2024 年度微分積分学 I 期末レポート問題（基本的には七題選択．七題以上解答した場合は点数が最大になる七題を選択したとみなし，場合によっては $A+$ を進呈します）

提出締切：2024 年 8 月 13 日

1. 次の関数の導関数を求めよ（途中式も書くこと）.

(1) $f(x) = x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$.

(2) $f(x) = \arctan(\tanh x)$.

(3) $f(x) = \arcsin e^x + \arccos e^x$. ただし $x < 0$ とする.

ヒント：(2) $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ に対して $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$, $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$, $(\cosh x)^2 + (\sinh x)^2 = \cosh(2x)$. これらの公式を使うと計算が楽になるかも.

2. 次の二題から一題選択.

2.1 関数 $f(x) = \sin\left(x^3 + \dfrac{\pi}{3}\right)$ に対し次の問いに答えよ.

(1) $f(x) = \dfrac{1}{2}\sin x^3 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x^3$ が成り立つことを示せ.

(2) $f^{(n)}(0)$ を求めよ.

ヒント：$x=0$ におけるテイラー展開 $\sin x^3 = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{6n+3}}{(2n+1)!}$, $\cos x^3 = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{6n}}{(2n)!}$.

2.2 関数 $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$ に対し $f^{(n)}(0)$ を求めよ.

ヒント：$f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2} = \dfrac{1-x}{1-x^3} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} - \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+1}$ なので **2.1** に似ている.

3. (1) 関数

$$f(x) = \log(\cosh x)$$

の $x=0$ のまわりでのテイラー公式を

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + R_5(x)$$

の形に書きくだせ．ただし，残項 $R_5(x) = \dfrac{f^{(5)}(\theta x)}{5!}x^5$ $(\exists\theta \in (0,1))$ はそのままでいい.

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4}\left\{\sqrt{1+x} - q(x)\right\}$ が存在するような多項式 $q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ を決定して，そのときの極限を求めよ.

4. 次の極限を，ロピタル計算を使わないで，例えば，関数 x^a, e^x の $x \to \infty$ の時の振舞を調べるという，より基本的な議論だけで求めよ：

(1) a を任意の正の実数とするとき

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{e^x} .$$

(2) a を任意の正の実数とするとき

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^a} .$$

5. (1) $I_n = \displaystyle\int x^n \sin x \cos x \, dx$ の満たす漸化式を求めよ.

(2) $I_{m,n} = \displaystyle\int x^m (\log x)^n \, dx$ の満たす漸化式を求めよ.

6. 次の定積分の値を求めよ：

(1)
$$\int_0^2 \sqrt{2x - x^2} \, dx$$

(2)
$$\int_0^{\log 3} \frac{(e^x + 1)^2}{e^{2x}} \, dx$$

ヒント：(1) $\sqrt{2x - x^2} = \sqrt{1 - (x-1)^2}$ に注目．$x = 1 + \sin x$ とおくと積分区間は $[-\pi/2, \pi/2]$ になる.

7. (1) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin t) \, dt$ と $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos t) \, dt$ はともに収束し，値は同じであることを示せ.

(2) 広義積分
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(2t)) \, dt$$
を求めよ.

ヒント：(1) と $\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$.

8. $\alpha \in \mathbb{R}$ で $x \in \mathbb{R}$ は $|x| < 1$ を満たすとせよ．このとき数列 $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ を
$$c_n = \left| \binom{\alpha}{n} x^n \right|$$
によって定義する．ここで
$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)}{n!}$$
は一般二項係数である.

(1) $\varepsilon > 0$ を $|x| \le 1 - \varepsilon$ となるようにとって固定する．このとき，ある自然数 n_0 が存在して $\forall n \ge n_0$ に対して
$$|c_{n+1}/c_n| < \frac{1 - \varepsilon}{1 - \frac{\varepsilon}{2}}$$
が成り立つ．このことを証明せよ.

(2) 極限値 $\lim_{n \to \infty} c_n$ を求めよ.

9. 次の二題から一題選択.

