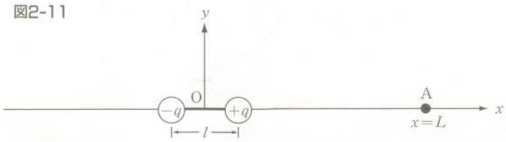
電磁気学 I_(03)_クーロン力

演習問題 1-1 水素原子は，正の電気素量をもつ陽子と負の電気素量をもつ電子からなる。これらの陽子と電子の間に働く静電気力の大きさはいくらか。また，その大きさは陽子と電子の間に働く万有引力の何倍か。ただし，電気素量の大きさを 1.6×10^{-19} [C]，陽子の質量を 1.7×10^{-27} [kg]，電子の質量を 9.1×10^{-31} [kg]，電子の軌道半径を 5.3×10^{-11} [m]，クーロン力の比例定数を 9.0×10^{9} [N·m²/C²]，万有引力定数を 6.7×10^{-11} [N·m²/kg²] とせよ。

電磁気学 I_(04)_クーロンの法則

演習問題 2-1 真空中の $x=+l/2(l>0)$ に電気量 $q(>0)$ の点電荷が，また，$x=-l/2$ に電気量 $-q$ の点電荷が固定されている。$x=L(>0)$ の点 A におけるこの 2 つの点電荷の合成電場の大きさはいくらか。ただし，真空の誘電率を ε_0 とし，L は l より十分大きいとして近似計算せよ。

図2-11



電磁気学 I_(05)_ガウスの法則

実習問題 2-1 真空中の無限に伸びる直線の上に線密度 $\sigma(>0)$ の電荷が一様に分布している。このとき，この直線電荷はその周囲にどのような電場をつくるか。ただし，真空の誘電率を ε_0 とせよ。

図2-14

エレキ 向

別解 この問題を，クーロンの法則の電場の式から求めることにしよう。

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

は，点電荷のつくる電場の式だから，直線電荷にこの式を適用するには，点電荷とみなせる微小な断片をとって，それを積分しなければならない。

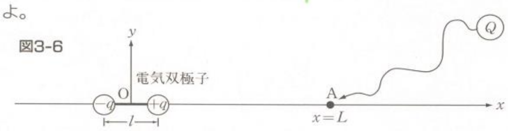
電磁気学 I_(09)_電位 1

問 1 点電荷のつくる電位 V および電場 E を，点電荷からの距離 r の 1 次元の関数で表すとき，電位 V と電場 E の間にはどのような関係があるか。

解答 $E=-\dfrac{dV}{dr}$

演習問題 3-1 真空中の $x=+l/2\,(l>0)$ に電気量が $q(>0)$ の点電荷が，また $x=-l/2$ に電気量 $-q$ の点電荷固定された電気双極子がある。$x=L\,(>0)$ の点 A においてこの電気双極子がつくる電位 V と電場 E を求めよ。また，このとき，電荷 $Q\,(>0)$ の点電荷を無限の彼方から点 A まで運ぶのに要する仕事はいくらか。ただし，真空の誘電率を ε_0 とし，L は l より十分大きいとして近似計算せよ。

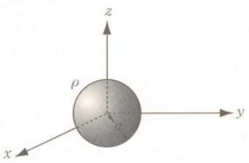
図3-6



電磁気学 I_(10)_電位 2

実習問題 3-1 半径 a の球がある。球の内部には密度 $\rho(>0)$ の電荷が一様に分布し，球の外部は真空である。このとき，球の内部および外部には，どのような電位が生じるか。ただし，真空の誘電率を ε_0 とする。

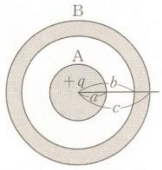
図3-9



電磁気学 I_(11)_導体 1

演習問題 4-1 図のように，半径 a の導体球 A と，内半径 b，外半径 c の導体球殻 B が，同じ点を中心にして固定されている。導体球 A に正の電気量 q を与えたとき，導体球 A と導体球殻 B の電位はそれぞれいくらになるか。ただし，空間は真空で，導体球殻 B は帯電しておらず，電位の基準(電位$=0$ の点)は導体から無限に離れた点とする。

