力学１

第8回目

- 運動方程式
  - 微分方程式について補足
- 束縛運動
  - 垂直抗力
  - 摩擦
  - 単振り子
- 運動量と力積

微分方程式の解についての補足

微分方程式に関する少し一般的な話題

力学1で出てくる微分方程式の形　（定数係数2階（1階）線型常微分方程式）

速さに比例する大きさの力がある場合（空気による抵抗力など）

質点（物体）の位置に比例する大きさの力がある場合（単振動、単振り子など）

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + a\frac{dx(t)}{dt} + bx(t) = f(t)$$

定数

定数

（強制振動など）

$x(t)$を含まない関数
（地表面近くでの重力など定数の場合もある）

運動方程式に加速度が含まれるので、2階の微分方程式になっている。
$x(t)$を含む項が無く、速さ$v(t) = \frac{dx}{dt}$だけの微分方程式にできれば、1階の微分方程式になる。

微分方程式に関する少し一般的な話題

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \mathrm{a}\frac{dx(t)}{dt} + \mathrm{b}x(t) = f(t) \qquad ①$$

①式の**一般解** $x(t)$ の形は、以下の形となることが知られている。

$$x(t) = \underbrace{\mathrm{C}_1\psi_1(t) + \mathrm{C}_2\psi_2(t)}_{} + \underbrace{\eta(t)}_{} \qquad ②$$

$$\frac{d^2x_1(t)}{dt^2} + \mathrm{a}\frac{dx_1(t)}{dt} + \mathrm{b}x_1(t) = 0 \qquad ③$$ の**一般解**

① の**特殊解**

（定数でもいいので、何か①を満たすもの。）

$f(t)$ を0に置き換えた。

微分方程式に関する少し一般的な話題

$$\frac{d^2x_1(t)}{dt^2} + a\frac{dx_1(t)}{dt} + bx_1(t) = 0 \quad ③$$

の**一般解**について

この形の微分方程式は、解法の常套手段がある。

$x_1(t) = e^{\alpha t}$ と置いて、③に代入してみる

任意定数

③の一般解 $x_1(t)$は、 $C_1\psi_1(t) + C_2\psi_2(t)$ の形をしている。

$\psi_1(t)$ と $\psi_2(t)$ は ③の解で、 一次独立

定数

$\psi_1(t) \neq C\,\psi_2(t)$

③の一般解 $x_1(t)$を求めることは、③を満たす2つの一次独立な解 $\psi_1(t)$ と $\psi_2(t)$ を求めることに帰着する。

（ $\psi_1(t)$ と $\psi_2(t)$ が求まったら、それぞれに任意定数C_1、 C_2をかけて足せばよい。）

（ C_1、 C_2を具体的に決めるには、初期条件を設定する。）

$$\frac{d^2x_1(t)}{dt^2} + \mathrm{a}\frac{dx_1(t)}{dt} + \mathrm{b}x_1(t) = 0 \quad ③$$ の**一般解**について

$\boxed{\text{③の一般解 } x_1(t) \text{ は、} \mathrm{C}_1\psi_1(t) + \mathrm{C}_2\psi_2(t) \text{ の形をしている。}}$

今は、こういうものだと考えておいてもらって結構です。
常微分方程式の教科書には書いてあります。

例：外力が働いていない場合の減衰振動

1. 2つの実数解 $\gamma > \omega$ （抵抗力が大きい場合）

$$x_1(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}$$

もし、最初の項だけだと、

$$x_1(t) = A_1 e^{\alpha_1 t}$$

初期条件としては、ある時刻tにおける$x_1(t)$と$\dot{x}_1(t)$が独立に設定できる。

$$\left.\begin{array}{l} x_1(0) = a \\ \dot{x}_1(0) = b \end{array}\right\}$$

という初期条件とすると、

$$x_1(0) = a = A_1$$

$$\dot{x}_1(0) = b = a\,\alpha_1$$

α_1 は物理的な条件から決まっている定数なので、
bをaと独立には設定できない。

$$x_1(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}$$ だとすると、

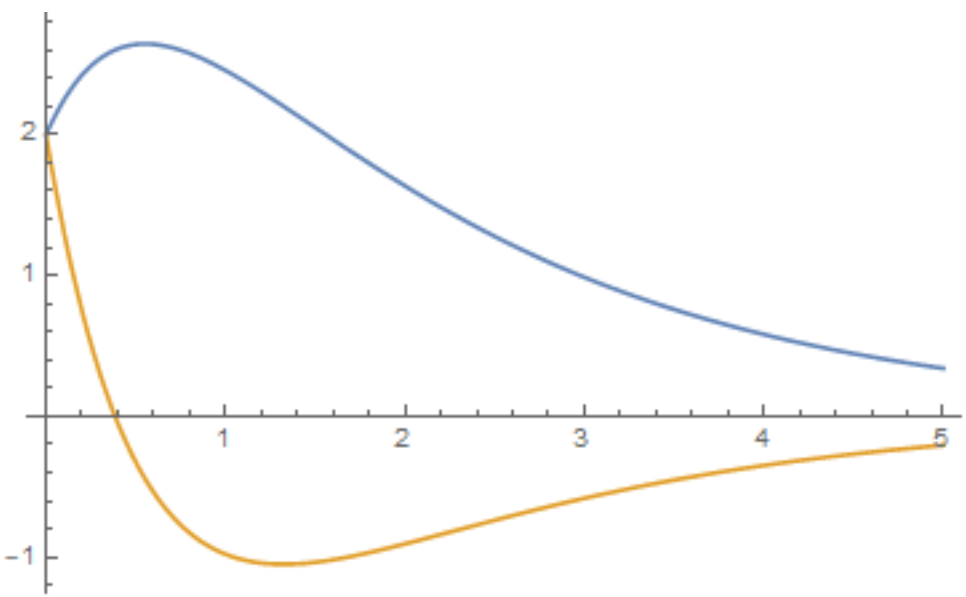
$x_1(0) = a$

$\dot{x}_1(0) = b$

という初期条件とすると、

$$\begin{cases} A_1 = a - A_2 = \dfrac{b - a\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} \\ A_2 = \dfrac{a\alpha_1 - b}{\alpha_2 - \alpha_1} \end{cases}$$

