秋第六回課題解答例

16.1 (1) $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$. $f_x = 2ax + 2by$. $f_y = 2bx + 2cy$. $f_{xx} = 2a$. $f_{xy} = 2b$. $f_{yy} = 2c$.

(2) $f(x,y) = \sin(x+y^2)$. $f_x = \cos(x+y^2)$. $f_y = 2y\cos(x+y^2)$. $f_{xx} = -\sin(x+y^2)$. $f_{xy} = f_{yx} = -2y\cos(x+y^2)$. $f_{yy} = 2\cos(x+y^2) - 4y^2\sin(x+y^2)$.

(3) $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$. $f_x = \frac{2x}{x^2+y^2}$. $f_y = \frac{2y}{x^2+y^2}$. $f_{xx} = \frac{2}{x^2+y^2} - \frac{(2x)(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$. $f_{xy} = f_{yx} = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$. $f_{yy} = \frac{2}{x^2+y^2} - \frac{(2y)(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$.

(4) $f(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$. $f_x = \frac{-y/x^2}{1+(y/x)^2} = -\frac{-y}{x^2+y^2}$. $f_y = \frac{1/x}{1+(y/x)^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$. $f_{xx} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$. $f_{xy} = -\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $f_{yx} = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = f_{xy}$. $f_{yy} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

16.2 (1) チェインルール（合成関数の微分法）より $h'(t) = f_x\frac{dx}{dt} + f_y\frac{dy}{dt}$. さらにチェインルールより $h''(t) = f_{xx}(\frac{dx}{dt})^2 + 2f_{xy}(\frac{dx}{dt})(\frac{dy}{dt}) + f_{yy}(\frac{dy}{dt})^2 + f_x\frac{d^2x}{dt^2} + f_y\frac{d^2y}{dt^2}$. $x = k\cos t$, $y = k\sin t$ とすると

$$h''(t) = k^2 f_{xx}\sin^2 t - 2k^2 f_{xy}\sin t\cos t + k^2 f_{yy}\cos^2 t + kf_x(-\cos t) + kf_y(-\sin t)\ .$$

(2) $(\cos^2 t\sin^2 t)''$ の計算．(1) で $f(x,y) = x^2y^3$, $x = \cos t$, $y = \sin t$ とする．$f_x = 2xy^3$, $f_y = 3x^2y^2$, $f_{xx} = 2y^3$, $f_{xy} = 6xy^2$, $f_{yy} = 6x^2y$. $x' = -\sin t$, $y' = \cos t$, $x'' = -\cos t$, $y'' = -\sin t$ を (1) の結果に代入すると

$$\begin{aligned}
&(\cos^2 t\sin^3 t)'' = h''(t)\\
&= 2\sin^3 t\sin^2 t - 2(6\cos t\sin^2 t)(-\sin t)(\cos t) + 6(\cos^2 t)(\sin t)\cos^2 t + 2(\cos t)(\sin^3 t)(-\cos t)\\
&\quad + 3(\cos^2 t)(\sin^2 t)(-\sin t)\\
&= 2\sin^5 t - 17\sin^3 t\cos^2 t + 6\sin t\cos^4 t\ .
\end{aligned}$$

直接 $(\cos^2 t\sin^3 t)''$ を計算するよりも，合成関数の微分公式を作っておいて最後に代入する方が見通しがいいと思う．

18.1 (1) $f(x,y) = x^2+2xy+3y^2+4x+5y+6$ の極値をとる点と極値．極値をとる点の候補は $f_x = f_y = 0$ という連立方程式の解である．$f_x = 2x+2y+4$, $f_y = 2x+6y+5$. $f_x = f_y = 0$ の解は $(x,y) = (-7/4, -1/4)$. この点で $f_{xx} = 2$, $f_{xy} = 2$, $f_{yy} = 6$. よって $D := f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 12 - 4 = 8 > 0$. $f_{xx} = 2 > 0$ だから $f(x,y)$ は点 $(-7/4, -1/4)$ で極小値 $f(-7/4, -1/4) = 15/8$ をとる．

