力学１

第3回目

座標系

1. 直交座標
2. 極座標
3. 円筒座標
4. 運動の自由度
5. 2次元極座標での速度、加速度

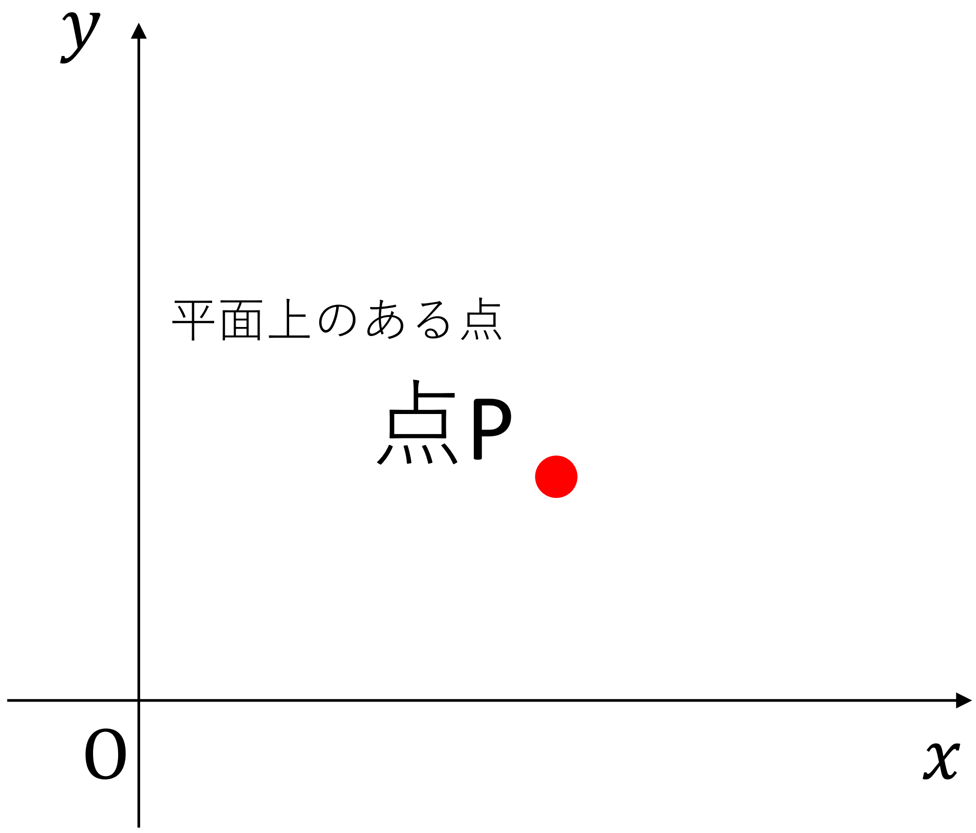
1.　直交座標

平面上のある点

点P

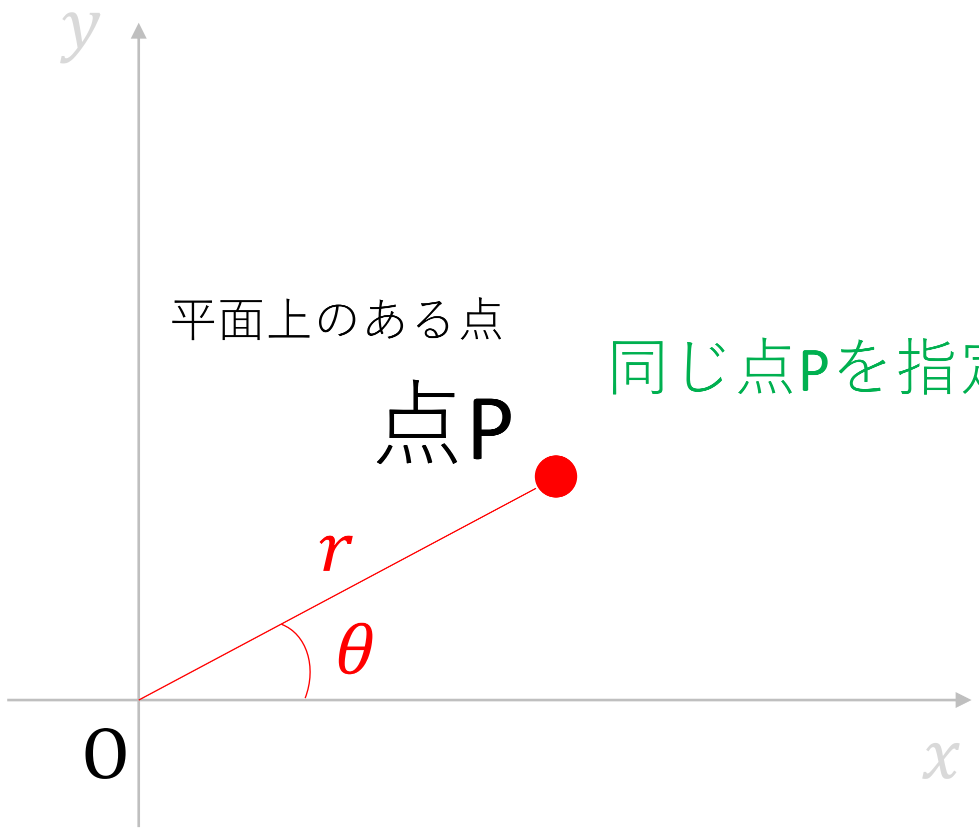
位置を特定するには？

1.　直交座標



例えばxy直交座標系を設定し、
点Pの座標成分(x, y)で表す。

2. 2次元極座標



同じ点Pを指定する方法として

二次元極座標により r と θ で表す。

平面上のすべての(x, y)は
(r, θ)で表すことができる。

$$0 \leq r < \infty$$
$$0 \leq \theta < 2\pi$$

2. 2次元極座標

平面上のすべての(x, y)は(r, θ)で表すことができる。

$$x = x\,(r, \theta) = r\cos\theta$$

$$y = y\,(r, \theta) = r\sin\theta$$

逆に、平面上のすべての(r, θ)は(x, y)で表すことができる。

ある(x, y)に対して1組の(r, θ)がきまる

ある(r, θ)に対して1組の (x, y)がきまる

(x, y)と(r, θ)は１対１対応

（原点はθが決まらない）

(r, θ)は一般座標（の一つ）

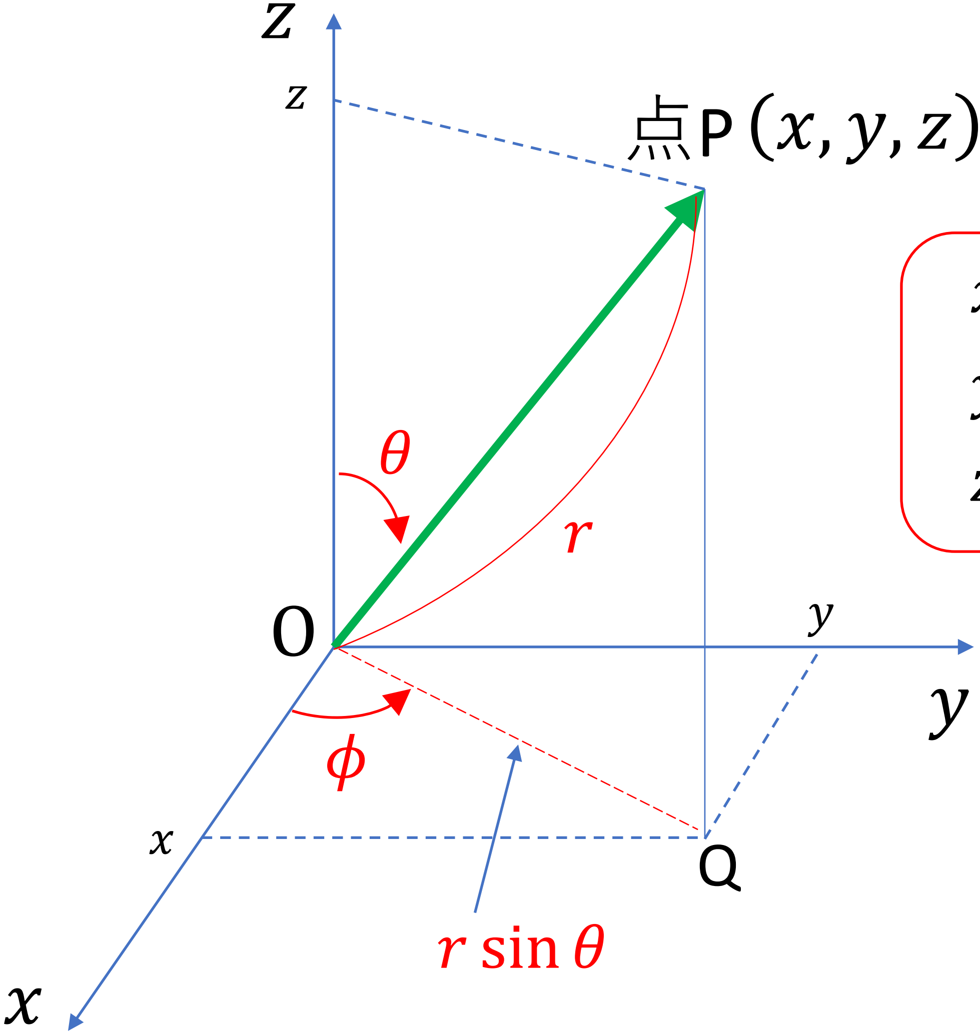
