



線形代数II 木曜日 2時限目

中間テスト: ~~11月21日~~ 11月28日 (第4章と5.1と5.2)

期末テスト: 1月23日

成績: 中間テストと期末テストによって評価する

- ベクトル空間 (第4章)

行と列ベクトルを「ベクトル空間のベクトル」に一般化する.  
ベクトル空間で計算を行う.

keyword: 1次独立と1次従属, ベクトル空間の基底と次元.

- 線型写像 (第5章)

ベクトル空間の間の線形性を持つ写像を導入する.  
線形写像と行列の関係、特に表現行列について勉強する.

keyword: 表現行列, 固有値と固有ベクトル, 行列の対角化.

- 内積空間 (第6章)

長さと角度を測ることができるベクトル空間

keyword: 正規直交化(orthonormalization), 直交行列,  
対称行列の対角化(diagonalization of symmetric matrices)

# Motivation 1 ベクトル空間と固有ベクトルI

線形微分方程式(linear differential equations)を考える.

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$

$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

ここで, 各 $i, j$ に対して,  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $x_i$ はベクトル空間

$$V := \{x : t \mapsto x(t) \mid \text{微分可能な関数}\}$$

のベクトルである.

そのベクトル空間 $V$ に,

関数の和と関数のスカラー倍が定義されている.

次の $2 \times 2$ 行列 $A = [a_{ij}]$ を考える.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

## Motivation 1 ベクトル空間と固有ベクトルII

ゼロでない列ベクトル  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$  と  $\lambda \in \mathbb{R}$  が

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad (1)$$

を満たすとき,  $\mathbf{v}$  を  $A$  の固有値  $\lambda$  に属する固有ベクトルと呼ぶ.

Fact  $\mathbf{v}$  が  $A$  の固有値  $\lambda$  に属する固有ベクトルであるとき,

$$\mathbf{x}_1 : t \mapsto e^{\lambda t} \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{x}_2 : t \mapsto e^{\lambda t} \mathbf{v}_2$$

は微分方程式の解である.

Proof.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_1(t) &= (e^{\lambda t})' \mathbf{v}_1 = e^{\lambda t} \lambda \mathbf{v}_1 \stackrel{(1)}{=} e^{\lambda t} (A\mathbf{v})_1 = e^{\lambda t} (a_{11} \mathbf{v}_1 + a_{12} \mathbf{v}_2) \\ &= a_{11} e^{\lambda t} \mathbf{v}_1 + a_{12} e^{\lambda t} \mathbf{v}_2 = a_{11} \mathbf{x}_1(t) + a_{12} \mathbf{x}_2(t). \end{aligned}$$



# Motivation 2 固有値 Hesse行列I

1 変数関数  $f(x) = x^2 + 2x - 1$  の極小値を求める.

- 微分が0となる値を求める (critical point)  $f'(x) = 2x + 2 = 0$ ,  
よって,  $x = -1$ .
- 第二導関数テスト (Second derivative test)  
 $f''(-1) = 2 > 0$  なので,  $f(-1)$  は極小値である.

2変数の関数  $g(x, y) = x^2 + y^2 - xy$  の極小値を求める.

- 勾配 (gradient) が0となる値を求める.

$$\nabla g(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y & 2y - x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

よって,  $x = 0, y = 0$  である.

- 二階導関数は...

## Motivation 2 固有値 Hesse行列II

...ヘッセ行列(Hesse matrix)

$$H(g)(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

ヘッセ行列の固有値(eigenvalue)を計算する:

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ 1 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = 0$$

を満たす $\lambda$ は $H(g)$ の固有値となる.

$$(\lambda - 2)^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \lambda = 1, \lambda = 3$$

極小値の判定条件:

固有値が全て正なので,  $g(0, 0)$ は極小値である.

## 4.1 ベクトル空間の定義

集合 $V$ に次のような2つの演算が定義され,

- (ベクトルの和)  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  ( $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ )
- (ベクトルのスカラー倍)  $a\mathbf{u}$  ( $\mathbf{u} \in V, a \in \mathbb{R}$ )

以下の性質を満たすとき, $V$ を( $\mathbb{R}$ 上の)ベクトル空間であるといい,  
 $V$ の元をベクトルという.

