第 6 回講義：微分係数と導関数について（その 2）（教科書 1.5, 1.6）.

関数 $y=f(x)$ が定義域で狭義単調増加であるとは，定義域の任意の 2 点 a, b に対し $a<b$ なら $f(a)<f(b)$ であることを意味する．狭義単調減少も同様に定義される．関数 $y=f(x)$ が狭義単調なら，任意の b に対し $f(a)=b$ となる a は高々一個である．だから狭義単調な関数 $y=f(x)$ に対しては，$y=f(x)$ を x について解く [1] ことによって逆関数 $x=g(y)$ が定義される．

• **（定理）**狭義単調な微分可能関数の逆関数は微分可能．公式はこうだ：$y=f(x)$ は狭義単調な微分可能関数だとせよ．このとき $y=f(x)$ は $x=g(y)$ と書けて，その微分は公式 $\frac{dg}{dy}(y)=1/f'(x)$ から計算できる．

たとえば，狭義単調増加な指数関数 $y=e^x$ の逆関数である対数関数 $x=\log y$ が微分可能であって，$\frac{d}{dy}(\log y)=1/(e^x)'=1/e^x=1/y$ であることがこの定理からわかる．

• **逆関数の微分の公式とその証明．**

上で述べたことを丁寧に解説する：
$y=f(x)$ の逆関数 $x=f^{-1}(y)$ に対し

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}\ .$$

この公式は，逆関数が逆対応に由来していることを思い出せば，図形的に導かれる．その仕組みを以下に説明する．各自で図を描きながら読んでほしい．関数 $y=f(x)$ の点 a での微分係数は $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ においてて $x\to a$ としたときの極限であった．以下の議論を，たとえば狭義単調増加な関数 $y=f(x)$ のグラフに書き込むことによってこの公式を幾何的に導くことができる．まず，長方形の頂点をなす 4 点 $A(a,f(a))$, $B=(x,f(a))$, $C=(a,f(x))$, $X=(x,f(x))$ を考える．$b=f(a)$ とおき，対応 $y=f(x)$ の逆対応を $x=g(y)$ と書くと，同じ 4 点を逆対応を使って書き直すと $A(g(b),b)$, $B(g(y),b)$, $C(g(b),y)$, $X(g(y),y)$ である．座標軸に平行な向きづけられた線分 PQ の符号付き長さ $\overline{PQ}$ を Q の座標マイナス P の座標で定義すると，$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{\overline{BX}}{\overline{AB}}$, $\frac{g(y)-g(b)}{y-b}=\frac{x-a}{f(x)-f(a)}=\frac{\overline{CX}}{\overline{AC}}$ である．長方形の性質から $\overline{AC}=\overline{BX}$, $\overline{CX}=\overline{AB}$ だから，$\frac{g(y)-g(b)}{y-b}=\frac{\overline{CX}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{BX}}=\frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$ である．ここで $x\to a$ と $y\to b$ は同値だから $x\to a$ $(y\to b)$ の極限をとれば $g'(b)=\frac{1}{f'(a)}$ である．$g=f^{-1}$, $a=f^{-1}(b)$ を代入すれば，所要の公式 $(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$ を得る．□

例. $y=\log x$ の導関数は $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$ である．これを逆関数の微分公式から導こう．$y=\log x$ は $x=e^y$ と同じことだから

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{e^y}=\frac{1}{x}$$

である．よって対数関数 $y=\log x$ の導関数は $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$ である．

• **（定義）逆 3 角関数**．$\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ を定義し，そのグラフを描く．

(i) $y=\sin x$ は $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ で狭義単調増加で値域は $[-1,1]$，すなわち，$\sin:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to[-1,1]$ は狭義単調増加なので，逆対応 $[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ が定義される．ここで x と y を入れ替えたものが $y=\sin x$ の逆関数 $y=\arcsin x$ $(x\in[-,1,], y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ である．

(ii) $y=\cos x$ は $[0,\pi]$ で狭義単調減少で値域は $[-1,1]$ なので，逆関数 $y=\arccos x$ $(-1\le x\le 1$, $y\in[0,\pi])$ が定義される．

(iii) $y=\tan x$ は $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ で狭義単調増加で値域は $(-\infty,\infty)$ なので，逆関数 $y=\arctan x$ $(-\infty<x<\infty$, $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2})$ が定義される．

[1] とは言っても，具体的な式で $x=g(y)$ が表されるわけではない．$y=f(x)$ が具体的な式で与えられていても，存在が保証されている $x=g(y)$ を表す具体的な式を書き下す問題は全く別の問題で，多くの場合，それは「存在するが具体的に書くことはできない」という状況になる．だからと言って微積分が展開できないというわけでは全くない．こういう問題に対処する手段として陰関数定理という定理がある．春学期の最後の方で解説する．

注意. 逆三角関数の定義域は三角関数が狭義単調な範囲に限ればどこをとってもいいのだが，逆三角関数を使う時，人によって定義域が異なるという状態は困る．そこで，逆三角関数の標準的な定義域というものが数理科学では決められていると思われる．それはこうである：
• 逆正弦関数 $\arcsin x$. 定義域は $[-1,1]$. 値域は $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. $\arcsin x$ は $(-1,1)$ において狭義単調増加. $\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$, $\arcsin 0=0$, $\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$.
• 逆余弦関数 $\arccos x$. 定義域は $[-1,1]$. 値域は $[0,\pi]$. $\arccos x$ は $(-1,1)$ において狭義単調減少. $\arccos(-1)=\pi$, $\arccos 0=\frac{\pi}{2}$, $\arccos 1=0$.
• 逆正接関数 $\arctan x$. 定義域は $(-\infty,\infty)$. 値域は $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. $\arctan x$ は $(-\infty,\infty)$ において狭義単調増加. $\arctan(-\infty)=-\frac{\pi}{2}$, $\arctan 0=0$, $\arcsin\infty=\frac{\pi}{2}$.

