第 5 回講義：微分係数と導関数について（その 1）（教科書 1.6）．

• 関数 $y = f(x)$ が定義域 A の **1 点** a **で連続**であるとは

$$\lim_{x\to a, x\in A} f(x) = f(a)$$

すなわち $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in A)(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon)$ が成り立つこと．関数 $y = f(x)$ が**定義域全体で連続**とは，**定義域の各点で連続**であること．

　定義域全体での連続性の直観的意味は，グラフに切れ目がないことである．$x = c$ でグラフの切れ目をもつとき $x = c$ を**不連続点**とよぶ．

• 例．(1) 関数 $f(x) = x\sin(1/x)$ は $x = 0$ で定義されていないが，式が意味を持たない $x = 0$ において人工的に $f(0) = 0$ と定義することによって $\mathbb{R}$ 上の連続関数に拡張することができる．なぜなら $|x\sin\frac{1}{x}| \le |x|$ から $\lim_{0\ne x\to 0} x\sin(1/x) = 0$ がしたがうからである．

(2) 関数 $f(x) = \begin{cases} 1 & (x \ge 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$ は $x = 0$ で不連続，その他の x で連続である．

(3) 関数 $f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ -1 & (x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \end{cases}$ は全ての $x \in \mathbb{R}$ で不連続である．

• 関数 $y = f(x)$ が定義域の **1 点** a **で微分可能**であるとは，極限

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

が存在することである．この極限を関数 $y = f(x)$ の a における**微分係数**とよび $f'(a)$ と書く．

　$f'(a)$ の幾何的意味：接線の傾き．

　$f'(a)$ の物理的意味：瞬間の速度．

関数 $f(x)$ は定義域全体で微分可能とする．関数 $y = f(x)$ の定義域の各点での微分係数を x の関数と考えたものを**導関数**とよび，$f'(x)$ と書く．

• 定義から直接計算することによって求めることができる導関数の例（講義中に計算を実演）．

(1) $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$.

　実際，$f(x+h)-f(x) = (x+h)^2-x^2 = (x^2+2hx+h^2)-x^2 = 2hx+h^2$ だから $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 2x+h \to 2x$ $(h \to 0)$ である．

(2) $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$. 実際に二項定理を使って計算してみると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{nx^{n-1}h + (\,h^2 \text{ を括り出せる項}\,)}{h} \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

である．

(3) $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$.

(3) の証明は指数関数の加法定理（指数法則）を使うことによって，基本的極限公式

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1}$$

に帰着する．実際，$\dfrac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x\dfrac{e^h-1}{h} \to e^x$ $(h \to 0)$ である．

(4) $f(x) = \sin x,\ f'(x) = \cos x.$

(4)$'$ $f(x) = \cos x,\ f'(x) = -\sin x.$

(4) と (4)$'$ の証明の方針：sin, cos の差を積に直す公式を使って基本的極限公式

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$$

に帰着させる．

実際，三角関数の差を積に直す公式を使うと，

(4) の証明：$\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \dfrac{2\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h} = \cos\left(x+\dfrac{h}{2}\right)\dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \to \cos x\ (h\to 0).$

(4)$'$ の証明：$\dfrac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \dfrac{-2\sin(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h} = -\sin\left(x+\dfrac{h}{2}\right)\dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \to -\sin x\ (h\to 0).$

もし差を積に直す公式を忘れたら加法定理から導く：

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\ ,$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\ .$$

から

$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$$

従って

$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\ .$$

また，

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\ ,$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\ .$$

から

$$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta\ .$$

従って

$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\ .$$

もし加法定理を忘れたら**回転行列**[1] の積 $R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha+\beta)$ を計算すると

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

は

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix}$$

---

[1] 原点のまわりの角 α の回転 $R(\alpha)$ は $\mathbb{R}^2$ の線形変換である．よって $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の行き先で決まる．その行き先は $R(\alpha)\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$, $R(\alpha)\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$ である．これから，原点のまわりの角 α の回転を表す行列は $R(\alpha)\mathbf{e}_1$, $R(\alpha)\mathbf{e}_2$ を並べて作られる行列 $R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ である（これは一般の線形変換で成り立つことだ）．

に等しいから成分を比較して加法定理を得る（**線形変換の合成は線形変換で，その表現行列は，それぞれの線形変換の表現行列の積**[2] であることに注意する）.

