第 14 回講義：重積分の広義積分の応用 – ガンマ関数とベータ関数.

• ガンマ関数の定義：$s>0$ のとき

$$\Gamma(s):=\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$$

と定義する．これは収束して s の関数になる．ガンマ関数は階乗関数を連続変数に拡張したものことを後で確認する.

　ガンマ関数の定義がうまくいっていることを確認する．そのために積分を

$$\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx+\int_1^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$$

と分解する．記憶しておくべき広義積分の収束判定

$$\int_0^1 x^a dx \text{ が収束する} \quad \Leftrightarrow \quad a>-1$$

により第一の積分は収束する．非常に重要なので復習しよう．$0<\varepsilon<1$ なら $\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^a}=[\frac{1}{1-a}x^{1-a}]_\varepsilon^1=\frac{1}{1-a}(1-\varepsilon^{1-a})$ である．$\varepsilon\to 0+$ の時，これが収束するための必要十分条件は $1-a>0$ すなわち $a<1$ である．$a<1$ の時の収束先は $\frac{1}{1-a}$ である.

　次に，記憶しておくべき重要な極限公式

$$\lim_{x\to\infty} x^k e^{-x}=0 \quad \forall k\in\mathbb{R}$$

を思い出す．これも非常に重要なので復習しよう．この極限公式の証明はいくつもあるが e^x の定義を使って証明してみる．$a=k$（正の整数）の時を考える．$x>0$ なら $e^x=1+x+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots>\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$ である．よって $0<\frac{x^k}{e^x}<\frac{x^k}{\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}}=\frac{(k+1)!}{x}\to 0\ (x\to\infty)$ である．よって挟み撃ち原理より $\lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{e^x}=0$ である．この極限公式において $x^{s-1}e^{-x}=(x^{s-1}e^{-x/2})e^{-x/2}$ と書き換えて $x^{s-1}e^{-x/2}$ に極限公式を適用すると $\lim_{x\to\infty}x^{s-1}e^{-x/2}=0$ だから，$m(s)$ でもって $x>0$ における $x^{s-1}e^{-x/2}$ の最大値を表せば，$\forall x>0$ に対し $x^{s-1}e^{-x}\le m(s)e^{-x/2}$ が成り立つことがわかる．そして $e^{-x/2}$ は 0 から ∞ まで積分して有限

$$\int_1^\infty e^{-x/2}dx=[-2e^{-x/2}]_1^\infty=2e^{-1/2}<\infty$$

だから，第二の積分も収束する．こうして，ガンマ関数が well-defined であることが示された.

• ベータ関数の定義：$p>0,\ q>0$ のとき

$$B(p,q):=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

と定義する．これは収束して p,q の関数になる．ベータ関数は二項係数（の逆数）を連続変数に拡張したものであることを後で確認する.

　ベータ関数の定義がうまくいっていることは

$$\int_0^1 x^a dx \text{ が収束する} \quad \Leftrightarrow \quad a>-1$$

から明らかである.

• 応用：Stirling の公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n}=1$$

と合わせて使って大規模組み合わせ計算に役立てる.

● ガンマ関数とベータ関数の基本性質.

(1) $s>0$ のとき $\Gamma(s+1)=s\,\Gamma(s)$ とくに $\Gamma(n+1)=n!$.

(2) $\Gamma(1)=1$.

(3) $B(p,q)=B(q,p)$.

(4) $p>0$, $q>0$ のとき

$$B(p+1,q)=\frac{p}{p+q}B(p,q)\ ,\quad B(p,q+1)=\frac{q}{p+q}B(p,q)\ .$$

(5) $B(1,1)=1$, $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\pi$.

(6) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

(7) $B(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

(6) は，Gauss 積分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$ と同じことを言っている.（理由）$t=x^2$ $(x>0)$ とおいて置換積分すると $dt=2xdx=2\sqrt{t}dx$ だから

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\infty} x^{-1}e^{-x^2}2xdx=2\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}\ .$$

● (1)-(3) の証明. (1) 部分積分.

$$\Gamma(s+1)=\int_0^{\infty} x^s e^{-x}dx=[-x^s e^{-x}]_0^{\infty}+s\int_0^{\infty} x^{s-1}e^{-x}dx=s\,\Gamma(s)\ .$$

特に $s=n$（n は正の整数）なら

$$\Gamma(n+1)=\int_0^{\infty} x^n e^{-x}dx=\int_0^{\infty} x^n(-e^{-x})'d=[-x^n e^{-x}]_0^{\infty}+n\int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}dx=n\,\Gamma(n)=n(n-1)\,\Gamma(n-2)=\dots\ .$$

よって $\Gamma(n+1)=n!\,\Gamma(1)$ である.