9.1. 一般二項定理
$$(1 + x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n \quad (\,a \text{ が非負整数でない時は } |x| < 1\,)$$
を用いて，$\sqrt[3]{9} = 9^{\frac{1}{3}}$ の値を小数第三位まで求めよ．考え方と途中計算も書くこと.

9.2. テイラー公式を用いて次の不定形の極限を求めよ．考え方と途中計算も書くこと.

(1)
$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1 - x^2}}{x^4}$$

(2)
$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x^2) - x \sin x}{x^4}$$

期末テスト解説.

1. (1) $f(x) = x\arccos x - \sqrt{1-x^2}$ の導関数の計算：

$$f'(x) = \arccos x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \arccos x\ .$$

(2) $f(x) = \arctan(\tanh x)$ の導関数の計算：ヒントを使うと

$$f'(x) = \frac{1}{1+\tanh^2 x}\cdot\frac{1}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x + \sinh^2 x} = \frac{1}{\cosh(2x)}\ .$$

(3) $f(x) = \arccos e^x + \arcsin e^x$（ただし $x<0$）の導関数の計算：

$$f'(x) = -\frac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}} + \frac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}} = 0\ .$$

もちろん，逆三角関数の定義に戻って三角形の絵から図形的に $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$ だから計算するまでもなく明らかだ，という答案も正解です.

コメント：(a) 双曲線関数 cosh は一つの関数記号であり，$\cos(hx)$ とは違います．h は記号の一部であり，x にかかる係数ではありません．(b) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, $\cosh^2 + \sinh^2 x = \cosh(2x)$ は三角関数の公式 $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$ によく似ているので間違わないこと．(a),(b) のような間違いを見ると疲れます.

2.1 いきなり $f^{(n)}(0)$ を計算して $x=0$ を代入するのは大変なことになるので一工夫必要だ，という問題.

(1) 加法定理から $f(x) = \sin\left(x^3 + \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos(\pi/3)\sin x^3 + \sin(\pi/3)\cos x^3 = \dfrac{1}{2}\sin x^3 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x^3$.

(2) n が 3 で割り切れないとき．$f^{(n)}(0) = 0$.

$n = 6k+3$ のとき．$f^{(6k+3)}(0) = \dfrac{(-1)^k(6k+3)!}{2(2k+1)!}$.

$n = 6k$ のとき．$f^{(6k)}(0) = \dfrac{(-1)^k\sqrt{3}(6k)!}{2(2k)!}$.

2.2 $f(x) = \dfrac{1}{1-x+x^2} = \dfrac{1-x}{(1-x)(1+x+x^2)} = \dfrac{1-x}{1-x^3} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} - \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+1}$ だから

$n = 3k$ のとき．$f^{(3k)} = (3k)!$.
$n = 3k+1$ のとき．$f^{(3k+1)}(0) = -(3k+1)!$.
$n = 3k+2$ のとき．$f^{(n)}(0) = 0$.

コメント：答案の書き方がうまくいってない答案が多かったが，テイラー展開そのものがわかっていると思われる答案では減点しなかった.

3. テーマ：関数 $f(x) = \log(\cosh x)$ の $x=0$ のまわりでのテイラー公式と，極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\left\{\sqrt{1+x} - q(x)\right\}$ が存在するような（高々）3 次式 $q(x)$ および問題の極限の計算.

(1) $\log(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - \ldots$ と $\cosh x = 1 + x^2/2! + x^4/4! + \ldots$ から，関数 $f(x) = \log(\cosh x)$ の $x=0$ を中心とするのテイラー公式を x^4 まで計算すると

$$\begin{aligned}
f(x) &= \log(\cosh x)\\
&= \log(1 + (x^2/2! + x^4/4! + ...))\\
&= \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right)^2 + \ldots\\
&= \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2!}\right)^2 + \ldots\\
&= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \ldots
\end{aligned}$$

である．もちろん $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)/2!$, $f'''(0)/3!$, $f^{(4)}(0)/4!$ を計算してもいいが，計算は面倒だと思う．そこで $\log(1+x)$ のテイラー展開と，$\cosh x$ のテイラー展開が 1 から始まるのを利用した．

