第 10 回講義．積分とは何か．定積分．微積分学の基本定理．(教科書 2.10)

多くの教科書では不定積分を学習してから定積分を導入するが，本講義の指定教科書に従い，私はこの順番を逆にして,「積分は総量の数学的概念」という積分の「元来の意味」を最初に説明する．定積分を導入してから「微積分学の基本定理」を証明し，それに基づいて，不定積分（または原始関数）の概念を導入する．

• 積分とは何か．積分は**総量の数学的概念**である．以下は総量としての積分の概念が現れる典型例である：

(i) スピードメーターと走行距離,
(ii) 棒の密度と質量,
(iii) 正のグラフ下の面積,
(iv) 力と仕事.

これらはいずれも「A の総和をとったものが B である」という構造になっている．
(i) では横軸に時間，縦軸にスピードをとり,
(ii) では横軸に棒の左端からの長さ，縦軸に密度をとり,
(iii) では横軸を x 軸，縦軸を y 軸として $y = f(x)$ のグラフを考え,
(iv) では横軸に移動距離，縦軸に力をとる．

(iii) は (i),(ii),(iv) を抽象化したものである．なお，$[a, b]$ は横軸の区間，f は積分されるもの（例えば (i) ではスピード），$I(f, [a, b])$ は「f を区間 $[a.b]$ で積分したもの」である．これらはいずれも 2 つの原理 (1)(2)：

(1) **区間の分割に対する加法性**

$$a \leq c \leq b \Rightarrow I(f, [a, b]) = I(f, [a, c]) + I(f, [c, b])$$

(2) **上限下限性質** $[a, b]$ 上で

$$m \leq f(x) \leq M \Rightarrow m(b - a) \leq I(f, [a, b]) \leq M(b - a)$$

を満たしている．(1), (2) を**積分の原理**とよぶ．

(1)(2) が積分の原理とよばれる理由は，積分のすべての性質は積分の原理 (1)(2) から証明されるからである [1]．

• 積分とは，2 つの原理 (1), (2) を使って総量をできるだけ正確に計算する数学である．

定積分の定義： 積分の原理 (1)(2) から定積分

$$\int_a^b f(x)dx$$

の定義に至る道筋を解説する．

一定の速さで動くとき「距離 = 速さ × 時間」である．おなじみのこの公式は、実は定数関数の積分の公式である．**速さが一定でない**とき，走行距離を計算する手立てはあるのか？
これからやりたいことは、この問いに答えるために，**定数でない関数の積分を定義する**ことである．
定数でない連続関数 $f(x)$ が与えられたとせよ．

連続関数は十分小さい区間では定数関数で近似できる．
そこで，区間を分割して，各小区間で $f(x)$ を定数関数で近似する．
各小区間で $f(z)$ を**最小値で近似**して定数関数の積分の公式を適用して小区間全体にわたって和をったものを**下方和**という，**最大値で近似**して定数関数の積分の公式を適用して小区間全体にわたって和をとったものを**上方和**をという．分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b$ に対し，各区間 $[x_{i-1}, x_i]$ において $m_i \leq f(x) \leq M_i$ となるギリギリの m_i と M_i を考える．すると下方和は $s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$ であり，上方和は $S_\Delta = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$ である．積分の原理 (1),(2) から，下方和は分割を細かくし

[1] この原理は重積分の場合にも拡張され，重積分の変数変換公式を理解するときに有効に働くことになる

ていく（細分をとる）と単調増加であり，上方和は分割を細かくしていく（細分をとる）と単調減少である．［理由．$a < b < c$ なら $[a,c] = [a,b] \cup [b,c]$ と細分できる．

$$\min_{x\in[a,c]} f \le \min_{x\in[a,b]} f \ , \ \min_{x\in[a,c]} f \le \min_{x\in[b,c]} f$$

