10/28　レポート課題(3)

電車と単振り子および置いた球の相対運動

問題 等加速度 a で直進運動する電車がある。

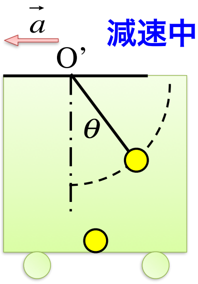
(1) 減速中に静止している振り子の角度 θ を求めよ。

(2) 糸の張力 T を求めよ。

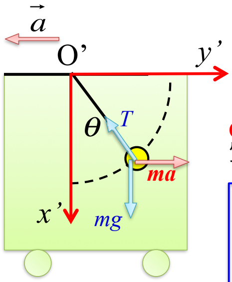
(3) 床上で滑りだす直前の質点と床の間の静止摩擦係数 μ を求めよ。

$$m\vec{a'} = \vec{F} - m\vec{a_0}$$

相対系ではたらく力　静止系ではたらく力　慣性力（見かけの力）



レポート課題　問1解答例



(1)電車に固定された座標系O'において、鉛直下向き x',電車の進行方向 y' と軸を定める。力のつり合いより、O系からみた加速度は y'軸方向に $-a$

O'系における質点の運動方程式は、質点が見かけ上静止していることから、

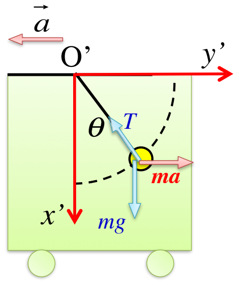
$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = mg - T\cos\theta = 0$$

$$m\frac{d^2y'}{dt^2} = -T\sin\theta + ma = 0$$

慣性力 $-m\vec{a}$

両式から T を消去して、$\frac{mg}{\cos\theta} = \frac{ma}{\sin\theta}$

よって、$\tan\theta = \frac{a}{g}$　　$\therefore \theta = \tan^{-1}\frac{a}{g}$



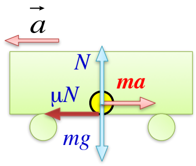
(2) O'系の運動方程式より、

$$mg = T\cos\theta$$
$$ma = T\sin\theta$$

両式を２乗して足し合わせると、

$$m^2(a^2+g^2) = T^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

よって、　$T = m\sqrt{a^2+g^2}$



(3) 摩擦力 μN より慣性力 ma が大きくなるとき、質点は動き出す。

$ma = \mu N = \mu mg$　よって、$\mu = \frac{a}{g}$

電車と投げた玉の相対運動

問題 等加速度 A で直進運動する電車がある。

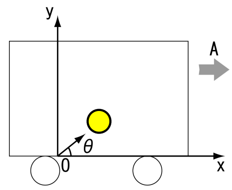
加速中に角度 θ 、初速度 v_0 で進行方向に投射した玉の運動を電車内から見たとき、質点の加速度 (1)、t 秒後の速度 (2) および位置 (3) を求めよ。

(4) 質点が床に衝突する位置 x_f を求めよ。

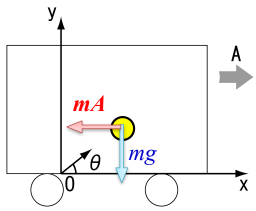
(5) 加速度 $A = g/\sqrt{3}$ のとき、x_f を最大にする θ を求めよ。

