Задача №12. Корабельные волны (10 баллов)

Колебания и волны - один из самых интересных и распространенных разделов физики. Волновые процессы встречаются во всех областях и в механике, и в термодинамике, и в электродинамике, а оптика целиком является наукой о волнах. В этой задаче мы рассмотрим знакомые всем корабельные волны, обладающие некоторыми очень интересными и неочевидными особенностями.

Однако, сначала рассмотрим общие свойства волн. Простейшим типом волн, распространяющихся в линейной среде, являются плоские монохроматические волны - то есть волны с конкретной частотой и длиной волны. Зависимость их амплитуды от времени и координаты (пока рассматриваем одномерный случай) описывается следующим образом:

$$A(t,x) = A_0\cos\Theta = A_0\cos(kx - \omega t - \varphi_0)$$

A1	Найдите скорость распространения постоянной фазы монохроматической волны (фазовая скорость).	0.5

Однако, в реальности чистые монохроматические волны никогда не существуют. На самом деле волны распространяются в волновых пакетах – суперпозицией многих волн близких частот. Волновой пакет в отличие от монохроматической волны локализован в некоторой области пространства и распространяется не с фазовой, а с так называемой групповой скоростью. Групповая скорость обычно интерпретируется как скорость перемещения максимума амплитудной огибающей квазимонохроматического волнового пакета. Для примера, рассмотрим волновой пакет из двух близких по частоте и волновому вектору монохроматических волн.

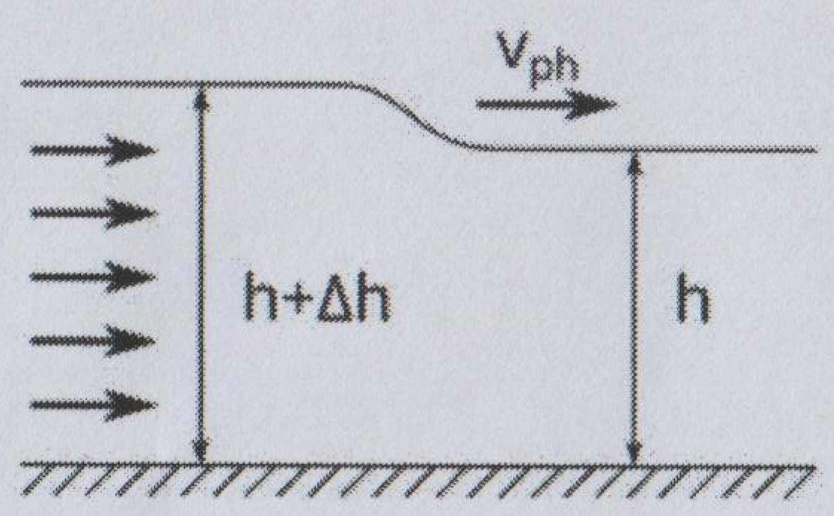
$$A(t,x) = A_0\cos(k_1x - \omega_1 t - \varphi_1) + A_0\cos(k_2x - \omega_2 t - \varphi_2)$$

A2	Предполагая, что существует некоторая функциональная зависимость $\omega(k)$, найдите групповую скорость через эту функцию в точке $k \approx k_1 \approx k_2$.	0.5

Вышеупомянутая функция $\omega(k)$ называется дисперсионным соотношением для волн определенного типа и именно она полностью определяет их поведение. Именно поэтому исследование любых линейных волн начинается с нахождения этой зависимости.

Распространение волн на воде определяется двумя физическими эффектами: поверхностным натяжением и гравитационным полем земли. Первый эффект вызывает так называемые капиллярные волны с маленькой длиной волны, который мы рассматривать не будем. Гравитация же приводит к существованию так называемых гравитационных волн.

Итак, рассмотрим волну, распространяющуюся как на рисунке. Считайте, что в невозмущенной области вода стоячая, а в возмущенной вся вода движется с некоторой скоростью.



B1	Найдите скорость распространения волны, если глубина воды h.	0.5

Если глубина воды много больше длины волны λ, то эффективно вода движется только в слое толщиной $\lambda/2\pi$.

B2	Найдите скорость распространения волны на глубокой воде. Найденная скорость является фазовой скоростью волны.	0.5

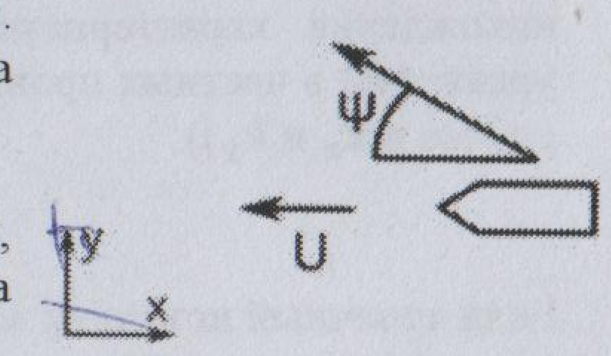
Теперь, зная фазовую скорость волны в зависимости от длины волны, мы можем легко найти дисперсионное соотношение $\omega(k)$, а из него, с помощью результата B2, и групповую скорость волн.