ベクトル空間の性質( $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, a, b \in \mathbb{R}$ )

$$(V1) \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

$$(V2) \quad (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

$$(V3) \quad \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} \text{ となるベクトル } \mathbf{0} \text{ が存在する.}$$

$$(V4) \quad a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$$

$$(V5) \quad (a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$$

$$(V6) \quad a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$$

$$(V7) \quad 1\mathbf{u} = \mathbf{u}$$

$$(V8) \quad 0\mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

# ベクトル空間の例

## Example

$m, n \geq 1$  とする.

実数を成分とする  $m \times n$  行列全体を  $M(m, n)$  と書く.

$$M(m, n) = \{A = [a_{ij}]_{m \times n} \mid a_{11}, \dots, a_{mn} \in \mathbb{R}\}.$$

ベクトルの和とスカラー倍は行列の和とスカラー倍によってベクトル空間となる.

とくに,  $m$  次の列ベクトル空間

$$\mathbb{R}^m := M(m, 1) = \left\{ \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} : a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R} \right\},$$

と  $n$  次行ベクトル空間

$$\mathbb{R}_n := M(1, n) = \{\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_n] : a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}.$$



# ベクトル空間の例(2)

## Example

実数を係数とする高々 $n$ 次の多項式の全体を $\mathbb{R}[x]_n$ と書く.  
 $\mathbb{R}[x]_n$ は普通の多項式の和と定数倍によってベクトル空間となる.

## Example

区間 $(a, b)$ で連続な実数値関数全体を $C(a, b)$ と書く.  
 $C(a, b)$ は関数の和と関数の定数倍によってベクトル空間となる.

## Definition

ベクトル空間 $V$ の部分集合 $W$ が $V$ の和とスカラー倍を用いてベクトル空間となるときの、 $W$ を $V$ の部分空間という.

## Example

$n$ 変数の同次連立一次方程式の解の全体は $\mathbb{R}^n$ の部分空間となる.

# 部分空間の必要十分条件

## Definition

ベクトル空間 $V$ の部分集合 $W$ が $V$ の和とスカラー倍を用いてベクトル空間となるときの、 $W$ を $V$ の部分空間という.

## Theorem (4.1.1)

ベクトル空間 $V$ の部分集合 $W$ が部分空間である必要十分条件は次の(1)(2)(3)が満たされることである.

- ①  $0 \in W$
- ②  $u, v \in W$ ならば  $u + v \in W$
- ③  $u \in W, c \in \mathbb{R}$ ならば  $cu \in W$ .

## Proof.

(必要) 明らかである. (十分) (2),(3)より,  
 $V$ の和とスカラー倍は $W$ の演算として扱うことができる.  
 $W$ の元は $V$ の元でもあるから、ベクトル空間の性質( $V3$ 以外)は満たされる.(1)より( $V3$ )が成り立つ.

## 部分空間(2)

### Corollary

$A \in M(m, n)$ とする. 次の集合 $W$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間となる.

$$W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

証明. 定理4.1.1の3条件を確かめれば良い.

- ①  $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ であるから,  $\mathbf{0} \in W$ である.
- ②  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$ とすると, 行列の積の分配律より,

$$A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

よって $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W$ .

- ③  $\mathbf{x} \in W, c \in \mathbb{R}$ とすると,

$$A(c\mathbf{x}) = c(A\mathbf{x}) = c\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

よって,  $c\mathbf{x} \in W$ .

# 部分空間の例

## Corollary

$A \in M(n, m)$  とする. 次の集合  $W$  は  $\mathbb{R}^m$  の部分空間となる.

$$W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

よって,  $n$  変数の同次形の連立一次方程式の解の全体は  $\mathbb{R}^n$  の部分空間となる.

## Example

系より,

$$W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, x_1 - 2x_2 + 3x_2 = 0\}$$

は  $\mathbb{R}^3$  の部分空間となる.

$$U = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, x_1 - 2x_2 + 3x_2 = 2\}$$

は  $\mathbb{R}^3$  の部分空間ではない. ( $\because \mathbf{0} \notin U$ )

## Example

①

$$W_1 = \{f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(1) = 0, \quad f(-1) = 0\}$$

は $\mathbb{R}[x]_3$ の部分空間である.