Attension

運動する座標系では、見かけの力を忘れないこと



レポート課題　問2解答例



電車内に固定された座標系における運動方程式より、

(1) $m\frac{d^2x}{dt^2} = ma_x = -mA$　　$\therefore a_x = -A$

$m\frac{d^2y}{dt^2} = ma_y = -mg$　　$\therefore a_y = -g$

慣性力 $-m\vec{a}$

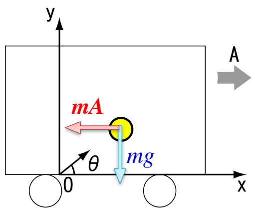
(2) 速度の時間微分は加速度に等しいから、(1)式より

$$\frac{dv_x}{dt} = a_x = -A$$

ここで、t についての積分より、

$$\int dv_x = -\int_0^t Adt = -At$$

レポート課題　問2解答例



$$\int dv_x = -\int_0^t A\,dt = -At$$

また、
初速度の x 成分は $v_0\cos\theta$ であるから、

$$v_x - v_0\cos\theta = -At$$

$$\therefore v_x = -At + v_0\cos\theta$$

x 成分と同様にして、(1)式より、

$$\frac{dv_y}{dt} = a_y = -g \iff \int dv_y = -\int_0^t g\,dt = -gt$$

ここで、初速度の y 成分は $v_0\sin\theta$であるから、

$$v_y - v_0\sin\theta = -gt$$

$$\therefore v_y = -gt + v_0\sin\theta$$

(3) 位置の時間微分は速度に等しいから、(2)式より、

$$\frac{dx}{dt} = v_x = -At + v_0\cos\theta$$

よって、t についての積分より、

$$\int dx = \int_0^t (-At + v_0\cos\theta)dt = -\frac{1}{2}At^2 + v_0 t\cos\theta$$

$t = 0$ において $x = 0$ より、 $x = -\frac{1}{2}At^2 + v_0 t\cos\theta$

x 成分と同様にして、

$$\frac{dy}{dt} = v_y = -gt + v_0\sin\theta$$

$$\iff \int dy = \int_0^t (-gt + v_0\sin\theta)dt = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\theta$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\theta$$

(4) $y = 0$のとき質点は床に衝突するから、(3)式より、

$$0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\theta = t\left(-\frac{1}{2}gt + v_0\sin\theta\right)$$

$t_f \neq 0$ より、 $-\frac{1}{2}gt_f + v_0\sin\theta = 0$ 　　$\therefore t_f = \frac{2v_0\sin\theta}{g}$

床に衝突する時刻 t_f における質点の x 座標は (3)式より、

$$x_f = -\frac{1}{2}A\left(\frac{2v_0\sin\theta}{g}\right)^2 + v_0\left(\frac{2v_0\sin\theta}{g}\right)\cos\theta$$

$$= \frac{2v_0^2\sin\theta}{g}\left(\cos\theta - \frac{A\sin\theta}{g}\right)$$

(5) $A = g/\sqrt{3}$ のとき、$x_f = \frac{2v_0^2\sin\theta}{g}\left(\cos\theta - \frac{g}{\sqrt{3}}\frac{\sin\theta}{g}\right)$

$$= \frac{2v_0^2}{g}\left(\boxed{\sin\theta\cos\theta} - \frac{\boxed{\sin^2\theta}}{\sqrt{3}}\right)$$

ここで、２倍角の公式より、

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$

よって、 $x_f = \frac{2v_0^2}{g}\left(\boxed{\frac{\sin 2\theta}{2}} - \boxed{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$$= \frac{v_0^2}{3g}\left(3\sin 2\theta + \sqrt{3}\cos 2\theta - \sqrt{3}\right)$$

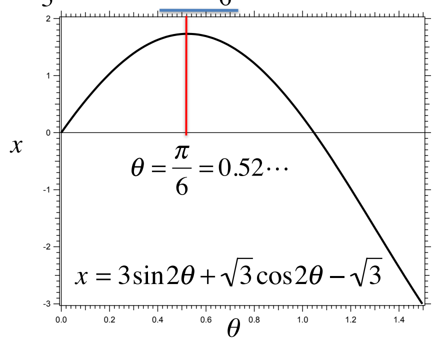
x_f は最大になる点において極値をもつから、

θ は $dx_f/d\theta = 0$ を満たす。

よって、$\frac{dx_f}{d\theta} = \frac{v_0^2}{3g}\left(6\cos 2\theta - 2\sqrt{3}\sin 2\theta\right) = 0$

