第 15 回課題解答例.

$$D = \{(x,y) \,|\, y \le 2-x,\ y \ge x^2\}$$

の境界に反時計回りの向きを入れて線積分

$$\int_{\partial D} y^2dx + x^2dy$$

を (i) 線積分を直接計算，(ii) グリーンの公式を使って二重積分に変換して計算，の 2 通りの方法で同じ結果になることを確認する．

(i) 線積分．領域 D の放物線部分は (t,t^2) $(-2 \le t \le 1)$ によりパラメータを入れることができる．直線部分は $(u, 2-u)$（u は 1 から -2 まで動く）によってパラメータを入れることができる．よって線積分は放物線部分からの

$$\int_{-2}^{1} t^4dt + t^2(2tdt) = \int_{-2}^{1}(t^4+2t^3)dt = \left[\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{2}\right]_{-2}^{1} = \frac{33}{5}-\frac{15}{2}$$

と直線部分からの

$$\int_{1}^{-2}(2-u)^2du + u^2(-du) = 4\int_{1}^{-2}(1-u)du = -4\int_{-2}^{1}(1-u)du = -4\left[u-\frac{u^2}{2}\right]_{-2}^{1} = -18$$

の和である．よって $\dfrac{33}{5}-\dfrac{15}{2}-18 = -\dfrac{189}{10}$ である．

(ii) グリーンの公式

$$\int_{\partial D} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D (Q_x(x,y)-P_y(x,y))dxdy$$

を用いて線積分を面積分に変換する．$P(x,y) = y^2$, $Q(x,y) = x^2$ だから $Q_x - P_y = 2(x-y)$ である．よって

$$\begin{aligned}
\iint_D 2(x-y)dxdy &= 2\int_{-2}^{1}dx\int_{x^2}^{2-x}(x-y)dy = 2\int_{-2}^{1}dx\left[xy-\frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{y=2-x} \\
&= 2\int_{-2}^{1}dx\left\{-2+4x-\frac{3x^2}{2}-x^3+\frac{x^4}{2}\right\} = 2\left[-2x+2x^2-\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{10}\right]_{-2}^{1} \\
&= -\frac{189}{10}.
\end{aligned}$$