(2) 部分積分.

$$\Gamma(1)=\int_0^1 e^{-x}dx=[-e^{-x}]_0^{\infty}=1\ .$$

よって n が正の整数なら

$$\Gamma(n+1)=n!$$

である.

(3) $1-x=y$ とおくと

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{P-1}(1-x)^{q-1}dx=\int_0^1 (1-y)^{p-1}y^{q-1}dy=B(q,p)\ .$$

● (4) の証明.

$$\begin{aligned}B(p+1,q)&=\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}dx=\left[-\frac{1}{q}x^p(1-x)^q\right]_0^1+\frac{1}{q}\int_0^1 px^{p-1}(1-x)^q dx\\&=\frac{p}{q}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q dx=\frac{p}{q}\,B(p,q+1)\ ,\end{aligned}$$

$$B(p,q+1)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}(1-x)dx=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx-\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}dx=B(p,q)-B(p+1,q)\ .$$

よって
$$B(p+1,q)=\frac{p}{q}\{B(p,q)-B(p+1,q)\}\ .$$
これから (4) が従う．

- (5) の証明．ベータ関数の別表示
$$B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta d\theta$$
を導き，$p=q=\frac{1}{2}$ とおくことにより
$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\pi\ .$$
上に書いたベータ関数の別表示は，ベータ関数の定義で $x=\sin^2\theta$ とおいて置換積分することによって導かれる．実際 $x=\sin^2\theta$ とおくと積分区間 $x\in[0,1]$ は $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$ に対応する．そして，$x=\sin^2\theta$, $1-x=\cos^2\theta$, $dx=2\sin\theta\cos\theta$ をベータ関数の定義式に代入することによって上記のベータ関数の別表示を得る．

- (7) $\Rightarrow$ (6) の証明．(7) より
$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2&=B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\\&=\pi\quad[\,(5)\text{ and }(2)\,]\end{aligned}$$
だから
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\ .$$

- (7) の証明.
$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q)&=\left(\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx\right)\left(\int_0^\infty y^{q-1}e^{-y}dy\right)\\&=\int_0^\infty\int_0^\infty x^{p-1}y^{q-1}e^{-(x+y)}dxdy\end{aligned}$$
である．線分 $x+y=z$ を $t:(1-t)$ に内分する点 $P(t,z)$ を表すパラメータ t（極座標における角度 θ の類似）と，原点を出発して $P(z,t)$ を通る半直線のパラメータ $z\geq 0$（極座標における原点からの距離 r の類似）でもって第一象限のすべての点を一意的に表すことができる．これは，変数変換
$$\begin{aligned}x&=z(1-t)\\y&=zt\end{aligned}$$
を考えることである．この変数変換により第一象限 $D:(0,\infty)\times(0,\infty)$ と $E:z>0,0<t<1$ が対応する．
$$J(z,t)=\det\begin{pmatrix}x_z&y_z\\x_t&y_t\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1-t&t\\-z&z\end{pmatrix}=z$$
だから $|J|=z$ で
$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q)&=\iint_E\{z(1-t)\}^{p-1}(zt)^{q-1}e^{-z}zdzdt\\&=\int_0^1\left(\int_0^\infty z^{p+q-1}e^{-z}(1-t)^{p-1}t^{q-1}dz\right)dt\\&=\left(\int_0^\infty z^{p+q-1}e^{-z}dz\right)\left(\int_0^1(1-t)^{p-1}t^{q-1}dt\right)\\&=\Gamma(p+q)B(p,q)\ .\end{aligned}$$

このように，同じ積分を異なる方法で累次積分する（xy 平面上の累次積分と uv 平面上の累次積分を考える）ことによって，重要な公式 (7) を示すことができた.

