力学II（後半：原田担当分）

第９回

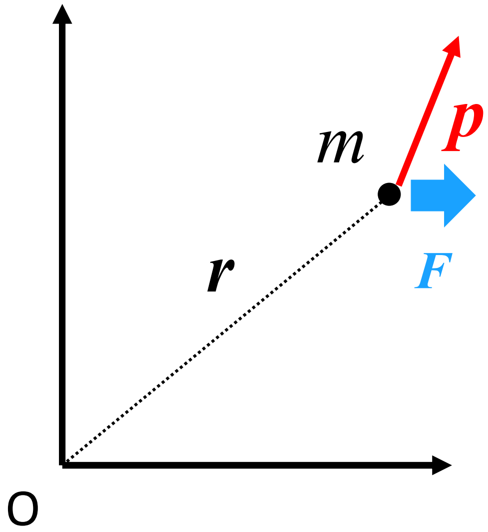
第9回の内容

角運動量とその保存則（pp.92-99）

・質点の角運動量とその性質
・質点系の全角運動量とその性質
・質点系に対するつり合いの条件
・質点系のつり合いの例

角運動量とその性質

質量mの質点にはたらく力を$\boldsymbol{F}$とし、原点Oから測った位置ベクトルを$\boldsymbol{r}$とする。



角運動量

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$$

力のモーメント

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

運動方程式　$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}$

運動量の定義　$\boldsymbol{p} = m\dot{\boldsymbol{r}}$

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N}$$

<u>角運動量の時間微分は力のモーメントに等しい</u>

角運動量の時間微分は力のモーメントに等しいことを示す。

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) = m\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}})$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = (\dot{\boldsymbol{A}} \times \boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{A} \times \dot{\boldsymbol{B}})}$$

$$= m(\dot{\boldsymbol{r}} \times \dot{\boldsymbol{r}}) + m(\boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}})$$

$$= m(\boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}})$$

$$= \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

$$= \boldsymbol{N}$$

力のモーメント

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \left(\dot{\boldsymbol{A}}\times\boldsymbol{B}\right) + \left(\boldsymbol{A}\times\dot{\boldsymbol{B}}\right)}$$ を示す。

x成分は、

$$\left.\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\right|_x = \frac{d}{dt}(A_yB_z - A_zB_y)$$

$$= \dot{A}_yB_z + A_y\dot{B}_z - \dot{A}_zB_y - A_z\dot{B}_y$$

$$= \left(\dot{A}_yB_z - \dot{A}_zB_y\right) + \left(A_y\dot{B}_z - A_z\dot{B}_y\right)$$

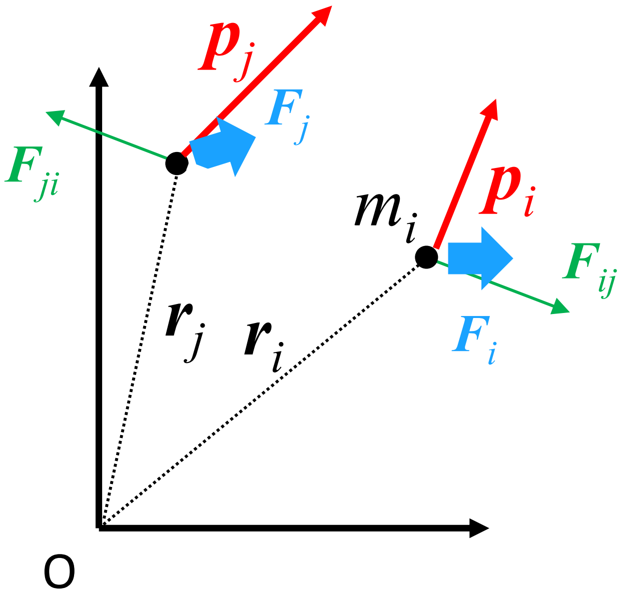
$$= \left(\dot{\boldsymbol{A}}\times\boldsymbol{B}\right)_x + \left(\boldsymbol{A}\times\dot{\boldsymbol{B}}\right)_x$$

y成分、z成分も同様であり、

$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \left(\dot{\boldsymbol{A}}\times\boldsymbol{B}\right) + \left(\boldsymbol{A}\times\dot{\boldsymbol{B}}\right)$　が成り立つ。

全角運動量とその性質

n個の質点系があるとして、i番目の質点の質量をm_i、はたらく外力を$\boldsymbol{F}_i$と、原点Oから測った位置ベクトルを$\boldsymbol{r}_i$とする。i番目の質点とj番目の質点にはたらく内力を$\boldsymbol{F}_{ij}$とする。



$$\boldsymbol{F}_{ij} \,//\, (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)$$

$$\boldsymbol{F}_{ji} = -\boldsymbol{F}_{ij}$$

全角運動量

$$\boldsymbol{L} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i$$

外力のモーメントの和

$$\boldsymbol{N} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i$$

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N}$$

全角運動量の時間微分は外力のモーメントの和に等しい

全角運動量の時間微分は外力のモーメントの和に等しいことを示す。

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\sum_i \boldsymbol{r_i}\times\boldsymbol{p_i}\right)=\frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i(\boldsymbol{r_i}\times\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}})\right)$$

$$=\sum_i m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}\times\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}})+\sum_i m_i(\boldsymbol{r_i}\times\ddot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}})$$

$$=\sum_i m_i(\boldsymbol{r_i}\times\ddot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}})$$

