力学II（金・1）担当：原田俊太

第９回出席課題

問1

質量 m の質点にはたらく力を $\boldsymbol{F}$ とし、原点 O から測った位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とする。

(1) 質点が点 O のまわりにもつ角運動量 $\boldsymbol{L}$ 、力 $\boldsymbol{F}$ の点 O に関する力のモーメント $\boldsymbol{N}$ を書け。

(2) 二つのベクトル $\boldsymbol{A}$ 、$\boldsymbol{B}$ が時間 t の関数であるとき、

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \left(\dot{\boldsymbol{A}}\times\boldsymbol{B}\right) + (\boldsymbol{A}\times\dot{\boldsymbol{B}})$$

であることを示せ。

(3) 角運動量の時間微分は力のモーメントに等しいことを示せ。

問 2

n 個の質点系があるとして、i 番目の質点の質量を m_i、はたらく外力を $\boldsymbol{F}_i$ と、原点 O から測った位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_i$ とする。i 番目の質点と j 番目の質点にはたらく内力を $\boldsymbol{F}_{ij}$ とする。

(1) 質点が点 O のまわりにもつ全角運動量 $\boldsymbol{L}$ を書け。

(2) 全角運動量の時間微分は外力のモーメントの和に等しいことを示せ。

力学 II（金・1）担当：原田俊太

第 10 回出席課題

質点 M のまわりの質点 m の運動を考える。それぞれの位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ とし、質点 M から見た質点 m の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ とする。質点 m が、質点 M から受ける力は中心力であり、$\boldsymbol{F} = f(r)\boldsymbol{r}$ とする。

(1) 質点 M、質点 m の運動方程式をから、2質点の重心が等速直線運動を行うことを示せ。

(2) 換算質量 $\mu = Mm/(M+m)$を用いて

$$\mu\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}$$

であることを示せ。

$M >> m$ の場合を考える。質点 M を原点にとり、質点 m の運動を考える。

(3) 質点 m に対して、角運動量保存則が成り立つことを示せ。

(4) 質点 m の運動は平面運動であり、原点 O に対して面積速度は一定であることを示せ。

(5) 角運動量保存則を極座標を用いて表せ。

力学 II（金・1）担当：原田俊太

第 11 回出席課題

(1) 極座標表示した力学的エネルギー保存則と角運動量保存則から、惑星の軌道(r, θ)に関して下記の微分方程式が成り立つことを示せ。ただし、万有引力ポテンシャルを $U(r)$とする。

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)-\frac{1}{r^3}+\frac{U'(r)}{mh^2}=0$$

(2)万有引力ポテンシャル$U(r)=-\frac{GmM}{r}$を代入し、$u=\frac{1}{r}$とおき、(1)を整理して下記の微分方程式を導け。

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{GM}{h^2}$$

(3) (2)の微分方程式の解が、

$$u=Acos\theta+Bsin\theta+\frac{GM}{h^2}$$

という形であらわされることを利用して、下記の式が成り立つことを示せ。

$$r=\frac{l}{1+e\cos\theta}\ (e>0)$$

(4)(3)が $0<e<1$ において楕円軌道をあらわすことを示せ。

力学 II（金・1）担当：原田俊太

第 12 回出席課題

自然長 l_0 の質量を無視できるゴム糸（ばね定数 k）をつるし、その他端 A に長さ L、質量 M の細長い一様な棒をつるす。この棒の他端 B に図のように水平方向に大きさ F の力を加えたところ、全体はつりあった。

(1) ゴム糸および棒が鉛直となす角 α、β を求めよ。

(2) ゴム糸はどれだけ伸びるか求めよ。

力学 II（金・1）担当：原田俊太

第 13 回出席課題

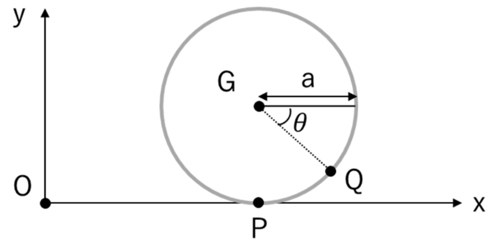
(1) 線密度 σ 、質量 M の長さ l の棒の重心を通り、棒に垂直な軸に関する慣性モーメント I_0 を求めよ。

(2) 面密度 σ 、質量 M の半径 a の円板の重心を通り、円板に垂直な軸に関する慣性モーメント I_0 を求めよ。

(3) 密度 ρ 、質量 M の半径 a、高さ h の円筒の重心を通り、円筒に垂直な軸に関する慣性モーメント I_0 を求めよ。

力学 II（金・1）担当：原田俊太

第 14 回出席課題



剛体 C が荒い床の上を滑りながら転がる運動を考える。水平面上、剛体の進行方向に x 軸を、鉛直上方に y 軸をとる。左図のように、円筒の断面において円と床の接触点をP、円上に固定した点Qをとり、その回転角を θ とする。重心 G (x_G, a)の運動と重心のまわりの回転運動（θ）に分けて、剛体の平面運動を考える。床と円筒のすべり摩擦係数を μ とする。

(1) 点 Q の位置(x_Q, y_Q)と速度$(\dot{x}_Q, \dot{y}_Q)$、および点 P の速度$(\dot{x}_P, 0)$を示せ。

(2) 重心に対する運動方程式と、重心のまわりの回転の運動方程式を示せ。

(3) $t = 0$ における初期値をそれぞれ、$x_G = 0, \dot{x}_G = v_0, \theta = 0, \dot{\theta} = \omega_0$ とするとき、x_G, θ をそれぞれ t の関数としてあらわせ。また、円筒が滑らず転がる運動を始める時刻 t_1 を求めよ。