# やさしい数学の手引き

## ●付録1 ベクトル解析

電磁気学では，力学以上に数学のテクニックが必要になる。とくに，ベクトル解析は決定的に重要である。∇ や grad, div, rot などの記号に悩まされて，それで「電磁気はキライだ！」となった人も多いであろう。電磁気に登場するさまざまな数学は，具体的に何をイメージするのか？ここでは，たんなる数学的説明ではなく，一般のテキストにはなぜか書かれていないイメージとその意味を伝授したいと思う。

説明はいささかくどいと思われるかもしれないが，grad, div, rot のきちんとした理解なくして電磁気学の理解はありえない。面倒がらずに繰り返し説明を熟読頂きたい。この付録がよく分かれば，それで電磁気学の1/3くらいは分かったといっても過言ではないのである。

(物理で使う数学の根底には，微分の考え方があるが，そもそも微分とは何かということについては，『力学ノート』の付録を参照してほしい。)

## ●ベクトルのスカラー積とベクトル積

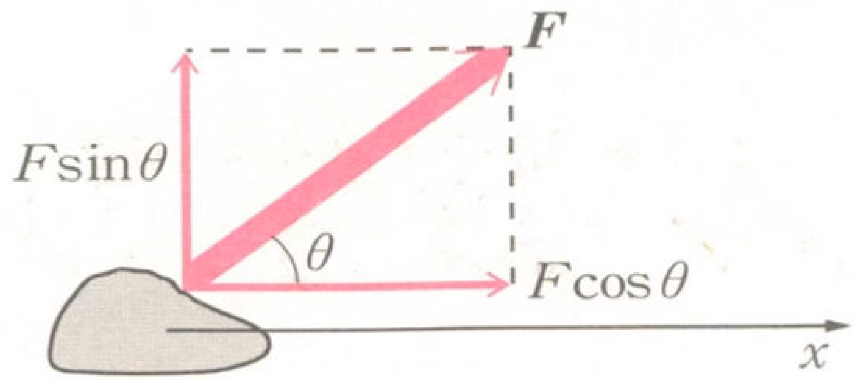
ベクトルのスカラー積とベクトル積については，『力学ノート』ですでにおなじみではあるが，もう一度復習しておこう。

(1) **スカラー積** 内積

スカラー積は，そもそも仕事という物理量を導いたときに出てきた考え方である。

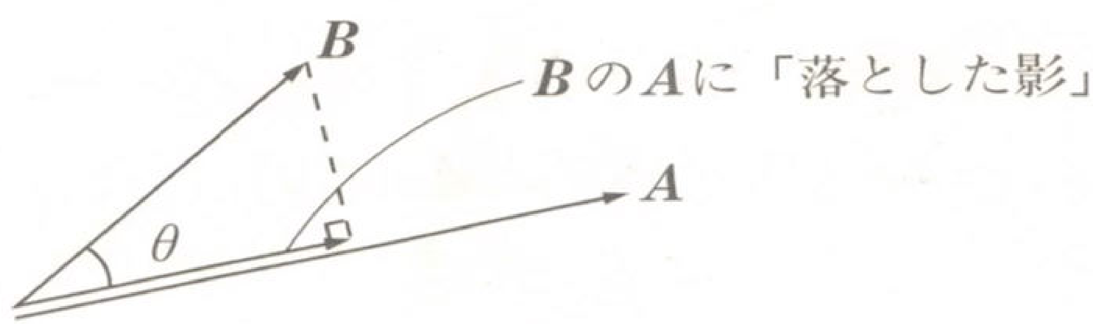
図において，物体を $x$ 方向に動かすとき，力 $\boldsymbol{F}$ がどれだけ寄与するかといえば，$x$ にそった $F\cos\theta$ だけであって，$x$ に直角な $F\sin\theta$ はまったく仕事に寄与しない。