(2) $f(x,y) = (y-1)(y-x^2)$ の極値をとる点と極値．このような場合，$y = 1$ と $y = x^2$ のグラフを xy 平面に描いて $f(x,y) > 0$, $f(x,y) < 0$ の領域を色分けすると見通しがいい．平面は $y = 1$ と $y = x^2$ のグラフによって，f が互い違いに正，負になる五つの領域に分かれる．そのうち，点 $(0, 1/2)$ を含む領域だけが有界である．$z = f(x,y)$ という曲面を考えると，$f(x,y) > 0$ のところは盛り上がっていて $f(x,y) < 0$ のところはくぼんでいると考えられる．$f_x = -2x(y-1)$, $f_y = (y-x^2) + (y-1)$. $f_x = 0$ となるのは $x = 0$ または $y = 1$ の時である．

$x = 0$ の時 $f_y = 0$ となるのは $y = 1/2$ の時．点 $(0, 1/2)$ は $f(x,y) < 0$ となるただ一つの有界な領域内の点であり，そこで関数 $f(x,y)$ は極小値をとると考えられる（奈落の底だから）．

$y = 1$ の時 $f_y = 0$ となるのは $x = \pm 1$ の時．二点 $(\pm 1, 1)$ は二つのグラフが交わるところで $f(x,y) = 0$ となる点である，それは二つの領域が接する点である．したがって関数の値が増えてプラスになる方向と減ってマイナスになる方向がある．ということは極大値でも極小値でもないと考えられる．

以上の推測が正しいかどうかを計算で確認する．

$f_{xx} = -2y + 2$, $f_{xy} = -2x$, $f_{yy} = 2$, $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 4(1 - y - x^2)$.

• 点 $(0, 1/2)$ で $f_{xx} = 1 > 0$, $D = 4(1 - 1/2 - 0) = 2 > 0$. したがって $f(x,y)$ は点 $(0, 1/2)$ で極小値 $f(0, 1/2) = -1/4$ をとる．

• 点 $(\pm 1, 1)$ では $D = 4(1 - 1 - 1) = -4 < 0$ だから極値をとらない．

以上で推測は正しかったことが確認できた．

(3) $f(x,y) = y(x^2+y^2-1)$. これは (2) と似ている．$y = 0$ と $x^2+y^2-1 = 0$ を平面に描いて $f(x,y) > 0$ と $f(x,y) < 0$ の領域に色分けする．二つの曲線 $y = 0$ と $x^2+y^2-1 = 0$ により平面は f が互い違いに

正，負になる四つの領域に分かれる．このうち点 $(0, 1/\sqrt{3})$ を含む領域と $(0, -1/\sqrt{3})$ を含む領域の二つだけが有界である．

$f_x = 2xy$, $f_y = x^2 + 3y^2 - 1$, $f_{xx} = 2y$, $f_{xy} = 2x$, $f_{yy} = 6y$, $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 12y^2 - 4x^2$.

$f_x = f_y = 0$ となるのは $(0, \pm 1/\sqrt{3})$, $(\pm 1, 0)$ の四点である．

このうち $(\pm 1, 0)$ は二つの曲線が交わる点で $f(x, y) > 0$ の領域と $f(x, y) < 0$ の領域が接する点である．だから極値をとらない点のはずである．

二点 $(0, \pm 1/\sqrt{3})$ は二つの有界な領域に分かれている．点 $(0, 1/\sqrt{3})$ を含む領域では $f(x, y) < 0$ であり，点 $(0, -1/\sqrt{3})$ を含む領域では $f(x, y) > 0$ である．よって $f(x, y)$ は点 $(0, 1/\sqrt{3})$ で極小値をとり，点 $(0, -1/\sqrt{3})$ で極大値を取るはずである．

以上の推測を計算で確認する．

- 点 $(\pm 1, 0)$ では $D = -4 < 0$. よって $f(x, y)$ は $(\pm 1, 0)$ で極値をとらない．
- 点 $(0, 1/\sqrt{3})$ では $f_{xx} = 2/\sqrt{3} > 0$, $D = 4 > 0$ だから $f(x, y)$ は極小値 $f(0, 1/\sqrt{3}) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ をとる．
- 点 $(0, -1/\sqrt{3})$ では $f_{xx} = -2/\sqrt{3} < 0$, $D = 4 > 0$ だから $f(x, y)$ は極大値 $f(0, -1/\sqrt{3}) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ をとる．