図4-7



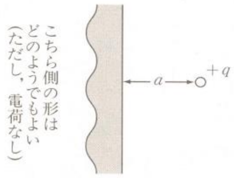
電磁気学 I_(12)_導体 2
電磁気学ノート p58 設問

●鏡像法 ← この項は 問 扱い　鏡像法は高校でやらない

以上述べてきた導体の特徴を利用して，問題を簡単に解くための**鏡像法**と呼ばれる面白い解法があるので紹介しておこう。

図4-12●無限に拡がる導体平面の前に点電荷を置く。

問題



図のように，表面が平らで無限に広い導体を考える(この表面とは反対側の導体の形状は何でもよい。また，導体は帯電していないとする)。

この導体の表面から距離 a の地点に，電荷 q をもつ点電荷を置いたとき，その周囲の空間にどのような電位 場 ができるか，導体の表面にはどのような電荷分布が現れるか，またこの点電荷は導体からどのようなクーロン力を受けるかということを考えてみよう。

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{(2a)^2}=\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2}$$

$$E=2E_+\cos\theta$$

$E_+=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2+a^2}$, $\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{r^2+a^2}}$ を代入して，

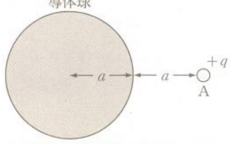
$$E=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{a}{(r^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\sigma(r)=-\varepsilon_0 E=\frac{-qa}{2\pi(r^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

実習問題 4-1 真空中に半径 a の帯電していない導体球がある。この導体球の表面から距離 a の点に電気量 $q(>0)$ の点電荷 A を置いたとき，点電荷 A が導体球から受ける力を，以下のそれぞれの場合について求めよ。ただし，真空の誘電率を ε_0 とする。

(1) 導体球を接地している場合。
(2) 導体球を接地していない場合。← 難問

図4-18



電磁気学Ｉ_(13)_コンデンサー

演習問題 5-1 半径 a の導体球Ａと，それをとりまく内径 b の同心導体球殻Ｂでコンデンサーをつくる。導体球殻Ｂは薄くて，外径も b とみなせるものとする。次のそれぞれの場合について，このコンデンサーの電気容量を求めよ。ただし，導体球Ａと導体球殻Ｂの間の空間は真空で，真空の誘電率を ε_0 とする。

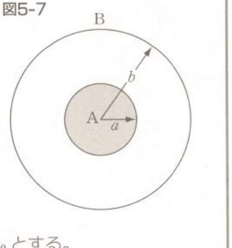


図5-7

(1) 導体球Ａに電荷を与え，導体球殻Ｂを接地する。

テストに出さない (2) 導体球殻Ｂに電荷を与え，導体球Ａを接地する。 難問

電磁気学ノート p84 設問

以上のような考え方から，エネルギーの空間的な分布，すなわち密度を計算することができる。← 問扱い

極板間の体積は $S \times d$ だから，静電エネルギーの密度 u は，

$$u = \frac{1}{2}\frac{CV^2}{Sd}$$

$E = V/d$ を使って，

$$= \frac{1}{2}\frac{CE^2 d}{S}$$

ここで，$C = \varepsilon_0 S/d$ だから，

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \quad /\!/$$

つまり，静電エネルギーの密度は，電場 $\boldsymbol{E}$ の大きさだけに関係し，コンデンサーの形状とは無関係であることが分かる。

こうして，我々の眼前に新たな物理学が見えてくる。つまり，静電エネルギーはコンデンサーだけのものではないということである。上の結論は，静電場 $\boldsymbol{E}$ が存在するところには，どこでも単位体積あたり $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ の静電エネルギーが存在するということを主張している。

$\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ は，電束密度 $\boldsymbol{D}$ を使って，$\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{E}$ のスカラー積，$\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}$ で表すこともあるが，それは $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ よりちょっとカッコイイというだけのことで，中身は同じである。

実習問題 5-1 (1) 半径 a の導体球に，電荷 Q を帯電させる。このとき，この導体球のもつ静電エネルギーはいくらか。

(2) この球が導体ではなく，電荷 Q が球内に一様に分布しているとき，この球のもつ静電エネルギーはいくらか。

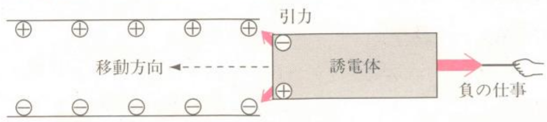
電磁気学Ｉ_(14)_誘電体

電磁気学ノート p91 設問

問 1 上に述べたように，電池から切り離されたコンデンサーに誘電体を挿入すると，電圧が低下することにより，コンデンサーの静電エネルギーは減少する。このエネルギーの減少分はどこへ消えたのか。

