講義 LECTURE 02

クーロンの法則とガウスの法則

電流や磁場が存在しない，いわゆる静電気のみの基本法則は，唯一，**クーロンの法則**だけであるといってよい(もちろん，これ以外に，運動方程式や作用・反作用の法則，力のベクトル的な重ね合わせといった力学的法則は，暗黙のうちに了解事項になっているのだが)。

そこで我々も，オーソドックスにクーロンの法則から出発することにしよう。

ただし，大学で学ぶ電磁気学では，クーロンの法則は最初に登場するだけで，次第に形を変えたものになっていく。それはちょうど，1人の赤ん坊が一人前の大人に成長していくような変化である。つまり，見た目は違うが，同じ人間(法則)の成長なのだという，そこのところをつねに念頭においておかないと，力学と比べて電磁気学はややこしい，ということになるのである。混乱してきたときは，つねにクーロンの法則に立ち戻ることを心しておこう。

●クーロンの法則

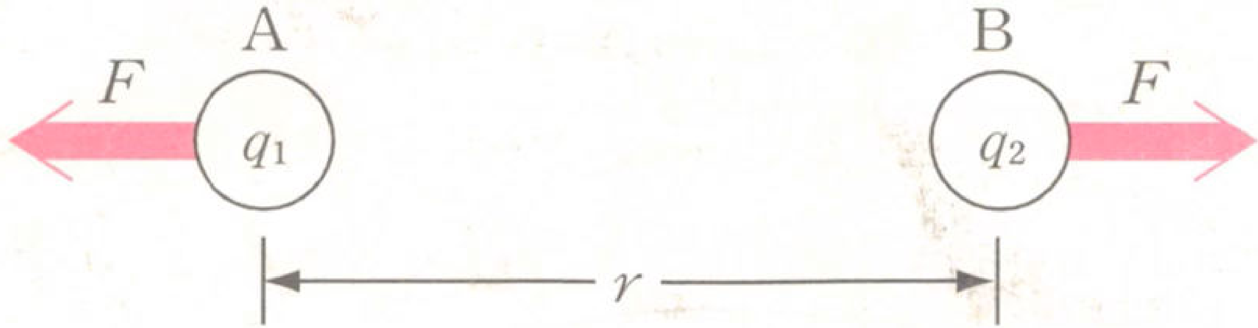
さて，クーロンの法則は，高校物理ですでにおなじみであるが，２つの**点電荷**の間にどんな力が働くかを示す法則である。

なお，電気量の単位は，SI 単位系では，法則の発見者にちなんで「**クーロン**」[C] を用いる。講義１で見たように，電磁気学の基本単位は電流の「**アンペア**」[A] であるが，当面は「クーロン」を基本単位としておこう。つまり，力学で登場した

「メートル」「キログラム」「秒」の３つの基本単位に加えて，「クーロン」を用いれば，電磁気学におけるすべての物理量が表現できる

ということである。

図2-1 ●静電気力(斥力は同符号のとき)



電気量 q_1 の点電荷 A と電気量 q_2 の点電荷 B が，距離 r だけ離れて存在するとき，A と B の間に働くクーロン力(静電気力)の大きさ F は，高校物理の表現を用いれば，

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

←クーロンの法則

である。比例定数 k は，講義1で見たように，SI 単位系では，90 億！[Nm²/C²] というとんでもなく大きな値である。

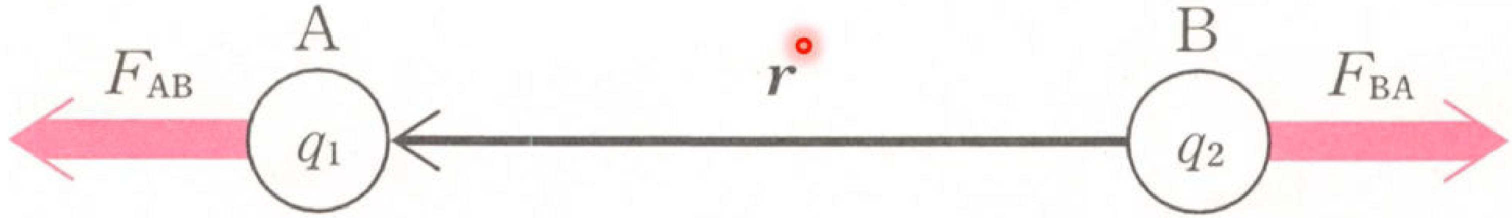
さて，上のクーロンの法則の表現は，たいへんすっきりしているが，後々のことを考えて，少し変形することにしよう(いよいよ赤ん坊の成長のはじまりである)。

