秋学期期末テスト解答例.

1. 次の 2 変数関数に対し $f_x = f_y = 0$ となる点をすべて求め，この点で極値をとるかどうか，極値をとるならそれが極小か極大かを判定し，極値をすべて求めよ．

(1) $f(x,y) = 3xy - x^{-1} + 9y^{-1}$.

（解答例）$f_x = 3y + x^{-2} = 0$, $f_y = 3x - 9y^{-2} = 0$ を解くと $x = 3^{-1}$, $y = -3$. 実際，二つの方程式を辺ごとに掛けると $9xy = -9(xy)^{-2}$ となる．一方 x, y はともに 0 ではないから $xy = -1$ となる．$y = -3^{-1}x^{-2}$ を $xy = -1$ に代入すると $-3^{-1}x^{-1} = -1$ となるから $x = 3^{-1}$ である．すると $y = -3^{-1}x^{-2} = -3^{-1}3^2 = -3$. したがって関数 $f(x,y)$ が極値を取る可能性のある点は $(3^{-1}, -3)$ だけである．点 $P = (3^{-1}, -3)$ で関数 f が極値をとるかどうか判定する．$f_{xx} = -2x^{-3}$ だから $f_{xx}(P) = -2 \times 3^3 < 0$. さらに $f_{yy}(P) = 18y^{-3}$ だから $f_{yy}(P) = 18 \times (-3)^{-3}$, $f_{xy} = 3$ だから $f_{xy}(P) = 3$. よってヘッシアン行列式は $H_f(P) := f_{xx}(P)f_{yy}(P) - f_{xy}(P)^2 = (-2 \times 3^3) \times (18 \times (-3)^{-3}) - 9 = 27 > 0$ である．よって関数 $f(x,y)$ は点 $(3^{-1}, -3)$ で極大値 $f(3^{-1}, -3) = -3 - 3 + 9(-3)^{-1} = -9$ をとる．

(2) $f(x,y) = x^3 - xy + \dfrac{1}{2}y^2$.

（解答例）$f_x = 3x^2 - y = 0$ から $y = 3x^2$. $f_y = -x + y = 0$ から $y = x$. $f_x = f_y = 0$ なら $3x^2 = x$ だから $x = 0$ または $x = 3^{-1}$. よって $f_x = f_y = 0$ となる点は $P_1 = (0,0)$ と $P_2 = (3^{-1}, 3^{-1})$ の二点である．$f_{xx} = 6x$, $f_{yy} = 1$, $f_{xy} = -1$ だからヘッシアン行列式は $H_f = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 6x - 1$ である．よって点 P_1 におけるヘッシアン行列式は $H_f(0,0) = -1 < 0$ となる．したがって関数 $f(x,y)$ は点 $P_1 = (0,0)$ で極値をとらない．一方 $f_{xx}(P_2) = 6 \times 3^{-1} - 1 = 1 > 0$. 点 $P_2 = (3^{-1}, 3^{-1})$ におけるヘッシアン行列式は $H_f(3^{-1}, 3^{-1}) = (6 \times 3^{-1}) \times 1 - (-1)^2 = 1 > 0$ である．よって関数 $f(x,y)$ は点 $P_2 = (3^{-1}, 3^{-1})$ で極小値 $f(3^{-1}, 3^{-1}) = 3^{-3} - 3^{-2} + 2^{-1}3^{-2} = -\frac{1}{54}$ をとる．

2. (1) $f(x,y)$ を C^2 級の 2 変数関数とする．f_{xy} が恒等的に 0 のとき，$f(x,y)$ はどのような関数か？

（解答例）二変数関数 $f(x,y)$ が $f_y = 0$ を満たせば x だけの関数だから $f(x,y) = A(x)$ と表される．したがって $f_{xy} = 0$ なら $f_x(x,y) = A(x)$ と表される．よって $f(x,y) = \int A(x)dx + C$ となる．ここで C は x の関数としての積分定数であるが，$C = B(y)$（x については定数で，y だけの関数）と表される．$\int A(x)dx$ をあらためて $A(x)$ と表すと，結局 $f(x,y) = A(x) + B(y)$ の形である．逆にこの形の関数は $f_{xy} = 0$ を満たす．

(2) $g(u,v)$ を C^2 級の 2 変数関数とする．$g_{uu} - g_{vv}$ が恒等的に 0 のとき，$g(u,v)$ はどのような関数か？