②

$$W_2 = \{f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(1) = 1\}$$

は $\mathbb{R}[x]_3$ の部分空間ではない.

③

$$W_3 = \{f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid xf'(x) = 2f(x)\}$$

は $\mathbb{R}[x]_3$ の部分空間である.



## 4.2 1次独立と 1 次従属

### Definition

$V$  のベクトル  $v$  が  $V$  のベクトル  $u_1, \dots, u_n$  を用いて

$$v = c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n \quad (c_i \in \mathbb{R})$$

と書けると、ベクトル  $v$  は  $u_1, \dots, u_n$  の 1 次結合で書けるという。  
 $V$  のベクトル  $u_1, \dots, u_n$  が

$$c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n = 0 \quad (c_i \in \mathbb{R})$$

を満たすとき、これをベクトル  $u_1, \dots, u_n$  の 1 次関係という。  
 $V$  のベクトル  $u_1, \dots, u_n$  が自明でない 1 次関係を持たない、すなわち

$$c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n = 0 \quad \implies \quad c_1 = \cdots = c_n = 0,$$

$u_1, \dots, u_n$  を 1 次独立であるという。 $u_1, \dots, u_n$  が 1 次独立でないとき、 $u_1, \dots, u_n$  は 1 次従属であるという。

## 4.2 1次独立と 1 次従属

### Example

$V = \mathbb{R}^n$  とする. 次のベクトルは 1 次独立である.

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

これらを  $\mathbb{R}^n$  の基本ベクトルという.

### Example

$V = \mathbb{R}[x]_n$  とする. 次の  $n + 1$  個のベクトルは 1 次独立である.

$$1, x, \dots, x^n.$$



# 復習：自明でない解が存在する条件

## Definition

$A \in M(m, n)$  の簡約化を  $B$  とするとき,

$\text{rank}(A) = B$  の 0 ベクトルでない行の個数.

## Theorem (2.3.3)

$A \in M(m \times n)$  とする.

- ① 同次形の連立 1 次方程式

$$Ax = 0$$

の解が自明なものに限る必要十分条件は

$$\text{rank}(A) = n.$$

- ②  $m < n$  ならば,  $Ax = 0$  は自明でない解を持つ.

## 例題4.2.1： 1次独立かどうか調べる

### Example

$\mathbb{R}^4$ のベクトルは1次独立か, 1次従属か調べる.

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

解答: 以下は同値である.

- ①  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ は1次独立である
- ② 連立1次方程式

$$[\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = [0]$$

は自明でない解を持たない.

- ③  $\text{rank}([\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3]) = 3$

## 4.2 1次独立と 1次従属

### Theorem (定理4.2.1)

$V$ のベクトル $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ が1次従属である必要十分条件は,  
 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ のうち少なくとも一個のベクトルが他の $n-1$ 個のベクトルの1次結合で書けることである.

### Proof.

(必要) 仮定より, 少なくとも1つは0でない定数  
 $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ で  $c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$  を満たすものが存在する.  
例えば  $c_1 \neq 0$  とすると,

$$\mathbf{u}_1 = -\frac{c_2}{c_1}\mathbf{u}_2 - \dots - \frac{c_n}{c_1}\mathbf{u}_n \quad \text{となる.}$$

(十分) 例えば,  $\mathbf{u}_1 = c_2\mathbf{u}_2 + \dots + c_n\mathbf{u}_n$  とする. よって,  
 $c_1 = -1$  とすると,  $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \dots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$ . つまり,  
 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  は1次従属である. □

## 4.2 1次独立と 1 次従属

### Theorem (定理4.2.2)

$u_1, \dots, u_n$  が 1 次独立で,  $u, u_1, \dots, u_n$  が 1 次従属ならば,  
 $u$  は  $u_1, \dots, u_n$  の 1 次結合で書ける.