まず，k を $1/4\pi\varepsilon_0$ と置き換える。$1/4\pi$ にする理由は，すぐに明らかになる。それに対して $1/\varepsilon_0$ にする理由は，「やむをえず」ということにしておこう。じっさい SI 単位系でない単位系をとれば，ε_0 を 1 としてしまうことも可能なのである。当面は，「クーロン」という電気量を「ニュートン」という力学的な力と結びつけるための便宜的な定数としておく。この定数 ε_0 には，**真空の誘電率**という変な名前がついているが，その意味は講義 6 で明らかとなる。

k もまた便宜的な定数のように見えるが，じつは 90 億という値は，真空中の光の速さを c として，厳密に $10^{-7}\times c^2$ である。この「ナゾ」は，講義 10 の電磁波のところで明らかになるだろう。

もう 1 つの変形は，法則をベクトル表現にするための手段である。電磁気学においては，力学以上に，物理量を 3 次元の空間の中でイメージすることが重要になる。そのために，手段とはいえ，ベクトルで表現された数式に慣れておくことにしよう。

図2-2●B から A に向かう位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とすると。



いま，点電荷 B から点電荷 A に向かう位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$, A が B から受けるクーロン力を $\boldsymbol{F}_{AB}$, B が A から受けるクーロン力を $\boldsymbol{F}_{BA}$ とすれば，

$$\boldsymbol{F}_{AB}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^3}\,\boldsymbol{r}$$

である(力の向きが r 方向であることを示すために，ベクトル $\boldsymbol{r}$ をつけたので，分母が r^3 になっている。最初の表現に比べると，あまり「きれい」とはいえないが，やむをえない。こういう「きれい」ではない式を見て，頭の中では「きれいな」法則をイメージするのも物理の勉強のうちである)。

$\boldsymbol{F}_{AB}=-\boldsymbol{F}_{BA}$ であるが，これはもちろん，**作用・反作用の法則が電気力においても成立している**ことを意味する。

