P. 30〜32, 36〜43 は省略

2.6　完全形と積分因子

1°　完全形

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f(x, y)}{g(x, y)}$$

の形の微分方程式を

$$\boldsymbol{f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0} \tag{1}$$

の形に書く．

x, y のある関数 $u(x, y)$ があって

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = g(x, y) \tag{2}$$

が成り立つとき，(1) は**完全形**であるという．

この場合，(1) は

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0$$

となるから，C を任意の定数として

$$u(x, y) = C \tag{3}$$

は (1) の一般解である．

ここで，(1) が完全形であるための条件を求めてみよう．

(1) が完全形であれば

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

となるから，次式が成り立つ (f, g は連続微分可能とする)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \tag{4}$$

逆に，(4) が成り立つとする．

$$F(x, y) = \int f(x, y)dx$$

とおけば

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

となるから，$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y} - g\right) = 0$，すなわち関数 $\dfrac{\partial F}{\partial y} - g$ は x を含まず，y だけの関数である：

$$\frac{\partial F}{\partial y} - g = h(y)$$

このとき

$$\begin{aligned} fdx + gdy &= \frac{\partial F}{\partial x}dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y} - h\right)dy \\ &= d\left(F - \int h(y)dy\right) \end{aligned}$$

ここで

$$u(x, y) = F(x, y) - \int h(y)dy$$

とおけば

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} = f, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} - h = g$$

となって，(1) は完全形となる．

以上によって，次の事実が示された：

(1) が完全形であるためには

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

が必要十分である．また，この関係が成り立つとき，(1) の一般解は次の式で与えられる：

$$\int f(x, y)dx + \int\left(g(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int f(x, y)dx\right)dy = C$$

例題 1　次の方程式は完全形か．完全形の場合は一般解を求めよ．

i)　$(x^2-2y)dx+(y^2-2x)dy=0$　ii)　$(x+y)dx+(x-y)dy=0$

iii)　$ydx-xdy=0$

解　i)　$\dfrac{\partial}{\partial y}(x^2-2y)=-2,\quad \dfrac{\partial}{\partial x}(y^2-2x)=-2$

ゆえ，これは完全形である．このとき

$$F(x,y)=\int(x^2-2y)dx=\frac{1}{3}x^3-2yx,$$

$$h(y)=\frac{\partial F}{\partial y}-g=-2x-(y^2-2x)=-y^2$$

ゆえ，

$$u(x,y)=\frac{1}{3}x^3-2yx+\frac{1}{3}y^3$$

したがって，一般解は

$$x^3-6xy+y^3=C$$

ii)　$\dfrac{\partial}{\partial y}(x+y)=1,\quad \dfrac{\partial}{\partial x}(x-y)=1$

ゆえ，これは完全形である．このとき

$$F(x,y)=\int(x+y)dx=\frac{1}{2}x^2+xy,\quad h(y)=x-(x-y)=y$$

となるから，

$$u(x,y)=\frac{1}{2}x^2+xy-\frac{1}{2}y^2$$

したがって，一般解は

$$x^2+2xy-y^2=C$$

iii)　$\dfrac{\partial}{\partial y}(y)=1,\quad \dfrac{\partial}{\partial x}(-x)=-1$ ゆえ，これは完全形ではない．

2°　積分因子　前記の例題 iii）の方程式

例題1の別解

$M(x,y)=x^2-2y,\quad N(x,y)=y^2-2x$ とする。

$\dfrac{\partial M}{\partial y}=-2,\quad \dfrac{\partial N}{\partial x}=-2$ なので、これは完全形。従って

関数を$u(x,y)$とすると，　$\dfrac{\partial u}{\partial x}dx+\dfrac{\partial u}{\partial y}dy=0$

を満たす。つまり

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)$．$y$を固定して$x$について積分すれば，

$u(x,y)=\dfrac{1}{3}x^3-2xy+f(y)$　積分定数のようなもの。両辺xで偏微分すれば上式に戻る。

また，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{3}x^3-2xy+f(y)\right\}$$
$$=-2x+f'(y)$$
$$=y^2-2x.$$

$f'(y)=y^2$，つまり，$f(y)=\dfrac{1}{3}y^3+C$.

よって，$u(x,y)=\dfrac{1}{3}x^3-2xy+\dfrac{1}{3}y^3+C$

したがって一般解は，$\dfrac{1}{3}x^3-2xy+\dfrac{1}{3}y^3+C=C'$

$\rightarrow x^3-6xy+y^3=C$

数学１及び演習（常微分方程式）　演習問題（3 回目）
（テキスト該当ページ：pp.30〜43）

（今回の演習は，p.32 問，p.38 問題 1,3, p.43 問と同じです．章末に解答が掲載されています）

(1) 次の常微分方程式の一般解を求めよ．

1) $3\dfrac{dy}{dx} + xy = \dfrac{x}{y^2}$

2) $x^2\dfrac{dy}{dx} - xy + y^2 = 0$

3) $x^3\dfrac{dy}{dx} = x^2y - y^4\cos x$

4) $\dfrac{dy}{dx} + y^2 = \dfrac{1}{x^2}$

5) $x\dfrac{dy}{dx} - y + y^2 = x^2$

6) $(y - x^3)dx + (x - \cos y)dy = 0$

7) $2xydx + (y^2 - x^2)dy = 0$

8) $ydx - (x^2 + y^2 + x)dy = 0$

9) $y = x\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{(\frac{dy}{dx})}$

10) $y = -x\dfrac{dy}{dx} + x^4(\dfrac{dy}{dx})^2$

注　意

演習問題の答案を pdf 形式でアップロードし，提出してください．
学生番号，氏名を記入することを忘れないで下さい