解答 誘電体をコンデンサーに近づけると，極板の真電荷とそれによって誘導された分極電荷は，符号が逆だから，互いに引き合う。すなわち，極板間への誘電体の挿入は，引力によって「自動的」に起こる。それゆえ，誘電体をゆっくりと極板に挿入しようと思えば，誘電体を外側に引っ張りながら中側へ「落として」いかねばならない。この力がする仕事は負である。静電エネルギーの減少は，この力がする負の仕事の結果である。◆

図6-6●誘電体は，極板から引力を受ける。



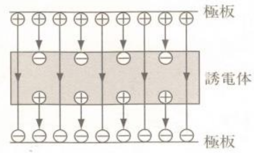
電磁気学ノート p93 設問

問 ●**例 1 平行平板コンデンサー**

まず，平行平板コンデンサーの極板間に誘電体を入れた場合を想定する。

このとき，極板間の電場の様子は図のようになるだろう。

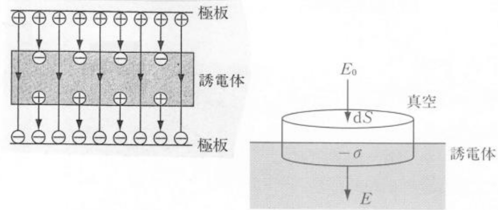
図6-7●誘電体の内部では，電気力線の本数は減る。



誘電体の内部では，真空中より電場が弱くなるが，それを模式的に描けば，極板上のプラスの真電荷から出た電気力線の一部が，誘電体表面のマイナスの分極電荷に吸い込まれ，それによって誘電体内の電気力線の本数が減少するからである。

このとき，誘電体の内部の電場 $\boldsymbol{E}$ の大きさを計算してみよう。

真空の場合の電場の大きさを E_0，分極電荷の面密度を $-\sigma$ として，次図のようにプラス極板側の誘電体表面 dS をはさむ円柱にガウスの法則を適用すると，この円柱の上面から入り込む電気力線の本数は(流入がマイナス，流出がプラスだから)，



$$-E_0\,dS$$

下面から出ていく電気力線の本数は，

$$E\,dS$$

だから，

$$(-E_0 + E)dS = -\frac{\sigma\,dS}{\varepsilon_0}$$ ← この ε_0 はガウスの法則で常に ε_0

ゆえに，

$$E = E_0 - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad /\!/ \quad —①$$

ここで，電荷密度 σ は，前述の誘電体の誘電率 ε を使って書けるはずである(演習問題 6-1)。へ

こうして，この平行平板コンデンサーの例では，電束密度の助けなど借りずとも，誘電体内部の電場は簡単に求まる。

①と②より $E = E_0 - \dfrac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0}\cdot\dfrac{V}{d}$ //

①より $\varepsilon_0 E_0 = \varepsilon_0 E + \sigma = \varepsilon_0 E + P = D$ —③

← p96, 97 の話

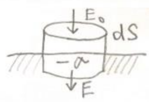
演習問題 6-1 誘電率 ε の誘電体を，極板間隔 d の平行平板コンデンサーの内部に隙間なく挿入し，極板間に V の電圧をかけたとき，誘電体表面に現れる分極電荷の密度はいくらになるか。ただし，真空の誘電率を ε_0 とする。 $\sigma\ (>0)$

電磁気学ノート p97 設問

問 2 前述の例で，電束密度 $\boldsymbol{D}$ を，誘電体の誘電率 ε と誘電体内部の電場 $\boldsymbol{E}$ を用いて表せ。

解答 境界面にガウスの法則を適用して，

Dは電場と誘電率の積



$$-E_0 + E = \frac{-\sigma}{\varepsilon_0}$$

また，演習問題 6-1 の結果より， $\sigma = (\varepsilon - \varepsilon_0)\dfrac{V}{d} = (\varepsilon - \varepsilon_0)E$

$$\sigma = (\varepsilon - \varepsilon_0)E$$

以上より， $-\varepsilon_0 E_0 + \varepsilon_0 E = -\sigma = \varepsilon_0 E - \varepsilon E$

$$\varepsilon_0 E_0 = \varepsilon E$$

となるから，けっきょく，

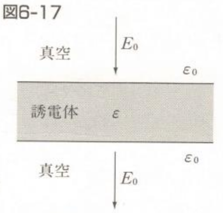
$$D = \varepsilon E \quad \cdots\cdots(答)$$

