秋第二回課題解答例

● **課題 1.** 極限値

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left\{\sqrt{1+x}-\left(1+\frac{1}{2}x+\alpha x^2\right)\right\}$$

が存在するように定数 α の値を定め，極限値を求めよ．

（解答例）$(1+x)^{1/2}$ の 0 を中心とするテイラー展開は一般二項定理により

$$(1+x)^{1/2}=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2!}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)x^2+\frac{1}{3!}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)x^3+\cdots=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\dots$$

である．$(1+x)^{1/2}$ のテイラー展開を問題の式の分子に代入する．問題の極限が収束するためには分子で定数項，x の係数，x^2 の項の係数がすべて 0 にならなくてはならない．定数項と x の項の係数は最初から 0 になることがわかっている．よって問題は x^2 の係数だけである．これが 0 になるためには $-\frac{1}{8}-\alpha=0$ でないといけない．よって $\alpha=-\frac{1}{8}$ でなければならない．その時の極限は x^3 の係数だから $\frac{1}{16}$ である．

● **課題 2.** 教科書の問 8.2, 8.3, 8.4, 8.5.

問 8.2. せっかくテイラー公式の残項の積分表示をやったので，ここで使ってみよう．

- （定理）**テイラー公式**
  $f(x)$ は $[a,b]$ を含む開区間で n 階微分可能のとき

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+R_n(b)\quad\text{（近似多項式 } f_{n-1}(b)+\text{ 残項 } R_n(b)\text{），}$$

$$R_n(b)=\int_a^b\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(b-t)^{n-1}dt\quad\text{（残項 } R_n(b) \text{ の\textbf{積分表示}）}$$

となる．

(1) $\sin x$ の 0 を中心とするテイラー多項式の x^4 の項の係数は 0 で $(\sin x)^{(5)}=\cos x$ だから

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+R_5(x)$$
$$R_5(x)=\int_0^x\frac{\cos t}{4!}(x-t)^4dt$$

である．$|\cos t|\le 1$ だから $x\ge 0$ のとき

$$|R_5(x)|=\left|\int_0^x\frac{\cos t}{4!}(x-t)^4dt\right|\le\frac{1}{4!}\left|\int_0^x(x-t)^4dt\right|\overset{x-t=u}{=}\frac{1}{4!}\int_0^x u^4du=\frac{1}{4!}\frac{x^5}{5}=\frac{x^5}{120}$$

である．

(2) $(\log(1+x))'''=\frac{2}{(1+x)^3}$ だから $\log(1+x)$ の 0 を中心とするテイラー公式は

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+R_3(x)$$
$$R_3(x)=\int_0^x\frac{2/(1+t)^3}{2!}(x-t)^2dt$$

である．$t\ge 0$ なら $2/(1+t)^3\le 1$ だから $x\ge 0$ のとき

$$|R_3(x)|=\left|\int_0^x\frac{2/(1+t)^3}{2!}(x-t)^2dt\right|\le\int_0^x(x-t)^2dt\overset{x-t=u}{=}\int_0^x u^2du=\frac{x^3}{3}$$

である．

問 8.3. 三角関数の微積分で使われる角度は弧度法だから，10 度という角度を弧度法に直さないといけない．180 度が π に対応するから 10 度を弧度法で書くと $\pi/18$ である．よって，求めるものは $\sin(\pi/18)$, $\cos(\pi/18)$ である．では，やってみる．$\sin x$ では x^5 以降の項は小数点以下第三位に影響を与えないし，$\cos x$ では x^4 以降の項は小数点以下第三位に影響を与えないから

$$\sin\frac{\pi}{18} = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 + \cdots \fallingdotseq 0.174\ ,$$
$$\cos\frac{\pi}{18} = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^2 + \cdots \fallingdotseq 0.985\ .$$

である．

問 8.4. $2^3 = 8$ なので，$f(x) = \sqrt[3]{8+x}$ という関数を 0 中心にテイラー展開して $x = 1$ を代入する．または，$9 = 2^3 + 1 = 2^3(1 + 1/8)$ だから $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ に一般二項定理を適用して $x = \frac{1}{8}$ を代入するのもいい．どちらでも結局は同じ計算になる．ここでは一般二項定理で $\sqrt[3]{1+x}$ を展開すると

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{9} = 2\sqrt[3]{1+\frac{1}{8}} &= 2\left\{1 + \frac{1}{3}\frac{1}{8} + \frac{1}{2!}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \frac{1}{3!}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{8}\right)^3 + \dots\right\} \\ &\fallingdotseq 2 + 0.833333 - 0.003472 + 0.000241 \fallingdotseq 2.080\ .\end{aligned}$$

問 8.5. (1) $\frac{3}{2} = \frac{1+x}{1-x}$ を解くと $x = \frac{1}{5}$．よって

$$\begin{aligned}\log\frac{3}{2} &= 2\left\{\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^7 + \dots\right\} = \frac{2}{5} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 + \frac{2}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^7 + ... \\ &\fallingdotseq 0.4 + 0.005333 + 0.000128 + 0.0000036 = 0.40546 \fallingdotseq 0.405\ .\end{aligned}$$

