第 3 回講義：指数関数 e^x を無限級数で定義する（教科書 1.3）.

- （定義）各項が非負の級数を正項級数とよぶ.
- （補題）仮定：2 つの正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が収束する.
  結論：数列 $\{c_n\}$ を

$$c_n := a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$$

によって定めると

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

が成り立つ.

証明：$S = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $T = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$,

$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_n$, $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_n$, $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k$ とおく．横軸に目盛 $1, 2, ..., n, ...$, 縦軸に目盛 $1, 2, ..., m, ...$ を導入し，第一象限にの座標 (i, j) $(i, j == 1, 2, ...)$ の点上に $a_i b_j$ を置く．すると $S_n T_n$ はすべての $1 \leq i, j \leq n$ に対する $a_i b_j$ の和であり，U_n は $1 \leq, i, j,\ i + j \leq n$ を満たすようなすべての (i, j) に対する $a_i b_j$ の和である．各 a_i, b_j は非負だから

$$S_{[n/2]} T_{[n/2]} \leq U_n \leq S_n T_n$$

が成り立つ（図を描いて考えると判りやすい）．この設定で

$$\lim_{n\to\infty} S_{[n/2]} T_{[n/2]} = ST \ ,$$
$$\lim_{n\to\infty} S_n T_n = ST$$

だから，はさみうちの原理から

$$\lim_{n\to\infty} U_n = ST$$

が成り立つ． □

- **（定理-定義）** 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し，無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ は絶対値収束する．**指数関数** e^x を

$$e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

で定義する.

定理の証明：$M \geq 2|x|$ となる自然数 M をとる．もし $n > M$ ならば

$$\begin{aligned} |x|^n/n! &= (|x|^M/M!)(|x|^{n-M}/(M+1)\ldots n)) \\ &\leq (|x|^M/M!)(1/2)^{n-M} \end{aligned}$$

だから，n が $|x|$ に較べて十分大きければ $|x|^n/n!$ は n によらない量に $(1/2)^n$ に掛けた量

$$(|2x|^M/M!) \cdot (1/2)^n$$

を超えない．したがって，収束する等比級数 $\sum_{n=0}^{\infty} (1/2)^n$ と比較することにより，$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ は絶対値収束することがわかる． □

メリット：収束は速いので，e^x の数値計算に適している.

- **（指数関数の加法定理または指数法則）**

$$e^{x+y} = e^x e^y \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}) \ .$$

証明：Step1. 補題で

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{|x|^k}{k!}\ ,\ T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{|y|^k}{k!}$$

とおくと，2 項定理により

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(|x|+|y|)^k}{k!}$$

である．したがって，補題から

$$e^{|x|+|y|} = e^{|x|}e^{|y|}$$

が成り立つ．

Step 2. $|U_n - S_nT_n|$ の評価.

$$\begin{aligned} |U_n - S_nT_n| &= \sum_{k+l\geq n, 0\leq k\leq n, 0\leq l\leq n} \frac{|x|^k}{k!}\frac{|y|^l}{l!} \\ &\geq \left| \sum_{k+l\geq n, 0\leq k\leq n, 0\leq l\leq n} \frac{x^k}{k!}\frac{y^l}{l!} \right| \end{aligned}$$

が成り立つ．最右辺は $U_n - S_nT_n$ の定義で $|x|$, $|y|$ を x, y に置き換えたものである．したがって，新たに

$$S'_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\ ,\ T'_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{y^k}{k!}\ ,\ U'_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x+y)^k}{k!}$$

とおくと

$$|U'_n - S'_nT'_n| \leq |U_n - S_nT_n|$$

である．

Step3. Step 2 より

$$0 \leq |U'_n - S'_nT'_n| \leq |U_n - S_nT_n|$$

である．Step 1 より $\lim_{n\to\infty} |U_n - S_nT_n| = 0$ である．

$$\lim_{n\to\infty} S'_n = e^x\ ,\ \lim_{n\to\infty} T'_n = e^y\ ,\ \lim_{n\to\infty} U'_n = e^{x+y}$$