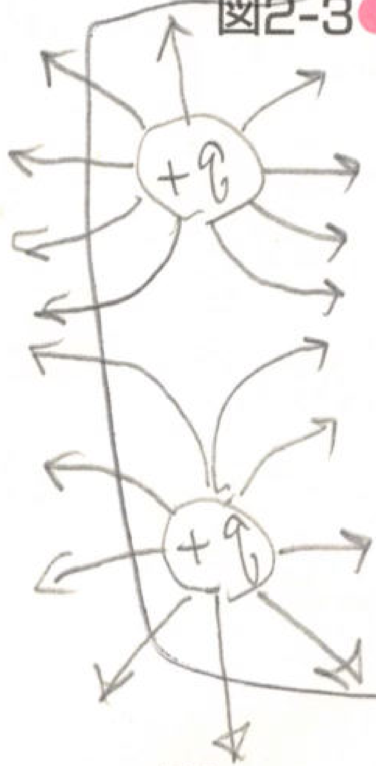
●電場 = 電界

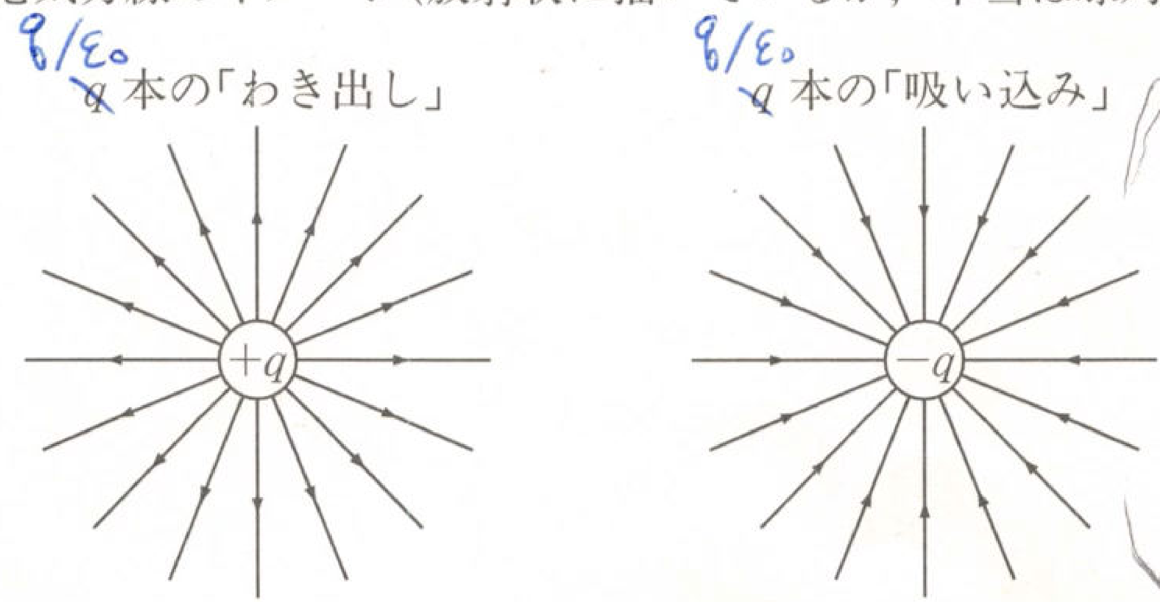
⊗ 説明ひどい。別の本使え

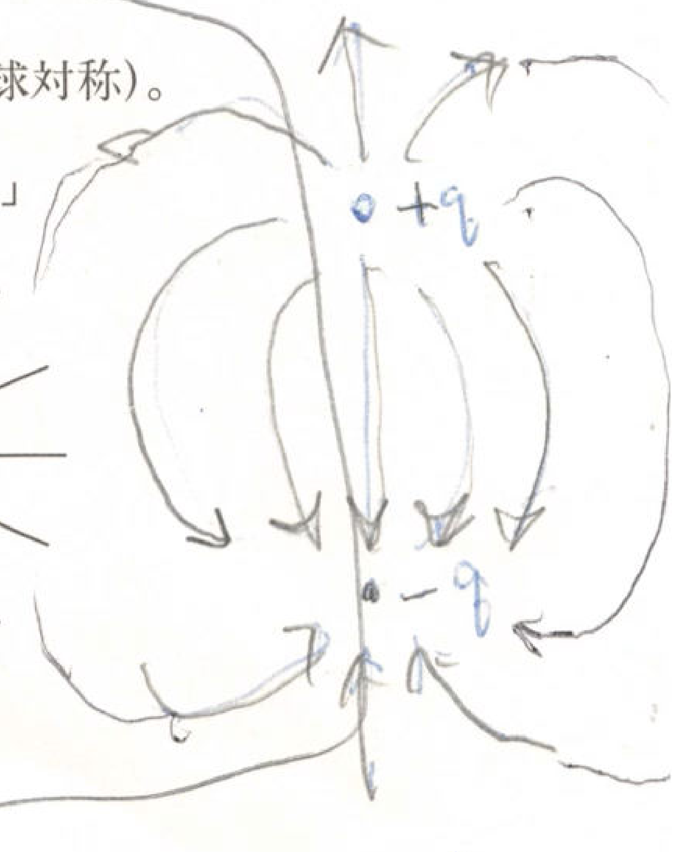
さて，講義1の考え方にしたがって，クーロンの法則から**電場**へと進むことにしよう。

場はじっさいに目にすることはできないから，そのイメージは人さまざまである。本書では，できるだけ直感に訴えられるよう，力線(電場なら電気力線，磁場なら磁力線)のイメージを採用することにする(リチャード・ファインマンは，数式そのものでイメージするのがよいとアドバイスしているのだが……)。

