第 11 回講義：基礎的な積分計算.（教科書 2.11）

テーマ：積分をどう計算するか（積分計算の技術）：

3. 計算のテクニックその 1：部分積分 = 積の微分法の積分版.

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx\ .$$

不定積分は

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx\ .$$

($\because$) 積の微分法の公式 $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ を a から b まで積分する． $\square$

4. 計算のテクニックその 2：置換積分 = 合成関数の微分法の積分版.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt\ .$$

不定積分は

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt\ .$$

($\because$) $F'(x) = f(x)$ とする．合成関数の微分の公式 $\frac{d}{dt}F(\phi(t)) = f(\phi(t))\phi'(t)$ の両辺を α から β まで積分すると左辺は $F(b) - F(a)$, 右辺は $\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$．ただし $a = \phi(\alpha)$, $b = \phi(\beta)$． $\square$

• 部分積分の計算例.

例 1. $\displaystyle\int_a^b xe^x dx = [xe^x]_a^b - \int_a^b e^x dx = be^b - ae^a - e^b + e^a$
$(e^x)' = e^x$ と思って部分積分した.

例 2. $\displaystyle\int_2^3 \log x dx = [x\log x]_2^3 - \int_2^3 x\cdot\frac{1}{x}dx = 3\log 3 - 2\log 2 - 1.$
$1 = (x)'$ と思って部分積分した.

例 3. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2 - x^3}dx = \left[x\left(-\frac{2}{3}\right)(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \int_0^1\left(-\frac{2}{3}\right)(1-x)^{\frac{3}{2}}dx = -\frac{2}{3}\frac{2}{5}[(1-x)^{\frac{5}{2}}]_0^1 = \frac{4}{15}.$
$(1-x)^{\frac{1}{2}} = (-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}})'$ と思って部分積分した.

例 4. $\displaystyle\int e^x \sin x dx = e^x\sin x - \int e^x(\cos x)dx = e^x \sin x - \int e^x\cos x dx$（$e^x = (e^x)'$ と思って部分積分した）．$\displaystyle\int e^x\cos x dx = e^x\cos x - \int e^x(-\sin x)dx = e^x\cos x + \int e^x \sin x dx$（$e^x = (e^x)'$ と思って部分積分した）．この 2 式から $\displaystyle\int e^x\cos x dx$ を消去して $\displaystyle\int e^x\sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x).$

例 5. $\displaystyle\int_a^b \sin^2 x dx = \int_a^b(-\cos x)'\sin x dx = [-\cos x\sin x]_a^b - \int_a^b(-\cos x)(\cos x)dx = [-\cos x \sin x]_a^b + \int_a^b(1-\sin^2 x)dx = [-\cos x\sin x]_a^b + \int_a^b 1dx - \int_a^b \sin^2 x dx.$
よって $\displaystyle\int_a^b \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\{(-\sin b\cos b + \sin a\cos a) + (b-a)\}.$

例 6. $\displaystyle\int_a^b \sin^4 x dx = \int_a^b(-\cos x)'\sin^3 x dx$
$\displaystyle = [-\cos x\sin^3 x]_a^b - \int_a^b(-\cos x)3\sin^2 x(\cos x)dx$

$= [-\cos x \sin^3 x]_a^b + 3\int_a^b \sin^2 x(1-\sin^2 x)dx$. よって例 5 の結果を用いて

$$\int_a^b \sin^4 x dx = \frac{1}{4}\{(-\cos b \sin^3 b + \cos a \sin^3 a)\} + \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}\{(-\sin b \cos b + \sin a \cos a) + (b-a)\}\right].$$

注意. 最後の 2 例：積分 $I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ で決まる数列 $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ は漸化式 $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ を満たす．したがって I_0, I_1 さえ計算すれば，一般項 I_n は漸化式から次々に計算できる．$I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$ である．

- **置換積分の計算例．**

パターン 1. x の適当な関数 $f(x)$ をひとかたまりと考えて新しい独立変数 $\boxed{u = f(x)}$ を導入するパターン．たとえば $\int \{f(x)\}^{\alpha} f'(x)dx$ $(\alpha \neq -1)$ の形．このとき $u = f(x)$ とおき，$f'(x)dx = du$ を代入する．答は $\frac{1}{\alpha+1} f(x)^{\alpha+1}$ である．

例 1. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{du}{u} = \log|u| = \log|f(x)$. $u = f(x)$ とおいて置換積分した．

例 2. $\displaystyle\int_0^{2\pi} 2x\cos(x^2)dx = \int_0^{4\pi^2} \cos u du = [\sin u]_0^{4\pi^2} = \sin(4\pi^2)$. $u = x^2$ とおいて置換積分した．

例 3. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\log x dx = \int u du = \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}(\log x)^2$. $u = \log x$ とおいて置換積分した．

例 4. $\displaystyle\int \frac{x}{3}(x^2+3)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{6}\int (u+3)^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{6}\frac{2}{3}(u+3)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{9}(x^2+3)^{\frac{3}{2}}$. $u = x^2$ とおいて置換積分した．

