# 力学II（後半：原田担当分）

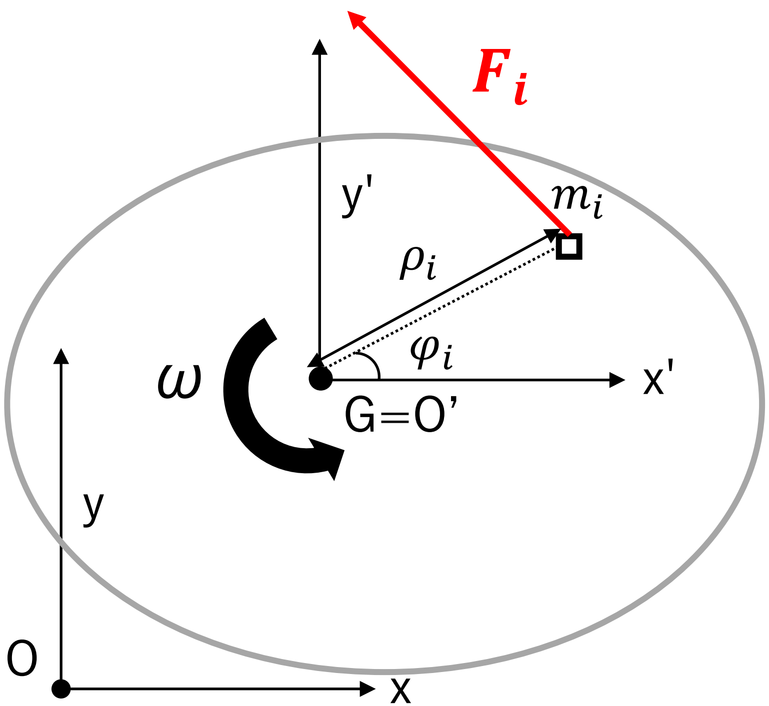
# 第14回

# 今回の内容（p.127-134）

## 剛体の平面運動とその例

- 剛体振り子
- 荒い水平面上の円筒の運動

# 剛体の平面運動:外力がxy平面上の場合




$\boldsymbol{F_i} = (X_i, Y_i, 0)$

重心の運動方程式

$M\ddot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{G}} = \boldsymbol{F_G}$ のz成分を考えると、

$\ddot{z}_G = 0$ であり、

重心はxy面内のみで運動する。

回転運動の軸をz軸とすると、
この運動の自由度は、3である。

重心の運動：$x_G, y_G$ 重心の周りの回転：$\omega$

重心の運動方程式は、

$$M\ddot{x}_G = \sum_i \boldsymbol{X_i} \qquad M\ddot{y}_G = \sum_i \boldsymbol{Y_i}$$

つぎに、重心の周りの回転運動を考える。

剛体の全角運動量の時間微分が力のモーメントの和に等しいので、

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N} \qquad \boldsymbol{L} = \sum_i (\boldsymbol{r_i} \times m_i \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}})$$

z成分をとると、

$$\frac{dL_z}{dt} = N_z$$

$$L_z = \sum_i x_i m_i \dot{y}_i - y_i m_i \dot{x}_i$$

$$N_z = \sum_i x_i Y_i - y_i X_i$$

左辺を計算すると、

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_i m_i (x_i \ddot{y}_i - y_i \ddot{x}_i)$$

$x_i = x_G + x_i'$　$y_i = y_G + y_i'$ を代入して、

$$\sum_i m_i \boldsymbol{r_i}' = 0,\ \sum_i m_i \dot{\boldsymbol{r_i}}' = 0,\ \sum_i m_i \ddot{\boldsymbol{r_i}}' = 0$$

などの関係と重心の運動方程式を用いて、整理すると、

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_i \left( x_G Y_i - y_G X_i + m_i \left( x_i' \ddot{y_i}' - y_i' \ddot{x_i}' \right) \right)$$

これが、$N_z$に等しいので、整理すると、

$$\sum_i m_i \left( x_i' \ddot{y_i}' - y_i' \ddot{x_i}' \right) = \sum_i x_i' Y_i - y_i' X_i$$

