第 12 回講義：積分計算の楽しみ (?).（教科書 2.12）

● 有理関数の積分．

高々2 次式を因数とする因数分解さえできれば，以下に代表される計算に帰着する [1]．

例 1. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx$ を

$$\arctan x = \int \frac{dx}{x^2+1}$$

の右辺を部分積分して求める．右辺を部分積分すると

$$\begin{aligned}\arctan x &= \frac{x}{x^2+1} - \int x \frac{-2xdx}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x}{x^2+1} + \int \frac{2(x^2+1)-2}{(x^2+1)^2}dx \\ &= \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{dx}{x^2+1} - 2\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x}{x^2+1} + 2\arctan x - 2\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

となって，所要の積分 $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx$ が右辺に現れる！そこで $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx$ について解く．

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + \arctan x\right).$$

全く同じ方法で

$$I_n := \int \frac{1}{(1+x^2)^n}dx$$

の漸化式を求めることができる．$\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}dx$ を $\displaystyle\int \frac{x'}{(1+x^2)^{n-1}}dx$ と思って部分積分して，上の計算を真似る．ではやってみる．

$$\begin{aligned}I_{n-1} &= \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}dx = \int \frac{x'}{(1+x^2)^{n-1}}dx = \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} - \int x\{-(n-1)(1+x^2)^{-n}\cdot(2x)\}dx \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{(1+x^2)-1}{(1+x^2)^n}dx = \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + 2(n-1)(I_{n-1}-I_n)\end{aligned}$$

を I_n について解くと $2(n-1)I_n = \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}$ したがって

$$I_n = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}I_{n-1}$$

である．

例 2. (1) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x}\frac{1}{x}dx$, (2) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-5x+6}dx$, (3) $\displaystyle\int \frac{3x-2}{(x-1)^3}dx$, (4) $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x+2}dx$ (5) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$

を，部分分数分解や多項式の割り算を利用して求める．まず割り算を実行して，与えられた有理式を，

(多項式)+(有理式)，ただし有理式は「分母の次数 $>$ 分子の次数」

[1] 理論的には n 次式を 1 次式の積に因数分解することはいつでも可能だが，このことを実行する四則演算と根号を開く演算だけによる計算方法は存在しないことが数学的に証明されている．

という形に分解する．(4) 以外は，難しい部分である「分母の次数 > 分子の次数」の形の有理式の積分の例である．

(1) $\dfrac{1}{1+x}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$ と分解して $\displaystyle\int\frac{1}{1+x}\frac{1}{x}dx=\log\left|\frac{x}{x+1}\right|$.

(2) $\dfrac{2x+1}{x^2-5x+6}=(2x+1)\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-2}\right)=\dfrac{2(x-3)+7}{x-3}-\dfrac{2(x-2)+5}{x-2}=\dfrac{7}{x-3}-\dfrac{5}{x-2}$ だから $\displaystyle\int\frac{2x+1}{x^2-5x+6}dx=7\log|x-3|-5\log|x-2|$.

(3) $\dfrac{3x-2}{(x-1)^3}=\dfrac{3(x-1)+1}{(x-1)^3}=\dfrac{3}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x-1)^3}$ だから $\displaystyle\int\frac{3x-2}{(x-1)^3}dx=-\frac{3}{x-1}-\frac{1}{2(x-1)^2}$.

(4) $\dfrac{x^3+x+1}{x+2}=x^2-2x+5-\dfrac{9}{x+2}$ だから $\displaystyle\int\frac{x^3+x+1}{x+2}dx=\frac{x^3}{3}-x^2+5x-9\log|x+2|$ である．

(5) 計算好きの人向けの例：$\dfrac{1}{x^3+1}=\dfrac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2-x+1}$ とおいて A,B,C を求める（部分分数分解）$1=A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)=(A+B)x^2+(-A+B+C)x+(A+C)$ が恒等式だから $A+B=0$, $-A+B+C=0$, $A+C=1$ でなければならない．第三式から $A=1-C$ である．これを第一式と第二式に代入して A を消去すると $B-C=1$, $B+2C=1$ となる．よって $B=-\frac{1}{3}$, $C=\frac{2}{3}$, $A=\frac{1}{3}$ となる．よって $\dfrac{1}{x^3+1}=\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}$ と部分分数分解できた．さらに $t=x-\frac{1}{2}$ とおいて $x^2-x+1=t^2+\frac{3}{4}$ と平方完成すると $\dfrac{1}{x^3+1}=\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{3}\dfrac{t}{t^2+\frac{3}{4}}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{t^2+\frac{3}{4}}$ $(t=x-\frac{1}{2})$ である．よって $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{3}\int\frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}dt+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}\log|x+1|-\frac{1}{6}\log\left(t^2+\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}t=\frac{1}{6}\log\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$ である．