図A-1● $F\cos\theta$ は仕事に寄与するが，$F\sin\theta$ は寄与しない。




こうして，一般にベクトル $\boldsymbol{A}$ とベクトル $\boldsymbol{B}$ のスカラー積とは，ベクトル $\boldsymbol{A}$ の大きさに，ベクトル $\boldsymbol{B}$ のベクトル $\boldsymbol{A}$ に「落とした影」の成分の大きさをかけたものと定義されるのであった(もちろん，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ を逆にしても同じ)。

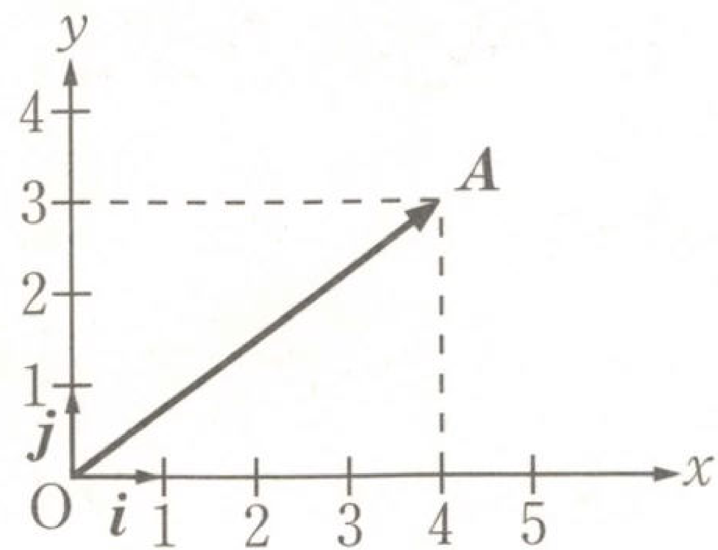
図A-2● $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=|A||B|\cos\theta$




その結果は，ベクトル $\boldsymbol{A}$ とベクトル $\boldsymbol{B}$ のかけ算の効果のようなもので，値はスカラー，すなわちたんなる数である(もちろん，負になることもある)。

さて(分かりやすく $x$-$y$ 平面だけを考えるが)，どんなベクトルも $x$ 方向と $y$ 方向の成分の和として表すことができる。

図A-3● $\boldsymbol{A}=4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$




たとえば図のような長さ5センチメートルのベクトル $\boldsymbol{A}$ を考えよう。このベクトルは，$x$ (の正) 方向を向いた長さ1センチメートルのベクトル $\boldsymbol{i}$ と，$y$ (の正) 方向を向いた長さ1センチメートルのベクトル $\boldsymbol{j}$ (これらを**単位ベクトル**と呼ぶ)を使えば，

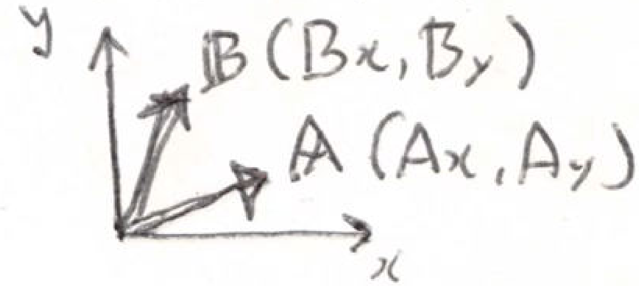
$$\boldsymbol{A}=4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$$

と書くことができる。

それゆえ，ベクトルの演算(スカラー積やベクトル積のこと)は，分解してしまえば，単位ベクトル $\boldsymbol{i}$ や $\boldsymbol{j}$ 同士の演算となるはずである(難しい話ではない。チームAとチームBで，将棋のリーグ戦をやるということは，分解してしまえば，それぞれのメンバー(単位参加者)同士の対戦の寄せ集めということである)。

そんな考え方に立てば，ベクトルのスカラー積とは，図のように，

図A-4●同じ方向のかけ算は1，直角のかけ算は0。





$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=1$　　　$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0$

$$A\cdot B=(A_x i, A_y j)\cdot(B_x i$$
$$=A_x B_x + A_y B_y$$

① $\boldsymbol{i}$ 同士のかけ算は(互いに寄与するから)　1 $= i\cdot i$

② $\boldsymbol{i}$ と $\boldsymbol{j}$ とのかけ算は(互いに寄与しないから)　0 $= i\cdot j = j\cdot i$

