第 1 回講義：数列と極限について（教科書 1.1）.

• (実数を考える意義)　四則演算ができるというだけなら有理数で十分である．実数を考える理由は四則演算に加えて極限をとることに関して閉じた数の体系が欲しいからである．

•（定義）$\mathbb{R}$ で実数全体のなす集合を表し，実数を直線上の点と思う．このように思うとき，この直線を**数直線**とよぶ．$a+bi$ の形の**複素数**は実数の組 (a,b) と同一視できるので複素数は平面の点と思える．このように思うとき，この平面を**複素平面**と呼ぶ．本講義の主役は実数であり複素数は補助的にしか登場しない [1].

$\mathbb{R}$ の部分集合 A が**有界**であるとは，$A \subset (a,b)$ となる実数 a,b が在ること，すなわち A が長さ有限の区間にすっぽり入ってしまうことを意味する．

バリエーションその一：$\mathbb{R}$ の部分集合 A が**上に有界**であるとは，$A \subset (-\infty,b)$ となる実数 b が在ることを意味する．

バリエーションその二：$\mathbb{R}$ の部分集合 A が**下に有界**であるとは，$A \subset (a,\infty)$ となる実数 a が在ることを意味する．

•（定義）数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ に**収束**するとは，

「どんな小さい $\varepsilon > 0$ に対しても，それに応じて十分大きい $N \in \mathbb{R}$ をとると $n > N$ であるすべての n に対し $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ になること」

を意味する．これを論理式で書くと

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N)\ (\forall n > N)\ (|a_n - \alpha| < \varepsilon)$$

となる．もとの「心」のこもった文（日本語だけが特別というわけではないが）を論理記号で書くと「心」がどこへ行ったか見えなくなる感じがするかも知れない．私が思うに,「心」の痕跡は $\forall$ とか $\exists$ にある．論理記号は慣れると便利な記法だが，最初のうちは日本語でちゃんと書くべきだと思う．高校で習う「n が大きくなるとき a_n が限りなく α に近づく」ということを数学的に表現すると，こうなる.「差が無限に小さくなる」ことを「意味の明確な有限の言葉で置き換えている」（こういうことを記述する言語がないと「限りなく近づく」という大雑把 [2] な言い方しかできないが，こういう置き換えをすると「限りなく近づく」としか言いようのない現象が複数同時に出現する文脈に遭遇しても複数の異なる近づき方を区別しながら的確な対応ができるようになる）[3] ことがポイントである．

このとき

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

と書く．

•（定義）いかなる実数 α にも収束しない数列は**発散**すると言う．これを論理式で書くと

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall N)(\exists n > N)(|a_n - \alpha| > \delta)$$

となる．この論理式を（心を込めて）日本語で表現するとどうなるかを，各自でやってみてほしい（論理の練習）．

•（定義）数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が**無限大に発散する** [4] とは，

「どんな大きい実数 K に対しても，それに応じて十分大きい $N \in \mathbb{R}$ をとると $n > N$ であるすべての n に対し $a_n > K$ になること」

---

[1] 複素数を自習しておくと将来絶対に役立つ．工業数学では知っていることにされる可能性すらある．

[2] 「大雑把」は悪いことではない.「大雑把」でないとわからないこともある．

[3] こういうロジックは何度も使って慣れないと難しいと思う．本講義のような入門レベルでこのロジックを本質的に使わなければならない場面は積分を定義するときだけである．講義ではこのロジックなしでも理解可能な基本定理の一群を証明するのに使って，このロジックの雰囲気を紹介するにとどめる．興味がある人は（本講義で積分を導入したところで）教科書の付録 §7,§8 を読んでみてほしい．質問歓迎．

[4] 無限大に発散すればもちろん発散するが，発散するからと言って無限大に発散するとは限らない．例えば $a_n = (-1)^n$ のように．

を意味する．論理式では

$$(\forall K)(\exists N)(\forall n > N)(a_n > K)$$

となる．n が大きくなるとき a_n が限りなく大きくなるということを数学的に表現すると，こうなる.「無限に大きくなることを有限の言葉で置き換えている」ことがポイントである．

このとき

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

と書く．

• （定義再録）いかなる実数 α にも収束しない数列は**発散**すると言う．

• （例）数列 $a_n = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \dots)$ は 0 に収束する．

