Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

I СЕМЕСТР

Лектор: *Редкозубов Вадим Витальевич*

Автор: *Головко Денис*, *Арсений Хлытчиев*

Проект на Github

осень 2022

Содержание

1 Действительные числа

Если A – множество, x – объект, то верно: либо $x \in A$, либо $x \notin A$.

1.1 Множества и функции

1. Два множества равны, если они состоят из одних и тех же элементов.

2. Пусть A – множество, а $Q(x)$ – корректная формула. Тогда однозначно определено множество B тех элементов A, для которых $Q(x)$ – верно.

$$\varnothing = \{x \in A |\ x \neq x\} \text{ – пустое множество}$$

$$x \in A \cup B \ \Leftrightarrow\ x \in A \text{ или } x \in B$$

$$x \in A \cap B \ \Leftrightarrow\ x \in A \text{ и } x \in B$$

$$x \in A \setminus B \ \Leftrightarrow\ x \in A \text{ и } x \notin B$$

$$A \cap B = \{x \in A |\ x \in B\}$$

$$A \setminus B = \{x \in A |\ x \notin B\}$$

3. Для объектов a и b существует множество $\{a, b\}$, называемое *"парой"*, т.ч.

$$x \in \{a, b\} \ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = b \end{array}\right.$$

Если $a = b$, то $\{a,b\}$ записывается как $\{a\}$.

$$\{a,b\} = \{b,a\} = \{a\} \cup \{b\}$$

4.
$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x\ \{x \in A \Rightarrow x \in B\}$$

Определение 1.1. $\mathcal{P}(A)$ – множество всех подмножеств A.

Пример.
$$A = \{a,b\};\ \mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$$

5. Существует множество $\mathbb{N}$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

- ▷ Для каждого $n \in \mathbb{N}$ $\exists!$ элемент из $\mathbb{N}$, называемый следующим и обозначаемый $n + 1$.
- ▷ $\exists!$ $1 \in \mathbb{N}$, который не является следующим ни для какого элемента $\mathbb{N}$.
- ▷ Если $n, m \in \mathbb{N}$ и $n \neq m$, то $n + 1 \neq m + 1$.
- ▷ **Аксиома индукции**: Если $M \subset \mathbb{N}$, т.ч. $1 \in M$ и $\forall n\ \{n \in M \Rightarrow\ n + 1 \in M\}$, то $M = \mathbb{N}$.

Такое множество называется *множеством натуральных чисел.*

1.2 Метод математической индукции

Пусть имеются утверждения $P(n), n \in \mathbb{N}$. Если $P(1)$ истинно и $(P(n) \Rightarrow P(n+1))$ – верно, то все $P(n)$ – истинны.

Доказательство. $M = \{n \in \mathbb{N} |\ P(n)$ – истинно$\}$, тогда $1 \in M$, $(n \in M \Rightarrow n+1 \in M) \Rightarrow M = \mathbb{N}$. □

На $\mathbb{N}$ определены следующие операции:

- ▷ $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x+1 \in \mathbb{N}$ (уже определено)
- ▷ Если определено $x+n$, то $x+(n+1) = (x+n)+1$ – следующий элемент для $x+n$
- ▷ nx
- ▷ $(n+1)x = nx + x$

Порядок элементов:

1. $x < y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : y = x + n$
2. $x \leqslant y \Leftrightarrow x < y$ или $x = y$

Теорема 1.1. *Если $A \subset \mathbb{N}$ (непустое), то в A существует минимальный элемент, т.е. такое $m \in A$, что $m \leqslant n\ \forall n \in A$.*

Доказательство. Предположим, что в A нет минимального элемента. Тогда определим $M = \{n \in \mathbb{N} |\ \forall k \leqslant n \Rightarrow k \notin A\}$. Тогда $1 \in M$ (иначе 1 – минимум), и если $n \in M$, то $n+1 \notin A$ (иначе $n+1$ – минимум). Значит, $n+1 \in M$. По аксиоме индукции, $M = \mathbb{N}$, противоречие. □

Определение 1.2. Пусть X, Y – множества. Говорят, что задана функция $f : X \longrightarrow Y$, если задана формула $P(x, y)$ т.ч. $\forall x \in X\ \exists!\ y \in Y$, что $P(x, y)$ – истинно. $y = f(x)$.

Определение 1.3. Функции f и $g : X \longrightarrow Y$ называются равными, если

$$f(x) = g(x)\ \forall x \in X$$

Терминология:

Пусть $f : X \longrightarrow Y$.

1. X – область определения;
2. $f(A) = \{f(x) |\ x \in A\}$ – образ множества $A \subset X$ при f;
3. $f(x)$ – множество значений;
4. $f^{-1}(B) = \{x \in X |\ f(x) \in B\}$ – прообраз $B \subset Y$ при f;
5. $id_x : X \longrightarrow X$; $id_x = x$ – тождественная функция;
6. Пусть $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$. Тогда функция $g_o f : X \longrightarrow Z$ называется композицией функций f и g.

Пример. $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = n^2$ | $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $g(n) = n + 1$
$f_o g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f_o g(n) = (n+1)^2$
$g_o f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $g_o f(n) = n^2 + 1$

Определение 1.4. Функция $f : X \longrightarrow Y$ называется:

(a) Инъекцией, если $\forall x_1, x_2 \in X$ $(f(x_2) = f(x_1) \Rightarrow x_1 = x_2)$;

(b) Сюръекцией, если $f(X) = Y$ $(\forall y\ f^{-1}(y) \neq \varnothing)$;

(c) Биекцией, если f является и инъекцией, и сюръекцией.

Пусть $f : X \longrightarrow Y$ – биекция. Тогда $\forall y \in Y\ \exists!\ x \in X(y = f(x))$. Определим $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$ – обратная функция.

$$f_o^{-1} f = id_x,\ f_o f^{-1} = id_y$$

Задача. Докажите, что а) композиция инъекций(сюръекций, биекций) является инъекцией(сюръекцией, биекцией); б) обратная функция к биекции является биекцией.

$$I_n = \{k \in \mathbb{N} :\ k \leqslant n\}, n \in \mathbb{N}$$

1.3 Принцип Дирихле

Теорема 1.2. *Если $f : I_n \longrightarrow I_m$ – инъекция, то $n \leqslant m$.*

Доказательство. Используем М.М.И. по n:

1. База: $n = 1$ – верно.

2. Предположим, что утверждение верно для n и пусть $f : I_{n+1} \longrightarrow I_m$ – инъекция. Заметим, что $n + 1 \geqslant 2 \Rightarrow m \geqslant 2$. Определим функцию $\tau : I_m \longrightarrow I_m$

$$\tau(f(n+1)) = m$$

$$\tau(m) = f(n+1)$$

$$\tau(j) = j,\ \text{при } j \neq m,\ f(n+1)$$

Рассмотрим $\tau_o f : I_{n+1} \longrightarrow I_m$. Функция $\tau_o f$ является инъекцией (как композиция инъекций) и отображает I_n в $I_{m-1} \Rightarrow n \leqslant m - 1 \Rightarrow n + 1 \leqslant m$.

□

Определение 1.5. Множество A называется *конечным*, если A – пустое или существует $n \in \mathbb{N}$ и $f : I_n \longrightarrow A$ – биекция.

Следствие. Если такое A существует, то существует единственное такое $n \in \mathbb{N}$, что $\exists f : I_n \longrightarrow A$ – биекция.

Доказательство. Предположим, что $f : I_n \longrightarrow A$, $g : I_m \longrightarrow A$ – биекция. Тогда $g_o^{-1} f : I_n \longrightarrow I_m$ – инъекция $\Rightarrow n \leqslant m$. Рассмотрим $f_o^{-1} g : I_m \longrightarrow I_n$ – инъекция $\Rightarrow m \leqslant n$
$\Rightarrow n = m$. □

Задача. Докажите, что $\mathbb{N}$ является бесконечным.

Определение 1.6. Пусть A – множество, элементами которого являются множества. Тогда определено множество:

$$\cup A = \{x|\ \exists B \in A \text{ и } x \in B\}$$

Пример.

$$A = \{\{1{,}2{,}3\}, \{2{,}3{,}4\}\} \Rightarrow \cup A = \{1{,}2{,}3{,}4\}$$

Следствие. Пусть Λ – множество и $\forall\lambda \in \Lambda$ имеется множество A_λ (семейство множеств A_λ индексируется элементами Λ). Тогда

$$\underset{\lambda\in\Lambda}{\cup} A_\lambda = \{x|\ \exists\lambda \in \Lambda\ (x \in A_\lambda)\}$$

$$\underset{\lambda\in\Lambda}{\cap} A_\lambda = \{x|\ \forall\lambda \in \Lambda\ (x \in A_\lambda)\}$$

1.4 Закон Де Моргана (двойственности)

Теорема 1.3. *Для любого множества E справедливы равенства:*

(a) $E \setminus \underset{\lambda\in\Lambda}{\cup} A_\lambda = \underset{\lambda\in\Lambda}{\cap} (E \setminus A_\lambda)$

(b) $E \setminus \underset{\lambda\in\Lambda}{\cap} A_\lambda = \underset{\lambda\in\Lambda}{\cup} (E \setminus A_\lambda)$

Доказательство.

$$\text{(a) } x \in E \setminus \underset{\lambda\in\Lambda}{\cup} A_\lambda \Leftrightarrow x \in E \text{ и } x \notin \underset{\lambda\in\Lambda}{\cup} A_\lambda \Leftrightarrow x \in E \text{ и } \exists\lambda \in \Lambda\ (x \in A_\lambda) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in E \text{ и } \forall\lambda \in \Lambda\ (x \notin A_\lambda) \Leftrightarrow \forall\lambda \in \Lambda\ (x \in E \text{ и } x \notin A_\lambda) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall\lambda \in \Lambda\ (x \in E \setminus A_\lambda) \Leftrightarrow x \in \underset{\lambda\in\Lambda}{\cap} (E \setminus A_\lambda) \Rightarrow \text{ множества равны.}$$

□

Определение 1.7. Если в a, b известно, что a – первый, b – второй, то это упорядоченная пара (a, b).

Замечание. Если $(a, b) = (c, d)$, то $a = c$, $b = d$.

1.5 Декартово произведение

Определение 1.8. Декартовым произведением множеств A и B называется $A \times B$ – множество упорядоченных пар, т.ч.

$$A \times B = \{(a{,}b)|\ a \in A, b \in B\}$$

Определение 1.9. Пусть $f : X \longrightarrow Y$. Множество $\Gamma_f = \{(x, f(x))|\ x \in X\}$ называется *графиком* функции f.

Замечание. Если $f, g : X \longrightarrow Y$ равны, то их графики совпадают. С другой стороны, пусть $\Gamma \subset X \times Y$, т.ч. $\{y \in Y|\ (x{,}y) \in\ \Gamma\}$ одноэлементно для всех $x \in X$. Тогда существует единственная функция $f : X \longrightarrow Y$, для которой $\Gamma_f = \Gamma((x, y) \in\ \Gamma)$.

1.6 Аксиома выбора

Определение 1.10. Для любого множества A существует функция $c : \mathcal{P}(A) \setminus \{\varnothing\} \longrightarrow A$, $c(B) \in B \ \forall B \subset A (B \neq \varnothing)$.

Замечание. Например, $B \subset \mathbb{N}(b \neq \varnothing)$, $c(B) = min(B)$

Существует алгебраическая процедура получения множества $\mathbb{Q}$ из множества $\mathbb{N}$.

1.7 Аксиоматическое определение поля $\mathbb{R}$

Определение 1.11. Непустое множество F называется *полем*, если на нём заданы операции сложения $"+"$: $F \times F \longrightarrow F$, произведения $"\cdot"$: $F \times F \longrightarrow F$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1. $\forall a, b \in F : a + b = b + a, \ a \cdot b = b \cdot a$ (коммутативность).
2. $\forall a, b, c \in F : (a + b) + c = a + (b + c), \ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (ассоциативность).
3. $\exists 0_f \in F : \forall a \in F \ \ a + 0_f = 0_f + a = a$ (существование нуля).
4. $\forall a \in F : \exists -a \in F \ \ a + (-a) = 0_f$ (существование противоположного).
5. $\exists 1_f \in F \setminus \{0_f\} : \forall a \in F \ \ a \cdot 1_f = a$ (существование единицы).
6. $\forall a \in F \setminus \{0_f\} : \exists a^{-1} \in F \ \ a \cdot a^{-1} = 1_f$ (существование обратного).
7. $\forall a, b, c \in F : (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (дистрибутивность).

Определение 1.12. Поле F называется *упорядоченным*, если на нём выполняется **аксиома порядка**.

Существует ненулевое $P \subset F$:

1. $\forall a,b \in P \ (a + b \in P$ и $ab \in P)$.
2. $\forall a \in F$ верно ровно одно: либо $a \in P$, либо $-a \in P$, либо $a = 0_f$.

Будем писать, $a < b \ (b > a)$, если $b - a \in P$. Будем писать, $a \leqslant b \ (b \geqslant a)$, если $a < b$ или $a = b$.

Замечание. $\forall a,b \in F$ либо $a < b$, либо $a > b$, либо $a = b$.

Пример. $\mathbb{Q} \quad \dfrac{p}{q} = \dfrac{m}{n} \Rightarrow pn = mq; \ \dfrac{p}{q} + \dfrac{m}{n} = \dfrac{pn + mn}{qn}; \ \dfrac{p}{q} \cdot \dfrac{m}{n} = \dfrac{pm}{qn}$

$\mathbb{Q}_{+} = \{\dfrac{p}{q} | \ p, q \in \mathbb{N}\}$.

Лемма 1.1. *Пусть F – упорядоченное поле, $a, b, c, d \in F$. Тогда*

1. *если $a < b$, $b < c \Rightarrow a < c$.*
2. *если $a < b$, $c < d \Rightarrow a + c < b + d$.*
3. *если $a < b$, $c > 0 \Rightarrow ac < bc$.*
4. *$\forall a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$, в частности $1 > 0$.*

1.8 Модуль

Определение 1.13. Пусть $x \in F$. Модулем (абсолютной величиной) x называется

$$|x| = \begin{cases} \text{x, x } \geqslant 0 \\ \text{-x, x} < 0 \end{cases}$$

Лемма 1.2. *Пусть F – упорядоченное поле, $x, y \in F$. Тогда*

- ▷ $|x| \geqslant 0$. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- ▷ $|-x| = |x|$.
- ▷ $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.
- ▷ $|xy| = |x| \cdot |y|$.
- ▷ $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

Доказательство. (д) $\pm\, x \leqslant |x|$ и $\pm\, y \leqslant |y|$. Тогда $\pm(x+y) \leqslant |x|+|y|, \Rightarrow |x+y| \leqslant |x|+|y|$. □

Определение 1.14. Пусть A, B – подмножества упорядоченоого поля. Будем говорить, что A лежит левее B, если $\forall a \in A$, $\forall b \in B$: $a \leqslant b$. Будем говорить, что элемент c разделяет A и B, если A лежит левее $\{c\}$, и $\{c\}$ лежит левее B, т.е. $\forall a \in A$ $\forall b \in B(a \leqslant c \leqslant b)$.

Определение 1.15. Упорядоченное поле F называется *полным*, если на нем выполняется **аксиома непрерывности**.

1.9 Аксиома непрерывности

Пусть $A, B \subset F(A \neq \varnothing, B \neq \varnothing)$, причём A лежит левее B. Тогда $\exists c \in F$, разделяющий A и B.

Определение 1.16. Полное упорядоченное поле, содержащее множество рациональных чисел, называется полем действительных чисел и обозначается $\mathbb{R}$. Элементы поля $\mathbb{R}$ – действительные числа.

Определение 1.17. Пусть $E \subset \mathbb{R}$. Множество E называется *ограниченным* сверху, если $\exists m \in \mathbb{R}$ $\forall x \in E$ $(x \leqslant m)$. m – верхняя грань. Множество E называется *ограниченным* снизу, если $\exists m \in \mathbb{R}$ $\forall x \in E$ $(x \geqslant m)$. Множество E называется *ограниченным*, если E ограниченно и сверху, и снизу.

Задача. E – ограниченно $\Leftrightarrow \exists k > 0$ $\forall x \in E$ $(|x| \leqslant k)$.

Определение 1.18. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \varnothing$. Наименьшая из верхних граней E называется точной верхней гранью(супремумом $sup(E)$). Наибольшая из нижних граней E называется точной нижней гранью (инфинум $inf(E)$).

$$c = sup(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E(x \leqslant c) \\ \forall c^{'} < c\ \exists x \in E(x > c^{'}) \end{cases}$$

$$c = inf(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E(x \geqslant c) \\ \forall c^{'} > c\ \exists x \in E(x < c^{'}) \end{cases}$$

Замечание. Не всякое $E \neq \varnothing$ имеет точную верхнюю (нижнюю) грань. Необходимым условием их существования является ограниченность сверху/снизу.

Теорема 1.4. ***Принцип полноты Вейерштрасса***
Всякое непустое ограниченое сверху (снизу) множество имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.

Доказательство. Пусть $A \subset \mathbb{R},\ A \neq \varnothing$ и A – ограничено сверху. Рассмотрим $B = \{b \in \mathbb{R} |\ \forall a \in A\ (a \leqslant b)\}$ – множество верхних граней A. $\Rightarrow B \neq \varnothing$ и A лежит левее B. Тогда, по аксиоме непрерывности,

$$\exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in A\ \forall b \in B\ (a \leqslant c \leqslant b)$$

Имеем, что $c = sup(A)$ (т.к. $a \leqslant c$). Пусть $\exists c' < c$. Т.к. $c \leqslant b$, то $c' < b \Rightarrow c' \notin B \Rightarrow c'$ – не является верхней гранью. Тогда $c = sup(A)$. □

Теорема 1.5. ***Аксиома Архимеда***

$$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}(n > a)$$

Доказательство. Пусть $\mathbb{N}$ ограничено сверху. Тогда, по теореме 4, $\exists k = sup(\mathbb{N})\ \Rightarrow\ k-1$ верхней гранью не является $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} :\ n > k-1\ \Rightarrow n+1 > k$ (!!!) (k – верхняя грань $\mathbb{N}$). □

$\Rightarrow \mathbb{N}$ – неограничено.
Следствие. (целая часть) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists!\ m \in \mathbb{Z}\ (m \leqslant x < m+1)$

Доказательство. (1). Пусть $x \geqslant 0$. Рассмотрим $S = \{n \in \mathbb{N} |\ n > x\}$. По аксиоме Архимеда $S \neq \varnothing$ и, значит, S имеет минимальный элемент p. Положим $m = p-1$. Тогда по определению p имеем $m+1 > x$ и $m \leqslant x$ (!!!)
(2). Пусть $x < 0$. $\exists m' \in \mathbb{Z}\ (m' \leqslant -x < m'+1) \Leftrightarrow (-m'-1 < x \leqslant -m')$.

$$m = \begin{cases} -m', \text{ если } x = -m' \\ -m'-1, \text{ иначе} \end{cases}$$

Тогда $m \leqslant x < m+1$
(3). Пусть $m_1 \leqslant x < m_1+1$, $m_2 \leqslant x < m_2+1$. Тогда

$$-1 \leqslant x - m_1 < 1,\ -1 \leqslant x - m_2 < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 < m_1 - m_2 < 1 \Rightarrow m_1 - m_2 = 0 \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

□

Следствие 1. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists!\ m \in \mathbb{Z}\ (m \leqslant x < m+1)$. ($[x]$ – *целая часть* x).
Следствие 2. $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a < b,\ \exists r \in \mathbb{Q}\ (a < r < b)$.

Доказательство. По аксиоме Архимеда $\exists n > \dfrac{1}{b-a}$, т.е. $\dfrac{1}{n} < b-a$.
$r = \dfrac{[na]+1}{n} : r \in \mathbb{Q}$ и $r > \dfrac{na-1+1}{n} = a$ и $r \leqslant \dfrac{na+1}{n} = a + \dfrac{1}{n} < b$.
$\Rightarrow \mathbb{Q}$ всюду в $\mathbb{R}$. □

Определение 1.19. Пусть a – вещественное число. Положим $a^1 = a,\ a^{n+1} = a^n a$

Задача. Докажите, что $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$, где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Определение 1.20. $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ – расширенная числовая прямая.
При этом $\forall x \in \mathbb{R}(-\infty < x < +\infty)$.
Допустимые операции для любого $x \in \mathbb{R}$:

1. $x + (+\infty) = x - (-\infty) = +\infty$
2. $x + (-\infty) = x - (+\infty) = -\infty$
3. $\dfrac{x}{+\infty} = \dfrac{x}{-\infty} = 0$
4. $x \cdot \pm\infty = \pm\infty$ при $x > 0$, $\mp\infty$ при $x < 0$
5. $+\infty \pm (\pm\infty) = +\infty$
   $-\infty \mp (\pm\infty) = -\infty$
   $\pm\infty \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$
   $\pm\infty \cdot (\mp\infty) = \infty$

Недопустимые операции:

1. $+\infty - (+\infty)$
2. $0 \cdot (\pm\infty)$
3. $+\infty + (-\infty)$
4. $-\infty + (+\infty)$
5. $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Соглашение. Пусть $E \subset \mathbb{R}$. Если E неограничено сверху, то будем писать $sup(E) = +\infty$. Если E неограничено снизу, то будем писать $inf(E) = -\infty$.