ということである。いうまでもなく，

③ $\boldsymbol{i}$ と $-\boldsymbol{i}$ のかけ算は(マイナスに寄与するから)　$-1$

である。　④ $j$ 同士は $j\cdot j = 1$

ついでに述べれば，上のことから，任意の($x$-$y$ 平面上の)ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のスカラー積は，

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_xB_x + A_yB_y$$

であることは明らかである。$A_xB_x$ と $A_yB_y$ は，それぞれ $\boldsymbol{i}$ 同士，$\boldsymbol{j}$ 同士のかけ算の項に出てくる係数であり，$A_xB_y$ や $A_yB_x$ といった項は $\boldsymbol{i}$ と $\boldsymbol{j}$ のかけ算ゆえ 0 になるからである。

(2) **ベクトル積** 外積

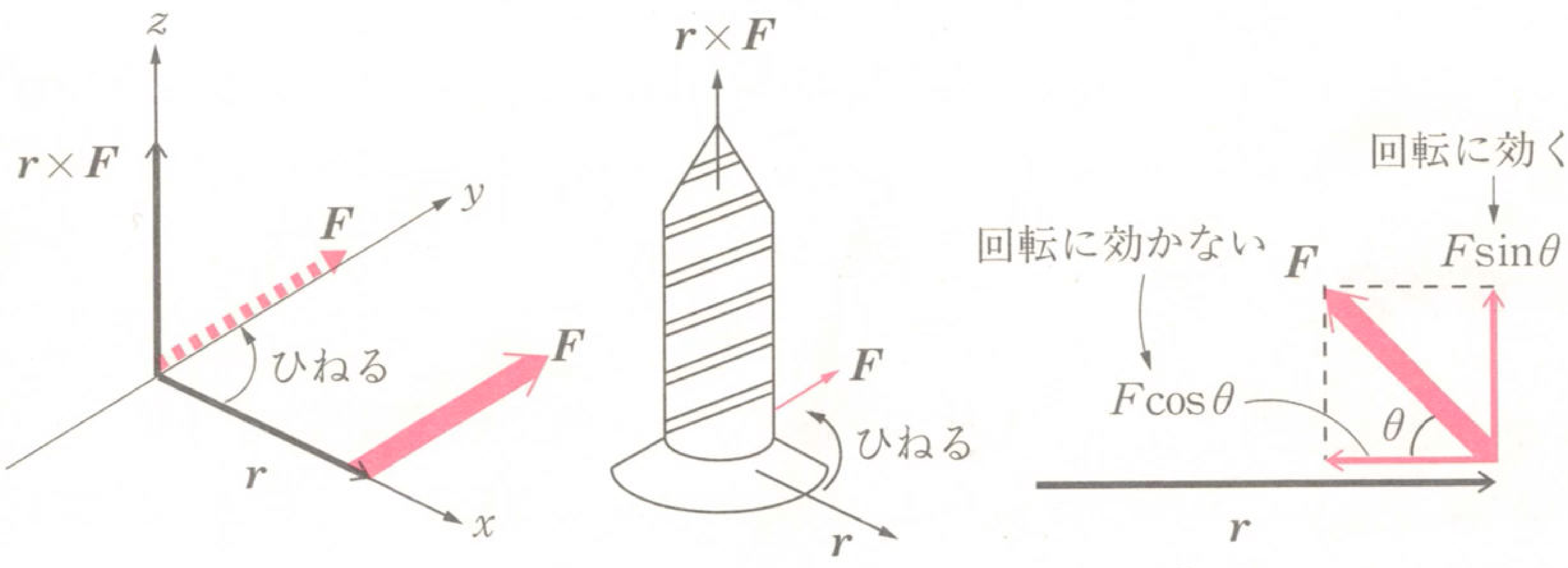
ベクトル積は，スカラー積と違って，ちょっと変わった演算である。$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のかけ算は，$\boldsymbol{A}$ の方向でもない，$\boldsymbol{B}$ の方向でもない，それぞれに直角の方向を向くベクトルになるのであった(なぜそんなソッポを向くのかといぶかしく思う人もいるだろう。たしかにその通りで，じつはベクトル積の結果としてできるベクトル(これを**軸性ベクトル**と呼ぶ)は，本当はベクトルではなく，数学の言葉でテンソルと呼ばれる量なのである。しかし，テンソルについては，本書ではまだ必要がないのでふれない)。