なお，平面 $\mathbb{R}^2$ の原点中心の角 α 回転を $R(\alpha)$ で表すことにすると

$$R(\alpha)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos\alpha)x - (\sin\alpha)y \\ (\sin\alpha)x + (\cos\alpha)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で与えられる．これを忘れると万事休すだが，いい覚え方がある：

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = R(\alpha)\mathbf{e}_1 \ , \ \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} = R(\alpha)\mathbf{e}_2$$

である（講義中に絵で説明する）.

(5) $f(x) = \log x$, $f'(x) = \frac{1}{x}$.

証明は $y = \log x$, $y + k = \log(x+h)$ とおけば $h \to 0 \Leftrightarrow k \to 0$ だから

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h) - \log x}{h} &= \lim_{k\to 0}\frac{(y+k) - y}{e^{y+k} - e^y} = \lim_{k\to 0}\frac{1}{\frac{e^{y+k}-e^y}{k}} \\ &= \frac{1}{\lim_{k\to 0}\frac{e^{y+k}-e^y}{k}} = \frac{1}{e^y\lim_{k\to 0}\frac{e^k-1}{k}} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

のように (3) に帰着する．または逆関数の微分の公式（後出）を使えばよい.

- （定理）微分可能ならば連続.

実際，$y = f(x)$ が 1 点 a で微分可能なら $|f(x) - f(a)| = |\frac{f(x)-f(a)}{x-a}| \times |x-a| \to |f'(a)| \times 0 = 0$ $(x \to a)$. □

（注意）逆は全く正しくない．例えば $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} \ (x \neq 0) \\ 0 \ (x = 0) \end{cases}$ は $x = 0$ で連続であるが $\frac{f(h)-f(0)}{h} = \sin\frac{1}{h}$ は $h \to 0$ のとき収束しない（$x = 0$ の近くで ± 1 の間を無限回振動するから）.

- **（定理）関数の 4 則演算と微分の公式．** とくに積の微分の公式と商の微分の公式．証明は教科書にあるので，各自で教科書を読んで証明を理解する.

$$\begin{aligned} &(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x) \ , \\ &(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \ , \\ &\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g(x)^2} \ , \\ &\text{特に} \quad \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \ . \end{aligned}$$

積の微分法の公式の証明：
$f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) = \{f(x+h) - f(x)\}g(x+h) + f(x)\{g(x+h) - g(x)\}$ と変形すると $(1/h)\{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)\} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x) + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \to f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ $(h \to 0)$ である.
商の微分法の証明：
$\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)} = -\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x+h)g(x)}$ だから $\frac{1}{h}(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}) = -\frac{1}{g(x+h)g(x)}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \to -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$ $(h \to 0)$ である. □

（使用上の注意）実際に $(f(x)/g(x))'$ の計算をするとき，商の微分法の公式を直接使うのではなく，$f(x) \times (1/g(x))$ と考えて，$(1/g(x))' = -g'(x)/g(x)^2$ と積の微分法の公式を使って

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} - f(x)\cdot\frac{g'(x)}{g(x)^2}$$

---

[2] 要するに，線形変換の合成と行列の積は完璧に対応しているということだ.