だから下方和は分割を細かくしていくとき単調増加である．

$$\max_{x\in[a,c]} f \ge \max_{x\in[a,b]} f \ , \ \max_{x\in[a,c]} f \ge \max_{x\in[b,c]} f$$

だから上方和は分割を細かくしていくとき単調減少である．］したがって，二通りの分割 Δ_1, Δ_2 を重ねた分割 Δ_3 を考えると

$$s_{\Delta_1}(f) \le s_{\Delta_3}(f) \le S_{\Delta_3}(f) \le S_{\Delta_2}(f)$$

である．よって数直線上に下方和の集合 L と上方和の集合 U を描くと，U は L の左側にあり，この両者には，L の右端点と U の左端点で接する可能性がある以外には，共通部分がない．したがって，分点が限りなく増加して分割の幅が零に近づくような分割の列をとると，減少する上方和の列と，増加する下方和の列ができて，近づいていく．もし U の右端点と L の左端点が一致していれば，これらの極限は一致する．関数 $f(x)$ が連続関数なら，U の右端点と L の左端点は一致する（証明は教科書の付録 §7-8 を見てほしい）．次の定理が基本的である：

• （定理-定義）$[a,b]$ 上の**連続関数** $f(x)$ に対し，**上方和の列と下方和の列の極限は一致**して，**極限値は分割の幅が零になる分割の列の取り方によらない**．この極限値を連続関数の $[a,b]$ における**定積分**といい

$$\int_a^b f(x)dx$$

により表す.

講義では，この事実を絵を描いて説明する（厳密な証明は教科書の付録 §7-8 に書いてある）.

• どうしたら定数関数でない関数の積分を計算できるのか？　以下に基本的な考え方を説明する：

1．積分の基本性質：積分の原理 (1)(2) に性質 (3)(4) を加えて，積分計算の礎となる：

(1) 区間の分割に対する加法性：

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \ .$$

ただし $a \le b$ のとき

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

と約束する.

(2) 上限下限性質：$[a,b]$ 上で

$$m \le f(x) \le M \Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \ .$$

(3) 線形性：

$$\int_a^b \{\alpha f(x) + \beta g(x)\}dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx \ .$$

(4) 不等式の保存：$[a,b]$ 上で

$$f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx \ .$$

注意. (4) の**逆は成立しない**ことに注意せよ．反例を作るのは簡単なので各自で考えて欲しい（質問歓迎）.

2. 積分と微分の関係：積分の原理 (1)(2) を使うと**微積分学の基本定理**が導かれる：

（定理）(1) 積分して微分すると元に戻る：

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)\ .$$

$G'(x) = f(x)$ を満たす任意の関数 $G(x)$（つまり $f(x)$ の不定積分）に対し，定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ は

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

と計算できる.

(2) 微分して積分すれば元に戻る： $f(x)$ は $[a,b]$ で微分可能で $f'(x)$ は連続とする [2]．このとき

$$\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a)$$

が成り立つ.

証明：(1)

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

とおき，$h > 0$ を $a < x < x+h < b$ となるようにとって

$$m = \min_{t\in[x,x+h]} f(t)\ ,$$
$$M = \max_{t\in[x,x+h]} f(t)$$

とおく．すると積分の原理 (1)(2) より

$$mh \overset{(2)}{\le} F(x+h) - F(x) \overset{(1)}{=} \int_x^{x+h} f(t)dt \overset{(2)}{\le} Mh$$

したがって

$$m \le \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \le M$$

である．f は連続だから $h \to 0$ のとき $m \to f(x)$, $M \to f(x)$ である．はさみうちの原理により $h \to 0$ のとき

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \to f(x)$$

である．$h < 0$ のときも同様.

次に第 2 の主張を示す.

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

とおくと第 1 の主張から

$$F'(x) = f(x)$$

[2] $f'(x)$ が $[a,b]$ で連続でない，例えば端点 a で連続でないと，次の公式は成り立つとは限らない.