$D = \varepsilon_0 E_0 = \varepsilon E$ ◆

※演習問題 6-2 は出ない

実習問題 6-1 真空中に大きさ E_0 の一様な電場がある。この電場中に，電場の向きに垂直な表面をもつ無限に広い誘電体の板を置く。このとき，この誘電体の内部に生じる電場の大きさ，E および誘電体の表面に導かれる電荷の密度 $-\sigma\ (\sigma>0)$ を求めよ。ただし，真空の誘電率を ε_0，誘電体の誘電率を ε とする。

図6-17



パス

実習問題 6-2 誘電率 ε_1 と ε_2 の 2 つの誘電体が接している境界面における電場の屈折の法則を求めよ。ただし，2 つの誘電体は，どちらも等方的(すなわち，分極ベクトルは電場に比例)であるとする。

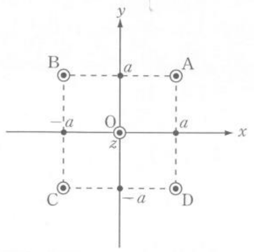
電磁気学 I_(15)_電流と磁場 1

演習問題 7-1 図のように，x-y 座標がそれぞれ (a, a), $(-a, a)$, $(-a, -a)$, $(a, -a)$ である点 A，B，C，D を通り，z 軸に平行な無限に長い 4 本の導線があり，それぞれの導線に z 軸の正方向に大きさ I の定常電流が流れている。

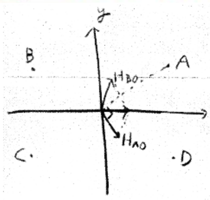
(1) A と B を通る電流が，原点 O につくる合成磁場の大きさと向きを求めよ。

(2) C と D を通る電流が，原点 O につくる合成磁場の大きさと向きを求めよ。

図7-11



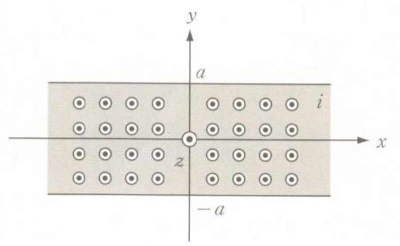
追加問 ABCDが長方形の場合どうなる？



H_{AO}とH_{BO}の合成は x軸正の向き
H_{CO}とH_{DO}は反対向きで
ABCDの合成磁場は0

実習問題 7-1 厚さ $2a$ の無限に広い導体板がある。この導体板の内部に，一方向に一様に，電流密度 $\boldsymbol{i}$ の電流が流れているとき，この導体板の内外に生じる磁場を求めよ。座標軸は，図のように，導体の中央を原点として，電流の流れる方向を z 軸正方向，導体板表面に平行な方向を x 軸方向とする。

図7-14

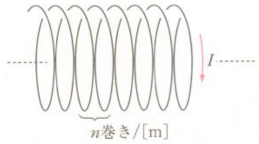


電磁気学 I_(16)_電流と磁場 2
電磁気学ノート p123 設問

●ソレノイド・コイルのつくる磁場

問 2 無限に長いソレノイド・コイルの内部に生じる磁場の大きさを，アンペールの法則を用いて求めよ。ただしコイルに流れる電流を I，コイルの巻き数を単位長さあたり n とする。また，コイルの外部には磁場は生じないと仮定してよい。

図7-19

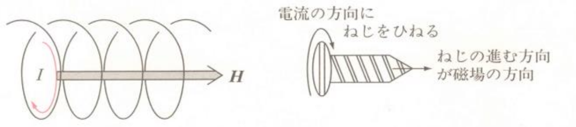


negligible

解答 「(無限に長いソレノイド・)コイルの外部に磁場が生じない」という仮定は，さほど自明ではない(ほとんどのテキストは，このことを自明のこととしているのだが……)。ここでは，とりあえずこの仮定を認め，後程あらためて別の方法で，そうなることを確認することにしよう。☆

円筒コイルの中心軸の方向を x 方向とすると，コイルの内部に生じる磁場は x 軸と平行になる。なぜなら，コイルは無限に長いので，どの x 座標をとっても，その断面は同等である。もし，x 軸に平行ではない磁場の成分があれば(つまり磁場が平行でなく傾いていれば)，どの断面も同等という対称性が破られてしまうからである。

図7-20

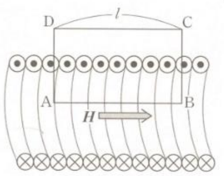


コイルの内部に生じる磁場の向きは，右ねじの規則より，コイルを流れる電流の方向にねじをひねったとき，ねじの進む方向である。

直線電流の場合は，磁場の方向にねじをひねったとき，ねじの進む方向が電流の方向であった。コイルの場合は，電流と磁場の関係が逆になっているが，右ねじの規則はそのまま使えるのである。

これでOK.