(2) 二項定理より

$$\begin{aligned}(1+x)^{\frac{1}{2}} &= 1+\binom{\frac{1}{2}}{1}x+\binom{\frac{1}{2}}{2}x^2+\binom{\frac{1}{2}}{3}x^3+\binom{\frac{1}{2}}{4}x^4+\dots \\ &= 1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)\frac{1}{4!}x^4 \\ &= 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\dots\end{aligned}$$

だから

$$q(x)=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3$$

とおけば

$$\frac{\sqrt{1+x}-q(x)}{x^4}=-\frac{5}{128}+O(x)$$

である．よって

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-q(x)}{x^4}=-\frac{5}{128}$$

である．

コメント：この問題，特に (1) ができなかった人たちが陥った誤答のパターンのほとんどは「テイラー公式そのものを正しく書けない」であった．心当たりのある人はテイラー公式をよく復習してほしい．

4. (2) $y=a\log x$ とおくと $x^a=e^y$ だから (2) を y の式で表すと $\displaystyle\frac{1}{a}\lim_{y\to\infty}\frac{y}{e^y}$ となって (1) の特別な場合に帰着する．

以下で (1) の極限が 0 であることを示す（したがって極限 (2) も 0 である）．$f(x)=e^{-x}x^{a+1}$ を考える．$f'(x)=-e^{-x}x^{a+1}+e^{-x}(a+1)x^a=e^{-x}x^a(a+1-x)$ だから，$x\geq 0$ の時，関数 $f(x)$ は $x=a+1$ で最大値 $f(a+1)=e^{-a-1}(a+1)^{a+1}$ をとる．したがって $f(x)\leq f(a+1)$ である．これは，$x>0$ のとき，$e^{-x}x^{a+1}\leq f(a+1)$ したがって $0<e^{-x}x^a\leq\frac{f(a+1)}{x}$ が成り立つことを意味する．右辺 $\frac{f(a+1)}{x}\to 0$ $(x\to\infty)$ だから，挟み撃ちの原理によって $\lim_{x\to\infty}e^{-x}x^a=0$ である．

コメントその一：$x=2y$ とおくと

$$\frac{x^a}{e^x}=\frac{2^a}{e^y}\frac{y^a}{e^y}$$

で $x\to\infty$ と $y\to\infty$ は同じことであり $\displaystyle\lim_{y\to 0}\frac{2^a}{e^y}=0$ だから答は 0 という趣旨の答案が結構たくさんあったが，これはいいアイディアだが不十分．なぜなら証明するべき極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^a}{e^x}$ の存在（収束すること）を暗黙のうちに仮定しているから．この論法でわかることは「もし $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^a}{e^x}$ が収束すれば極限値は 0」ということである．

これと似たパターンもあった．$a>0$ の場合を考える．$x=ay$ とおくと $\displaystyle\frac{x^a}{e^x}=\frac{(ay)^a}{e^{ay}}=a^a\left(\frac{y}{e^y}\right)^a$ なので $\lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y}=0$ が言えれば $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^a}{e^x}=0$ が言える．このように問題を単純化してから $\lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y}=0$ の証明をしようとしたが，後者の証明が不十分だというパターン．

コメントその二：指数関数の定義

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots\quad(\forall x\in\mathbb{R}\text{ に対して収束する })\tag{1}$$

によれば $x > 0$ のとき，任意の自然数 n に対して $e^x > \dfrac{x^n}{n!}$ が成り立つ．よって任意の整数 k に対し $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{e^x}=0$ は当然である．これを理由にした答案はもちろん正解である．定義から当然なのに，なぜ a が勝手な定数の時 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^a}{e^x}=0$ を証明するのがそんなに大事なのか疑問に感じるだろう．実は指数関数は微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=y$ と初期条件 $y(0)=1$ で定まる関数だと思うのがより自然である（時間の関数である量が変化率がその時刻における量に比例するような物理現象を式にしたものがこの微分方程式で，その解が指数関数である）．このように指数関数を導入すると (1) は定理になる．指数関数による増加は「ねずみ算式増加」で多項式増大度より真に増大のスピードが速いことを実感して欲しい（冪級数で指数関数を定義してしまうと，他の増大度との比較のような性質が実感しにくい）から，この問題のような問題が重視されるのである．

