復習

$\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ は 1次独立

$\overset{\text{def.}}{\iff}$

$$\underbrace{c_1\vec{u}_1 + \cdots + c_n\vec{u}_n}_{\substack{\| \\ (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}}} = \vec{0} \implies c_1 = \cdots = c_n = 0.$$

記法

定理 4.2.2 $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ 1次独立, $\vec{u}, \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ 1次従属とする

このとき $\vec{u} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ を満たす $\vec{c}$ が存在する.

プレビュー

例 4.3.1

$(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ 1次独立である

$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ 1次独立ではない $\overset{4.2.2}{\Longrightarrow}$ $\vec{a}_3 = -\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2$

$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4)$ 1次独立である

$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4, \vec{a}_5)$ 1次独立ではない $\overset{4.2.2}{\Longrightarrow}$ $\vec{a}_5 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + \vec{a}_4$.

定理 4.3.2 $\Longrightarrow$ $r = 3$.

$\uparrow$

1次独立な最大個数 $\square$

rank との関係

$$A := \left[\vec{\alpha}_1 \cdots \vec{\alpha}_s \right]$$

B : A の簡約化

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ & 1 & 2 & 0 & -1 \\ & & & 1 & 1 \\ & O & & & \end{bmatrix}$$

定理 4.3.3 より,

$$r = \operatorname{rank} A = 3.$$

p 80 1.

(1)

$$A := [\vec{\alpha}_1\ \vec{\alpha}_2\ \vec{\alpha}_3\ \vec{\alpha}_4\ \vec{\alpha}_5] \in \mathbb{R}^4$$

B : A の簡約化

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 10 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 8 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{① \leftrightarrow ② \\ ② - 2\times ① \\ ③ - 4\times ② \\ ④ - 3\times ②}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

$\Rightarrow$ $r = \operatorname{rank} A = 3$ 　 $\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_4\}$ は1次独立

$$\vec{\alpha}_3 = 3\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2 \qquad \vec{\alpha}_5 = -\vec{\alpha}_1 + 2\vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_4$$