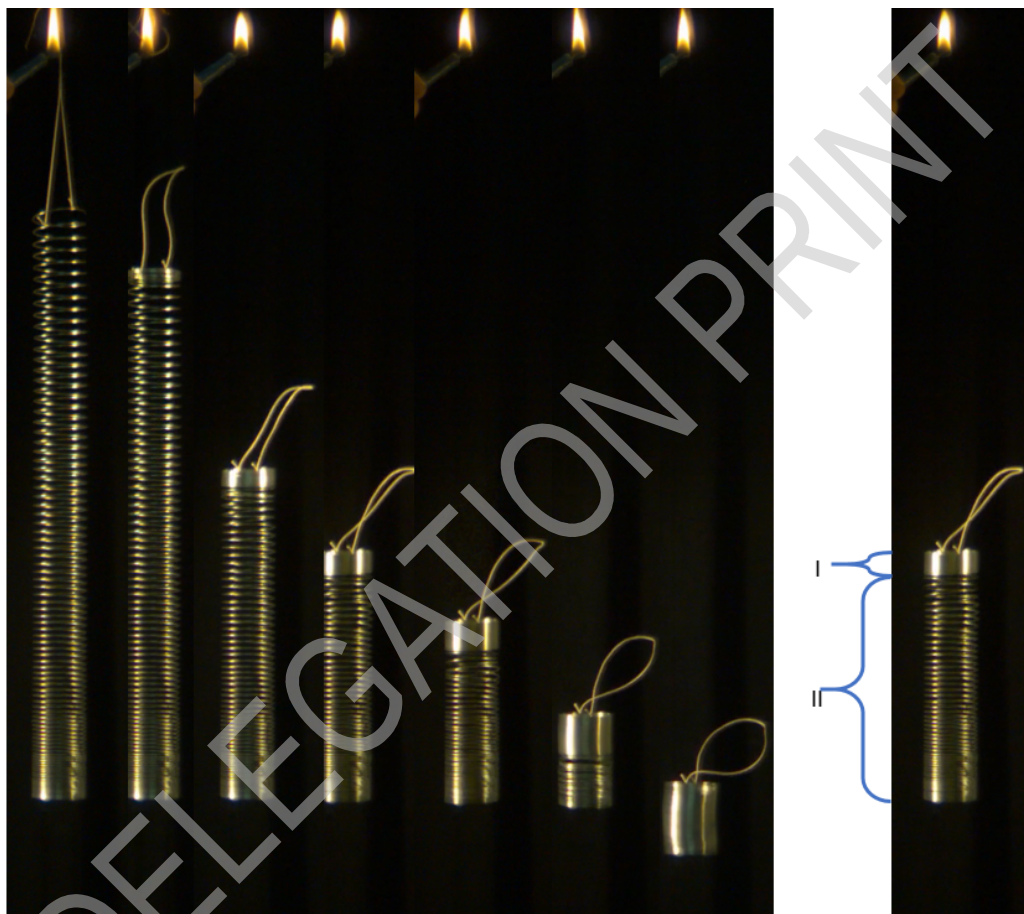


Рис. 2. Слева: последовательность кадров, сделанная в ходе падения пружинки. Справа: движущаяся часть I и неподвижная часть II при свободном падении пружины.

В последующих частях задачи используйте описанную выше модель.

Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

Пренебрегать L_0 нельзя.

- B.1** Найдите время t_c , которое пройдет с момента отпускания пружины до сжатия пружины до минимальной длины L_0 . Ответ выразите через L_0 , g и α . Посчитайте числовое значение t_c для пружины с параметрами $k = 1.02 \text{ Н/м}$, $L_0 = 0.055 \text{ м}$ and $M = 0.201 \text{ кг}$, считайте, что $g = 9.80 \text{ м/с}^2$. 2.5pt



B.2 В этой части ℓ используется для обозначения конкретной точки пружины, а именно границы между частью I (рис. 2, движущаяся часть) и частью II (неподвижная часть). В некоторый момент времени, пока существует неподвижная часть, ее масса равна $m(\ell) = \frac{\ell}{L_0} M$, а подвижная часть движется с мгновенной скоростью $v_I(\ell)$. Покажите, что для этого момента времени (когда существует неподвижная часть) скорость движущейся части описывается выражением $v_I(\ell) = \sqrt{A\ell + B}$. Выразите константы A и B через L_0 , g и α . 2.5pt

B.3 Используя пункт B.2, найдите минимальную скорость v_{\min} движущейся части пружины в ходе движения: от момента отпускания до падения пружины на землю. Выразите ответ через L_0 , α , A и B . 0.5pt