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

tanの逆関数

$$\frac{y}{x} = \tan\theta$$

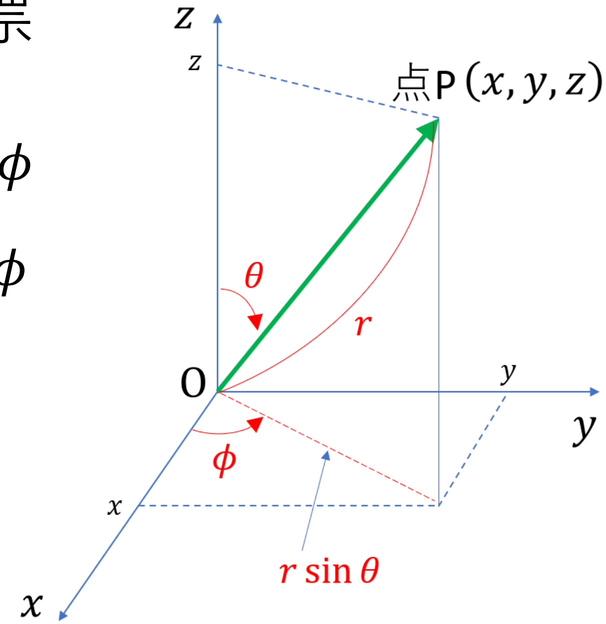
2. 3次元極座標



$$x = x\,(r, \theta, \phi) = r\sin\theta\cos\phi$$
$$y = y\,(r, \theta, \phi) = r\sin\theta\sin\phi$$
$$z = z\,(r, \theta, \phi) = r\cos\theta$$

2. 3次元極座標

$$\begin{cases} x = x\,(r,\theta,\phi) = r\sin\theta\cos\phi \\ y = y\,(r,\theta,\phi) = r\sin\theta\sin\phi \\ z = z\,(r,\theta,\phi) = r\cos\theta \end{cases}$$



$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \cos^{-1}\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \phi = \cos^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