Определение 1.21. Пусть $I \subset \mathbb{R}$. I называется промежутком, если $\forall a,b \in I\ \forall x \in \mathbb{R}\ (a \leqslant x \leqslant b \Rightarrow x \in I)$.

Лемма 1.3. *Любой промежуток – одно из следующих множеств:*

$$\varnothing,\ \mathbb{R},\ \textit{луч},\ \textit{прямая},\ \textit{отрезок},\ \textit{интервал},\ \textit{полуинтервал}$$

Доказательство. Пусть I – промежуток, $I \neq \varnothing$. Положим $a = inf(I),\ b = sup(I)$, где $\{a,b\} \subset \overline{\mathbb{R}}$. Если $a = b$, то $I = \{a\}$ (вырожденный отрезок). Пусть $a < b$. Если $a < x < b$, то по определению точных граней

$$\exists x'', x' \in I\ (x' < x < x'') \Rightarrow x \in I$$

Следовательно, $(a,b) \subset I \subset [a,b]$ (в $\overline{\mathbb{R}}$). $\square$

2 Предел последовательности

Если задана функция $a : \mathbb{N} \longrightarrow A$, то говорят, что задана последовательность элементов множества A.

Определение 2.1. Пара $(n, a(n))$ – n-ый член последовательности a (обозначается a_n). Сама последовательность обозначается $\{a_n\}$, или $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, или a_n, $n \in \mathbb{N}$. Если $A = \mathbb{R}$, то $\{a_n\}$ называется числовой.

2.1 Сходящиеся последовательности

Определение 2.2. Число a называется пределом последовательности $\{a_n\}$, если
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geqslant N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$.
Пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, или $a_n \to a$ при $n \to \infty$, или $a_n \to a$.

Замечание. Геометрический смысл. Так как $|a_n - a| < \varepsilon \iff a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$, то запись $\lim\limits_{n\to\infty} = a$ означает, что $M_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : a_n \notin (a - \varepsilon; a + \varepsilon)\}$ - конечное множество $\forall \varepsilon > 0$.

Пример. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$
$|\dfrac{1}{n} - a| < \varepsilon \iff n > \dfrac{1}{\varepsilon}$
$\exists N = [\dfrac{1}{\varepsilon}] + 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}(n \geqslant N \Rightarrow |\dfrac{1}{n} - 0| < \varepsilon)$

Теорема 2.1. *Теорема о единственности.*
Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$, *то* $a = b$.

Доказательство. Пусть $a \neq b$, тогда $|a - b| > 0$. Положим, $\varepsilon = \dfrac{|a-b|}{2}$, тогда:
$\exists N_1 : \forall n \geqslant N(|a_n - a| < \varepsilon)$
$\exists N_2 : \forall n \geqslant N(|a_n - b| < \varepsilon)$
Положим, $N = max\{N_1, N_2\}$. Тогда $|a-b| = |a-a_N+a_N-b| \leqslant |a_N-a|+|a_N-b| < \varepsilon+\varepsilon = |a - b|$!!! □

Замечание. Пусть a_n, b_n - последовательности, причем существует $m \in \mathbb{N}$, что $b_n = a_{n+m} \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда пределы a_n и b_n существуют одновременно, и если существуют, то равны.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$
$(\forall n \geqslant N_a : (|a_n - a| < \varepsilon)) \Rightarrow (\forall n \geqslant N_a : (|b_n - a| < \varepsilon))$
$(\forall n \geqslant N_b : (|b_n - a| < \varepsilon)) \Rightarrow (\forall n \geqslant N_b + m : (|a_n - a| < \varepsilon))$ □

Определение 2.3. Числовая последовательность, имеющая некоторое число своим пределом, называется сходящейся, иначе - расходящейся.

Пример. Покажем, что $\{(-1)^n\}$ - расходящаяся.
Предположим, что $(-1)^n \to a \in \mathbb{R}$:
По определению предела ($\varepsilon = 1$):
$\exists N : \forall n \geqslant N(a - 1 < (-1)^n < a + 1)$
При $n = 2k$: $1 < a + 1 \Rightarrow a > 0$
При $n = 2k - 1$: $a - 1 < -1 \Rightarrow a < 0$!!!

Определение 2.4. Последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной сверху/снизу, если множество её значений $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ограничено сверху/снизу.

Теорема 2.2. *Об ограниченности.*
Если последовательность $\{a_n\}$ сходится, то она ограничена.

Доказательство. Пусть $a_n \to a \in \mathbb{R}$.
По определению предела ($\varepsilon = 1$).
$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N(a - 1 < a_n < a + 1)$.
Положим, $m = min\{a - 1, a_1, ..., a_{N-1}\}$, $M = max\{a + 1, a_1, ..., a_{N-1}\}$.
Тогда $\forall n \in \mathbb{N}(m < a_n < M)$. □

Теорема 2.3. *О пределе в неравенствах.*
Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. *Тогда:*
1) $a < b \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N(a_n < b_n)$
2) $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant n_0(a_n \leqslant b_n) \Rightarrow a \leqslant b$

Доказательство.
1) Положим $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$.
Тогда $\varepsilon > 0$ и по определению предела:
$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N(a_n < a + \varepsilon)$
$\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N(b_n > b - \varepsilon)$
Положим $N = max\{N_1, N_2\}$.
Тогда при $n \geqslant N$ имеем $a_n < a + \varepsilon = \dfrac{a+b}{2} = b - \varepsilon < b_n$.
2) 2 пунт является контрпозицией 1 пункта.

Замечание. Предельный переход не обязан сохранять строгие неравенства:
Пример: $a_n = 0, b_n = \dfrac{1}{n} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}(0 < \dfrac{1}{n})$, но $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

□

Теорема 2.4. *О зажатой последовательности.*
Пусть $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$ для всех $n \geqslant n_0$, и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, тогда существует $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению предела:
$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N_1(a - \varepsilon < a_n)$
$\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N_2(b_n < a + \varepsilon)$.
Положим $N = max\{N_1, N_2\}$, тогда при $n > N$ имеем:
$a - \varepsilon < a_n \leqslant c_n \leqslant b_n < a + \varepsilon \Rightarrow |c_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$. □

Замечание. $\alpha_n \to 0, \forall n \geqslant n_0(|c_n| < \alpha_n) \Rightarrow c_n \to 0$.

Задача. *Пусть $|q| < 1$. Покажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.*

Теорема 2.5. *Об арифметических операциях с пределами.*
Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, *тогда:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n * b_n) = a * b$

3. $b \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}(b_n \neq 0) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b}$

Доказательство.

1. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению предела:
$\exists N_1 \in \mathbb{N} : n \geqslant N_1(|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2})$
$\exists N_2 \in \mathbb{N} : n \geqslant N_2(|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2})$
Положим $N = max\{N_1, N_2\}$, тогда
$\forall n \geqslant N\ |(a_n + b_n) - (a + b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

2. Так как $\{a_n\}$ – сходящаяся, то (по теореме 2) $\{a_n\}$ – ограниченная, то есть $\exists C > 0$, что $\forall n \in \mathbb{N}(|a_n| \leqslant C)$. Увеличивая C, если необходимо, можно считать, что $|b| \leqslant C$.
Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению предела
$\exists N_1, \forall n \geqslant N_1(|a_n - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2C})$
$\exists N_1, \forall n \geqslant N_1(|b_n - b| \leqslant \frac{\varepsilon}{2C})$
Положим $N = max\{N_1, N_2\}$, тогда при $n \geqslant N$ имеем:
$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + anb - ab| \leqslant |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| < C\frac{\varepsilon}{2C} + C\frac{\varepsilon}{2C} = \varepsilon$

3. Так как $\frac{a_n}{b_n} = a_n * \frac{1}{b_n}$, тогда по пункту 2 достаточно показать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$.
Поскольку $|b| \neq 0$, то по определению предела:
$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N_1(|b_n - b| < \frac{|b|}{2})$. Тогда $n \geqslant N_1 \Rightarrow |b_n| = |b + b_n - b| \geqslant |b| - |b - b_n| \geqslant \frac{|b|}{2}$
Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению предела:
$\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N_2(|b_n - b| < \frac{\varepsilon|b|^2}{2})$
Положим $N = max\{N_1, N_2\}$. Тогда при $n \geqslant N$ имеем $|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| = \frac{|b_n - b|}{|b||b_n|} < \frac{2}{|b|^2} * \varepsilon * \frac{|b|^2}{2} = \varepsilon$

□

Замечание. Обратные утверждения теоремы 5 неверны.
Пример: $a_n = (-1)^n, b_n = -a_n$, тогда a_n, b_n - расходятся, но $a_n + b_n = 0$, $a_n * b_n = -1$, $\frac{a_n}{b_n} = -1$ - статические последовательности.

Определение 2.5. Последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно малой* (б.м.), если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Пример. Пусть $\{a_n\}$ – б.м, $\{b_n\}$ – ограничено. Покажем, что $\{a_n b_n\}$ – б.м.

Доказательство. $\{b_n\}$ – ограничено $\Rightarrow \exists C > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ (|b_n| < C)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$.
$\{a_n\} \to 0 \Rightarrow \exists n_0\ \forall n \geqslant n_0\ (|a_n| < \frac{\varepsilon}{C})$. Тогда при $n \geqslant n_0\ (|a_n \cdot b_n| < \frac{\varepsilon}{C} C = \varepsilon)$
Значит, $\{a_n \cdot b_n\} \to 0$. □

2.2 Бесконечные пределы

Определение 2.6. 1) Говорят, что $\{a_n\}$ *стремится* к $+\infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow a_n > \frac{1}{\varepsilon})$$

Пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ или $a_n \to +\infty$.
2) Говорят, что $\{a_n\}$ *стремится* к $-\infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow a_n < \frac{-1}{\varepsilon})$$

Пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ или $a_n \to -\infty$.
3) Последовательность a_n называется бесконечно большой (б.б.), если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

Задача. Доказать, что если $\{a_n\}$ – б.б., тогда $\{a_n\}$ – неограниченная.
Замечание. Если последовательность имеет предел в $\overline{\mathbb{R}}$, то он единственный.

Теорема 2.6. *Пусть $a_n \leqslant b_n$ для всех $n \geqslant n_0$. Тогда*

1. *если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$*
2. *если $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$*

Доказательство. 1) Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По условию $\exists N^{'}\ \forall n \geqslant N^{'}(a_n > \frac{1}{\varepsilon})$. Положим $N = max(N^{'}, n_0)$. Тогда при $n \geqslant N$ $b_n \geqslant a_n > \frac{1}{\varepsilon}$. Следовательно, $b_n \to +\infty$.
2) Следует из пункта 1):

$$\{b_n\} \to -\infty \Rightarrow \{-b_n\} \to +\infty$$

$$\forall n \geqslant n_0 :\ -b_n \leqslant -a_n$$

$\Rightarrow -a_n \to \infty \Rightarrow a_n \to -\infty$. □

Задача. Доказать, что теорема верна для $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$ (с допустимыми операциями).

Пример. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = -\infty$.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По условию, $\exists N_1\ \forall n \geqslant N_1(a_n > \frac{x}{2})$, $\exists N_2\ \forall n \geqslant N_2(b_n < \frac{-1}{\varepsilon\frac{x}{2}})$. Положим $N = max(N_1, N_2)$. Тогда при $n \geqslant N$:

$$a_n \cdot b_n < -\frac{a_n}{\varepsilon\frac{x}{2}} < -\frac{1}{\varepsilon}$$

□

2.3 Монотонные последовательности.

Определение 2.7. 1) Последовательность $\{a_n\}$ называется *нестрого(строго)* возрастающей, если $a_n \leqslant a_{n+1}$ $(a_n < a_{n+1})$ для всех $n \in \mathbb{N}$.
2) Последовательность $\{a_n\}$ называется *нестрого(строго)* убывающей, если $a_n \geqslant a_{n+1}$ $(a_n > a_{n+1})$ для всех $n \in \mathbb{N}$.
3) Нестрого возрастающие и нестрого убывающие последовательности называются *монотонными.*

Замечание.

$$\forall n \in \mathbb{N}(a_n \leqslant a_{n+1}) \Rightarrow \forall m,n \in \mathbb{N}(m > n \Rightarrow a_n \leqslant a_m)$$

Теорема 2.7. *О пределе монотонной последовательности*
1) Если последовательность $\{a_n\}$ нестрого возрастает, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = sup\{a_n\}$. Если к тому же $\{a_n\}$ ограничена сверху, то $\{a_n\}$ – сходящаяся.
2) Если последовательность $\{a_n\}$ нестрого убывает, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = inf\{a_n\}$. Если к тому же $\{a_n\}$ ограничена снизу, то $\{a_n\}$ – сходящаяся.

Доказательство. 1) Пусть $\{a_n\}$ ограничена сверху. Тогда $c = sup\{a_n\} \in \mathbb{R}$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению супремума выполнено: $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}(a_n \leqslant c) \\ \exists n_0 \in \mathbb{N}(a_{n_0} > c - \varepsilon) \end{cases}$
В силу возрастания при $n > n_0$

$$c - \varepsilon < a_{n_0} \leqslant a_n \leqslant c < c + \varepsilon$$

Значит, $|a_n - c| < \varepsilon$. Т.к. $\varepsilon > 0$ – любое, то $c = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
Пусть $\{a_n\}$ не огранична сверху, $sup\{a_n\} = +\infty$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists n_0 \in \mathbb{N}(a_{n_0} > \frac{1}{\varepsilon})$ и в силу возрастания $a_n \geqslant a_{n_0} > \frac{1}{\varepsilon}$ $\forall n \geqslant n_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.
2) Аналогично пункту 1) □

Лемма 2.1. *Неравенство Бернулли*
Если $n \in \mathbb{N}$ и $x > -1$, то

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$$

Доказательство. Докажем М.М.И. по n. База: $n = 1$: $1 + x \geqslant 1 + 1x$ – верно.
Пусть неравенство верно для n. Тогда

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n(1 + x) \geqslant (1 + nx)(1 + x) \geqslant 1 + (n + 1)x$$

□

Теорема 2.8. *Для любого $x \in \mathbb{R}$ существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n = exp(x)$. Кроме того, $exp(x + y) = exp(x) \cdot exp(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. 1) Докажем сходимость последовательности $a_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$. Зафиксируем $m > |x|$. Тогда при $n \geqslant m$ верно $a_n(x) > 0$.

$$\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} = \frac{\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(\frac{\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 - \frac{\frac{x}{n(n+1)}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1}$$

Выражение

$$-\frac{\frac{x}{n(n+1)}}{(1+\frac{x}{n})} > 0 \text{ при } x < 0, \text{ и } > -1 \text{ при } x \geqslant 0$$

$\left(1+\dfrac{x}{n}\right)\left(1-\dfrac{\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right) = 1$, следовательно $\{a_n(x)\}$ нестрого возрастает при $n \geqslant m$.
Т.к. $\{a_n(-x)\} \geqslant \{a_m(-x)\}\ \forall n \geqslant m$, то

$$a_n(x)\cdot a_n(-x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \leqslant 1$$

Следовательно, $a_n(x) \leqslant \dfrac{1}{a_n(-x)} \leqslant \dfrac{1}{a_m(x)}\ \forall n \geqslant m$.
Поэтому, последовательность $\{a_n(x)\}$ – сходится.
2) При $n > |x+y|$:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n = \left(1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}\right)^n = \left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n\left(1+\frac{\frac{xy}{n^2}}{1+\frac{x+y}{n}}\right)^n$$

Положим $\alpha_n = \dfrac{xy}{n+x+y}$.
Для завершения доказательства достаточно показать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{\alpha_n}{n}\right)^n = 1$.
Выберем N так, что $|\alpha_n| < 1$ при $n \geqslant N$.
Поскольку $\left(1+\dfrac{\alpha_n}{n}\right)^n\left(1-\dfrac{\alpha_n}{n}\right)^n = \left(1-\dfrac{\alpha_n^2}{n^2}\right)^n \leqslant 1$, по н-ву Бернулли:

$$1+\alpha_n \leqslant \left(1+\frac{\alpha_n}{n}\right)^n \leqslant \frac{1}{(1-\frac{\alpha_n}{n})^n} \leqslant \frac{1}{1-\alpha_n}$$

$\Rightarrow$ по теореме о зажатой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{\alpha_n}{n}\right)^n = 1$. □

Замечание.

$$a_n(x) \geqslant a_m(x) > 0 \Rightarrow exp(x) > 0$$

Определение 2.8. $e = exp(1)$ – число "e".

2.4 Принцип вложенных отрезков

Определение 2.9. Последовательность отрезков $\{[a_n, b_n]\}$ называется вложенной, если $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \forall n \in \mathbb{N}$. Если к тому же $\{b_n - a_n\} \to 0$, то $\{[a_n, b_n]\}$ называется стягивающейся.

Теорема 2.9. *Теорема Кантора*
Всякая последовательность вложенных отрезков имеет общую точку. Если последовательность стягивающейся, то такая точка единственная.

Доказательство. Пусть $\{[a_n, b_n]\}$ - опследовательность вложенных отрезков.
Поскольку $a_1 \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant b_1\ \forall n$, следовательно

$\{a_n\}$ - нестрого возрастает и ограничена сверху числом b_1,
$\{b_n\}$ - нестрого убывает и ограничена снизу числом a_1.
По теореме 7 обе последовательности сходятся $a_n \to \alpha$ и $b_n \to \beta$.

Переходя в неравенстве $a_n \leqslant b_n \forall n$ к пределу при $n \to \infty$, получим $\alpha \leqslant \beta$. Ввиду монотонности $a_n \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b_n \forall n$, следовательно $\cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] \supset [\alpha, \beta]$, и значит $\cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] \neq \varnothing$

Пусть $\{[a_n, b_n]\}$ - стягивающаяся, и $x, y \in \cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$. Так как $x, y \in [a_n, b_n] \forall n \Rightarrow |x - y| \leqslant b_n - a_n \forall n$. Переходя к пределу, получим $x = y$, то есть $\cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \{x\}$, где $x = \alpha = \beta$. □

Задача. *Будет ли последовательность вложенной, если все отрезки заменить на интервалы?*

2.5 Подпоследовательности и частичные пределы

Определение 2.10. Пусть $\{a_n\}$ - последовательность, $\{n_k\}$ - возрастающая последовательность натуральных чисел.
Последовательность $\{b_k\}$, где $b_k = a_{n_k} \forall k$, называется подпоследовательностью $\{a_n\}$ и обозначается $\{a_{n_k}\}$.

Замечание.
1. Подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$ – это композиция функций $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\sigma(k) = n_k$ и самой последовательности $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a(n) = a_n$.

   Пример. $\{\frac{1}{2^k}\}$ - подпоследовательность $\{\frac{1}{2n}\}$, где $n_k = 2^{k-1}$.

2. Если $\{a_{n_k}\}$ - подпоследовательность, то $n_k \geqslant k$ для всех k.
   ММИ по n:

   (a) $n = 1$: $n_1 = 1 \geqslant 1$ - верно.

   (b) $\left.\begin{matrix} n_k \geqslant k \\ n_{k+1} > n_k \end{matrix}\right\} \Rightarrow n_{k+1} > k \Rightarrow n_{k+1} \geqslant k + 1$

Лемма 2.2. *Если последовательность имеет предел в $\overline{\mathbb{R}}$, то любая её подпоследовательность имеет тот же предел.*

Доказательство. Пусть $\{a_{n_k}\}$ - подпоследовательность последовательности $\{a_n\}$.
Пусть $a = \lim\limits_{n\to\infty} \{a_n\}$, тогда
$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N(|a_n - a| < \varepsilon) \xRightarrow{n_k \geqslant k}$
$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall k \geqslant N(|a_{n_k} - a| < \varepsilon)$
Это означает, что $a = \lim\limits_{k\to\infty} \{a_{n_k}\}$. □

Теорема 2.10. *Больцано - Вейерштрасса*
Всякая ограниченная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Пусть $\{a_n\}$ - ограничена, тогда $a_n \in [c, d]\ \forall n$.
Положим $[c_1, d_1] = [c, d]$.
Положим $y = \dfrac{c_k + d_k}{2}$, тогда:
$[c_{k+1}, d_{k+1}] = \begin{cases} [c_k, y], \text{ если } \{m : a_m \in [c_k, y]\} \text{ - бесконечно} \\ [y, d_k] \text{ - иначе} \end{cases}$

По индукции будет построена последовательность вложенных отрезков $[c_k, d_k]$, каждый из которых содержит значения бесконечного множества членов a_n.
Причем $d_k - c_k = \dfrac{c - d}{2^{k-1}} \to 0$. По теореме Кантера (о вложенных отрезках) существует общая точка $a = \lim\limits_{k\to\infty} c_k = lim_{k\to\infty} d_k$.
Построим строго возрастающую последовательность номеров $\{n_k\}$.
Положим $n_1 = 1$, если номер n_k найден, то выберем номер $n_{k+1} > n_k$ так, что
$a_{n_{k+1}} \in [c_{k+1}, d_{k+1}]$.