回転を定義するには軸を決めねばナい

そもそも，ベクトル積を導入した理由は，モーメントや角運動量という，回転がからんだ量にあった。

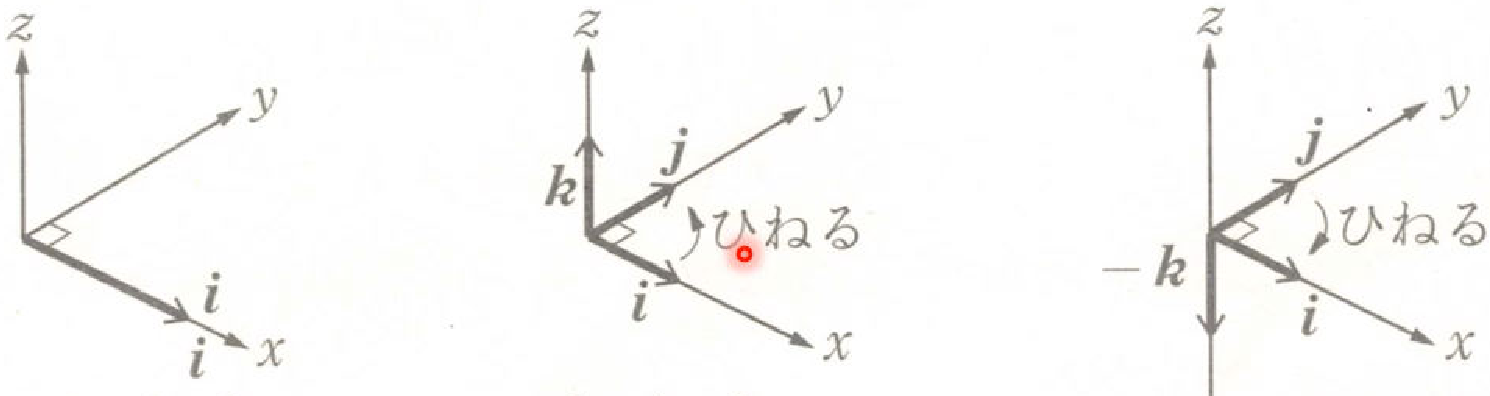
長さ $r$ の位置ベクトルに，大きさ $F$ のベクトルをかけると，その回転の効果は，$F$ の $r$ に対する直角な成分 $F\sin\theta$ だけが効き，またその方向は $r$ と $F$ が $x$-$y$ 平面上にあるとすれば，$z$ 方向を向くのであった(右ねじをひねったときに，ねじの進む方向)。

**図A-5**● $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ の向きは，$\boldsymbol{r}$ から $\boldsymbol{F}$ へねじをひねる。
$F\sin\theta$ は回転に効くが，$F\cos\theta$ は回転に効かない。
すなわちその大きさは $|\boldsymbol{r}||\boldsymbol{F}|\sin\theta$。



さて，ベクトル積の演算もまた，分解すれば単位ベクトルの演算に帰着することは，スカラー積と同じである。ただし，こんどは $z$ 軸(の正)方向の単位ベクトル $\boldsymbol{k}$ も動員して，図のようになる。

図A-6● $\boldsymbol{i}$ から $\boldsymbol{i}$ では回転しない。
$\boldsymbol{i}$ から $\boldsymbol{j}$ では，$\boldsymbol{k}$ ($z$ 軸正) 方向にねじが進む。
$\boldsymbol{j}$ から $\boldsymbol{i}$ では，$-\boldsymbol{k}$ ($z$ 軸負) 方向にねじが進む。




$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=0$　　$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$　　$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k}$