図7-21●長方形 ABCD にアンペールの法則を適用する。



さて，図のような長方形 ABCD の閉曲線を考える。辺 AB はコイルの内部を通る x 軸に平行な直線で，その長さを l とする。辺 CD はコイルの外部にとる。

この長方形 ABCD にアンペールの法則を適用してみよう。

この長方形にそって進むときカウントされる磁場は，磁場が x 軸に平行ということより，辺 AB の部分だけである。BC と DA は磁場に直角だからカウントされないし，CD はコイルの外部だからである。

AB 上の磁場の大きさはどこも同じはずだから，それを $\boldsymbol{H}$ とすると，

$$\int_A^B \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{s}$$

は，積分するまでもなく，

$$Hl$$

である。

一方，この長方形をつらぬくコイルの本数は nl だから，長方形をつらぬく電流の合計は，

$$nlI$$

である。よって，アンペールの法則より，

$$Hl = nlI$$

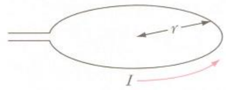
すなわち，

$$H = nI$$ ← 結果のみ天下りで高校公式

という簡単な法則が出てくる。◆

演習問題 7-2 半径 r の円形コイルに定常電流 I が流れているとき，そのコイルの中心に生じる磁場を求めよ。

図7-25



●円形コイルの中心軸上の磁場

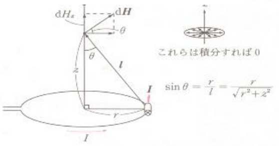
これも問

次に，円形コイルの中心だけではなく，中心軸上の磁場の大きさを求めてみよう。座標軸や記号は，図のようにとるとする。

中心軸上でも，磁場の方向は，電流をコイルにそってひねったときのねじの進む方向であることは，対称性から明らかである。しかし，微小な円弧上の電流 $I\,\mathrm{d}s$ が中心軸上につくる磁場は，図のように $\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{l}$ の方向だから，z 軸方向を向かない。

dH

図7-27● $\int_C \mathrm{d}\boldsymbol{H}$ は，$\mathrm{d}H_z$ の合計となる。



そこで，この $I\,\mathrm{d}s$ がつくる磁場 $\mathrm{d}H$ を，その z 成分 $\mathrm{d}H_z$ とそれに直角な成分に分解すれば，

$$\mathrm{d}H_z = \mathrm{d}H\sin\theta$$

であり，直角な成分は，円周方向に積分すれば(放射状に拡がるベクトルの和だから) 0 となるだろう。それゆえ，$\mathrm{d}H_z$ だけを求めればよい。

ビオ-サバールの法則より，

$$\mathrm{d}H = \frac{I\,\mathrm{d}s}{4\pi l^2}\left(= \frac{I\,\mathrm{d}s}{4\pi}\cdot\frac{1}{r^2+z^2}\right)$$

ゆえに，

$$\mathrm{d}H_z = \mathrm{d}H\sin\theta = \mathrm{d}H\frac{r}{l}\left(= \mathrm{d}H\frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}\right)$$

$$= \frac{I\,\mathrm{d}s\,r}{4\pi l^3} \quad 但し\ l = \sqrt{r^2+z^2}$$

$$= \frac{I\,\mathrm{d}s}{4\pi(r^2+z^2)}\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$= \frac{Ir}{4\pi(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}s$$

ここへつづく

この $\mathrm{d}H$ を円周にそって積分，すなわち $2\pi r$ をかければ，z での磁場の大きさとなるはずである。

$\oint_C \mathrm{d}s = 2\pi r$

$$H_z = \int_{円周}\mathrm{d}H_z = \oint_C \frac{Ir}{4\pi(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}s$$

$$= \frac{Ir}{4\pi(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot 2\pi r$$