● 計算例.

例 1. ガンマ関数の性質 (1) と (2) から n が正の整数のとき

$$\Gamma(n+1) = n!\ .$$

ガンマ関数の性質 (1) と (6) から n が正の整数のとき

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\ .$$

例 2. $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta d\theta$ の計算.

方法 0. 漸化式 $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ を使う． $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta d\theta.$

方法 1. $B(p,q) = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta d\theta$ を用いてベータ関数の積分に書き換える．次に (7) を使う.

$$I = \frac{1}{2}B\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{1}{2}\frac{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{2!} = \frac{3}{16}\pi\ .$$

方法 2. ベータ関数の積分に書き換えるところまでは同じ．あとは性質 (4) を繰り返し使い，最後に (5) を使う.

$$I = \frac{1}{2}B\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{16}\pi\ .$$

例 3. $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\cos^4\theta d\theta$ の計算.

$$I = \frac{1}{2}B\left(2,\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(2)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(2+\frac{5}{2}\right)} = \frac{1}{2}\frac{1\cdot\left(\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)}{\frac{7}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{2}{35}\ .$$

または

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}B\left(2,\frac{5}{2}\right) &= \frac{1}{2}B\left(2,\frac{3}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\frac{\frac{3}{2}}{2+\frac{3}{2}}B\left(2,\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{3}{7}B\left(2,\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\frac{3}{7}\frac{\frac{1}{2}}{2+\frac{1}{2}}B\left(2,\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\frac{3}{7}\frac{1}{5}\frac{1}{1+\frac{1}{2}}B\left(1,\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{3}{7}\frac{1}{5}\frac{2}{3}\cdot 2 = \frac{2}{35}\ .\end{aligned}$$

ここで

$$B\left(1,\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 (1-x)^{-\frac{1}{2}}dx = [-2(1-x)^{\frac{1}{2}}]_0^1 = 2$$

を用いた.

例 4. $B(\frac{1}{3},\frac{2}{3}) = \displaystyle\int_0^1 x^{-\frac{3}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx$ はたまたま初等関数の範囲におさまる（第三回の例 2 を見よ）．このような計算を組織的にやる**反転公式**と呼ばれる公式がある：

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin\pi x}\ .$$

これを使うと

$$B\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{\Gamma(1/3)\Gamma(2/3)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin(\pi/3)} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

教科書の例題 12.10 との整合性を各自で確認してほしい．反転公式の証明は難しい．まず

$$\int_0^\infty \frac{v^{\alpha-1}}{1+v} dv = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$

という公式を準備する．この公式は複素関数論で学習する留数計算を使うと容易に証明できるが，ここでは範囲外なので省略して認めることにする．次に，$0 < s < 1$ に対し

$$\Gamma(1-s) = \int_0^\infty e^{-u} u^{-s} du = t \int_0^\infty e^{-vt} (vt)^{-s} dv$$

と書き換える（$t > 0$ に対し変数変換 $vt = u$ を用いた）．以上の準備のもと，

$$\begin{aligned}
\Gamma(1-s)\Gamma(s) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} \Gamma(1-s) dt \\
&= \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} \left(t \int_0^\infty e^{-vt} (vt)^{-s} dv \right) dt \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t(1+v)} v^{-s} dv dt \\
&= \int_0^\infty \frac{v^{-s}}{1+v} dv \\
&= \frac{\pi}{\sin \pi(1-s)} \\
&= \frac{\pi}{\sin \pi s}
\end{aligned}$$

となって反転公式が導かれる．

- **課題 1.** 教科書の問 13.3．この問題はガンマ関数とベータ関数を含む（かも知れない）積分計算である．
- **課題 2.** 積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 dx$ を求めよ．

ヒント：まず $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x dx$ の値を，これと $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$ の関係を調べることによって計算せよ．この時，区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ における $y = \sin x$ と $y = \cos x$ のグラフの位置関係に注目するといい．次に $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x dx$ を求めよ．この二本の等式から $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x dx$ を求めよ．

別のやり方：$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$ を使って，$\sin^4 x$ を $(\sin^2 x)^2$ と思って，$\cos(2x)$ の二次式に書き換える．