Так как по построению $c_k \leqslant a_{n_k} \leqslant d_k\ \forall k$, то по теореме о зажатой последовательности $\{a_{n_k}\} \to a$. □

Определение 2.11. Точка $a \in \overline{\mathbb{R}}$ называется частичным пределом последовательности $\{a_n\}$, если a - предел некоторой подпоследовательности $\{a_{n_k}\}$.

Для последовательности $\{a_n\}$ определим $M_k = \sup\limits_{n\geqslant k}\{a_n\}$, $m_k = inf_{n\geqslant k}\{a_n\}$. Так как при переходе к подмножеству, sup не увеличивается, а inf не уменьшается, то имеем следующую цепочку неравенств:
$m_k \leqslant m_{k+1} \leqslant M_{k+1} \leqslant M_k\ \forall k$
Следовательно, $\{m_k\}$ нестрого возрастает, а $\{M_k\}$ нестрого убывает, и значит, эти последовательности имеют предел в $\overline{\mathbb{R}}$.

Замечание. Если $\{a_n\}$ не ограничена сверху (снизу), то $M_k = +\infty$ ($m_k = -\infty$) $\forall k$. Будем считать, что $\lim\limits_{k\to\infty} M_k = +\infty$ ($\lim\limits_{k\to\infty} m_k = -\infty$).

Определение 2.12.
$\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{n\geqslant k}\{a_n\}$ называется верхним пределом $\{a_n\}$
$\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{k\to\infty} \inf\limits_{n\geqslant k}\{a_n\}$ называется нижним пределом $\{a_n\}$

Теорема 2.11. *Верхний (нижний) предел - это наибольший (наименьший) из частичных пределов последовательности в* $\overline{\mathbb{R}}$.

Доказательство. $M = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$, $m = \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$
Нужно показать, что m, M - частичные пределы и все частичные пределы лежат между $[m, M]$.
Докажем, что M - это частичный предел $\{a_n\}$:

1. Пусть $M \in \mathbb{R}$. Так как $M - 1 < M_1 = \sup\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, то существует n_1 такой, что $M - 1 < a_{n_1} \leqslant M_1$. Так как $M - \dfrac{1}{2} < M_{n_1+1} = \sup\limits_{n\geqslant n_1+1} a_n$, то существует номер $n_2 > n_1$ такой, что $M - \dfrac{1}{2} < a_{n_2} \leqslant M_{n_2}$ и т.д.
   По индукции будет построена подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$, такая что

$M - \dfrac{1}{k} < a_{n_k} \leqslant M_{n_k}\ \forall k$.
Поскольку $\lim\limits_{k\to\infty}(M - \dfrac{1}{k}) = \lim\limits_{k\to\infty}(M_{n_k}) = M$, то по теореме о зажатой последовательности $\{a_{n_k}\} \to M$

2. Пусть $M = +\infty \Rightarrow M_k = +\infty\ \forall k$
Так как $\{a_n\}$ не ограничена сверху, то существует номер n_1, такой что $1 < a_{n_1}$.
Так как $\{a_n\}$ не ограничена сверху, то существует n_2, такой что $2 < a_{n_2}$.
По индукции будет построена $\{a_n\}$, такая что $k < a_{n_k}$. По пункту 1 теоремы 6, так как последовательность $\{k\}_{k=1}^{\infty} \to +\infty$, то $a_{n_k} \to +\infty$.

3. Пусть $M = -\infty$. Так как $a_k \leqslant M_k\ \forall k$
$M_k \to -\infty$, то по пункту 2 теоремы 6 $a_k \to -\infty$.

В любом из случаев M - частичный предел $\{a_n\}$.
Доказательство для m аналогично.
Пусть a – частичный предел $\{a_n\}$, $a_{n_k} \to a$. Т.к. $n_k \geqslant k$, то

$$m_k \leqslant a_{n_k} \leqslant M_k\ \forall k$$

Перейдем к пределу при $k \to \infty$. Получим $m \leqslant a \leqslant M$. □

Следствие.
$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n \text{ в } \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = a$$

Доказательство. 1) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow$ по лемме 2, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = a = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$.
2) Поскольку $m_k \leqslant a_k \leqslant M_k\ \forall k$, то, переходя к пределу, при $k \to \infty$, получим: $m \leqslant a_k \leqslant M$, тогда $a_{n_k} \to a$, где $a = m = M$. □

Задача. Доказать теорему Больцано-Вейерштрасса используя теорему 11.

Определение 2.13. Последовательность a_n называется *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m \in \mathbb{N}(n \geqslant N, m \geqslant N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon)$$

Лемма 2.3. *Всякая фундаментальная последовательность ограничена.*

Доказательство. Пусть $\{a_n\}$ фундаментальна. Тогда

$$\exists N\ \forall n, m \geqslant N(|a_n - a_m| < 1)$$

В частности, $\forall n \geqslant N(a_N - 1 < a_n < a_N + 1)$. Положим $\alpha = min\{a_1, ..., a_{N-1}, a_N - 1\}, \beta = max\{a_1, ..., a_{N-1}, a_N - 1\}$, тогда $\alpha \leqslant a_n \leqslant \beta\ \forall n \in \mathbb{N}$. □

Теорема 2.12. *Критерий Коши.*
Последовательность a_n сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

Доказательство. 1) Пусть $a_n \to a \in \mathbb{R}$. По определению предела $\exists N\ \forall n \geqslant N(|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2})$.
Тогда при $n, m \geqslant N$

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)| \leqslant |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2) Пусть a_n фундаментальна. По лемме 3 $\{a_n\}$ ограничена. Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса:

$$\exists\{a_{n_k}\}, a_{n_k} \to a$$

Покажем, что $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению фундаментальной последовательности $\exists N\ \forall n,m \geqslant N(|a_n - a_m| < \dfrac{\varepsilon}{2})$. Покажем, что N – подходящий номер в определении предела $\{a_n\}$ для ε. В силу сходимости a_{n_k} $\exists K\ \forall k \geqslant K(|a_{n_k} - a| < \dfrac{\varepsilon}{2})$. Положим $M = max\{N, K\}$. Тогда $n_M \geqslant M \geqslant N, n_M \geqslant M \geqslant K$ и, значит, при $n \geqslant M$:

$$|a_n - a| \leqslant |a_n - a_{n_M}| + |a_{n_M} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$, то $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. □

Замечание. Устремляя m к бесконечности в определении фундаментальности получим

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geqslant N(|a_n - a| \leqslant \varepsilon)$$

То есть номер N указывает скорость сходимости a_n к пределу.

Задача. Докажите, что из фундаментальности следует сходимость, используя следствие теоремы 11.
Задача*. Пусть F – упорядоченное архимедово поле (т.е. выполняется аксиома Архимеда). Докажите, что если всякая фундаментальная последовательность элементов из F сходится к некоторому элементу поля F, то поле F – полное.

3 Топология $\mathbb{R}$

Определение 3.1. Пусть $\varepsilon > 0, a \in \mathbb{R}$. Введем обозначения

1. $B_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ – ε–окрестность в точке a.
2. $B^o_\varepsilon(a) = B_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ – проколотая ε–окрестность в точке $a = (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon)$.

Классифицируем точки по отношению к заданному множеству.

Определение 3.2. Пусть $E \subset \mathbb{R}$ и $x \in \mathbb{R}$.

1. Точка x называется *внутренней* точкой множества E, если $\exists\varepsilon > 0\ (B_\varepsilon(x) \subset E)$. Обозначение $int(E)$ - множество всех внутренних точек E.
2. Точка x называется *внешней* точкой множества E, если $\exists\varepsilon > 0\ (B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R} \setminus E)$. Обозначение $ext(E)$ - множество всех внешних точек E.
3. Точка x называется *граничной* точкой множества E, если $\forall\varepsilon > 0\ B_\varepsilon(a) \cap E \neq \varnothing$, $B_\varepsilon(a) \cap R \setminus E \neq \varnothing$. Обозначение $\delta(E)$ – множество всех граничных точек E.

Замечание.

$$\mathbb{R} = int(E) \cup ext(E) \cup \delta(E), \text{ и } int(E), ext(E), \delta(E) \text{ попарно не пересекаются.}$$

Пример. Пусть $E = (1, 2]$. Тогда

1. $int(E) = (1, 2)$
   $x \in (1, 2)$, $\varepsilon = min\{x-1, 2-x\}$. Тогда $\varepsilon > 0$, $x - \varepsilon \geqslant 1$, $x+\varepsilon \leqslant 2 \Rightarrow (x+\varepsilon, x-\varepsilon) \subset (1, 2]$

2. $ext(E) = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

3. $\delta(E) = \{1, 2\}$

Определение 3.3. Множество $G \subset \mathbb{R}$ называется *открытым*, если все его точки являются внутренними. То есть $G = int(G)$. Множество $F \subset \mathbb{R}$ называется *замкнутым*, если $\mathbb{R} \setminus F$ открыто.

Пример. (a,b) – открытое множество. $[a,b]$ – замкнутое множество.

Лемма 3.1.

1. *Если* G_λ *– открытое* $\forall \lambda \in \Lambda$, *то* $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ *– открытое множество.*

2. *Если* $G_1, G_2, ..., G_m$ *– открытые, то* $\bigcap\limits_{k=1}^{m} G_k$ *– открытое множество.*

3. $\mathbb{R}, \varnothing$ *– открытые множества.*

Доказательство. 1) Пусть $G = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$. Пусть $x \in G \Rightarrow \exists \lambda_0 \in \Lambda (x \in G_{\lambda_0})$.
G_{λ_0} – открытое, $x \in G_{\lambda_0} \Rightarrow \exists B_\varepsilon(x) \subset G_{\lambda_0} \subset G$, т. е. x – внутренняя точка G.
2) Пусть $\bigcap\limits_{k=1}^{m} G_k$. Пусть $x \in G \Rightarrow \forall k = 1, .., m : (x \in G_k)$, G_k – открытое $\Rightarrow \exists B_{\varepsilon_k}(x) \subset G_k$.
Положим $\varepsilon = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant m} \{E_k\}$, тогда $\varepsilon > 0$ и $B_\varepsilon(x) \subset B_{\varepsilon_k}(x) \subset G_k$ для $k = 1, .., m \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{m} G_k = G$, т. е. x – внутренняя точка G.
3) Вытекает из определения. □

Лемма 3.2.

1. *Если* F_λ *– замкнутое* $\forall \lambda \in \Lambda$, *то* $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ *– замкнутое.*

2. *Если* $F_1, ..., F_m$ *– замкнуто, то* $\bigcup\limits_{k=1}^{m} F_k$ *– замкнутое.*

3. $\mathbb{R}, \varnothing$ *– замкнутые.*

Доказательство. 1) $\mathbb{R} \setminus \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} (\mathbb{R} \setminus F_\lambda)$.
2) $\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{m} F_\lambda = \bigcap\limits_{k=1}^{m} (\mathbb{R} \setminus F_k)$, то утверждение следует из леммы 1 и законов Де Моргана.
3) Оба множества замкнуты, т.к. мы доказалаи, что дополнения к ним открыты. □

Определение 3.4. Точка $x \in \mathbb{R}$ называется предельной точкой множества $E \in \mathbb{R}$, если $\forall \varepsilon > 0$ $(\mathring{E}_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing)$

Лемма 3.3. *x – предельная точка множества E* $\iff \exists \{x_n\} \subset E$ $(x_n \to x)$

Доказательство. $\Rightarrow$
Пусть $x \in E'$, где E' – множество всех предельных точек множества E. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}(\mathring{B}_{\frac{1}{n}}(x) \cap E \neq \varnothing)$. Выберем $x_n \in \mathring{B}_{\frac{1}{n}}(x) \cap E$. Имеем $\forall n\ (0 < |x_n - x| < \dfrac{1}{n}) \Rightarrow x_n \to x, x_n \neq x$ □

Доказательство. $\Leftarrow$
Пусть $x_n \to x$, $x_n \neq x$ Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists N\ \forall n \geqslant N(|x_n - x| < \varepsilon)$. Следовательно, $\mathring{B}_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing$ $(\mathring{B}_\varepsilon(x) \cap E \ni x_N)$ □

Теорема 3.1. *Критерий замкнутости.*
Пусть $E \subset \mathbb{R}$, тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. *E замкнуто*
2. *E содержит все свои граничные точки*
3. *E содержит все свои предельные точки*

Доказательство.
1. $1 \Rightarrow 2$
   $x \in \mathbb{R} \setminus E$ (открытое) $\Rightarrow \exists B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R} \setminus E \Rightarrow x$ – внешняя точка $E \Rightarrow x \neq \delta E \Rightarrow E \supset \delta E$.
2. $2 \Rightarrow 3$
   Любая предельная точка – (внутренняя/граничная). $intE \subset E, \delta E \subset E \Rightarrow E' \subset E$.
3. $3 \Rightarrow 1$
   $x \in \mathbb{R} \setminus E \Rightarrow x \notin E' \Rightarrow \exists \mathring{B}_\varepsilon(x) \cap E = \varnothing \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R} \setminus E \Rightarrow \mathbb{R} \setminus E$ – открыто $\Rightarrow E$ – замкнуто.

□

Следствие. E – замкнуто $\iff \forall x_n \subset E(x_n \to x \Rightarrow x \in E)$

Доказательство. $\Rightarrow$
Пусть $\{x_n\} \subset E$, а $x \notin E$.
$x_n \to x \Rightarrow x \in E' \Rightarrow E$ – не замкнуто по теореме 1 пункту 3, так как $x \notin E$. □

Доказательство. $\Leftarrow$
Пусть задано условие на последовательности. Тогда $E \supset E'$ по лемме 2, следовательно E – замкнуто по теореме 1 пункту 3. □

Пример. Пусть L – множество частичных пределов числовой последовательности $\{a_n\}$. Покажем, что L – замкнуто.
Пусть $x_n \to n$ и $x_n \in L$. Так как x_k – частичный предел $\{a_n\}$, то существует строго возрастащая последовательность номеров $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$, такая что $|x_k - a_{n_k}| < \dfrac{1}{k}$. Тогда $|a_{n_k} - x| \leqslant |a_{n_k} - x_k| + |x_k - x| < \dfrac{1}{k} + |x_k - x| \forall k \Rightarrow a_{n_k} \to x$, то есть $x \in L$.

Определение 3.5. $\bar{E} = E \cup \delta E$ – <u>замыкание множества</u> E.

Лемма 3.4. *Множество $\bar{E}$ – замкнуто. Более чтого $\bar{E} = E \cup E'$.*

Доказательство. Пусть $x \in \mathbb{R} \setminus \bar{E} \Rightarrow x \in extE \Rightarrow \exists B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R} \setminus E$. Кроме того, $B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R} \setminus \bar{E}$, иначе $B_\varepsilon(x) \cap \delta E \neq \varnothing$, но тогда $B_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing$. Следовательно $\mathbb{R} \setminus \bar{E}$ - открыто.
2 утверждение вытекает из 2 наблюдений:

1. любая предельная точка либо внутренняя, либо граничная ($E \cup E' \subset E \cup \delta E$)
2. Любая граничная точка, не принадлежащая множеству E является предельной ($E \cup \delta E \subset E \cup E'$)

$\square$

Задача. $a \in \bar{E} \iff \exists \{x_n\} \subset E\ (x_n \to a)$

Определение 3.6. Семейство $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ называется покрытием множества E, если $E \subset \cup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$. Если все множества G_λ открыты, то покрытие называется открытым.

Пример. $\{(\frac{1}{n}, 1)\}$ – открытое покрытие $(0, 1)$, так как $\cup_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}, 1) = (0, 1)$.

Теорема 3.2. *Гейне-Борель*
Если $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *– открытое покрытие* $[a, b]$*, то* $\exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \Lambda\ ([a, b] \subset G_{\lambda_1} \cup G_{\lambda_2} \cup ... \cup G_{\lambda_n})$

Доказательство. Предположим, $[a, b]$ не покрывается никаким конечным набором G_λ. Разделим $[a, b]$ пополам и обозначим $[a_1, b_1]$ ту половину, которая не покрывается конечным набором G_λ. Разделим пополам $[a_1, b_1]$ и т.д. По индукции будет построена $\{[a_n, b_n]\}$ – стягивающаяся ($b_n - a_n = \dfrac{b - a}{2^n} \to 0$), каждый из её отрезков не покрывается конечным набором G_λ. По теореме Кантора $\exists c \in \cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$. $c \in [a, b] \subset \cup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \Rightarrow \exists \lambda_0 \in \Lambda\ (c \in G_{\lambda_0})$.
G_{λ_0} – открыто $\Rightarrow \exists B_\varepsilon(c) \subset G_{\lambda_0}$.
$a_n \to c, b_n \to c \Rightarrow \exists k : c - a_k < \varepsilon, b_k - c < \varepsilon \Rightarrow [a_k, b_k] \subset B_\varepsilon(c) \subset G_{\lambda_0}$!!! (с выбором $[a_k, b_k]$). $\square$

Следствие. Если F – замкнутое ограниченное множество и $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ – открытое покрытие F, то $\exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \Lambda(F \subset G_{\lambda_1} \cup G_{\lambda_2} \cup ... \cup G_{\lambda_n})$ (найдется такое конечное множество λ).

Доказательство. Пусть F – замкнутое ограниченное множество, $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ – открытое покрытие F.
Так как F – ограниченное, то $\exists [a, b] \supset F$.
$\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \cup \{\mathbb{R} \setminus F\}$ – открытое покрытие $[a, b]$, так как $\cup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \cup (\mathbb{R} \setminus F) = \mathbb{R}$.
По теореме 2 $\exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \Lambda\ (F \subset [a, b] \subset G_{\lambda_1} \cup G_{\lambda_2} \cup ... \cup G_{\lambda_n} \cup (\mathbb{R} \setminus F))$. Следовательно, $F \subset G_{\lambda_1} \cup G_{\lambda_2} \cup ... \cup G_{\lambda_n}$.

$\square$

Определение 3.7. Пусть $\varepsilon > 0$.
$B_\varepsilon(+\infty) = (\frac{1}{\varepsilon}, +\infty) \cup \{\infty\}$ – ε – окрестность $+\infty$
$\mathring{B}_\varepsilon(+\infty) = (\frac{1}{\varepsilon}, +\infty)$ – проколотая ε – окрестность $+\infty$
$B_\varepsilon(-\infty) = \{-\infty\} \cup (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$ – ε – окрестность $-\infty$
$\mathring{B}_\varepsilon(-\infty) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$ – проколотая ε - окрестность $-\infty$

Поскольку все понятия этого параграфа вводились через окрестности, то определения без изменения переносятся на множество $\bar{\mathbb{R}}$. В частности, $+\infty(-\infty)$ – предельная точка $E \subset \bar{\mathbb{R}} \iff E \setminus \{\pm\infty\}$ – неограничено сверху(снизу) в $\mathbb{R}$.

В терминах окрестности можно дать общее определение предела числовой последовательности.

Определение 3.8. Точка $a \in \bar{\mathbb{R}}$ называется пределом последовательности $\{a_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N\ (a_n \in B_\varepsilon(a))$

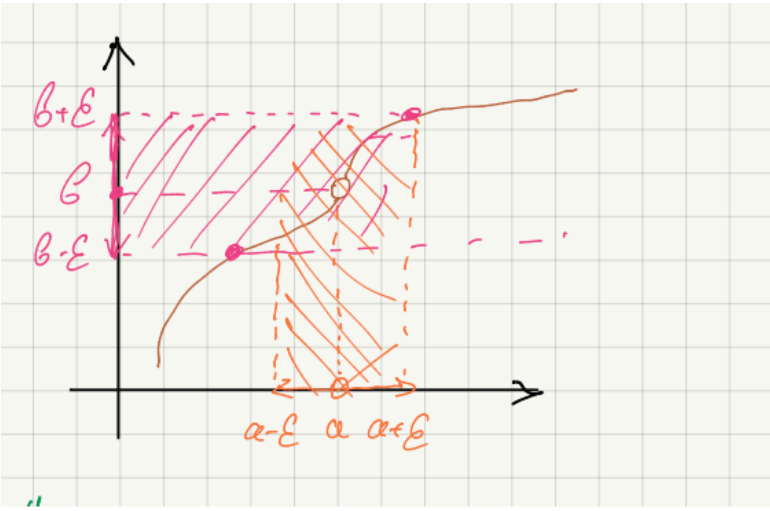
4 Непрерывные функции. Предел функции в точке.

Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $a,b \in \overline{\mathbb{R}}, f : E \longrightarrow \mathbb{R}$

Определение 4.1. *Коши.* Точка b называется пределом функции f в точке a, если a – предельная точка множества E и

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in E \ (x \in \overset{o}{B}_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b))$$

Пишут: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ или $f(x) \to b$ при $x \to a$.



Замечание. Если $E = \mathbb{N}$, $a = +\infty$, то получим $\lim\{a_n\}$ $(n_0 = [\frac{1}{\delta}] + 1)$.

