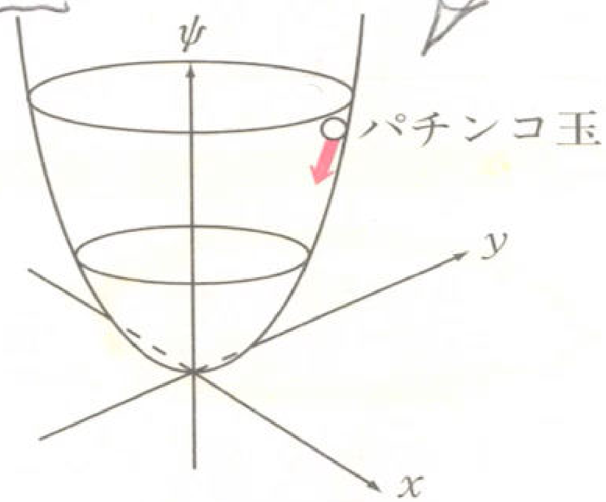
P37でも出てくる

● grad ψ ($\nabla\psi$) (グラディエント，日本語では傾斜)の意味

ψ を電位(あるいは力学のポテンシャル・エネルギー)のようなスカラー場であるとする。つまり，2次元空間に次元を落として描けば，ψ は全微分で例にした f と同じ曲面であり，微小部分 Δx, Δy の範囲で見れば，平らなガラス板である。

図A-9●すり鉢状の2次元ポテンシャル ψ



パチンコ玉が転がり落ちる方向(ただし正負逆)を向き，その大きさが傾きそのものであるようなベクトルが，$\nabla\psi$(grad ψ) である。

ここで，曲面 ψ の上に小さなパチンコ玉を置くと(暗黙のうちに，ψ 座標のマイナス方向に重力のような一様な力が働いていると仮定しているのだが)，パチンコ玉は曲面の最大傾斜線の方向に転がり落ちるであろう。この最大傾斜線の方向(ただし，便宜上のことにすぎないが，パチンコ玉の落ちるのとは逆のプラス方向)をその向きとし，その最大傾斜そのものを大きさとするベクトルを考えよう。

こういうベクトルをなぜ考えるかといえば，力学における重力とそのポテンシャルの関係を思い起こして頂くとよい(『力学ノート』62ページ参照)。

重力ポテンシャルというスカラー場が与えられれば，力はそのスカラー場の最大傾斜(のマイナス方向)を向くベクトルとして，きわめて直感的なイメージが描けるからである。もちろん，静電気力においても，まったく同様の関係が成立する。電磁気力においては，重力よりなお一層，場というものの考え方を重視するので，grad という概念がしょっちゅう登場するのである。

さて，このように ψ というスカラー場の最大傾斜として定義されたベクトル(これを $\boldsymbol{A}$ と書いておこう)の成分を調べると，

$$A_x = \frac{\partial \psi}{\partial x},\ A_y = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

となる。

スカラー場の傾き

直感的に当り前

以上の結果を，3次元空間に「格上げ」すれば，3次元のスカラー場 ψ に対する同様のベクトルが定義できる。すなわち，それが ∇ に他ならない。

$\nabla\psi$ あるいは grad ψ とは，その x, y, z 成分が，

$$\frac{\partial \psi}{\partial x},\ \frac{\partial \psi}{\partial y},\ \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

であるようなベクトルであり，その直感的イメージは，スカラー場 ψ の最大傾斜の方向を向き，傾斜が大きければ大きいほどその値も大きなベクトルのことである。

「ちゅうぶらりん」ベクトル ∇ の導入

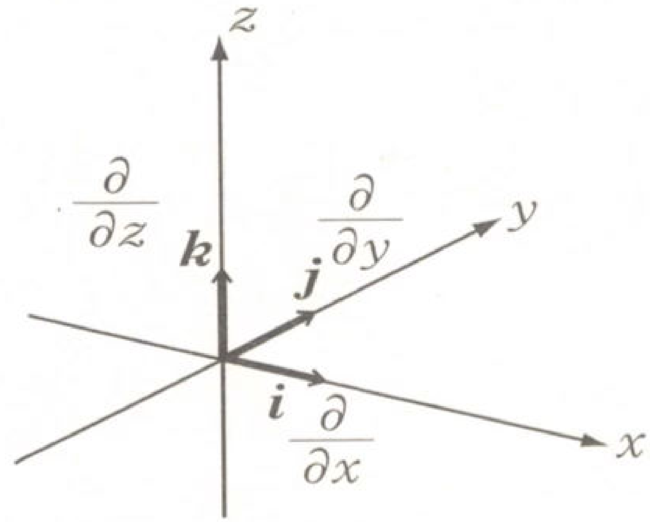
さて，ここからはいささか抽象的ではあるが，とても面白く，かつ物理学にとってはきわめて重要な「飛躍」をおこなってみよう。抽象的とはいっても，∇ が傾斜を意味したことをしっかりと把握しておけば，難しくはない。