$$= \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

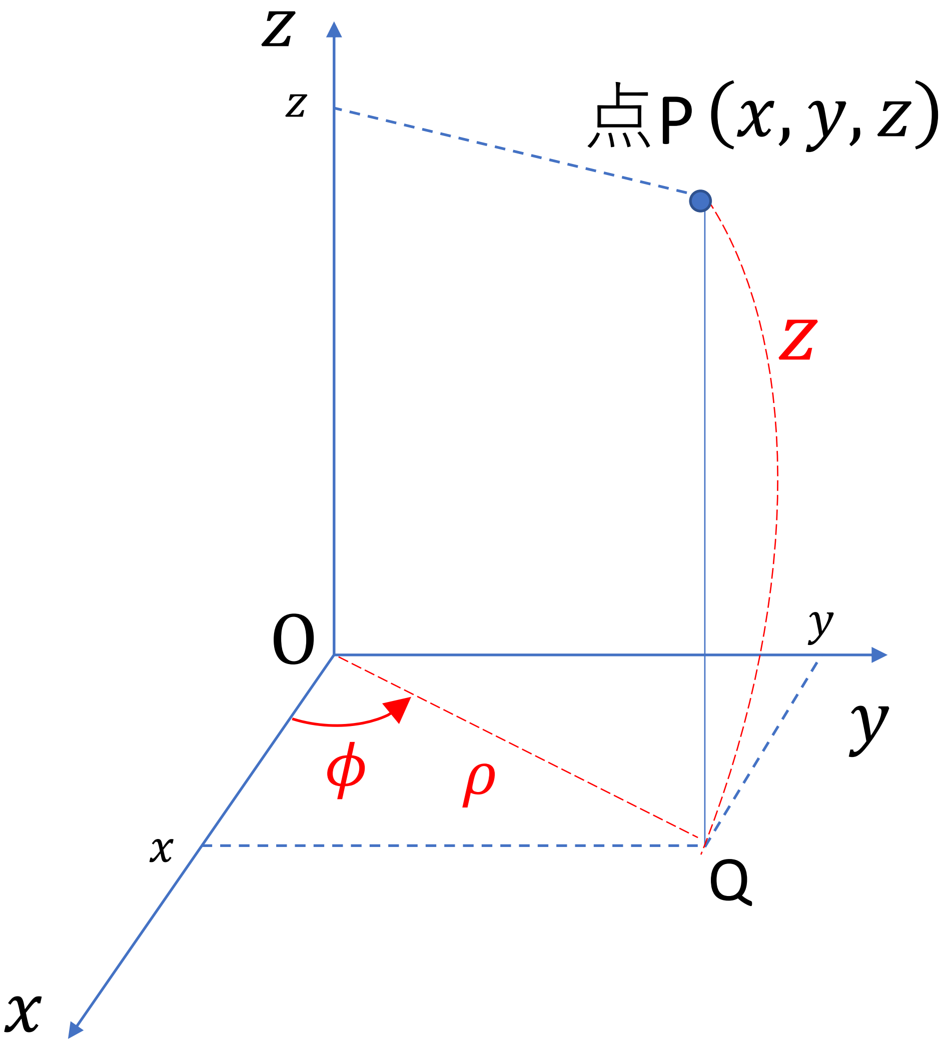
$$= \sin^{-1}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\left(\theta = \cos^{-1}\frac{z}{r} \right)$$

$$\left(\begin{aligned} \cos\phi &= \frac{x}{r\sin\theta} \\ r\sin\theta &= \sqrt{x^2+y^2} \end{aligned} \right)$$

$$\left(\sin\phi = \frac{y}{r\sin\theta} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

3. 3次元円筒座標



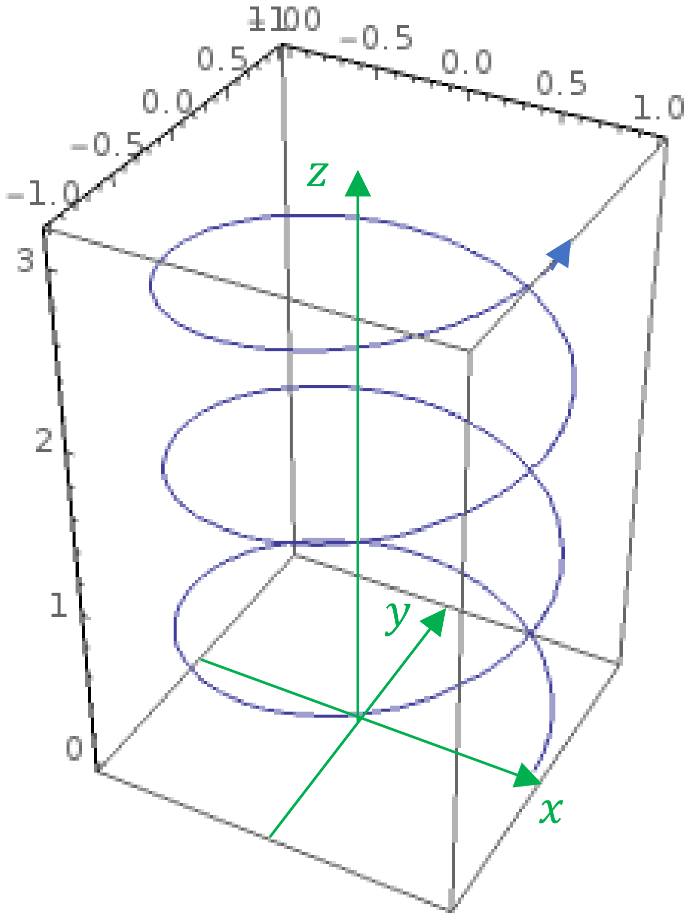
$$\begin{cases} x = x(\rho, \phi, z) = \rho \cos\phi \\ y = y(\rho, \phi, z) = \rho \sin\phi \\ z = z(\rho, \phi, z) = z \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \cos^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin^{-1}\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ z = z \end{cases}$$