Определение 4.2. *Гейне.* Точка b называется пределом функции f в точке a, если a – предельная точка E и выпонено следующее:

$$\forall \{x_n\} \subset E \setminus \{a\} \ (\{x_n\} \to a \Rightarrow f(x_n) \to b)$$

Пишут: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ или $f(x) \to b$ при $x \to a$.

Замечание. Так как a – предельная точка множества E, то $\forall \delta > 0 \ \overset{o}{B}_\varepsilon(a) \cap E \neq \varnothing$ и $\exists \{x_n\} \subset E \setminus \{a\}$: $x_n \to a$.

Теорема 4.1. *Определения пределов по Коши и по Гейне равносильны.*

Доказательство. Пусть $f : E \longrightarrow R$, a – предельная точка множества E.
$\Rightarrow$ Пусть $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ по Коши. Рассмотрим произвольную $\{x_n\} \subset E \setminus \{a\}$, $x_n \to a$. Докажем, что $f(x_n) \to b$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению предела $\exists \delta > 0 \ \forall x \in E \ (x \in \overset{o}{B}_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b))$. Т.к. $x_n \to a$, то $\exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant N \ (x_n \in B_\delta(a))$. По условию $x_n \in E \setminus \{a\}$ и, значит, $\forall n \geqslant N \ (x_n \in \overset{o}{B}_\delta(a) \cap E)$. Тогда $\forall n \geqslant N : f(x_n) \in B_\varepsilon(b) \Rightarrow f(x_n) \to b$. Определение предела по Гейне выполняется.

$\Leftarrow$ Пусть b – предел f в точке a по Гейне. Покажем, что b – предел функции по Коши. Пусть так, и предположим, что b не является пределом f в точке a по Коши. Тогда

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta\ \exists x \in E(x \in \overset{o}{B}_\delta(a) \text{ и } f(x) \notin B_\varepsilon(b))$$

Положим $\delta = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ и соответствующее значение x обозначим x_n. По построению $\{x_n\} \subset E \setminus \{a\}$ и $x_n \to a$ (т.к. $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(a)$). По определению предела по Гейне $f(x_n) \to b$, значит $\exists N \in \mathbb{N}(f(x_n) \in B_\varepsilon(b))$. Противоречие по построению (все $f(x_n) \notin B_\varepsilon(b)$). $\square$

Замечание. Распишем определение предела по Коши в частном случае, когда a, b – числа, на языке неравенств.

$$b = \lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow a \text{ – предельная точка } f$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - b| < \varepsilon)$$

4.1 Свойства предела функции.

Пусть $f,g,h : E \longrightarrow \mathbb{R}$, a – предельная точка множества E.

Определение 4.3. $f : X \longrightarrow Y$, $A \subset X$. Сужением f на множестве A называется

$$f|_A : A \longrightarrow Y, (f|_A)(x) = f(x)\ \forall x \in A$$

1. (о единственности) Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$, то $b = c$

   Доказательство. Рассмотрим произвольную $\{x_n\} \subset E\setminus\{a\}$, $x_n \to a$. По определению Гейне:
   $$f(x_n) \to b \text{ и } f(x_n) \to c$$
   В силу единственности предела последовательности $b = c$. $\square$

2. (о пределе по подмножеству) Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и a – предельная точка множества $D \subset E$, то $\lim\limits_{x\to a} f|_D(x) = b$.

   Доказательство. Рассмотрим $\{x_n\} \subset D \setminus \{a\}$, $x_n \to a$. Тогда
   $$f|_D(x_n) = f(x_n) \to b$$
   По определению Гейне, $b = \lim\limits_{x\to a} f|_D(x)$. $\square$

3. (о зажатой функции) Пусть $\exists \sigma > 0\ \forall x \in \overset{o}{B}_\delta(a) \cap E\ (f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x))$. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$. Тогда $\exists \lim\limits_{x\to a} h(x) = b$.

   Доказательство. Рассмотрим $x_n \subset E\setminus\{a\}$, $x_n \to a$. Тогда $\exists n_0\ \forall n \geqslant n_0(x_n \in \overset{o}{B}_\delta(a) \cap E)$ и, значит, $f(x_n) \leqslant h(x_n) \leqslant g(x_n)$. По условию $f(x_n) \to b$, $g(x_n) \to b$. Тогда, по свойству предела последовательности, $h(x_n) \to b \Rightarrow b = \lim\limits_{x\to a} h(x)$. $\square$

4. (арифметические опреации с пределами) Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$. Тогда справедливы следующие утверждения:
   1. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = b \pm c$.
   2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c$.
   3. Если $c \neq 0$ и $g(x) \neq 0$ $\forall x \in E$, то $\lim\limits_{x\to a}(\dfrac{f(x)}{g(x)}) = \dfrac{b}{c}$.

   Заключение следует понимать так: если существует величина справа, то существует величина слева и они равны.

   Доказательство. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\} \in E$ с условиями $x_n \to a$ и $x_n \neq a$. Тогда $f(x_n) \to b$ и $g(x_n) \to c$. По свойствам предела последовательности $f(x_n) \pm g(x_n) \to b \pm c$, $f(x_n) \cdot g(x_n) \to b \cdot c$, $\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \dfrac{b}{c}$. Осталось воспользоваться определением предела по Гейне. □

5. (о локализации) Если $\exists \sigma > 0$ $\forall x \in \overset{o}{B}_\sigma(a) \cap E$ $(f(x) = g(x))$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, то $\exists \lim\limits_{x\to a} g(x) = b$.

   Доказательство. Если в определении Коши предел f для $\varepsilon > 0$ подходит $\delta > 0$, то в поределении Коши предел g подходит $\delta' = min\{\delta, \sigma\}$. □

6. (о локализации ограниченности) Если $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R}$, то $\exists C > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall x \in \overset{o}{B}_\delta(a) \cap E$ $(|f(x)| \leqslant C)$.

   Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Тогда $\exists \delta > 0$ $\forall x \in \overset{o}{B}_\delta(a) \cap E$ $(b-1 < f(x) < b+1)$. Положим $c = |b| + 1$. Тогда $|f(x)| < c$. □

7. (О пределе композиции.) Пусть $E, D \subset \mathbb{R}$ и $f : E \longrightarrow D$ и $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$, такие что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{y\to b} g(y) = c$. Пусть выполнено одно из двух условий:
   1) $f(x) \neq b$ в некоторой проколотой окрестности множества a или
   2) $g(b) = c$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = c = \lim\limits_{y\to b} g(y)$.

   Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению предела

   $$\exists \sigma > 0\ \forall y \in \overset{o}{B}_\sigma(b) \cap D\ (g(y) \in B_\varepsilon(c))$$

   $$\exists \delta > 0\ \forall y \in \overset{o}{B}_\delta(a) \cap E\ (f(x) \in B_\sigma(b))$$

   1) Уменьшая δ, если необходимо, можно считать, что $f(x) \neq b$ на $\overset{o}{B}_\delta(a) \cap E$. Тогда $f(x) \in \overset{o}{B}_\sigma(b) \cap D$. Поэтому $g(f(x)) \in B_\varepsilon(c) \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = c$.

   2) Если $f(x) = b$ для некоторого $x \in B_\delta(a)$, то $g(f(x)) = c \in B_\varepsilon(c)$. Поэтому $\forall x \in B_\delta(a) \cap E$ $(g(f(x)) \in B_\varepsilon(c)) \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = c$. □

5 Дифференцируемые функции

Всюду в этом разделе $I \subset \mathbb{R}$ – невырожденный промежуток числовой прямой.

Определение 5.1. Пусть $f : I \longrightarrow \mathbb{R},\ a \in I$. *Производной* функции f в точке a называется следующий предел:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Обозначается $f'(a),\ \dfrac{df(a)}{dx}$.
Если указанный предел конечен, то говорят, что функция f *дифференцируема* в точке a.

Выражение $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ называется *разностным отношением.*

Пример. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = kx + b,\ \forall a \in \mathbb{R}$.

$$f' = \lim_{x \to a} \frac{k(x-a)}{x-a} = k$$

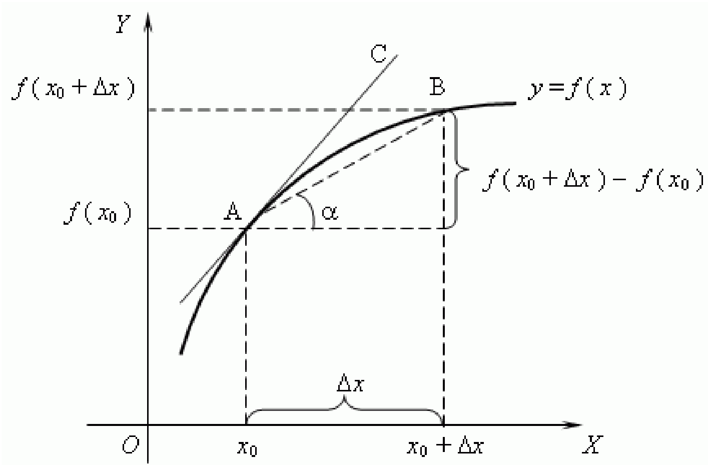
5.1 Геометрический смысл производной.

Пусть функция f дифференцируема в точке a.

$$l_{\text{секущая}} : y = f(a) + \frac{f(t) - f(a)}{t - a}(x - a)$$

$$l_{\text{касательная}} : y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$$k_{\text{секущая}} = \frac{f(t) - f(a)}{t - a} \Rightarrow k_{\text{касательная}} = f'(a)$$



Замечание. Угловой коэффициент секущей стремится к угловому коэффициенту касательной.

Теорема 5.1. *О линейной аппроксимации*
Пусть $f : I \longrightarrow \mathbb{R},\ \ a \in I$. Функция f дифференцируема в точке $a \Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = f(a) + A(x - a) + o(x - a),\ \ x \longrightarrow a,$$

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть f дифференцируема в a. Определим функцию $\alpha : I \to R$, $\alpha(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)$ при $x \neq a$, и $\alpha(a)$ производная. Тогда $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$ и $f(x)-f(a) = f'(a)(x-a)+\alpha(x)(x-a)$. Следовательно, выполнимо условие.
$\Leftarrow$ Из условия следует, что $A+o(1) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Переходя к пределу при $x \to a$, получаем $\exists\ f'(a) = A$, т.е. f дифференцируема в точке a. $\square$

Следствие. Если f дифференцируема в точке a, то f непрерывна в a.

Замечание. Обратное утверждение к следствию неверно.
Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, непрерывна, но не дифференцируема в точке 0, так как

$$\lim_{x\to\pm 0} \frac{f(x)-f(a)}{x-0} = \lim_{x\to\pm 0} \frac{|x|}{x} = \pm 1.$$

Рассмотрение односторонних пределов приводит к следующему обобщению пределов.

Определение 5.2. Пусть $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$.
$f'_+(a) = \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ называется *правой производной* f в точке a.
$f'_-(a) = \lim\limits_{x\to a-0} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ называется *левой производной* f в точке a.

Замечание. Если a – внутренняя точка I, то $\exists\ f'(a) \Leftrightarrow f'_+(a) = f'_-(a)$. В этом случае все три предела равны.
Если a – концевая точка I, то $f'(a)$ существует одновременно с соответствующей односторонней производной.

Теорема 5.2. *Пусть $f, g : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Если f и g дифференцируемы в точке a, то в этой точке дифференцируемы $\alpha f + \beta g$, $f \cdot g$ и при условии $g \neq 0$ на I также $\dfrac{f}{g}$. При этом*

1. $(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$
2. $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
3. $(\dfrac{f}{g})(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$

Доказательство. 1. Следует из свойств линейности предела.

2.
$$(f\cdot g)(x) - (f\cdot g)(a) = g(a)(f(x)-f(a)) + f(x)(g(x)-g(a))$$
$$\lim_{x\to a} \frac{(f\cdot g)(x) - (f\cdot g)(a)}{x-a} = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$
– непрерывна в точке a.

3. Переходя к пределу при $x \to a$, получим

$$\frac{(\frac{1}{g})(x) - (\frac{1}{g})(a)}{x-a} = \frac{1}{g(a)\cdot g(x)} \cdot \frac{g(a)-g(x)}{x-a},$$

получим, что $g(x)$ дифференцируема в точке a.

$\square$

Теорема 5.3. *Производная композиции*
Пусть I, J – промежутки, $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$. Если f дифференцируема в точке $a \in I$ и g дифференцируема в точке $b = f(a)$, то композиция $g_o f : I \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке a, причем

$$(g_o f)'(a) = g'(b) \cdot f'(a)$$

Доказательство. Определим функцию $h : J \to \mathbb{R}$,

$$h(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(b)}{y - b}, & y \neq b \\ g'(b), & y = b. \end{cases}$$

Тогда h непрерывна в точке b. Покажем, что $\forall x \in I$, $x \neq a$, выполнено

$$\frac{(g_o f)(x) - (g_o f)(a)}{x - a} = h(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Если $f(x) = f(a)$, то $0 = 0$. Если $f(x) \neq f(a)$, то равенство следует из того, что

$$\frac{(g_o f)(x) - (g_o f)(a)}{x - a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a)))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Перейдем к пределу

$$\lim_{x \to a} \frac{(g_o f)(x) - (g_o f)(a)}{x - a} = g'(b) \cdot f'(a).$$

(т.к. h непрерывна в точке b, то по свойству предела композиции $\lim\limits_{x \to a} h(f(x)) = h(b) = g'(b)$)

$\square$

Теорема 5.4. *Производная обратной функции*
Пусть $f : I \to \mathbb{R}$ непрерывна и монотонна на промежутке I. Если f дифференцируема в точке $a \in I$ и $f'(a) \neq 0$, то обратная функция $f^{-1} : f(I) \to I$ дифференцируема в точке $b = f(a)$, причем

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

Доказательство. По теореме об обратной функции на $J = f(I)$ определена функция f^{-1}, которая на J непрерывна и строго монотонна. Следовательно, $f^{-1}(t) \to a$ при $t \to b$, $f^{-1}(t) \neq a$ при $t \neq b$

$$\lim_{t \to b} \frac{f^{-1}(t) - f^{-1}(b)}{t - b} = \lim_{x \to a} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(a))}{f(x) - f(a)} =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}$$

$\square$

5.2 Таблица производных.

1. $c' = 0$
2. $(a^x)' = a^x \ln(a)$, при $a > 0, a \neq 1$
3. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln(a)}$, при $a > 0, a \neq 1$
4. $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, при $\alpha \in \mathbb{R}$
5. $(\sin x)' = \cos x$
6. $(\cos x)' = -\sin x$
7. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
9. $(\arcsin x)' = -(\arccos x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, при $x \in (-1, 1)$
10. $(\operatorname{arctg} x)' = -(\operatorname{arcctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Доказательство. 1. По определению.

2. По второму замечательному пределу $(e^x)' = \lim\limits_{t\to x} \dfrac{e^t - e^x}{t-x} = e^x \cdot \lim\limits_{t\to x} \dfrac{e^{t-x}-1}{t-x} = e^x$.
   $(a^x)' = (e^{x\ln(a)})' = e^{x\ln(a)} \cdot (x \cdot \ln(a))' = a^x \ln(a)$.
3. $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$, по теореме о производной обратной функции получим: $(\log_a x)' = \dfrac{1}{(a^y)'} = \dfrac{1}{a^y \ln(a)}$.
4. $\alpha \in \mathbb{Z}$ $\;(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ – по определению.
   $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ $\;(x^\alpha)' = (e^{\alpha\ln(x)})' = e^{\alpha\ln(x)}\dfrac{\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$.
5. $(\sin x)' = \lim\limits_{t\to x} \dfrac{\sin t - \sin x}{t-x} = \lim\limits_{t\to x} \dfrac{\sin\frac{t-x}{2}\cos\frac{t+x}{2}}{\frac{t-x}{2}} = \cos x$.
6. $(\cos x)' = (-1) \cdot \cos(\dfrac{\pi}{2} - x) = -\sin x$.
7. $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\; k \in \mathbb{Z}$
   $(\operatorname{tg} x)' = (\dfrac{\sin x}{\cos x})' = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
8. Аналогично пункту (7).

9. $y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y \quad y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$
   $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{(\sin y)'} = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

10. Аналогично пункту (9).

$\square$

Определение 5.3. Говорят, что функция f дифференцируема на множестве D, если f дифференцируема в каждой точке D. Функция $x \mapsto f'(x), \;\; x \in D$, называется *производной* f и обозначается f'.

Следствие. Всякая элементарная функция дифференцируема во внутренних точках своей области определения, причем производная – тоже элементарная функция.

Определение 5.4. Пусть $\varphi, \psi : T \to \mathbb{R}$, $\varphi(T) = E$. Говорят, что функция $f : E \to \mathbb{R}$ параметрически задана системой

$$\begin{cases} x = \varphi(t), & t \in T \\ y = \psi(t), & t \in T, \end{cases}$$

если $\forall t_1, t_2 \in T$ $(\varphi(t_1) = \varphi(t_2) \Rightarrow \psi(t_1) = \psi(t_2))$ и $f(x) = \psi(t)$, где $x = \varphi(t)$. Импликация верна, если функция φ обратима, при этом $f(x) = (\psi_o \varphi^{-1})(x)$.

Следствие. Пусть φ непрерывна и строго монотонна на промежутке T. Если функции φ и ψ дифференцируемы в точке t и $\varphi'(t) \neq 0$, то параметрически заданная функция $f = \psi_o \varphi^{-1}$ дифференцируема в точке $x = \varphi(t)$, причем

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

Доказательство. По правилам дифференцирования композиции и обратной функции имеем:

$$f'(x) = (\psi_o \varphi^{-1})'(x) = \psi'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1})'(x) =$$
$$= \psi'(\varphi^{-1}(x)) \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

$\square$

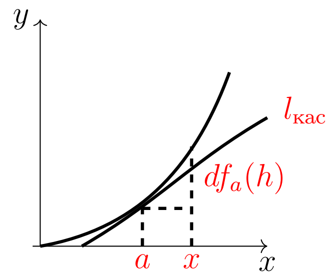
5.3 Дифференциал функции

Определение 5.5. Пусть $f : I \to \mathbb{R}$, I – промежуток, дифференцируема в точке a. Линейная функция $h \mapsto f'(a)h$, $h \in \mathbb{R}$, называется *дифференциалом* функции f в точке a и обозначается df_a.

Для функции $x \mapsto x$ функция $dx(h) = 1 \cdot h$ в любой точке. Следовательно, $df_a(h) = f'(a)dx(h)$. Или в функцианальной записи: $df_a = f'(a)dx$.

Замечание. Формулу из Теоремы 1.1 можно переписать

$$f(x) = f(a) + df_a(x-a) + o(x-a), x \to a$$



Следствие. В условиях Теоремы 1.2:

$$d(\alpha f+\beta g)_a=\alpha df_a+\beta dg_a$$

$$d(f\cdot g)_a=g(a)df_a+f(a)dg_a$$

$$d(\frac{f}{g})_a=\frac{g(a)df_a-f(a)dg_a}{g^2(a)}$$

Следствие. В условиях Теоремы 1.3:

$$d(g_o f)_a=(dg_b)_o(df_a)$$

Доказательство.

$$d(g_o f)_a(h)=g'(f(a))\cdot f'(a)dx(h)=g'(b)df_a(h)=dg_b(df_a(h))\ \ \forall h\in\mathbb{R}$$

□

Замечание. Инвариантность дифференциала.
Из доказательства следует, что формула

$$df_x=f'(x)dx$$

верна и в случае, когда x – независимая переменная, и в случае, когда $x=x(t)$.

Следствие. В условиях Теоремы 1.4 для обратной функции f^{-1}:

$$d(f^{-1})_b=(df_a)^{-1}$$

Доказательство. $h\mapsto\dfrac{1}{f'(a)}h$ является обратной к функции $h\to f'(a)h$. □

5.4 Теоремы о среднем.

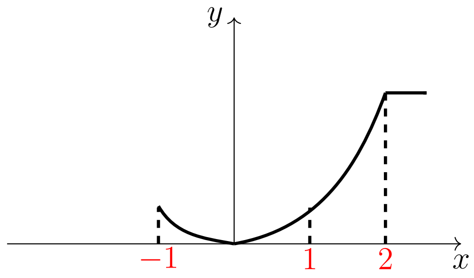
Определение 5.6. Пусть f определена на интервале, содержащем точку a.
Точка a называется *точкой локального максимума (строгого)*, если

$$\exists\delta>0\ \ \forall x\in\overset{\circ}{B}_\delta(a)\ (f(x)\underset{(<)}{\leqslant}f(a))$$

Аналогично определяются *точки локального минимума (строгого)*.

Точки локального максимума или минимума называются *точками локального экстремума*.

Пример.



Следующая теорема дает необходимое условие точки экстремума.

Теорема 5.5. *Ферма*
Пусть f определена на интервале содержащем точку a.
Если a – точка локального экстремума f и $\exists f'(a)$, то $f'(a) = 0$.