である．$G(x)$ を $G'(x) = f(x)$ を満たす任意の関数とする．このとき

$$\frac{d}{dx}(G(x) - F(x)) \equiv 0$$

である．よって

$$G(x) - F(x) = \text{const.}$$

である．ここで $F(a) = 0$ ゆえ，右辺の定数は $G(a)$ に等しい．よって $G(x) = F(x) + G(a)$ である．したがって

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) = G(b) - G(a)$$

である．

(2) 定積分の定義に帰着させる証明：$[a, b]$ の分割 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ をとる．このとき分割の幅を限りなく細かくすれば，定積分の定義から

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n} f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &\to \int_a^b f'(x)dx \end{aligned}$$

である．ここで $x_{i-1} < \exists\xi_i < x_i$ である（このような ξ_i が x_{i-1} と x_i の間に存在することは平均値の定理から従う）．

$f'(x)$ が連続関数の時，$f(x)$ が $f'(x)$ の原始関数であることを使う証明：(1) から

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f'(t)dt = f'(x)$$

である．よって

$$\frac{d}{dx}\left\{\int_a^x f'(t)dt - f(x)\right\} = f'(x) - f'(x) = 0$$

したがって

$$\int_a^x f'(t)dt - f(x) = \text{定数関数}$$

である．この定数の値は $-f(a)$ である．よって

$$\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a)$$

である． □

微分したら $f(x)$ になる関数 $F(x)$ すなわち

$$F'(x) = f(x)$$

となる関数 $F(x)$ を，**不定積分**または**原始関数**とよぶ．

まとめ：微積分の基本定理により：

- 区間で定義された任意の連続関数に対して不定積分が存在する．
- 不定積分（原始関数）と定積分は

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

という関係にある.

● 微分の公式は，積分の公式に読み替えられる．したがって，基本的な微分の公式は不定積分の公式でもある．以下の公式では右辺の関数の微分が左辺の関数（積分記号下の積分される関数，被積分関数）である．例えば上から 4 番目の公式を見てほしい．$-\cos x$ の微分は $\sin x$ である．正確に言えば右辺に $+C$ を加えるべきだが，定数の差は無視する [3]：

記憶しておくべき不定積分の公式.

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \quad (\,n \neq -1,\ n \text{ が整数でないときは } x>0\,)$$
$$\int \frac{dx}{x} = \log|x|$$
$$\int e^x dx = e^x$$
$$\int \sin x dx = -\cos x$$
$$\int \cos x dx = \sin x$$
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \quad (\,-\arccos x \text{ でもよい}\,)$$
$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$$

例題. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(e^t)dt$ を求めよ.

（解）$g(t)=f(e^t)$ とおいて，微積分学の基本定理を適用すると

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(e^t)dt = \frac{d}{dx}\int_a^x g(t)dt = g(x) = f(e^x)$$

である.

● **課題（微積分学の基本定理）**．関数 $f(x)$ は (1)(2) では連続，(3) では微分可能と仮定する．ただし，(3) は 2 階微分すること，つまり $\frac{d}{dx}$ を働かせ，その結果にもう一度 $\frac{d}{dx}$ を働かせることを意味する．このとき，次を求めよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^{x^2} f(t)dt.$

(2) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{2x+1}^{x^3} f(t)dt.$

(3) $\dfrac{d^2}{dx^2}\displaystyle\int_a^x (x-t)f(t)dt.$

ヒント：(1) $F'(t)=f(t)$ となる $F(t)$ をとって，微積分学の基本定理を適用する.

(3) $\displaystyle\int_a^x (x-t)f(t)dt.$ を

$$\int_a^x (x-t)f(t)dt = x\int_a^x f(t)dt - \int_a^x tf(t)dt$$

と変形する.

[3] 常微分方程式を解くとき（例えば力学の問題を解くとき）には，定数の差を無視してはいけない．積分定数には物理的な意味があるからである.