### Proof.

仮定より, 少なくとも 1 個は 0 でない実数  $c, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  で

$$cu + c_1u_1 + \cdots + c_nu_n = 0$$

を満たすものが存在する.  $u_1, \dots, u_n$  が 1 次独立であるから,  
 $c \neq 0$ . よって

$$u = -\frac{c_1}{c}u_1 - \cdots - \frac{c_n}{c}u_n$$

となるから,  $u$  は  $u_1, \dots, u_n$  の 1 次結合で書ける. □

## 4.2 1次結合の記法

### Definition

$V$ の $m$ 個のベクトルの組 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ と行列 $A = [a_{ij}] \in M(m, n)$ に対し,

$$(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m)A := (a_{11}\mathbf{u}_1 + \dots + a_{m1}\mathbf{u}_m, \dots, a_{1n}\mathbf{u}_1 + \dots + a_{mn}\mathbf{u}_m)$$

と定義する.

### Example

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} = (3\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_2)$$

## 4.2 1次独立と 1 次従属

### Theorem (定理4.2.3)

$n > m$ とする. $V$ のベクトルの2つの組 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ と $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ に対し, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ の各ベクトルは $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ の1次結合で書けるならば, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ は1次従属である.

### Proof.

仮定より,次の条件を満たす $A \in M(m, n)$ が存在する

$$(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m) A.$$

$n > m$ なので, 連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は自明でない解を持つ.

それを $\mathbf{x} = \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ とおくと,

$$c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_n \mathbf{v}_n = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \mathbf{c} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m) A \mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

## 4.2 1次独立と 1 次従属

### Theorem (定理4.2.4)

$\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$  が 1 次独立なベクトルで,  $A \in M(m, n)$  のとき

$$(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m) A = (\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}) \quad \text{ならば } A = \mathbf{0}.$$

### Proof.

$A = [a_{ij}]$  とおくと, 各  $1 \leq j \leq n$  に対して,

$$a_{1j}\mathbf{u}_1 + \cdots + a_{mj}\mathbf{u}_m = \mathbf{0}.$$

$\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$  が 1 次独立であるから,

$$a_{1j} = \cdots = a_{mj} = 0.$$

よって,  $A = \mathbf{0}$ .



## 4.2 1次独立と 1次従属

### Corollary (定理4.2.5)

$\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$  は 1 次独立なベクトルとする.  $A, B \in M(m, n)$  に対し

$$(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m) A = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m) B \quad \text{ならば} A = B.$$

### Proof.

右辺を左辺に移項すると,

$$(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m) (A - B) = (\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}).$$

よって, 定理4.2.4より,  $A - B = \mathbf{0}$ . すなわち  $A = B$  である.  $\square$





## 4.3 ベクトルの1次独立な最大個数

### Example (例4.3.1)

次の $\mathbb{R}^4$ のベクトルを考える.

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $\{\alpha_1, \dots, \alpha_5\}$  の1次独立な最大個数を $r$ とし, $r$ を求める.
- $\{\alpha_1, \dots, \alpha_5\}$ の $r$ 個の1次独立なベクトルを求める.
- 事実:その $r$ 個の1次独立なベクトルを用いて,  
他の $\{\alpha_1, \dots, \alpha_5\}$ のベクトルを1次結合で表せる.

### 答え

$r = 3$ ,  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}$ は1次独立で,次が成り立つ.

$$\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_5 = 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_4.$$

## 4.3 ベクトルの1次独立な最大個数

### Definition

ベクトルの集合 $X$ の中に $r$ 個の1次独立なベクトルがあり、 $X$ のどの $r+1$ 個のベクトルも1次従属であるとき、 $r$ を集合 $X$ のベクトルの1次独立な最大個数という。

### Theorem (定理4.3.1)

$V$ のベクトルの2つの組 $v_1, \dots, v_n$ と $u_1, \dots, u_m$ に対し、 $v_1, \dots, v_n$ の各ベクトルが $u_1, \dots, u_m$ の1次結合で書けるならば、

$$\begin{aligned} & \{v_1, \dots, v_n\} \text{ の 1 次独立な最大個数} \\ & \leq \{u_1, \dots, u_m\} \text{ の 1 次独立な最大個数.} \end{aligned}$$

## 4.3 ベクトルの1次独立な最大個数

定理4.3.1の証明のために必要な定理を復習する.

### Theorem (定理4.2.2)

$u_1, \dots, u_n$ が1次独立で,  $u, u_1, \dots, u_n$ が1次従属ならば,  
 $u$ は $u_1, \dots, u_n$ の1次結合で書ける.