Доказательство. Пусть для определенности a – точка локального максимума. По определению:

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathring{B}_\delta(a) (f(x) \leqslant f(a)$$

Тогда $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant 0$ на $(a, a + \delta) \Rightarrow f'(a) = f'_+(a) = \lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant 0 \Rightarrow f'(a) \leqslant 0$.
$\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0$ на $(a - \delta, a) \Rightarrow f'(a) = f'_-(a) = \lim\limits_{x \to a-0} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0 \Rightarrow f'(a) \geqslant 0$.
$\Rightarrow f'(a) = 0$ □

Замечание. Геометрический смысл.
Если в точке экстремума существует касательная, то она горизонтальна.

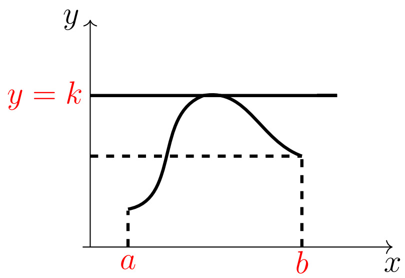
Теорема 5.6. *Ролль.*

1. *f – непрерывна на $[a,b]$;*
2. *f – дифференцируема на (a,b);*
3. *$f(a) = f(b)$;*

$\Rightarrow \exists c \in (a,b) \ (f'(c) = 0)$.

Доказательство. По теореме Вейерштрасса $\exists x_1, x_2 \in [a,b] \ (f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)) \ \ \forall x \in [a,b]$. Если $x_1, x_2 \in \{a,b\}$ (концевые точки), то $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f$ постоянна на $[a,b]$. В качестве c можно взять любую точку из (a,b).
Если $x_1, x_2 \notin \{a,b\}$, то $\exists x_i \in (a,b)$. Тогда по теореме Ферма $f'(x_i) = 0$ и $c = x_i$. □

Замечание. Геометрический смысл.



Следствие. Если f дифференцируема на промежутке I, то между любыми двумя нулями f существует хотя бы один нуль производной.

Теорема 5.7. *Лагранж.*

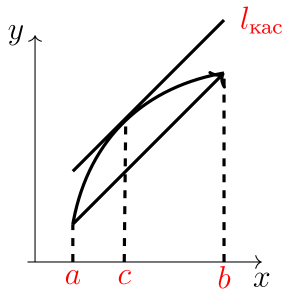
1. *f – непрерывна на $[a,b]$;*
2. *f – дифференцируема на (a,b);*

$\Rightarrow \exists c \in (a,b)\ (f(b) - f(a) = f'(c)(b-a))$

Доказательство. Рассмотрим $h(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)$. Тогда h – непрерывна на $[a,b]$, h – дифференцируема на (a,b) и $h(a) = 0 = h(b)$.

Следовательно, по теореме Ролля, $\exists c \in (a,b)\ h'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$. □

Замечание. Геометрический смысл.
$f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



Найдется точка c в которой касательная параллельна хорде.

Задача.
Пусть

1. *f - непрерывна на $[a,b)$*
2. *f - дифференцируема на (a,b)*
3. *$\exists\ f'(a+0)$*

Тогда $f'_+(a) = f'(a+0)$.

Следствие. Оценка приращения функции.
Пусть f – непрерывна на промежутке I и дифференцируема на $int(I)$.
Если $f'(x)$ ограничена на $int(I)$, т.е. $\exists c > 0\ \forall x \in int(I)\ (|f'(x)| < c)$, то

$$\forall x,y \in I\ (|f(y) - f(x)| \leqslant c|y-x|)$$

(т.е. f – липшицева). В частности, f раномерно непрерывна на I.

Доказательство. Пусть $x,y \in I$ $(x \neq y)$. Тогда по теореме Лагранжа $f(y) - f(x) = f'(c)(y-x)$ для некоторой $c \in (x,y)$. Так как $c \in int(I)$, то $|f'(c)| \leqslant C$ и, значит, $|f(y) - f(x)| \leqslant c|y-x|$. □

Теорема 5.8. *Коши.*

1. *f, g – непрерывны на $[a,b]$;*
2. *f, g – дифференцируемы на (a,b);*
3. *$g \neq 0$ на (a,b);*

$\Rightarrow \exists c \in (a,b)$ $(\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)})$.

Доказательство. Отметим, что $g(b) \neq g(a)$, иначе, по теореме Ролля, $\exists \psi \in (a,b)$ $(g(\psi) = 0)$. Рассмотрим $h(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a)$. Тогда h – непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b) и $h(a) = h(b) = f(a)$. По теореме Ролля:

$$\exists c \in (a,b)\ h'(c) = 0 \ \Leftrightarrow\ f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c) = 0.$$

Так как $g'(c) \neq 0$, то $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$. □

Замечание. Геометрический смысл.
Геометрический смысл теоремы Коши такой же, как и для теоремы Лагранжа, применённой к параметрически заданной функции: $\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \end{cases}$ $t \in [a,b]$. Поскольку в теореме Ферма предполагается лишь существование производной, то T6, T7, T8 остаются справедливы при замене дифференцируемости функций на существование производных в $\overline{\mathbb{R}}$.

Замечание. Производная не может иметь разрывов I рода.
При помощи теоремы Лагранжа можно доказать, что если функция дифференцируема на $(c, c+\delta)$, где $\delta > 0$, то

$$f'_+(c) = \lim_{x \to c+0} f'(x)$$

На это равенство и была дана эта задача. Для прочей ясности приведу план решения этой задачи: Так как функция дифференцируема на $(c, c+\delta)$, то она и непрерывна на $(c, c+\delta)$. Зафиксируем любое x из интервала $(c, c+\delta)$, тогда по теореме Лагранжа $\exists\ \theta$, такое что

$$f'(\theta) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

Теперь перейдем к пределу в равенстве $x \to c+0$, тогда $\theta \to c+0$ (то есть левая часть равна $f'(c+0)$), а предел правой не что иное, как $f'_+(c)$, получаем требуемое равенство.
Фрагмент выше не является частью конспекта лекции и создан лишь для прояснения замечания ниже.

Так как $f'_-(a) = f'(a) = f'_+(a)$ и из задачи $f'(a-0) = f'_-(a)$, $f'_+(a) = f'(a+0)$, то $f'(a-0) = f'_-(a) = f'(a) = f'_+(a) = f'(a+0) \Rightarrow f'(a-0) = f'(a+0) = f'(a)$, то есть разрыва I рода быть не может.

Пример. Разрыв II рода может существовать.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, \quad x = 0 \end{cases}$$

$x \neq 0 : f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$
$x = 0 : f'(0) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$
f' определена везде, но $\nexists f'(\pm 0)$.

Теорема 5.9. *(Дарбу)*
Если f дифференцируема на $[a, b]$ и число s лежит между $f'(a)$ и $f'(b)$, то найдется точка $c \in [a, b]$, такая что $f'(c) = s$.

Доказательство. Если s совпадает с $f'(a)$ или $f'(b)$, то условие очевидно. Пусть для определенности $f'(a) < s < f'(b)$. Рассмотрим $\varphi(x) = f(x) - s \cdot x$, тогда φ дифференцируема на $[a, b]$ и $\varphi'(a) = f'(a) - s < 0 < f'(b) - s = \varphi'(b)$. По теореме Вейерштрасса $\exists c \in [a, b] : \varphi(c) = inf_{[a,b]}\varphi(x)$. Если $c = a$, то $\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} \geqslant 0$ на $[a, b] \Rightarrow \varphi'(a) = \varphi'_+(a) = \lim_{x \to a+0} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} \geqslant 0$!!! (пришли к противоречию с $\varphi'(a) < 0$). Следовательно, $c! = a$. Аналогично, $c! = b$. Поэтому $c \in (a, b)$ по теореме Ферма $\varphi'(c) = 0 \iff f'(c) = s$. □

5.5 Приложение теорем о среднем

Среди многочисленных приложений теоремы Лагранжа выделяют следующие:

Теорема 5.10. *(условие монотонности)*
Пусть f непрерывна на промежутке I и дифференцируема на $int(I)$, тогда

1. *Функция нестрого возрастает (убывает) на $I \iff f'(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in int(I)$.*
2. *Если $f'(x) > 0 \quad \forall x \in int(I)$, то $f(x)$ строго возрастает на I.*
3. *f постоянна на $I \iff f'(x) = 0 \quad \forall x \in int(I)$.*

Доказательство.
(1.$\Rightarrow$) Пусть f нестрого возрастает на I, $x \in int(I)$. Тогда $f(y) \geqslant f(x) \quad \forall y \in (x, supI)$, и значит, $f'(x) = \lim_{y \to x+0} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geqslant 0$.
(1.$\Leftarrow$) Пусть $X, Y \in I$, x < y. Тогда по теореме Лагранжа $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$ для некоторой точки $c \in (x, y)$. Так как $c \in int(I)$, то $f'(c) \geqslant 0$, и значит, $f(y) \geqslant f(x)$, то есть f нестрого возрастает на I. Доказательство для нестрого убывающей аналогично или может быть сведено к рассмотрению замены f на $-f$.
(2) Если $f'(x) > 0 \quad \forall x \in int(I)$, то $f(y) > f(x)$ и f строго возрастает на I.
(3) Пункт вытекает из пункта (1).
Обратное утверждение пункта (2) неверно. $f(x) = x^3$ строго возрастает на $\mathbb{R}$, но $f'(0) = 0$. □

Следствие. (достаточность условия)
Пусть f определена на (α, β) и $a \in (\alpha, \beta)$. Пусть f дифференцируема на $(\alpha, \beta) \setminus \{a\}$ и непрерывна в точке a.

1. Если $f' \geqslant 0$ на (α, a) и $f' \leqslant 0$ на (a, β), то a - точка локального максимума функции f. (строгого, если неравенство строгое).

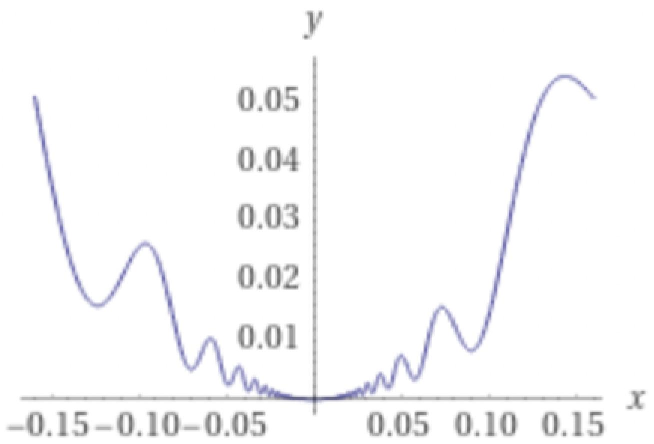
2. Если $f' \leqslant 0$ на (α, a) и $f' \geqslant 0$ на (a, β), то a - точка локального минимума функции f. (строгого, если неравенство строгое).

Доказательство. По теореме об условии монотонности f нестроого возрастает на (α, a) и нестрого убывает на (a, β). Следовательно, $f(x) \leqslant f(a) \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$, то есть a - точка локального максимума. Если неравенства строгие, то возрастаение (убывание) строгое, и значит, $f(x) < f(a) \quad \forall x \in (\alpha, \beta) \setminus \{a\}$. □

Замечание. Функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2(2 + \sin \dfrac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, \quad x = 0 \end{cases}$$

имеет строгие минимум, однако не удовлетворяет предыдущему следствию.



Следствие. (о доказательстве в неравенстве)
Пусть f, g непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b), $f(a) \leqslant g(a)$ и $f'(x) \leqslant g'(x)$ $\forall x \in (a, b)$. Тогда $f(x) \leqslant g(x)$ $\forall x \in (a, b)$.
Пусть f, g непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b), $f(a) < g(a)$ и $f'(x) < g'(x)$ $\forall x \in (a, b)$. Тогда $f(x) < g(x)$ $\forall x \in (a, b)$.

Доказательство. $h(x) = f(x) - g(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b), $h(a) \geqslant 0$, $h'(x) \underset{(<)}{\leqslant} 0$ $\forall x \in (a, b)$. По теореме об условии монотонности h нестрого (строго) возрастает на $[a, b]$. Поэтому $h(x) \underset{(>)}{\geqslant} h(a) \underset{(>)}{\geqslant} 0$ $\forall x \in (a, b)$. □

Пример.

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x \ \forall x > 0$$

Правая часть:
а) при $x > 1$ очевидно
б) $0 < x \leqslant 1$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = x \Rightarrow f'(x) = \cos x < 1 = g'(x)$
Левая часть:
$1 - \dfrac{x^2}{2} < \cos x$
Еще раз дифференцируем: $-x < -\sin x$

Задача. *Если f непрерывна на $[a, b]$, A - не более, чем счетное множество в $[a, b]$. Если f дифференцируема на $[a, b] \setminus A$ и $f' > 0$ на $[a, b] \setminus A$, то f монотонно возрастает на $[a, b]$.*

Важным приложением теоремы Коши о среднем является правило Лопиталя о раскрытии неопределенности.

Теорема 5.11. *(о неопределенности $\frac{0}{0}$)*
Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. Если

1. *f, g дифференцируемы на (a, b).*
2. $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} g(x) = 0$
3. *$g'(x) \neq 0$ на (a, b)*
4. $\exists \lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$

Тогда $\exists \lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство. Доопределим функции f, g в точке a, положив $f(a) = g(a) = 0$, тогда доопределенные функции будут непрервны на $[a, b)$ и по теореме Коши о среднем для каждого $x \in (a, b)$ существует $c \in (a, x)$ $(c(x))$, такое что

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Так как $c(x) \to a$ при $x \to a + 0$, $c(x) \neq a$, то по свойству предела композиции

$$\exists \lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to a+0} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

□

Теорема 5.12. *(о неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$)*
Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. Если

1. *f, g дифференцируемы на (a, b).*
2. $\lim\limits_{x \to a+0} g(x) = \pm\infty$
3. *$g'(x) \neq 0$ на (a, b)*
4. $\exists \lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$

Тогда $\exists \lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство.
I) A = 0
Рассмотрим произвольную $\{x_n\} \subset (a,b),\ x_n \to a$. Покажем, что $\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} \to 0$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По условию $\exists y \in (a,b)\ :\ \ \forall c \in (a,y)\ (g(c) \neq 0$ и $|\dfrac{f'(c)}{g'(c)}| < \varepsilon)$. Без ограничения общности можно счиать, что все $x_n \in (a,y)$. Тогда по теореме Коши о среднем $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists c_n \in (a, x_n)$

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(y)}{g(x_n) - g(y)} \cdot \frac{g(x_n) - g(y)}{g(x_n)} + \frac{f(y)}{g(x_n)} =$$

$$= \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}(1 - \frac{g(y)}{g(x_n)}) + \frac{f(y)}{g(x_n)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\frac{f(x_n)}{g(x_n)}| \leqslant \varepsilon(1 + |\frac{g(y)}{g(x_n)}| + |\frac{f(y)}{g(x_n)}| \to \varepsilon\ (\textit{due to } g(x_n) \to \infty)$$

Следовательно, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}| \leqslant \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ - любое, то $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}| = 0$, тогда $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}|\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}| \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}| = 0$, и значит, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = 0$.
II) Пусть $A \in \mathbb{R}$ - произвольное число. Рассмотрим $h = f - Ag$. Тогда

$$\lim_{x\to a+0} \frac{h'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a+0}(\frac{f'(x)}{g'(x)} - A) = 0$$

Поэтому по пункту (I) $\exists \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{h(x)}{g(x)} = 0$, то есть $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.
III) $A = +\infty$. Аналогично пункту I зафиксируем $M > 0$, что $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} > M$. Тогда

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}(1 - \frac{g(y)}{g(x_n)}) + \frac{f(y)}{g(x_n)}$$

Пусть $(1 - \dfrac{g(y)}{g(x_n)}) > 0$ при $n \geqslant n_0$.

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \geqslant M(1 - \frac{g(y)}{g(x_n)}) + \frac{f(y)}{g(x_n)} \to M$$

Следовательно, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}|\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}| \geqslant M$. Так как $M > 0$ - любое, то

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = +\infty$$

$\square$

Замечание. Теоремы о неопределенности $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$ справедливы также при замене $x \to a+0$ на $x \to b-0$, $x \to x_0$, $x \to \pm\infty$.

Доказательство. (для случая, $a = -\infty$)
Без ограничения общности $b < 0$. Рассмотрим на $(0, -\frac{1}{b})$ функции $\varphi(t) = f(-\frac{1}{t})$, $\psi(t) = g(-\frac{1}{t})$. Функции φ, ψ дифференцируемы на $(0, -\frac{1}{b})$ и $\psi'(t) = g'(-\frac{1}{t}) \cdot \frac{1}{t^2} \neq 0$ и по свойству предела композиции $\lim\limits_{t\to+0} \varphi(t) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{t\to+0} \psi(t) = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ и существует $\lim\limits_{t\to+0} \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Тогда по доказанному существует $\lim\limits_{t\to+0} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = \lim\limits_{t\to+0} \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$ и, значит, существует $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. □

Пример. 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \forall \alpha > 0$.
Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha = 0}$
2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$ при $\alpha > 0$ и $a > 1$.
Имеем $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{a^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x \ln a} = 0$.
Так как $\frac{x^\alpha}{a^x} = (\frac{x}{(a^{\frac{1}{\alpha}})^x})^\alpha$ и $\lim\limits_{y\to+\infty} y^\alpha = 0$, то по свойству предела композиции $\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{x}{(a^{\frac{1}{\alpha}})^x})^\alpha = 0$.
Вывод: степенная функция при $x \to +\infty$ растет быстрее логарифмической, но медленнее показательной функции.

Задача. *Покажите, что существует* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x + \sin x}{x}$*, однако его нельзя найти по правилу Лопиталя.*

5.6 Производные высших порядков

Производные высших порядков определяются индуктивно.

Определение 5.7. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Положим $f^{(1)} = f'$. Если $n > 1$, функция $f^{(n-1)}$ определена в некоторой окрестности точки a и дифференцируема в самой точке a, то функция f называется *дифференцируемой n раз* в точке a, и ее производная n-ого порядка в точке a определяется равенством $f^{(n)}(a) = (f^{(n-1)})'(a)$. Считаем также $f^{(0)} = f$.

Функция f называется n раз дифференцируемой на множестве E, если она n раз дифференцируема в каждой точке из E.

Замечание. Если $n > 1$, то существование производной n-ого порядка в точке a влечет существование производных $n-1$-ого порядка в некоторой окрестности точки a.

Ввиду линейности дифференцирования, по индукции устанавливается, что $(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}$, если $\exists f^{(n)}, g^{(n)}$. Для произведения справедлива следующая формула.

Теорема 5.13. *(формула Лейбница)*
Если f и g дифференцируемы n раз в точке x, то в точке x также дифференцируема n раз функция $f \cdot g$, причем справедлива формула:

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

Доказательство. Докажем индукцией по n. При $n = 1$ равенство известно $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Предположим, утверждение верно для n, тогда (опуская аргумент x)

$$(fg)^{(n+1)} = ((fg)^n)' =$$

$$= (\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x))' =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) =$$

$$= f^{(n+1)}g + \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x) + \sum_{k=1}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x) + fg^{(n+1)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (C_n^{k-1} + C_n^k) f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x) + f^{(n+1)}g + fg^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x)$$

Так как $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$. $\square$

Следствие. (формула Бинома)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

$u = e^a, v = e^b$, тогда $((uv)^x)^{(n)} = (uv)^x \ln^n uv = (uv)^x (lnu + lnv)^n$

с другой стороны $(u^x \cdot v^x)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (u^k \cdot \ln^k u)(v^{(n-k)} \cdot \ln^{(n-k)} v) = (uv)^x \sum_{k=0}^{n} C_n^k \ln^k u \ln^{(n-k)} v$

5.7 Формула Тейлора

Определение 5.8. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и функция f дифференцируема n раз в точке a. Тогда равенство:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + r_n(x)$$

называется *формулой Тейлора* порядка n функции f в точке a.

При этом многочлен $P_n(x) = P_{n,a,f}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ называется *многочленом Тейлора*, $r_n(x) = r_{n,a,f}(x)$ - *остаточным членом.*

Пример. Если $P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k$, то $P^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{n} \frac{k!}{(k-m)!} c_k (x-a)^{k-m}, 0 \leqslant m \leqslant n$, поэтому $P^{(m)}(a) = m! c_m$. Таким образом, $P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k$ - формула Тейлора многочлена P.

Теорема 5.14. *(остаточный член в форме Пеано)*

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и функция f дифференцируема n раз в точке a. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n), x \to a$$

то есть $r_n(x) = o((x-a)^n)$ при $x \to a$.