• 逆 3 角関数の値の例. $\arcsin a$ は $\sin x=a$ となる角度 $a\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $\arccos a$ は $\cos x=a$ となる角度 $x\in[0,\pi]$, $\arctan a$ は $\tan x=a$ となる角度 $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ である.

(1) $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$.

(2) $\arccos(-\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{3\pi}{4}$.

(3) $\arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$.

(4) $\lim_{x\to\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$.

• 逆 3 角関数の計算例.

(1) $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.

(2) $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$.

理論的に非常に重要な定理を二つ挙げておく．今後，これらの定理を認めて使うことにする．

• **（最大値の定理）有界閉区間上の連続関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ は最大値と最小値をもつ.**

• **（最大値の定理の系）有界閉区間上の連続関数の値域は有界閉区間である.**

証明は，この講義の第一回で紹介した「定理または公理」（上に有界な単調増加数列は収束する）に戻って行う．応用上は証明を知らなくても差し支えない．証明に興味がある人は教科書の付録 §3 を見てほしい.

• **（定理）逆 3 角関数の導関数の公式.**

(1) $f(x)=\arcsin x,\ f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(2) $f(x)=\arccos x,\ f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(3) $f(x)=\arctan x,\ f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

これらの公式は次のように導かれる．(1) $y=\arcsin x$ は $x=\sin y$ の逆対応だから，逆関数の微分公式から $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ である．三番目の等号についての注意：$y=\arcsin x$ の定義域は $-1\le x\le 1$, 値域は $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$ であり，値域において $\cos y\ge 0$ であることに注意すると $\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$ であることが判る.

(2) $y=\arccos x$ は $x=\cos y$ の逆対応だから，逆関数の微分公式から $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=-\frac{1}{\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ である．3 番目の等号についての注意：$y=\arccos x$ の定義域は $1\le x\le 1$，値域は $0\le y\le\pi$ であり，値域において $\sin y\ge 0$ であることに注意すると $\sin y=\sqrt{1-\cos^2 x}=\sqrt{1-x^2}$ であることが判る.

(3) $y=\arctan x$ なら $x=\tan y$ だから $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}}=\cos^2 y=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$ である．ここで $1+\tan^2 y=\frac{1}{\cos^2 y}$ を使った．この公式は $\sin^2 y+\cos^2 y=1$ の両辺を $\cos^2 y$ で割ったものである.

• 例．関数 $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$ $(|x|\le 1)$ のグラフ描画．講義中に実演する．まず合成関数の微分公式によって微分すると

$$y'=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}}=-\frac{\mathrm{sgn}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

である．ここで $\sqrt{x^2} = |x|$, $\frac{x}{|x|} = \mathrm{sgn}(x)$ を使った（$\mathrm{sgn}(x)$ は $x > 0$ のとき 1, $x < 0$ のとき -1 で定義される符号関数）．したがって $-1 \le x \le 0$ では $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ だからグラフの形状は $y = \arcsin x$ と同じである．ただし，$x = 0$ のとき $y = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ だから，y 軸方向に $\frac{\pi}{2}$ 平行移動したものである．$0 \le x \le 1$ では $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ だからグラフの形状は $y = -\arcsin x$ と同じである．ただし，$x = 0$ のとき $y = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ だから，y 軸方向に $\frac{\pi}{2}$ 平行移動したものである．以上の考察から $y = \arcsin\sqrt{1-x^2}$ $(|x| \le 1)$ のグラフ描画ができる．

- さらに計算例.

(1) $a > 0$ のとき $(\arcsin\frac{x}{a})' = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

実際 $(\arcsin\frac{x}{a})' = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2/a^2)}}(1/a) = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ ($a > 0$ だから).

(2) $\{\arcsin(1-2x^2)\}' = \frac{-2\mathrm{sgn}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

実際，$\{\arcsin(1-2x^2)\}' = \frac{-4x}{\sqrt{1-(1-2x^2)^2}} = \frac{-2x}{\sqrt{x^2(1-x^2)}} = \frac{-2|x|\mathrm{sgn}(x)}{|x|\sqrt{1-x^2}} = \frac{-2\mathrm{sgn}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$（なぜなら $\sqrt{x^2} = |x|$ だから）．

（問題）どういうわけか (2) の計算結果は $(\arcsin\sqrt{1-x^2})' = -\frac{\mathrm{sgn}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ の 2 倍になった．そうならないといけない理由が背景にあるはずだが，それは何だろうか？

- 課題：

教科書の問 5.2, 5.3, 6.2, 6.3（今回も課題が教科書 §5 と §6 の二つの章にまたがるので注意）．