$\iff 6\cos 2\theta - 2\sqrt{3}\sin 2\theta = 0$ 　　$\therefore \tan 2\theta = \sqrt{3}$

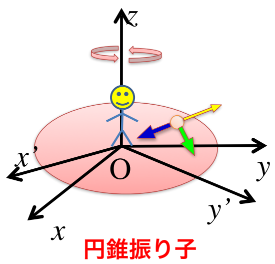
すなわち、$2\theta = \frac{\pi}{3}$ 　　　$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$



第４回

11/09　力 学 II 講義

回転座標系



円錐振り子
メリーゴーランド
台風…

z 軸上方からみると、
２次元面内の座標の回転と
みなせる

回転軸を z 軸とするとき、
面内回転する２次元座標
を考えれば、
運動方程式は記述できる

回転する座標への座標変換を考えていこう！

§５　相対運動

回転座標系の運動方程式

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \boxed{2m\left(\vec{v}' \times \vec{\omega}\right) + m\omega^2 \vec{r}'}$$

相対系で はたらく力　静止系で はたらく力　コリオリの力　遠心力

慣性力（見かけの力）

原点一致

$\vec{r} = \vec{r}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' = (x', y')$

回転する座標軸

$\vec{i}' = \cos\omega t \cdot \vec{i} + \sin\omega t \cdot \vec{j}$

$\vec{j}' = -\sin\omega t \cdot \vec{i} + \cos\omega t \cdot \vec{j}$

Point

回転するベクトルの微分法を理解する

回転運動の運動方程式を得る方法

座標変換　位置ベクトル

$$\vec{r} = \vec{r}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}'$$

時間微分　運動方程式 (静止系基準)

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\frac{d^2}{dt^2}\left(x'\vec{i}' + y'\vec{j}'\right)$$

$\vec{i}' = \cos\omega t \cdot \vec{i} + \sin\omega t \cdot \vec{j}$　$\dot{\vec{i}}' = \omega\vec{j}'$　$\ddot{\vec{i}}' = -\omega^2\vec{i}'$

$\vec{j}' = -\sin\omega t \cdot \vec{i} + \cos\omega t \cdot \vec{j}$　$\dot{\vec{j}}' = -\omega\vec{i}'$　$\ddot{\vec{j}}' = -\omega^2\vec{j}'$

運動方程式(相対系基準)　ベクトル積考慮

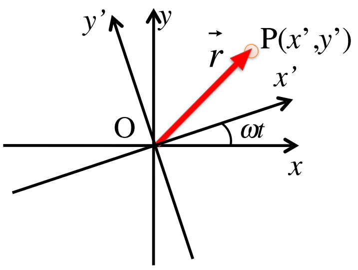
$$m\vec{a}' = \vec{F} + \boxed{2m\left(\vec{v}' \times \vec{\omega}\right) + m\omega^2 \vec{r}'}$$

証明

静止座標系で F の力を受ける物体の運動を
静止座標系における z 軸を回転軸として
等角速度 ω で回転運動する
相対座標系において観測するとき、
物体の相対運動を表す運動方程式が
次の式で与えられることを示せ。

$$m\vec{a}' = \vec{F} + 2m\left(\vec{v}'\times\vec{\omega}\right) + m\omega^2\vec{r}'$$

§5．2　２次元の回転座標系



２次元面内で
反時計回りする座標系

角速度 ω (等速度)
t 秒後の角度 ωt

x, y, x', y'軸方向
の単位ベクトルの例
$i,\ j,\ i',\ j'$
$|i|=|j|=|i'|=|j'|=1$

O系とO'系の原点は同じだから、
O'系における点P (x', y')の座標ベクトルは、

$$\vec{r} = \boxed{\quad}_{①} = \vec{r}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' = (x', y') \quad (16) \quad (\because \vec{r}_0 = (0,0))$$