とすることで、任意のa、bに対して$x_1(t)$を定めることができる。

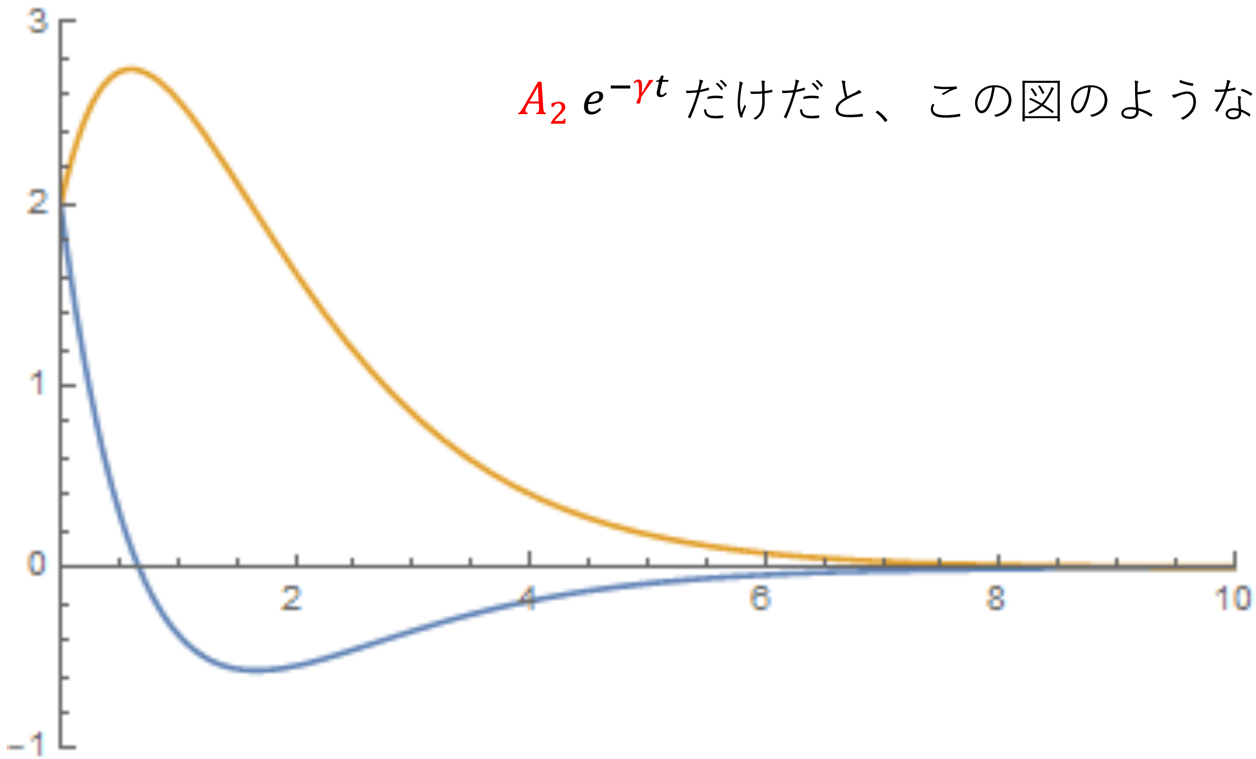


$$x_1(t) = A_1 e^{\alpha_1 t}$$

だけだと、左図のような場合を表すことができない。

2. 重解（1つの実数解）$\gamma = \omega$

$$x(t) = (A_1 t + A_2)\, e^{-\gamma t} = (A_1 t + A_2)\, e^{-\omega t}$$



$A_2\, e^{-\gamma t}$ だけだと、この図のような場合が表せない。

束縛運動

- 垂直抗力
- 摩擦
- 単振り子

垂直抗力

（束縛力：物体の運動をある軌道に束縛する力）

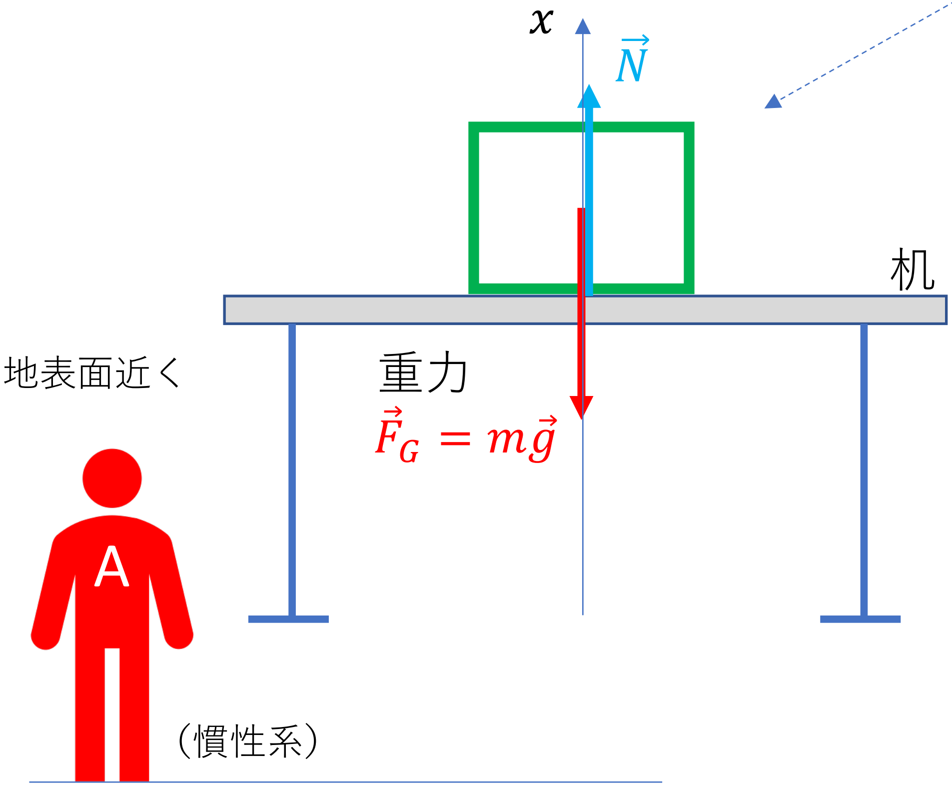
ニュートンの運動の第1法則

（慣性系において）

力を受けていない質点

↓

静止あるいは**等速直線運動**



机上の物体は静止

↓

物体に働く力の合力は$\vec{0}$

↑

物体には、重力と大きさが等しく、向きが反対の力（垂直抗力$\vec{N}$）が働いている。

$$\vec{F}_G + \vec{N} = \vec{0}$$

束縛力

x 成分は

$$-mg + N = 0$$

$$N = mg$$

垂直抗力

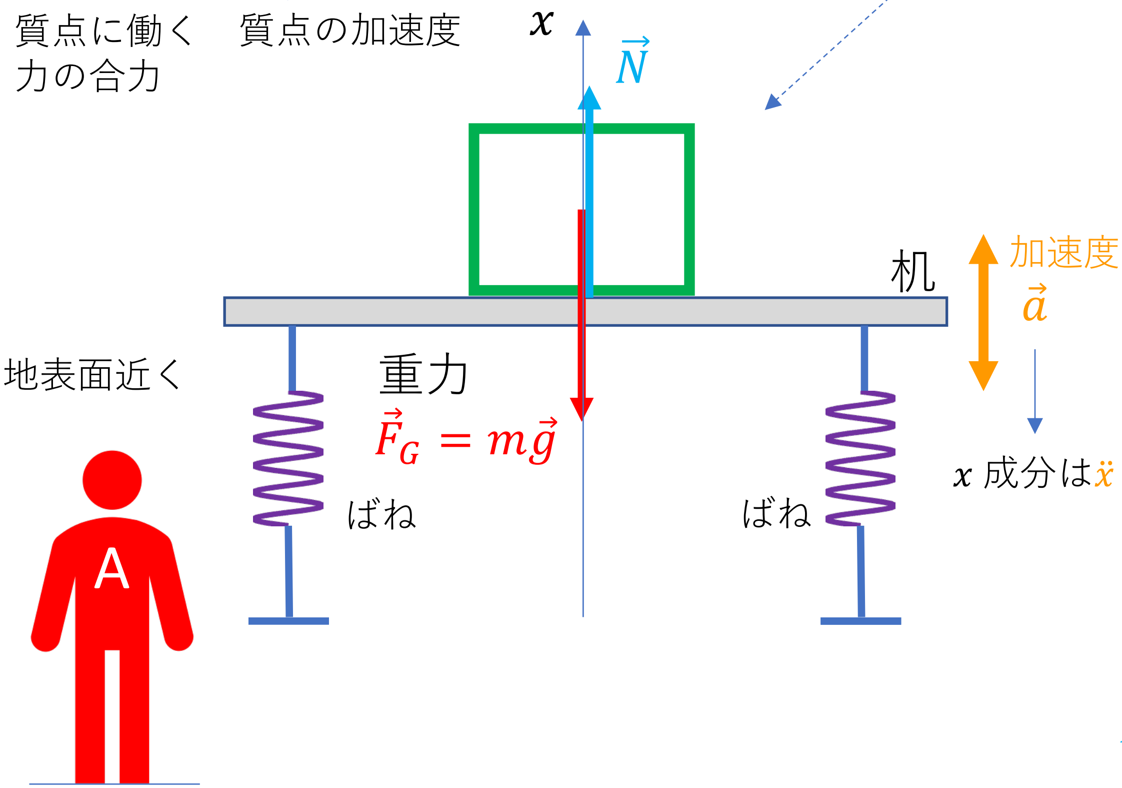
