対称群の分岐則

N'Tree

2022 年 7 月 3 日

目次

1 分岐則とは

群の表現を部分群に制限するとどのようになるか、という問いは古くから重要なものである。群が有限かつベクトル空間が複素数体上のときはマシュケの定理 ([1], 定理 5.1.17) が成り立つので、制限表現は既約表現の直和として表すことができる。すると問題は「どのような既約表現が」「どれだけの重複度で」現れるかということになる。このミニノートでは対称群の場合に表現の分岐則を考える。

2 対称群の分岐則

まず記号を定義する。概ね [1] に準じる。群 G の表現 V を部分群 H に制限して得られる表現を $\mathrm{Res}_H^G V$ とする。n 次対称群を S_n とする。大きさ $n-1$ のヤング図形 μ に正方形を 1 つ加えることで大きさ n のヤング図形 λ が得られるとき、$\lambda = \mu + \square$ と書くことにする。逆に λ から正方形を 1 個取り除いて μ が得られるとき、$\mu = \lambda - \square$ と書くことにする。

S_{n-1} を 1 点を固定する S_n の部分群とみなす。対称群の分岐則は S_n の既約表現を S_{n-1} に制限した表現の既約分解を与える。

定理 1 (対称群の分岐則). λ を大きさ n のヤング図形、V_λ を λ に対応する S_n の既約表現とする (V_λ の構成については [1] の第 6 章を参照せよ)。このとき

$$\mathrm{Res}^{S_n}_{S_{n-1}} V_\lambda = \bigoplus_{\mu=\lambda-\square} V_\mu$$

が成り立つ。

例 2.

$$\mathrm{Res}^{S_9}_{S_8} V_{(4,2,2,1)} = V_{(3,2,2,1)} \oplus V_{(4,2,1,1)} \oplus V_{(4,2,2)}$$

系として、制限表現に現れる既約表現の重複度はすべて 1 であることがわかる。

証明に必要な前提知識を述べ、それらを用いて証明を行う。

2.1 用語

n の分割全体の集合を $\mathcal{P}_n$ とする。

類関数の制限を $\mathrm{res}^G_H f$ で表す。類関数の内積を

$$(f \mid g)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \overline{f(x)} g(x)$$

により定める。

2.2 対称関数

まず分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ に対して**べき和対称多項式**を定める。これは

$$p_k(x_1, \ldots, x_n) = x_1^k + \cdots + x_n^k$$

としたとき

$$p_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = p_{\lambda_1}(x_1, \ldots, x_n) \cdots p_{\lambda_l}(x_1, \ldots, x_n)$$

により定まる多項式である。定義より明らかに対称多項式である。

次に**完全対称多項式**を定める。これは

$$h_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \le i_1 \le \cdots \le i_k \le n} x_{i_1} \cdots x_{i_k}$$

としたとき

$$h_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = h_{\lambda_1}(x_1, \ldots, x_n) \cdots h_{\lambda_l}(x_1, \ldots, x_n)$$

により定まる対称多項式である。

またシューア多項式と呼ばれる対称多項式もある。$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ に対して

$$A_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \det(x_i^{\alpha_j})_{1 \le i,j \le n}$$

とする。$\delta_n = (n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$ としたとき $A_{\delta_n}(x_1, \ldots, x_n)$ は Vandermonde 行列式 $\prod_{1 \le i < j \le n}(x_i - x_j)$ に等しい。長さが n 以下の分割 λ に対して $A_{\lambda+\delta_n}(x_1, \ldots, x_n)$ は $A_{\delta_n}(x)$ で割り切れる。ゆえに

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \frac{A_{\lambda+\delta_n}(x_1, \ldots, x_n)}{A_{\delta_n}(x_1, \ldots, x_n)}$$

は多項式となる。これを**シューア多項式**と呼ぶ。シューア多項式が対称多項式となることも簡単にわかる。

べき和対称多項式 $p_\lambda(x_1,\ldots,x_n)$、完全対称多項式 $h_\lambda(x_1,\ldots,x_n)$、シューア多項式 $s_\lambda(x_1,\ldots,x_n)$ を定めたが、変数の個数を $n\to\infty$ としたものを考える。これらを**べき和対称関数**、**完全対称関数**、**シューア関数**といい、$p_\lambda, h_\lambda, s_\lambda$ で表す。これらは対称関数環 Λ の元である。

命題 3 ([1] 定理 8.3.9, 命題 8.3.13)**.** λ が分割全体をわたるとき、$\{p_\lambda\}, \{s_\lambda\}$ はともに Λ の基底をなす。

2.3 対称関数環の内積

対称関数環 Λ に内積を

$$\langle s_\lambda, s_\mu\rangle = \delta_{\lambda\mu}$$

により定める。このとき p_λ の内積について次が成り立つ。

命題 4 ([1] 定理 8.3.16)**.** 分割 λ に i が m_i 個あるとし、$z_\lambda = \prod_{i\geq 1} i^{m_i} m_i!$ とする。このとき

$$\langle p_\lambda, p_\mu\rangle = z_\lambda \delta_{\lambda\mu}$$

が成り立つ。

2.4 ピエリの規則

ヤング図形 λ, μ に対して、μ が λ に含まれるとき λ から μ を除いて得られる図形を λ/μ と書く。λ/μ が各列に高々 1 つしか箱を含まないとき、λ/μ は水平帯という。