図2-3●電気力線のイメージ(放射状に描いているが，本当は球対称)。







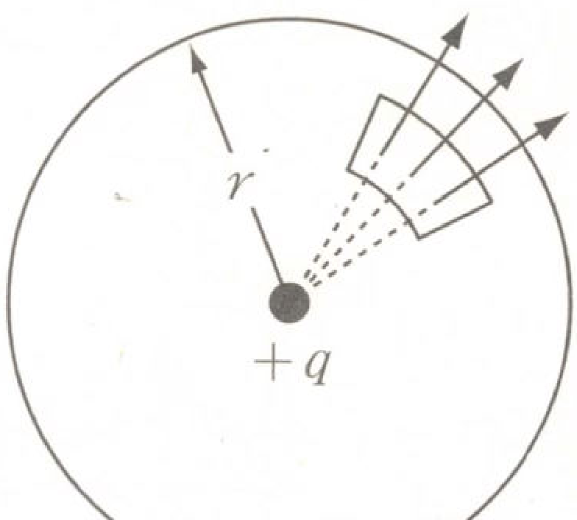
さて，１つの点電荷から「わき出す」(＋の点電荷としておく。－の点電荷なら，「わき出す」を「吸い込まれる」と置き換えればよい)電気力線の本数は，その点電荷がもっている電気量に比例することはいうまでもないだろう。問題は，１クーロンの電荷から何本の電気力線が出ているかであるが，そもそも電気力線自体が架空のものだから，これは定義次第ということになる。

電束は　電気力線は $1/\varepsilon_0$ 本

~~そこで，まずは分かりやすく~~，１クーロンで１本~~と決めてみよう~~。

とはいえ，１本の電気力線を球対称には描けないから，１クーロンの点電荷であっても，そこから無数の電気力線の束が出ている様子をイメージしなければならない。たとえば１万本出ている場合，その１万本を，あらためて１万円札を１枚と数えるように，１本と数えることにすればよい。

図2-4



電束は

表面積 $4\pi r^2$ から q 本出ているから，
その密度は $\dfrac{q}{4\pi r^2}$。

電束

電束

このように定義すると，$q(>0)$[C] の電気量をもった点電荷からは，q 本の~~電気力線~~が出ている（わき出している）ことになる。ここで，この点電荷を中心とした半径 r の球面を考えよう。この球面の表面積は $4\pi r^2$ であるから，この球面上での~~電気力線~~の密度（これを D とする）は，

電束

$$D = \frac{q}{4\pi r^2}$$

電束　D

となる。これも直感的なイメージであるが，~~電気力線~~の密度が大きいということは電場が強いということであり，ひいてはそこにある点電荷をもってきたときに働くクーロン力が大きいということであろう。すなわち，電場の強さは電気力線の密度に比例するとしよう。電場の方向は，むろん，電気力線の方向である。

E

そこで，上の D の式をベクトルで表現すると，

電束でもOK

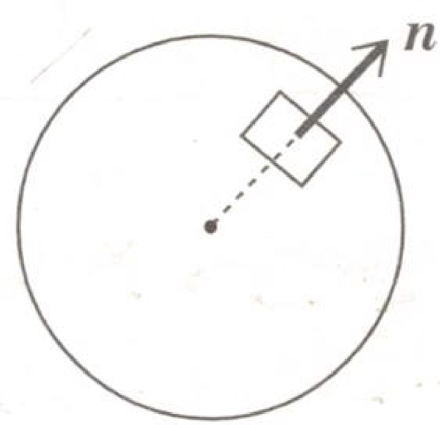
$$\boldsymbol{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\boldsymbol{n}$$

そもそもここでDの話はいらないのでは？ 6章でDをちょっと話せば十分

図2-5●電場は電気力線の密度に比例

密度小 → $|\boldsymbol{D}|$は小　　　　密度大 → $|\boldsymbol{D}|$は大

図2-6●球の中心から外側に向かう単位ベクトル



となる。ただし，$\boldsymbol{n}$ は球の中心から外側に向かう（法線方向）の単位ベクトルである（つまり，この式の右辺の読み取り方は，大きさが $q/4\pi r^2$ で，その向きが $\boldsymbol{n}$ の方向であるベクトルということである）。

