第 10 回講義：話題その 1. 累次積分（つづき）.（教科書 4.20）

例 5. $f(x,y)=x-y$, $D: 0\le y\le x\le 1$. $V=\iint_D f(x,y)dxdy$.

二通りの累次積分をやってみる.

先に x で積分（y 固定）してから y で積分する.

$$V=\int_0^1 dy\int_y^1(x-y)dx=\int_0^1 dy\left[\frac{x^2}{2}-yx\right]_{x=y}^{x=1}=\int_0^1 dy\left(\frac{1}{2}-y-\frac{y^2}{2}+y^2\right)=\left[\frac{1}{2}y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}\right]_0^1=\frac{1}{6}.$$

先に y で積分（x 固定）してから x で積分する.

$$V=\int_0^1 dx\int_0^x(x-y)dy=\int_0^1 dx\left[xy-\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x}=\int_0^1\frac{x^2}{2}dx=\left[\frac{x^3}{6}\right]_0^1=\frac{1}{6}.$$

例 6. $f(x,y)=1-x^2-y^2$, $D: x^2+y^2\le 1$ のとき $V=\iint_D f(x,y)dxdy$.

累次積分と，$z=$ 一定の平面による切り口の面積を積分するという，二通りの方法で計算して結果を較べる.

やり方その一：累次積分（$x=$ 一定，または $y=$ 一定という平面で切った切り口の面積を積分する）：
$V=4\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(1-x^2-y^2)dy=4\int_0^1 dx\left[y-x^2y-\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}}=\frac{8}{3}\int_0^1 dx(1-x^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta$ の計算に帰着する．この積分をひとつだけ考えると難しいが，$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta d\theta$ の漸化式を求めて計算すると楽である．漸化式は（部分積分より）

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}\quad \left(I_0=\frac{\pi}{2}\ ,\ I_1=1\right)$$

だから $I_4=\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{16}$ である．よって $V=\frac{8}{3}\frac{3\pi}{16}=\frac{\pi}{2}$ である.

やり方その二：これは，前回の講義で説明した地形図から山の体積を求める計算にあたる．求めたいものは，$0<z<1-x^2-y^2$ で定義される立体（山）の体積である．この立体を $z=$ 一定という平面で切った切り口の面積を積分する．立体 $0\le z\le 1-x^2-y^2$ を z 一定の平面で切断したときの切り口は，立体の式を $x^2+y^2<1-z$ と書くことにより，z 一定の切り口は半径 $\sqrt{1-z}$ の円だから，この立体の体積（求める積分）は $V=\pi\int_0^1(1-z)dz=\frac{\pi}{2}$ である．この例ではこちらの方がはるかに計算が楽である.

この例が意味することは，重積分の計算には累次積分の他にも計算方法があり（2 重積分は体積を求めることだから），累次積分よりも計算が楽な場合がある，ということである.

例 7. $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$, $D: 0\le y\le x\le 1$.

これは，累次積分の順序が重要な例である.

先に y で積分する．$\int_0^x\frac{dy}{\sqrt{1+x^4}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^4}}$ だから $V=\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}}$ となる．$x^2=y$ とおくと $V=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}$ となる．$\sqrt{1+y^2}=t-y$ とおくと $y=\frac{t}{2}-\frac{1}{2t}$, $\sqrt{1+y^2}=\frac{t}{2}+\frac{1}{2t}=\frac{1+t^2}{2t}$, $dy=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2t}\right)dt=\frac{1+t^2}{2t^2}dt$ だから $V=\frac{1}{2}\int_1^{1+\sqrt{2}}\frac{2t}{1+t^2}\frac{1+t^2}{2t^2}dt=\frac{1}{2}\int_1^{1+\sqrt{2}}\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2})$ である．先に x で積分すると計算が先に進まない（もちろん理論的に答は存在するのだが初等関数で表現できないのである）.

第 10 回講義. 話題その 2. 重積分の厳密な定義の直観的説明（教科書 4.21）：

● 前提：$D\subset\mathbb{R}^2$ は有界閉集合（領域とその境界の合併集合）とし，$f(x,y)$ はその上の連続関数（領域とその境界の合併集合の上の連続関数）とする.

● 重積分の重積分の厳密な定義は，1 変数の積分の定義における区間を，平面領域に変えた形に拡張したものである．重積分も，1 変数の積分と同様に，積分の原理その 1,2 に基づいて定義される点が本質である.