コメントその三：$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^a}=0$ $(a>0)$ の証明方法．対数関数 $y=\log x$ のグラフの形状に注目した答案があった．まず $a=1$ の場合に帰着させて (2) は $a=1$ の時には正しい，というものである．正解．いいアイディアだと思う．

5. (1) $I_n=\displaystyle\int x^n\sin x\cos x\,dx$ の満たす漸化式．部分積分．

$$
\begin{aligned}
I_n&=\int x^n\sin x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\int x^n\sin(2x)\,dx\\
&=-\frac{x^n\cos(2x)}{4}+\frac{n}{4}\int x^{n-1}\cos(2x)\,dx\\
&=-\frac{x^n\cos(2x)}{4}+\frac{n}{4}\left\{\frac{x^{n-1}\sin(2x)}{2}-\frac{n-1}{2}\int x^{n-2}\sin(2x)\,dx\right\}\\
&=-\frac{x^n\cos(2x)}{4}+\frac{n}{4}\left\{\frac{x^{n-1}\sin(2x)}{2}-(n-1)\int x^{n-2}\sin x\cos x\,dx\right\}\\
&=-\frac{x^n\cos(2x)}{4}-\frac{n}{8}x^{n-1}\sin(2x)-\frac{n(n-1)}{4}I_{n-2}\ .
\end{aligned}
$$

(2) $I_{m,n}=\displaystyle\int x^m(\log x)^n\,dx$ の満たす漸化式．部分積分

$$
\begin{aligned}
I_{m,n}&=\frac{1}{m+1}x^{m+1}(\log x)^n dx-\frac{n}{m+1}\int x^{m+1}(\log x)^{n-1}dx\\
&=\frac{1}{m+1}x^{m+1}(\log x)^n-\frac{n}{m+1}I_{m,n-1}\ .
\end{aligned}
$$

コメント：この問題は予想を超えてよくできていた．

6. (1) ルートの中の二次式を平方完成すると $\displaystyle\int_0^2\sqrt{2x-x^2}dx=\int_0^2\sqrt{1-(x-1)^2}dx=\int_{-1}^1\sqrt{1-y^2}dy$ となる．$y=\sin\theta$ とおいて置換積分すると $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)\cos\theta d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)d\theta=\Big[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$.

(2) これはそのまま計算するだけ．$\displaystyle\int_0^{\log 3}\frac{(e^x+1)^2}{e^{2x}}dx=\int_0^{\log 3}(1+2e^{-x}+e^{-2x})dx=\Big[x-2e^{-x}-\frac{e^{-2x}}{2}\Big]_0^{\log 3}=\log 3+\frac{16}{9}$.

コメント：予想した通り，非常によくできていた．(1) で不正解だった人は置換積分をよく復習し計算練習しておくこと．

7. (1) $y=\sin x$ と $y=\cos x$ のグラフは $x=\frac{\pi}{4}$ に関して対称だから，一方の積分が収束したらもう一方も収束して値は等しい．図形的には明らかだが，計算でも図形を思い浮かべながら $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin(x+\frac{\pi}{2})dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\log(\sin y)dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\log(\sin(\pi-y))dy = -\int_{\frac{pi}{2}}^{\pi}\log(\sin z)dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin z)dz$ とでもやればいいが，このような計算は書いてなくても正解である．では $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)dx$ の収束を証明する．問題は区間の端点 $x=0$ で起きる．ここで被積分関数の $\log$ の中身が 0 だからである．x が小さい時 $\sin x\approx x$ だから $\int_0^1\log x dx$ が収束すればいい．この積分は（$y=e^x$ の逆関数は $x=\log y$ だから）グラフを描けば明らかなように $\int_{-\infty}^0 e^x dx$ と同じである．そして $\int_{-\infty}^0 e^x dx=[e^x]_{-\infty}^0=1$ である．したがって問題の積分は収束する．以上によって $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)dx$ と $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\cos x)dx$ は共に収束して値は等しい．