3. 3次元円筒座標

らせん運動している質点の位置を円筒座標で表すと？



位置ベクトル（第２回目26枚目）

$$\vec{r}(t) = (r\cos\omega t, r\sin\omega t, v_z t)$$

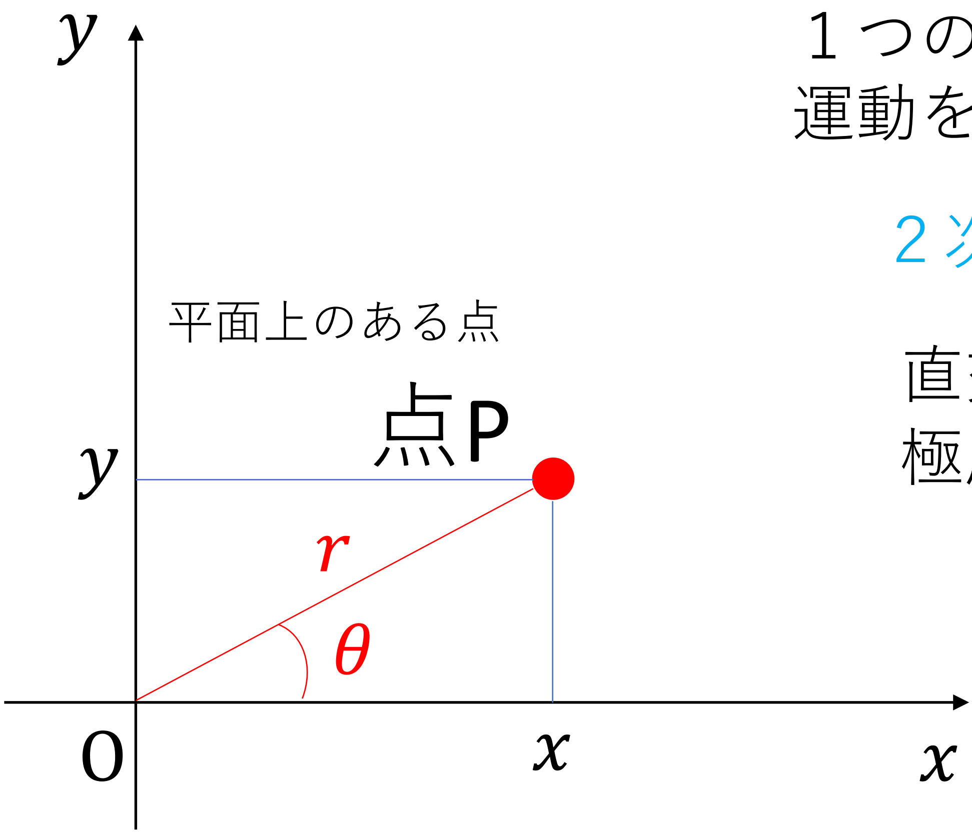
$$\begin{cases} \rho = r \quad （一定） \\ \phi = \omega t \\ z = v_z t \end{cases}$$

4. 運動の自由度

運動を決めるために必要な独立変数の数

（束縛されている）

１つの（自由な）質点の運動を表す独立変数

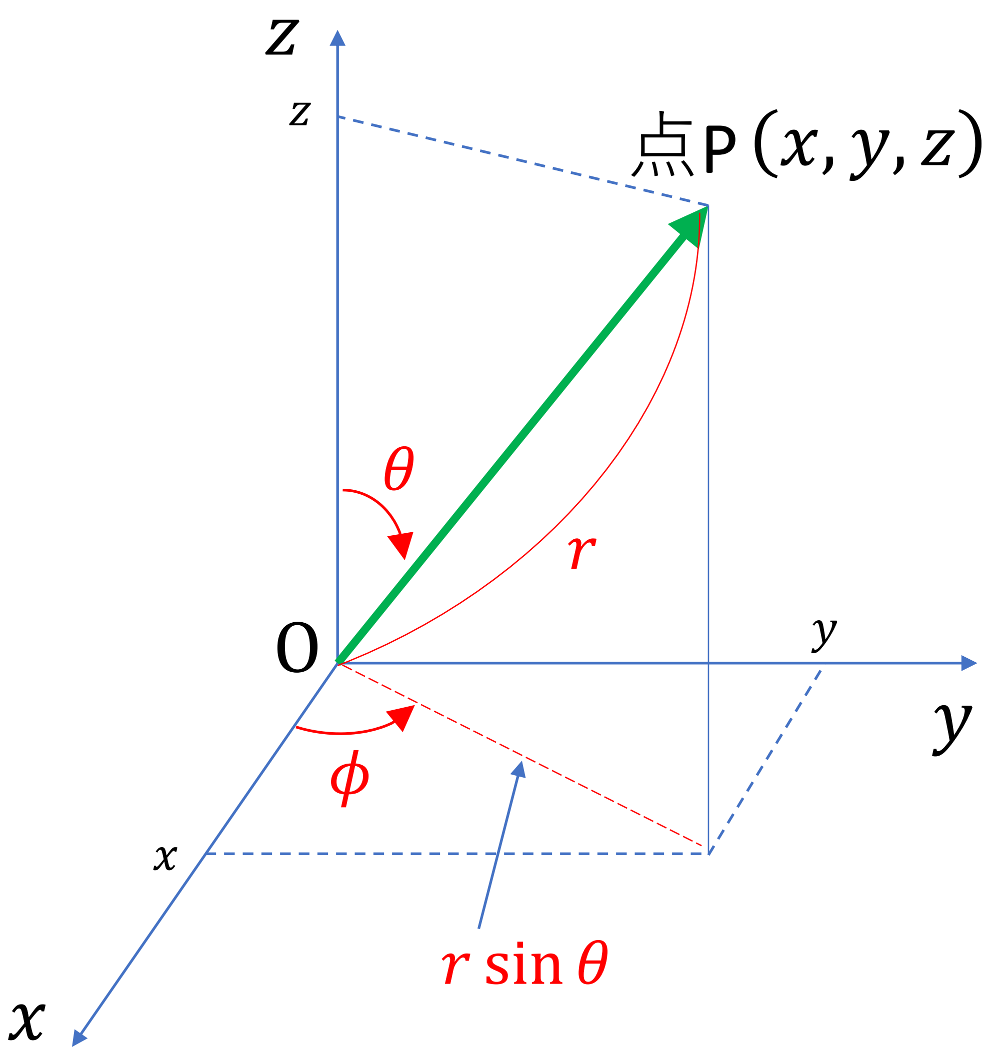


２次元では

直交座標(x, y)
極座標　(r, θ)