### Theorem (定理4.2.3)

$n > m$ とする. $V$ のベクトルの2つの組 $v_1, \dots, v_n$ と $u_1, \dots, u_m$   
に対し, $v_1, \dots, v_n$ の各ベクトルが $u_1, \dots, u_m$ の1次結合で書ける  
ならば,  $v_1, \dots, v_n$ は1次従属である.

### 定理4.3.1の証明.

$r := \{u_1, \dots, u_m\}$ の1次独立な最大個数.

$u_1, \dots, u_r$ が一次独立であるとする.

定理4.2.2より, $u_{r+1}, \dots, u_m$ は $u_1, \dots, u_r$ の一次結合で書ける.

よって, $v_1, \dots, v_n$ の各ベクトルは $u_1, \dots, u_r$ の一次結合で書ける.

定理4.2.3より, $\{v_1, \dots, v_n\}$ の1次独立な最大個数  $\leq r$ . □

## 4.3 ベクトルの1次独立な最大個数

### Theorem (定理4.3.2)

$\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$  の1次独立な最大個数  $= r \iff$   
 $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$  の中に  $r$  個の1次独立なベクトルがあり, 他の  
 $m - r$  個のベクトルはこの  $r$  個のベクトルの1次結合で書ける.

### 定理4.3.2の証明.

( $\implies$ )  $r$  個の1次独立なベクトルを例えば,  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$  とする.  
 $r < t \leq m$  とすると,  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_t$  は1次従属であるから,  
定理4.2.2より,  $\mathbf{u}_t$  は  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$  の1次結合で書ける.

( $\impliedby$ )

例えば,  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$  が1次独立で,  $\mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_m$  は  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$  の  
1次結合で書けるとする. よって,

$$r \leq \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\} \text{ の1次独立な最大個数.}$$

$\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$  は  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$  の1次結合で書けるから, 定理4.3.1より  
 $r \geq \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\} \text{ の1次独立な最大個数.}$

## 4.3 ベクトルの1次独立な最大個数

行列Aの簡約化をBとする. 定義より,

$$\begin{aligned}\text{rank}(A) &= B \text{のゼロベクトルでない行の個数} \\ &= B \text{の主成分を含む列の個数.}\end{aligned}$$

Bの主成分を含まない列は主成分を含む列の1次結合で書けるから,  
定理4.2.3より,

$$\text{rank}(A) \geq B \text{の列ベクトルの1次独立な最大個数}$$

Bの主成分を含む列は1次独立であるから,

$$\text{rank}(A) = B \text{の列ベクトルの1次独立な最大個数}$$

Bのゼロベクトルでない行は1次独立であるから,

$$\text{rank}(A) = B \text{の行ベクトルの1次独立な最大個数.}$$

**Theorem (定理4.3.3の特別の場合)**

$$\begin{aligned}\text{rank}(A) &= B \text{の列ベクトルの1次独立な最大個数} \\ &= B \text{の行ベクトルの1次独立な最大個数}\end{aligned}$$

## 4.3 ベクトルの1次独立な最大個数

行列Aの簡約化をBとする. A,Bの列ベクトルの分割を

$$A = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n], \quad B = [\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_n] \quad \text{と書く.}$$

このとき,

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad B\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

すなわち,

$$x_1\mathbf{a}_1 + \dots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad x_1\mathbf{b}_1 + \dots + x_n\mathbf{b}_n = \mathbf{0}.$$

言い換えると, $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n$ と $\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_n$ には同じ一次関係が成り立つ.

Aの列ベクトルの1次独立な最大個数  
=Bの列ベクトルの1次独立な最大個数

## 4.3 ベクトルの1次独立な最大個数

行基本変形で変形された行列の各行ベクトルは元の行列の行ベクトルの1次結合で書ける.

よって,  $B$  の行ベクトルは  $A$  の行ベクトルの一次結合で書ける.  
よって, 定理4.3.1より,

$$\begin{aligned} r &:= A \text{ の行ベクトルの 1 次独立な最大個数} \\ &\geq B \text{ の行ベクトルの 1 次独立な最大個数} =: s \end{aligned}$$

逆に,  $A$  は  $B$  から行基本変形で得られるから,  $r = s$ .  
これと定理4.3.3の特別の場合より, 次を得る.