ニュートンの運動の第2法則

（慣性系において）

$$\vec{F} = m\,\vec{a} = m\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

質点に働く力の合力

質点の加速度



机上の物体は加速運動

物体に働く力の合力は$\vec{0}$ではない

重力と垂直抗力はつり合わない

$$\vec{F} = m\vec{a} = \vec{F}_G + \vec{N}$$

x 成分 $$m\ddot{x} = -mg + N$$

整理

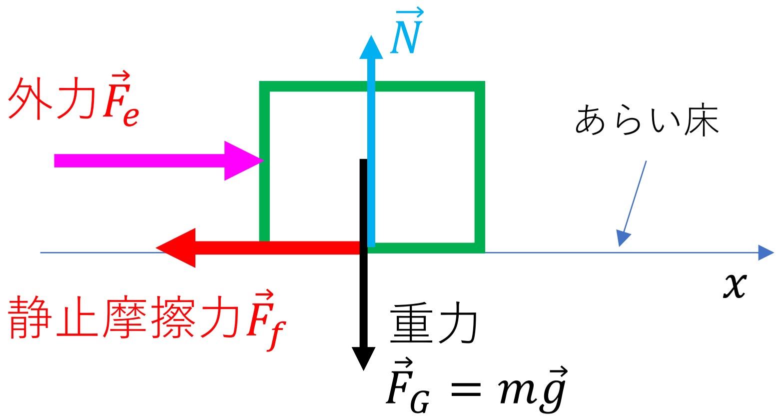
$$N = m(\ddot{x} + g)$$

$\ddot{x} = -g$ で$N = 0$ となり、物体に働く力は重力だけとなって物体は自由落下

$N > 0$ である限り、物体は机から力を受けている。（机からの束縛力を受けている）

摩擦

外力が加わっていても、物体は静止している場合（水平面上）



$$\vec{F} = m\vec{a} = \vec{F}_e + \vec{F}_f + \vec{F}_G + \vec{N} = \vec{0}$$

x 成分　$m\ddot{x} = F_e + F_f = 0$

外力F_e がある大きさ以下であれば、

$|F_e| = |F_f|$ となり、すべり出さない。

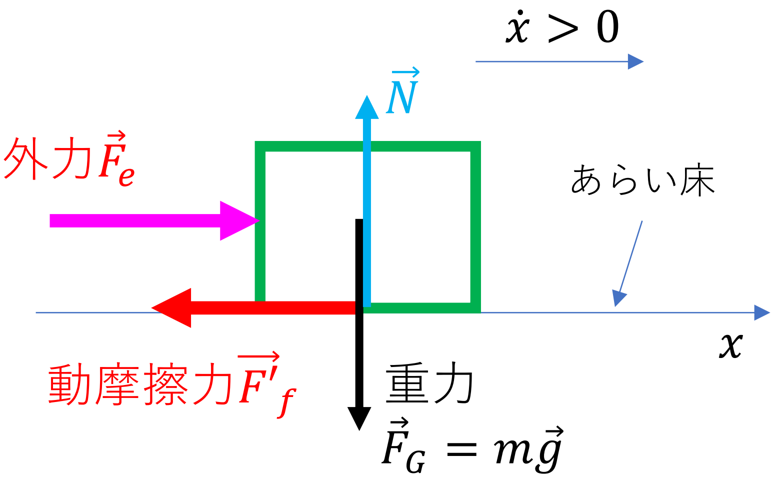
