• **2022 年度秋学期微積分学講義予定．** ∗ 印ではこの教科書には書いてない話題をとりあげる．後秋学期は多変数（二変数で代表させる）の微分と積分．教科書第三章と第四章の内容を講義する．教科書との対応：3.14 から 3.19 および 4.20 から 4.23．最終章 4.24（三重積分）は各自の自習にまかせる（理由：数学的に新しいことは特にないので自習は容易だと思う）．

第 1 回講義：テイラー級数がもとの関数に収束する例（その 2）*（教科書 1.8 再論）．
第 2 回講義：テイラー公式の応用.（教科書 1.8 再論）．
第 3 回講義：話題提供：ニュートン法について（テイラー公式の応用．応用上非常に重要）*.
第 4 回講義：偏微分と全微分について（その 1）（教科書 3.14,3.15）．
第 5 回講義：偏微分と全微分について（その 2）（教科書 3.15）．
第 6 回講義：2 変数関数のテイラー展開と極値問題について（教科書 3.16,3.18）．
第 7 回講義：制限つき極値問題と陰関数について（教科書 3.19）．
第 8 回講義：話題提供：Wallis の公式と Stirling の公式（一変数の広義積分の応用）*.
第 9 回講義：累次積分（教科書 4.20）．
第 10 回講義：話題その 1．累次積分（つづき）.（教科書 4.20）．話題その 2．重積分の厳密な定義の直観的説明（教科書 4.21）
第 11 回講義：重積分の変数変換その 1．1 次変換に対する重積分の変数変換公式.（教科書 4.22）．
第 12 回講義：重積分の変数変換その 2．極座標変換に対する変数変換公式．一般の変数変換公式.（教科書 3.17, 4.22）
第 13 回講義：重積分の広義積分.（教科書 4.23）．
第 14 回講義：重積分の広義積分の応用 – ガンマ関数とベータ関数.（教科書 1.13, 4.23）．
第 15 回講義：グリーンの公式（教科書に記載がないが物理への応用では非常に重要）*.

（春学期の復習）

•（定理）**テイラー公式** $f(x)$ は $[a,b]$ を含む開区間で n 階微分可能のとき

$$\begin{aligned}
f(b) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + R_n(b) \quad （近似多項式\ f_{n-1}(b)+\ 残項\ R_n(b)）, \\
R_n(b) &= \int_a^b \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(b-t)^{n-1}dt \quad （残項\ R_n(b)\ の積分表示） \quad [春学期の第十五回講義] \\
&= \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n \quad (a < \exists c < b) \quad [春学期の第九回講義]
\end{aligned}$$

となる．二通りの残項の表示が同じものであることの直接証明：$[a,b]$ において $f^{(n)}(t)$ の最小値，最大値を m, M とすると

$$m\int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt \le \int_a^b \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(b-t)^{n-1}dt \le M\int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt$$

である．中間値の定理により $a < c < b$ であるような c で

$$f^{(n)}(c)\int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt \le \int_a^b \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(b-t)^{n-1}dt$$

を満たすものが存在する．$\displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt = \frac{(b-a)^n}{n!}$ だから結論を得る．

第 1 回講義：テイラー級数がもとの関数に収束する例 (2).（教科書 1.8 再論)

• **$n \to \infty$ のとき，テイラー多項式 $f_{n-1}(x)$ はどのような x に対して元の関数 $f(x)$ に収束するか？**

• **$n \to \infty$ のとき残項 $R_n(x)$ はどのような x に対して零に収束するか？**

という問（これらは同じことを問うている）に答えることは重要である．残項を積分表示することの意義は，この問いに答えることにある．前回に引き続き，残項の積分表示からテイラー多項式が元の関数に収束することが確認できる二つ目の例として，**一般二項定理**を取り上げる．

例 3（一般二項定理）

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (|x| < 1)\ .$$

これは $|x| < 1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) \to 0$$

が成り立つことと同値である．ここで

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

は一般 2 項係数である．ただし，α が正の整数なら $\binom{\alpha}{n} = 0$ $(\forall n \geq \alpha+1)$ なので有限和となってすべての $x \in \mathbb{R}$ に対して収束する．

$(1+x)^\alpha$ のテイラー公式の残項 R_n の積分表示を使って，一般 2 項定理を証明する．

（補題）$|x| < 1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 0$$

である．

補題の証明：$\beta = |\alpha|$ とする．$|x| < 1$ だから

$$1 + \frac{\beta}{L} < \frac{1}{|x|}$$

となる自然数 L をとれる．$L < n$ ならば

$$\begin{aligned}
\left|\binom{\alpha}{n} x^n\right| &\leq \frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+L)}{L!}\,\frac{(\beta+L+1)\cdots(\beta+n-1)}{(L+1)\cdots(n-1)}\,\frac{|x|^n}{n} \\
&\leq \frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+L)}{L!}\,\frac{1}{|x|^{n-1-L}}|x|^n\frac{1}{n} \\
&= \frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+L)}{L!}|x|^{L+1}\frac{1}{n} \to 0
\end{aligned}$$

