問題用紙

2024 年度 線形代数 II (イエーリッシュ) 中間試験 (11 月 28 日実施)

- 終了時間の前に退出を希望する場合は挙手で知らせること.
- 開始の合図があるまで開いてはいけない.

2024 年度 線形代数 II (イェーリッシュ) 中間試験 (11 月 28 日実施)

次の問 (1) ～ (7) に答えよ.(40 点満点).

(1) (3 点) 次の $\mathbb{R}^3$ のベクトル

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

は一次独立であることを示せ.

(2) (18 点) 次の線形写像 T について,(i) と (ii) を求めよ.

(i) $\mathrm{null}(T)$ と $\mathrm{Ker}(T)$ の 1 組の基底

(ii) $\mathrm{rank}(T)$ と $\mathrm{Im}(T)$ の 1 組の基底

(a)

$$T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$$

(b)

$$T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$$

(c)

$$T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$$

(3) (5 点) 線形写像

$$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\quad T(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

に対して,$\mathbb{R}^3$ の基底 $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}\right\}$ と $\mathbb{R}^2$ の基底 $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$ に関する表現行列 B を求めよ.

(4) (3 点) 線型写像

$$T:\mathbb{R}[x]_2\to\mathbb{R}[x]_2,\quad T(f(x))=2f'(x)+f(1)x^2-f(2)$$

に対して,$\mathbb{R}[x]_2$ の基底 $\{1,x,x^2\}$ に関する T の表現行列 A を求めよ.

(5) (4 点) 線形写像

$$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=ax+by,\quad S:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\quad S(u):=\begin{bmatrix}u\\2u\end{bmatrix}$$

に対して, 写像 $U:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を $U\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=S\left(T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)\right)$ で定義する.

(a) U は線形写像であることを示せ.

(b) U の標準基底に関する表現行列 A を求めよ.

(6) (3 点) 線形写像 $T:U\to V$ に対して,$\mathrm{Im}(T)$ は V の部分空間であることを示せ.

(7) (4 点) ベクトル空間 V の線形写像 $T:V\to V$ を考える. ベクトル $\boldsymbol{u}\in V$ が $T(T(\boldsymbol{u}))\neq\boldsymbol{0}$, $T(T(T(\boldsymbol{u})))=\boldsymbol{0}$ を満たすとき,$\boldsymbol{u}$,$T(\boldsymbol{u})$,$T(T(\boldsymbol{u}))$ は一次独立であることを示せ.