$$= \frac{Ir^2}{2(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad //$$

もちろん，$z=0$ とすれば，コイルの中心での磁場 $I/2r$ となる。

以上，ビオ-サバールの法則は，アンペールの法則より複雑ではあるが，円形コイルに関してはなかなか便利のよい方法であることが分かるだろう。

さて，この結果を用いて，実習問題では，積分の練習をして頂こう。

実習問題 7-2

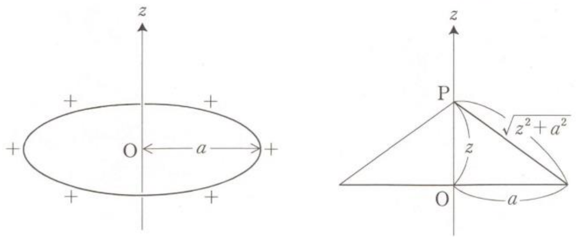
ソレノイド・コイルを，円形コイルの重ね合わせたものとみなして，コイルの中心軸上の磁場の大きさを求めよ。ただし，ソレノイド・コイルは無限に長く，その半径を r，単位長さあたりの巻き数を n，コイルに流れる電流の大きさを I とする。

※08 ローレンツ力の章は出ない

電磁気学 I_(18)_演習問題

演習問題 1-4 ★★★

導線で半径 a の円をつくり，この導線に電荷 $Q(>0)$ を与えると，電荷は円周に沿って一様に分布した。円の中心 O を通り，O を原点として，円に対して垂直な軸を z 軸としたとき，z 軸上の各点の電場と電位を求めよ。 2016院試



実習問題 1-4 ★★★

無限に拡がる薄い平板に，面積密度 $\sigma(>0)$ の電荷が帯電している。平板から距離 x の点における電場と電位を求めよ。

2016院試

ヒント! 微小平面のつくる電位を積分して求めてもよいが，各点の電場がなんらかの対称性をもつときには，電場に関するガウスの法則が使えないかを検討すべきである。ガウスの法則を用いれば，面倒な積分計算を省ける。この場合は電場を先に求め，電位は電場を積分すればよい。

とくに断りのないかぎり，空間は真空であり，問題に与えられた以外に電荷はないものとする。また，真空の誘電率 $\varepsilon_0(\fallingdotseq 8.85\times10^{-12}\,[\mathrm{C^2/N\cdot m^2}])$ は与えられたものとして用いてよい。

演習問題 2-1 ★★

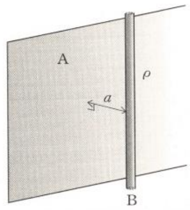
半径 R の孤立した導体球がある。この導体球の(無限遠に対する)電気容量はいくらか。また，このことを用いて地球の電気容量を求めよ。ただし，地球は導体でできており，その半径は 6400[km]であるとする。

図2-6●地球の電気容量は？

ヒント! 電荷を蓄えられる導体は，すべてコンデンサーとみなすことができる。(静電気力の範囲内で)連続した導体の電位はどこも同じであるから，それを V としたとき，その導体が蓄えている電気量 Q との間に，つねに $Q=CV$ の関係が成立する。この式を電気容量 C の定義とみなせばよい。電位 V が電荷 Q と比例するのは明らかである。電位 V とは 1 クーロンの電荷がもつ位置エネルギーであり，蓄えられている電荷が 2 クーロンになれば，位置エネルギーが 2 倍になるのは自明だからである。

実習問題 2-2 ★★★

無限に拡がる平面導体 A から距離 a のところに，無限に長い直線導体棒 B を平面導体 A に平行に置く。この直線導体棒 B に線密度 $\rho(>0)$ の電荷を一様に分布させるとき，直線導体棒 B の単位長さが，平面導体 A から受ける静電気力の大きさを求めよ。



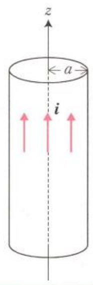
ヒント! 無限に長い直線状の電荷分布がつくる電場は，すでに見たように(実習問題1-3)ガウスの法則からすぐに求まる。さらに，電気鏡像法が使えることは直感的に分かるから，容易であろう。

実習問題 4-2 ★★

半径 a の円柱形をしたまっすぐで無限に長い導体棒がある。導体棒の中心軸を z 軸としたとき，導体棒の内部を z 軸の正方向に，電流密度 $\boldsymbol{i}$ の一様な定常電流が流れている。このとき，導体の内部および外部の各点における磁場を求めよ。

グラフ化せ

図4-15



$2\pi r H = I$

ヒント! 電流がつくる磁場を求める方法には，①アンペールの法則，②ビオ-サバールの法則，③ rot $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{i}$ から求める方法，④ベクトル・ポテンシャルから求める方法などがあるが，①が一番簡単である。なお，電場の場合同様，空間的な対称性をできるかぎり利用すること。