自由度２

4. 運動の自由度



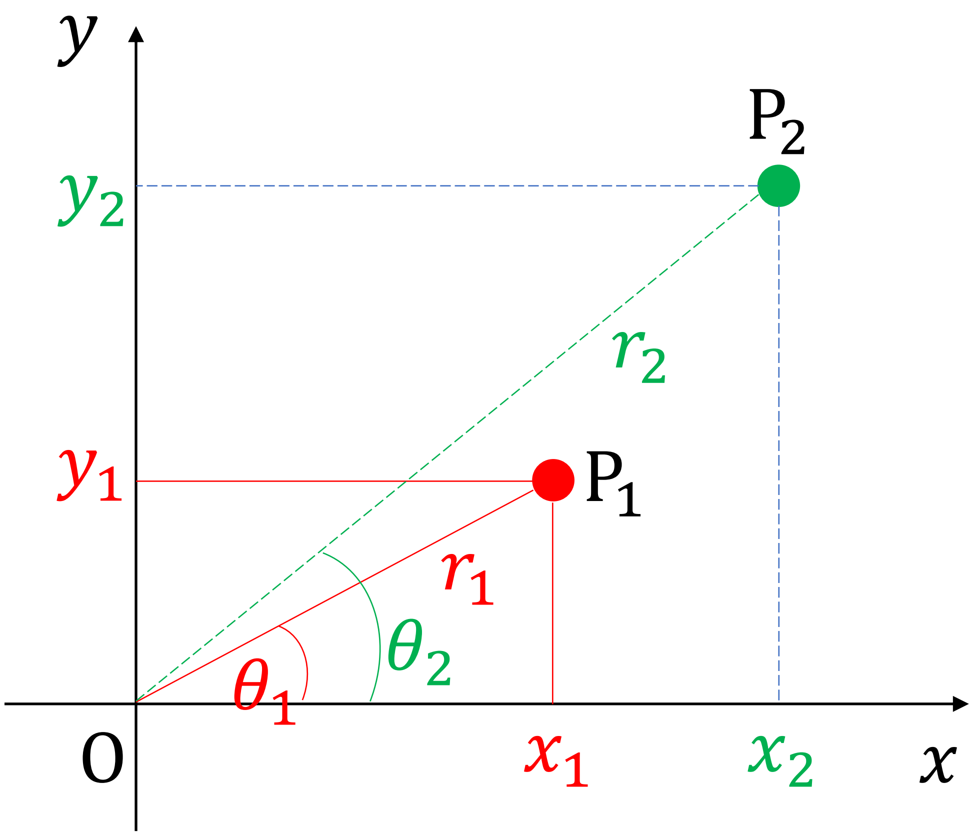
１つの（自由な）質点の運動を表す独立変数

３次元では

直交座標(x, y, z)
極座標　(r, θ, ϕ)

自由度３

4. 運動の自由度



２つの（自由な）質点系の運動を表す独立変数

２次元では

直交座標$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$
極座標　$(r_1, \theta_1), (r_2, \theta_2)$

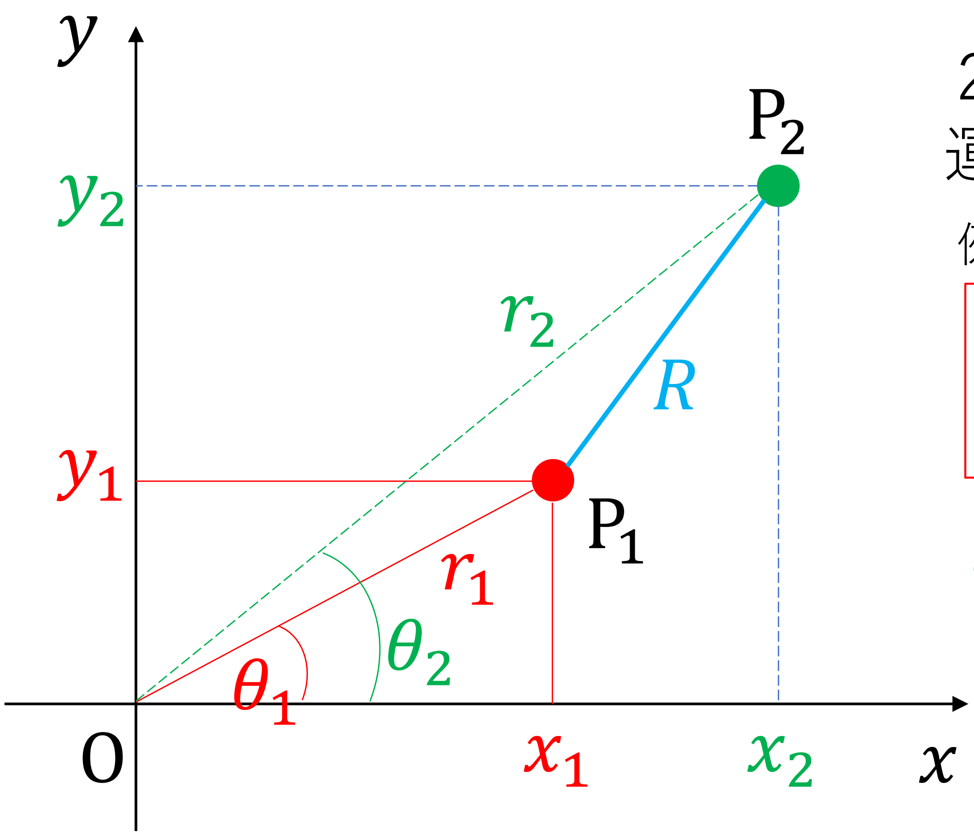
自由度４

３次元では

直交座標$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$
極座標 $(r_1, \theta_1, \phi_1), (r_2, \theta_2, \phi_2)$

