力学II（後半：原田担当分）

第10回

今回の内容

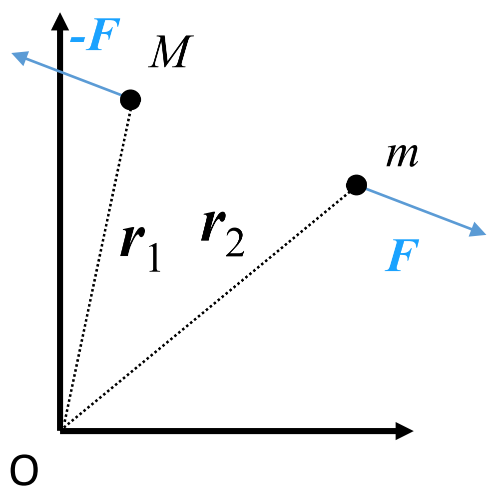
二体問題（pp.99-104）

・中心力による運動
・二体問題における角運動量保存則
・面積速度一定の法則
・極座標による表現
（力学的エネルギー保存則）
→次回へ

二体問題

：２個の質点から成る系の力学

質点Mのまわりの質点mの運動を考える。それぞれの位置ベクトルを$\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$とし、質点$M$から見た質点$m$の位置ベクトルを$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$とする。質点$m$が、質点$M$から受ける力は中心力であり、$\boldsymbol{F} = f(r)\boldsymbol{r}$とする。



$$\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}$$
$$\boldsymbol{F} = f(r)\boldsymbol{r}$$

２質点の運動方程式は、

$$M\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = -\boldsymbol{F}, \qquad m\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = \boldsymbol{F}$$

である。
二式を足してFを消去すると、

$$M\ddot{\boldsymbol{r}}_1 + m\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = \boldsymbol{0}$$

となり、重心は等速運動をする。

質点Mから見た質点mの位置ベクトルを$\boldsymbol{r}$で考えると、
２質点の運動方程式から

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} + \frac{\boldsymbol{F}}{M} \Leftrightarrow \left(\frac{Mm}{M+m}\right)\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F} \Leftrightarrow \mu\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}$$

となる。
すなわち、二体問題は換算質量を介して、一個の質点の運動と同じように取り扱うことができる。

ここで、$M>>m$の場合を考え、質点Mが原点Oにある場合を考える。質点mにはたらく力は中心力であり、力は２質点を結ぶ直線に沿って働き、その大きさが距離rだけで決まる。
$\boldsymbol{F} = f(r)\boldsymbol{r}$を代入して、

$$\mu\ddot{\boldsymbol{r}} = f(r)\boldsymbol{r}$$

両辺に$\boldsymbol{r}$を外積でかけると、

$$
\begin{aligned}
&\mu(\boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}}) = f(r)(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0} \\
&\Leftrightarrow \mu \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}(\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}) = \dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{0} \\
&\Leftrightarrow \boldsymbol{L} = \mathrm{const.}
\end{aligned}
$$

となり、角運動量保存則が成り立つ。

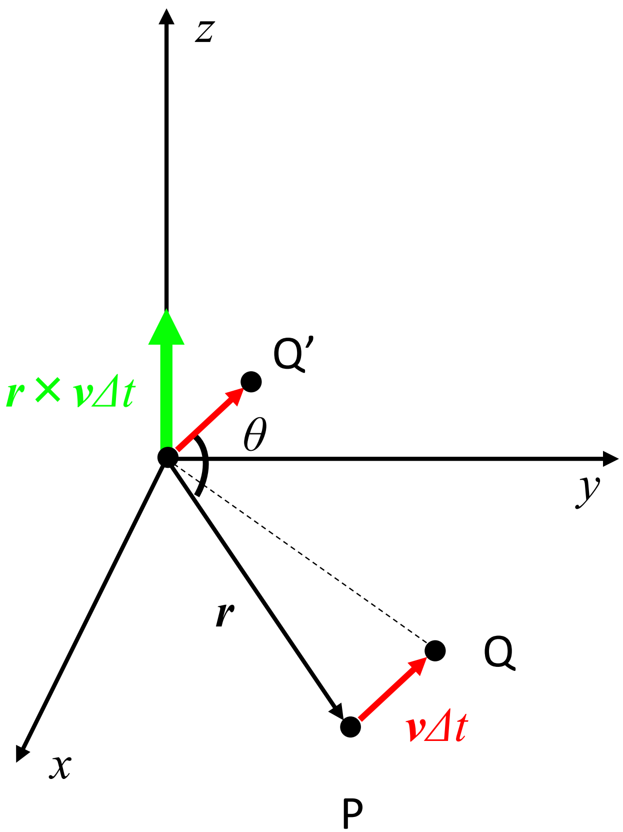
角運動量保存則は、

①質点は平面運動をする。
②面積速度が一定である。

ことを示していることを下記では示す。

①質点は平面運動をすることを示す。

速度を$\boldsymbol{v}$とし、$\boldsymbol{r}$と$\boldsymbol{v}$が張る平面をxy面とする。



角運動量ベクトル$\boldsymbol{L}$はz軸に平行であり、常に一定値をとるため、

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_x v_y - r_y v_x \end{pmatrix} = \mathrm{const.}$$

となり、x、y成分はゼロとなる。したがって、$v_z = 0$が常に成り立つ。

したがって、$\mathit{\Delta} t$後の位置ベクトルは、

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \boldsymbol{r} + \begin{pmatrix} v_x \mathit{\Delta} t \\ v_y \mathit{\Delta} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

であり、やはりxy面となる。

これを繰り返すと、質点は常にxy面を運動することになる。

②面積速度が一定であることを示す。

$$\frac{dS}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\triangle\, OPQ}{\Delta t} = \frac{1}{2} rv\, \sin\theta = \frac{1}{2} |\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}| = \frac{1}{2m} |\boldsymbol{L}| = \mathrm{const.}$$

であり、 面積速度一定であることが分かる。

極座標による表現

<u>二体問題における角運動量を極座標で表現し、角運動量保存則が面積速度一定であることを示す。</u>

質点のx, y座標は、

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

と書ける。これを微分すると、

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta \cdot \dot{\theta}, \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta \cdot \dot{\theta}$$

となる。角運動量保存則より、$L_z = \text{const.}$であり、

$$L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = mr^2\dot{\theta} = \text{const.}$$

質点が、$\mathit{\Delta t}$後に点Pら点Qに移動したとして、
∠POQ= $\mathit{\Delta\theta}$とすると、 $\mathit{\Delta t}$の間にOPが掃く面積は$\mathit{\Delta S}$は、

$$\Delta S = \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta$$

両辺を$\mathit{\Delta t}$でわり、 $\mathit{\Delta t} \to 0$ の極限をとると、

$$\frac{dS}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \mathrm{const.}$$

となり、面積速度一定は一定である。