力学１　課題１

1.　x 軸正方向を東、y 軸正方向を北、z 軸正方向を上に向けてとる。次の a)、b) のベクトルの大きさと、その方向の単位ベクトルの x、y、z 成分を求めよ。

a)　北西へ 20 km、上へ 5 km。

b)　南東へ 10 m、下へ 10 m。

2.　船 A の速度を、$|\mathbf{v}_a| = 40$ km/h で南東向き、船 B の速度を、$|\mathbf{v}_b| = 30$ km/h で西向きとするとき、船 A の船 B に対する相対速度（$\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b$）の x、y、z 成分と大きさを求めよ。座標軸の取り方は１．と同様とする。

3.　大きさが $\sqrt{3}$ のベクトル $\mathbf{A}$ があり、x 軸、y 軸、z 軸となす角度がすべて等しい。$\mathbf{A}$ の x、y、z 成分 A_x、A_y、A_z を求めよ。ただし、$\mathrm{A}_x > 0$ とする。

4.　質点の位置ベクトルが次の a)、b)のように与えられている。それぞれの場合の速度ベクトルと加速度ベクトルを求めよ。t は時間、$\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$ はそれぞれ x 軸、y 軸、z 軸に沿った単位ベクトルとする。

a)　$\boldsymbol{r} = 10\,t\,\boldsymbol{i} + 20\,t^2\,\boldsymbol{j} + 30\,\boldsymbol{k}$

b)　$\boldsymbol{r} = (5\cos 10\,t)\,\boldsymbol{i} + (10\sin 10\,t)\,\boldsymbol{j} + 12\,t\,\boldsymbol{k}$

課題1

1. a) 問題のベクトルを$\vec{a}$とする。

$$|\vec{a}| = \sqrt{20^2 + 5^2} = 5\sqrt{17}\ \mathrm{km}$$

東向き 単位ベクトル

北向き 単位ベクトル

上向き 単位ベクトル

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{-\frac{20}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{20}{\sqrt{2}}\vec{j} + 5\vec{k}}{5\sqrt{17}} = -\frac{4}{\sqrt{34}}\vec{i} + \frac{4}{\sqrt{34}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{17}}\vec{k}$$

1. b) 問題のベクトルを$\vec{b}$とする。

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}\ \mathrm{km}$$

$$\frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|} = \frac{\frac{10}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{10}{\sqrt{2}}\vec{j} - 10\vec{k}}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$$

力学１　課題１

1. x 軸正方向を東、 y 軸正方向を北、 z 軸正方向を上に向けてとる。次の a)、b) のベクトルの大きさと、その方向の単位ベクトルの x 、 y 、 z 成分を求めよ。
   a)　北西へ 20 km、上へ 5 km。
   b)　南東へ 10 m、下へ 10 m。

2. 船 A の速度を、 $|\mathbf{v}_a| = 40$ km/h で南東向き、船 B の速度を、 $|\mathbf{v}_b| = 30$ km/h で西向きとするとき、船 A の船 B に対する相対速度（$\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b$）の x 、 y 、 z 成分と大きさを求めよ。座標軸の取り方は１．と同様とする。

3. 大きさが $\sqrt{3}$ のベクトル $\mathbf{A}$ があり、x 軸、y 軸、z 軸となす角度がすべて等しい。$\mathbf{A}$ の x 、 y 、 z 成分 A_x 、 A_y 、 A_z を求めよ。ただし、$\mathrm{A}_x > 0$とする。

4. 質点の位置ベクトルが次の a)、b)のように与えられている。それぞれの場合の速度ベクトルと加速度ベクトルを求めよ。t は時間、$\mathbf{i}$ 、$\mathbf{j}$ 、$\mathbf{k}$ はそれぞれ x 軸、 y 軸、 z 軸に沿った単位ベクトルとする。
   a)　$\boldsymbol{r} = 10\,t\,\boldsymbol{i} + 20\,t^2\,\boldsymbol{j} + 30\,\boldsymbol{k}$
   b)　$\boldsymbol{r} = (5\cos 10\,t)\,\boldsymbol{i} + (10\sin 10\,t)\,\boldsymbol{j} + 12\,t\,\boldsymbol{k}$

課題1

2.

$$\vec{v}_a = \frac{40}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{40}{\sqrt{2}}\vec{j}$$

$$\vec{v}_b = -30\vec{i}$$

$$\vec{v}_a - \vec{v}_b = \left(\frac{40}{\sqrt{2}} + 30\right)\vec{i} - \frac{40}{\sqrt{2}}\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$|\vec{v}_a - \vec{v}_b| = \sqrt{\left(\frac{40}{\sqrt{2}} + 30\right)^2 + \left(\frac{40}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$= 10\sqrt{25 + 12\sqrt{2}}$$