（解答例）$x = u - v$, $y = u + v$ とおいて $g(u,v) = f(x,y)$ とおく．チェインルールを使って計算すると $g_u = f_x x_u + f_y y_u = f_x + f_y$, $g_{uu} = f_{xx}x_u^2 + f_{xy}y_u x_u + f_{yx}x_u y_u + f_{yy}y_u^2 = f_{xx} + 2f_{xy} + f_{yy}$, $g_v = f_x x_v + f_y y_v = -f_x + f_v$, $g_{vv} = f_{xx}x_v^2 + f_{xy}y_v x_v + f_{yx}y_v x_v + f_{yy}y_v^2 = f_{xx} - 2f_{xy} + f_{vv}$ となる．よって $g_{uu} - g_{vv} = 4f_{xy}$ である．この計算から $g_{uu} - g_{vv} = 0$ は $f_{xy} = 0$ と同値であることがわかる．よって (1) から $f(x,y) = A(x) + B(y)$ である．$g(u,v)$ は $A(u-v) + B(u+v)$ の形である．

3. 関係式

$$F(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 3y = 0$$

によって定められる関数 $y = f(x)$ について次の問に答えよ．

(1) $y' = \dfrac{dy}{dx}$ を x, y で表せ．

（解答例）$x^2 - xy + y^2 - 3y = 0$ の両辺を x で微分すると $2x - y - xy' + 2yy' - 3y' = 0$. よって

$$y' = \frac{2x - y}{x - 2y + 3}$$

である．

(2) $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を x, y, y' で表せ．

（解答例）$x^2-xy+y^2-3y=0$ の両辺を x で微分すると $2x-y-xy'+2yy'-3y'=0$ であった．もう一度微分すると $2-2y'-xy''+2(y')^2+2yy''-3y''=0$ である．よって

$$y''=2\frac{1-y'+(y')^2}{x-2y+3}$$

である．これで答としていいが，y' が入っている点が気に入らなければこうすればいい．(1) の結果を代入すると $y''=2\frac{(x-2y+3)^2-(2x-y)(x-2y+3)+(2x-y)^2}{(x-2y+3)^3}$．最後に $x^2-xy+y^2-3y=0$ を使うと最終的な答は

$$y''=\frac{18}{(x-2y+3)^3}$$

である．

(3) 関数 $y=f(x)$ のすべての極値を求めよ．

（解答例）(1) から $y'=0$ なら $y=2x$ であることがわかる．$x^2-xy+y^2-3y=0$ に $y=2x$ を代入すると，$y'=0$ なら x は $x^2-x(2x)+(2x)^2-3(2x)=0$ を満たす数であるとわかる．これは $x(x-2)=0$ だから，結局 $y'=0$ となる点は $(0,0)$ と $(2,4)$ である．このとき (1) の結果の分母は 0 にならないからこのことを心配する必要はない．$x=0$ のとき $x-2y+3=-3x+3>0$ だから (2) より $y''>0$．よって $x=0$ のとき y は極小値をとり極小値は 0 である．$x=2$ のとき $x-2y+3=-3x+3<0$ だから (2) より $y''<0$. よって $x=2$ のとき y は極大値をとり極大値は 4 である．

