第三回課題解説

1.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

に x の値を代入して小数第 5 位くらいまで計算するのが基本である．求めたい桁より 2 桁くらい余分に計算する．つまり，小数点以下第 3 位まで求めたいのであれば，小数点以下第五位から始まるくらい $x^n/n!$ が小さいような項まで足し上げる．(3) では直接やると大変なので（たとえば以下の解答例のような）工夫を要する．

(1) $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$ である．

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

に $x = \frac{1}{2}$ を代入する．$\frac{(1/2)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}\frac{1}{2} \times \frac{(1/2)^n}{n!}$ を使って次々に計算できる．

$$\begin{aligned}
&1 = 1\\
&\frac{1}{2} = 0.5\\
&\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\frac{1}{2}) = 0.125\\
&\frac{1}{3}\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}) = 0.020833\cdots\\
&\frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}) = 0.00260416\cdots\\
&\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}) = 0.000260416\cdots
\end{aligned}$$

$\frac{1}{3!}(1/2)^3$, $\frac{1}{4!}(1/2)^4$, $\frac{1}{5!}(1/2)^5$ では四捨五入による誤差を減らすため余計な桁まで計算している．あとは明らかに小数第 3 位に影響しないので無視してこれらを加えて近似値とすると $e^{\frac{1}{2}} = 1.6487192\cdots \fallingdotseq 1.649$.

(2) $\sqrt[3]{e} = e^{\frac{1}{3}}$ である．

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

に $x = \frac{1}{3}$ を代入する．$\frac{(1/3)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}\frac{1}{3} \times \frac{(1/3)^n}{n!}$ を使って次々に計算できる．

$$\begin{aligned}
&1 = 1\\
&\frac{1}{3} = 0.33333\cdots\\
&\frac{1}{2}(\frac{1}{3}\frac{1}{3}) = 0.05555\cdots\\
&\frac{1}{3}\frac{1}{2}(\frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{3}) = 0.00617\cdots\\
&\frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{2}(\frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{3}) = 0.000514\cdots\\
&\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{2}(\frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{3}) = 0.000034\cdots
\end{aligned}$$

$\frac{1}{3!}(1/3)^3$, $\frac{1}{4!}(1/3)^4$, $\frac{1}{5!}(1/3)^5$ では四捨五入による誤差を減らすため余計な桁まで計算している．あとは明らかに小数第 3 位に影響しないので無視してこれらを加えて近似値とすると $e^{\frac{1}{3}} = 1.39559\cdots \fallingdotseq 1.396$.

(3) まず e^{-1} を計算する．$1/2! = 0.5$, $1/3! = 0.16667$, $1/4! = 0.04167$, $1/5! = 0.08333$, $1/6! = 0.00139$, $1/7! = 0.00020$, $1/8! = 0.00002$ から $e^{-1} \fallingdotseq 1 - 1 + 0.5 - 0.16667 + 0.04167 - 0.0.08333 + 0.00139 - 0.00020 + 0.00002 \fallingdotseq +0.36788$ であり，誤差 ε は大きく見積もって，$x^8/8!$ で打ち切ったための誤差

$$< \frac{1}{9!}(1 + 10^{-1} + 10^{-2} + \cdots) < 0.00000306...$$

（なぜなら $|e^{-1}-\sum_{n=0}^{8}\frac{(-1)^n}{n!}| = |\sum_{n=9}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}| < \frac{1}{9!}\sum_{n=0}^{\infty}10^{-n} = \frac{10}{9\cdot 9!} = 0.00000306...$ だから）と，$1/3!,...,1/8!$ を小数第五位まで四捨五入で近似計算したことによる誤差

$$< 0.000005\times 6 = 0.00003$$

の和 $< 0.00003306...$ である．もちろん，$1/3!,...,1/8!$ を桁数多く計算すれば四捨五入による誤差の累積はいくらでも小さくできるが，ここでは粗い計算しかしていない.（なお，(1)(2) では所要の桁数より数桁先まで計算して四捨五入による誤差を無視できる範囲にした.）

4 乗の計算でこの誤差は小数第 3 位に影響しないことを確認する．

$$0.36788 = e^{-1}+\varepsilon \quad \varepsilon \text{ は誤差}$$

と表して 4 乗すると

$$e^{-4}+4e^{-3}\varepsilon+6e^{-2}\varepsilon^2+4e^{-1}\varepsilon^3+\varepsilon^4$$

である．上記の $|\varepsilon|$ の評価と $e^{-1}\fallingdotseq 0.37$ と考えて

$$4e^{-3}\varepsilon+6e^{-2}\varepsilon^2+4e^{-1}\varepsilon^3+\varepsilon^4$$

を大きく見積もっても小数第 3 位に影響がないことがわかる．よって

$$e^{-4}=(e^{-1})^4 \fallingdotseq (0.36788)^4 \fallingdotseq (0.1353)^2 \fallingdotseq 0.018$$

は小数第 3 位まで正しい計算である．

2. (1) $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ を e^x について解く．つまり e^x の 2 次方程式

$$(e^x)^2-2y(e^x)-1=0$$

を解く．答えは

$$e^x = y+\sqrt{y^2+1}$$

である．なぜなら $y-\sqrt{y^2+1}$ は負になってしまうので，正である e^x に等しくなることはないからである．よって

$$x=\log(y+\sqrt{y^2+1})$$

である．

(2) $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ $(x>0)$ のとき．(1) と同様に e^x の方程式と思うと $(e^x)^2-2ye^x+1=0$ となる．したがって $e^x=y\pm\sqrt{y^2-1}$ である．$x>0$ なら $e^x>e^{-x}$ ゆえ $y=(e^x+e^{-x})/2>e^x$ である．よって $e^x=y+\sqrt{y^2-1}$ である．両辺の log をとって

$$x=\log(y+\sqrt{y^2-1})$$

である．

(3) $y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ のとき．(1) と同様に考えると $y(e^x+e^{-x})=e^x-e^{-x}$ だから $y(e^{2x}+1)=e^{2x}-1$ したがって $e^{2x}=\frac{1+y}{1-y}$ である．よって

$$x=\frac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y}$$

である．

第 3 回課題へのコメント：

級数展開を使って近似計算するとき，まず小数第何位まで求めるかを決めます．それに応じて最初の数項を，最初に決めた桁より二，三桁くらい先にいかないと 0 でない数字が出てこないところまで計算します．この時，最初の数項を，最初に決めたところよりかなり先の桁まで計算しておくのが安全です（四捨五入による誤差の累積を小さくするため）．実際，誤差には，各項の四捨五入による誤差の累積と，無限級数を有限項で打ち切ったことによる誤差の二通りがあります．最初の数項を最初に決めたところより数桁先まで計算すれば，四捨五入による誤差の累積を計算した桁数に応じて小さくできます．近似計算の誤差は，四捨五入から来る誤差の累積と無限級数を有限項で打ち切ったことによる誤差の和を越えることはありません．1(1)(2)(3) 解答例の計算は，これをやっています．こういった計算は，計算機にやらせる前に，一度は手計算（一年生の微積分はいい機会！）して数量感覚を身につけることが大事です．