準備　単位ベクトルの時間変化

まず、
O'系の単位ベクトルをO 系のベクトル成分に分解すると

$$\vec{i}' = \boxed{\quad}_{②}$$
$$\vec{j}' = \boxed{\quad}_{③}$$

両辺を t で微分すると

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = -\omega\sin\omega t\cdot\vec{i} + \omega\cos\omega t\cdot\vec{j} = \boxed{\quad}_{④}$$
$$\frac{d\vec{j}'}{dt} = -\omega\cos\omega t\cdot\vec{i} - \omega\sin\omega t\cdot\vec{j} = \boxed{\quad}_{⑤} \quad (14)$$

(仮定：i, j, ω は時間変化しない)

(14) 式の両辺を t で微分すると、

$$\frac{d^2\vec{i}'}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(-\omega\sin\omega t\cdot\vec{i} + \omega\cos\omega t\cdot\vec{j}\right) = \boxed{\quad}_{⑥}$$
$$= -\omega^2\left(\cos\omega t\cdot\vec{i} + \sin\omega t\cdot\vec{j}\right) = \boxed{\quad}_{⑦}$$
$$\frac{d^2\vec{j}'}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(-\omega\cos\omega t\cdot\vec{i} - \omega\sin\omega t\cdot\vec{j}\right) = \boxed{\quad}_{⑧}$$
$$= -\omega^2\left(-\sin\omega t\cdot\vec{i} + \cos\omega t\cdot\vec{j}\right) = \boxed{\quad}_{⑨} \quad (15)$$

r 'の運動方程式を考える。

r を t で微分すると、

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x'\vec{i}' + y'\vec{j}'\right) = \frac{d}{dt}\left(x'\vec{i}'\right) + \frac{d}{dt}\left(y'\vec{j}'\right)$$
$$= \boxed{\quad}_{⑩} = \left(\frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}'\right) + x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}'\right) + x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt}$$

O'系でみた質点の速度　**O'系の位置 vs. 時間あたりの座標回転**

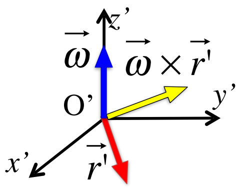
単位ベクトルの時間変化

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \omega\vec{j}' \qquad \frac{d\vec{j}'}{dt} = -\omega\vec{i}'$$

v の後半成分に代入すると、

$$x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} = x'\omega\vec{j}' - y'\omega\vec{i}' = \boxed{\quad}_{⑪}$$

このベクトルの意味を考えてみる。



$\vec{r}' = (x', y', z')$

角速度ベクトル(32) $\vec{\omega} = \boxed{\quad}_{⑫}$

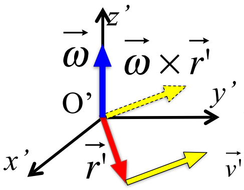
とおくとき、

$\vec{A} = \vec{\omega}\times\vec{r}'$ **の x'、y'、z'成分を考えると、**

$$A_{x'} = \boxed{\quad}_{⑬} = -\omega y'$$
$$A_{y'} = \boxed{\quad}_{⑭} = \omega x'$$
$$A_{z'} = \boxed{\quad}_{⑮} = 0$$

となり、v の後半成分と一致

よって、　$x'\dfrac{d\vec{i}'}{dt} + y'\dfrac{d\vec{j}'}{dt} = (-\omega y', \omega x', 0) = \vec{\omega}\times\vec{r}' = \vec{\omega}\times\vec{r}$



よって、**回転座標系からみた速度**は、

$$\vec{v}' = \vec{v} - \left(\frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}'\right) = \boxed{⑯}$$

*O*系でみた質点の速度

質点が *z* 軸に対して右回りに回転する速度 (見かけの速度 $v_0 = r\omega$)

次に、*v* をtで微分すると、

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}'\right) + x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt}\right]$$

$$= \boxed{⑰} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}' + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j}'}{dt} + \boxed{⑱} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j}'}{dt} + y'\frac{d^2\vec{j}'}{dt^2}$$

$$= \left(\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}'\right) + 2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j}'}{dt}\right) + \left(x'\frac{d^2\vec{i}'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j}'}{dt^2}\right) \quad (18)$$