① $\boldsymbol{i}$ 同士のかけ算は(回転しないから)　0 ← $1\times1\times\sin 0$

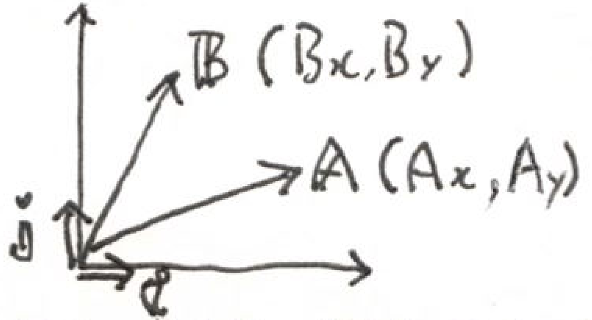
② $\boldsymbol{i}$ と $\boldsymbol{j}$ とのかけ算は(寄与してねじが進むから)　$\boldsymbol{k}$ (長さ 1 で $z$ 方向)

↖ $1\times1\times\sin 90^\circ = 1$

ベクトル積は，順序に気をつけて，

③ $\boldsymbol{j}$ と $\boldsymbol{i}$ とのかけ算は(逆方向にねじが進むから)　$-\boldsymbol{k}$

④ $\boldsymbol{j}$ 同士は 0




$A \times B = (A_x i, A_y j) \times (B_x i, B_y j)$
$= A_x i \times B_y j + A_y j \times B_x i = (A_x B_y - A_y B_x)$

である。

ついでにいえば，以上のことより，任意の($x$–$y$ 平面上の)ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のベクトル積の $z$ 成分は，

P222 の ☆ $$A_x B_y - A_y B_x$$ ← どっちに回るか？

となることは，明らかである。$A_x B_y$ は $\boldsymbol{i}$ と $\boldsymbol{j}$ のかけ算の係数であり，$A_y B_x$ は $\boldsymbol{j}$ と $\boldsymbol{i}$ のかけ算の係数だからである($A_x B_x$ や $A_y B_y$ の項はもちろん0)。また以上のことを，$x$–$y$–$z$ 空間の3次元ベクトルに拡張しても，同様のことが得られるはずである。

以上は，ベクトル解析の基本である。しっかりとイメージを焼きつけておいてほしい。

AxとByとの積とAyをBxで

Ａｘを Ｂｙで回すのと、 Ａｙを Ｂｘで回すのとの力比べ

## 偏微分

電磁気学の基本的な考え方は，本文でもふれているように，「場」という概念である。空間の各点各点に，目には見えないが，その点の性質を示すスカラーやベクトルがくっついているという考え方である。そこで，いろいろな物理量は，空間の各点各点の関数，すなわち $x$，$y$，$z$ の関数ということになる(さらに，それらが時間的に変化するとすれば，時間 $t$ の関数となる)。

そうすると，ある場の量 $f$ の微分とは，何をさしてそういうのだろう？ということが問題になる。しかし，これについては次項で述べることにして，とりあえず，$x$，$y$，$z$ のうち，$y$，$z$ は忘れてしまおう。つまり，$y$ や $z$ は変化しない(変数でない)とみなし，$f$ を $x$ だけの関数と考えて微分するとき，これを**偏微分**と呼ぶのである(じつに単純明快である)。

初歩的な計算をやってみる。

$$f = x^2 + 3y^3 + 5z + 1$$

という場(関数)があったとする。このとき，$f$ の $x$ に関する偏微分は($y$ や $z$ の項も 1 と同じ定数とみなして)，

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$$

である。もちろん，

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 9y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 5$$