例 5. $\displaystyle\int \cos(2x)dx = \frac{1}{2}\int \cos u du = \frac{1}{2}\sin u = \frac{1}{2}\sin(2x)$. $u = 2x$ とおいて置換積分した．

例 6. $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}dx = \int \frac{du}{u(1+u)} = \int\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\right)du = \log u - \log(1+u) = x - \log(1+e^x)$. $u = e^x$ とおいて置換積分した．

例 4 では $2x(x^2+3)^{\frac{1}{2}} = (\frac{2}{3}(x^2+3)^{\frac{3}{2}})'$ に着目する．例 6 では $e^x = t$ とおき部分分数分解を用いる．

パターン 2. 独立変数 x を関数 $f(u)$ におきかえて新しい独立変数 u を $\boxed{x = f(u)}$ という置き換えによって導入するパターン．第一のパターンとの違いは，$x = f(u)$ を代入して積分計算した結果を x の関数に戻すには逆関数 $u = f^{-1}(x)$ を代入しなければならない点である．従って，例えば $x = \sin u$ のような置き換えをしたら $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ のような制限が必要になることがある．たとえば $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-(x-b)^2}}dx$ $(a > 0)$ の形．このとき $x - b = a\sin\theta = f(\theta)$ とおき，$dx = f'(\theta)d\theta = a\cos\theta$ を代入する．答は $\arcsin\frac{x-b}{a}$ である．計算途中で正の平方根をとる作業がある．そこでの符号の確認をしておく．まず $a > 0$ は仮定である．$-a < x - b < a$ でなければならないので $x - b = a\sin\theta$ $(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$ とおく．すると $x - b$ が $-a$ から a まで動く間に θ は $-\frac{\pi}{2}$ から $\frac{\pi}{2}$ まで動く．その間 $\cos\theta > 0$ であることに注意する．被積分関数の分母は $\sqrt{a^2-(x-b)^2} = \sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)} = \sqrt{a^2\cos^2\theta} = |a||\cos\theta|$ であるが $a > 0$, $\cos\theta > 0$ だから $a\cos\theta$ である．分子は $dx = a\cos\theta d\theta$ だから $a\cos\theta$ が約分されて $\int 1 d\theta = \theta = \arcsin\frac{x-b}{a}$ が答である．

例 1. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+(x-b)^2}dx = a\int \frac{du}{a^2(1+u^2)} = \frac{1}{a}\arctan u = \frac{1}{a}\arctan\frac{x-b}{a}$. $x - b = au$ とおいて置換積分した．

例 2. $4\displaystyle\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}dx$. この積分は半径 r の円の面積を表すから答は πr^2 である．置換積分で計算するのなら $x = ru$ とおくと $4\displaystyle\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}dx = 4r^2\int_0^1 \sqrt{1-u^2}du$. 結局 $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-u^2}du$ の計算に帰

着する．これはたとえば部分積分で計算できる．$\int_0^1 \sqrt{1-u^2}du = [u\sqrt{1-u^2}]_0^1 - \int_0^1 u\frac{-2u}{2\sqrt{1-u^2}}du = -\int_0^1 \sqrt{1-u^2}du + \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ より $\int_0^1 \sqrt{1-u^2}du = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2}[\arcsin u]_0^1 = \frac{\pi}{4}$．よって $4\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}dx = \pi r^2$ である．

例 3. $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u\cos^2 udu$. $x = \sin u$ とおいて置換積分した．

例 3 のその後の計算．$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx$ の漸化式 $I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$, $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$ を使う．$x = \sin\theta$ とおくと $dx = \cos\theta d\theta$ ゆえ $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^2\theta d\theta = I_2 - I_4 = \frac{1}{2}I_0 - \frac{3}{4}I_2 = \left(\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\right)I_0 = \frac{\pi}{16}$.

• 部分積分と置換積分の融合計算例．

例 1. $\int \arctan xdx$. 例 2. $\int \arcsin xdx$.

次のように計算する．

例 1. $\int \arctan xdx = x\arctan x - \int x\frac{dx}{1+x^2} = x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$.
最後の等号：$x^2 = t$ とおいて置換積分した．

例 2. $\int \arcsin xdx = x\arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = x\arcsin x + \sqrt{1-t} = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$.
最後の等号： $x^2 = t$ とおいて置換積分した．最後に現れた $\sqrt{1-t}$ に $t = x^2$ を代入し忘れないこと．

• 定積分の定義を極限計算に使う例（区分求積法）．

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} = \int_0^1 f(x)dx$$

を利用した極限計算．たとえば：

例 1. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}\frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

例 2. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4-(\frac{k}{n})^2}}\frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int_0^{1/2} \frac{2dt}{2\sqrt{1-t^2}} = [\arcsin t]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6}$.

課題． 教科書の問 11.1, 11.2, 12.1.

補足． $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx$ は，漸化式 $I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$, $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_o = 1$ を満たす．これを証明する．$n \geq 2$ なら部分積分により

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)'\sin^{n-1} xdx \\
&= [(-\cos x)\sin^{n-1} x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)(n-1)\sin^{n-2} x(\cos x)dx \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin x^2)dx \\
&= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n
\end{aligned}$$

だから

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

である．また

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2} \ ,$$
$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - (-1) = 1$$

である．