ここで、

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i x_i' m_i \dot{y}_i' - y_i' m_i \dot{x}_i'\right) = \sum_i m_i \left(x_i' \ddot{y}_i' - y_i' \ddot{x}_i'\right)$$

なので、

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i x_i' m_i \dot{y}_i' - y_i' m_i \dot{x}_i'\right) = \sum_i x_i' Y_i - y_i' X_i$$

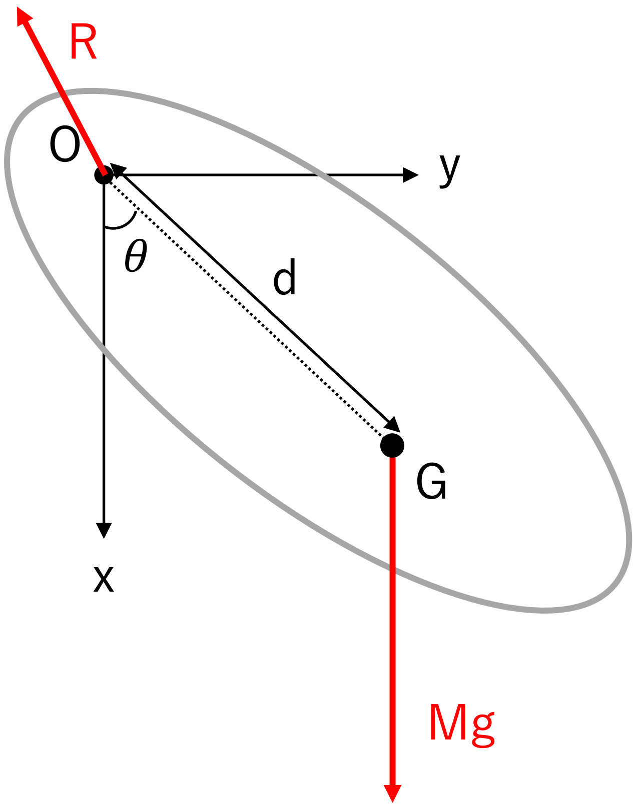
円筒座標系であらわして、整理すると、

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i {\rho_i}^2\right)\omega = \sum_i x_i' Y_i - y_i' X_i$$