である。

ここまでは簡単。それではいよいよ全微分である。

## 全微分

電磁気学にかぎらず，物理ではしばしば次の数学公式を使う。

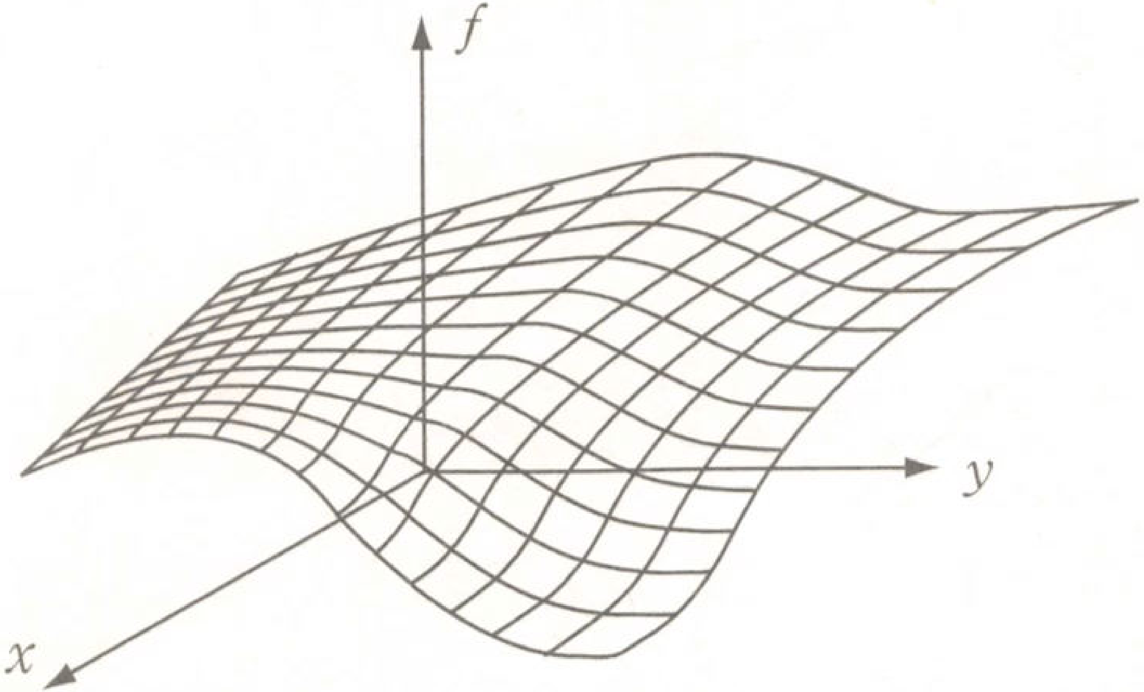
$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z$$

（$\Delta$ を d としても，同じようなものである。）

$\partial f / \partial x$ などが偏微分であるのに対して，$\Delta f$ は**全微分**と呼ばれる。しかし，それにしても，この公式は何を意味するのだろうか。そのことを理解しないまま，この公式を丸暗記するなどは愚の骨頂といわねばならない。この公式には，明快な物理的イメージがあるのである。

話を簡単にするため，$x$-$y$ の 2 次元空間に次元を落として調べてみよう。つまり，場の量 $f$ は，$x$-$y$ 平面上で定義された量で，かつスカラーとしておけば，$f$ は $x$-$y$ 平面上を覆う曲面でイメージできるであろう。