$\nabla\psi$ は，(最大傾斜の方向を向く)ベクトルであった。ψ はもちろんスカラーである。では，(成分に書き直さず)記号 $\nabla\psi$ だけを見たときに，どこにベクトルがあるのだろうか。むろん，こういう問いかけは「詭弁的」である。$\nabla\psi$ 自身に深い意味があるわけではなく，そう書くように約束しただけなのだから。しかし，この「詭弁」を逆用して，∇ という記号そのものがベクトルなのだと考えてみよう(よく活字を見て頂くと分かるように，∇ の 2 辺は太い。A を $\boldsymbol{A}$ と書けばベクトルを表すように，∇ もまたベクトルを表す。そういう意図が最初からあるのである)。

ではベクトル ∇ とは，どんな向きをもち，どんな成分をもつのか。む

ろん，それは ψ が与えられないと決まらない。∇ はベクトルといっても，ふつうのベクトルと違い「ちゅうぶらりん」のベクトルなのである（ベクトルにかぎらないが，こういうちゅうぶらりん状態の量を，**演算子**と呼ぶ）。

図A-10 $\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}$, $\dfrac{\partial}{\partial z}$ はちゅうぶらりんではあるが，∇ はベクトルとみなせる。



大きさ未定

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

ここで，∇ を強引にベクトルとみなすと，その成分は，

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

である。あるいは，

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

と書くこともできる。

この「ちゅうぶらりん」状態から，右に何か(スカラー，あるいはベクトル)がくれば，その時点で全体が決定されるのである。では，スカラーψの代わりにベクトル$\boldsymbol{A}$がくるとどうなるであろうか。

● div $\boldsymbol{A}$ ($\nabla\cdot\boldsymbol{A}$)（ダイヴァージェンス，日本語では発散）の意味

ベクトル$\boldsymbol{A}$の成分を(A_x, A_y, A_z)として，「ちゅうぶらりん」ベクトル∇とベクトル$\boldsymbol{A}$のスカラー積を考えてみよう。

ベクトルのスカラー積の定義から，これはすぐに，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

となるはずである。こういう量(もちろんスカラー量)があることは分かるが，その具体的な意味は何であろうか。

任意のベクトル$\boldsymbol{A}$ではイメージがわきにくいから，静電気力の法則

（ガウスの法則），

$$\nabla \cdot \mathbb{D} = \mathrm{div}\,\mathbb{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \rho$$

P25で説明（あとで）

を考えてみよう。AをDに代えるだけ。

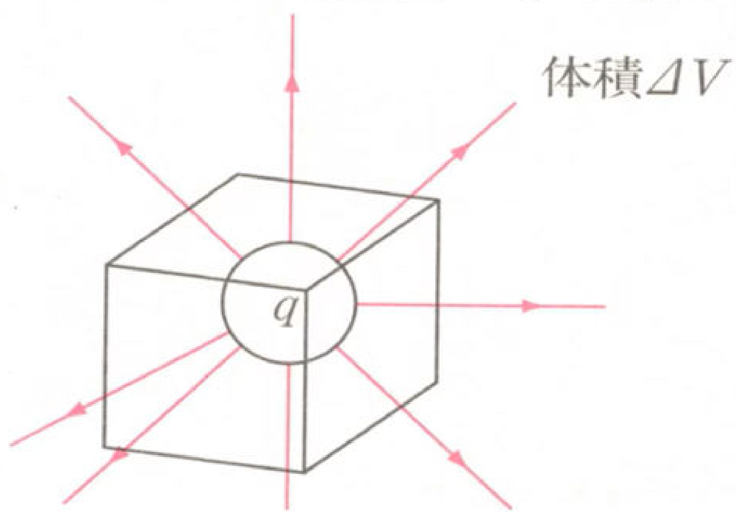
この法則が難しく感じられるのは，大きさのない一点の法則だからである。いかに微小といえども，なにがしかの空間を想定しなければ，イメージのしようがないではないか。

