秋学期第十回課題解説

1. (1) $\int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{x^2} (x^4 - 2y)dy = \int_{-1}^{1} dx[x^4 y - y^2]_{y=0}^{y=x^2} = \int_{-1}^{1} dx\,(x^6 - x^4) = 2\int_{0}^{1} (x^6 - x^4)dx = 2\left[\frac{x^7}{7} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = -4/35.$

(2) 積分領域は横線領域 $3y \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 1$ である．縦線領域としては $0 \leq y \leq \frac{x}{3}$, $0 \leq x \leq 3$ である（この領域は $(0,0)$, $(3,0)$, $(3,1)$ を 3 頂点とする三角形）．積分の順序交換して，先に y で積分する．$\int_0^3 dx \int_0^{\frac{x}{3}} \frac{dy}{(1+x^2)^3} = \int_0^3 dx \frac{x}{3(1+x^2)^3}$．そこで $u = 1 + x^2$ とおいて置換積分すると，つづきは $\frac{1}{6}\int_1^{10} \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{6}\left[-\frac{1}{2t^2}\right]_1^{10} = 33/400.$

(3) 積分領域は横線領域 $\sqrt{y} \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. 縦線領域としては $0 \leq y \leq x^2$, $0 \leq x \leq 1$ である．与えられた順序では難しいので，順序を入れかえて，先に y で積分する．$\int_0^{x^2} e^{\frac{y}{x}} dy = [xe^{\frac{y}{x}}]_{y=0}^{y=x^2} = xe^x - x.$ これを x に関して $0 \leq x \leq 1$ で積分すると，続きは $\int_0^1 (xe^x - x)dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = e - (e-1) - \frac{1}{2} = 1/2.$

2. $D = [0,1] \times [0,1]$ とする．(1)(2)(3) ともに $\lim_{n\to\infty} \sum_{i,j=1}^{n} (1/n)^2 f(i/n, j/n)$ の形の極限に書き換えられる．このように書き換えれば二重積分の定義により，この極限は $\iint_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)dxdy$ である．

(1) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i,j=1}^{n} (1/n)^2 \frac{1}{(1+i/n+j/n)^2}$ と書き換えられるから $\iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{1}{(1+x+y)^2} dxdy$ に帰着する．先に y で積分すると $\iint_D \frac{1}{(1+x+y)^2}dxdy = \int_0^1 dx \left[-\frac{1}{1+x+y}\right]_{y=0}^{y=1} = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x}\right)dx = \left[\log\frac{1+x}{2+x}\right]_0^1 = \log\frac{4}{3}.$

(2) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i,j=1}^{n} (1/n)^2 (i/n + j/n)$ と書き換えられるから $\iint_{[0,1]\times[0,1]} (x+y)dxdy$ に帰着する．先に y で積分すると $\iint_D (x+y) = \int_0^1 dx\left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1} = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right]_0^1 = 1.$

(3) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i,j=1}^{n} (1/n)^2 \frac{1}{1+i/n+j/n}$ と書き換えられるから $\iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{1}{1+x+y}dxdy$ に帰着する．先に y で積分すると $\iint_D \frac{1}{1+x+y}dxdy = \int_0^1 dx[\log(1+x+y)]_{y=0}^1 = \int_0^1 \{\log(2+x) - \log(1+x)\}dx = [(2+x)\log(2+x) - x - (1+x)\log(1+x) + x]_0^1 = 3\log 3 - 2\log 2 - 2\log 2 = \log\frac{27}{16}.$