（アイディア）(I) 上方和と下方和の概念．まず，積分領域 D をすっぽり含むように長方形 $R=[a,b]\times[c,d]$ とる．f を D の外側で 0 と拡張する．$[a,b]$, $[c,d]$ の分割 $a=x_0<x_1<x_2\cdots<x_m=b$, $c=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_n=d$ をとって，R を mn 個の小長方形 $\Delta_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$ $(i=1,2,\dots,m,\ j=1,2,\dots,n)$ に分割し，この分割を Δ と表す．各小長方形 Δ_{ij} ごとに $f(x,y)$ の代表値 $f(\xi_i,\eta_j)$ をとり，代表値と小長方形の面積の積 $f(\xi_i,\eta_j)|\Delta_{ij}|$ を考え，それらの Riemann 和 $\displaystyle\sum_{1\le i\le m,1\le j\le n} f(\xi_i,\eta_j)|\Delta_{ij}|$ をつくる（$|\Delta_{ij}|$ は Δ_{ij} の面積を表す）．Δ_{ij} の上で $m_{ij}\le f\le M_{ij}$ となる**ぎりぎり**の m_{ij}, M_{ij} をとって $S_\Delta=\sum_{1\le i\le m,1\le j\le n}M_{ij}|\Delta_{ij}|$, $s_\Delta=\sum_{1\le i\le m,1\le j\le n}m_{ij}|\Delta_{ij}|$ とおく．するともちろん $s_\Delta\le S_\Delta$ である．このような R の分割を二つとって Δ, Δ' とし二つを重ねた分割を Δ'' とすると $s_\Delta\le s_{\Delta''}\le S_{\Delta''}\le S_\Delta$, $s_{\Delta'}\le s_{\Delta''}\le S_{\Delta''}\le S_{\Delta'}$ が成り立つ．とくに，任意の二つの分割に対し $s_{\Delta'}\le S_\Delta$ である．つまり，色々な分割をとって S_Δ の値の集合と s_Δ の値の集合を数直線上で比べると，これら二つの集合は（境界が接していることも含めて）重なりのない塊として存在し，前者は後者の右側にある．分割をどんどん細かくしていくと S_Δ は単調減少（左に移動）し，s_Δ は単調増加（右に移動）して，それぞれ**上方和**，**下方和**に収束する．これら二つの極限値が等しい（二つの集合が境界で接する）とき，f は D 上で**積分可能**であるといい，この極限値を $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ で表す.

(II) 面積確定集合の概念. 分割を限りなく細かくしていくと，被積分関数 $f(x,y)$ が D 上で連続で積分領域が**面積確定集合**（すなわち，分割を限りなく細かくしていくとき，小長方形のうち積分領域の境界と交わるものの面積の総和が零に収束する）ならば，上方和と下方和の差は零で，Riemann 和 $\displaystyle\sum_{i,j=1}^n f(\xi_i,\eta_j)|\Delta_{ij}|$ は同一の極限すなわち積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ に収束する．以上の議論では積分の二つの原理「区間の分割に関する加法性」「上限下限性質」だけが使われている．積分領域が面積確定であることを仮定する理由：境界に接する小長方形上では関数 f は領域の外側で 0 である．従って分割を細かくしていっても（一般に）$M_{ij}-m_{ij}$ は 0 に近づかない．しかし D における $|f|$ の最大値 M を超えることはない．もし面積確定なら分割を限りなく細かくしていくと，境界に接する小正方形の面積の総和 A_Δ は（このような小正方形の個数は無限に多くなるが）限りなく小さくなる．従って，分割を限りなく細かくしていくと，境界に接する小正方形に対する和（Σ' で表す）$\sum'(M_{ij}-m_{ij})|\Delta_{ij}|\le MA_\Delta\to 0$ である．このように，面積確定なら，f の外側で 0 拡張した時に発生する不連続性が積分可能性の障害とはならないことがわかる.

- （定理）D を $\mathbb{R}^2$ の面積確定な有界閉集合，$f:D\to\mathbb{R}$ を D で連続な関数とする．このとき f は D 上で積分可能である．すなわち，上方和と下方和が一致する．その値が f の D 上の積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ である.

積分可能であるためには，積分される関数と積分領域がともにいいものであるという仮定をしなければならないことに注意する.

なお，積分領域を分割するには水平線と垂直線によるものだけに限る必要はない．詳しい議論は省略するが，積分領域が面積確定集合ならば，分割したときに部分領域の直径の最大値が零になるような分割の極限はいつでも積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ に収束することが，被積分関数の連続性と積分の原理「区間の分割に関する加法性」「上限下限性質」から示される．□

- 区分求積法．二重積分の定義から従う極限式

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i,j=1}^n f\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\right)\frac{1}{n^2}=\iint_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)dxdy$$

を利用する極限計算を区分求積法と呼ぶ.

たとえば $V=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{1}{(n+i+j)^2}$ という極限を二重積分に帰着させて計算できる．ポイントは $1/n^2$ を前（後？）に出して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i,j=1}^n f(i/n,j/n)\frac{1}{n^2}$ の形に書き換えることである.

$D = [0,1] \times [0,1]$ とする．

$$\begin{aligned}
V &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{(1+\frac{i}{n}+\frac{j}{n})^2} \\
&= \iint_D \frac{dxdy}{(1+x+y)^2} \\
&= \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dx}{(1+x+y)^2} \\
&= \int_0^1 dy \left[-\frac{1}{1+x+y} \right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \int_0^1 dy \left(\frac{1}{1+y} - \frac{1}{2+y} \right) \\
&= \left[\log \frac{1+y}{2+y} \right]_0^1 \\
&= \log \frac{2}{3} - \log \frac{1}{2} \\
&= \log \frac{4}{3} \ .
\end{aligned}$$

- **課題 1.** 積分領域を図示して 2 重積分の値を求めよ：

(1) $\displaystyle\iint_D (x^4 - 2y) dxdy,\ D = \{(x,y) \mid -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2\}.$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{3y}^3 \frac{dx}{(1+x^2)^3} \right) dy.$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 e^{\frac{y}{x}} dx \right) dy.$

ヒント：領域が定義されていなくても重積分の形から積分領域は分かる．計算に必要なら積分順序を交換せよ（例 7 参照）．

- **課題 2.** 何らかの関数の 2 重積分に帰着させることによって次の極限を求めよ（区分求積法）．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(n+i+j)^2}.$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (i+j).$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n(n+i+j)}.$