そこで，ぜひお勧めしたいのは，いつも，この式に微小ではあるが大きさをもった体積 $\varDelta V$ をかけてイメージしてみることである。

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{D}\,\varDelta V = \rho\,\varDelta V = q \ (\varDelta V \text{内の})$$

右辺は，ρ を電荷密度として，この体積の中にある電気量の合計になる。

図A-11●$\mathrm{div}\,\boldsymbol{D}\,\varDelta V$は，体積$\varDelta V$から「発散する」電束の合計である。



注目!

さて，式の左辺は何を意味するだろうか。$\varDelta V = \varDelta x \varDelta y \varDelta z$ として，計算してみる。

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D}\, \varDelta V = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \varDelta x \varDelta y \varDelta z$$

ここで $\partial D_x / \partial x$ の項だけをまず取り上げよう（x で成立することは，y でも z でも成立するだろう）。

ただのかけ算のイミ

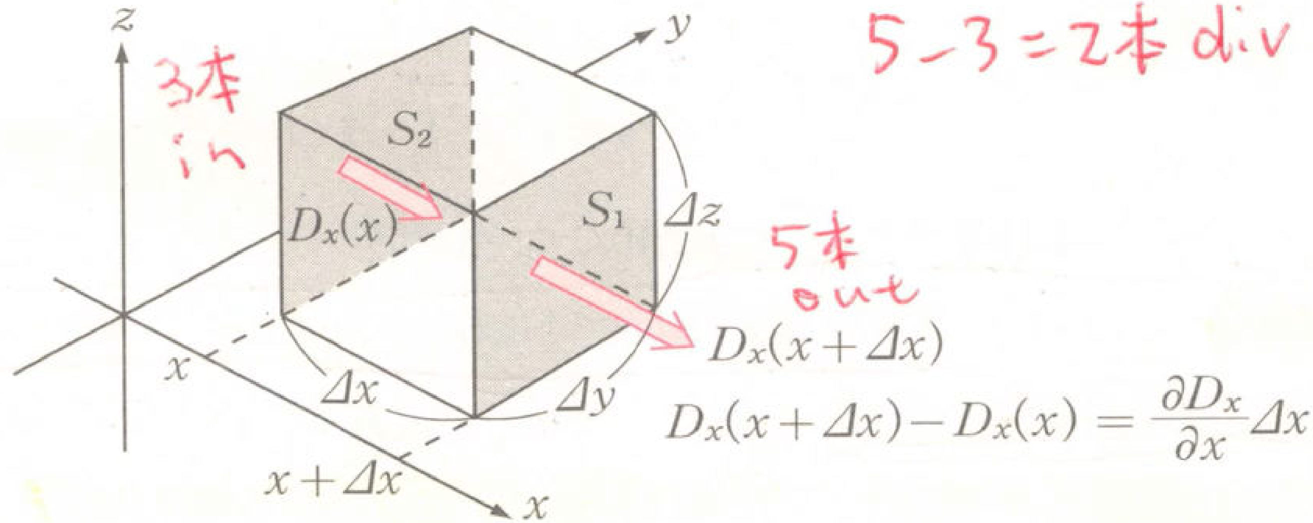
$$\frac{\partial D_x}{\partial x} \varDelta x \varDelta y \varDelta z = \frac{\partial D_x}{\partial x} \varDelta x \cdot \varDelta y \varDelta z$$

の $\dfrac{\partial D_x}{\partial x} \varDelta x$ は，偏微分の項で見たように，$\varDelta x$ だけ変化したときの D_x の増加分である。さらに，$\boldsymbol{D}$ は（電束）密度であるから，D_x に $\varDelta y \varDelta z$ をかけたものは，$\varDelta y \varDelta z$ を通過する電束の本数ということになる。つまり，

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} \varDelta x \cdot \varDelta y \varDelta z \quad \left(= \{ D_x(x + \varDelta x) - D_x(x) \} \varDelta y \varDelta z \right) \quad — ☆$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x}\Delta x\cdot\Delta y\Delta z \quad (=\{D_x(x+\Delta x)-D_x(x)\}\Delta y\Delta z)$$ —☆