じつは，上で示した $\boldsymbol{D}$ は，電磁気学で正式に「認知」されている物理量で，**電束密度**と呼ばれる(電場とはいわない)。~~電気力線を**電束**と呼べば，その密度だから，電束密度ということになる~~。

→P10

正しくはP107

ここで，電束密度の式を，クーロンの法則から定義した電場(電界)の式と比較してみよう(クーロンの法則で，片方の点電荷を $+1$ クーロンとする)。k を $1/4\pi\varepsilon_0$ とし，ベクトル表現をすれば，

$$\boldsymbol{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\boldsymbol{n}$$

$$\boldsymbol{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r} \longrightarrow \boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{n}$$

$\rightarrow \boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$

つまり，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{D}$ は，$1/\varepsilon_0$ の違いを除けばまったく同じ式である。クーロンの法則の係数に $1/4\pi$ をつけた意味がお分かりであろう。クーロン力が $1/r^2$ に比例するとは，$1/4\pi r^2$ に比例するということであり，それは球対称の場であるという意味を含んでいるのである。

$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$

さて，$1/\varepsilon_0$ の違いは，便宜的なものにすぎない。電場 $\boldsymbol{E}$ は，力ニュートンと結びつかねばならないから(単位は [N/C])，ニュートンとクーロンを結ぶ何らかの比例定数がつくのはやむをえない。それに対して，電束密度は~~たんに電気力線~~(正確には，電束)の密度 [C/m^2] だから，$1/\varepsilon_0$ など不要なのである。

我々は当面，真空中での電場の様子だけを考えていく。このとき，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{D}$ の違いをあえて意識する必要はない（もちろん，$1/\varepsilon_0$ だけの違いは忘れてはならないが）。$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{D}$ の差が現実問題となってくるのは，電場が真空ではなく誘電体の内部にあるような場合である。このとき，電場 $\boldsymbol{E}$ と電束密度 $\boldsymbol{D}$ は単純な比例関係ではすまなくなってくる。これは，ミクロの自然法則を求める物理学というよりは，マクロの物質の性質を調べるいわば工学的応用である。本書では，そこまでは立ち入らず，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{D}$ の違いについてあまり悩まないことにしよう。

そこで結論であるが，本書では電場を $\boldsymbol{E}$ で表し，それを~~便宜的なイメージとして~~電気力線の密度とする。ただし，**電気量 q の点電荷から生じる電気力線の本数を~~（単位のつじつまを合わせるために）~~ q/ε_0 本だとしておこう。**

このようにして，もう一度，電場の式を書いておくと，

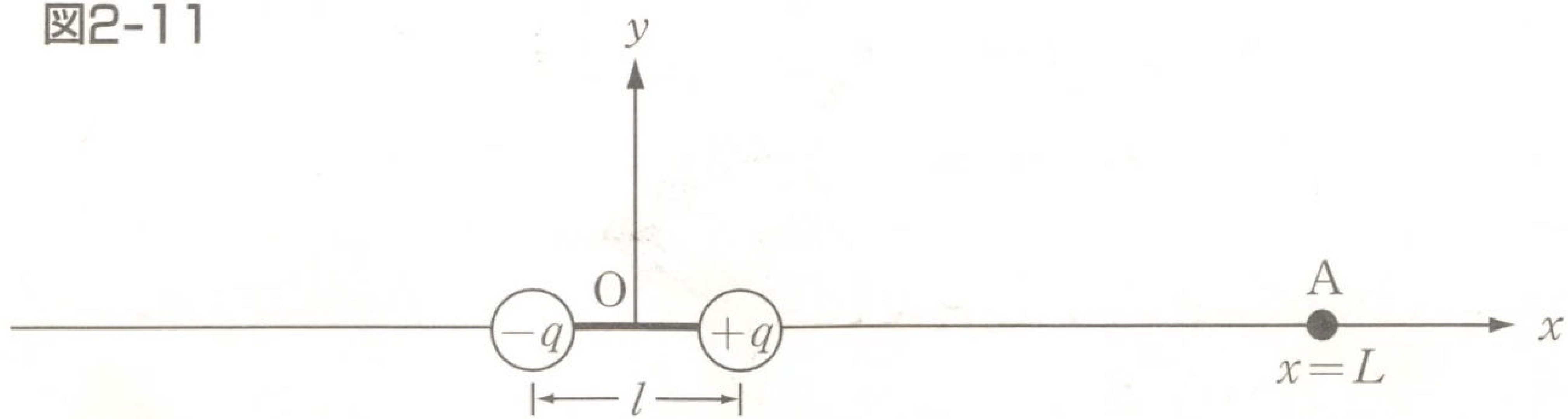
$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\boldsymbol{n}$$