その限界の外力を$F_{\max}$ とすると、

$$F_{\max} = \mu N$$

最大静止摩擦力　静止摩擦係数　垂直抗力

摩擦

物体が運動している場合（水平面上）



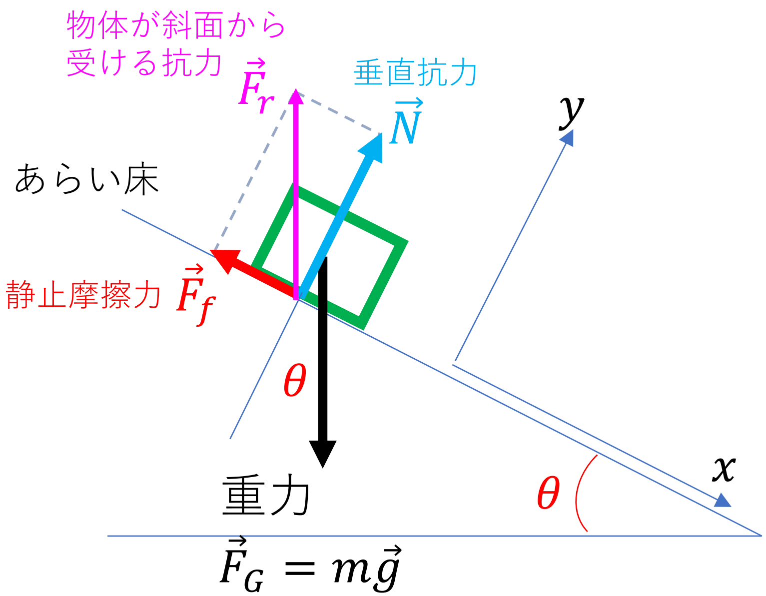
x 成分 $F'_f = \mu' N$

動摩擦係数

一般に、 $\mu > \mu'$

摩擦

外力が加わっていても、物体は静止している場合（斜面上）



$$\vec{F} = m\vec{a} = \vec{F}_G + \vec{N} + \vec{F}_f = \vec{0}$$

$$\vec{F}_r = \vec{N} + \vec{F}_f$$

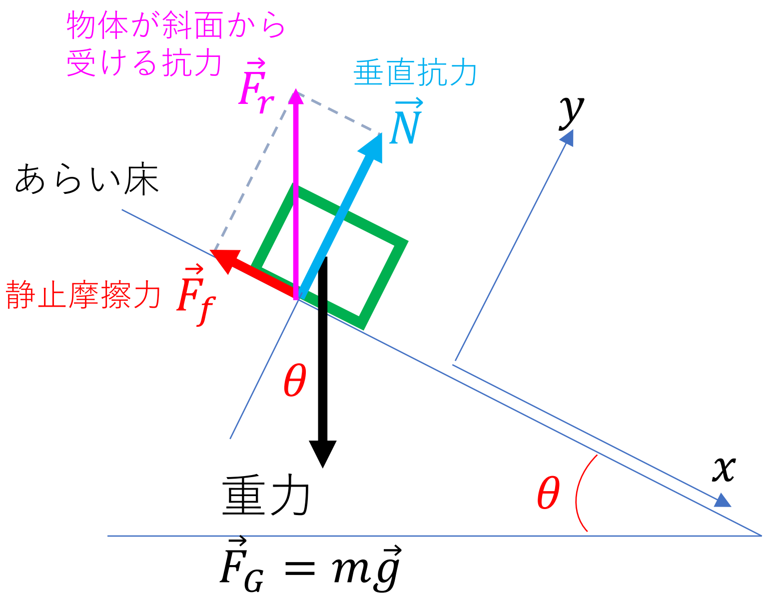
これらは、斜面から
受ける抗力の分力

x 成分　$m\ddot{x} = mg\sin\theta - F_f = 0 \longrightarrow F_f = mg\sin\theta$

y 成分　$m\ddot{y} = -mg\cos\theta + N = 0 \longrightarrow N = mg\cos\theta$

摩擦

外力が加わっていても、物体は静止している場合（斜面上）



物体がすべり出さない条件は、

$$F_f \leq F_{max} = \mu N$$

↓

$$mg\sin\theta \leq \mu N = \mu\, mg\cos\theta$$