ここで、i番目の質点の運動方程式は、

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}=\boldsymbol{F_i}+\sum_{j(j\neq i)}\boldsymbol{F_{ji}}$$

$\boldsymbol{r_i}$をかけて和をとると、

$$\sum_i m_i(\boldsymbol{r}_i \times \ddot{\boldsymbol{r}}_i) = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i + \sum_i \sum_{j(j\neq i)} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ji}$$

$$= \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i + \sum_{i,j\ (i\neq j)} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ij}$$

$$= \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i + \sum_{i,j\ (i<j)} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ij} + \sum_{i,j\ (i<j)} \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_{ji}$$

$$= \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i + \sum_{i,j\ (i<j)} (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \times \boldsymbol{F}_{ij}$$

$$= \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{N}$$ 外力のモーメントの和

角運動量保存則

外力が働かない場合（$\boldsymbol{F_i} = \boldsymbol{0}$）、 $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{0}$となり、角運動量は時間によらず一定となる。

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N} \Leftrightarrow \boldsymbol{L} = \text{const.}$$

質点系のつり合いの条件

：全ての質点が静止している状態

つり合いの状態では、重心は静止していて、全角運動量もゼロであるので、

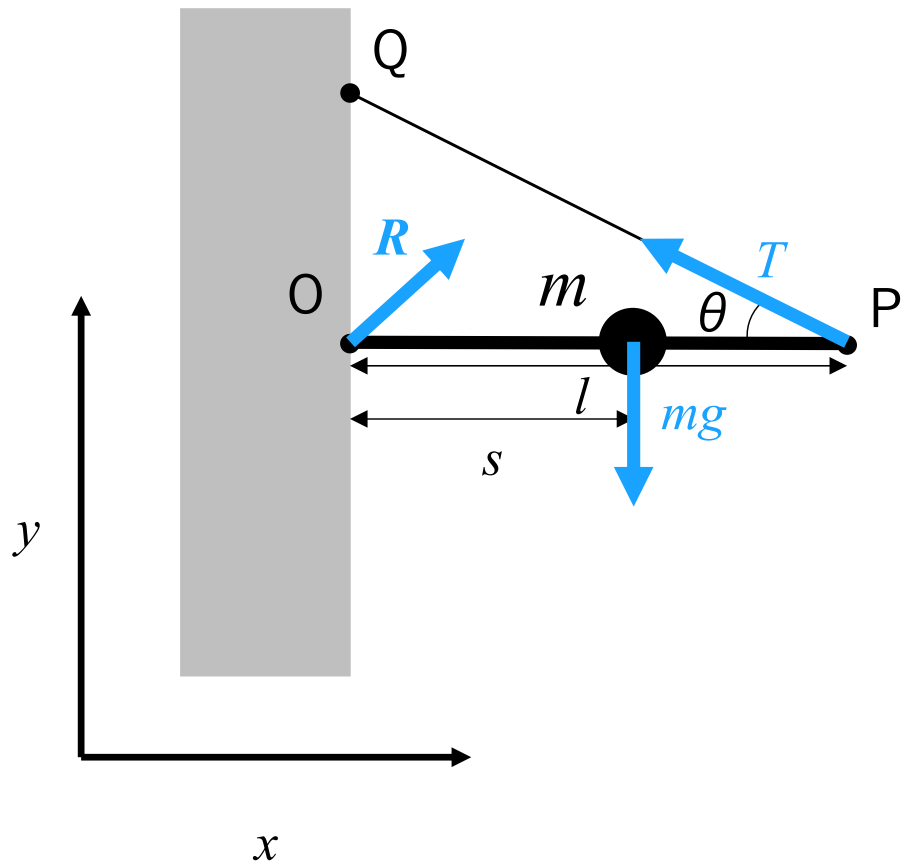
$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}$$

$$\sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}$$

が、質点系のつり合いの条件となる。

質点系のつり合いの例題

長さl、質量のない棒を垂直な壁面上の点Oに固定し、距離sだけ離れた点Sに質量mの物体をのせ、棒の他端Pを糸で引っ張り壁面上の点Qに∠QPO = θとなるように水平に固定する。糸の張力をT、点Oにおける抗力$\boldsymbol{R} = (R_x, R_y)$を求めよ。



つり合いの条件より、棒に加わる外力の和はゼロであり、

$$R_x - T\cos\theta = 0$$

$$R_y + T\sin\theta - mg = 0$$

点Oのまわりの力のモーメントはゼロなので、

$$mgs - Tl\sin\theta = 0$$

したがって、

$$T = \frac{mgs}{l \sin \theta}, R_x = \frac{mgs}{l \tan \theta}, R_y = mg\left(1 - \frac{s}{l}\right)$$

となる。

力のモーメントは、どの点の周りでとっても、結果は同じになる。

質点系のつり合いの例題

長さl、質量のない棒を垂直な壁面上の点Oに固定し、距離s だけ離れた点Sに質量mの物体をのせ、棒の他端Pを糸で引っ張り壁面上の点Qに∠QPO = θとなるように水平に固定する。糸の張力をT、点Oにおける抗力$\boldsymbol{R} = (R_x, R_y)$を求めよ。