自由度６

4. 運動の自由度



２つの（束縛された）質点系の運動を表す独立変数

例えば

> P_1 とP_2 の２つの質点が、ある一定の距離 R（Rは定数）を保って運動を行う場合。

２次元では

束縛条件

（２次元直交座標）

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = R$$

（２次元極座標）

$$\sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)} = R$$

２つの自由な質点の自由度

束縛条件の数

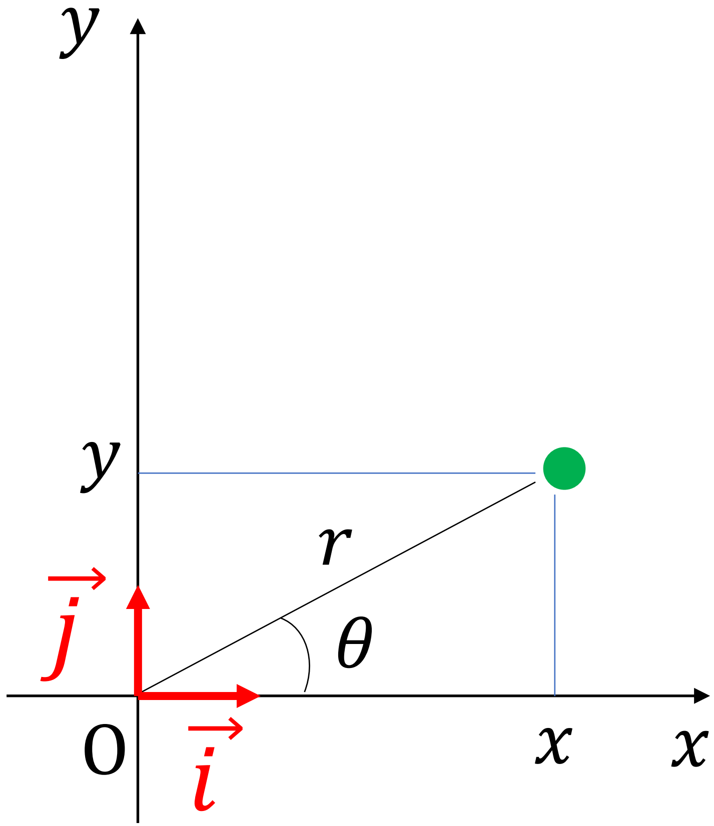
自由度 ＝ ４ ー １ ＝ ３

あるいは、

> 重心の自由度２＋
> 相対的な位置（P_1に対するP_2の角度など）の自由度１

5．2次元極座標での速度、加速度

速度、加速度のx, y 成分をr, θ を用いて表す



位置 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$r = |\vec{r}|$$

速度 $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$

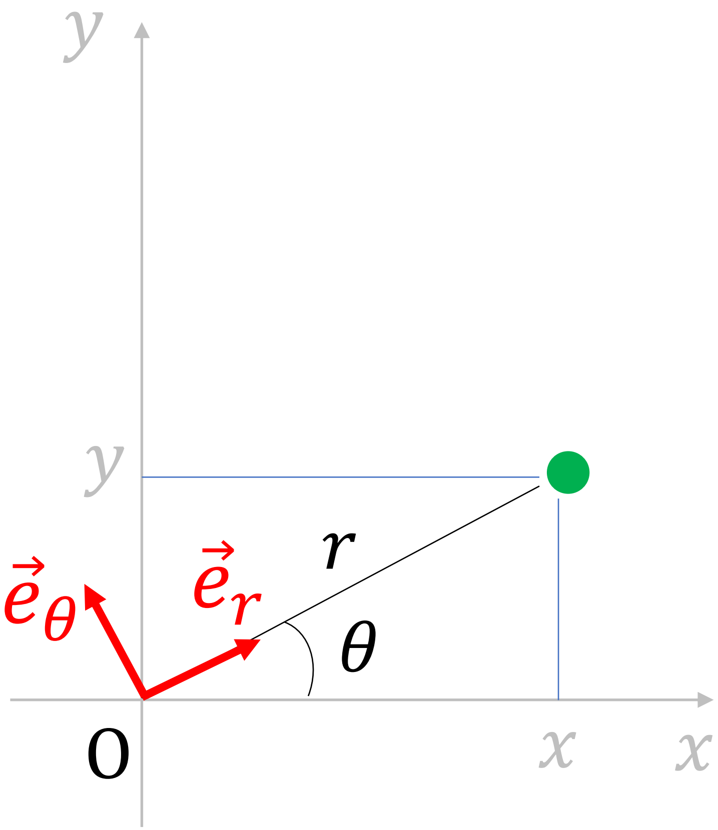
$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\ \dot{\theta} \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\ \dot{\theta} \end{cases}$$

加速度 $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}$

$$\begin{cases} \ddot{x} = \ddot{r}\cos\theta - 2\dot{r}\sin\theta\ \dot{\theta} - r\cos\theta\ \dot{\theta}^2 - r\sin\theta\ \ddot{\theta} \\ \ddot{y} = \ddot{r}\sin\theta + 2\dot{r}\cos\theta\ \dot{\theta} - r\sin\theta\ \dot{\theta}^2 + r\cos\theta\ \ddot{\theta} \end{cases}$$

５．２次元極座標での速度、加速度

速度、加速度を$\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ 成分を用いて表す



$$|\vec{e}_r| = |\vec{e}_\theta| = 1$$

位置　$\vec{r} = r\vec{e}_r$

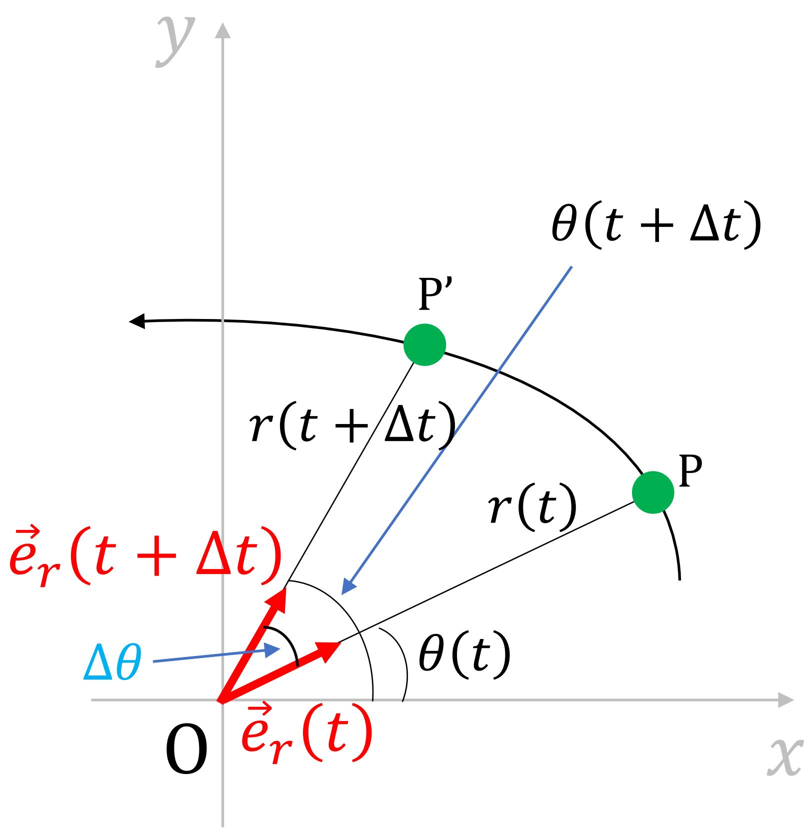
速度

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r) = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

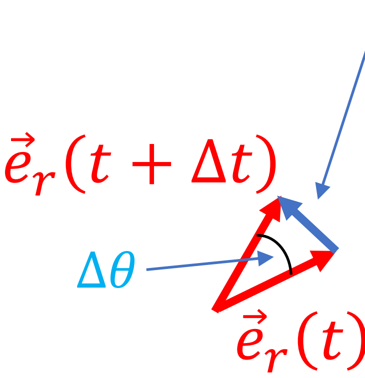
?

