第六回課題解説

教科書の問 5.2

- $\arcsin x$ とは $\sin\theta = x$ となる角 θ で区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ に属するもの,
- $\arccos x$ とは $\cos\theta = x$ となる角 θ で区間 $[0, \pi]$ に属するもの,
- $\arctan x$ とは $\tan\theta = x$ で区間 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ に属するもののことである.

したがって：
(1) $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.
(2) $\arccos(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{3\pi}{4}$.
(3) $\arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$,
(4) $\lim_{x\to\infty}\arctan x = \frac{\pi}{2}$.

教科書の問 5.3 (1) $\alpha = \arctan\frac{1}{2}$, $\beta = \arctan\frac{1}{3}$ とおくと $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$ である．よって

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\frac{1}{3}} = 1$$

から

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$$

がしたがう.

(2) $\alpha = \arctan\frac{1}{5}$, $\beta = \arctan\frac{1}{239}$ とおく．$\tan\alpha = \frac{1}{5}$ だから tan の加法定理より

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2/5}{1-1/25} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}\ ,$$
$$\tan 4\alpha = \frac{2\tan 2\alpha}{1-\tan^2 2\alpha} = \frac{5/6}{1-25/144} = \frac{120}{119}\ .$$

よって 4α は $\pi/4$ より僅かに大きい．したがって tan の加法定理より

$$\tan\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan 4\alpha - 1}{1+\tan 4\alpha\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{1/119}{1+120/119} = \frac{1}{239}\ .$$

この等式は小さい正の角 ($< \frac{\pi}{2}$) の tan の値に対するものだから，両辺の arctan を取ることができて,

$$4\alpha - \frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{239}$$

を得る．ここで $\alpha = \arctan\frac{1}{5}$ だから，結局

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

である.

教科書の問 6.2 (1) $(\sqrt{1+x^2})' = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

(2) (1) の結果を使って $\{\log(x+\sqrt{1+x^2})\}' = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

(3) (1)(2) の結果を使って $\{\frac{1}{2}\{x\sqrt{1+x^2}+\log(x+\sqrt{1+x^2})\}\}' = \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}$.

(4) $\tan\frac{x}{2} > 0$ なら $(\log|\tan\frac{x}{2}|)' = \frac{(\tan\frac{x}{2})'}{\tan\frac{x}{2}} = \frac{1/2\cos^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}$ である．$\tan\frac{x}{2} < 0$ のときも結果は同じである.

(5) $x > 0$ なら指数関数の底の変換公式から $x^x = e^{x\log x}$ だから $(x^x)' = (e^{x\log x})' = e^{x\log x}(\log x + x\cdot\frac{1}{x}) = x^x(1+\log x)$.

教科書の問 6.3 (1) $(\arcsin\sqrt{1-x^2})' = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}}\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\mathrm{sgn}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ である．ここで $\sqrt{x^2} = |x|$, $\frac{x}{|x|} = \mathrm{sgn}(x)$ を用いた．ただし，$\mathrm{sgn}(x)$ は $x > 0$ なら 1, $x < 0$ なら -1 をとる符号関数である.

(2) $(\arctan\frac{x}{a})' = \frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}\frac{1}{a} = \frac{a}{a^2+x^2}$.

(3) $(\arctan\frac{a}{x})' = \frac{1}{1+(\frac{a}{x})^2}\frac{-a}{x^2} = -\frac{a}{x^2+a^2}$.

(4) まずは，直接 $(\arctan\frac{2x}{1-x^2})'$ を計算する．合成関数の微分法を使うと $(\arctan\frac{2x}{1-x^2})' = \frac{1}{1+(\frac{2x}{1-x^2})^2}(\frac{2x}{1-x^2})' = \frac{1}{1+(\frac{2x}{1-x^2})^2} \times (\frac{2}{1-x^2} + 2x\cdot\frac{2x}{(1-x^2)^2}) = \frac{2(1-x^2)+4x^2}{(1-x^2)^2+4x^2} = \frac{2(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2}$．もちろんこれで正しい計算だが，次のようにも考えられる：$x = \tan\theta$ とおくと $\tan 2\theta = \frac{2x}{1-x^2}$ である．よって $\arctan\frac{2x}{1-x^2} = 2\theta = 2\arctan x$ である．よって $(\arctan\frac{2x}{1-x^2})' = \frac{2}{1+x^2}$ である．

(5) $a > 0$ とする．$\{\frac{1}{2}(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a})\}' = \frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{x}{2}\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{1}{2}a^2\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}\frac{1}{a} = \sqrt{a^2-x^2}$.