$\mathbb{R}^n$ の内積は標準的なものとする.

(1) 次の行列 A に対して, ケーレー・ハミルトンの定理を用いて A^{200} を計算せよ.

Hint: $(t^2+t+1)(t-1)=t^3-1$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}$$

(2) 次の行列は対角化できるか調べ, 対角化できれば対角化せよ, 対角化できなければその理由を説明せよ.

$$\text{(a)} \quad \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(3) 次の $\mathbb{R}^3$ の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ に対して,

$$\langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r \rangle \quad (1 \leq r \leq 3)$$

を満たす正規直交基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_{2,} \boldsymbol{u}_3\}$ を求めよ.

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(4) 次の行列は直交行列であるように a, b, c を定めよ.

$$\begin{bmatrix} a & 0 & c \\ a & \frac{1}{\sqrt{2}} & -b \\ a & \frac{-1}{\sqrt{2}} & -b \end{bmatrix}$$

(5) 次の行列 A を直交行列を用いて対角化せよ.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

以上