$$\Leftrightarrow I_0 \frac{d\omega}{dt} = N'$$ （重心の周りの力のモーメントの和）

剛体の平面運動は、重心の平面運動（自由度２）と、重心を固定軸とする回転運動（自由度１）により、記述される。

# 剛体振り子




解き方①：
点Oの周りの回転運動を考える。

解き方②：
重心Gの運動とそのまわりの
回転運動を考える。

# 解き方①：点Oの周りの回転運動

$$I\ddot{\theta} = -Mgd\sin\theta$$

微小振動を仮定すると、 $\sin\theta \cong \theta$ であり、

$$I\ddot{\theta} = -Mgd\theta \qquad \text{（単振動）}$$

$\omega = \sqrt{\dfrac{Mgd}{I}}$ とおくと、

$\theta = A\sin(\omega t + \alpha)$ が一般解であり、

振動の周期Tは、$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

# 解き方②：重心Gの運動とその周りの回転運動

重心の運動方程式

$$M\ddot{x}_G = Mg + R_x \quad M\ddot{y}_G = R_y$$

重心の周りの回転運動を考える。
力のモーメントの和N'は、

$$N' = -d\cos\theta\, R_y + d\sin\theta\, R_x$$ となる。

$$R_x = M(\ddot{x}_G - g) \quad R_y = M\ddot{y}_G$$ より、

$$N' = Md\{(\ddot{x}_G - g)\sin\theta - \ddot{y}_G\cos\theta\}$$

$x_G = d\cos\theta$　から、$\ddot{x}_G$、$\ddot{y}_G$を計算して整理すると、
$y_G = d\sin\theta$

$$N' = -Mgd\sin\theta - Md^2\ddot{\theta}$$

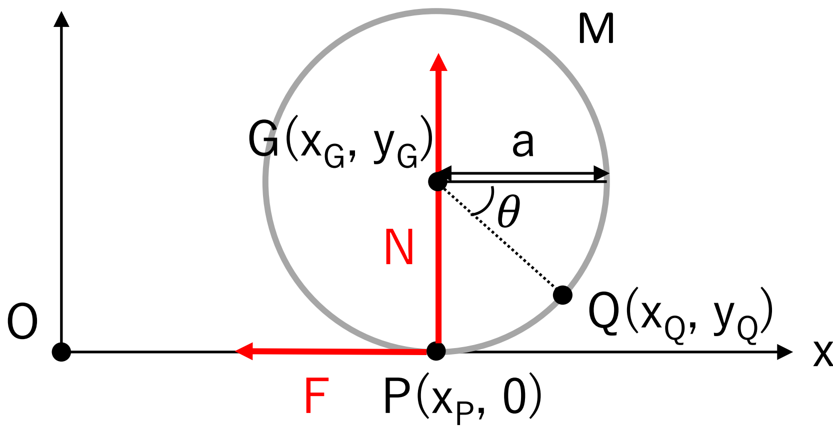
したがって、

$$I_0\ddot{\theta} = -Mgd\sin\theta - Md^2\ddot{\theta}$$

$I = I_0 + Md^2$ であるので、

$I\ddot{\theta} = -Md^2\ddot{\theta}$ となり、同じ式が得られる。

# あらい水平面上の円筒の運動




方針：
重心Gの運動とそのまわりの回転運動を考える。

$$x_Q = x_G + a\cos\theta$$

$$y_Q = a - a\sin\theta$$

$$\dot{x}_Q = \dot{x}_G - a\dot{\theta}\sin\theta \qquad \dot{x}_P = \dot{x}_G - a\dot{\theta}$$

$$\dot{y}_Q = -a\dot{\theta}\cos\theta$$

重心の運動方程式は、

$$M\ddot{x}_G = -F \qquad M\ddot{y}_G = N - Mg = 0$$

$$\Leftrightarrow N = Mg$$

点Pが滑っているとき、 $F = \mu N = \mu Mg$

したがって、 $\ddot{x}_G = -\mu g$

つまり、重心の運動は等加速度運動。

重心のまわりの回転の運動方程式は、

$$I_0\ddot{\theta} = aF$$

$$\ddot{\theta} = \frac{a\mu Mg}{I_0}$$

つまり、回転運動は等角加速度運動。

初期条件として、t=0の時に、

$$x_G = 0 \quad \theta = 0$$

$$\dot{x}_G = v_0 \quad \dot{\theta} = \omega_0$$

のとき、点Pが停止する時刻tを求めよ。

# 取り扱ったトピックス

| 講義 | § | タイトル | | タイトル | トピックス | チェック |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 第9回 | 6 | 質点系の力学 | 3 | 角運動量とその保存則 | 角運動量の微分は力のモーメント | |
| 第9回 | | | | | 全角運動量の微分は力のモーメントの和 | |
| 第9回 | | | | | 質点系に対するつり合いの条件 | |
| 第10回 | | | 4 | 二体問題 | 換算質量・相対位置ベクトルによる運動方程式の記述 | |
| 第10回 | | | | | 中心力の性質1（角運動量保存則） | |
| 第10回 | | | | | 中心力の性質2（運動は一つの平面上に限定される） | |
| 第10回 | | | | | 中心力の性質3（保存力） | |
| 第10回 | | | | | 中心力の性質4（面積速度一定） | |
| 第10回 | | | | | 極座標による表現 | |
| 第11回 | | | | | 力学的エネルギー保存則の極座標による記述 | |
| 第11回 | | | 5 | 惑星の運動 | ケプラーの第一法則（楕円軌道） | |
| 第11回 | | | | | ケプラーの第二法則（面積速度一定） | |
| 第11回 | | | | | ケプラーの第三法則（公転周期） | |
| 第12回 | 7 | 剛体の力学 | 1 | 剛体の静力学 | 剛体の運動の自由度 | |
| 第12回 | | | 2 | 固定軸を持つ剛体の力学 | 回転運動の方程式 | |
| 第13回 | | | 3 | 慣性モーメント | 慣性モーメントの性質（平行軸の定理） | |
| 第13回 | | | 4 | 剛体の力学的エネルギー | 重力ポテンシャル | |
| 第13回 | | | | | 運動エネルギー | |
| 第14回 | | | 5 | | 剛体の平面運動 | |