(4) $f(x, y) = x^3 + y^2$. $f_x = f_y = 0$ となる点は原点 $(0, 0)$ だけである．ここでは $D = 0$ となるのでヘッシアン判定法が使えない．しかし x 軸を $x < 0$ から $x > 0$ に向かって動くと $f(x, y)$ マイナスから 0 を通ってプラスになるから $(0, 0)$ において極値を取らないことがわかる．

18.2 線形代数でまだやってないかもしれないので，二次曲線の描画について解説する．この描画は極値問題を考えるときに有効である．考え方はこうだ．線形代数では固有値と固有ベクトルとの関連で二次曲線の描画を学習するが，ここでは回転によって二次式 $ax^2 + 2bxy + cy^2$ の cross term の係数を 0 にする回転角を求める方法を以下に解説する（固有ベクトルを求めることと同じである）．(x, y) 座標軸を反時計回りに t 回転して (u, v) 座標軸を導入すると，元の (x, y) 座標は (u, v) 座標を t 回転したものになる．だから (u, v) 座標と (x, y) 座標の関係は

$$(A) \qquad \begin{aligned} x &= u\cos t - v\sin t \\ y &= u\sin t + v\cos t \end{aligned}$$

である．方針は角度 t をうまく取って (u, v) 座標に関する二次曲線の方程式を uv 項 (cross term) がない形にすることである．こうすることにより，元の二次曲線は (u, v) 平面では二本の軸が座標軸に一致するような楕円または双曲線になる．

(1) $x^2 + xy + y^2 = 1$. (A) を代入すると

$$\begin{aligned} &(u\cos t - v\sin t)^2 + (u\cos t - v\sin t)(u\sin t + v\cos t) + (u\sin t + v\cos t)^2 \\ &= (\cos^2 t + \sin^2 t + uv\cos t\sin t)u^2 + (\cos^2 t - \sin^2 t)uv + (\sin^2 t + \cos^2 t - \sin t\cos t)v^2 \\ &= 1\ . \end{aligned}$$

uv の係数 $\cos^2 t - \sin^2 t = \cos(2t) = 0$ となるような t として $t = \frac{\pi}{4}$ をとれる．$t = \frac{\pi}{4}$ の時 $\cos^2 t + \sin^2 t + uv\cos t\sin t = \frac{3}{2}$, $\sin^2 t + \cos^2 t - \sin t\cos t = \frac{1}{2}$ だから元の二次曲線を，(x, y) 座標軸を $\frac{\pi}{4}$ 回転した (u, v) 座標軸に関する (u, v) 座標系で表すと

$$\frac{u^2}{(\sqrt{2/3})^2} + \frac{v^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$$

である．u 軸との交点は $(\pm\sqrt{2/3}, 0)$, v 軸との交点は $(0, \pm\sqrt{2})$ である．

(2) $2x^2 + 4xy + 5y^2 = 6$. (A) を代入すると

$$\begin{aligned} &2(u\cos t - v\sin t)^2 + 4(u\cos t - v\sin t)(u\sin t + v\cos t) + 5(u\sin t + v\cos t)^2 \\ &= (2\cos^2 t + 5\sin^2 t + 4\cos t\sin t)u^2 + (6\cos t\sin t + 4\cos^2 t - 4\sin^2 t)uv + (2\sin^2 t + 5\cos^2 t - 4\sin t\cos t)v^2 \\ &= 6\ . \end{aligned}$$

uv の係数 $6\cos t\sin t - 4(\cos^2 - \sin^2 t) = 0$ となる t は $3\tan t - 2(1 - \tan^2 t) = 0$ を満たすから $\tan t = 2$ または $\tan t = -\frac{1}{2}$ である．そこで t を $\tan t = 2$ となるようにとる．このとき $\cos t = 1/\sqrt{5}$, $\sin t = 2/\sqrt{5}$