↓

$$\tan\theta \leq \mu$$

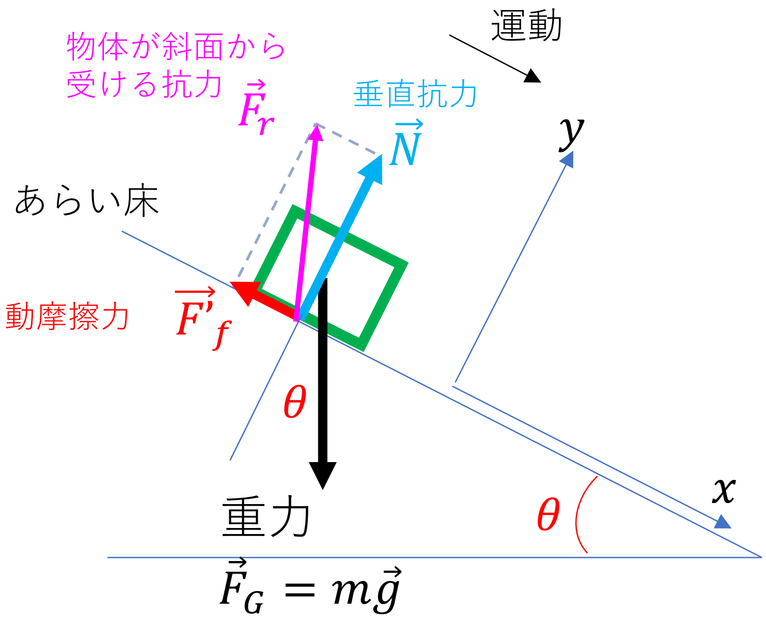
$\tan\theta = \mu$ となる θ を摩擦角という。

この時のθを$\theta = \alpha$ とすると、

→ $\theta \leq \alpha$

摩擦

物体が斜面上を運動している場合



$$\vec{F} = m\vec{a} = \vec{F}_G + \vec{N} + \overrightarrow{F'}_f \neq \vec{0}$$

$$\vec{F}_r = \vec{N} + \overrightarrow{F'}_f$$

これらは、斜面から受ける抗力の分力

x軸方向では力は釣り合っていない。

（y軸方向では力は釣り合っている。）

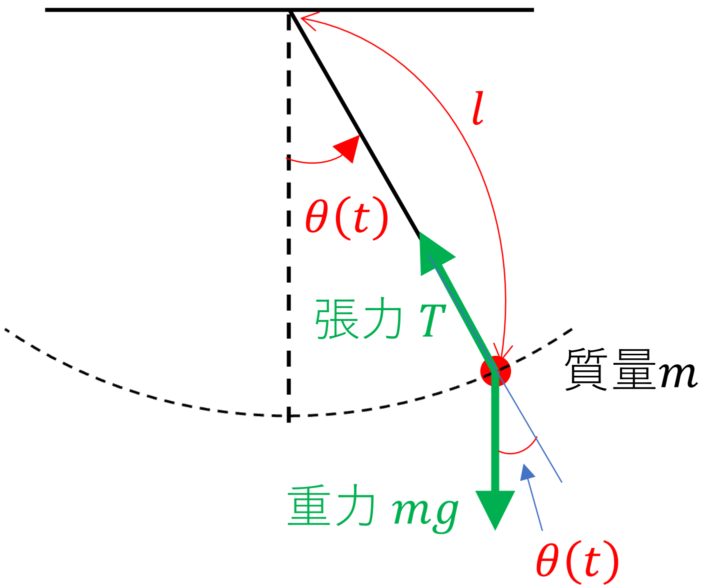
y 成分　$m\ddot{y} = -mg\cos\theta + N = 0 \longrightarrow N = mg\cos\theta$

x 成分　$m\ddot{x} = mg\sin\theta + F'_f \neq 0$

$$F'_f = -\mu' N = -\mu' mg\cos\theta$$

$$m\ddot{x} = mg\sin\theta - \mu' mg\cos\theta = mg(\sin\theta - \mu'\cos\theta)$$

