教科書の問 12.2

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$．これは教科書の例題 12.8(1) の特別の場合である．例題 12.8(1) で求めた漸化式を使って解くこともできるが，ここでは漸化式そのものではなく，漸化式を導くときの考え方を使って問題を解く．その考え方とは，公式 $\arctan x = \displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2}$ の右辺に部分積分を適用することである．

$$\begin{aligned}\arctan x &= \int \frac{dx}{1+x^2} = \int \frac{x'}{1+x^2}dx = \frac{x}{1+x^2} + \int x\frac{2x}{(1+x^2)^2}dx \\ &= \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{(1+x^2)-1}{(1+x^2)^2}dx = \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{dx}{1+x^2} - 2\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{x}{1+x^2} + 2\arctan x - 2\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}\end{aligned}$$

だから

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2} + \arctan x\right) .$$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)^3}$．これは教科書の例題 12.8(1) で $A=-1$, $\alpha=-3$ の場合 I_{-3} である．例題 12.8(1) で求めた漸化式を使って問題を解く．例題 12.8(1) で $A=-1$, $\alpha=-2$, $\alpha=-1$ とおくと

$$\begin{aligned}&-3I_{-2} = x(x^2-1)^{-2} + 4I_{-3} \\ &-I_{-1} = x(x^2-1)^{-1} + 2I_{-2}\end{aligned}$$

である．この漸化式の初期条件は $I_{-1} = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$ である．順に解いていくと

$$\begin{aligned}I_{-2} &= -\frac{1}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{x}{2(x^2-1)} , \\ I_{-3} &= \frac{3}{16}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{3x}{8(x^2-1)} - \frac{x}{4(x^2-1)^2} = \frac{3}{16}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{3x^3-5x}{8(x^2-1)^2} \quad \text{(これが答)}\end{aligned}$$

となる．

(3) 例題 12.8(2) で $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ は漸化式 $J_n = \dfrac{n-1}{n}J_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $J_0 = \frac{\pi}{2}$, $J_1 = 1$ を満たすことを示した．これによると

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = J_3 = \frac{2}{3}J_1 = \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3} .$$

(4) $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ は漸化式 $J_n = \dfrac{n-1}{n}J_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $J_0 = \frac{\pi}{2}$, $J_1 = 1$ を満たすことを使う．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = J_4 = \frac{3}{4}J_2 = \frac{3}{4}\frac{1}{2}J_0 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16} .$$

(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ は $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ と同じ漸化式を満たす．一方，$y = \cos^6 x$ $(0 \leq x \leq 2\pi)$ のグラフを $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$, $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$ に分けると，$y = \cos x$ のグラフの対称性から，曲線下の面積は等しい．よって

$$\int_0^{2\pi} \cos^6 x dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x dx = 4J_6 = 4\frac{5}{6}J_4 = 4\frac{5}{6}\frac{3}{4}J_2 = 4\frac{5}{6}\frac{3}{4}\frac{1}{2}J_0 = 4 \times \frac{5}{6}\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = 4 \times \frac{5\pi}{32} = \frac{5\pi}{8} .$$

(6) $\displaystyle\int \tan^4 x dx$. 例題 12.8 にならって漸化式を作ってみる．

$$I_n = \int \tan^n x dx$$

とおくと $\tan^2 x + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ と $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ を用いて

$$\begin{aligned} I_n &= \int \tan^{n-2} x \tan^2 x dx = \int \tan^{n-2} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = -I_{n-2} + \int \tan^{n-2} x (\tan x)' dx \\ &= -I_{n-2} + \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} \quad (n \geq 2) \ . \end{aligned}$$

これが，I_n が満たす漸化式である．これを初期条件 $I_0 = x$, $I_1 = -\log|\cos x|$ の元で解けば I_n を求めることができる．問題の積分は I_4 だから

$$\begin{aligned} I_2 &= -I_0 + \tan x = -x + \tan x \ , \\ I_4 &= -I_2 + \frac{\tan^3 x}{3} = x - \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} \ . \end{aligned}$$

試しに結果を微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left\{x - \tan x + \frac{\tan^3 x}{3}\right\} &= 1 - \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^4 x - \cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^4 x} \\ &= \frac{(1-\sin^2 x)^2 - (1-\sin^2 x) + \sin^2 x}{\cos^4 x} = \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} = \tan^4 x \end{aligned}$$

言わずもがなだろうが，検算を習慣にしよう．

教科書の問 12.3

(1) 分母は $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$ と因数分解されるから

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+3x+2} = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) dx = \left[\log \frac{x+1}{x+2}\right]_0^1 = \log\frac{2}{3} - \log\frac{1}{2} = \log\frac{4}{3}.$$

(2) 分母は $x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3$ と平方完成されるから $x + 1 = \sqrt{3}u$ とおくと

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2+2x+4} = \int_0^2 \frac{dx}{(x+1)^2+3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}[\arctan u]_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \ .$$

(3) 分母は $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x+1)(x+2)(x+3)$ と因数分解されるから被積分関数は

$$\frac{1}{x+3}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}\right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right)$$

