

線形代数学I 期末試験

Jacques Garrigue, 2017 年 7 月 28 日

問 1

以下の行列の逆行列を計算せよ.

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

問 2

問 1 の各行列の行列式を計算せよ.

問 3

以下の置換の積 $\sigma\tau$ を計算せよ. 巡回置換での分割によって $\sigma\tau$ の符号も求めよ.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

問 4

n 次行列式 $D_n(x)$ を,

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & a & \dots & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & \dots & a & x & a \\ a & \dots & \dots & a & x \end{vmatrix}$$

とおくとき, $D_n(x) = (x - a)^{n-1}(x + f(a, n))$ となるような a と n のみに依存する関数 $f(a, n)$ を見付け, その等式を証明せよ.

問 5

以下の行列 A の余因子行列 \tilde{A} を計算し, 逆行列 A^{-1} も求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$