指数 p の部分群

N'Tree

2022 年 4 月 17 日

目次

群論における次の有名な結果がある。

命題 1. 群 G の指数 2 の部分群 H は正規である。

証明. $x \notin H$ をとると、$G = H \cup xH$ は左剰余類分解、$G = H \cup Hx$ は右剰余類分解となる。これより $xH = Hx$ となる。すなわち $x \notin H$ ならば $xHx^{-1} = H$ をみたす。$x \in H$ のとき $xHx^{-1} = H$ となることは明らかなので、H は G の正規部分群である。

この命題の一般化として、次の命題が知られている。

命題 2. G を有限群、p を G の位数を割り切る最小の素数、H を G の指数 p の部分群とする。このとき H は G の正規部分群である。

証明. 剰余類の置換作用により群準同型 $G \to S_p$ を得る。この準同型の核を N とすると、N は H の部分群となる。ラグランジュの定理より $|H| = k|N|$ とおける (k は整数)。このとき $|G/N| = pk$ となる。G/N は S_p の部分群と同型なので、pk は $p!$ を割り切る。ゆえに k は $(p-1)!$ を割り切るので、k の素因数は $p-1$ 以下である。一方 k は $|H|$ を割り切るので $|G|$ も割り切る。$|G|$ の最小の素因数は p なので k の素因数は p 以上である。よって $k = 1$ となり、$H = N$ は正規である。

参考文献

[1] 雪江明彦, 代数学 *1* 群論入門, 日本評論社, 2010.