と部分分数分解される．よって

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3+6x^2+11x+6} &= \int \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}\right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x+3} - \log\frac{x+2}{x+3} = \frac{1}{2}\log\frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2} \ . \end{aligned}$$

(4) 被積分関数は

$$\frac{1}{x^4+x^3}=\frac{1}{x^3(x+1)}=\frac{ax^2+bx+c}{x^3}+\frac{d}{x+1}$$

の形に部分分数分解される．未定係数法で a,b,c,d を求めると

$$a=1,\ b=-1,\ c=1,\ d=-1$$

である．よって

$$\frac{1}{x^4+x^3}=\frac{x^2-x+1}{x^3}-\frac{1}{x+1}$$

である．したがって

$$\int\frac{dx}{x^4+x^3}=\int(x^{-1}-x^{-2}+x^{-3}-(x+1)^{-1})dx=\log\left|\frac{x}{x+1}\right|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}\ .$$

(5) 「和と差の積は二乗の差」を「二乗の差は和と差の積」の形で使うと，分母は

$$x^4+1=x^4+2x^2+1-2x^2=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$$

と因数分解される．よって被積分関数は

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{ax+b}{x^2-2\sqrt{2}x+1}+\frac{cx+d}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

の形に部分分数分解される．未定係数法で a,b,c,d を求めると

$$a=c=-\frac{1}{2\sqrt{2}},\ b=\frac{1}{2},\ d=-\frac{1}{2}$$

である．よって

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^4+1}&=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\\&=-\frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{(x^2-\sqrt{2}x+1)'}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{(x^2+\sqrt{2}x+1)'}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{4}\frac{1}{(x-\frac{1}{\sqrt{2}})^2+\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}\frac{1}{(x+\sqrt{2})^2+\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

である．積分しやすいように f'/f の形を作った点に注意してほしい．一方，a を正の定数とするとき $x=au$ とおくと

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\int\frac{adu}{a^2(u^2+1)}=\frac{1}{a}\arctan u=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$$

という公式が成り立つから，結局

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\sqrt{2}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\sqrt{2}\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

である．

結果を微分して $\dfrac{1}{x^4+1}$ になることの確認を各自でやってほしい．

教科書の問 12.4.

(1) $\sqrt{x}=t$ とおくと $x=t^2,\ dx=2tdt$ だから

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\int\frac{2tdt}{1+t}=2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt=2(t-\log(1+t))=2(\sqrt{x}-\log(1+\sqrt{x}))\ .$$

(2) 部分積分により

$$\int \sqrt{x^2+A}\,dx = x\sqrt{x^2+A} - \int \frac{x^2+A-A}{\sqrt{x^2+A}}dx = x\sqrt{x^2+A} - \int \sqrt{x^2+A}\,dx + A\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}$$

である．教科書の例題 12.11 より $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \log|x+\sqrt{x^2+A}|$ だから，結局

$$\int \sqrt{x^2+A}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+A} + A\log|x+\sqrt{x^2+A}|\right)$$

である．

(3) $2+x-x^2 = -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$ だから $x-\frac{1}{2} = \frac{3}{2}t$ とおくと $-1 \le x \le 2$ は $-1 \le t \le 1$ に対応して，$dx = \frac{3}{2}dt$ だから

$$\int_{-1}^{2} \sqrt{2+x-x^2}dx = \int_{-1}^{2} \sqrt{-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}dx = \frac{9}{4}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}dt = \frac{9\pi}{8}\ .$$

最後に $\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}dt$ は半径 1 の半円の面積 $\dfrac{\pi}{2}$ に等しいことを使った．

(4) $\tan\frac{x}{2} = t$ とおくと $\dfrac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = dt$ より $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \dfrac{2t}{1+t^2}$ である．よって

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \log|t| = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right|\ .$$

(5) $\tan\frac{x}{2} = t$ とおくと $\dfrac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = dt$ より $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$, $\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \dfrac{2}{1+t^2} - 1 = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ である．よって

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{2+\cos x} &= \int \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2dt}{t^2+3} \\ &\overset{t=\sqrt{3}u}{=} \frac{2\sqrt{3}}{3}\int\frac{du}{u^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan u = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\ .\end{aligned}$$

(6) $a > 1$ とする．(5) と同様に

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{dx}{2+\cos x} &\overset{\tan\frac{x}{2}=t}{=} \int_0^{\infty}\frac{1}{a+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2} = \int_0^{\infty}\frac{2dt}{(a-1)t^2+(a+1)} = \frac{2}{a-1}\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^2+\frac{a+1}{a-1}} \\ &\overset{t=\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}u}{=} \frac{2}{a-1}\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}du}{\frac{a+1}{a-1}(u^2+1)} = \frac{2}{\sqrt{(a-1)(a+1)}}\int_0^{\infty}\frac{du}{u^2+1} = \frac{\pi}{\sqrt{(a-1)(a+1)}}\ .\end{aligned}$$

最後に $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{du}{u^2+1} = [\arctan u]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}$ を使った．