第五回課題解説

1. 関数 $f(x)=\sqrt{x}$ の点 a $(a>0)$ での微分係数 $f'(a)$ を定義にしたがって求める．

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{a}}\ .
\end{aligned}$$

2. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ に商の微分公式を適用して，$\tan x$ の導関数を求める．

$$\begin{aligned}
(\tan x)' &= \left\{\sin x\cdot\frac{1}{\cos x}\right\}' \\
&= (\sin x)'\cdot\frac{1}{\cos x}+\sin x\cdot\left(-\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x}\right) \\
&= \cos x\cdot\frac{1}{\cos x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x}\ .
\end{aligned}$$

3. 教科書の問 5.1. $z=f(y)$ が $y=g(a)$ で連続, $y=g(x)$ が $x=a$ で連続なら，$z=f(g(x))$ は $x=a$ で連続であることの証明．$z=f(y)$ は $y=g(a)$ で連続だから，任意の $\varepsilon>0$ に応じて十分 $\delta>0$ を小さくとると $0<|y-g(a)|<\delta$ なら $|f(y)-f(g(a))|<\varepsilon$ である．関数 $y=g(x)$ は $x=a$ において連続だから，このような $\delta>0$ に対し，$\delta'>0$ を十分小さくとると $0<|x-a|<\delta'$ なら $|g(x)-g(a)|<\delta$ である．したがって，与えられた $\varepsilon>0$ に対して $0<|x-a|<\delta'$ なら $|g(x)-g(a)|<\delta'$ であり，$0<|g(x)-g(a)|<\delta'$ なら $|f(g(x))-f(g(a))|<\varepsilon$ である．よって合成関数 $z=f(g(x))$ は $x=a$ で連続である．

教科書の問 6.1. (1) $(\cos x)'=-\sin x$ は講義でやりました．講義資料または解説動画を見てください．試しに差を積に直す公式ではなく $cos(x+h)$ に加法定理を適用したらどうなるかやってみましょう．

$$\begin{aligned}
\frac{cos(x+h)-\cos x}{h} &= \frac{(\cos x\cos h-\sin x\sin h)-\cos x}{h} \\
&= \cos x\frac{\cos h-1}{h}-\sin x\frac{\sin h}{h} \\
&= \cos x\frac{(\cos h+1)(\cos h-1)}{h(\cos h+1)}-\sin x\frac{\sin h}{h} \\
&= -\cos x\left(\frac{\sin h}{h}\right)^2\frac{h}{\cos h+1}-\sin x\frac{\sin h}{h}
\end{aligned}$$

となる．ここで $h\to 0$ とすると基本極限公式 $\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$ と $\lim_{h\to 0}\cos h=1$ から

$$(\cos x)'=-\sin x$$

となる．このやり方で公式 $(\cos x)'=-\sin x$ を証明した答案がありました．

(2) 合成関数の微分法を使わないで $(\log|x|)' = \frac{1}{x}$ を証明する．方針は基本極限公式に帰着させることである．$x < 0$ のときが問題なので，以下，$x < 0$ の場合を考える．$y = \log(-x)$, $y + k = \log(-x + h)$ とおくと $h \to 0$ は $k \to 0$ と同じことであり，$\log(-x - h) - \log(-x) = k$, $e^{y+k} - e^y = (-x - h) - (-x) = -h$ だから

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h \to 0} \frac{\log|x+h| - \log|x|}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\log(-x-h) - \log(-x)}{h} \\
&= -\lim_{k \to 0} \frac{k}{e^{y+k} - e^y} \\
&= -\frac{1}{\lim_{k \to 0} \frac{e^{y+k} - e^y}{k}} \\
&= -\frac{1}{e^y} \frac{1}{\lim_{k \to 0} \frac{e^k - 1}{k}} \\
&= -\frac{1}{e^y} \times \frac{1}{1} = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x} \quad \left[\lim_{k \to 0} \frac{e^k - 1}{k} = 1 \right].
\end{aligned}
$$

(3) $a > 0$ とする．定義にしたがって $(a^x)' = a^x \log a$ を証明する．

$$
\begin{aligned}
(a^x)' &= \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{e^{(x+h)\log a} - e^{x \log a}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} e^{x \log a} \frac{e^{h \log a} - 1}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} e^{x \log a} \frac{e^{h \log a} - 1}{h \log a} \cdot \log a \\
&= a^x \log a \quad \left[e^{x \log a} = a^x \ , \ \lim_{h \to 0} \frac{e^{h \log a} - 1}{h \log a} = 1 \text{ だから} \right].
\end{aligned}
$$