（束縛運動として）単振り子（第4回目講義）　張力 T が束縛力



・接線方向の運動方程式

$$F_t = mg\sin\theta = m\frac{d}{dt}\left(-l\dot{\theta}\right) = -ml\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

単振り子の運動はこれを解くことでわかる。

・法線方向の運動方程式

$$F_n = ma_n = T - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{l}$$

$$T = mg\cos\theta + \frac{mv^2}{l}$$

重力の法線方向成分の大きさ　　正の値

張力は一定ではなく、また、重力の
法線方向成分よりも大きい

ニュートンの第2法則

運動量

第4回36枚目スライド

慣性系において、

$$\vec{F} = m\,\vec{a} = m\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

（ニュートンの運動方程式）

微分方程式

質点に働く力

質点の質量

加速度

より一般的には、

質点の運動量 $\vec{p} = m\vec{v}$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

質点の質量が変化しない場合、

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

運動量

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

質点に外力が働いていない場合、（外力$\vec{F} = \vec{0}$）

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$$

$\vec{p}$ は時間によらない

⇩

運動量は保存する

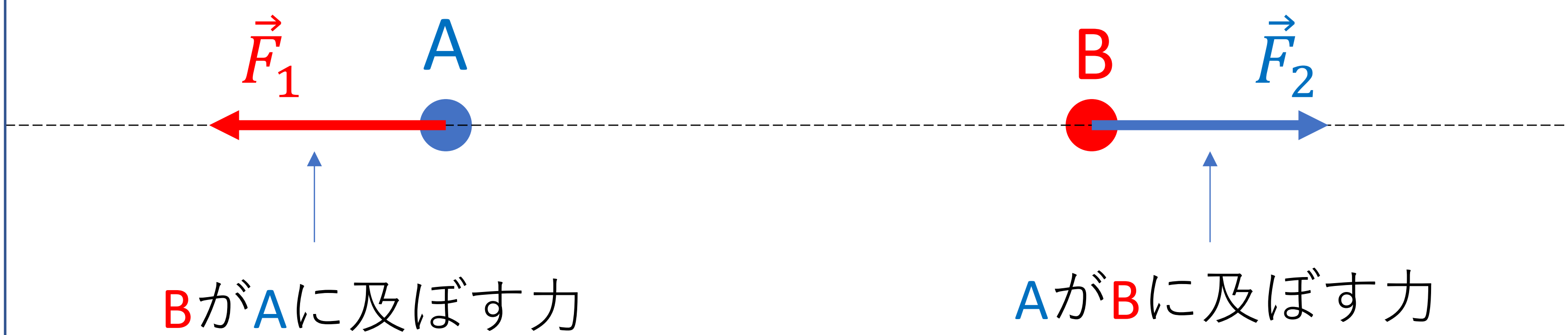
運動量（２つの質点について、質点の外から力が働いていない場合）

ニュートンの第３法則

第4回37枚目スライド

2つの物体間に相互作用の力が働いている場合、
それぞれの力は同一直線上で大きさが等しく向きが反対

（物体が運動している場合にも成立）



$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

（今の場合、力は瞬間的に伝わると仮定）

運動量（２つの質点について、質点の外から力が働いていない場合）

ニュートンの第３法則

第4回38枚目スライド

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$ なので、 $$\vec{F}_1 = \frac{d\vec{p}_{\mathrm{A}}}{dt}$$ 、 $$\vec{F}_2 = \frac{d\vec{p}_{\mathrm{B}}}{dt}$$

（作用・反作用の法則より、）

$$\frac{d\vec{p}_{\mathrm{A}}}{dt} = -\frac{d\vec{p}_{\mathrm{B}}}{dt}$$

（質点系（AとB）の外から力が働いていない場合）

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_{\mathrm{A}} + \vec{p}_{\mathrm{B}}) = 0$$

→ 質点Aと質点Bの運動量の和は時間によって変化しない

時間で積分

$$\int_{\text{相互作用前}}^{\text{相互作用後}} \frac{d}{dt}(\vec{p}_{\mathrm{A}} + \vec{p}_{\mathrm{B}})dt = 0$$

$$(\vec{p}_{\mathrm{A}} + \vec{p}_{\mathrm{B}})_{\text{相互作用前}} = (\vec{p}_{\mathrm{A}} + \vec{p}_{\mathrm{B}})_{\text{相互作用後}}$$