５．２次元極座標での速度、加速度

$\dfrac{d\vec{e}_r}{dt}$ について（$\vec{e}_r$ は大きさは１で変化しないが、向きが変わる）



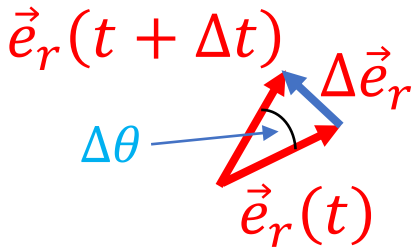
$$\Delta\vec{e}_r = \vec{e}_r(t+\Delta t) - \vec{e}_r(t)$$



$$|\vec{e}_r(t)| = |\vec{e}_r(t+\Delta t)| = 1$$

5．2次元極座標での速度、加速度

$\Delta\vec{e}_r$の大きさと向きについて

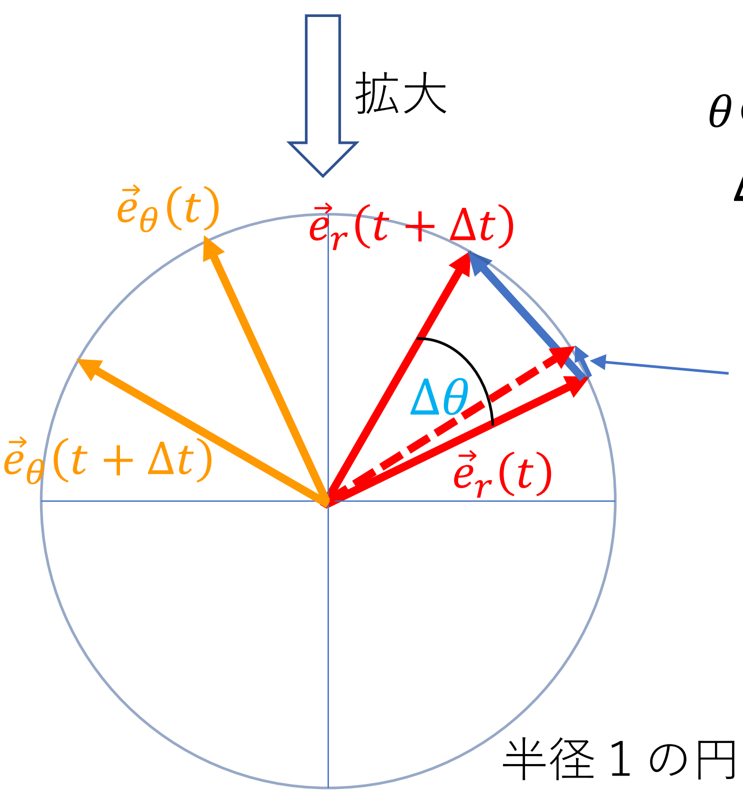


$\Delta\theta \to 0\ (\Delta t \to 0)$の極限で

$$|\Delta\vec{e}_r| = |\vec{e}_r(t+\Delta t) - \vec{e}_r(t)| = 1 \times |\Delta\theta|$$

$$= |\theta(t+\Delta t) - \theta(t)|$$

半径　角度



θの増える向きをΔe_rの正の向きとして絶対値を外すと

$$\Delta e_r = \theta(t+\Delta t) - \theta(t)$$

$\Delta\vec{e}_r$は$\Delta t \to 0$の極限で$\vec{e}_r$に垂直な方向（θの増える向き）になる

⇩

$\vec{e}_\theta$の向き

5．2次元極座標での速度、加速度

$\dfrac{d\vec{e}_r}{dt}$ について（$\vec{e}_r$の大きさは１で変化しないが、向きが変わる）

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{e}_r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{e}_r(t+\Delta t) - \vec{e}_r(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta e_r}{\Delta t} \vec{e}_\theta$$

向き

大きさ

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\theta(t+\Delta t) - \theta(t)}{\Delta t} \vec{e}_\theta$$

$$= \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

５．２次元極座標での速度、加速度

位置　$\vec{r} = r\vec{e}_r$

速度　$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(r\vec{e}_r) = \dfrac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\dfrac{d\vec{e}_r}{dt}$

$= \dfrac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

（これを）

$= v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta$ と書くと、

$\vec{v}$ の動径方向成分　　$\vec{v}$ の動径に垂直な方向の成分

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \end{cases}$$

円運動では、$\dot{r} = 0$、$v = v_\theta = r\dot{\theta} = r\omega$

５．２次元極座標での速度、加速度

加速度について

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta\right)$$

$$= \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\,\dot{\vec{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\vec{e}}_\theta$$

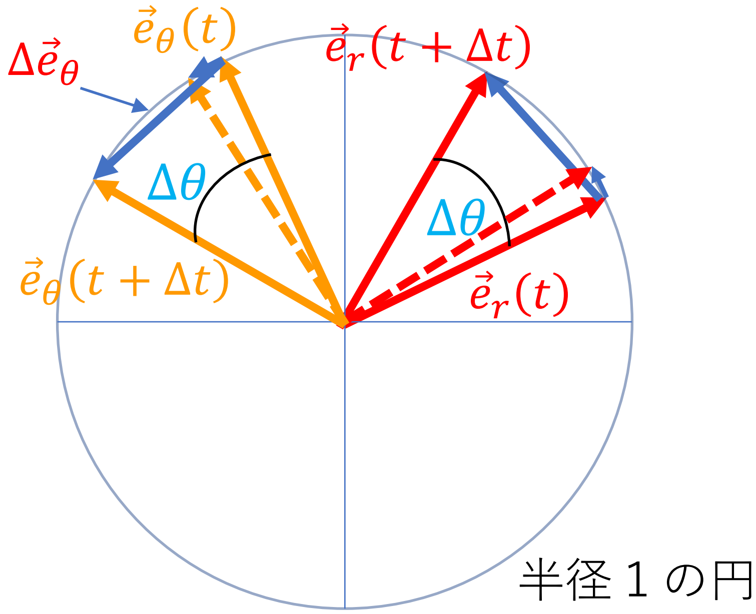
$$\dot{\vec{e}}_r = \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

