2017 年 7 月 25 日微分積分学 I テスト解答例.

採点基準：数学がわかっているかどうかを見る．4 題を超えて答えた場合は点が最大になるように採点する．

1. (1) $a_n > 0$ だから相加平均 $\geq$ 相乗平均より $a_{n+1} \geq \sqrt{a_n(2/a_n)} = \sqrt{2}$ である．よって $a_{n+1} - a_n = \frac{2-a_n^2}{2a_n} \leq 0$ だから $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ は単調減少である．下に有界な単調減少数列は収束するから $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ が在る．漸化式より α は $\alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \frac{2}{\alpha})$ の根であり $\forall a_n \geq \sqrt{2}$ より $\alpha > 0$ だから $\alpha = \sqrt{2}$ である．

(2) $a_1 > 0$ のとき $a_2 = 1 + \frac{1}{a_1}$ に対し $a_1 < a_2$ と仮定すると $a_3 = 1 + \frac{1}{a_2} < 1 + \frac{1}{a_1} = a_2$ である．一般に $a_{2n-1} < a_{2n}$，$a_{2n+1} < a_{2n}$ である．そこで隣接 2 項間の差の絶対値を較べてみると $a_{n+1} - a_n = (1 + \frac{1}{a_n}) - (1 + \frac{1}{a_{n-1}}) = \frac{a_{n-1} - a_n}{a_{n-1}a_n}$ となる．分母は $a_{n-1}a_n = a_{n-1}(1 + \frac{1}{a_{n-1}}) = 1 + a_{n-1} > 1$ だから結局 $|a_{n+1} - a_n| < |a_n - a_{n-1}|$ である．こうして $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ を奇偶に分けると，たとえば $a_1 < a_3 < \cdots < a_{2n-1} < a_{2n} < \cdots < a_4 < a_2$ などとなる．したがって偶数番目，奇数番目だけは有界な単調数列になるから，それぞれ収束する．漸化式から，収束先は両方とも $\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}$ の正の根である．したがって，問題の数列は $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ に収束する．

2. (1) $2.5 = 1 + 1 + \frac{1}{2} < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = e$, $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 3$.

(2) 背理法．e が有理数と仮定する．十分大きいすべての自然数 N に対して $N!e$ は整数のはずである．$N!e =$ 整数 $+ \frac{1}{N+1} + \frac{1}{(N+1)(N+2)} + \cdots$ は整数だから，$A := \frac{1}{N+1} + \frac{1}{(N+1)(N+2)} + \cdots$ も整数である．しかし $0 < A = \frac{1}{N+1} + \frac{1}{(N+1)(N+2)} + \cdots < \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{N+1})^n = \frac{1}{N+1}\frac{1}{1-\frac{1}{N+1}} = \frac{1}{N}$ だから N が十分大きいとき A は整数になり得ない．これは矛盾である．したがって e は有理数ではない．

3. (1) $f'(x) = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x} = x^{n-1}e^{-x}(n-x)$ だから $x \geq 0$ のとき $x < n$ で $f(x)$ は単調増加，$x > n$ で単調減少である．したがって $f(x)$ $(x \geq 0)$ は $x = n$ で最大値 $f(n) = n^n e^{-n}$ をとる．

(2) $g(x) = x^{n+1}e^{-x}$ $(x \geq 0)$ は (1) より $x = n+1$ で最大値 $g(n+1)$ をとる．したがって $f(x) = x^n e^{-x} = \frac{g(x)}{x}$ は $x \geq 0$ で不等式 $f(x) \leq \frac{g(n+1)}{x}$ を満たす．したがって $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ である．

(4) $a_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-x}$ とおくと $a_0 = 1$ であり，部分積分により $a_n = na_{n-1}$ である．よって $a_n = n!$.