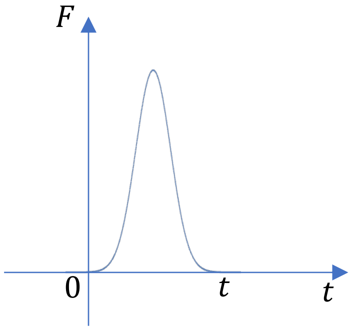
運動量の和は相互作用の前後で保存する

力積

時刻$t = 0$ から$t = t$ の間

質点（物体）に瞬間的に力が加わる場合、

撃力



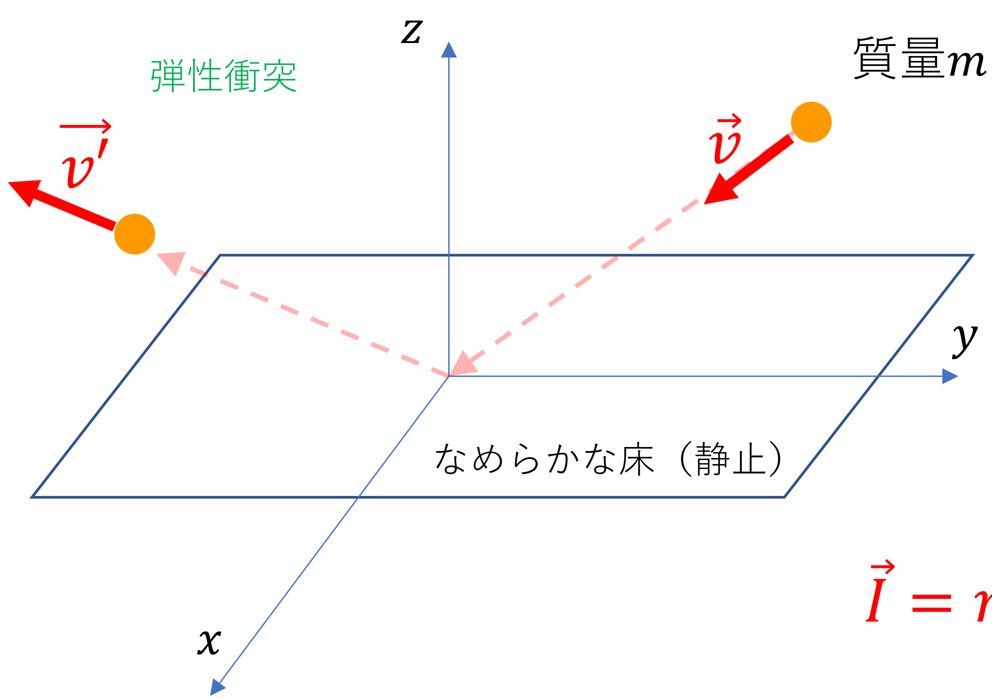
運動量の変化は、 $\vec{I} \equiv \vec{P}(t) - \vec{P}(0)$ 撃力が加わる前後での運動量の変化