定理 5 ([1] 定理 8.3.24)**.** $\mu \in \mathcal{P}_k$ とする。このとき

$$h_r s_\mu = \sum_\lambda s_\lambda$$

が成り立つ。右辺の λ はヤング図形として μ を含む $k+r$ の分割であって、λ/μ が水平帯であるものをわたる。

分岐則の証明で用いるのは $r=1$ の場合のみである。このとき $h_1 = p_1$ が成り立つので、次のようになる。

系 6. $\mu \in \mathcal{P}_{n-1}$ とする。このとき

$$p_1 s_\mu = \sum_{\lambda = \mu + \square} s_\lambda$$

が成り立つ。

2.5 フロベニウスの指標公式

S_n の類関数のなす空間を R_n とし、$R = \bigoplus_{n=0}^\infty R_n$ とする。写像 $\vartheta\colon R \to \Lambda$ を、$f \in R_n$ に対して

$$\vartheta(f) = \sum_{\mu\in\mathcal{P}_n} \frac{1}{z_\mu} f(C_\mu) p_\mu$$

とすることで定める。ここで C_μ はサイクル・タイプ μ に対応する S_n の共役類を表す。f は類関数なので $f(C_\mu)$ は well-defined である。

この写像は内積を保つ。

定理 7 ([1] 定理 8.4.8)**.** $f, g \in R_n$ に対して、$(f \mid g)_{S_n} = \langle \vartheta(f), \vartheta(g) \rangle$ が成り立つ。

さらにこの写像は対称群の既約指標とシューア関数を結んでいる。

定理 8 ([1] 定理 8.5.1)**.** $\vartheta(\chi_\lambda) = s_\lambda$

系 9 (フロベニウスの指標公式)**.**

$$s_\lambda = \sum_{\mu \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{z_\mu} \chi_\lambda(C_\mu) p_\mu$$

対称関数環 Λ の内積を考えると、フロベニウスの指標公式から次が従う。

系 10. $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_n$ に対して

$$\langle s_\lambda, p_\mu \rangle = \chi_\lambda(C_\mu)$$

が成り立つ。

2.6 証明

準備が整ったので対称群の分岐則を示す。$n-1$ の分割 $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_l)$ に対して、$(\eta, 1) = (\eta_1, \ldots, \eta_l, 1)$ とする。

$$\begin{aligned}
(\chi_{\mathrm{Res}^{S_n}_{S_{n-1}} V_\lambda} \mid \chi_{V_\mu})_{S_{n-1}} &= \langle \vartheta(\mathrm{res}^{S_n}_{S_{n-1}} \chi_\lambda), \vartheta(\chi_\mu) \rangle \\
&= \left\langle \sum_{\eta \in \mathcal{P}_{n-1}} \frac{1}{z_\eta} \mathrm{res}^{S_n}_{S_{n-1}} \chi_\lambda(C_\eta) p_\eta, s_\mu \right\rangle \\
&= \sum_{\eta \in \mathcal{P}_{n-1}} \frac{1}{z_\eta} \chi_\lambda(C_{(\eta,1)}) \langle p_\eta, s_\mu \rangle \\
&= \sum_{\eta \in \mathcal{P}_{n-1}} \frac{1}{z_\eta} \chi_\lambda(C_{(\eta,1)}) \chi_\mu(C_\eta) \\
&= \sum_{\eta \in \mathcal{P}_{n-1}} \frac{1}{z_\eta} \langle p_{(\eta,1)}, s_\lambda \rangle \chi_\mu(C_\eta) \\
&= \left\langle \sum_{\eta \in \mathcal{P}_{n-1}} \frac{1}{z_\eta} \chi_\mu(C_\eta) p_\eta p_1, s_\lambda \right\rangle \\
&= \langle p_1 s_\mu, s_\lambda \rangle
\end{aligned}$$

ピエリの規則から

$$p_1 s_\mu = \sum_{\lambda = \mu + \Box} s_\lambda$$

となるので

$$(\chi_{\mathrm{Res}^{S_n}_{S_{n-1}} V_\lambda} \mid \chi_{V_\mu})_{S_{n-1}} = \begin{cases} 1 & (\lambda = \mu + \Box) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

を得る。これで分岐則が示された。

2.7　誘導表現

制限表現に関する分岐則を得たが、フロベニウスの相互律 ([1] 定理 5.6.11) を用いて誘導表現に関する分岐則も得られる。

定理 11. $\mu \in \mathcal{P}_{n-1}$ に対して

$$\mathrm{Ind}_{S_{n-1}}^{S_n} V_\mu = \bigoplus_{\lambda=\mu+\square} V_\lambda$$

例 12.

$$\mathrm{Ind}_{S_8}^{S_9} V_{(3,3,2)} = V_{(4,3,2)} \oplus V_{(3,3,3)} \oplus V_{(3,3,2,1)}$$

参考文献

[1] 池田岳, テンソル代数と表現論　線型代数続論, 東京大学出版会, 2022.

[2] Amritanshu Prasad, *Representation Theory A Combinatorial Viewpoint*, Cambridge University Press, 2015.

[3] Daniel Bump, *Lie Groups*, Springer, 2016.