第 13 回講義：無限区間での積分（第 1 種広義積分）.（教科書 2.13）

第 1 種広義積分(ここだけの言葉なのだが...）とは $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ のように積分区間が片側または両側に無限に伸びている積分のことである．今回は，第 1 種広義積分はいつ収束するか，どうやって計算するかという問題を考える． $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ は，定積分の極限 $\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^2}$ が収束することでもって定義される．これを一般化することにより，第 1 種広義積分の収束の概念の定義とする．すなわち $\lim_{a\to-\infty, b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ が収束するとき，その極限値で $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ を定義する．

- 第 1 種広義積分 $\int_1^\infty \frac{dx}{x^a}$ の収束発散の運命を定積分の極限を調べることによって決定する．

例:図形的に明らかな $\int_b^{2b} \frac{dx}{x} > \frac{1}{2}$ $(\forall b > 0)$ により $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ は発散することが判る（なぜなら曲線下に面積 $\frac{1}{2}$ の長方形を互いに交わらないように無限個入れられるから）．具体的に計算すると $\int_1^b \frac{dx}{x} = \log b \to \infty$ $(b\to\infty)$ である．

例:$a > 1$ のとき． $\frac{1}{x^a} = \frac{1}{1-a}\frac{d}{dx}\frac{1}{x^{a-1}}$ $(a-1>0)$ だから $\int_1^b \frac{1}{x^a}dx = \left[\frac{1}{1-a}\frac{1}{x^{a-1}}\right]_1^b = \frac{1}{1-a}\left(\frac{1}{b^{a-1}} - 1\right) \to -\frac{1}{1-a} = \frac{1}{a-1}$ $(b\to\infty)$ だから，第 1 種広義積分の定義より $a > 1$ のとき $\int_1^\infty \frac{1}{x^a}dx = \frac{1}{a-1}$ である．よって $a > 1$ なら第 1 種広義積分 $\int_1^\infty \frac{dx}{x^a}$ は収束する．

例：$a < 1$ のとき． $x > 1$ のとき $\frac{1}{x^a} > \frac{1}{x}$ だから最初の例から明らかに $\int_1^\infty \frac{dx}{x^a}$ は発散する．もちろん，具体的に計算しても確認できる：$\frac{1}{x^a} = \frac{1}{1-a}\frac{d}{dx}x^{1-a}$ $(1-a>0)$ だから $\int_1^b \frac{1}{x^a}dx = \left[\frac{1}{1-a}x^{1-a}\right]_1^b = \frac{1}{1-a}(b^{1-a}-1) \to \infty$ $(b\to\infty)$ だから，第 1 種広義積分の定義より $a < 1$ のとき $\int_1^\infty \frac{1}{x^a}dx$ は発散する．

以上をまとめると，第 1 種広義積分 $\int_1^\infty \frac{dx}{x^a}$ の収束発散は $a = 1$ を境にして分かれる．「$a \le 1 \Rightarrow$ 発散」,「$a > 1 \Rightarrow$ 収束」である．これは非常に重要なので，上の議論ごと記憶しておくべきである．

- 未知の関数をよくわかる関数と比較して積分の収束発散を判定するのが比較定理である．

比較定理 A：$f(x)$, $g(x)$ は $[a,\infty)$ 上の連続関数とする．

(1) $|f(x)| \le g(x)$ であって $\int_a^\infty g(x)dx$ が収束すれば $\int_a^\infty f(x)dx$ も収束する．

(2) $f(x) \ge g(x) \ge 0$ であって $\int_a^\infty g(x)dx$ が発散すれば $\int_a^\infty f(x)dx$ も発散する．

- 計算例.

例 1. $\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{x^2}$ であり $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = 1$ は収束するから $\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ も収束する．不定積分を使って積分の値を求めると $\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \left[\arctan x\right]_1^\infty = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ である．

例 2. $1 \le x$ のとき $\frac{1}{2x} = \frac{x}{x^2+x^2} < \frac{x}{1+x^2}$ であり $\int_1^\infty \frac{dx}{2x} = \left[\frac{1}{2}\log x\right]_1^\infty = \infty$ は発散するから，$\int_1^\infty \frac{x}{1+x^2}dx$ は発散する．不定積分を使うと $\int_1^\infty \frac{xdx}{1+x^2} = \left[\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_1^\infty$ という計算によって確認できる．

● 不定積分が求められない広義積分の収束発散がよくわかる関数と比較することによりわかる例.

例 1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{\sin x}{x^2}dx$ の収束が，$-\infty < x \le -1$ において $\left|\dfrac{\sin x}{x^2}\right| \le \dfrac{1}{x^2}$ であることから判る.

例 2. $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-x^2}dx$ は収束する．これは，$1 \le x < \infty$ において $e^{-x^2} < 1/x^2$（何故?）であり $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2} = 1$ であることから判る.

● 無限級数の収束発散判定を第 1 種広義積分に帰着させる比較定理.

比較定理 B：無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を考える.

(1) $|a_n| \le f(n)$ であって $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$ が収束する正の単調減少関数 $f(x)$ が在れば，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.

(2) $a_n \ge f(n)$ であって $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$ が発散する正の単調減少関数 $f(x)$ が在れば，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する.

比較定理 B において，**関数 $f(x)$ の単調性の仮定を外すことはできない**.

例 1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ $(p > 1)$ の収束．(1) より積分 $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}$ $(p > 1)$ の収束からわかる.

例 2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ の発散．(2) より $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x} = \infty$ からわかる.

● **課題 1.** $x \ge 1$ なら $e^{-x^2} < \frac{1}{x^2}$ である．なぜか？

● **課題 2.** $\displaystyle\int_1^{\infty}\left(\log\frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x}\right)dx$ を求めよ．見かけほど難しくありません．正直に計算していくだけです.

● **課題 3.** 収束発散の判定をせよ．理由も簡単に書いてください.

(1) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x^4+1}}dx$

(2) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}dx$

● **課題 4.** 教科書の問 13.1(1)(2)(3)(4), 13.2, 13.4.

● **課題 5.**（提出不要，質問歓迎）．第 1 種広義積分の応用：非常に重要なガウス積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$．比較定理からこの積分が収束することがわかる．積分の値を正確に求めることは，全く別の問題である．この積分は置換積分や部分積分をしても求めることができない．そこで全く別の観点からの工夫によりその値を求めようと試みるのが，課題 4 である．関数 $z = e^{-x^2}$ のグラフを z 軸の回りに回転して得られる立体 V を考え，体積を二通りの方法で計算してみる.

(1) 立体 V は

$$V = \{(x, y, z) \,|\, 0 < z \le e^{-x^2-y^2}\}$$

と表されることを示し，概形を描け.

(2)（高校で習った？）回転体の体積の公式を使って，立体 V の体積を求めよ．答：π.

(3) 立体 V を平面 $x = s$ で切った切り口の面積は

$$e^{-s^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt$$

であることを示せ（ヒント：絵を描いて考える）.

(4) V の体積を二通りに計算して，定積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

を求めよ．答：(2)(3) より $(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx)^2 = \pi$ だから $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.