• （例）数列 $a_n = (-1)^n$ は発散する．

• （例）数列 $a_n = n$ は発散する（アルキメデスの公理）．

• **（実数についての基本定理または公理）**

上に有界な単調増加数列は（ある収束先 α が在って，そこに）収束する．

• （系）

下に有界な単調減少数列は（ある収束先 α が在って，そこに）収束する．

本講義では上の「基本定理または公理」の上に微積分学を組み立てる（他の方法もあるが，出来上がる微積分学は全て同じである）．

• （疑問）単調でない数列に対しては収束する先があるかどうかわからない．このような設定でも収束を論じられるのか？

• （答）収束先がわからない数列の収束を論じる**コーシーの収束条件**というものがある．数列 $\{a_n\}$ が**コーシー列**であるとは，どんなに小さい $\varepsilon > 0$ をとっても十分大きい N をとれば $\{a_n\}_{n>N}$ は長さ ε の区間に含まれてしまう，つまり $n, m > N$ ならば $|a_n - a_m| < \varepsilon$ になっていることを意味する．コーシーの収束条件とは

「コーシー列は収束する」

という実数の集合 $\mathbb{R}$ に対して成り立つ「定理または公理」である．Cf. 教科書の付録 §4. これとアルキメデスの公理を合わせたものから微積分学を組み立てることも可能である．

• （定理）極限は（分母が 0 の割り算を除いて）4 則演算で保たれる．この定理の意味：数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ と数列 $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ はともに収束する，すなわち

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha\ , \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$$

だとする．このとき

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta \quad \text{（複合同順）},\\
&\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta\ ,\\
&\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{（ただし } \beta \neq 0 \text{ と仮定する）}.
\end{aligned}$$

この定理の証明は，**測定値にもともとあった誤差が測定値に 4 則演算を施したらどうなるか**を追求することである．これは非常に重要なので定理を証明するべきだろうが，どの場合も同様なので，ここでは**積の極限は極限の積**，すなわち

「$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ なら $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$」

だけを証明する．$|\beta|$ より大きい数 M を 1 つとって固定する．仮定から，どんな小さい $\varepsilon > 0$ をとっても，$n \geq N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$, $|b_n - \beta| < \varepsilon$, $|b_n| < M$ が成り立つような数 N をとることができる．このような N をとれば，$n > N$ である任意の n に対して

$$\begin{aligned}
&|a_n b_n - \alpha\beta| \\
&= |(a_n - \alpha)b_n + (b_n - \beta)\alpha| \\
&\leq |a_n - \alpha||b_n| + |b_n - \beta||\alpha| \\
&< \varepsilon M + \varepsilon|\alpha| \\
&= \varepsilon(M + |\alpha|)
\end{aligned}$$

となる．$\varepsilon > 0$ は任意だったから，$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$ である．

- （四則演算と極限の交換を用いた極限の計算例）

(1)
$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - n + 1}{n^2 + n + 1} \quad [\, \frac{\infty}{\infty} \text{ の不定形}] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \quad [\, \text{分母分子を } n^2 \text{ で割る}\,] \\
&= 1\ .
\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2 + n} - n) \quad [\, \infty - \infty \text{ の不定形}] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2 + n} - n)(\sqrt{n^2 + n} + n)}{\sqrt{n^2 + n} + n} \quad [\, \text{分母分子に } \sqrt{n^2 + n} + n \text{ を掛ける}\,] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \quad [\, \text{分母分子を } n \text{ で割る}\,] \\
&= \frac{1}{2}\ .
\end{aligned}$$

以下に述べる基本定理を頻繁に使う：

- **（極限における不等式の保存）**等号つき不等式は極限をとることで保存する．つまり，極限をとる前に成り立っている等号つき不等式は極限をとっても成り立つ．等号なしの不等式は，極限をとることで等号つき不等式として保存する．例えば $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, $b_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ のとき常に $a_n > b_n$ であり，極限では $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 1$ である．

背理法による証明：$a_n \geq b_n$ $(\forall n)$ なのに $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha < \beta = \lim_{n\to\infty} b_n$ とする．$\varepsilon = \frac{\beta - \alpha}{2}$ とおくと $\alpha + \varepsilon = \beta - \varepsilon$ である．$n \to \infty$ のとき $a_n \to \alpha$, $b_n \to \beta$ だから，$n > K$ なら $|a_n - \alpha| < \varepsilon$, $n > L$ なら $|b_n - \beta| < \varepsilon$ となる K, L をとれる．$M = \max\{K, L\}$ とおくと $n > M$ なら $|a_n - \alpha| < \varepsilon$, $|b_n - \beta| < \varepsilon$ が両方とも成り立つ．すると $a_n < \alpha + \varepsilon = \beta - \varepsilon < b_n$ となって矛盾． $\square$

極限における不等式の保存から，次の非常に重要な「はさみうちの原理」がしたがう：

- **（はさみうちの原理）**．
  $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ で，十分大きいすべての n に対して $a_n \leq c_n \leq b_n$ が成り立てば，$\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ である．

以下は，はさみうち原理の応用例で，非常に重要である：

- **（指数増大度はいかなる多項式増大度にも勝る）**$\delta > 0$ で k が任意の非負（0 以上の）整数のとき

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{(1 + \delta)^n} = 0$$

である．例えば：(i) $k=0, \delta>0$ なら $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\delta)^n}=0$ である．これは $0<c<1$ なら $\lim_{n\to\infty}c^n=0$, $1<c$ なら $\lim_{n\to\infty}c^n=\infty$ と同値である．