### Theorem (定理4.3.3)

$$\begin{aligned} \text{rank}(A) &= A \text{ の列ベクトルの 1 次独立な最大個数} \\ &= A \text{ の行ベクトルの 1 次独立な最大個数} \end{aligned}$$



## 4.3 ベクトルの1次独立な最大個数

### Theorem (定理4.3.3)

$\text{rank}(A) = A$ の列ベクトルの1次独立な最大個数  
= $A$ の行ベクトルの1次独立な最大個数

定理2.4.2  $n$ 次正方行列 $A$ は正則である $\Leftrightarrow \text{rank}(A) = n$ .

### Corollary (定理4.3.4)

$n$ 次正方行列 $A$ について、次の3条件は同値である。

- ①  $A$ は正則行列である。
- ②  $A$ の $n$ 個の列ベクトルは1次独立である。
- ③  $A$ の $n$ 個の行ベクトルは1次独立である。

## 4.3 ベクトルの1次独立な最大個数

### Theorem (定理4.3.6)

$V$ のベクトル $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ は1次独立とする. $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ が $m \times n$ 行列 $A = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n]$ を用いて

$$(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m) A$$

と書けているとする.

- ①  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ と $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ には同じ一関係が成り立つ.
- ②  $m = n$ のとき,

$$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \text{が1次独立} \Leftrightarrow A \text{が正則行列.}$$

(2)は(1)と定理4.3.4よりわかる.

## 4.3 ベクトルの1次独立な最大個数

Proof.

$$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \text{ と } \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \text{ が}$$

$$(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \mathbf{c} = c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

を満たすとする. よって,

$$(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m) A \mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

$\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$  が 1 次独立であるから, 定理4.2.4より,

$$(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m) A \mathbf{c} = \mathbf{0} \Leftrightarrow A \mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

よって,  $c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \Leftrightarrow c_1 \mathbf{a}_1 + \dots + c_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}.$



## 4.3 ベクトルの1次独立な最大個数

行列Aの簡約化をBとする. A,Bの列ベクトルの分割を

$$A = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n], \quad B = [\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_n] \quad \text{と書く.}$$

このとき,

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow B\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

これを利用することで、次を得る.

### Theorem (定理4.3.5)

行列の簡約化は唯一通り決まる.

11月21日: 休講

中間テスト: ~~11月21日~~ 11月28日 (第4章と5.1と5.2)

## 4.4 ベクトル空間の基と次元

### Definition

ベクトル空間 $V$ のベクトル $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ が $V$ を生成するとは,  
 $V$ の全てのベクトルが $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ の1次結合で表せるときをいう.

### Example

$\mathbb{R}^n$ の基本ベクトル $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ は $\mathbb{R}^n$ を生成する.  
実際 $\mathbb{R}^n$ の任意のベクトルは

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = a_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + a_n \mathbf{e}_n$$

と, $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ の1次結合で書けている.

## 4.4 ベクトル空間の基と次元

### Definition

ベクトル空間 $V$ のベクトルの組 $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ が次の2つの条件を満たすときに $V$ の基(き),または基底という.

- ①  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ は1次独立である.
- ②  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ は $V$ を生成する.

### Example

$\mathbb{R}^n$ の基本ベクトル $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ は $\mathbb{R}^n$ の基底である.  
この $\mathbb{R}^n$ の基底 $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ を $\mathbb{R}^n$ の標準基底という.

## 4.4 ベクトル空間の基と次元

次の定理より,基底をなすベクトルの個数は一定である.

### Theorem (定理4.4.1)

ベクトル空間 $V$ の基底をなすベクトルの個数は,  
基底の取り方によらず一定である.

### Proof.

$u_1, \dots, u_m$  と  $v_1, \dots, v_n$  が共に  $V$  の基底であるとする.

$v_1, \dots, v_n$  は  $V$  の基底だから  $u_1, \dots, u_m$  の 1 次結合で書ける.

もし  $n > m$  ならば定理4.2.3により,  $v_1, \dots, v_n$  は 1 次従属となり,  
 $v_1, \dots, v_n$  が基底であることに矛盾する.