**図A-7**●スカラー場 $f$ は，$x$-$y$ 平面上を覆う曲面で表される。

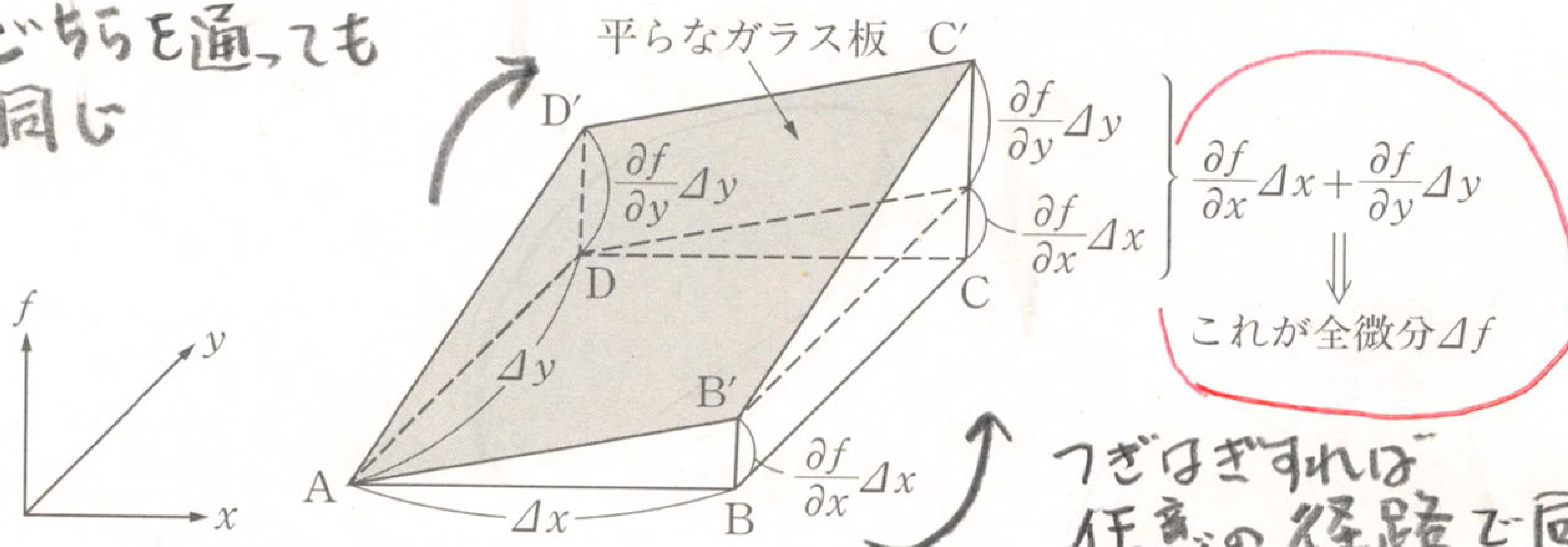



ここで曲面 $f$ の微小な領域に着目する。どれくらい微小かというと，『力学ノート』の微分の説明でおなじみのように，曲面がもはや曲面ではなく，平面に見える領域である。その領域を，$x$ 方向に $\Delta x$，$y$ 方向に $\Delta y$ の小さな長方形にとると，$f$ はその上に（一般的にいえば斜めに）乗っ

かる平らなガラス板のようなものである。

**図A-8**●位置が$\Delta x$かつ$\Delta y$だけ変化したときの$f$の変化分(全微分)は，$\Delta x$だけ変化したときの$\dfrac{\partial f}{\partial x}\Delta x$と$\Delta y$だけ変化したときの$\dfrac{\partial f}{\partial y}\Delta y$の和である。

どちらを通っても同じ




つぎはぎすれば任意の経路で同じ

図の長方形ABCDが領域$\Delta x$, $\Delta y$であり，AB′C′D′がその上に斜めに乗るガラス板である。

さて，微分とは図形的には傾斜であったから，$\partial f/\partial x$という量は，このガラス板の$x$方向だけに着目したときの傾斜であり，その傾斜に領域の長さ$\Delta x$をかけたものは，$f$の$x$方向の増加分である。つまり，図のBB′の長さが$\dfrac{\partial f}{\partial x}\Delta x$に他ならない。

同じことが $y$ 方向についてもいえるから, 図の $y$ 方向の増加分 DD′ が $\dfrac{\partial f}{\partial y}\Delta y$ である。さて, 点 A から $x$ 方向に $\Delta x$, $y$ 方向に $\Delta y$ だけ移動した点 C で $f$ はどれだけ増加しているかといえば, 図から明らかなように, $\dfrac{\partial f}{\partial x}\Delta x$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}\Delta y$ の合計である。そしてこれこそが, $f$ の全体の増加分に他ならないから, これを $f$ の全微分と呼び, $\Delta f$ と書いておくのである。ということで, けっきょく,

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

この関係は, そのまま 3 次元に拡張されるだろうから(とはいえ, それを図形としてイメージするのは困難であるが), 当初に挙げた公式が成立するということになる。

以上のようなことを準備として, それでは電磁気学の初心者を最初に悩ます, 例の ∇ 記号のイメージ理解に入ることにしよう。