（$n \to \infty$ のとき）． □

一般二項定理の証明：

$f(x) = (1+x)^\alpha$ に $a = 0,\ b = x$ としてテイラー公式を適用する．

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

だからテイラー公式の係数 $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$ は

$$\binom{\alpha}{k}$$

である．テイラー公式より

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{n-1} \binom{\alpha}{n} x^n + R_n(x)$$

となる．ここで

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^n}{dt^n}(1+t)^\alpha dt \\ &= \alpha \binom{\alpha-1}{n-1} \int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^{n-1} (1+t)^{\alpha-1} dt \end{aligned}$$

である．

$$u = \frac{x-t}{1+t}$$

とおいて上の補題を使って残項を評価する（$\log(1+x)$ の場合と同様に計算できる）．補題の前提である条件 $|x| < 1$ のもとで，次が成り立つ：

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left|\alpha \binom{\alpha-1}{n-1}\right| \left|\int_0^x u^{n-1} \frac{(1+x)^\alpha}{(1+u)^{1+\alpha}} du\right| \\ &\le \frac{2^\beta}{(1-|x|)^{1+\beta}} \left|\alpha \binom{\alpha-1}{n-1}\right| \frac{|x|^n}{n} \\ &= \frac{2^\beta}{(1-|x|)^{1+\beta}} \left|\binom{\alpha}{n} x^n\right| \to 0 \quad \text{（補題）} \end{aligned}$$

($n \to \infty$ のとき)． □

• 以下は記憶しておくべき基本的なテイラー公式である．

式の最後の括弧の中に書いてあるのは収束域（テイラー級数が収束する開区間のこと）である．例えば $(x \in \mathbb{R})$ は全ての $x \in \mathbb{R}$ で収束することを表し，$(|x| < 1)$ は $|x| < 1$ という範囲で収束することを表している．

テイラー公式を記憶するときには，収束域込みで記憶することが重要である．

$$\begin{aligned} & e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\cdots \quad (x \in \mathbb{R}) , \\ & \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R}) , \\ & \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R}) , \\ & \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \quad (|x| < 1) , \\ & \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + \cdots \\ & \quad (|x| < 1) , \\ & \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \\ & \quad (|x| < 1) , \\ & (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots \\ & \quad + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots \quad (|x| < 1) . \end{aligned}$$

最後の公式は一般二項定理である．α が非負整数の時は有限項なので収束は問題にならない．

• **テイラー級数の計算上の工夫．**

テイラー級数を定義どおりに計算するのは一つの良い計算方法である．しかし，定義に戻って計算すると大変なことになる場合がある．そのような場合にはいちいち定義にもどって計算する必要はなく，適当な工夫で計算を楽に行うのがいい．たとえば，$\tan x$ の $x=0$ のまわりのテイラー級数を定義通りに計算するのは非常に面倒だが,

$$
\begin{aligned}
&\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{1-(1-\cos x)} \\
&= \sin x\{1+(1-\cos x)+(1-\cos x)^2+\cdots\} \\
&= \left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\cdots\right) \\
&\quad \times\left\{1+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\cdots\right)+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\cdots\right)^2+\cdots\right\} \\
&= \left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\cdots\right)\left\{1+\frac{x^2}{2}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{24}\right)x^4+\cdots\right\} \\
&= x+\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)x^3+\left(\frac{1}{120}-\frac{1}{12}+\frac{5}{24}\right)x^5+\cdots \\
&= x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\cdots
\end{aligned}
$$

という工夫をすれば，計算はかなり楽になる．これは，$|x|<\frac{\pi}{2}$ において収束する．

理由:$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(1-\cos x)^n$ が収束しなければならないが，そのためには等比級数の収束の条件により，$|1-\cos x|<1$ でなければならない．$x=0$ のまわりでこの条件を満たす最大区間は $(-\pi/2,\pi/2)$ である．

• **課題 1.** $\tan x$ の $x=0$ にまわりのテイラー級数を x^7 の項まで計算せよ．

• **課題 2.** $f(x)=\sqrt{x}$ を $x=4$ のまわりで 3 次までテイラー展開することによって，$\sqrt{5}$ の近似値を求めよ．どのくらいよい近似値か実際に 2 乗して確かめてみよ．

ヒント：$f(x)=\sqrt{x}$ に対し $f(x)$ を $x=2$ のまわりにテイラー展開すると $f(x)=f(4)+f'(4)(x-4)+\frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2+\frac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3+...$ である．これに $x=5$ を代入する．または $\sqrt{5}=\sqrt{4+1}=2(1+\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$ と書き直して右辺に二項定理を適用して $2\{1+\frac{1}{2}\frac{1}{4}+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}(\frac{1}{4})^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}(\frac{1}{4})^3+...\}$ を計算する．

• **課題 3.** 教科書の問 8.4.