（スライド19枚目）

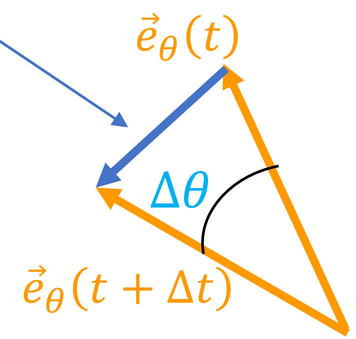
こちらは？

５．２次元極座標での速度、加速度

$\dot{\vec{e}}_\theta$ について



$$\Delta\vec{e}_\theta = \vec{e}_\theta(t+\Delta t) - \vec{e}_\theta(t)$$



$$|\vec{e}_\theta(t)| = |\vec{e}_\theta(t+\Delta t)| = 1$$

５．２次元極座標での速度、加速度

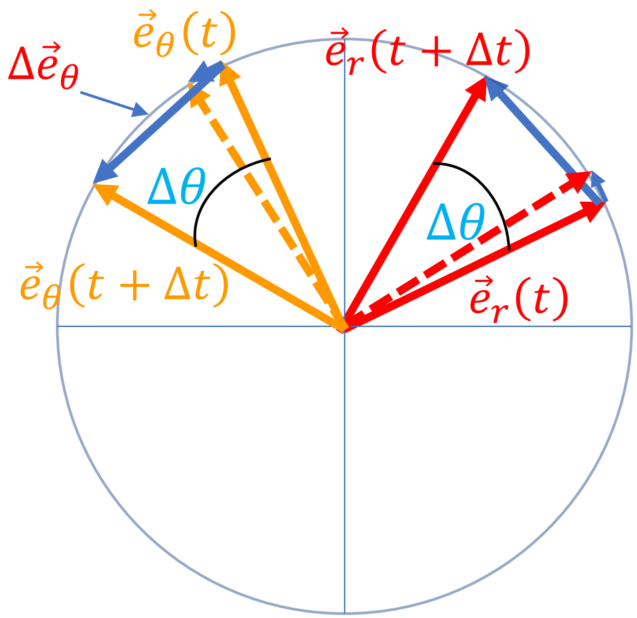
$\dot{\vec{e}}_\theta$の向きと大きさについて

$\Delta\theta \to 0\ (\Delta t \to 0)$の極限で

$$|\Delta\vec{e}_\theta| = |\vec{e}_\theta(t+\Delta t) - \vec{e}_\theta(t)| = 1 \times |\Delta\theta|$$

$$= |\theta(t+\Delta t) - \theta(t)|$$

半径　角度



半径１の円

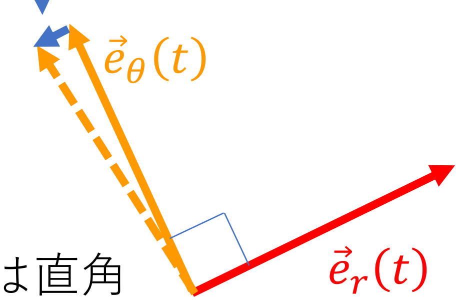
θの増える向きをΔe_θの正の向きとして絶対値を外すと

$$\Delta e_\theta = \theta(t+\Delta t) - \theta(t)$$

$\Delta\vec{e}_\theta$は$\Delta t \to 0$の極限で$\vec{e}_\theta$に垂直な方向（θの増える向き）になる

⇩

$-\vec{e}_r(t)$の向き



$\vec{e}_r(t)$と$\vec{e}_\theta(t)$は直角

５．２次元極座標での速度、加速度

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$$ について（$\vec{e}_\theta$の大きさは１で変化しないが、向きが変わる）

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{e}_\theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{e}_\theta(t+\Delta t) - \vec{e}_\theta(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta e_\theta}{\Delta t} (-\vec{e}_r)$$

向き

大きさ

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\theta(t+\Delta t) - \theta(t)}{\Delta t} (-\vec{e}_r)$$

$$= -\dot{\theta}\vec{e}_r$$

５．２次元極座標での速度、加速度

加速度 $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta\right)$

$$= \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\,\dot{\vec{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\vec{e}}_\theta$$

$\dot{\vec{e}}_r = \dfrac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$

（スライド19枚目）

こちらは？

⇩

$\dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{e}_r$

$$= \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{e}_r$$

$$= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta$$

5．2次元極座標での速度、加速度

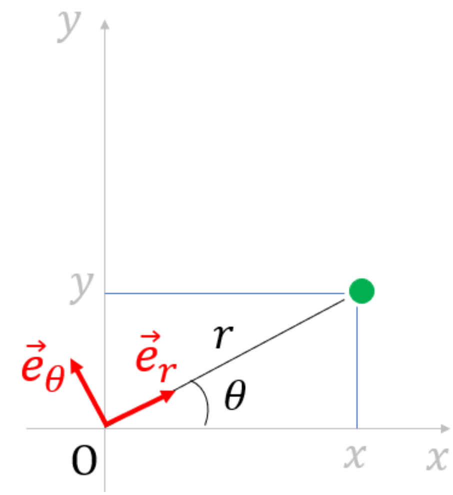
加速度　$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$

（これを）

$= a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta$　と書くと、

$\vec{a}$の動径方向成分　　$\vec{a}$の動径と垂直方向成分

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{cases}$$



円運動では、$\dot{r} = 0$、$a_r = -r\dot{\theta}^2 = -r\omega^2$、 $a_\theta = r\ddot{\theta} = r\dot{\omega}$

等速円運動では、 $\dot{r} = 0$、 $\dot{\theta} =$ 一定、$a_r = -r\dot{\theta}^2 = -r\omega^2$、 $a_\theta = r\ddot{\theta} = r\dot{\omega} = 0$

加速度は動径方向成分のみで、回転の中心を向く

円運動では、$\dot{r} = 0$、$v = v_\theta = r\dot{\theta} = r\omega$ だったので、 $a_r = -r\dot{\theta}^2 = -r\omega^2 = -\frac{{v_\theta}^2}{r} = -\frac{v^2}{r}$