O'系の単位ベクトルの式(14),(15)を代入して、

$$= \left(\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}'\right) + 2\omega\left(\frac{dx'}{dt}\vec{j}' - \frac{dy'}{dt}\vec{i}'\right) - \omega^2\left(x'\vec{i}' + y'\vec{j}'\right)$$

$$= \left(\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}'\right) - 2\omega\left(\frac{dy'}{dt}\vec{i}' - \frac{dx'}{dt}\vec{j}'\right) - \omega^2\left(x'\vec{i}' + y'\vec{j}'\right) \quad (19)$$

r 'の運動方程式を考える。

O系の運動方程式 $\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

O'系の運動方程式

$$m\vec{a}' = m\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = m\left(\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}'\right)$$

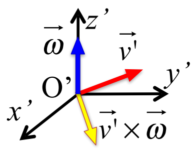
$$= m\vec{a} + 2m\omega\left(\frac{dy'}{dt}\vec{i}' - \frac{dx'}{dt}\vec{j}'\right) + m\omega^2\left(x'\vec{i}' + y'\vec{j}'\right)$$

$$= \vec{F} + 2m\omega\left(\frac{dy'}{dt}\vec{i}' - \frac{dx'}{dt}\vec{j}'\right) + m\omega^2\vec{r}' \quad (22)$$

*O*系で質点に働く力

*O'*系の速度 *vs.*角速度

*O'*系で *r* 方向にかかる見かけの力 ＝遠心力



$\vec{v}' = (\dot{x}', \dot{y}', \dot{z}')$ $\vec{\omega} = (0,0,\omega)$ **とおくとき、**

角速度ベクトル(32)

$\vec{A} = \vec{v}' \times \vec{\omega}$ **のx'、y'、z'成分を考えると、**

$$A_{x'} = v'_{y'}\omega_{z'} - v'_{z'}\omega_{y'} = \boxed{⑲}$$

$$A_{y'} = v'_{z'}\omega_{x'} - v'_{x'}\omega_{z'} = \boxed{⑳}$$

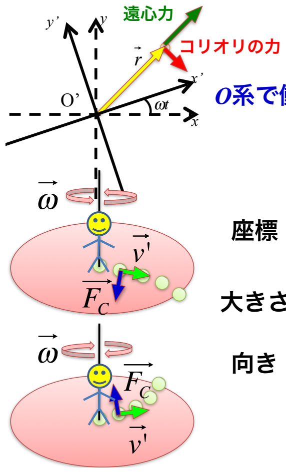
$$A_{z'} = v'_{x'}\omega_{y'} - v'_{y'}\omega_{x'} = \boxed{㉑}$$

$$\Rightarrow 2m\omega\left(\frac{dy'}{dt}\vec{i}' - \frac{dx'}{dt}\vec{j}'\right) = \boxed{㉒}$$

コリオリの力

回転座標系からみた質点の運動方程式

$$m\vec{a}' = \vec{F} + 2m\left(\vec{v}' \times \vec{\omega}\right) + m\omega^2\vec{r}'$$