図A-12● $D_x(x+\Delta x)\Delta y\Delta z$ は「出ていく」電束，$D_x(x)\Delta y\Delta z$ は「入ってくる」電束。



5−3=2本 div

は，図の面 S_1 を通過する電束と面 S_2 を通過する電束の差額分である。ΔV から出ていく（発散する）電束の本数を考えると，S_1 は発散でプラス，S_2 は吸い込みでマイナスだから，けっきょく，上式は面 S_1 と面 S_2 から出ていく（発散する）電束の合計本数ということになる。

D_y に対する $\Delta z\Delta x$，D_z に対する $\Delta x\Delta y$ も同じことを意味するから，けっきょく，

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{D}\,\Delta V = q \quad (\Delta V\text{ 内の電荷の合計})$$

がいっていることは，体積 ΔV の中に電荷 q があるとき，ΔV から合計 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{D}\,\Delta V$ 本の電束が発散しているということである。

ところで，上の議論から（$\varDelta V$ を $\mathrm{d}V$ と書いてしまうが），

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{D}\,\mathrm{d}V$$

☆

は，式をよく見ると，（出ていく電束）密度×面積のことであったから，

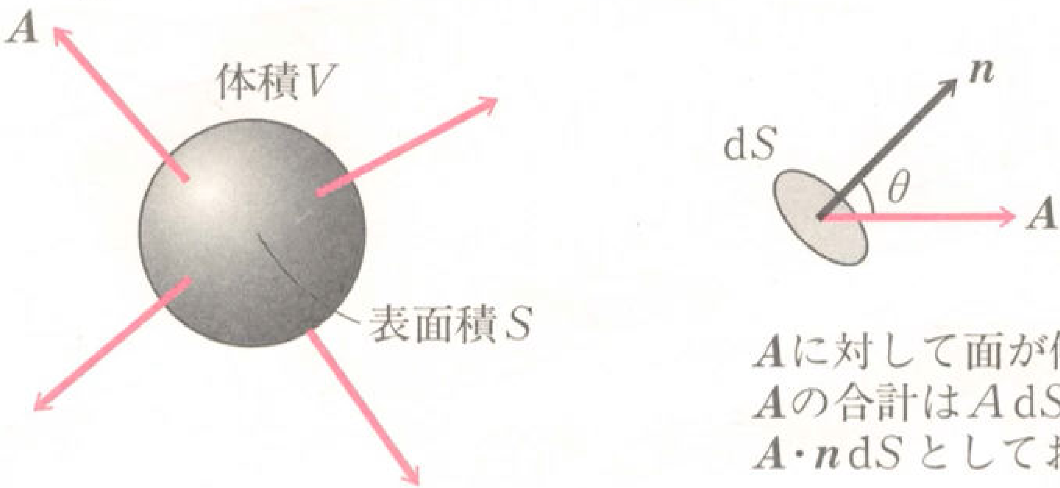
各々積分すると

$$\int_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{D}\,\mathrm{d}V = \int_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

がいえる（正確には，$\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ は，ベクトル $\boldsymbol{D}$ と面 $\mathrm{d}S$ に対して垂直な外向きの単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ の内積，$\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$ である。図参照）。

わかりにくいのでパスしてP25で証明する

図A-13● $\int_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V$ の意味は，表面から出ていく $\boldsymbol{A}$ の合計，すなわち $\int_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$。



$\boldsymbol{A}$ に対して面が傾いていると，
$\boldsymbol{A}$ の合計は $A\,\mathrm{d}S\cos\theta$ となるから，
$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$ としておかねばならない。

p25

ガウスの法則 $\int_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} \, dS = q/\varepsilon_0$ ── ①

数学の手引きで示した**ガウスの定理**（ガウスの法則とは違って，たんなる数学公式である）によって，上の式の左辺は，

$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S = \int_V \mathrm{div} \, \boldsymbol{E} \, \mathrm{d}V \quad ── ②$$

