第 11 回講義：重積分の変数変換その 1．1 次変換に対する重積分の変数変換公式.

ゴール：第十一回目と第十二回目では，理論でも応用でも極めて重要な二重積分に対する変数変換公式を学習する．

（例）積分領域が xy 平面の 2 本のベクトル $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ と $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ によって張られる平行四辺形 D である重積分を考える．累次積分で計算しようとすると縦線（または横線）領域と思った時の上下の曲線 φ と ψ が折線だから（順序をどっちにとっても）計算を三回に分けなければならない（折れ目のところで累次積分の積分区間を分ける）ので，面倒である．この面倒が起きる理由は，辺が水平線と垂直線でない平行四辺形を水平線と垂直線で分割することにある．辺に平行な線で分割すれば計算は楽になるはずである．それを実現するのが，一次変換による変数変換である．E を $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ という標準基底で張られる uv 平面の正方形とする．$\mathbb{R}^2$ の一次変換 T で $T\mathbf{e}_1 = \mathbf{a}_1, T\mathbf{e}_2 = \mathbf{a}_2$ となるもの，すなわち行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考えると $T(E) = D$ である．

$$\iint_D f(x, y)dxdy$$

に $x = au + bv, y = cu + dv$ を代入すると積分領域は uv 平面の正方形 E になる．重積分は

$$|\text{微小面積}| \times (\text{高さ})$$

を足し合わせたものだから，T によって対応する微小面積の面積比，すなわち uv 平面の領域が T によって xy 平面の領域に写されるときの面積比が問題になる．一次変換の面積比は領域がどこにあっても同じであり，領域を小さな正方形に分ければ，T による面積比が正方形に対して分かれば，任意の領域でも同じ比になることがわかる．$T(E) = D$ において，E の面積は 1 だから，問題の面積比は平行四辺形 D の面積に等しい．D の面積は

$$\left| 2\left\{ \frac{1}{2}(a+b)(c+d) - \frac{1}{2}ac - \frac{1}{2}(c+c+d)b \right\} \right| = |ad - bc| = |\det(A)|$$

である．したがって

$$\iint_D (f(x, y)dxdy = \iint_E f(au + bv, cu + dv)|ad - bc|dudv$$

という公式が成り立つ．

まとめると：二変数関数の積分の変換公式（置換積分の公式）は次の定理である．

（定理）D は $\mathbb{R}^2$ の面積確定集合，$f(x, y)$ は D とその境界を含む領域で連続な関数とする．行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ によって定まる一次変換 T：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

により (uv) 平面の領域 E が (xy)-平面の領域 D に対応する（少なくとも一方が面積確定集合であることを仮定すれば両方とも面積確定集合である）とき，D 上の関数 $f(x, y)$ に対し

$$\iint_D f(x, y)dxdy = |J| \iint_E f(au + bv, cu + dv)dudv$$

（ただし $J := ad - bc$ である）が成り立つ．

- この公式の表示方法は教科書によって違うことがあるので注意すること．
- 上の公式の覚え方：

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ とする．(x, y) 平面の領域 D 上の関数 $f(x, y)$ に $x = au + bv$, $y = cu + dv$ を代入して (uv) 平面上の関数を得る：$f(x, y) \mapsto f(au + bv, cu + dv)$.

(xy) 平面上の微小面積 $dxdy$ に $x = au + bv$, $y = cu + dv$ を代入すると (uv) 平面上の微小面積 $|J|dudv$ となる．すなわち

$$dxdy = |J|dudv$$

である．ここで J は行列式であり

$$J := \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

と覚えるといい.

（説明）1 次変換 T により，(uv) 平面の長方形 E に対応するのは (xy) 平面の平行 4 辺形 D である．この時，E の縦線と横線による分割は，D の辺に平行な 2 組の直線群による分割に対応する．上限下限原理をこの分割に適用し被積分関数の（一様）連続性を使い，最後に正方行列 A によって引き起こされる 1 次変換による面積比は $\det A$ であることに注意すれば，上の（定理）の公式を証明できる．積分領域の面積確定性を仮定する理由は第十回講義と同様である． □

- 変数変換による積分の計算例.

例 1. $\iint_D (x^2 - y^2)dxdy$, $D : 0 \le x + y \le a$, $0 \le x - y \le a$.

（解）

$$\begin{aligned} x - y &= u \\ x + y &= v \end{aligned}$$

とおくと

$$x = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v \ , \ y = -\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$$

だから

$$J = \frac{1}{2}$$

である．この変数変換により積分領域 D と座標軸に平行な辺をもつ長方形 $E : 0 \le u \le a$, $0 \le v \le a$ と D が対応する．よって $\iint_D (x^2 - y^2)dxdy = \frac{1}{2}\iint_E uvdudv = \frac{a^4}{8}$.

例 2. $\iint_D \sqrt{xy}e^{-(x+y)}dxdy$, $D : x \ge 0, y \ge 0, x + y \le a$.

（解）上と同様に $x - y = u$, $x + y = v$ とおく．D と対応する E は $E : |u| \le v \le a$ となる．

$$\begin{aligned} &\iint_D \sqrt{xy}e^{-(x+y)}dxdy = \frac{1}{2}\iint_E \sqrt{\frac{v^2 - u^2}{4}}e^{-v}dudv \\ &= \frac{1}{2}\int_0^a \left(\int_{-v}^v \sqrt{\frac{v^2 - u^2}{4}}e^{-v}du\right)dv \\ &= \frac{1}{2}\int_0^a \frac{\pi v^2}{4}e^{-v}dv = \frac{\pi}{8}\{2 - e^{-a}(a^2 + 2a + 2)\} \ . \end{aligned}$$

この例では，被積分関数の因子の両方に x, y が入っている状況は計算をむずかしくしている．上のように 1 次変換することによって，e の肩に乗っているのが v だけになり，累次積分が楽にできるようになったことが，この変数変換のポイントである．

- **課題.** 教科書の問 22.1.