Доказательство. Пусть $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$, тогда $P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), 0 \leqslant k \leqslant n$. Поэтому для остаточного члена $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$ выполнено $r_n(a) = r_n'(a) = \cdots = r_n^{(n)}(a) = 0$. По правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to a} \frac{r_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{r_n'(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \cdots = \lim_{x\to a} \frac{r_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)}$$

Последний предел существует по определению n-й производной в точке a:

$$\lim_{x\to a} \frac{r_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)} = \frac{1}{n!} \lim_{x\to a} \frac{r_n^{(n-1)}(x) - r_n^{(n-1)}(a)}{(x-a)} = \frac{r_n^{(n)}(a)}{n!} = 0$$

следовательно, $r_n(x) = o((x-a)^n)$ при $x \to a$ □

Следствие. (условия экстремума)
Пусть $n \in \mathbb{N}$, функция f дифференцируема n раз в точке a и $f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$, но $f^{(n)}(a) \neq 0$. Тогда

1. если n четно и $f^{(n)}(a) < 0$ ($f^{(n)}(a) > 0$), то a является точкой строгого локального максимума (минимума) функции f.

2. если n нечетно, то a не является точкой локального экстремума функции f.

Доказательство. По предыдущей теореме

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n) =$$

$$= (\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \alpha(x)) \cdot (x-a)^n$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$. Найдется такое $\delta > 0$, что $|\alpha(x)| < |\frac{f^{(n)}(a)}{n!}|\ \forall x \in \mathring{B}_\delta(a)$, поэтому $sign(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \alpha(x)) = sign(f^{(n)}(a)) \forall x \in \mathring{B}_\delta(a)$, и значит, в $\mathring{B}_\delta(a)$ $sign(f(x) - f(a)) = sign(f^{(n)}(a)(x-a)^n)$.
Что в 1 случае дает одинаковые знаки при $x < a$ и $x > a$. И во втором - разные. □

Теорема 5.15. *О единственности разложения*
Пусть $p_1(x), p_2(x)$ – такие многочлены степени $\leqslant n$, что $f(x) - p_1(x) = o((x-a)^n)$ и $f(x) - p_2(x) = o((x-a)^n), x \to a$. Тогда $p_1(x) = p_2(x)$.

Доказательство. Положим $q(x) = p_1(x) - p_2(x)$, тогда $q(x) = o((x-a)^n)$. Покажем, что $q(x)$ – нулевой многочлен.

Пусть $q(x) = c_0 + c_1(x-a) + ... + c_n(x-a)^n$. Предположим, что $\exists c_i \neq 0$. Тогда положим $j = \min\{k : c_k \neq 0\}$. Поделим равенство на $(x-a)^j$ получим $q(x) = o((x-a)^{n-j})$. Перейдем к пределу при $x \to a$, тогда $c_j = 0$. Противоречие. $\square$

Следствие. Если функция f дифференцируема n раз в точке a и $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k + o((x-a)^n), x \to a$. Тогда $c_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}, k = 0, 1, ...$

Покажем, как полученное следствие позволяет восстановить разложение функции по разложению ее производной.

Замечание. Пусть функция f дифференцируема $n+1$ раз в точке a и $f'(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k + o((x-a)^n), x \to a$. Тогда

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1}), x \to a$$

Доказательство. Выпишем формулу Тейлора функции f: $f(x) = f(a) + \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-1)^{k+1} + o((x-a)^{n+1}), x \to a$. Из разложения f' по следствию имеем: $c_k = \dfrac{(f')^{(k)}(a)}{k!} \Leftrightarrow f^{(k+1)}(a) = c_k k!, k = 0, 1, ...$ Откуда следует представление f. $\square$

Формула Тейлора для точки $a = 0$ называется формулой Маклорена.

5.8 Основные разложения.

1) Если $f(x) = e^x$, то $f^{(k)}(0) = e^0 = 1, k \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n), x \to 0$$

2) Если $f(x) = \sin(x)$. Тогда (по индукции) $f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}n), n \in \mathbb{N}$. Поэтому $f^{(2k)}(0) = 0, f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$. Следовательно,

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}), x \to 0$$

3) Если $f(x) = \cos(x)$. Тогда (по индукции) $f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2}n), n \in \mathbb{N}$. Поэтому $f^{(2k)}(0) = (-1)^k, f^{(2k+1)}(0) = 0$. Следовательно,

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), x \to 0$$

4) Если $f(x) = (1+x)^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$, то $f^{(k)}(x) = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - k + 1)(1+x)^{\alpha - k}$.
Положим $c_{\alpha}^{0} = 1, c_{\alpha}^{k} = \dfrac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - k + 1)}{k!}$. Следовательно,

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{n} c_{\alpha}^{k} x^k + o(x^n), x \to 0$$

В частности $\dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n), x \to 0$.

5) Если $f(x) = \ln(1+x)$, то $f(0) = 0$, $f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$. Следовательно,

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n), x \to 0$$

Пример. Представьте формулой Маклорена $e^{\sin(x)}$ до $o(x^4)$.

Доказательство. Пусть P – многочлен Тейлора порядка 4 функции exp в точке $a = 0$. Делая замену $w = \sin(x)$ в пределе $\lim\limits_{w \to 0} \dfrac{e^w - P(w)}{w^4} = 0$, приходим к равенству

$$e^{\sin(x)} = 1 + \sin(x) + \frac{\sin^2(x)}{2} + \frac{\sin^3(x)}{6} + \frac{\sin^4(x)}{24} + o(\sin^4(x)), x \to 0$$

Поскольку $\sin(x)$ x, то $o(w^4) = o(x^4)$ при $x \to 0$. Далее, используя представление $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$, имеем

$$w^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$
$$w^3 = x^3 + o(x^4)$$
$$w^4 = x^4 + o(x^4)$$

После приведения подобных слагаемых, получаем требуемое представление:

$$e^{\sin(x)} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4), x \to 0$$

□

Теорема 5.16. *Остаточный член в формуле Лагранжа.*
Пусть функция f дифференцируема $n+1$ раз на (α, β) и $a \in (\alpha, \beta)$. Тогда для любой точки $x \in (\alpha, \beta)$, $x \neq a$, найдется точка c, лежащая между a и x, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

т.е. $r_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$.

Доказательство. Пусть для определенности $x > a$. Рассмотрим функции $\varphi(t) = f(t) + f'(t)(x-t) + ... + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n$, $\psi(t) = (x-t)^{n+1}$. Функции φ и ψ дифференцируемы на $[a,x]$, $\varphi'(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$ и $\psi'(t) = -(n+1)(x-t)^n$, причем $\psi' \neq 0$ на (a,x). Тогда по теореме Коши найдется такая точка $c \in (a,x)$, что

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\psi(x)-\psi(a)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)} \Leftrightarrow \frac{f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{-(x-a)^{n+1}} = \frac{\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n}{-(n+1)(x-c)^n},$$

откуда получаем, что $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)(c)}}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$. □

Замечание. Если вместо ψ взять $\psi(t) = x - t$, то получим $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-a)$ (остаточный член в форме Коши). Меняя ψ можно получать другие формы для r_n.

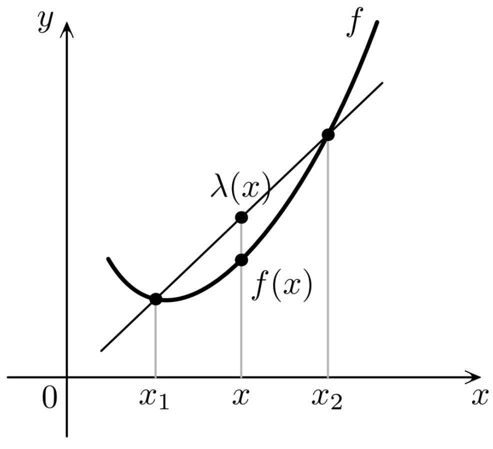
5.9 Выпуклые функции

Определение 5.9. Пусть f определена на промежутке I. Функция f называется *выпуклой* (или выпуклой вниз) на I, если для любых $x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2$ и $t \in (0,1)$ выполнено

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leqslant (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Если неравенство строгое, то говорят, что f *строго выпукла* на I. Функция f называется *вогнутой*(или выпуклой вверх) на I, если функция $(-f)$ выпукла на I. Аналогично определяется строгая вогнутость.

Замечание. Геометрический смысл.
Выпуклость означает, что график функции лежит *не выше* любой своей хорды.



Пример. 1. $f(x) = kx + b$ $(k,b \in \mathbb{R})$ – одновременно выпукла и вогнута на любом промежутке.

2. $f(x) = x^2$ на $\mathbb{R}$.
Пусть $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, тогда $((1-t)x_1 + tx_2)^2 = (1-t)^2x_1^2 + 2(1-t)tx_1x_2 + t^2x_2^2 \leqslant (1-t)^2x_1^2 + (1-t)t(x_1^2 + x_2^2) + t^2x_2 = (1-t)x_1^2 + tx_2^2$. Тогда выполнено определение выпуклости.

3. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1), \\ 1, & x = 1, \end{cases}$ Тогда $f(x)$ выпукла на $[0,1]$. Действительно, пусть $x_1, x_2 \in [0,1], x_1 < x_2$ и $t \in (0,1)$. Тогда $f((1-t)x_1 + tx_2)$ равно 0, а значение $(1-t)f(x_1)+tf(x_2)$ равно 0, если $x_2 \neq 1$, и равно t, если $x_2 = 1$.

Проверка выпуклости по определению не всегда удобна. Однако, если функция дифференцируема, то такая проверка легко описывается.

Теорема 5.17. *Пусть функция f непрерывна на промежутке I и дифференцируема на $int(I)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. *f выпукла на I;*
2. *$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ для всех $x \in I$ и $x_0 \in int(I)$;*
3. *f' возрастает на $int(I)$;*

Доказательство. $(1 \Rightarrow 2)$. Пусть $x \in I, x_0 \in int(I)$. Пусть $h = x - x_0$ и $t \in (0,1)$. По определению выпуклости $f(x_0 + th) \leqslant (1-t)f(x_0) + tf(x_0 + h)$. Это неравенство можно переписать в виде
$$f(x_0 + th) - f(x_0) \leqslant t(f(x_0 + h) - f(x_0)),$$
откуда, пользуясь дифференцируемостью f в точке x_0, имеем
$$tf'(x_0)h + o(th) \leqslant t(f(x_0 + h) - f(x_0)), t \to 0.$$
Поделим обе части на t и перейдем к пределу при $t \to 0$. Тогда
$$f'(x_0)h \leqslant f(x_0 + h) - f(x_0).$$
$(2 \Rightarrow 3)$. Для $x,y \in int(I)$ имеем
$$f(y) - f(x) \geqslant f'(x)(y - x) \Rightarrow f(x) - f(y) \leqslant -f'(x)(y - x).$$
$$f(x) - f(y) \geqslant f'(y)(x - y) \Rightarrow f(y) - f(x) \leqslant -f'(y)(y - x).$$
Складывая неравенства, получим $(f'(y) - f'(x))(y - x) \geqslant 0$.
$(3 \Rightarrow 1)$. Пусть $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ и $t \in (0,1)$. Положим $x = (1-t)x_1 + tx_2$.
По теореме Лагранжа $f(x) - f(x_1) = f'(c_1)(x - x_1)$ и $f(x_2) - f(x) = f'(c_2)(x_2 - x)$ для некоторых $c_1 \in (x_1, x)$ и $c_2 \in (x, x_2)$. В силу возрастания производной $f'(c_1) \leqslant f'(c_2)$ и, значит,
$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$
Так как $x - x_1 = t(x_2 - x_1)$ и $x_2 - x = (1-t)(x_2 - x_1)$, то последнее неравенство равносильно $\dfrac{f(x) - f(x_1)}{t} \leqslant \dfrac{f(x_2) - f(x)}{1-t}$ или $f(x) \leqslant (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$. Следовательно, f выпукла на I. □

Замечание. Геометрический смысл пункта 2 означает, что график выпуклой функции лежит не ниже всякой своей касательной.

Теорема 1.17.* Пусть функция f непрерывна на промежутке I и дифференцируема на $int(I)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. f строго выпукла на I;

2. $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ для всех $x \in I$ и $x_0 \in int(I), x \neq x_0$;

3. f' строго возрастает на $int(I)$;

Доказательство. Импликации $(2 \Rightarrow 3)$ и $(3 \Rightarrow 1)$ в доказательстве прошлой теоремы проходят с заменой нестрогих неравенств на строгие. $(1 \Rightarrow 2)$. Пусть $x \in I$ и $x_0 \in int(I), x \neq x_0$. Пусть $h = x - x_0$ и $t \in (0,1)$. Поскольку f выпукла на I, то по пункту 2 прошлой теоремы для всех $x = x_0 + th$ имеем

$$f'(x_0)th \leqslant f(x_0 + th) - f(x_0).$$

В силу строгой выпуклости f выполнено $f(x_0 + th) - f(x_0) < t(f(x_0 + h) - f(x_0))$ и, значит,

$$tf'(x_0)h < t(f(x_0 + h) - f(x_0)).$$

Поделив обе части на t, получим искомое неравенство. □

Следствие. Пусть функция f непрерывна на промежутке I и дважды дифференцируема на $int(I)$.

1. Функция f выпукла на I тогда и только тогда, когда $f'' \geqslant 0$ на $int(I)$.

2. Если $f'' > 0$ на I, то функция f строго выпукла на $int(I)$.

Пример. $\ln(1 + x) < x$ при всех $x > -1, x \neq 0$.

Доказательство. $f(x) = \ln(1 + x)$, $f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2} < 0$ на $(-1, \infty) \Rightarrow f$ строго вогнута на $(-1, \infty)$. $y = x$ – уравнение касательной к f в точке $x = 0$. Тогда неравество следует из пункта 2 предыдущей теоремы. □

Покажем, что условие выпуклости влечет «регулярность» функции на внутренности промежутка. В дальнейшем будем считать, что $I = (a,b)$. Начнем со следующего наблюдения.

Пусть $x_1 < x < x_2$. Рассмотрим прямую $\lambda(x)$, проходящую через точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$. Если f выпукла на (a,b), то $f(x) \leqslant \lambda(x), f(x_1) = \lambda(x_1)$ и $f(x_2) = \lambda(x_2)$. Поэтому

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{\lambda(x) - \lambda(x_1)}{x - x_1} = \frac{\lambda(x_2) - \lambda(x)}{x_2 - x} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Наклон хорды, определяемой точками x_1 и x_2, не меньше наклона хорды, определяемой точками x_1 и x, и не больше наклона хорды, определяемой точками x и x_2 (лемма «о трех хордах»).

Теорема 5.18. *(*)*
Если функция f выпукла на (a, b), то f непрерывна на (a, b) и дифференцируема на нем, за исключением не более, чем счетного множества точек.

Доказательство. Зафиксируем $x \in (a, b)$. Рассмотрим функцию $\nu(y) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$ на $(a, b) \setminus \{x\}$. Функция ν нестрого возрастает на $(a, b) \setminus \{x\}$: Тогда $\nu(y) \leqslant \nu(z)$ при $y \leqslant z$

- сводится к одному из неравенств (*). По следствию из теоремы о пределах монотонной функции существуют конечные $\nu(x-0), \nu(x+0)$, причем $\nu(x-0) \leqslant \nu(x+0)$. Другими словами, существуют односторонние произведени в точке x, причем $f'_-(x) \leqslant f'_+(x)$. В частности, f непрерывна в точке x. перейдем к пределу в (*) в левом неравенстве - при $x \to x_1+0$, в правом - при $x \to x2-0$, тогда $f'_+(x1) \leqslant \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x1} \leqslant f'_-(x2)$. Следовательно, функция $g(x) = f'_-(x)$ - нестрого возрастает. Тогда g имеет не более, чем счетное множество точек разрыва и все разрывы I рода. Покажем, что в точках непрерывности g функция f дифференцируема. Пусть $x_0 < x$. Тогда

$$f'_-(x_0) \leqslant f'_+(x_0) \leqslant f'_-(x)$$

$$0 \leqslant f'_+(x_0) - f'_-(x_0) \leqslant f'_-(x) - f'_-(x_0)$$

Так как g непрерывна в x_0, то правую часть можно сделать сколь угодно малой, следовательно $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. □

Теорема 5.19. *Теорема 19 (неравенство Йенсена)*
Пусть f выпукла (вогнута) на I, $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geqslant 0$ и $\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n = 1$. Тогда $f(\lambda_1 * x_1 + \lambda_2 * x_2 + \dots + \lambda_n * x_n) \leqslant \lambda_1 * f(x_1) + \lambda_2 * f(x_2) + \dots + \lambda_n * f(x_n)$.

Доказательство. ММИ по n. При $n = 2$ - определение выпуклости. Пусть утверждение верно для n. Тогда $f(\lambda_1 * x_1 + \lambda_2 * x_2 + \dots + \lambda_n * x_n + \lambda_{n+1} * x_{n+1}) \leqslant (1 - x_{n+1}) f(y) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$.

$$y = \frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} x_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} x_n$$

При этом справедливо неравенство: $\dfrac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} + \dots + \dfrac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} = 1$. Тогда

$$f(y) = f(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} x_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} x_n) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} f(x_1) + \dots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} * f(x_n)$$

$$\Rightarrow f(\lambda_1 * x_1 + \lambda_2 * x_2 + \dots + \lambda_n * x_n + \lambda_{n+1} * x_{n+1}) \leqslant$$

$$\leqslant (1-\lambda_{n+1})(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} f(x_1) + \dots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} * f(x_n)) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) =$$

$$= \lambda_1 * f(x_1) + \lambda_2 * f(x_2) + \dots + \lambda_n * f(x_n)$$

□

Пример. (неравенство о средних)
Пусть $x_1, \dots, x_n \geqslant 0$, тогда

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 * \dots * x_n}$$

Доказательство. Предположим, что все $x_i > 0$. Функция $f(x) = ln(x)$ вогнута на $(0; +\infty)$, следовательно $\ln(\frac{1}{n} x_1 + \dots + \frac{1}{n} x_n) \geqslant \frac{1}{n} \ln(x_1) + \dots + \frac{1}{n} \ln(x_n)$, значит $\dfrac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geqslant e^{\frac{1}{n} \ln x_1 + \dots + \frac{1}{n} \ln x_n} = \sqrt[n]{x_1 * \dots * x_n}$. □

Определение 5.10. Пусть f ограничена на (a, b) и $x_0 \in (a, b)$. Тогда x_0 называется *точкой перегиба* f, если

1. $\exists \delta > 0 : f$ выпукла (вогнута) на $(x_0 - \delta, x0]$ и f вогнута (выпукла) на $[x_0, x_0 + \delta)$.
2. f непрерывна в точке x_0.
3. $\exists f'(x_0) \in \bar{\mathbb{R}}$

Пример. $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$ - точка перегиба. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 0$ - точка перегиба.

Из теоремы 17 (об эквивалентности условий) получаем следствие.

Следствие. (необходимое условие перегиба)
если x_0 - точка перегиба f и f дважды дифференцируема в точке x_0, то $f''(x_0) = 0$.

Доказательство. По теореме 17 f' меняет тип монотонности при переходе через x_0, следовательно, f' имеет локальный экстреммум в точке x_0, поэтому по теореме Ферма $f''(x_0) = 0$. ☐

Следствие. (достаточное условие перегиба)
Пусть f непрерывна на (a, b) и дважды дифференцируема на $(a, b)\backslash\{x_0\}$, пусть $\exists f'(x_0) \in \bar{\mathbb{R}}$. Если $f'' \geqslant 0 (\leqslant 0)$ на (a, x_0) и $f'' \leqslant 0 (\geqslant 0)$ на (x_0, b) , то x_0 - точка перегиба.

6 Интегрирование

Неопределенный интергал.

Определение 6.1. Пусть f определена на промежутка I. Функция $F : I \to \mathbb{R}$ называется *первообразной* функции f на I, если F дифференцируема на I и $\forall x \in I$ $F'(x) = f(x)$.

Теорема 6.1. *(описание множества первообразных)*
Если F - первообразная функции f на промежутке I, то $F + C$, где C - константа, также является первообразной f на I. Если F_1, F_2 - первообразные f на I, то $F_1 - F_2$ - постоянна на I.

Доказательство.
$$(F + C)' = F' + C' = f + 0 = f$$
$$(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0$$
Следовательно, функция постоянна $F_1 - F_2 = C$, где C - константа. ☐

Определение 6.2. Произвольная первообразная функции f на промежутке I называется *неопределенным интергалом* функции f на I и обозначается $\displaystyle\int f(x)\,dx$ или $\displaystyle\int f\,dx$. Операция перехода от данной f к первообразной называется *интегрированием.*

Замечание. (свойства неопределенного интеграла)

1. Если существует $\displaystyle\int f\,dx$ на I, то $(\displaystyle\int f\,dx)' = f$ на I.

2. Если существует $\int f\,dx$ и $\int g\,dx$ на $I, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то существует $\int (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int f\,dx + \beta \int g\,dx + C$.

3. (Формула интеграла по частям) Если функции u и v дифференцируемы на промежутке I и существует $\int vu'\,dx$, то на I существует $\int uv'\,dx = uv - \int vu'\,dx + C$.