*O*系で働く力

*O'*系で *v'* に依存する慣性力 =コリオリの力

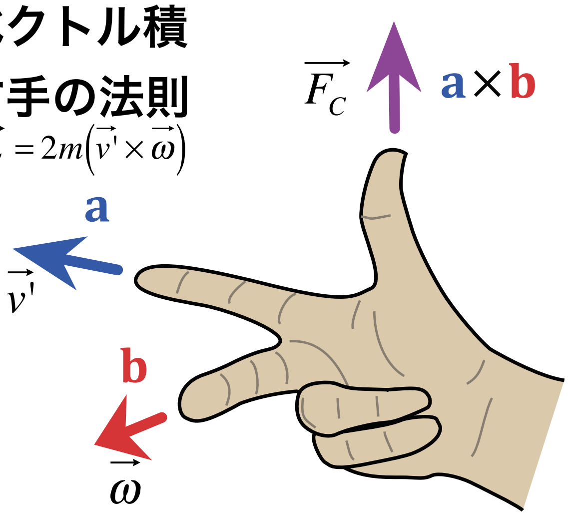
*O'*系で *r'*に依存する慣性力 =遠心力

	(23)	(24)
座標	㉓	㉔
大きさ	㉕	㉖
向き	*v'* に垂直かつ回転逆向き方向	回転中心外側方向

回転座標系におけるみかけの力

ベクトル積
右手の法則

$\vec{F_C} = 2m\left(\vec{v}' \times \vec{\omega}\right)$



回転座標系からみた質点の運動方程式

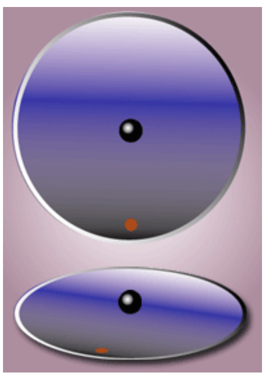
$$m\vec{a}' = \vec{F} + 2m\left(\vec{v}' \times \vec{\omega}\right) + m\omega^2 \vec{r}'$$

外力(O系)	コリオリの力	遠心力
静止系において受けている外力	回転系において見かけ上動いているときに働く(速度に依存)	回転系なら常に働く(位置に依存)
	$\boxed{2mv'\omega}$	$\boxed{mr\omega^2}$

コリオリの力

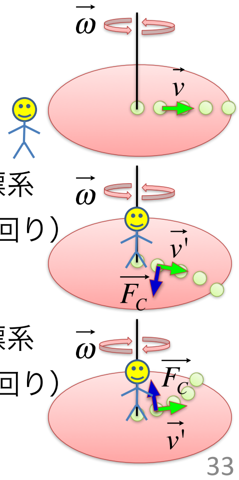
静止座標系

$\vec{F_C} = 2m\left(\vec{v}' \times \vec{\omega}\right)$



回転座標系
（z軸右回り）

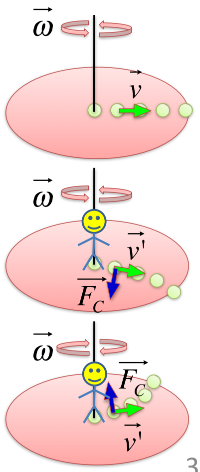
回転座標系
（z軸左回り）



コリオリの力

静止座標系

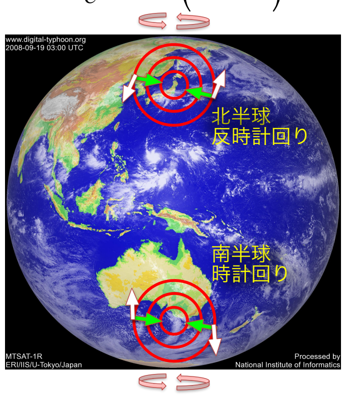
$\vec{F_C} = 2m\left(\vec{v}' \times \vec{\omega}\right)$

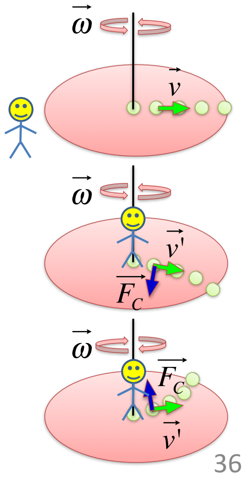


コリオリの力

静止座標系

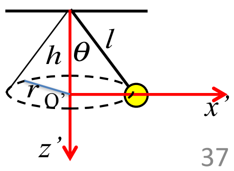
$\vec{F_C} = 2m\left(\vec{v}' \times \vec{\omega}\right)$





例題１

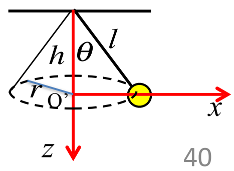
図のような円すい振り子の回転運動を
おもりに固定された回転座標系から見るとき、
振り子の振動周期を求めよ。