(ii) $k=2, \delta=1$ なら $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}=0$ である．

(a) 2 項定理を使う証明．$k<n$ とする．2 項定理により

$$(1+\delta)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\delta^i\geq\binom{n}{k+1}\delta^{k+1}\quad[\,1,2,\ldots,n \text{ の中に } k+1 \text{ がある}\,]$$

だから

$$\begin{aligned}
&0<\frac{n^k}{(1+\delta)^n}\\
&\leq\frac{n^k(k+1)!}{n(n-1)\cdots(n-k)}\delta^{-(k+1)}\quad[\,\text{分母を } \binom{n}{k+1}\delta^{k+1} \text{ で置き換える}\,]\\
&=\frac{(k+1)!}{n(1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{k}{n})}\delta^{-(k+1)}\quad[\,\text{分母分子を } n^k \text{ で割ると分母に } n \text{ が余る}\,]\\
&\to 0\ (n\to\infty)
\end{aligned}$$

である．はさみうち原理から結論を得る．

(b) 等比数列との比較による証明．$a_n=\dfrac{n^k}{(1+\delta)^n}$ とおくと

$$\begin{aligned}
&\frac{a_n}{a_{n-1}}\\
&=\frac{n^k}{(1+\delta)^n}\frac{(1+\delta)^{n-1}}{(n-1)^k}\\
&=\frac{1}{1+\delta}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^k\quad[\,n^k=(n-1+1)^k,\ \text{分母分子を } (n-1)^k \text{ で割る}\,]
\end{aligned}$$

である．

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^k=1$$

だから n がある定数 N より大きいとき

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^k<1+\delta/2$$

である．よって n が N より大きいとき

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}<\frac{1+\delta/2}{1+\delta}=:c<1$$

である．数列の極限では大きい n に対する a_n だけが問題になるから，a_N が初項だと思って

$$a_N,\ a_{N+1},\ a_{N+2},\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

と

$$a_N,\ a_Nc,\ a_Nc^2,\ \ldots,\ a_Nc^{n-N},\ \ldots$$

という等比数列を比較することによって，a_n は等比数列 $a_N c^{n-N} = (a_N c^{-N})c^n$ $(0 < c < 1)$ より小さいと考えてよい．すると，$a_N c^{n-N} = (a_N c^{-N})c^n$ において $a_N c^{-N}$ は n に依存しない定数であって $0 < c < 1$ だから $c^n \to 0$ であるゆえ，

$$0 < a_n \leq a_N c^{n-N} = (a_N c^{-N})c^n \to 0 \quad (n \to \infty)$$

である．はさみうち原理から結論を得る． □

- （例題）$a > 0$ を定数とする．このとき $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ を示せ．

（解答）$a > 1$ のとき．$\sqrt[n]{a} > 1$ だから $\sqrt[n]{a} = 1 + h_n$ $(h_n > 0)$ とおける．両辺を n 乗すると $a = (1+h_n)^n$ $(0 < h_n)$ となる．右辺に 2 項定理を適用すると

$$a = (1+h_n)^n = 1 + nh_n + \binom{n}{2} h_n^2 + \cdots \geq nh_n$$

を得る．したがって

$$0 < h_n < \frac{a}{n}$$

という不等式が成り立つ．ここで $n \to \infty$ とすると，はさみうち原理により $h_n \to 0$ である．したがって $\sqrt[n]{a} \to 1$ $(n \to \infty)$ である．$0 < a < 1$ のときは a の代わりに $1/a$ を考えて同様に議論すればいい． □

- （課題）

1. 数列が発散する（如何なる実数にも収束しない）ことを日本語で定義せよ．

2. $\lim_{n\to\infty}(a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1} + c\sqrt{n+2}) = 0$ が成り立つような実定数 a, b, c をすべて求めよ．

ヒント：$\sqrt{n}$ を外に出して

$$a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1} + c\sqrt{n+2} = \sqrt{n}\left(a + b\sqrt{\frac{n+1}{n}} + c\sqrt{\frac{n+2}{n}}\right)$$

と変形してみる．すると $\lim_{n\to\infty}(a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1} + c\sqrt{n+2}) = 0$ が成り立つためには，$n \to \infty$ のとき $a + b\sqrt{\frac{n+1}{n}} + c\sqrt{\frac{n+2}{n}} \to 0$ でなければならないことがわかる．ここから a, b, c が満たすべき必要条件を見つける．次に，見つけた必要条件を満たす a, b, c に対し，十分であるかどうか，つまり，問題の極限が 0 になるかどうかをチェックする．

3. 教科書の問 1.1, 1.2, 1.3.