力学１　課題１

1.　x 軸正方向を東、y 軸正方向を北、z 軸正方向を上に向けてとる。次の a)、b) のベクトルの大きさと、その方向の単位ベクトルの x、y、z 成分を求めよ。

a)　北西へ 20 km、上へ 5 km。

b)　南東へ 10 m、下へ 10 m。

2.　船 A の速度を、$\left|\mathbf{v}_a\right| = 40$ km/h で南東向き、船 B の速度を、$\left|\mathbf{v}_b\right| = 30$ km/h で西向きとするとき、船 A の船 B に対する相対速度（$\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b$）の x、y、z 成分と大きさを求めよ。座標軸の取り方は１．と同様とする。

3.　大きさが $\sqrt{3}$ のベクトル $\mathbf{A}$ があり、x 軸、y 軸、z 軸となす角度がすべて等しい。$\mathbf{A}$ の x、y、z 成分 A_x、A_y、A_z を求めよ。ただし、$\mathrm{A}_x > 0$ とする。

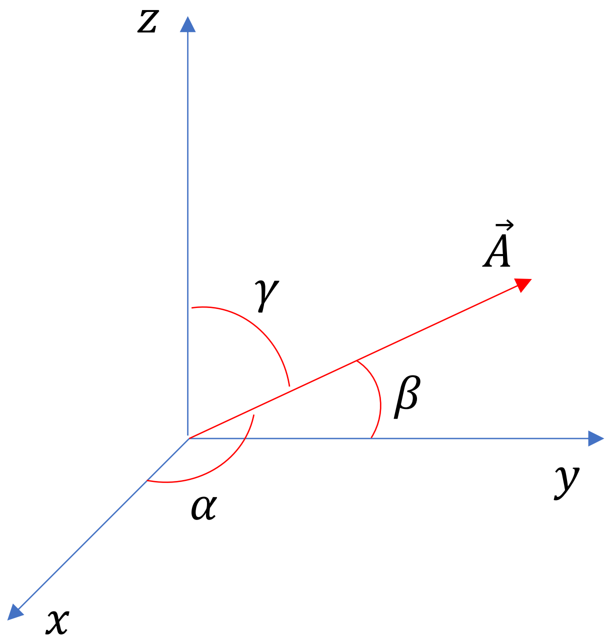
4.　質点の位置ベクトルが次の a)、b)のように与えられている。それぞれの場合の速度ベクトルと加速度ベクトルを求めよ。t は時間、$\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$ はそれぞれ x 軸、y 軸、z 軸に沿った単位ベクトルとする。

a)　$\boldsymbol{r} = 10\,t\,\boldsymbol{i} + 20\,t^2\,\boldsymbol{j} + 30\,\boldsymbol{k}$

b)　$\boldsymbol{r} = (5\cos 10\,t)\,\boldsymbol{i} + (10\sin 10\,t)\,\boldsymbol{j} + 12\,t\,\boldsymbol{k}$

課題1

3.



$$A_x = \left|\vec{A}\right| \cos\alpha$$

$$A_y = \left|\vec{A}\right| \cos\beta = \left|\vec{A}\right| \cos\alpha$$

$$A_z = \left|\vec{A}\right| \cos\gamma = \left|\vec{A}\right| \cos\alpha$$

$$\sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2} = \sqrt{3} = \sqrt{3\left|\vec{A}\right|^2 \cos^2\alpha}$$

$$\left|\vec{A}\right| \cos\alpha = 1$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$A_x = A_y = A_z = 1$$

力学１　課題１

1. x 軸正方向を東、y 軸正方向を北、z 軸正方向を上に向けてとる。次の a)、b) のベクトルの大きさと、その方向の単位ベクトルの x、y、z 成分を求めよ。
   a)　北西へ 20 km、上へ 5 km。
   b)　南東へ 10 m、下へ 10 m。

2. 船 A の速度を、$\left|\mathbf{v}_a\right| = 40$ km/h で南東向き、船 B の速度を、$\left|\mathbf{v}_b\right| = 30$ km/h で西向きとするとき、船 A の船 B に対する相対速度（$\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b$）の x、y、z 成分と大きさを求めよ。座標軸の取り方は１．と同様とする。

3. 大きさが $\sqrt{3}$ のベクトル $\mathbf{A}$ があり、x 軸、y 軸、z 軸となす角度がすべて等しい。$\mathbf{A}$ の x、y、z 成分 A_x、A_y、A_z を求めよ。ただし、$A_x > 0$ とする。

4. 質点の位置ベクトルが次の a)、b)のように与えられている。それぞれの場合の速度ベクトルと加速度ベクトルを求めよ。t は時間、$\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$ はそれぞれ x 軸、y 軸、z 軸に沿った単位ベクトルとする。
   a)　$\boldsymbol{r} = 10\,t\,\boldsymbol{i} + 20\,t^2\,\boldsymbol{j} + 30\,\boldsymbol{k}$
   b)　$\boldsymbol{r} = (5\cos 10\,t)\,\boldsymbol{i} + (10\sin 10\,t)\,\boldsymbol{j} + 12\,t\,\boldsymbol{k}$

課題1

4. a)

$$\vec{r} = 10t\,\vec{i} + 20t^2\vec{j} + 30\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 10\vec{i} + 40t\vec{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 40\vec{j}$$