Часть C. Энергетическая (1.5 балла)

C.1 Найдите механическую энергию Q , которая перешла в тепло, начиная с момента отпускания пружины и до момента прямо перед касанием пружиной о землю. Выразите ответ через L_0 , M , g и α . 1.5pt

Анизотропное трение (10 баллов)

Сила трения не всегда изотропна. Часто величина и направление силы трения может зависеть от направления движения тела. Например, анизотропия трения может возникать при наличии «борозд» заданной ориентации на поверхности контакта тел (известно, что коэффициент трения дуба по дубу вдоль волокон равен 0,48, тогда как дуба по дубу поперек волокон одного куска и вдоль волокон другого куска 0,34). Наличие анизотропии в трении может привести к необычным свойствам движения, с которыми и предлагается познакомиться в данной задаче.

Что нужно знать про анизотропное трение

Пусть некоторая плоскость сделана из анизотропного материала. В рамках одной из наиболее популярных моделей анизотропного трения существуют перпендикулярные друг к другу координатные оси X и Y (которые мы будем называть *главными*) такие, что сила трения \vec{F} , действующая на тело, будет зависеть от направления движения тела следующим образом:

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{|N|}{|v|} \mu_x v_x \\ F_y &= -\frac{|N|}{|v|} \mu_y v_y \end{aligned} \quad (1)$$

где F_x, F_y – проекции силы трения, N – сила реакции опоры, действующая на тело, v_x и v_y – проекции вектора скорости \vec{v} , μ_x и μ_y – коэффициенты трения вдоль главных осей.

Здесь и далее по умолчанию будет предполагаться, что координатные оси на плоскости направлены вдоль главных осей трения. Коэффициенты трения – $\mu_x = 0,75$ и $\mu_y = 0,5$, если не сказано обратного.

В частях А и В тело можно считать материальной точкой. Плоскость, по которой движутся тела, горизонтальна во всех частях задачи.

Во всех пунктах задачи, где это возможно, дайте также численный ответ.

Часть А. Движение тела по горизонтальной поверхности (4.0 балла)

A.1	Под каким углом α_1 к оси X должен быть направлен вектор скорости тела, чтобы абсолютная величина мощности силы трения была максимальной?	0.5pt
A.2	Под каким углом α_2 к оси X должен быть направлен вектор скорости тела, чтобы абсолютная величина мощности силы трения была в 1,2 раза меньше максимальной?	0.5pt
A.3	Пусть начальная скорость тела имеет проекции $v_{0x} = 1$ м/с и $v_{0y} = 1$ м/с. Через некоторое время проекция скорости на ось Y равна $v_{1y} = 0,25$ м/с. Чему равен модуль скорости тела в этот момент времени?	1.0pt
A.4	Известно, что скорость тела равна $v_2 = 1,0$ м/с. Под каким углом α_3 к оси X должен быть направлен вектор скорости, чтобы радиус кривизны траектории был минимальным? Чему он равен? Ускорение свободного падения $g = 9,8$ м/с ² .	1.0pt

- A.5** Для коэффициентов трения, указанных ранее, качественно изобразите на одном рисунке траектории тела в плоскости XY при углах запуска $\alpha_4 = \pi/6$ и $\alpha_5 = \pi/3$. Начальные скорости одинаковы. Решите эту же задачу для коэффициентов трения $\mu_x = 0,4$ и $\mu_y = 0,7$. 1.0pt

Часть В. Условия начала движения тела (2.0 балла)

- B.1** Тело массой m покоится в начале координат. К нему прикладывают силу, направленную под углом α к оси X . Величина силы $F(t) = \gamma t$ прямо пропорциональна времени. Пренебрегая явлением застоя, найдите зависимость момента времени, когда тело сдвинется с места, от угла α . 2.0pt

Часть С. Движение тела по окружности (4.0 балла)

Две материальные точки с одинаковой массой m расположены на плоскости с анизотропным трением и соединены невесомым нерастяжимым стержнем длины $L = 1$ м. Стержень расположен вдоль оси Y и не касается плоскости. Одному из тел сообщают скорость, направленную перпендикулярно к стержню.

- C.1** Считая заданной начальную скорость тела v_0 , получите зависимость его дальнейшей скорости v от угла поворота стержня φ , считая, что другое тело при дальнейшем движении покоится. 1.5pt
- C.2** Найдите максимальное значение начальной скорости $v_{0\max}$, при которой другое тело останется в состоянии покоя. 1.5pt
- C.3** Какое расстояние пройдет тело до момента полной остановки при движении с начальной скоростью $v_{0\max}$? 1.0pt