となる。

「やさしい数学の手引き」にも書いておいたが，上式を難しくとらえてはいけない。念のため，この式の「読み方」を示しておこう。左辺のイメージは，閉曲面 S から発散していく $\boldsymbol{E}$ を足し合わせたものである。右辺の $\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}$ は単なる記号なのだが，$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} \times$ 体積 V が右辺と等しいということだから，「体積 V の空間の表面から発散していく $\boldsymbol{E}$ の合計は，$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} \times$ 体積 V と表せる」ということである。それゆえ，$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}$ を「発散」と呼ぶのである。

なぜこの式が発散をイミするか
は P220 参

$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}$ は具体的には，

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

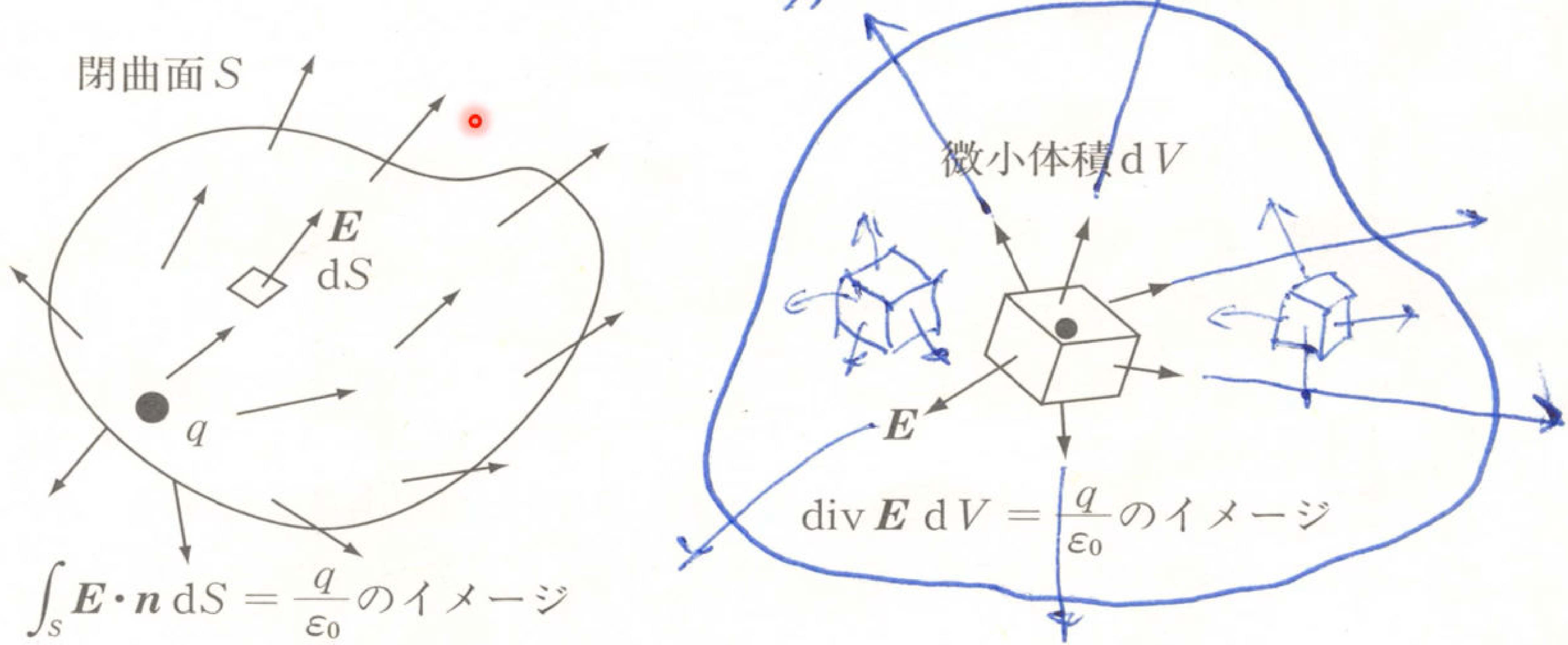
P.220

という偏微分であるが，そのイメージは前述のように電気力線の「わき出し」，すなわち**発散**である。左辺の積分が，電荷 q を取り囲む大きな閉

出し」，すなわち**発散**である。左辺の積分が，電荷 q を取り囲む大きな閉曲面を想定しているのに対して，右辺の積分の中身である $\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}$ は微小体積 $\mathrm{d}V$ を想定している。

$\int_S \mathbb{E}\,dS = \int_V \mathrm{div}\mathbb{E}\,dV$

図2-9



$\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$ のイメージ

$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}V = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$ のイメージ