この式は，最初に提示されたクーロンの法則と異なるものではなく，クーロンの法則の「成長」した姿だと認識しておこう。→ 先に中2ク演習 2-1をやれ

演習問題 2-1

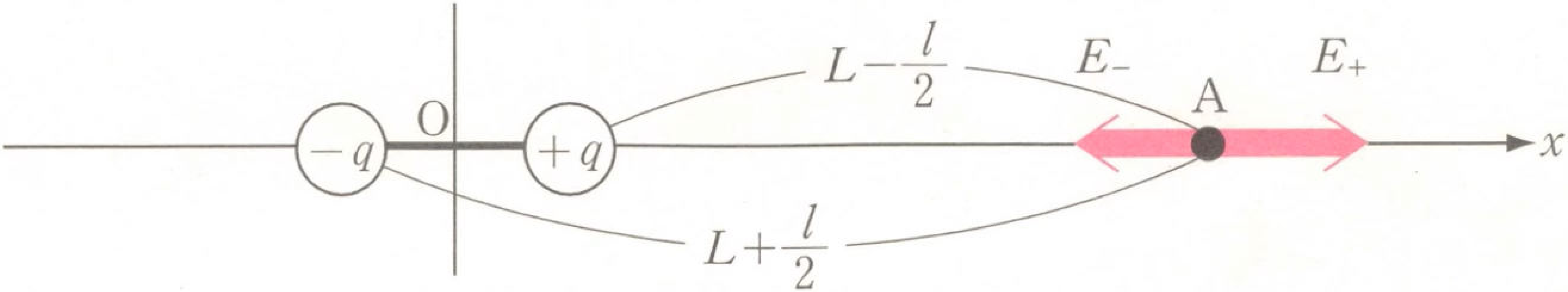
真空中の $x=+l/2(l>0)$ に電気量 $q(>0)$ の点電荷が，また，$x=-l/2$ に電気量 $-q$ の点電荷が固定されている。$x=L(>0)$ の点 A におけるこの 2 つの点電荷の合成電場の大きさはいくらか。ただし，真空の誘電率を ε_0 とし，L は l より十分大きいとして近似計算せよ。

図2-11



解答＆解説

図2-12



$+$の点電荷が点 A につくる電場の向きは x の正方向，$-$ の点電荷が点 A につくる電場の向きは x の負方向であり，その大きさをそれぞれ E_+，E_- とすると，

$$E_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\left(L-\frac{1}{2}l\right)^2}$$

$$E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\left(L+\frac{1}{2}l\right)^2}$$

である。L が正であれば，$+$の点電荷の方が点 A に近いから，$E_+ > E_-$ であり，合成電場は x の正方向を向く。そして，その大きさ E は，

$$E_+ - E_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{\left(L-\frac{1}{2}l\right)^2}-\frac{1}{\left(L+\frac{1}{2}l\right)^2}\right\}$$

ここで，L は l より十分大きいということより，近似計算をおこなうが，その方法は高校物理で登場する近似計算とまったく同様である。(1＋小さい量)とするため，$1/L^2$ をまずくくり出す。

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 L^2}\left\{\left(1-\frac{l}{2L}\right)^{-2}-\left(1+\frac{l}{2L}\right)^{-2}\right\}$$

ここで，「$(1+\text{小さい量})^n \fallingdotseq 1+n\times\text{小さい量}$」を用いて，

$$\fallingdotseq \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 L^2}\left\{\left(1+\frac{l}{L}\right)-\left(1-\frac{l}{L}\right)\right\}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 L^2}\frac{2l}{L}$$