である（$1/\cos^2 t = 1 + \tan^2 t = 5$ だから）．(x, y) 座標軸を角度 t だけ反時計回りに回転したものを (u, v) 座標系にとる．u^2 の係数は $\frac{1}{5}(2 + 5 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2) = 6$, v^2 の係数は $\frac{1}{5}(2 \cdot 2^2 + 5 - 4 \cdot 2) = 1$ だから元の二次曲線を，(x, y) 座標軸を t 回転した (u, v) 座標軸に関する (u, v) 座標系で表すと

$$\frac{u^2}{1^2} + \frac{v^2}{\sqrt{6}^2} = 1$$

である．u 軸との交点は $(\pm 1, 0)$, v 軸との交点は $(0, \pm\sqrt{6})$ である．

(3) $x^2 + 2xy - y^2 = 1$. (A) を代入すると

$$\begin{aligned}
&(u\cos t - v\sin t)^2 + 2(u\cos t - v\sin t)(u\sin t + v\cos t) - (u\sin t + v\cos t)^2 \\
&= (\cos^2 t - \sin^2 t + 2\cos t\sin t)u^2 + (-2\cos t\sin t - 2\cos t\sin t + 2\cos^2 t - 2\sin^2 t)uv + (\sin^2 t - \cos^2 t - 2\sin t\cos t)v^2 \\
&= 1\ .
\end{aligned}$$

uv の係数 $-4\cos t\sin t + 2(\cos^2 - \sin^2 t) = 0$ となるには，t を $-\sin(2t) + \cos(2t) = 0$ を満たすようにとればいい．よって $2t = \frac{\pi}{4}$ すなわち $t = \frac{\pi}{8}$ にとればいい．(x, y) 座標軸を角度 t だけ反時計回りに回転したものを (u, v) 座標系にとる．u^2 の係数は $\cos(2t) + \sin(2t) = \sqrt{2}$, v^2 の係数は $\cos(2t) - \sin(2t) = -\sqrt{2}$ だから元の二次曲線を，(x, y) 座標軸を t 回転した (u, v) 座標軸に関する (u, v) 座標系で表すと

$$\frac{u^2}{\sqrt{1/2}} - \frac{v^2}{\sqrt{1/2}} = 1$$

である．u 軸との交点は $(\pm 2^{-1/4}, 0)$ で漸近線は (u, v) 平面の傾き ± 1 の二本の直線である．(x, y) 平面で言えば x 軸となす角度が $\frac{3\pi}{8}$ の直線と y 軸となす角度が $\frac{3\pi}{8}$ の二直線である．

18.3 (1) $x^2 + y^2 \leq 1$ という領域 D の中で $x^2 + xy + y^2$ の最大値と最小値を求めるには **18.2 (1)** の楕円の方程式の右辺 k をいろいろな正数に変化させた時，楕円 $E_k : x^2 + xy + y^2 = k$ が D と交わるような k の最大値と最小値を求めればいい．$k > 0$ の時，楕円 E_k を (u, v) 座標で表すと

$$\frac{u^2}{(\sqrt{2k/3})^2} + \frac{v^2}{(\sqrt{2k})^2} = 1$$

である．最小値は明らかに 0 である（楕円は縮んで原点になってしまう）．問題は最大値だ．最大値は楕円の短軸の長さが単位円の直径の長さに等しいときである．それは $\sqrt{2k/3} = 1$ となる時である．よって最大値は $k = \frac{3}{2}$ である．

(2) $x^2 + y^2 \leq 1$ という領域 D の中で $x^2 + xy - y^2$ の最大値と最小値を求めるには **18.2 (3)** の双曲線の方程式の右辺 k をいろいろな実数に変化させた時，双曲線 $H_k : x^2 + 2xy - y^2 = k$ が D と交わるような k の最大値と最小値を求めればいい．双曲線 H_k を (u, v) 座標で表すと

$$\frac{u^2}{\sqrt{1/2}k} - \frac{v^2}{\sqrt{1/2}k} = 1$$

である．この双曲線が単位円盤と交わるための条件は $2^{1/4}\sqrt{|k|} \leq 1$ である（$|k|$ があまり大きいと座標軸との交点と原点の距離 $2^{-1/4}\sqrt{|k|} > 1$ となって双曲線は単位円盤と交わらない）．よって $|k|$ が最大になるのは $\sqrt{|k|}2^{-1/4} = 1$ の時，すなわち $|k| = 1/\sqrt{1/2} = \sqrt{2}$ の時である．よって k の最大値は $\sqrt{2}$, 最小値は $-\sqrt{2}$ である．