よって,  $n \leq m$  である. 同じように  $m \leq n$  を得る. □



## 4.4 ベクトル空間の基と次元

### Definition

零ベクトルのみからなるベクトル空間を零空間という.  
零空間および有限個のベクトルからなる基底を持つベクトル空間 $V$ を有限次のベクトル空間という.このとき, $V$ の基底を構成するベクトルの個数を $V$ の次元といい, $\dim(V)$ と書く.  
ただし, $V$ が零空間であるときは $\dim(V) = 0$ とする.

定理4.4.1により, $V$ の次元は基底の取り方によらない.

### Example

$\mathbb{R}^n$ の基本ベクトル $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ は $\mathbb{R}^n$ の基底であったから

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n.$$

### Example

$1, x, \dots, x^n$ は $\mathbb{R}[x]_n$ の基底となる.従って, $\dim(\mathbb{R}[x]_n) = n + 1$ .

## 4.4 ベクトル空間の基と次元

### Theorem (定理4.4.2)

ベクトル空間 $V$ が有限次元である必要十分条件は $V$ の1次独立なベクトルの最大個数が有限であることである.このとき,

$$\dim(V) = (V \text{ の 1 次独立なベクトルの最大個数}).$$

### Proof.

$\dim(V) = n$ とすると, $V$ には $n$ 個のベクトルからなる基底が存在する. $V$ の任意の $n+1$ 個以上のベクトルはこれらの $n$ 個のベクトルの1次結合で書けるから定理4.2.3により1次従属である.従って, $V$ のベクトルの1次独立な最大個数は $n$ である.

逆に $V$ の1次独立な最大個数が $n$ であるとし, $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ が1次独立であるとする. $V$ の任意のベクトル $\mathbf{u}$ に対して $\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ は1次従属であるから,定理4.2.2により $\mathbf{u}$ は $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ の1次結合で書ける.よって $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ は $V$ の基底となり

$\dim(V) = n$ である.



## 4.4 ベクトル空間の基と次元

### Definition

ベクトル空間 $V$ のベクトルで $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_t$ の1次結合全体のなす集合

$$W = \{c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_t\mathbf{u}_t \mid c_i \in \mathbb{R}\}$$

は $V$ の部分空間である. この $W$ を

$$\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_t \rangle$$

と書き,  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_t$ で生成される $V$ の部分空間という.

### Theorem (定理4.4.4)

$\dim(\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_t \rangle) = (\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_t\} \text{の1次独立な最大個数}).$

### Proof.

定理4.4.2と同じように.



## 4.4 ベクトル空間の基と次元

### Theorem (定理4.4.5)

$\dim(V) = n$ とする.

$V$ の $n$ 個のベクトル $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ について次の3条件は同値である.

- ①  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ は $V$ の基底である.
- ②  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ は1次独立である.
- ③  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ は $V$ を生成する.

**Proof:** 定義より, (1)  $\Leftrightarrow$  (2)と(3).よって (2)  $\Leftrightarrow$  (3)を示せば良い.

(2)  $\Rightarrow$  (3):  $\mathbf{u} \in V$ を任意とする. $\dim(V)$ は $V$ の1次独立な最大個数であるから(定理4.4.2),  $\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ は1次従属である.

よって定理4.2.2より $\mathbf{u}$ は $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ の1次結合で書ける.

(3)  $\Rightarrow$  (2): 仮定より $V = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ であるから, 定理4.4.4より,

$$n = \dim(V) = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \text{ の1次独立な最大個数.}$$

よって,  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ は1次独立である.

## 4.4 ベクトル空間の基と次元

### Definition

同次形の連立 1 次方程式の解空間の 1 組の基底を, その連立 1 次方程式の基本解という.

### Theorem (定理4.4.3)

$A \in M(m, n)$  とする. 同次形の連立 1 次方程式  $Ax = \mathbf{0}$  の解空間

$$W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \mathbf{0}\}$$

の次元は次のように表される.

$$\dim(W) = n - \text{rank}(A).$$

### Proof.

$W$  の次元は基本解の個数である. これは  $A$  の簡約化  $B$  の, 主成分を含まない列に対応する変数の個数に等しい.

よって,  $\dim(W) = n - \text{rank}(A)$ .