   Доказательство. Правая часть имеет вид $F(x) + C$. тогда F дифференцируема на I и $F' = u'v + uv' - vu' = uv'$. Следовательно, F - первообразная uv'. □

   Следствие. Традиционная запись $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

4. (Интегрирование подстановкой) Если F - первообразная функции f на промежутке I, φ - дифференцируема на промежутке J и $\varphi(J) \sup I$, то существует на J:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C$$

   Следствие. Если дополнительно φ - строго монотонна но J, то из предыдущей формулы следует, что на $\varphi(J)$ существует

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt|_{x=\varphi(t)} + C$$

5. (Формула интегрирования обратной функции) Если f на I имеет конечную, неравную 0 производную и F - первообразная f на I, то для обратной функции на $f(I)$ существует

$$\int f^{-1}(y)\,dy = yf^{-1}(y) - F(f^{-1}(y)) + C$$

Замечание. Таблица основных неопределенных интегралов.

1. $\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
2. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$
3. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
4. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
5. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
6. $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C$

7. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$

8. $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$

9. $\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln|\frac{x-a}{x+a}| + C$

10. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$

11. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}| + C$

12. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$

13. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$

14. $\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx = -\operatorname{cth} x + C$

15. $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx = \operatorname{th} x + C$

Все интегралы рассматриваются с соответствующими ограничениями.

Всякая непрерывная функция на промежутке имеет неопределенный интеграл. Как его найти? Рассмотрим один важный класс функций, для которого существует алгоритм нахождения первообразной.

6.1 Интегрирование рациональных функций.

Определение 6.3. *Рациональной функцией* называется частное двух многочленов. Рациональные функции вида $\frac{A}{(x-a)^n}$ $(A \neq 0)$, $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$, M или $N \neq 0$, $\frac{p^2}{4} - q < 0$ называются *элементарными (простейшими)* дробями.

Введем обозначения: $\mathbb{R}[x]$ – множество всех многочелнов с действительными коэффициентами, $degP(x)$ – степень многочлена $P(x)$.

Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильная (т.е. $degP(x) < degQ(x)$), и $Q(x) = a(x-\alpha_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_m)^{k_m}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_nx+q_n)^{s_n}$. Говорят, что $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *представима в виде элементарных дробей*, если

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{A_{i,j}}{(x-\alpha_i)^j} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{s_i}\frac{M_{i,j}x+N_{i,j}}{q_i(x)^j}$$

для некоторых $M_{i,j}, N_{i,j}, A_{i,j} \in \mathbb{R}, q_i(x) = x^2 + p_ix + q_i, \frac{p_i^2}{4} - q_i < 0.$

Лемма 6.1. *Пусть $h(x), g(x) \in \mathbb{R}[x], k \in \mathbb{N}$ и $g(\alpha) \neq 0$. Если $h(x)(x-\alpha)^k + \sum\limits_{i=1}^{k} A_i g(x)(x-\alpha)^{k-i} = 0 \Rightarrow A_1 = A_2 = ... = A_k = 0$.*

Лемма 6.2. *Пусть $h(x), g(x) \in \mathbb{R}[x], k \in \mathbb{N}$ и z, z' – корни $q(x) = x^2 + px + q$, и $g(z) \neq 0$ и $g(z') \neq 0$. Если $h(x)q(x)^k + \sum\limits_{i=1}^{k}(M_i x + N_i)g(x)q(x)^{k-i} = 0 \Rightarrow M_i = 0, N_i = 0\ \forall i$*

Доказательство. Подставим $x = z$ и $x = z'$, $M_k z + N_k = 0$ и $M_k z' + N_k = 0$, $2b_i M_k = 0 \Rightarrow M_k = 0 \Rightarrow N_k = 0$, делим на $q(x)$ и т.д. □

Замечание. L – ЛнЗ.

$$S := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i} A_{i,j}\frac{Q(x)}{(x-\alpha_i)^{\gamma}} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i}(M_{i,j}\frac{x\cdot Q(x)}{q_i(x)} + N_{i,j}\frac{Q(x)}{q_i(x)^j}) = 0$$

Всякая правильная рациональная дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ имеет единственное разложение на элементраные дроби с точностью до порядка слагаемых. Покажем, как интегрируются элементарные дроби.

Теорема 6.2. *1.* $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + C$

2. $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C$

3. $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \frac{M}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx + (N-\frac{Mp}{2})\int\frac{1}{x^2+px+q}\,dx + C_1 = \frac{M}{2}\int\frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + (N-\frac{Mp}{2})\int\frac{d(x+\frac{p}{2})}{(x^2+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}} + C_1 = \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C_2$

4. $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx = \frac{M}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,dx + (N-\frac{Mp}{2})\int\frac{1}{(x^2+px+q)^n})\,dx + C_1 = -\frac{M}{2(n-1)(x^2+px+q)^{n-1}} + (N-\frac{Mp}{2})\int\frac{d(x+\frac{p}{2})}{((x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4})^n} + C_2$. *Заменой* $t = x + \dfrac{p}{2}$ *и* $a = \sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}$ *последний интеграл сводится к* $J_n = \displaystyle\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$. *Протегрируем* J_n *по частям, положив* $u = \dfrac{1}{(t^2+a^2)^n}, v = t$. *Тогда*

$$J_n = \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n\int\frac{t^2}{(t^2+a^2)^{n+1}}\,dt + C_1 = \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2nJ_n - 2na^2J_{n+1} + C_2$$

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}[\frac{t}{(t^2+a^2)^n} + (2n-1)J_n] + C_3,\ \ J_1 = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}(\frac{t}{a}) + C.$$

Все элементарные функции возможно проинтегрировать за конечное число операций.

Теорема 6.3. *Об интегрировании рациональных дробей.*
Неопределенный интеграл от рациональной дроби выражается через рациональные функции (быть может многочлены), $\ln, \operatorname{arctg}$ *и, следовательно, является элементарной функцией.*

Определение 6.4. Критерий интегрированности Дарбу.
Пусть f ограничена на $[a, b]$. Пусть $T = \{x_i\}_{i=0}^n$ – разбиение $[a,b]$ и $M_i = \sup\limits_{[x_{i-1};x_i]} f(x)$, $m_i = \inf\limits_{[x_{i-1};x_i]} f(x)$. Тогда $S_T(f) = \sum\limits_{i=1}^n M_i \Delta x_i$ – верхняя сумма Дарбу f, отвечающая за I. $s_T(f) = \sum\limits_{i=1}^n m_i \Delta x_i$ – нижняя сумма Дарбу f, отвечающая за I.

Лемма 6.3. *Для любого разбиения T выполнено*

$$s_T(f) = \sup_{\xi} \sigma_T(f, \xi), \;\; s_T(f) = \inf_{\xi} \sigma_T(f, \xi)$$

Доказательство. Пусть $T = \{x_i\}_{i=0}^n$. Поскольку для $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^n$, где $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, верно $f(\xi_i) \leqslant M_i$, то $\sigma_T(f, \xi) \leqslant S_T(f)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем $\xi_i' \in [x_{i-1}, x_i]$ так, чтобы $f(\xi_i') > M_i - \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Тогда для $\xi' = \{\xi_i'\}_{i=1}^n$ выполнено

$$\sigma_T(f, \xi') = \sum_{i=1}^n f(\xi_i')\Delta x_i > \sum_{i=0}^n (M_i - \frac{\varepsilon}{b-a})\Delta x_i = S_T(f) - \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^n \Delta x_i = S_T(f) - \varepsilon.$$

Это означает что $S_T(f)$ является супремумом множества $\sigma_T(f, \xi)$. Аналогично для $s_T(f)$. □

Покажем, что при добавлении точек в разбиение верхние суммы Дарбу не увеличиваются, а нижние – не уменьшаются.

Лемма 6.4. *Если разбиение T' получено из рабиения T добавлением m точек, то*

$$0 \leqslant S_T(f) - S_{T'}(f) \leqslant 2M_f m|T|$$

$$0 \leqslant s_{T'}(f) - s_T(f) \leqslant 2M_f m|T|,$$

где $M_f = \sup\limits_{[a,b]} |f|$.

Доказательство. Пусть $T = \{x_i\}_{i=0}^n$ и пусть $T' = T + x^*$, $x^* \in (x_{j-1}, x_j)$. Введем обозначения

$$M_j' = \sup_{[x_{j-1}, x^*]} f, \;\; M_j'' = \sup_{[x_*, x_j]} f$$

Тогда

$$S_T(f) - S_{T'}(f) = M_j(x_j - x_{j-1}) - M_j'(x^* - x_{j-1}) - M_j''(x_j - x^*) = (M_j - M_j')(x^* - x_{j-1}) + (M_j - M_j'')(x_j - x^*).$$

Поскольку $0 \leqslant M_j - M_j' \leqslant 2M_f$ и $0 \leqslant M_j - M_j'' \leqslant 2M_f$, то

$$0 \leqslant S_T(f) - S_{T'}(f) \leqslant 2M_f(x_j - x_{j-1}) \leqslant 2M_f|T|$$

Общий случай следует индукцией по m. Проверка нижних сумм Дарбу аналогична. □

Определение 6.5. $I^*(f) = \inf\limits_T S_T(f)$ – верхний интеграл Дарбу функции f.
$I_*(f) = \sup\limits_T s_T(f)$ – нижний интеграл Дарбу функции f.

Следствие. $I^*(f), I_*(f)$ – числа, причем $I_*(f) \leqslant I^*(f)$.

Доказательство. Пусть T_1, T_2 – разбиения $[a,b]$ и $T = T_1 \cup T_2$. Тогда

$$s_{T_1}(f) \leqslant s_T(f) \leqslant S_T(f) \leqslant S_{T_2}(f)$$

Осталось в неравенстве $s_{T_1}(f) \leqslant S_{T_2}(f)$ перейти к супремуму по всем разбиениям T_1, а затем – к инфимуму по всем T_2. □

Следствие. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall T,\ |T| < \delta$

$$0 \leqslant S_T(f) - I^*(f) < \varepsilon,\ 0 \leqslant I_*(f) - s_T(f) < \varepsilon$$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению inf: $\exists T_\varepsilon = \{x_i\}_{i=0}^m$.
$S_{T_\varepsilon}(f) < I^*(f) + \frac{\varepsilon}{2}$. Рассмотрим произвольное разбиение T и пусть $R = T \cup T_\varepsilon$. Тогда R – разбиение полученное из T добавлением $\leqslant m$ точек. Следовательно,

$$I^*(f) + \frac{\varepsilon}{2} > S_{T_\varepsilon}(f) > S_R(f) \geqslant S_T(f) - 2M_f m|T|.$$

Положим $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4M_f m + 1}$. Если T , $|T| < \delta$, то $I^*(f) + \varepsilon > S_T(f)$.
Для нижних сумм Дарбу доказательство аналогичное. □

Теорема 6.4. *критерий Дарбу.*
Пусть f ограничена на $[a,b]$

$$f \in \mathcal{R}[a,b] \Leftrightarrow I^*(f) = I_*(f)$$

При этом $\int_a^b f(x)dx = I^*(f) = I_*(f)$.

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists \delta > 0\ \forall (T, \psi), |T| < \delta$

$$I - \varepsilon < \sigma_T(f, \psi) < I + \varepsilon. \text{ По лемме 2 получим } I - \varepsilon \leqslant s_T(f) \leqslant S_T(f) \leqslant I + \varepsilon.$$

Т.к. $\varepsilon > 0$ – любое, то $I_*(f) = I^*(f) = I$.
$\Leftarrow$ Пусть $I_*(f) = I^*(f) = I$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По следствию 2 $\exists \delta > 0\ \forall (T, \psi), |T| < \delta$

$$0 \leqslant S_T(f) - I^*(f) < \varepsilon$$

$$0 \leqslant I_*(f) - s_T(f) < \varepsilon$$

Тогда $\sigma_T(f,\psi) - I \leqslant S_T(f) - I^*(f) < \varepsilon$, $\sigma_T(f,\psi) - I \geqslant s_T(f) - I_*(f) > -\varepsilon$.
Значит, $|\sigma_T(f,\psi) - I| < \varepsilon$, следовательно, $f \in \mathcal{R}[a,b]$ и $I = \int_a^b f(x)dx$. □

Определение 6.6. Пусть f определена на $E \subset \mathbb{R}$. Величина $w(f,E) = \sup\limits_{x,y\in E} |f(y) - f(x)|$ называется *колебанием (осцилляцией)* функции f на E.

Замечание. $w(f,E) = \sup\limits_{x,y\in E}(f(y) - f(x)) = \sup\limits_{y\in E} f(y) + \sup\limits_{x\in E}(-f(x)) = \sup\limits_{x\in E} f(x) - \inf\limits_{x\in E} f(x)$

Пусть f огр на $[a,b], T = \{x_i\}_{i=0}^n$. Положим $\Omega_T(f) = S_T(f) - s_T(f)$. Тогда

$$\Omega_T(f) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n w(f,[x_{i-1},x_i])\Delta x_i.$$

Теорема 6.5. *Пусть f огр на $[a,b]$.*

$$f \in \mathcal{R}[a,b] \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists T \text{ – разбиение } [a,b](\Omega_T(f) < \varepsilon)$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $\varepsilon > 0$. Если δ соответствует $\frac{\varepsilon}{3}$ в определении интегрируемости, то из доказательства теоремы 4 следует, что для всякого разбиения T, $|T| < \delta$, выполнено $I - \frac{\varepsilon}{3} \leqslant s_T(f) \leqslant S_T(f) \leqslant I + \frac{\varepsilon}{3}$ и, значит, $\Omega_T(f) \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$.
Обратно, пусть $\Omega_T(f) < \varepsilon$. Поскольку $\Omega_T(f) = S_T(f) - s_T(f)$, $s_T(f) \leqslant I_*(f) \leqslant I^*(f) \leqslant S_T(f)$, то $I^*(f) - I_*(f) < \varepsilon$. Следовательно, $I_*(f) = I^*(f)$ и, значит, $f \in \mathcal{R}[a,b]$ по теореме 4. □

6.2 Множество интегрируемых функций.

Теорема 6.6. *1) Пусть $f \in \mathcal{R}[a,b], [c,d] \subset [a,b]$. Тогда $f \in \mathcal{R}[c,d]$.*
2) Если $a < c < b$ и $f \in \mathcal{R}[a,c]$ и $f \in \mathcal{R}[c,b]$, то $f \in \mathcal{R}[a,b]$.
3) Если $f \in \mathcal{R}[a,b]$, то $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$.

Доказательство.
1) Т.к. $f \in R[a,b]$, то f ограничена на $[a,b]$ и, значит, ограничена на $[c,d]$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда по Т4 $\exists T$ – разбиение $[a,b](\Sigma_T(f) < \varepsilon)$. Положим $T_0 = T + c, d$. Следовательно ,

$$\Sigma_{T_0}(f) = S_{T_0}(f) - s_{T_0} \leqslant S_T(f) - s_T(f) = \Sigma_T(f)$$

по Т4' функция интегрируема на $[a,b]$.
2) f ограничена на $[a,c]$ и $[c,b]$ влечет ограниченность на $[a,b]$. Так как $f \in R[a,c]$, то существует T_1 - разбиение $[a,c]$, такое что $\Omega_{T_1}(f|_{[a,c]}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Так как $f \in R[c,b]$, то существует T_2 - разбиение $[c,b]$, такое что $\Omega_{T_2}(f|_{[c,b]}) < \frac{\varepsilon}{2}$. $T = T_1 \cup T_2$ - разбиение $[a,b]$. Тогда $\Omega_T(f) = \Omega_{T_1}(f|_{[a,c]}) + \Omega_{T_2}(f|_{[c,b]}) < \varepsilon$. По теореме 4' f интегрируема на $[a,b]$.
3) Оценим колебания произведения функции на $E \sup[a,b]$. Так как f и g - ограничены на $[a,b]$, то $\exists M > 0(|f| \leqslant M, |g| \leqslant M$ на $[a,b])$. Пусть $x,y \in [a,b]$, тогда

$$|f(y)g(y) - f(x)g(x)| = |f(y)g(y) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(x)g(x)| \leqslant$$

$$\leqslant |f(y)||g(y)-g(x)| + |g(x)||f(y)-g(x)| \leqslant$$
$$\leqslant M|g(y)-g(x)| + M|f(y)-f(x)| \leqslant$$
$$\leqslant M\omega(f,E) + M\omega(g,E) \Rightarrow \omega(fg,E) \leqslant M(\omega(f,E)+\omega(g,E))$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $f \in R[a,b]$, то $\exists T_f$ - разбиение $[a,b]$, такое что $\Omega_T(f) < \frac{\varepsilon}{2M}$, $g \in R[a,b]$, то $\exists T_g$ - разбиение $[a,b]$, такое что $\Omega_T(f) < \frac{\varepsilon}{2M}$. Положим $T = T_f \cup R_g$ - разбиение $[a,b]$. Тогда $\Omega_T(f) \leqslant \Omega_{T_f}(f)$, $\Omega_T(g) \leqslant \Omega_{T_g}(g)$. Следовательно, $\Omega_T(fg) \leqslant M\Omega_T(f) + M\Omega_T(g) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. По теореме 4' $fg \in R[a,b]$.
4) Так как $||f(y)| - |f(x)|| \leqslant |f(y)-f(x)|\ \forall x,y \in E$, то $\omega(|f|,E) \leqslant \omega(f,E)$. □

Следствие. Если $f \in R[a,b]$, то $|\int_a^b f(x)\,dx| \leqslant |\int_a^b |f(x)|\,dx|$.
Так как: $-|f| \leqslant |f| \leqslant |f|$ на $[a,b]$.

Задача. *Пусть $f \in R[a,b], f \geqslant C > 0$ на $[a,b]$. Покажите, что* $\frac{1/f}{\in} R[a,b]$.

Теорема 6.7. *(интегрируемости о среднем)*
Пусть $f,g \in R[a,b], m \leqslant f \leqslant M$ на $[a,b]$. Если $g > 0$ на $[a,b]$ или $g \leqslant 0$ на $[a,b]$, то $\exists \lambda \in [m,M]\ :\ \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \lambda \int_a^b g(x)\,dx$.

Доказательство. Пусть $g \leqslant 0$ на $[a,b]$. Тогда $mg \leqslant fg \leqslant Mg$ на $[a,b]$. По свойству монотонности $m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx$. Если $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, то $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$ и в качестве λ - любое число от m до M. Если $\int_a^b g(x)\,dx > 0$, то равенство выполняется для $\lambda = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \in [m,M]$ □

Следствие. Если дополнительно f непрерывна на $[a,b]$, то $\exists c \in [a,b]$, такая что $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$.

Теорема 6.8. *Если f непрерывна на $[a,b]$, то f интегрируема на $[a,b]$.*

Доказательство. Так как f непрерывна на $[a,b]$, то по теореме Вейерштрасса f ограничена на $[a,b]$ и по теореме Кантора равномерно непрерывна на $[a,b]$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Из условия равномерной непрерывности $\exists\delta > 0\ \forall x,y \in [a,b]$ $(|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a})$. Рассмотрим T - разбиение $[a,b]$, $|T| < \delta$. По теореме Вейерштрасса $\exists x_1', x_i'' \in [a,b](f(x_i') = M_i, f(x_i'') = m_i)$. Так как $|x_i' - x_i''| \leqslant \Delta x_i < \delta$, то $f(x_i') - f(x_i'') < \frac{\varepsilon}{b-a}$.
Следовательно, $\Omega_T(f) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n (f(x_i') - f(x_i''))\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^n \Delta x_i = e$. По теореме 4' $f \in R[a,b]$. □

Теорема 6.9. *Если f монотонна на $[a,b]$, то f интегрируема на $[a,b]$.*

Доказательство. Пусть для определенности f нестрого возрастает на $[a,b]$. Тогда $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)\ \forall x \in [a,b]$ и для $T = x_{ii=0}^{n}$ - разбиение $[a,b]$. $\Omega_T(f) = \sum\limits_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1}))\Delta x_i \leqslant |T|\sum\limits_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1})) = |T|(f(b) - f(a))$. Выберем T так, что $|T|(f(b) - f(a)) < \varepsilon$, тогда $\Omega_T(f) < \varepsilon$ и по теореме 4' $f \in R[a,b]$. □

Теорема 6.10. *Пусть f определена на $[a,b]$ и ограничена на нем. Если $f \in R[c,d]\ \forall [c,d] \subset (a,b)$, то $f \in R[a,b]$.*

Доказательство. По условию $\exists M > 0$ ($|f| \leqslant M$ на $[a,b]$). Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Pfccvjnhbv $c = a + \dfrac{\varepsilon}{6M}, c = a + \dfrac{\varepsilon}{6M}, d = b - \dfrac{\varepsilon}{6M}$ $(c < d)$. По условию $f \in R[c,d]$, тогда $\exists T_0$ - разбиение $[c,d]$: $\Omega_{T_0}(f) < \dfrac{\varepsilon}{3}$. $T = T_0 \cup \{a,b\}$ - разбиение $[a,b]$. $\Omega_T(f) = \omega(f,[a,c])(c - a) + \Omega_{T_0}(f) + \omega(f,[d,b])(b-d)$. $\omega(f,[a,c]) \leqslant 2M, \omega(f,[d,b]) \leqslant 2M$ и, следовательно, $\Omega_T(f) < 2M\dfrac{\varepsilon}{6M} + \dfrac{\varepsilon}{3} + 2M\dfrac{\varepsilon}{6M} = \varepsilon$. По теореме 4' $f \in R[a,b]$. □

Следствие. Пусть f ограничена на $[a,b]$ и множество точек разрыва f на $[a,b]$ конечно, тогда $f \in R[a,b]$.