そこで，空間の微小な領域 $\mathrm{d}V$ で，電場の式(ひいてはクーロンの法則)がどうなっているかといえば，（ここではdV中にqクーロン存在するとする）

$\int_V \mathrm{div}\mathbb{E}\,dV = q/\varepsilon_0$ より

①←② 代入して

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}V = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

微小なので $\int_V$ がとれて

である。$q/\mathrm{d}V$ は，その微小な領域に存在する電荷の密度 [C/m³] であるから，それを ρ と書けば，

$\mathrm{div}\mathbb{E} = q/dV\varepsilon_0 = \rho/\varepsilon_0$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

これこそが，講義１で紹介したマクスウェルの方程式の１つに他ならない。この式を見てイメージすべきことは，微小な体積の中に密度 ρ の電気量があれば，その周囲に ρ/ε_0 本の電気力線 E が発散しているということである。

この式は，電束密度 $\boldsymbol{D}$ を用いて，

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = \rho$$

P220上で天下りに与えた式

と書いても同じことである(見た目には，よりすっきりする)。

もう一度まとめれば，

$$\text{クーロンの法則} \rightarrow \text{電場の式} \rightarrow \text{ガウスの法則} \rightarrow \operatorname{div} \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

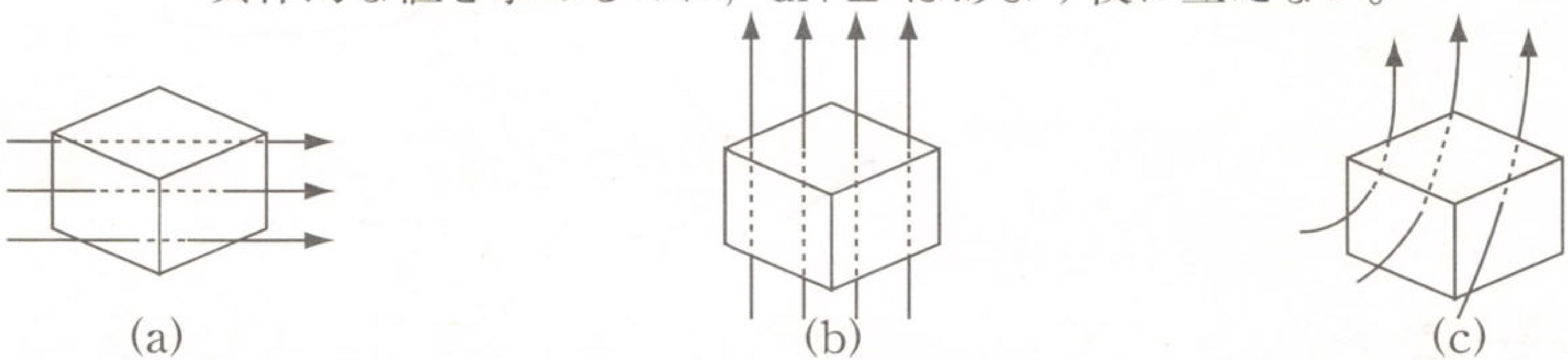
は，別々のものではなく，同じ法則の形を変えた「成長」だということである。

とはいえ，未知の電場を求めるのに，div $\boldsymbol{E}$ の式はほとんど役に立たない。たとえば，電荷が存在しない空間の電場を求める方程式は，　div E = 0

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0$$

であるが，何の条件もなしに，この偏微分方程式を解くことはできない（未知数が3つあるのに，式は1つしかない。そもそも，この式が主張していることは，微小な空間に出入りする電気力線の本数に増減がないという，あたりまえのことだけである）。この式の利用価値が出てくるのは，マクスウェルの他の方程式とのからみによってなのである。

図2-10 (a)，(b)，(c)のどれもが div $\boldsymbol{E}=0$ の解である。つまり，$\boldsymbol{E}$ の具体的な値を求めるのに，div $\boldsymbol{E}$ はあまり役に立たない。



それに対して，ガウスの法則はなかなか利用価値がある。未知の電場を求めるとき，電場の式から直接求めるには積分計算が必要である。しかし，電場の対称性などが分かっている場合，ガウスの法則がすこぶる威力を発揮する（実習問題 2-1）。

→P222へ