(4) 曲線 $x^2-xy+y^2-3y=0$ の概形を描き，(3) の結果を図形的に説明せよ．

（解答例）線形代数で習ったように楕円を作図する（正しい図が書いてあればやり方に関わらず満点）．以下は解説．$x=u\cos\theta-v\sin\theta$, $y=u\sin\theta+v\cos\theta$ を代入すると $(u\cos\theta-v\sin\theta)^2-(u\cos\theta-v\sin\theta)(u\sin\theta+v\cos\theta)+(u\sin\theta+v\cos\theta)^2-3(u\sin\theta+v\cos\theta)=0$．$u^2$ の係数 $=\cos^2\theta-\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta=1-\cos\theta\sin\theta$, v^2 の係数 $=\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1+\sin\theta\cos\theta$, uv の係数 $=-\cos^2\theta+\sin^2\theta$. uv の係数 $=0$ となる θ として例えば $\theta=\frac{\pi}{4}$ をとると $x=\frac{1}{\sqrt{2}}(u-v)$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}(u+v)$ である．この時，u^2 の係数 $=\frac{1}{2}$, v^2 の係数 $=\frac{3}{2}$ となる．この時，与えられた二次曲線を uv 座標で表すと $(u-\frac{3}{\sqrt{2}})^2+3(v-\frac{1}{\sqrt{2}})^2=6$ となる．だから，与えられた二次曲線は $u=\frac{3}{\sqrt{2}}+\sqrt{6}\cos t$, $v=\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\sin t$ とパラメータ表示される．接線ベクトルは $(\frac{du}{dt},\frac{dv}{dt})=(-\sqrt{6}\sin t,\sqrt{2}\cos t)$ である．$(x,y)=(0,0)$ は $(u,v)=(0,0)$ に対応し，$(x,y)=(2,4)$ は $(u,v)=(3\sqrt{2},\sqrt{2})$ に対応する．この楕円の接線は $(\frac{3}{\sqrt{2}}+\sqrt{6}\cos t,\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\sin t)=(0,0)$ となる $t=\frac{7\pi}{6}$ に対応する $(u,v)=(0,0)$ すなわち $(x,y)=(0,0)$ と，$(\frac{3}{\sqrt{2}}+\sqrt{6}\cos t,\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\sin t)=(3\sqrt{2},\sqrt{2})$ となる $t=\frac{\pi}{6}$ に対応する $(u,v)=(3\sqrt{2},\sqrt{2})$ すなわち $(x,y)=(2,4)$ で水平になっていることがわかる．実際，$\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sqrt{6}\sin t\\ \sqrt{2}\cos t\end{pmatrix}$ の第二座標 $=0$ となるのは $-\sqrt{6}\sin t+\sqrt{2}\cos t=0$ となるときで，それは $\tan t=\frac{1}{\sqrt{3}}$ となる角である．0 と 2π の間でそのような角は $t=\frac{\pi}{6}$ と $t=\frac{7\pi}{6}$ の二つである．これは xy 座標の点 $(2,4)$ と $(0,0)$ に当たる．こうして楕円の作図とチェインルールの計算が整合的であることがわかる．

4. (2) 制約条件 $g(x,y)=x^2+2\sqrt{3}xy-y^2-2=0$ のもとで $f(x,y)=x^2+y^2$ の最大値と最小値を求めよ．

（解答例）Lagrange 未定乗数法の連立方程式 $f_x=\lambda g_x$, $f_y=\lambda g_y$, $g=0$ は

$$\begin{aligned}2x&=\lambda(2x+2\sqrt{3}y)\\ 2y&=\lambda(2\sqrt{3}x-2y)\\ x^2+2\sqrt{3}xy-y^2-2&=0\end{aligned}$$

である．第一式と第二式は x,y に関する連立一次方程式だから行列で表すと

$$\begin{pmatrix}1-\lambda & -\sqrt{3}\lambda\\ -\sqrt{3}\lambda & 1+\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

である．係数行列の行列式は $(1-\lambda)(1+\lambda)-3\lambda^2=(1-2\lambda)(1+2\lambda)$ である．これから二通りの場合に分かれる．

- 場合その一：$\lambda \neq \pm 1/2$ のとき．$x=y=0$ となるが，これは第三式を満たさない．
- 場合その二：$\lambda = 1/2$ または $\lambda=-\frac{1}{2}$ のとき．$\lambda=\frac{1}{2}$ なら第一式と第二式から $x=\sqrt{3}y$. 第三式に代入して $3y^2+6y^2-y^2-2=0$ から $y=\pm\frac{1}{2}$. よって $(x,y)=(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\pm\frac{1}{2})$（複合同順）．$\lambda=-\frac{1}{2}$ なら第一式と第二式から $y=-\sqrt{3}x$. 第三式に代入すると $x^2-6x^2-3x^2-2=0$ となって $y\in\mathbb{R}$ と矛盾するから不適.