B3	Найдите дисперсионное соотношение и групповую скорость волн на мелкой воде $v_g(k)$.	1.0
B4	Найдите дисперсионное соотношение и групповую скорость волн на глубокой воде $v_g(k)$.	1.0

Легко заметить, что для волн на глубокой воде соблюдается замечательное соотношение $v_g = v_{ph}/2$ для волн с любой длиной волны. Это приводит к интересным эффектам. Рассмотрим обычные корабельные волны, которые каждый мог наблюдать. Известно, что они образуют конус по границам которого бегут волны. Для излучателей, движущихся со скоростью выше скорости распространения волн в среде с линейной дисперсией, широко известен эффект образования маховского конуса с углом раствора $\arcsin(c/v)$.

Однако, при нелинейном законе дисперсии нахождение угла становится сложнее, его величина определяется конструктивной интерференцией монохроматических волн.

Итак, рассмотрим плоскую монохроматическую волну, распространяющуюся под углом ψ к скорости источника. Вода стоячая.



C1	Найдите соотношение между фазовой скоростью и скоростью источника, если он должен оставаться в точке постоянной фазы волны.	1.0

Представьте, что в некоторый момент времени источник излучил широкий спектр волн. Рассмотрим цуг с узким спектром, такой, что его фазовая скорость соответствует распространению под углом ψ.

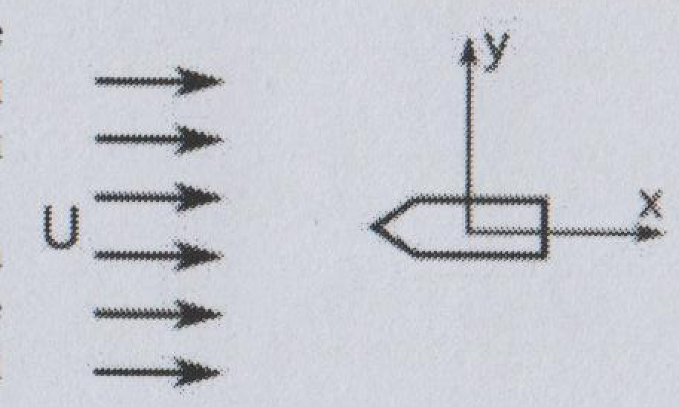
C2	Найдите точку в которой будет находиться цуг через время dt.	0.5
C3	Найдите геометрическое место точек для цугов, испущенных под всевозможными углами.	1.0

Теперь представьте, что такие “элементарные волны” из пункта C3 испускаются в каждый момент времени.

C4	Найдите угол раствора конуса, который ограничивает все распространяющиеся волны.	0.5

Однако, интересно рассмотреть распространение волн более тщательно: перейдем в систему отсчета, движущуюся параллельно катеру. В этой системе отсчета картина волн стационарная, то есть не меняется со временем.

При переходе в систему отсчета, в которой даже стоячая вода движется с постоянной скоростью меняется и дисперсионное соотношение. Действительно, длина волны остается постоянной, а частота будет зависеть от направления, в котором мы движемся.



D1	Рассмотрите, как меняется частота монохроматической волны при смене системы отсчета, и найдите таким образом новое дисперсионное соотношение. Ответ выразите через $\vec{u}, \vec{k}$ и $\omega(k)$. Подсказка: рассмотрите, как изменяется фаза волны при преобразовании Галилея.	0.5
D2	Покажите, что частота волны в системе отсчета, движущейся с фазовой скоростью плоской монохроматической волны, равна нулю.	0.5

Приравняв частоту к нулю $\omega(k_x(x,y), k_y(x,y)) = 0$, мы получаем соотношение, связывающее компоненты волнового вектора для всех координат. Однако, для нахождения распределения волнового вектора необходимо еще одно уравнение, которое дает нам рассмотрение фазы волны как функции частоты и волнового вектора $\Theta(\omega, k_x, k_y)$, то $k_x = \partial\Theta/\partial x$ и $ky = \partial\Theta/\partial y$, а значит $\partial k_y/\partial x - \partial k_x/\partial y = 0$.

Из первого уравнения можно получить:

$$\frac{\partial\omega}{\partial k_x} dk_x + \frac{\partial\omega}{\partial k_y} dk_y = 0$$

а значит

$$\frac{\partial k_x}{\partial y} + \frac{\partial\omega/\partial k_x}{\partial\omega/\partial k_y} \frac{\partial k_x}{\partial x} = 0$$

С другой стороны, $dk_x = \frac{\partial k_x}{\partial y} dy + \frac{\partial k_y}{\partial x} dx$. Таким образом, мы можем получить уравнение на нахождение характеристик (вспомогательных кривых для решения дифференциальных уравнений в частных производных, вдоль которых не изменяется значение функции (в нашем случае и k_x и k_y)):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial\omega/\partial k_y}{\partial\omega/\partial k_x}$$

Если точечный источник волн находится в начале отсчета, то характеристика является прямой линией проходящей через него

$$\operatorname{tg}\xi = \frac{y}{x} = \frac{\partial\omega/\partial k_y}{\partial\omega/\partial k_x}$$

D3	Найдите явный вид характеристики $\operatorname{tg}\xi$, зная дисперсионное соотношение из пункта B2.	1.0
D4	Пусть мы находимся в системе отсчета, которая движется так, что частота волны в ней равна нулю (пункт D2). Используя связь из пункта D1, найдите $\operatorname{tg}\xi(\psi)$, где ψ – угол между направлением распространения источника волн и фронта волны ($\cos\psi = -k_x/k$). <u>Подсказка</u>: ψ должен остаться единственным параметром в вашем ответе.	0.5
D5	Найдите максимальный из положительных углов ξ, а также соответствующий ему угол ψ. Сравните выражение для угла с выражением, полученным в пункте C4.	0.5