第一回課題解説.

1. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\alpha\in\mathbb{R}$ に収束するとは，α 中心のどんな長さ $\varepsilon>0$ の区間をとっても，その外側にある数列の点の個数が有限個であることを言う．数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が如何なる実数にも収束しないことは，任意の実数 α に対しその否定が成り立つことである．論理式で書くと

$$(\forall\alpha\in\mathbb{R})(\exists\delta>0)(\forall N)(\exists n)(n>N\ \wedge\ |a_n-\alpha|>\delta)$$

である．これは日本語で表現すると，例えば次のようになる：

- どんな実数 α をとっても，$a_n-\alpha|>\delta$ となる n が無限個存在するような $\delta>0$ がとれる．

次のように言えば，無限個という言葉を避けられる：

- どんな実数 α をとっても，それに応じて次の性質をもつ $\delta>0$ がとれる：どんなに大きい N に対しても $n>N$ かつ $|a_n-\alpha|>\delta$ であるような n がある．
- どんな実数 α をとっても，それに応じて $\delta>0$ があって，どんなに大きい N に対しても，$n>N$ かつ $a_n-\alpha|>\delta$ であるような n がある．

注意． $(\forall\alpha\in\mathbb{R})$ と $(\exists\delta>0)$ の順序を反対にすると意味が全く変わってしまう.「どんな α に対してもそれに応じた $\delta>0$ でこれこれしかじかのものがとれる」が,「ある $\delta>0$ をとると，全ての α に対してこれこれしかじか」の意味になってしまう．

2. $a\sqrt{n}+b\sqrt{n+1}+c\sqrt{n+2}=\sqrt{n}(a+b\sqrt{\frac{n+1}{n}}+c\sqrt{\frac{n+2}{n}}=\sqrt{n}(a+b\sqrt{1+\frac{1}{n}}+c\sqrt{1+\frac{2}{n}})$ であるが，$n\to\infty$ のときにこれが 0 に収束するためには $a+b\sqrt{1+\frac{1}{n}}+c\sqrt{1+\frac{2}{n}}\to 0\ (n\to\infty)$ であることが必要条件である．よって $a+b+c=0$ であることが必要条件である．未知数 3 個に対し条件は 1 個だけなので，a,b,c の値は不定のはずである．そこで $a=-b-c$ のもとで問題の極限がどうなるかを調べると，$-(b+c)\sqrt{n}+b\sqrt{n+1}+c\sqrt{n+2}=b(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})+c(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})=\frac{b}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}+\frac{2c}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}\to 0$ $(n\to\infty)$ である．よって，$a+b+c=0$ は問題の極限が 0 になるための十分条件でもあることがわかった．答：$a+b+c=0$ を満たす全ての (a,b,c).

3. 教科書の 1.1. $\varepsilon>0$ を勝手にとってくる．(i) $N=\varepsilon^{-2}$ とおくと $n>N$ なら $0<n^{-\frac{1}{2}}<N^{-\frac{1}{2}}=\varepsilon$ である．よって $\lim_{n\to\infty}n^{-\frac{1}{2}}=0$ である．(ii) $N=10^{\frac{1}{\varepsilon}}$ とおくと $n>N$ なら $0<\frac{1}{\log_{10}n}<\frac{1}{\log_{10}N}=\varepsilon$ である．よって $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log_{10}n}=0$ である．

教科書の 1.2. (i) $\lim_{n\to\infty}\{\frac{(n+1)^2}{n-1}-\frac{(n-1)^2}{n+1}\}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+2}{n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{2}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}}=6.$ (ii) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0.$ (iii) $\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3}=\frac{(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6}=\frac{1}{3}$. 別解：区分求積法より $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\{(\frac{1}{n})^2+(\frac{2}{n})^2+\cdots+\frac{n}{n}^2\}=\int_0^1x^2dx=\frac{1}{3}$.

教科書の 1.3. (i) $c=1+h\ (h>0)$ とおくと $c^n=(1+h)^n\geq\binom{n}{2}h^2=\frac{n(n-1)}{2}h^2$. よって $0<\frac{n}{c^n}<\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}h^2}=\frac{2}{(n-1)h^2}\to 0\ (n\to\infty)$. はさみうち原理より $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{c^n}=0$ である．(ii) $0<\frac{2^n}{n!}=\frac{2}{1}\frac{2}{2}\frac{2}{3}\cdots\frac{2}{n}<\frac{2}{1}\frac{2}{2}(\frac{2}{3})^{n-2}\to 0\ (n\to\infty)$. はさみうち原理より $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$ である．(iii) も (ii) と同様. $\frac{c}{1},\frac{c}{2},\ldots,\frac{c}{k},\frac{c}{k+1},\ldots$ と並べると，$\frac{c}{k}\to 0\ (k\to\infty)$ だから，必ずどこかで $\frac{c}{k+1}<1$ となる．このような k を一つとって固定すると $\frac{c}{k+1}<1$ だから $n>k$ なら $0<\frac{c^n}{n!}<\frac{c^k}{k!}(\frac{c}{k+1})^{n-k}\to 0\ (n\to\infty)$ である．はさみうち原理より $\lim_{n\to\infty}\frac{c^n}{n!}=0$ である．