よって $g=0$ のもとで f は $(x,y)=(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\pm\frac{1}{2})$ の時に極値を取る可能性がある．一方，制限条件のもとで x^2+y^2 はいくらでも大きくなる．なぜなら $g=0$ を書き換えると $(y-\sqrt{3}x)^2=4x^2$ だから，任意の x が与えられると $g(x,y)=0$ を満たす y が必ず存在する．よって $g=0$ を満たしながら x^2+y^2 は際限なく大きくなれる．よって極値は必然的に最小値である．

以上をまとめると次の結論になる：

- $g=0$ のもとで f は最大値を取らない（際限なく大きくなる）．
- $g=0$ のもとで f は $(x,y)=(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\pm\frac{1}{2})$ の時に最小値 $f(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\pm\frac{1}{2})=1$ をとる．

(1) この状況を視覚化するのが小問 (1) である．平面二次曲線 $g(x,y)=x^2+2\sqrt{3}xy-y^2-2=0$ の絵を描く（線形代数）．$x=u\cos t-v\sin t,\ y=u\sin t+v\cos t$ を代入して uv の係数が 0 になるような角度 t を求める．直接計算すると，u^2 の係数 $=\cos^2 t+2\sqrt{3}\cos t\sin t-\sin^2 t$, uv の係数 $=-4\sin t\cos t+2\sqrt{3}(\cos^2 t-\sin^2 t)$, v^2 の係数 $=\sin^2 t-2\sqrt{3}\sin t\cos t-\cos^2 t$. uv の係数 $=0$ となる t は $\tan(2t)=\sqrt{3}$ を満たす角であることが判る．したがって，例えば $t=\frac{\pi}{6}$ にとればいい．t をこのようにとって新しく uv 座標系を導入する．即ち，u 軸 (resp. v 軸）は，x 軸 (resp. y 軸) を角度 $\frac{\pi}{6}$ 回転したものである．uv 座標系で二次曲線 $g(x,y)=x^2+2\sqrt{3}xy-y^2-2=0$ を表してやると，$u^2-v^2=1$ となる．座標軸を回転してやると xym 平面の二次曲線 $g(x,y)=0$ は uv 平面の双曲線 $u^2-v^2=1$ になることが示された．双曲線 $u^2-v^2=1$ と円 $u^2+v^2=1$ は uv 平面の点 $(\pm1,0)$ （xy 座標では $(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\pm\frac{1}{2})$）で接する．

5. 積分領域 D を図示し，次の 2 重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D x\,dxdy.\ D: x^2+y^2\leq 2x.$

$D:(x-1)^2+y^2\leq 1$ だから $x=1+r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ と極座標に変換すると積分領域は $r\theta$ 空間の $E:[0,1]\times[0,2\pi]$ になる．よって与えられた積分は

$$V=\iint_E(1+r\cos\theta)rdrd\theta=\iint_E rdrd\theta+\iint_E r^2\cos\theta drd\theta=\int_0^1 rdr\int_0^{2\pi}d\theta+\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta\int_0^1 r^2dr=\pi\ .$$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{x^2}{(x+y)^3}dxdy.\ D: x\geq 0,\ y\geq 0,\ 1\leq x+y\leq 2.$

ヒントにしたがって $x=z(1-t),\ y=zt$ という変数変換を考える．すると 積分領域は $E:1\leq z\leq 2,\ 0\leq t\leq 1$ である．

$$dxdy=\left|\det\begin{pmatrix} x_z & y_z\\ x_t & y_t\end{pmatrix}\right|dzdt=\left|\det\begin{pmatrix} 1-t & t\\ -z & z\end{pmatrix}\right|dzdt=zdzdt$$

だから与えられた積分は

$$\iint_E\frac{z^2(1-t)^2}{z^3}zdzdt=\int_1^2 dz\int_0^1(1-t)^2dt=\left[-\frac{(1-t)^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}\ .$$

(3) $\displaystyle\iint_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy.\ D: x\geq 0,\ y\geq 0,\ x\leq x^2+y^2\leq 1.$

D は第一象限と円板 $x^2+y^2 \leq 1$ の内部と円板 $(x-\frac{1}{2})^2+y^2 \leq (\frac{1}{2})^2$ の外部の共通部分である．これを極座標で表せば

$$E = \left\{(r,\theta)\,|\, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ \cos\theta \leq r \leq 1\right\}$$

である．極座標変換により

$$\begin{aligned}
V &= \iint_E r r dr d\theta \quad [\because\ \sqrt{x^2+y^2} = r\ , J(r,\theta) = r\,] \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\cos\theta}^1 r^2 dr \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3}\right]_{\cos\theta}^1 d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^3\theta) d\theta \\
&= \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta
\end{aligned}$$