## 5.1 線型写像

### Definition

$U, V$ を ( $\mathbb{R}$ 上の) ベクトル空間とする. $U$ から $V$ への写像 $T$ が ( $\mathbb{R}$ 上の) 線型写像であるとは, 次の(1),(2)を満たすときにいう.

- ①  $T(u + v) = T(u) + T(v) \quad (u, v \in U),$
- ②  $T(cu) = cT(u) \quad (u \in U, c \in \mathbb{R}).$

線型写像は 1 次写像とも呼ぶ.

$U$ の全てのベクトルを $V$ の $\mathbf{0}$ にうつす線型写像を零写像といい,  $0$ で表す.

### Example

$A \in M(m, n)$ であるとき,  $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への写像 $T_A$ を

$$T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$$

で定義すると,  $T_A$ は線型写像である.

## 5.1 線型写像

### Definition

$T$ がベクトル空間 $U$ から $V$ への線形写像のとき,

$$\text{Im}(T) = \{T(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in U\}$$

とおき, $T$ の像という.  $T$ の像は $T(U)$ とも書く. また,

$$\text{Ker}(T) = \{\mathbf{u} \in U \mid T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\}$$

とおき, $T$ の核という.

### Theorem

$T$ はベクトル空間 $U$ から $V$ への線形写像とする.

- ①  $T$ の像 $\text{Im}(T)$ は $V$ の部分空間である.
- ②  $T$ の核 $\text{Ker}(T)$ は $U$ の部分空間である.



## 5.1 線型写像

### Definition

$T$ がベクトル空間 $U$ から $V$ への線形写像のとき,

$$\text{rank}(T) = \dim(\text{Im}(T)),$$

$$\text{null}(T) = \dim(\text{Ker}(T))$$

と書き,各々 $T$ の階数, $T$ の退化次数という.

### Theorem

$T$ がベクトル空間 $U$ から $V$ への線形写像のとき,

$$\text{null}(T) + \text{rank}(T) = \dim(U).$$



## 5.2 線型写像の表現行列

### Definition

$T$ がベクトル空間 $U$ から $V$ への線形写像とする.

$U$ の基底 $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ ,  $V$ の基底 $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ を決めておく.

次の条件を満たす行列 $A \in M(m, n)$ を $U$ の基底 $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ ,  $V$ の基底 $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ に関する $T$ の表現行列であるという.

$$(T(\mathbf{u}_1), \dots, T(\mathbf{u}_n)) = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)A$$

注意:  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ が1次独立であるから,  $A$ は一意に定まる.

### Example (例1)

$A \in M(m, n)$ とする.  $T_A$ を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像で

$$T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$$

で定義されるものとする. このとき,  $\mathbb{R}^n$ の標準基底 $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ ,  $\mathbb{R}^m$ の標準基底 $\{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_m\}$ に関する表現行列は $A$ である.

## 5.2 線型写像の表現行列

ベクトル空間 $W$ の2つの基底 $\{w_1, \dots, w_s\}, \{w'_1, \dots, w'_s\}$ とする.

$$\{w'_1, \dots, w'_s\} = \{w_1, \dots, w_s\} P \quad \text{を満たす } P \in M(s, s) \text{ を}$$

$\{w_1, \dots, w_s\}$ から $\{w'_1, \dots, w'_s\}$ への変換行列という.

注意: 定理4.3.6(2)より, $P$ は正則行列である.

定理5.2.1.  $T$ がベクトル空間 $U$ から $V$ への線形写像とする.

$\{u_1, \dots, u_n\}, \{u'_1, \dots, u'_n\}, \{v_1, \dots, v_m\}, \{v'_1, \dots, v'_m\}$ を $U$ と $V$ の各々2つ基底とする.

$T$ の  $\{u_1, \dots, u_n\}, \{v_1, \dots, v_m\}$  に関する表現行列を $A$ ,

$T$ の  $\{u'_1, \dots, u'_n\}, \{v'_1, \dots, v'_m\}$  に関する表現行列を $B$

とする.  $P$ を $\{u_1, \dots, u_n\}$ から $\{u'_1, \dots, u'_n\}$ への表現行列,  
 $Q$ を $\{v_1, \dots, v_m\}$ から $\{v'_1, \dots, v'_m\}$ への表現行列とする.このとき,

$$B = Q^{-1}AP.$$