力積

ベクトル量

$$\vec{I} = \int_0^t \frac{d\vec{P}}{dt} dt = \int_0^t \vec{F}\, dt$$

力積



$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

$$\overrightarrow{v'} = (v'_x, v'_y, v'_z)$$

（完全）弾性衝突

$v_x = v'_x$、$v_y = v'_y$、$v'_z = -v_z$

$$\vec{I} = m\,\overrightarrow{v'} - m\vec{v} = (0, 0, m(v'_z - v_z))$$

$$= (0, 0, \underline{-2mv_z})$$

$v_z < 0$ なので、これは正

質点の受ける撃力はz軸の正方向

床の受ける撃力はz軸の負方向

圧力の原因

力積を用いる例

気体分子による圧力

・弾性衝突による運動量変化

力積

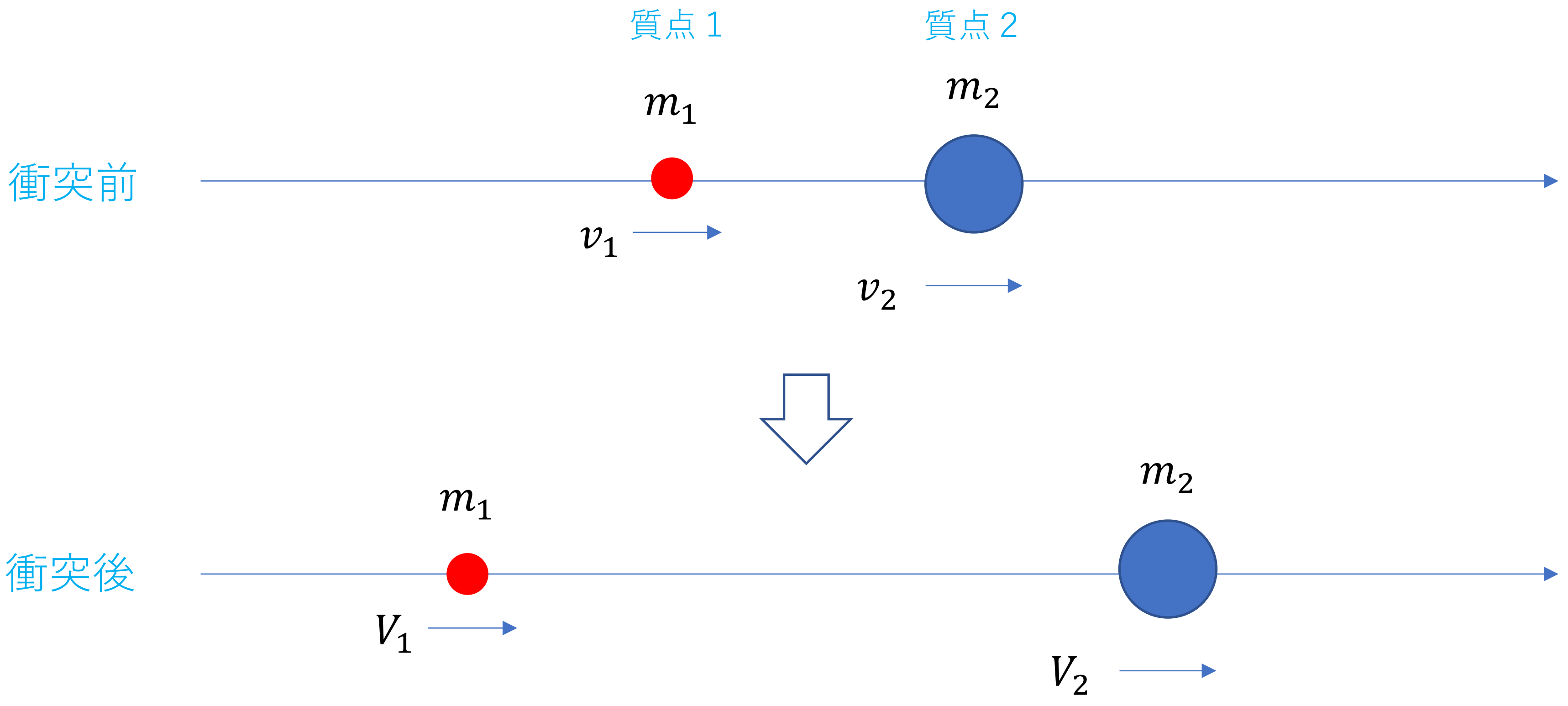
・１つの分子による単位時間当たりの力積

力 $\frac{d}{dt}\vec{I} = \frac{d}{dt}\int_0^t \vec{F}\,dt = \vec{F}$

・単位面積当たり、各分子が床に及ぼす力＝圧力

力積

２つの質点の衝突についての補足（１次元上の運動）



力積

２つの質点の衝突についての補足（１次元上の運動）

運動量保存より、

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2 \qquad ①$$

$$\Big\downarrow \text{変形}$$

$$m_1(V_1 - v_1) = -m_2(V_2 - v_2) \qquad ②$$

力学的エネルギー保存より、（今の場合運動エネルギーのみ考える）

$$\frac{1}{2}m_1{v_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_2}^2 = \frac{1}{2}m_1{V_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{V_2}^2 \qquad ③$$

$$\Big\downarrow \text{変形}$$

$$\frac{1}{2}m_1\left({V_1}^2 - {v_1}^2\right) + \frac{1}{2}m_2\left({V_2}^2 - {v_2}^2\right) = 0$$

$$\Big\downarrow \text{変形}$$

力積

２つの質点の衝突についての補足（１次元上の運動）

前のスライドより

$$\frac{1}{2}m_1\left(V_1{}^2 - v_1{}^2\right) + \frac{1}{2}m_2\left(V_2{}^2 - v_2{}^2\right) = 0$$

変形

$$\frac{1}{2}\underline{m_1(V_1 - v_1)}(V_1 + v_1) + \frac{1}{2}\underline{m_2(V_2 - v_2)}(V_2 + v_2) = 0$$

衝突前後の質点１の運動量変化 ΔP_1

衝突前後の質点２の運動量変化 ΔP_2

運動量保存より

$$\Delta P_1 + \Delta P_2 = 0 \quad ②'$$

ΔP_1に②の右辺を代入して

$$\frac{1}{2}\left(-m_2(V_2 - v_2)\right)(V_1 + v_1) + \frac{1}{2}m_2(V_2 - v_2)(V_2 + v_2) = 0$$

整理

力積

２つの質点の衝突についての補足（１次元上の運動）

前のスライドより

$$\frac{1}{2}m_2(V_2 - v_2)\big(-(V_1 + v_1) + (V_2 + v_2)\big) = 0$$

常に成立するためには

（$V_2 = v_2$は衝突（反応）しない場合なので今は考えない）

$$-(V_1 + v_1) + (V_2 + v_2) = 0 \qquad ④$$

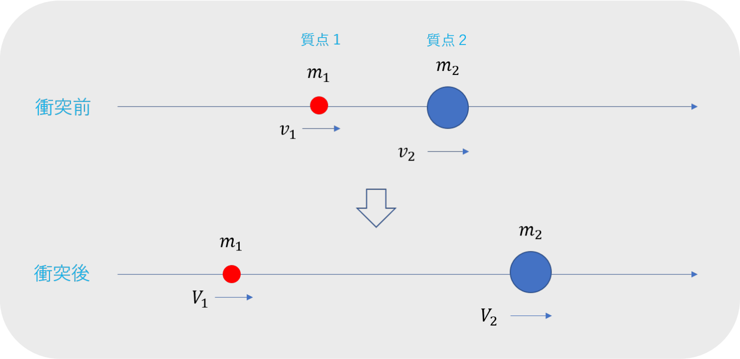
$$\begin{cases} m_1v_1 + m_2v_2 = m_1V_1 + m_2V_2 & ① \\ -(V_1 + v_1) + (V_2 + v_2) = 0 & ④ \end{cases}$$

①と④の連立方程式から V_1 とV_2 を求めると

力積

２つの質点の衝突についての補足（１次元上の運動）

$$
\begin{cases}
V_1 = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \dfrac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \\[2ex]
V_2 = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2
\end{cases}
$$



質点２が衝突前に静止（$v_2 = 0$）の場合、

$$
\begin{cases}
V_1 = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \\[2ex]
V_2 = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1
\end{cases}
$$

$m_2 > m_1$　の場合、

$V_1 < 0$、 $V_2 > 0$ （$v_1 > 0$ の場合）

さらに

$m_2 \gg m_1$（$m_2 \to \infty$）とすると、

$V_1 \to -v_1$

$V_2 \to 0$