(2) 値を求めたい積分は

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin(2x))dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\log(\sin 2x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin 2x)dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin y)dy+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\log(\sin y)dy\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)dx\end{aligned}$$

である一方で，(1) より

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin(2x))dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(2\sin x\cos x)dx\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\{\log 2+\log(\sin x)+\log(\cos x)\}dx\\ &= \frac{\pi\log 2}{2}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)dx\end{aligned}$$

である．よって求めたい積分の値は $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)dx=-\frac{\pi\log 2}{2}$ である．

コメント：この問題は難しいだろうと思ったが，予想に反して，成績は非常に良かった．

8. 問題の数列

$$c_n := \left|\binom{\alpha}{n}x^n\right|$$

の隣接二項間の比

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}=|x|\left|\binom{\alpha}{n+1}\Big/\binom{\alpha}{n}\right|=|x|\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!}\frac{n!}{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}\right|=|x|\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|$$

を考える．$|x|<1$ だから $|x|\le 1-\varepsilon$ となる $\varepsilon>0$ が存在する．このような $\varepsilon>0$ を一つとって以下の議論ではそれを固定する．一方 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|=1$ だから，ある番号 n_0 があって，$n>n_0$ なら $\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|\le\frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{2}}$ である（ここがポイント！）．よって $n>n_0$ なら

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}\le\frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon/2}<1$$

である．したがって

$$c_n = c_1 \prod_{k=1}^{n_0} \frac{c_{k+1}}{c_k} \prod_{k=n_0+1}^{n} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|} < c_1 \left(\prod_{k=1}^{n_0} \frac{c_{k+1}}{c_k} \right) \left(\frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon/2} \right)^{n-n_0} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

である．これは $|x| < 1$ なら

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0$$

であることを意味している．

コメント：この問題は結構難しいだろうと思ったが，予想に反して成績は良かった．

9.1. 一般二項定理を使って $9^{1/3}$ の近似値を小数第三位まで求める問題.

$$\begin{aligned} 9^{1/3} &= (2^3+1)^{1/3} = 2\left(1+\frac{1}{8}\right)^{1/3} \\ &= 2\left\{1 + \frac{1}{3}\frac{1}{8} + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)\frac{1}{8^2} + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\frac{1}{8^3} + \dots\right\} \\ &= 2(1 + 0.04166\cdots - 0.001753\cdots + \dots) = 2.080\dots\ . \end{aligned}$$

この形から，打ち切りによって小数第三位に影響はないことがわかる．

9.2. (1) $\cos x$ と $\sqrt{1-x^2}$ を 0 を中心にテイラー展開すると

$$\begin{aligned} \cos x - \sqrt{1-x^2} &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) - \left(1 - \binom{1/2}{1}x^2 + \binom{1/2}{2}x^4 + \dots\right) \\ &= \left(\frac{1}{4!} - \binom{1/2}{2}\right)x^4 + \dots = \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{8}\right)x^4 + \dots = \frac{x^4}{6} + \dots \end{aligned}$$

だから

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{6} + \dots}{x^4} = \frac{1}{6}\ .$$

(2) $\log(1+x^2)$ と $x \sin x$ を 0 を中心にテイラー展開すると

$$\log(1+x^2) - x\sin x = \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + \dots\right) - x\left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots\right) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)x^4 + \dots = -\frac{x^4}{3} + \dots$$

だから

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2) - x\sin x}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^4}{3} + \dots}{x^4} = -\frac{1}{3}\ .$$

コメント：問題 9 を選択した人たちはよくできていた．**9.1** へのコメント：9 に最も近い三乗数 $8 = 2^3$ を思いつくのが一つのアイディア．二項定理 $(1+x)^{\frac{1}{3}}$ を使う時，$|x|$ が小さいほど打ち切りによる誤差は小さいからである．この状況を作るのに $9 = 2^3 + 1$ とは異なる色々な工夫をした答案には感心した．

• 全体へのコメント：テイラー公式を重点的に復習しておく必要がある人が少なからずいることがわかった．この機会にテイラー公式を十分に復習してほしい．後期はテイラー公式の続きからです．