

# Comments

2025 年 1 月 15 日

## 1 総評

皆さんお疲れ様でした. 以下の通りです. 今年も頑張ってください.

提出者: 48 名

平均点: 4.33 点

満点: 7 名

対角化が何か分かっていない方が目立ちました. また, Gram-Schmidt の正規直交化法が何をしている操作なのか掴めていない方もいるようです.

## 2 各設問

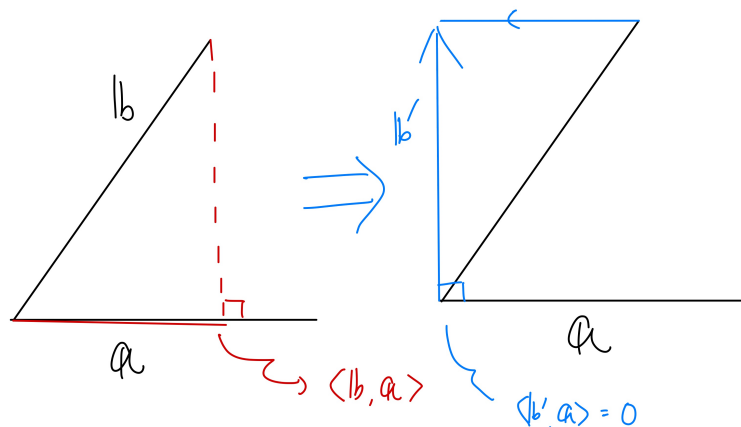
- (1) これは 3 乗して単位行列となる行列  $A$  に対して, その 200 乗は  $A^0, A^1, A^2$  のどれと同じになるかという問題でした. できは良かったです.
- (2) 対角化可能ということが固有空間の次元から判断できるか、という趣旨です.
  - (a) できは良かったです.
  - (b) ここは間違いが多かったです. 正答率 6 割でした.

**Definition 2.1.** 対角行列とは, 対角成分以外全て 0 となる行列のことである. ただし, 対角成分とは, 行列  $A$  の  $(i, j)$  成分を  $a_{ij}$  と置くとき,  $i = j$  となる成分のことである.

これが対角行列の定義であり, 対角化は行列を対角行列にする操作のことです. 対角行列になっていない時点で間違っています.

- (3) 正答率は 6 割を切りました. Gram-Schmidt の正規直交化法を使えるか、という問題です. 正規化と直交化のプロセスに分かれています.  
正規化 … ノルムで割ることです. 英語では `normalize` です. `norm` そのままです.  
直交化 … 内積が 0 となるようにしています.

**Remark 2.2.** 内積というのは, 実は射影ということを教わった方もいるでしょうか.



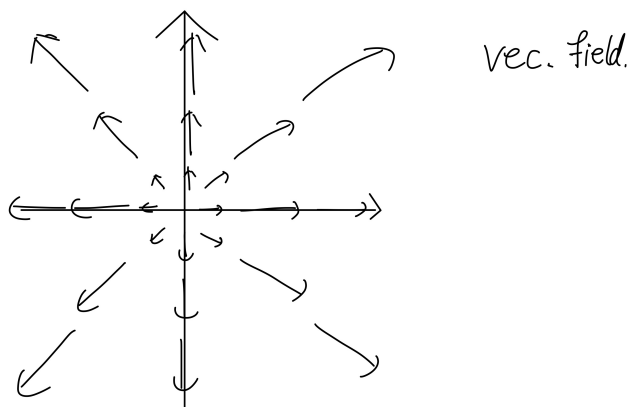
基本的には上図のイメージです. 左の  $\mathbf{b}$  に対して新しい  $\mathbf{b}'$  を作るのが直交化のプロセスです.

- (4) 直交行列の定義を知っているのかという問題です. ' $AA = E$  とするか  $A'A = E$  とするかで印象が変わる人もいるかもしれません. どこが複合同順か書いている人はよく理解していると感じました.
- (5) これも正答率は 6 割を切りました. 特に「直交行列を用いて」の部分に気付かなかったミスが多かったです. これができた方はよく頑張りました.

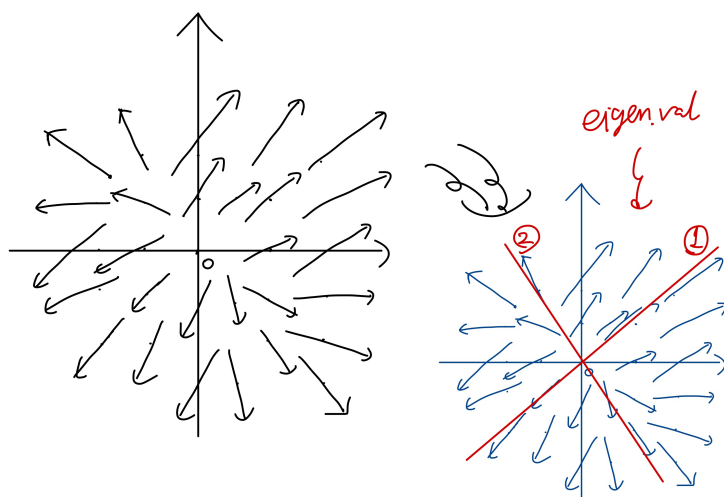
### 3 おまけ

対角化ができていない方が多かったので, 実際に問題を通して確認しましょう. (2)(b) です.

まず, ベクトル場というものを考えます. 天気予報に出てくるような, 風を可視化したものをイメージしてください. 物理を履修した方は電磁場というのを思い浮かべても良いかもしれません.



これが単純な状態です.  $(1,0)$  には  $(0,0) \rightarrow (1,0)$  へ向かうベクトルを配置しています. これに行列  $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  を掛けていきます. わかりづらいのでベクトルを増やします.



すると, (やや雑ですが) 左のようになります.

よく見ると, いくつかのベクトルは向きが変化していないことに気づきます. 右の図を見ると, 赤い線の上は, ちょうど向きが変化していません.

これは

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

となり, 固有ベクトル空間を表していることが分かります.

上の赤①と書いてあるのは固有値 5 の固有空間で, 赤②と書いてあるのは固有値 2 の固有空間です.

これらの固有ベクトルを基底に取れば,  $(1, 0)$  には  $(0, 0) \rightarrow (5, 0)$  へ向かうベクトルが,  $(0, 1)$  には  $(0, 0) \rightarrow (0, 2)$  へ向かうベクトルが配置されます. これが対角化の状態です.

では, 基底の取り替えとはどうやるのか, というのは, 基底変換行列を掛けることに対応します.

これはもう既にやったかと思います.

可視化すると楽になる場合もありますので, 期末頑張ってください.