だから，はさみうちの原理により

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

である． □

- **自然対数の底** e を

$$e := e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

で定義する．これは収束が非常に速く，数値計算向きである．実際

$$\begin{aligned} 0 &< e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots \right) \\ &< \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots \right) \\ &= \frac{1}{n!}\frac{1}{n+1}\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{nn!} \end{aligned}$$

だから，e を有限和

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

で近似したときの誤差は高々

$$\frac{1}{nn!}$$

である．伝統的な e の定義 $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ では誤差のオーダーは

$$O(1/n)$$

だったから，$e = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ は格段に収束が速い．

- （例）$n = 10$ のときの誤差は

$$\frac{1}{10\cdot 10!} \approx 0.000000002756$$

である．

- （例）e の値を手計算で小数第 5 位まで求めてみる．

$$\sum_{k=0}^{10} \frac{1}{k!}$$

を各 $1/k!$ を小数第 7 位まで 4 捨 5 入して計算して和をとると 2.7182819 を得る．上で計算した誤差と 4 捨 5 入による誤差を合わせても小数第 5 位に影響がないから

$$e \fallingdotseq 2.71828$$

である．

- （例-命題）e は無理数である．
  理由：もし e が有理数なら，ある正の整数 n であって $n!e$ は整数になる．すると

$$\begin{aligned}
n!e &= n!\left\{1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\dots\right\} \\
&= (\text{整数}) + \left\{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\dots\right\} \\
&< (\text{整数}) + \left\{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\dots\right\} \\
&= (\text{整数}) + \frac{1}{n+1}\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = (\text{整数}) + \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

である．すると

$$(\text{整数}) = n!e < (\text{より小さい整数}) + \frac{1}{n}$$

となって矛盾に陥る．よって e は無理数でないといけない．

指数関数の性質

- 指数関数は値 0 を取らない．もっと強く，指数関数は正値，すなわち，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $e^x > 0$ である．
  理由：$1 = e^x e^{-x}$ ゆえ任意の x に対し $e^x \neq 0$. したがって，任意の x に対し

$$e^x = e^{\frac{x}{2}} e^{\frac{x}{2}} = (e^{\frac{x}{2}})^2 > 0$$

である．

- 指数関数は狭義単調増加関数である．
  理由：$x>0$ なら
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots > 1$$
である．したがって，もし $x<y$ なら $y-x>0$ だから $e^{y-x}>1$ であり，$e^x>0$ はいつも成り立つから，結局
$$e^y = e^x \cdot e^{y-x} > e^x \quad (y>x)$$
である．

- 指数関数 $y=e^x$ のグラフの概形を描く．

- 対数関数の定義：指数関数 e^x は狭義単調増加だから，逆関数が存在する．

$$y=e^x \quad \Longleftrightarrow \quad x=\log y$$

すなわち与えられた $y>0$ に対し $e^x=y$ を満たす $x\in\mathbb{R}$ が一意的に存在する．このような x を $x=\log y$ と表す．関数 $y=\log x$ を**対数関数**とよぶ．対数関数グラフと指数関数 $y=e^x$ のグラフは，直線 $y=x$ に関して対称である．対数関数 $y=\log x$ のグラフの概形を描く．

- 指数関数の増大度について．$x\to\infty$ のとき，e^x と x^n (n は正の整数）の増大の速さを比較しよう．$x>0$ なら
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$
だから
$$0 < \frac{x^n}{e^x} < \frac{x^n}{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}} = \frac{(n+1)!}{x} \to 0 \quad (x\to\infty)$$
である．よって挟み撃ちの原理により
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$$
すなわち，指数関数はいかなる冪函数よりも速く増大する！これは世の中でよく言われる「ねずみ算式の増大度の速さ」を警告する事実である．

- 課題

1. 教科書の問 3.1, 3.2, 3.3.