と計算する方が，無駄が少なくて計算そのものも楽である．さらに $(1/g(x))'$ も商の微分法より楽な計算法があるかもしれない．例えば $f(x)=\frac{1}{(x^2+1)^m}$ に対し合成関数の微分法を使って $f'(x)=\frac{-m(2x)}{(x^2+1)^{m+1}}$ と計算する方が商の微分法を使う計算 $f'(x)=\frac{0\cdot m(x^2+1)^{m-1}(2x)-1\cdot m(x^2+1)^{m-1}(2x)}{(x^2+1)^{2m}}=\frac{-2mx}{(x^2+1)^{m+1}}$ より楽である．

また，$f(x)=\frac{e^x}{(x+1)^2}$ に対し $f'(x)$ の計算でも商の微分公式をそのまま使うと無駄があることを確認せよ．

• **合成関数の微分の公式 (chain rule).**

$y=g(x)$, $z=f(y)$ の合成関数 $z=f(g(x))$ に対し，次の微分公式が成り立つ：

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}=f'(g(x))g'(x)\ .$$

（証明）x が $x+\Delta x$ に変化したとき $y=g(x)$ は $y+\Delta y$ に変化したとする．y が $y+\Delta y$ に変化したとき $z=f(y)$ は $z+\Delta z$ に変化したとする．このとき

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{\Delta z}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

である．ただし，もし $\Delta y=0$ なら $\frac{\Delta z}{\Delta y}=\frac{dz}{dy}$ と考える．ここで $\Delta x\to 0$ とすると

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

を得る． $\square$

この証明方法には $\Delta y=0$ ならどうするか，という問題点があるとよく言われる．もし $\Delta y=0$ なら $\Delta z/\Delta y$ を dz/dy だと思えばいいので，こう言う心配は無用である（と教科書に書いてある）．もし，こういう議論が好みでないなら，次のように考えるといい．$g(x)\to 0$ $(x\to 0)$ のとき関数 $h(x)$ が $o(g(x))$ であるとは，$h(x)/g(x)\to 0$ $(x\to 0)$ が成り立つことと定義して，$h(x)$ は $g(x)$ より高次の無限小であると言う．特に $o(1)$ は $o(1)\to 0$ $(x\to 0)$ を意味する．記号 o をこのように定義すると

$$\begin{aligned}f(g(x+h))-f(g(x))&=f(y+k)-f(y)=f'(y)k+o(k)=f'(y)(g(x+h)-g(x))+o(k)\\&=f'(y)(g'(x)h+o(h))+o(k)=f'(g(x))g'(x)h+o(h)+o(k)\end{aligned}$$

である．ここで $o(k)$ は k で割って $k\to 0$ とすると 0 に収束する量を表す．$o(h)/h\to 0$ $(h\to 0)$ は当然だが，$o(k)=h\cdot k/h\cdot o(k)/k$ と書き換えると，$o(k)$ は，h と，$h\to 0$ のとき $k/h\to g'(x)$（収束する）となる k/h と，$k\to 0$ のとき $\to 0$ となる $o(k)/k$ の積である．よって $h\to 0$ のとき $o(k)/h\to 0$ である．よって $(1/h)\{f(g(x+h))-f(g(x))\}\to f'(g(x))g'(x)$ である．この考え方には実は大きなメリットがある．この考え方は多変数関数の微分を定義するときに有効性を発揮するのである．

• 例. α を任意の実数とすると

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}\ ,\ \forall x>0\ .$$

（証明）$x^\alpha=e^{\alpha\log x}$ と書き換えて右辺に合成関数の微分法を適用すると

$$(x^\alpha)'=e^{\alpha\log x}(\alpha\log x)'=x^\alpha\alpha\frac{1}{x}=\alpha x^{\alpha-1}$$

である． $\square$

• 例．対数微分法

$$\{\log f(x)\}'=\frac{f'(x)}{f(x)}\ .$$

例えば関数 y が $y=\dfrac{(x+1)(x+2)^2}{(x+3)^3}$ で与えられるとき $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{3}{x+3}$.

• 課題：

1. 関数 $f(x)=\sqrt{x}$ の点 a $(a>0)$ での微分係数 $f'(a)$ を定義にしたがって求めよ．

2. $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ に商の微分公式を適用して，$\tan x$ の導関数を求めよ．

3. 教科書の問 5.1 と 6.1（今回は課題が教科書の §5 と §6 の二つの章にまたがるので注意）．