である．ここで部分積分によって

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta (\sin\theta)' d\theta \\
&= \Big[\cos^2\theta \sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\theta(-\sin\theta)\sin\theta d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta(1-\cos^2\theta) d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta
\end{aligned}$$

だから

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta = \frac{2}{3}$$

である．したがって

$$V = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{9}$$

である．

積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta$ を計算するのに漸化式を使うのも，もちろんよい．$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta d\theta$ とおくと

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

だから

$$I_3 = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta = \frac{2}{3}[\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

である．

6. 積分

$$\int_0^1 dy \int_{3y}^3 \frac{dx}{(1+x^2)^3}$$

はどのような領域での積分か，領域を図示して積分の値を求めよ．

（解答例）積分領域は横線集合 $3y \le x \le 3,\ 0 \le y \le 1$ である．縦線集合としては $0 \le y \le \frac{x}{3},\ 0 \le x \le 3$ である（この領域は $(0,0),\ (3,0),\ (3,1)$ を 3 頂点とする三角形）．被積分関数は y に関しては定数関数だから，積分の順序交換して，先に y で積分する（順序を交換しなくても計算はできるが，順次を変更した方がはるかに楽に計算できる）．$\displaystyle\int_0^3 dx \int_0^{\frac{x}{3}} \frac{dy}{(1+x^2)^3} = \int_0^3 dx \frac{x}{3(1+x^2)^3}$. そこで $u = 1 + x^2$ とおいて置換積分すると，つづきは $\displaystyle\frac{1}{6}\int_1^{10} \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{6}\left[-\frac{1}{2t^2}\right]_1^{10} = 33/400.$

7. 次の広義積分の収束，発散を判定し，収束する場合には積分の値を求めよ：

$$\iint_{0<x^2+y^2<1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}\ .$$

（解答例）この問題の背景には忘れてはいけない広義積分の収束発散の判定があるから，できて欲しい問題である．まずはその判定を思い出そう．$\int_0^1 \frac{dx}{x^a}$ は $a=1$ のとき発散する．なぜなら $\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = [\log x]_\varepsilon^1 = -\log\varepsilon = \log(1/\varepsilon) \to \infty\ (\varepsilon \to 0)$ だからである．$a > 1$ なら $x \to 0$ のときの増大は $1/x$ より $1/x^1$ はもっと強くなるから $\int_0^1 \frac{dx}{x^a} = \infty$ は当然である．もし $a < 1$ なら $1-a > 0$ だから $\int_0^1 \frac{dx}{x^a} = [x^{1-a}/(1-a)]_0^1 = 1/(1-a)$ である（広義積分は収束する）．

では，解答例を述べる．極座標で考える．もし $1-2a > -1$ すなわち $a < 1$ ならば

$$\iint_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^a} = 2\pi\int_0^1 \frac{rdr}{r^{2a}} = 2\pi\int_0^1 r^{1-2a}dr = 2\pi\left[\frac{1}{2-2a}r^{2-2a}\right]_0^1 = \frac{\pi}{1-a}$$

である．もし $a \ge 1$ ならば $1-2a \le -1$ だから $\displaystyle\int_0^1 r^{1-2a}dr = \infty$ である．よって $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^a} < \infty$ であるための必要十分条件は $a < 1$ である．

8. 次の 2 重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy$.

(2) $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-2xy\cos\alpha-y^2}dxdy$ （α は $0 < \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数）.

（解答例）(1) の答は π である．たとえば極座標に変換すれば簡単に計算できる．$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ と極座標に変換すると

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy = \iint_{[0,\infty)\times[0,2\pi]} e^{-r^2}rdrd\theta = 2\pi\int_0^\infty e^{-r^2}rdr \overset{r^2=t}{=} 2\pi\int_0^\infty e^{-t}\frac{1}{2}dt = \pi[-e^{-t}]_0^\infty = \pi\ .$$

次に (2) の解答例を述べる．まず e の肩を平方完成すると
$x^2+2xy\cos\alpha+y^2 = (x+\cos\alpha y)^2+(1-\cos\alpha^2)y^2 = (x+\cos\alpha y)^2+(\sin\alpha y)^2$. $u = x+\cos\alpha y,\ v = \sin\alpha y$ という一次変換で変数変換すると $x = u - \cos\alpha v/\sin\alpha,\ y = v/\sin\alpha$ だから $J = x_u y_v - x_v y_u = 1/\sin\alpha$ である．よって問題の積分は