Доказательство. Добавим к множеству точек разрыва f на $[a,b]$ точки a,b : $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$. По теореме 7: $f \in R[\alpha,\beta] \forall [\alpha,\beta] \subset (x_{i-1},x_i)$ и f ограничена на $[x_{i-1},x_i]$. Тогда по теореме 9 $f \in R[x_{i-1},x_i], (i = 1,\dots,N)$. Последовательно применяя пункт 2 теоремы 5 получим $f \in R[a,b]$. □

Задача. *Пусть $g \in R[a,b], m \leqslant g \leqslant M$ и пусть f непрерывна на $[m,M]$. Докажите, что $f\mathring{g} \in R[a,b]$.*

Задача. *Приведите пример $g \in R[0;1]$ и непрерывной на $[0;1]$ функции f, что $g\mathring{f} \ni R[0,1]$.*

6.3 Интеграл, как функция верхнего предела.

Определение 6.7. Пусть I - промежуток, $f : I \to \mathbb{R}$ интегрируема на любом $[\alpha,\beta] \subset I, a \in I$. Функция $F : I \in \mathbb{R}, F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$, называется *интегралом с переменным верхним пределом.*

Теорема 6.11. *Пусть I - невырожденный промежуток, $f : I \to \mathbb{R}$ и $f \in R[\alpha,\beta]\ \forall [\alpha,\beta] \subset I, a \in I,\ F : I \to \mathbb{R},\ F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$. Тогда F непрерывна на I. Кроме того, если f непрерывна в точке x, то F диффиренцируема в точке x, $F'(x) = f(x)$.*

Доказательство. Зафиксируем $x \in I$. Выберем $\delta > 0$, что $[x-\delta, x+\delta] \cap I$ - невырожденный отрезок $[\alpha,\beta]$. По условию $f \in R[\alpha,\beta]$, тогда $\exists M > 0$ ($|f| \leqslant M$ на $[\alpha,\beta]$). Тогда $\forall y \in [\alpha,\beta]$ $|F(y) - F(x)| = |\displaystyle\int_a^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt| = |\int_x^y f(t)\,dt| \leqslant \int_x^y |f(t)|\,dt \leqslant M|$, следовательно $\lim\limits_{y \to x} F(y) = F(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$. □

Следствие. Если f непрерывна на промежутке I, то f имеет на I первообразную.

6.4 Замена переменной в интеграле. Интегрирование по частям.

Теорема 6.12. *О замене переменной Пусть f непрерывна на промежутке I, функция $\varphi : [\alpha, \beta] \to I$ дифференцируема на $[\alpha, \beta]$, причем $\varphi' \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$. Тогда*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

где $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$.

Доказательство. Функция $f_o\varphi$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$, поэтому $(f_o\varphi)\varphi' \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$. Пусть F – первообразная f на I. Тогда по правилу дифференцирования композиции $(F_o\varphi)' = (f_o\varphi)\varphi'$ на $[\alpha, \beta]$ и, значит, $F_o\varphi$ – первообразная $(f_o\varphi)\varphi'$ на этом отрезке. По формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))|_\alpha^\beta = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

□

Теорема 6.13. *Пусть функции F и G дифференцируемы на $[a, b]$, а их производные f, g интегрируемы на этом отрезке. Тогда*

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(x)G(x)|_a^b - \int_a^b G(x)f(x)dx.$$

Доказательство. Так как $(FG)' = Fg + fG$, то FG является первообразной функции $h = Fh + fG$. Из дифференцируемости F, G следует их непрерывность, а значит, и интегрируемость на $[a, b]$. Следовательно, $h \in \mathcal{R}[a, b]$. По свойству линейности и формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b Fg(x)dx + \int_a^b Gf(x)dx = \int_a^b (FG)'(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a)$$

и искомое равенство установлено. □

Замечание. Ввиду того, что формула Ньютона-Лейбница справедлива для обощенных первообразных, то T12 справедлива для F, G – обобщенных первообразных.

Задача. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!})^2 = \pi$

Доказательство. Сначала получим реккурентную формулу для $J_m = \int_0^{\pi\ 2} \sin^m x dx, m \in \mathbb{N}_0$. Имеем $J_0 = \frac{\pi}{2}, J_1 = 1$. Если $m \geqslant 2$, то интегрируем по частям:

$$J_m = \int_0^{\pi\ 2} \sin^{m-1} x(-\cos x)'dx = -\sin^{m-1} x \cos x|_0^{\pi\ 2} + (m-1)\int_0^{\pi\ 2} \sin^{m-2} x \cos^2 x dx =$$

$$= (m-1)(J_{m-2} - J_m)$$

Отсюда $J_m = \dfrac{m-1}{m} J_{m-2}$. Последовательно применяя формулу, сводим J_m к J_0 или J_1 в зависимости от четности m:

$$J_m = \frac{(m-1)!!}{m!!} \cdot \frac{\pi}{2}, m \text{ четно},$$

$$J_m = \frac{(m-1)!!}{m!!}, m \text{ нечетно}.$$

Положим $x_n = \dfrac{1}{n}(\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!})^2$. Для $x \in (0, \dfrac{\pi}{2})$ выполнено $0 < \sin x < 1$ и, значит, $\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x$. Интегрируя полученное неравенство, имеем

$$J_{2n+1} < J_{2n} < J_{2n-1}.$$

Подставляя найденные значения J_m, получим

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!},$$

что равносильно

$$(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!})^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < (\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!})^2 \frac{1}{2n},$$

$$\pi < x_n < \frac{2n+1}{2n}\pi,$$

откуда следует, что $x_n \to \pi$. □

6.5 Евклидово пространство $\mathbb{R}^m$ и вектор–функции.

Пусть $\mathbb{R}^m = \{x = (x_1, x_2, ..., x_m)^T, x \in \mathbb{R}\}$. Множество $\mathbb{R}^m$ является векторным пространством относительно операций сложения и умножения на число:
1) $(x_1, ..., x_m)^T + (y_1, ..., y_m)^T = (x_1 + y_1, ..., x_m + y_m)^T$,
2) $\alpha(x_1, ..., x_m)^T = (\alpha x_1, ..., \alpha x_m)^T$.

Функция $(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, (x, y) = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i y_i$ удовлетворяет свойствам:

1. $\forall x \in \mathbb{R}^m : (x, x) \geqslant 0, (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2. $\forall x, y \in \mathbb{R}^m : (x, y) = (y, x)$;

3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^m : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$.

Всякая функция $(\cdot, \cdot)$ на векторном пространстве (над $\mathbb{R}$), удовлетворяющее свойствам 1-3, называется *скалярным произведением* на векторном пространстве (над $\mathbb{R}$). Векторное пространство со скалярным произведением называется *евклидовым пространством.* Т.о, $\mathbb{R}^m$ – евклидово пространство.
Будем рассматривать функции $\gamma : E \to \mathbb{R}^m$, где $E \subset \mathbb{R}$ (*вектор-функция*). Поскольку $\gamma(t) = (\gamma_1(t), ..., \gamma_m(t))^T, t \in E$, то задание вектор-функции $\gamma \Leftrightarrow$ заданию на E m числовых функций $t \mapsto \gamma_i(t)$ (i*–ая координатная функция* γ).

Определение 6.8. Пусть $\gamma : E \to \mathbb{R}^m,\ a \in \mathbb{R}^m$. Вектор a называется *пределом* функции γ в точке t_0, если t_0 – предельная точка E и

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall t \in \overset{o}{B}_\delta(t_0) \cap E\ (|\gamma(t) - a| < \varepsilon)$$

Пишут $a = \lim\limits_{t \to t_0} \gamma(t)$. Аналогично вводится понятие непрерывности вектор-функции.

Теорема 6.14. *Пусть $\gamma : E \to \mathbb{R}^m,\ \gamma(t) = (\gamma_1(t), ..., \gamma_m(t))^T$. Вектор $a = (a_1, ..., a_m)^T$ является пределом функции γ при $t \to t_0$, тогда и только тогда, когда $\gamma_i(t) \to a_i$ при $t \to t_0$ для каждого $i = 1, ..., m$.*

Доказательство. Для любого $x \in \mathbb{R}^m$ верно неравенство

$$|x_i| \leqslant \sqrt{x_1^2 + ... + x_m^2} \leqslant |x_1| + ... + |x_m|.$$

Осталось применить его к $x = \gamma(t) - a$. □

Следствие. Об операциях с пределами.
Пусть $\gamma, \tilde{\gamma} : E \to \mathbb{R}^m,\ f : E \to \mathbb{R}$. Если существуют $\lim\limits_{t \to t_0} \gamma(t) = a,\ \lim\limits_{t \to t_0} \tilde{\gamma}(t) = b$ и $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = c$, то существуют:

1. $\lim\limits_{t \to t_0} (\gamma(t) + \tilde{\gamma}(t)) = a + b$;
2. $\lim\limits_{t \to t_0} f(t)\gamma(t) = ca$;
3. $\lim\limits_{t \to t_0} (\gamma(t), \tilde{\gamma}(t)) = (a, b)$.

Определение 6.9. Пусть функция $\gamma : I \to \mathbb{R}^m$ определена на промежутке I и $t_0 \in I$. Вектор $\gamma'(t_0)$ называется *производной* функции γ в точке t_0, если $\gamma'(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$. При этом будем говорить, что функция γ *дифференцируема* в точке t_0.

Следствие. Пусть функция $\gamma : I \to \mathbb{R}^m$ определена на промежутке I, $\gamma(t) = (\gamma_1(t),\ ...\ ,\ \gamma_m(t))^T$. Функция γ дифференцируема в точке t_0, тогда и только тогда, когда в этой точке дифференцируемы все ее координатные функции, причем $\gamma'(t_0) = (\gamma_1'(t_0),\ ...\ ,\ \gamma_m'(t_0))^T$.

Следствие. Пусть в точке t_0 дифференцируемы функции $\gamma, \tilde{\gamma} : I \to \mathbb{R}^m$ и $f : I \to \mathbb{R}$. Тогда в этой точке дифференцируемы функции $\gamma + \tilde{\gamma},\ f\gamma$, скалярное произведение $(\gamma, \tilde{\gamma})$, причем:
1) $(\gamma + \tilde{\gamma})' = \gamma' + \tilde{\gamma}'$;
2) $(f\gamma)' = f'\gamma + f\gamma'$;
3) $(\gamma, \tilde{\gamma})' = (\gamma', \tilde{\gamma}) + (\gamma, \tilde{\gamma}')$.

Следствие. Пусть J, I – промежутки, функции $h : J \to I$ и $\gamma : I \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемы в точках u_0 и $t_0 = h(u_0)$ соответственно. Тогда в точке u_0 дифференцируема композиция $\gamma \circ h : J \to \mathbb{R}^m$ и $(\gamma \circ h)'(u_0) = h'(u_0)\gamma'(t_0)$.

Теорема 6.15. *Лагранжа для вектор-функций.*
Если функция $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), то существует $\xi \in (a, b)$, что $|\gamma(b) - \gamma(a)| \leqslant |\gamma'(\xi)|(b - a)$.

Доказательство. Если $\gamma(b)=\gamma(a)$, то неравенство очевидно. Пусть $\gamma(b)\neq\gamma(a)$. Положим $e=\dfrac{\gamma(b)-\gamma(a)}{|\gamma(b)-\gamma(a)|}$, тогда $|e|=1$ и

$$|\gamma(b)-\gamma(a)|=(\gamma(b)-\gamma(a),e)=(\gamma(b),e)-(\gamma(a),e).$$

Рассмотрим на $[a,b]$ функцию $f(t)=(\gamma(t),e)$. По теореме Лагранжа $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ для некоторой точки $\xi\in(a,b)$. Поскольку $f(b)-f(a)=|\gamma(b)-\gamma(a)|$, $f'(t)=(\gamma'(t),e)$, $|f'(\xi)|\leqslant|\gamma'(\xi)|$, получаем требуемое. □

Определение 6.10. *Параметризованной кривой* в $\mathbb{R}^m$ называется непрерывная функция $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^m$. При этом $\gamma(a)$ называется *началом*, $\gamma(b)$ – *концом*, а множество $\gamma([a,b])$ – *носителем* параметризованной кривой γ.
Параметризованная кривая $\gamma^-:[a,b]\to\mathbb{R}^m$, $\gamma^-(t)=\gamma(a+b-t)$, называется *противоположной* к γ.

Определение 6.11. Две параметризованные кривые $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^m$ и $\tilde{\gamma}:[c,d]\to\mathbb{R}^m$ называются *эквивалентными*, если существует непрерывная строго возрастающая функция h, отображающая отрезок $[c,d]$ на $[a,b]$, такая что $\tilde{\gamma}=\gamma\circ h$. Аргумент кривой называется *параметром*, а функция h – *заменой параметра*.

Определение 6.12. *Кривой* Γ называется класс эквивалентности параметризованных кривых. Каждый представитель класса называется *параметризацией* кривой Γ.

Введенное понятие кривой является слишком широким и, в частности, содержит примеры (кривые Пеано), не согласующиеся с интуитивным представлением о кривых как одномерных объектах. Желая исключить из рассмотрения подобные примеры, на параметризации накладывают дополнительные условия.

Определение 6.13. Параметризованная кривая γ называется *простой*, если γ инъекция.

Определение 6.14. Пусть $r\in\mathbb{N}$. Параметризованная кривая $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^m$, $\gamma(t)=(\gamma_1(t),...,\gamma_m(t))^T$, называется *$C^r$-гладкой*, если все $\gamma_i\in C^r([a,b])$, т.е. производные $\gamma_i^{(k)}$ определены и непрерывны на (a,b) и существуют конечные $\gamma_i^{(k)}(a+0)$ и $\gamma_i^{(k)}(b-0)$, $k=1,...,r$. Класс C^∞ рассматривается как пересечение всех классов C^r. При этом $\gamma'(t)=(\gamma_1'(t),...,\gamma_m'(t))^T$ называется *вектором скорости* кривой γ. Параметризованная кривая $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^m$ называется *кусочно-гладкой*, если существует разбиение $T=\{t_i\}_{i=0}^n$, что кривая $\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}$ гладкая для каждого $i=1,...,n$.

Определение 6.15. Параметризованная кривая $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^m$ называется *регулярной* в точке t_0, если существует $\gamma'(t_0)\neq0$. Параметризованная кривая регулярна, если она регулярна в каждой точке.

Определение 6.16. Кривая Γ называется *C^r-гладкой* (*регулярной*), если у нее имеется хотя бы одна C^r-гладкая параметризация.

Для параметризованной кривой $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^m$ и разбиения $T=\{t_i\}_{i=0}^n$ отрезка $[a,b]$ определим число $L(\gamma,T)=\sum\limits_{i=1}^n|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})|$, геометрический смысл которого – это длина ломаной $\gamma(t_0)\gamma(t_1)...\gamma(t_n)$.

Определение 6.17. *Длиной* параметризованной кривой $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ называется величина

$$L(\gamma) = \sup_T L(\gamma, T),$$

где супремум берется по всем разбиениям T отрезка $[a,b]$. Параметризованная кривая называется *спрямляемой*, если ее длина конечна.

Лемма 6.5. *Если параметризованные кривые $\tilde{\gamma}$ и γ эквивалентны и γ спрямляема, то $\tilde{\gamma}$ спрямляема, причем $L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma)$.*

Доказательство. По условию $\tilde{\gamma} = \gamma \circ h$ для некоторой замены параметра $h : [c, d] \to [a, b]$. Так как h строго возрастает и концевые точки переводит в концевые, то разбиение $T = \{u_i\}_{i=0}^n$ отрезка $[c, d]$ определяет разбиение $h(T) = \{h(u_i)\}_{i=0}^n$ отрезка $[a, b]$, и наоборот. Таким образом, h индуцирует биекцию между разбиениями отрезков $[c, d]$ и $[a, b]$, причем $L(\tilde{\gamma}, T) = L(\gamma, h(T))$. Следовательно, $L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma)$. $\square$

Замечание. Таким образом, корректно определена длина кривой как длина любой ее параметризации.

Лемма 6.6. *Аддитивность длины кривой.*
Если кривая $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ спрямляема и $c \in (a, b)$, то также спрямляемы кривые $\gamma|_{[a,c]}$ и $\gamma|_{[c,b]}$, причем $L(\gamma) = L(\gamma|_{[a,c]}) + L(\gamma|_{[c,b]})$.

Доказательство. Введем обозначения $\gamma_1 = \gamma|_{[a,c]}$, $\gamma_2 = \gamma|_{[c,b]}$. Пусть T_1 и T_2 – разбиения отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ соответственно. Тогда $T = T_1 \cup T_2$ – разбиение $[a, b]$, и $L(\gamma_1, T_1) + L(\gamma_2, T_2) = L(\gamma, T) \leqslant L(\gamma)$. Переходя к супремуму по всем разбиениям T_1, затем по T_2, получим $L(\gamma_1) + L(\gamma_2) \leqslant L(\gamma)$.
Пусть теперь T – разбиение $[a, b]$. Положим $T' = T \cup \{c\}$, $T_1 = T' \cap [a, c]$ и $T_2 = T' \cap [c, b]$, тогда T_1 – разбиение $[a, c]$, T_2 – разбиение $[c, b]$ и $L(\gamma, T) \leqslant L(\gamma, T') = L(\gamma_1, T_1) + L(\gamma_2, T_2) \leqslant L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$. Переходя к супремуму по всем разбиениям T получим $L(\gamma) \leqslant L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$. $\square$

Определение 6.18. Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ спрямляема. Функция $s(t) = L(\gamma|_{[a,t]})$ называется *переменной длиной* дуги γ.

Если спрямляемая кривая $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ не стационарна, то функция s имеет обратную $t : [0, l] \to [a, b]$, $t = t(s)$, которая удовлетворяет условиям замены параметра. Параметризованная кривая $\sigma(s) = \gamma(t(s))$, $s \in [0, l]$, эквивалентная γ, называется *натуральной параметризацией*, а ее аргумент – *натуральным параметром*.

Лемма 6.7. *Достаточное условие спрямляемости.*
Всякая C^{-1}-гладкая параметризованная кривая $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ спрямляема, причем $L(\gamma) \leqslant \sup\limits_{[a,b]} |\gamma'| \cdot (b - a)$.

Доказательство. Пусть $M = \sup\limits_{[a,b]} |\gamma'|$. Так как функция $|\gamma'|$ непрерывна, то $M \in \mathbb{R}$. Если $T = \{t_i\}_{i=0}^n$ – разбиение $[a, b]$, то по теореме Лагранжа для вектор-функций найдется такое $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$, что $|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \leqslant |\gamma'(\xi_i)| \cdot (t_i - t_{i-1})$. Поэтому $L(\gamma, T) \leqslant M \sum\limits_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = M(b - a)$. Осталось перейти к супремуму по всем разбиениям T. $\square$

Теорема 6.16. *Для C^{-1}-гладкой параметризованной кривой $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ выполнено $s'(t) = |\gamma'(t)|$.*

Доказательство. Пусть $a \leqslant t_0 < t \leqslant b$. Имеем $s(t) - s(t_0) = L(\gamma|_{[t_0,t]})$, тогда из аддитивности длины кривой и достаточного условия спрямляемости

$$|\gamma(t) - \gamma(t_0)| \leqslant s(t) - s(t_0) \leqslant \sup_{[a,b]} |\gamma'|(t - t_0).$$

По теореме Вейерштрасса $\sup\limits_{[a,b]} |\gamma'| = |\gamma'(\xi_t)|$ для некоторого $\xi_t \in (t_0, t)$. Поэтому

$$|\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}| \leqslant \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} \leqslant |\gamma'(\xi_t)|.$$

Перейдя к пределу при $t \to t_0 + 0$, получим $s'_+(t_0) = |\gamma'(t_0)|$. Аналогично устанавливается, что $s'_-(t_0) = |\gamma'(t_0)|$. $\square$

Следствие. Всякая гладкая регулярная кривая имеет натуральную параметризацию.

Доказательство. По определению кривая имеет гладкую параметризацию γ с $\gamma' \neq 0$. Тогда по теореме $s' = |\gamma'| > 0$. Следовательно, функция s обратима. $\square$

Следствие. Гладкая регулярная параметризованная кривая $\gamma : [0,l] \to \mathbb{R}^m$ является натуральной параметризацией тогда и только тогда, когда $|\gamma'(s)| = 1$ для всех $s \in [0,l]$.

Доказательство. Если γ – натуральная параметризация, то $|\gamma'(s)| = s' = 1$. Обратно, если $|\gamma'(t)| = 1$, то по теореме для переменной длины дуги $s(t) = t + C$. Так как $s(t) = L(\gamma|_{[0,t]})$, то $C = s(0) = 0$ и, значит, параметр t натуральный. $\square$