37

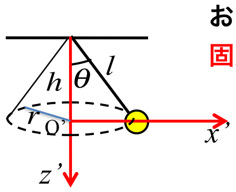
例題２

図のような円すい振り子の回転運動を
静止座標系から見るとき、
振り子の振動周期を求めよ。



40

例　円すい振り子の周期



おもりの等速円運動の中心に
固定された回転座標系からみると
おもりは見かけ上静止している
力のつり合いの式より

$T\cos\theta =$ ㉗ （２５）

$T\sin\theta =$ ㉘ （２６）

両式から T を消して $\tan\theta = \dfrac{r\omega^2}{g}$　　慣性力 $-m\vec{a}$

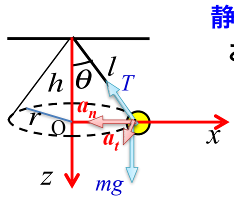
ここで、$\tan\theta = r/h$ より、

$\dfrac{r}{h} =$ ㉙ $\Longleftrightarrow$ $\omega^2 = \dfrac{g}{h}$ $\Longleftrightarrow$ $\omega = \pm\sqrt{\dfrac{g}{h}}$

よって、円すい振り子の周期は、$T = \dfrac{2\pi}{\omega} =$ ㉚

38

問　円すい振り子の周期



静止座標系からみると
おもりは見かけ等速円運動している

鉛直方向の運動方程式は、

$m\ddot{z} =$ ㉛ (25')

円の接線方向の運動方程式は、

$ma_t = 0$

円の中心方向の運動方程式は、

$ma_n =$ ㉜ $= mr\omega^2 = T\sin\theta$ (26')

Check!
$a_t = \dot{v}$　$a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$

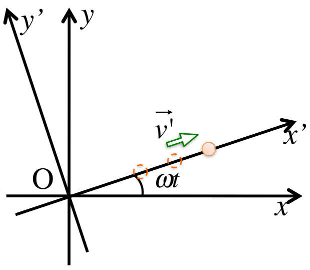
２章p.32
円運動の
加速度

以下、回転座標系と同様の計算から、$T = \dfrac{2\pi}{\omega} =$ ㉝

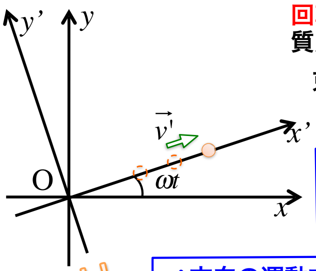
41

問題

静止系において、原点Oを通り xy 面内で**一定の角速度ω**で**回転**している直線がある。この直線上に束縛されている質量m の質点の**回転運動の運動方程式**から、t 秒後の 位置 x' を求めよ。ただし、束縛はなめらかであると仮定する。



問 回転する直線上でなめらかに運動する質点



回転座標において、x' 軸上の直線に質点 m が束縛されている

束縛条件より、

$y' =$ ㉞

(22)式から、

x' 方向の運動方程式は、

$m\ddot{x}' =$ ㉟ $= m\omega^2 x'$ (35)

y' 方向の運動方程式は、

$m\ddot{y}' =$ ㊱ $= N - 2m\omega\dot{x}'$ (36)

Check!

２章 p.34

(35)の微分方程式を解くために、$x' = e^{\alpha t}$ とおいて代入する。

㊲ $= 0$ よって、$\alpha^2 = \omega^2$ ⟺ $\alpha = \pm\omega$

$$m\ddot{x}' = m\omega^2 x' \quad (35)$$
$$0 = N - 2m\omega\dot{x}' \quad (36)$$

これから、(35)式の一般解

$x' =$ ㊳ (37) が得られる。

（a, b は初期条件から決まる定数）

さらに、

(37) 式を**微分して** (36) 式に代入すれば、垂直抗力が得られる。

$\dot{x}' =$ ㊴

よって、

$N = 2m\omega\dot{x}' =$ ㊵