4. (1) $x = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$, $y = \frac{e^t-e^{-t}}{2}$ のとき $x^2 - y^2 = 1$ はすぐわかる．t が実数全体を動くとき y は実数全体を動き，x は 1 以上の実数全体を動く．したがって問題の曲線は方程式 $x^2 - y^2 = 1$ で表される曲線のうち $x > 0$ を満たす方である（これは双曲線 $xy = 1$ の第 1 象限にある部分を $-\frac{\pi}{4}$ 回転して原点を中心に全体を $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍に縮小したものである）.

(2) 曲線 $x^2 - y^2 = 1$ の第 1 象限にある弧は $x = \sqrt{y^2+1}$ $(y \geq 0)$ のグラフで，その "傾き" $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ は "常に 1 より大きく"，"傾き" 1 の直線 $y = x$ は漸近線である．したがって，$0 \leq t \leq T$ のとき原点と $(\frac{e^t+e^{-t}}{2}, \frac{e^t-e^{-t}}{2})$ を結ぶ線分が掃く領域の面積は $\int_0^{\frac{e^T-e^{-T}}{2}} \sqrt{y^2+1}dy - \frac{1}{2} \times \frac{e^T-e^{-T}}{2} \times \frac{e^T+e^{-T}}{2}$ である．第 1 項を $y = \frac{e^t-e^{-t}}{2}$ とおいて置換積分すると $\int_0^T \frac{e^t+e^{-t}}{2} \cdot \frac{e^t+e^{-t}}{2}dt = \frac{e^{2T}-e^{-2T}}{8} + \frac{T}{2}$ となり，第 2 項は $-\frac{e^{2T}-e^{-2T}}{8}$ である．したがって求める面積は $\frac{T}{2}$ である．いま $T = 1$ だから答えは $\frac{1}{2}$ である．

5. (1) $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$ より $\lim_{x\to 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - (x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \cdots}{x^3} = \frac{1}{3}$.

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x - x)(\sin x + x)}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{(-\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots)(2x - \frac{x^3}{3!} + \cdots)}{x^4} \frac{x^2}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}(-\frac{1}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \cdots)(2 - \frac{x^2}{3!} + \cdots)\frac{x^2}{\sin^2 x} = -\frac{1}{3}$.

(3) $t = x^{-1}$ とおくと $x \to \infty$ は $t \to 0$ におきかわる．$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \cdots$ より $\lim_{x\to 0} x \log \frac{x}{1+x} = \lim_{t\to 0} t^{-1} \log \frac{1}{1+t} = \lim_{t\to 0} t^{-1}(-t + \frac{t^2}{2} + \cdots) = -1$.

6. (1) $\sqrt{x} = t$ とおくと $dx = 2tdt$ である．よって $\int_0^1 \sqrt{1+\sqrt{x}}dx = 2\int_0^1 \sqrt{1+t}\,tdt = 2([\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}t]_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}dt) = 2(\frac{2}{3}2^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}[\frac{2}{5}(1+t)^{\frac{5}{2}}]_0^1) = 2(\frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{15}(4\sqrt{2}-1)) = \frac{8}{15}(\sqrt{2}-1)$.

(2) $\int_1^{\infty}(\log \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1})dx = \int_1^{\infty}(\log x - \log(x+1) + \frac{1}{x+1})dx = [x\log x - x - (x+1)\log(x+1) + (x+1) + \log(x+1)]_1^{\infty} = [x \log \frac{x}{x+1}]_1^{\infty} = \lim_{x\to\infty} x\frac{x}{x+1} - \log\frac{1}{2} = -1 + \log 2$. 最後の等式は問題 5(3) による．テイラー公式により $x > 0$ のとき $\log \frac{x}{x+1} = \log(1 - \frac{1}{x+1}) = -\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}(\frac{1}{x+1})^2 - \frac{1}{3}(\frac{1}{x+1})^3 - \cdots$ である．よって被積分関数は負の値をとる．だから（または積分の結果 $-1 + \log 2$ が負だから）積分の値は負である．