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-u^2-v^2}(1/\sin\alpha)dudv = \pi/\sin\alpha$$

である．

観察. 答をみると $\alpha \to +0$ とすると積分は際限なく大きくなる．$\alpha = 0$ とすると e の肩に乗っている二次式のマイナスは $x^2+2xy+y^2 = (x+y)^2$ となって実質的に一変数になってしまう．$\int_{-\infty}^\infty dx\int_{-\infty}^\infty e^{-y^2}dy = \int_{-\infty}^\infty dx\sqrt{\pi} = \infty$ という状況に近づくため，こんなことが起きると考えられる．

9. 2 重積分

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2-xy-y^2}dxdy$$

を求めよ．

問題 8(2) の真似をするといい．しかしこの問題では一次変換で変数変換すると積分領域が変わってしまう．ここをちゃんと追ってやることが必要である．この点が，問題 9 が問題 8(2) よりちょっと高級な点である．

講義でやった計算例 $V = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+xy+y^2)}dxdy = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi$ を復習する．e の肩にのっている 2 次式を平方完成すると $-\frac{3}{4}x^2 - (y+\frac{x}{2})^2$ である．そこで $u = \frac{\sqrt{3}}{2}x$, $v = y + \frac{x}{2}$ と変数変換する．これは $x = \frac{2}{\sqrt{3}}u$, $y = v - \frac{1}{\sqrt{3}}u$ と同値である．よって $J(u,v) = \det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ である．したがって積分の変数変換公式より $V = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-u^2-v^2}\frac{2}{\sqrt{3}}dudv$ である．最後に $u = r\cos\theta$, $v = r\sin\theta$ と極座標に変換すると $J(u,v) = r$ だから $V = \frac{2}{\sqrt{3}}2\pi\int_0^\infty e^{-r^2}rdr = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi$ である．ここで $\int_0^\infty e^{-r^2}rdr = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}dt = \frac{1}{2}$ という計算を行った．

次に，問題の積分 $\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+xy+y^2)}dxdy$ の計算を行う．e の肩にのっている 2 次式を平方完成して 1 次変換を考え，さらに極座標変換するところまでは上と同じである．問題の積分の積分範囲 D は第 1 象限だから，1 次変数によって対応する積分範囲 D' はもはや全空間ではない．この問題では積分範囲 D は第 1 象限 $x > 0$, $y > 0$ であり，$x = \frac{2}{\sqrt{3}}u$, $y = v - \frac{1}{\sqrt{3}}u$ だったから，対応する uv 平面の領域 D' は，$\frac{2}{\sqrt{3}}u > 0$, $v - \frac{1}{\sqrt{3}}u > 0$ という不等式で与えられる．よって D' : $u > 0$, $v - \frac{u}{\sqrt{3}} > 0$ である．これは，uv 平面において，原点を頂点とする中心角が $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ で半径が無限大の扇形である．問題の積分は $\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_{D'} e^{-u^2-v^2}dudv$ である．極座標変換 $u = r\cos\theta$, $v = r\sin\theta$ によって D' は $r\theta$ 平面の領域 E : $0 < r < \infty$,　$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{2}$ にうつる．極座標変換の面積比は $J(r,\theta) = r$ だから，問題の積分は

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_E e^{-r^2}rdrd\theta &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\int_0^\infty e^{-r^2}rdr \quad [\text{ 先に } \theta \text{ で積分}] \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{3}\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}dt \quad [r^2 = t \text{ とおいて置換積分}] \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{3}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

である．

対称性を使うともっと計算が楽になる．問題の積分を，

$$
(*) \qquad e^{-u^2-v^2}
$$

の uv 平面の積分領域 D' 上の積分に帰着させて $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 倍することに帰着させるまでは同じ．ここで u^2+v^2 は (uv) 平面では原点中心の回転で不変であることを利用する．D' は中心角が $\frac{\pi}{3}$ の扇形である．よって D' 上での $(*)$ の積分は，全平面での積分の $(\frac{\pi}{3})/(2\pi) = 1/6$ 倍である．よって問題の積分は

$$
\frac{2}{\sqrt{3}} \times \pi \times \frac{1}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}
$$

である．