• 3 角関数の積分．

$t=\tan\frac{x}{2}$ とおけば有理関数の積分に帰着するが，この方法にばかりこだわるのは得策ではない．実際，前回の講義でやった

$$\int_a^b \sin^2 x dx$$

の計算では

$$\sin^2 x=\sin x(-\cos x)'$$

に部分積分を適用した．この計算を $t=\tan\frac{x}{2}$ とおいて置換積分で実行してみよう．$\sin x=2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}=2\cos^2\dfrac{x}{2}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\dfrac{2t}{1+t^2}$ $(\because\ 1+t^2=\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}})$, $dt=\dfrac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\dfrac{(1+t^2)dx}{2}$ より $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$. よって $\displaystyle\int\sin^2 xdx=\int\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2\frac{2}{1+t^2}dt$ となり，大変である．以下は，置き換え $t=\tan\frac{x}{2}$ が成功する例である：

例 1. $\displaystyle\int\frac{1}{\sin x}dx$.　例 2. $\displaystyle\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx$

$\tan\dfrac{x}{2}=t$ とおくと有理関数の積分に帰着する．$t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと $1+t^2=\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$ だから $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{2}(1+t^2)$. よって $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$. また，$\sin x=2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}=\dfrac{2t}{1+t^2}$. よって，この二つの例は以下のように計算できる：

例 1. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{1+t^2}{2t}\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{dt}{t}=\log|t|=\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|$.

例 2. $\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}=\dfrac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\dfrac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}+2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{2}=\dfrac{1+t^2+2t}{2}=\dfrac{(1+t)^2}{2}$ だから
$\displaystyle\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx=\int\frac{(1+t)^2}{2}\frac{2dt}{1+t^2}=\int\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)dt=t+\log(1+t^2)=\tan\left(\frac{x}{2}\right)-2\log\left|\cos\frac{x}{2}\right|.$

● **無理関数の積分.**

初等的に計算できるのは，本質的に以下の例のような特殊な場合に限る（ことが理論的に知られている）.

例1. $R(x,y)$ は2変数有理関数とする. $\displaystyle\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ $(a>0)$ の形. 置き換え $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x$ によって有理関数の積分に帰着する.

注意：$a<0$ の時はすでに考えた．置換積分の例として $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ を取り上げた．このとき $t=\sin u$ という置き換えが有効であった．これが $a<0$ の時の基本である.

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}dx$, (2) $\displaystyle\int\sqrt{x^2+A}dx$.

ともに $\sqrt{x^2+A}=t-x$ という置換積分が有効に働く. $\sqrt{x^2+A}=t-x$ とおくと $x^2+A=t^2+x^2-2tx$ だから $x=\dfrac{t}{2}-\dfrac{A}{2t}$, $dx=\dfrac{t^2+A}{2t^2}dt$, $\sqrt{x^2+A}=t-x=\dfrac{t^2+A}{2t}$.

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}dx=\int\frac{2t}{t^2+A}\frac{t^2+A}{2t^2}dt=\int\frac{dt}{t}=\log|t|=\log|x+\sqrt{x^2+A}|.$
これは前回の置換積分パターン 2 例 4 の別解です（教科書のやり方なので掲載しました）. 前回では $A=1$ で $x=\sinh t$ とおきました．ここで $\sinh t=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$ です．私は前回のやり方の方が $A=-1$ なら $x=\sin u$, $A=1$ なら $x=\sinh u$ という対称性があって理解しやすいように思えます.

(2) 同じようにできるが，そのままやるのは面倒．部分積分を使うと次のように簡単な (1) に帰着する：
$\displaystyle\int\sqrt{x^2+A}dx=x\sqrt{x^2+A}-\int x\frac{x}{\sqrt{x^2+A}}dx=x\sqrt{x^2+A}-\int\frac{x^2+A-A}{\sqrt{x^2+A}}dx=x\sqrt{x^2+A}-\int\sqrt{x^2+A}dx+A\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}$. (1) の結果を使うと $\displaystyle\int\sqrt{x^2+A}dx=\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+A}+A\log|x+\sqrt{x^2+A}|)$.

(3) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2-5}}$.

$\sqrt{x^2-5}=t-x$ とおく. $x^2-5=t^2-2tx+x^2$ だから $x=\dfrac{t}{2}+\dfrac{5}{2t}$, $dx=\dfrac{t^2-5}{2t^2}dt$, $x+2=\dfrac{t^2+4t+5}{2t}$. $\sqrt{x^2-5}=\dfrac{t^2-5}{2t}$. よって問題の積分は $\displaystyle 2\int\frac{dt}{t^2+4t+5}=2\int\frac{dt}{(t+2)^2+1}=2\arctan(t+2)=2\arctan(x+\sqrt{x^2-5}+2)$.

例 2. $R(x,y)$ は 2 変数有理関数とする. $\displaystyle\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ の形．置き換え $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ によって有理関数の積分に帰着する．例えば $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$ の計算：

$t=\sqrt[3]{\frac{x}{1-x}}$ とおくと $t^3=\frac{x}{1-x}$ だからこれを x について解くと $x=\dfrac{t^3}{1+t^3}$, $dx=\dfrac{3t^2}{(t^3+1)^2}dt$ である.

