

4.1

1. W は \mathbb{R}^3 の部分空間かどうか調べよ.

$$(1) \quad W = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ とおくと } W = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\vec{x} = \vec{0} \right\}.$$

例題 4.1.1 より W は部分空間である. \square

直接: (i) $\vec{0} \in W \because A\vec{0} = \vec{0}$.

(ii) $\vec{u}, \vec{v} \in W \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in W$

$$\because A\vec{u} = \vec{0}, A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow A(\vec{u} + \vec{v}) \stackrel{\text{分配律}}{=} A\vec{u} + A\vec{v} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

$$(iii) \vec{u} \in W, c \in \mathbb{R} \Rightarrow c\vec{u} \in W$$

$$\therefore A(c\vec{u}) \stackrel{(*)}{=} c A\vec{u} = c \vec{0} = \vec{0}.$$

\uparrow
 $\vec{u} \in W$

ad (*):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$c \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vdots \\ \vec{u} \end{bmatrix}$$

=

$$\begin{bmatrix} a_{11} \underline{c} u_1 + \dots + a_{1n} \underline{c} u_n \\ \vdots \\ a_{m1} \underline{c} u_1 + \dots + a_{mn} \underline{c} u_n \end{bmatrix}$$

$$= c \cdot A\vec{u}$$



(2) $W = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 1 \end{array} \right\}$ は 部分空間ではない.

$$\because \vec{x} := \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in W, \quad 3\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin W \quad \square$$

(3)

$W = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x_3 = 2x_1 - 3x_2 \\ 3x_3 = x_1 + 2x_2 \end{array} \right\}$ は 部分空間である.

$$\begin{array}{l} \because \begin{array}{l} x_3 = 2x_1 - 3x_2 \\ 3x_3 = x_1 + 2x_2 \end{array} \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{array} \end{array}$$

$$(\Rightarrow) \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

4.1.1
 \Rightarrow) W は 部分空間である. \square