(2) $\log 3 = \log\frac{3}{2} + \log 2$ である．$2 = \frac{1-x}{1+x}$ を解くと $x = \frac{1}{3}$ である．よって

$$\begin{aligned}\log 2 &= 2\left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7 + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^9 \dots\right\} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \frac{2}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7 + \frac{2}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^9 \dots \\ &\fallingdotseq 0.66667 + 0.02469 + 0.00164 + 0.00013 + 0.00001 \fallingdotseq 0.69314\end{aligned}$$

である．よって (1) の結果と合わせて

$$\log 3 \fallingdotseq 0.40546 + 0.69314 = 1.09860 \fallingdotseq 1.099\ .$$

(3) $\log 10 = 3\log 2 + \log\frac{5}{4}$ である．$\frac{5}{4} = \frac{1+x}{1-x}$ を解くと $x = \frac{1}{9}$ である．よって

$$\begin{aligned}\log\frac{5}{4} &= 2\left\{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{9}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{9}\right)^7 + \dots\right\} \\ &\fallingdotseq 0.222222 + 0.000914 + 0.000007 = 0.223143\ .\end{aligned}$$

よって

$$\log 10 \fallingdotseq 3 \times 0.69314 + 0.223143 \fallingdotseq 2.303\ .$$

課題 3. 教科書の例題 8.7 をお読みください．

テイラー公式の重要性に鑑みてのコメント.

1. テイラー公式のもっと基本的な応用.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-(1+\frac{x}{2}+ax^2)}{x^3}$$

が存在するかどうかを知るには，分子を 0 を中心にテイラー展開して分母と比較することが必要である．分子を 0 中心にテイラー展開すると

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\dots$$

である．

このテイラー展開を正しく計算できない人が多い．定義に戻って正しく計算できるように練習するしかない．$\sqrt{1+x}$ は $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ だから一般二項定理を適用してもいい．二項定理と 0 中心のテイラー展開が同じものになることを必ず確認すること．

分子をテイラー展開した結果は

$$\left(-a-\frac{1}{8}\right)x^2+\frac{x^3}{16}+\dots$$

である．ここで $\dots$ は x^4 で割り切れる（x^4 から始まる冪級数という意味）．これを x^3 で割ると

$$(*)\qquad \frac{-a-\frac{1}{8}}{x}+\frac{1}{16}+\dots$$

となる．ここで $\dots$ は x で割り切れる（x から始まる冪級数という意味）．$x\to 0$ の時，これが有限な極限に収束するためには $-a-1/8=0$ でないといけない．なぜならもしそうでないとすると分母 $x\to 0$ だから発散してしまう．こうして，$a=-\frac{1}{8}$ であることがわかった．極限値は $(*)$ から自動的に $1/16$ であるとわかる．

教科書の問 8.5 と **問題 3** は同じ趣旨の問題である．テイラー展開を利用した数値計算の問題．log と arctan は性質がよく似ている．$\log a$ $(a>1)$ を計算するのに $a=\frac{1+x}{1-x}$ となる x を持ってきて $\log\frac{1+x}{1-x}$ のテイラー展開に代入する．$|x|<1$ で収束するテイラー展開

$$\log\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots\right)$$

を使う．基本はこれであるが，工夫次第で近似計算の精度を上げることができる．問題では $10=(5/4)\times 2^3$ という分解を考えた．このように分解する理由はこうである：$10=\frac{1+x}{1-x}$ となる x をいきなり求めると $x=\frac{9}{11}$ で，かなり 1 に近い．x が 1 に近いとテイラー展開の収束は遅くなり，精度を上げようと持ったら項数を多くとらないといけない．x^{2n-1} の項で打ち切った場合の誤差は，大きめに見積もって

$$\frac{x^{2n+1}}{2n+1}(1+x^2+x^4+\dots)=\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\frac{1}{1-x^2}$$

である．x が 1 に近いと誤差が大きいわけである．$\frac{5}{4}$ は $x=\frac{1}{9}$, 2 は $x=1/3$ の場合だから $x=9/11$ より良い選択である．**教科書の問 8.5** の背景にはこのような対数計算の工夫がある．これと同様の工夫を $\arctan x$ の場合に行ったのが**問題 3**（= 教科書の例題 8.7）である．π の近似値を求めるのに $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ から得られる $\frac{\pi}{6}=\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}$ を使ってもいい．しかし $\arctan x$ のテイラー展開

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$$

が収束する x の範囲は $|x|<1$ である．だから x に代入する数値が 1 に近いと精度を上げるのは多くの項数をとらないといけない．そこで $\tan x$ の加法定理を使って

$$\frac{\pi}{4}=5\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}$$

という分解公式を作ったわけで，これは対数計算で x に代入する数を小さくする工夫と同じである．

（2022 年度の謝辞）答案では面倒な分解を考えずに単純な $x=9/11$（$\log 10$ の場合）や $x=1/\sqrt{3}$（π の近似計算の場合）を使って実験してくれた人が少なからずいた．おかげでこのようなコメントを書くことができた．レポートを提出してくれた人々に感謝する．