実際，計算してみると $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(1 - \dfrac{1}{1+t^3}\right) = \dfrac{3t^2}{(1+t^3)^2}$ である．よって

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}} &= \int \frac{1}{x}\sqrt[3]{\frac{x}{1-x}}dx \\
&= \int t\frac{t^3+1}{t^3}\frac{3t^2}{(t^3+1)^2}dt \\
&= 3\int \frac{dt}{t^3+1} \quad [\text{以下は計算好きな人向け}] \\
&= \frac{1}{2}\log{(t+1)^2 t^2 - t + 1} + \sqrt{3}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{2}\log{(t+1)^3 t^3 + 1} + \sqrt{3}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}} \\
&= \frac{3}{2}\log|x^{\frac{1}{3}} + (1-x)^{\frac{1}{3}}| + \sqrt{3}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\left(2\sqrt[3]{\frac{x}{1-x}} - 1\right)
\end{aligned}
$$

• 諦めるな，置換積分と部分積分は積分の値を「評価」をするのにも使える！

これは，計算機に積分計算させるときの注意でもある．いきなりやらせるのではなく，できるだけ誤差が少ない形に直してから計算機にやらせることが重要．こういった臨機応変な工夫は人間でなければできない．以下は，近似計算を実行する前に置換積分，部分積分で下ごしらえをしておくことによって誤差を小さくできる例である：

1．置換積分を利用して積分の評価を改良できる例：

$$I = \int_1^4 \frac{dx}{1+x}$$

の近似計算.

そのままで下限上限原理を使うと

$$0.6 = I = \frac{1}{5}(4-1) \leq \int_1^4 \frac{dx}{1+x} \leq \frac{1}{2}(4-1) = 1.5$$

である．$x = t^2$ とおいて

$$I = \int_1^2 \frac{2t}{1+t^2}dt$$

と書き換えてから下限上限原理を使うと

$$0.8 = \frac{4}{5}(2-1) \leq I \leq 1(2-1) = 1$$

となって真の値を含む区間の長さが小さくなって，近似計算の精度が上がる．このような計算が，置換積分を用いる近似計算である．

2．部分積分を利用して積分の評価を改良できる例：

$$I = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$$

の近似計算.

$$x^2\sqrt{1-x^2} = \left(x\sqrt{1-x^2}\right)x = \left(-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right)'x$$

と分解して部分積分すると

$$I = \int_0^1 \frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx$$

となる．関数

$$y = x^2\sqrt{1-x^2}$$

と関数

$$y = \frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

のグラフを較べると，前者のグラフは $x \to 1$ で微分が $-\infty$ になって局所定数関数による近似計算では誤差が大きい一方，後者のグラフでは微分が大きくなることはないので，局所定数関数による近似計算の誤差が小さい．

• **課題**. 教科書の問 12.2, 12.3, 12.4.

補足. 特殊な形の積分の計算例を見て，なぜうまく計算できるのか不思議に思うかもしれない．この補足では，この疑問点はどう考えたら解決できるかについて述べる．不定積分は，有理関数の積分に変形できれば，原理的には初等関数で表される（初等関数とは，有理関数，代数関数つまり代数方程式の解となる関数，指数関数、対数関数、3 角関数．逆 3 角関数の有限回の組み合わせで表される関数のことである）．そして，不定積分が初等関数で表されるときには，必ず背景に「有理パラメータ表示される曲線」がある．例えば，$\displaystyle\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ の形の積分 （$R(x,y)$ は二変数の有理式）．$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ とおくと $x = \frac{-dt^n+b}{ct^n-a}$ だから曲線 $y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ は $x = \frac{-dt^n+b}{ct^n-a}$, $y = t$ と言う有理パラメータ表示を持つ．無理関数の積分の計算例 2 でこの形の積分を計算したときに，実際に $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ とおいて置換積分したことを確認してほしい．以下，初等的に計算可能な積分の背景には「有理パラメータ表示される曲線がある」ことの理由を述べる．$R(\cdot,\cdot)$ を 2 変数の有理式とする．積分

$$\int R(x, f(x))dx$$

を考える．ここで $y = f(x)$ という曲線は $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ という**有理パラメータ表示をもつ曲線**だとする．たとえば，円，双曲線，放物線という 2 次曲線はすべて有理パラメータ表示をもつ曲線である（しかし一般の 3 次式で定義される曲線はそうではない）．曲線 $y = f(x)$ が有理パラメータをもつとき，$x = \phi(t)$ とおいて置換積分すると

$$\int R(x, f(x))dx = \int R(\phi(t), \psi(t))\phi'(t)dt$$

となって，有理式の積分に帰着する．不定積分が初等関数で表される場合は，必ずこの構造が背景にある．