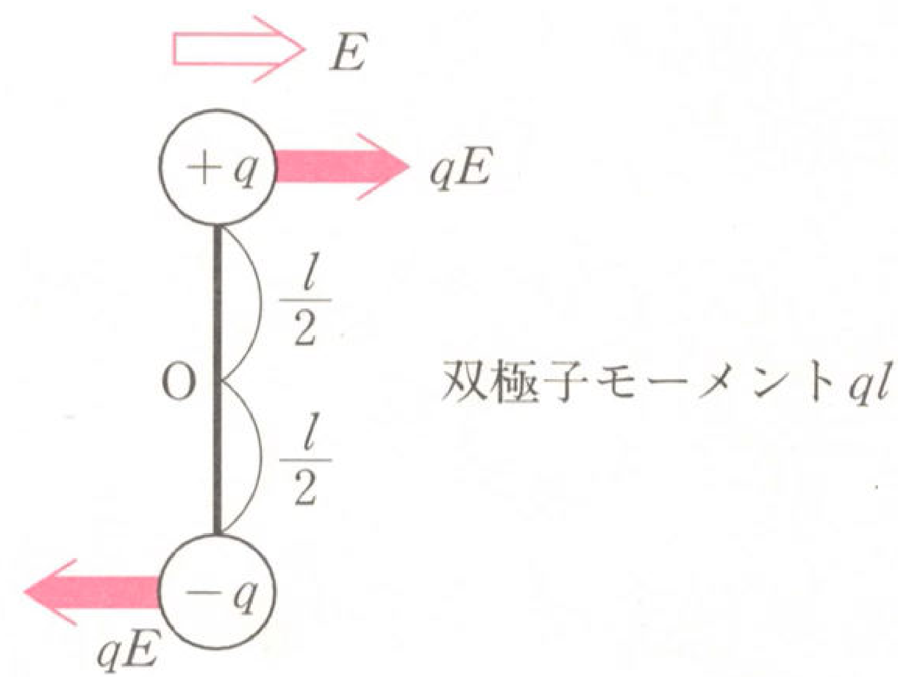
$$= \frac{ql}{2\pi\varepsilon_0 L^3} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

◆

このように，短い距離をおいて固定された大きさの等しいプラスとマイナスの点電荷を，**電気双極子**と呼ぶ。電気双極子が(遠方に)つくる電場は，上のように ql/L^3 の形になるが，この ql をこの電気双極子の**双極子モーメント**と呼ぶ。

別の話題

図2-13●電気双極子の力のモーメントの大きさは $qE\times\frac{l}{2}+qE\times\frac{l}{2}=qlE$ である。



じっさい，この電気双極子を電場の中に置くと，力学の力のモーメントの定義(力×腕の長さ)にしたがって，ql に比例するモーメントが生じる。分極した分子など，自然界には電気双極子とみなせる現象が多いので，双極子モーメントは，たいへん重要な概念である。

電気工学で、磁力線と磁束、電気力線と電束、これらの違い。

ある点電荷から放射される電気力線の本数は、点電荷の電荷量を周囲の誘電率で割ったものとして定義されますが、電束の本数は電荷量そのもので定義されます。電気力線という考え方は、単位面積あたりの本数がそのまま電界強度になるので使いやすいものでありますが、誘電率により密度が変化してしまうので、「途中で切れたり消滅したりしない仮想的な線」としては都合の悪い面もあります。つまり一度電荷から放射された電気力線は、途中で誘電率の異なる媒体を通過すると、通過中だけ本数が増減してしまいます。そこで、誘電率に影響を受けない仮想線として定義されたのが電束です。Q[C]の電荷からは Q[本]の電束が出るというのはシンプルな考え方ですし、途中で誘電率が変わっても本数を変えなくて済みます。
磁力線と磁束も同じような関係で、磁力線の本数は透磁率に左右されます。

(a) $\varepsilon_2 E_2 \cos\theta_2$ (b) $E_2 \sin\theta_2$ (c) $\dfrac{\tan\theta_2}{\varepsilon_2}$