4. b)

$$\vec{r} = (5\cos 10t)\vec{i} + (100\sin 10t)\vec{j} + 12t\,\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -50\sin 10t\ \vec{i} + 100\cos 10t\ \vec{j} + 12\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -500\cos 10t\,\vec{i} - 1000\sin 10t\ \vec{j}$$

力学１　課題２

1. x軸上を一定の加速度 α ($\alpha > 0$) で運動している質点の位置 x を時刻 t の関数として表せ．ただし $t = 0$ で $x = x_0$ ，$\frac{dx}{dt} = v_0$ とする．

2. xy 平面上で原点を中心とした半径 r [m]の円周上を一定の速さで 1 秒間に 20 回転している質点がある．次の物理量を求めよ．単位も記すこと．円周率 π は π のままでよい．1）円運動の周期，2）角速度，3）質点の速さ（速度の絶対値），4）質点の加速度の大きさ．

3. 上記 2. において，運動が xy 平面上で原点を中心とした半径 r の円周上で反時計回りに行われている場合について，次の問いに答えよ．

   1）$t = 0$ で質点の位置ベクトル $\vec{\boldsymbol{r}} = (r, 0)$ とするとき，時刻 t における質点の位置ベクトル $\vec{\boldsymbol{r}}$ の x 成分 $x(t)$ および y 成分 $y(t)$ を時刻 t の関数として表せ．

   2）質点に働いている力 $\vec{\boldsymbol{F}}$ が $\vec{\boldsymbol{F}} = m\vec{\boldsymbol{a}}$ （$\vec{\boldsymbol{a}}$ は質点の加速度、mは質量）として表される場合、力 $\vec{\boldsymbol{F}}$ のx 成分 $F_x(t)$ および y 成分 $F_y(t)$ を時刻 t の関数として表せ．

課題2

1.

$$\ddot{x} = \alpha$$

$$\dot{x} = \alpha t + C_1 \qquad \dot{x}(0) = v_0 = C_1$$

$$x = \frac{1}{2}\alpha t^2 + C_1 t + C_2 \qquad x(0) = C_2 = x_0$$

$$x = \frac{1}{2}\alpha t^2 + v_0 t + x_0$$

力学１　課題２

1. x軸上を一定の加速度 α ($\alpha > 0$) で運動している質点の位置 x を時刻 t の関数として表せ．ただし $t = 0$ で $x = x_0$ ， $\frac{dx}{dt} = v_0$ とする．

2. xy 平面上で原点を中心とした半径 r [m]の円周上を一定の速さで 1 秒間に 20 回転している質点がある．次の物理量を求めよ．単位も記すこと．円周率 π は π のままでよい．1) 円運動の周期，2) 角速度，3) 質点の速さ（速度の絶対値），4) 質点の加速度の大きさ．

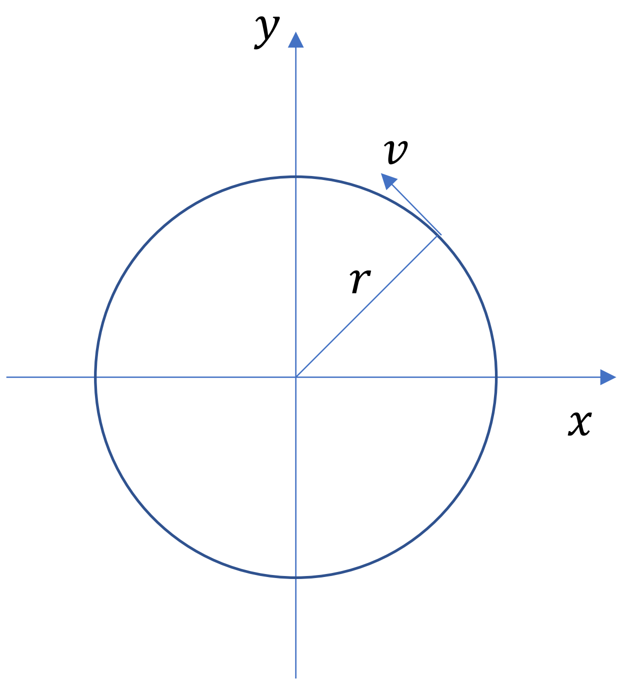
3. 上記 2. において，運動が xy 平面上で原点を中心とした半径 r の円周上で反時計回りに行われている場合について，次の問いに答えよ．

   1) $t = 0$ で質点の位置ベクトル $\vec{\boldsymbol{r}} = (r, 0)$ とするとき，時刻 t における質点の位置ベクトル $\vec{\boldsymbol{r}}$ の x 成分 $x(t)$ および y 成分 $y(t)$ を時刻 t の関数として表せ．

   2) 質点に働いている力 $\vec{\boldsymbol{F}}$ が $\vec{\boldsymbol{F}} = m\vec{\boldsymbol{a}}$ （$\vec{\boldsymbol{a}}$ は質点の加速度、mは質量）として表される場合、力 $\vec{\boldsymbol{F}}$ のx 成分 $F_x(t)$ および y 成分 $F_y(t)$ を時刻 t の関数として表せ．

課題2

2.



1) 周期 $T = \frac{1}{20} = 0.05\ s$

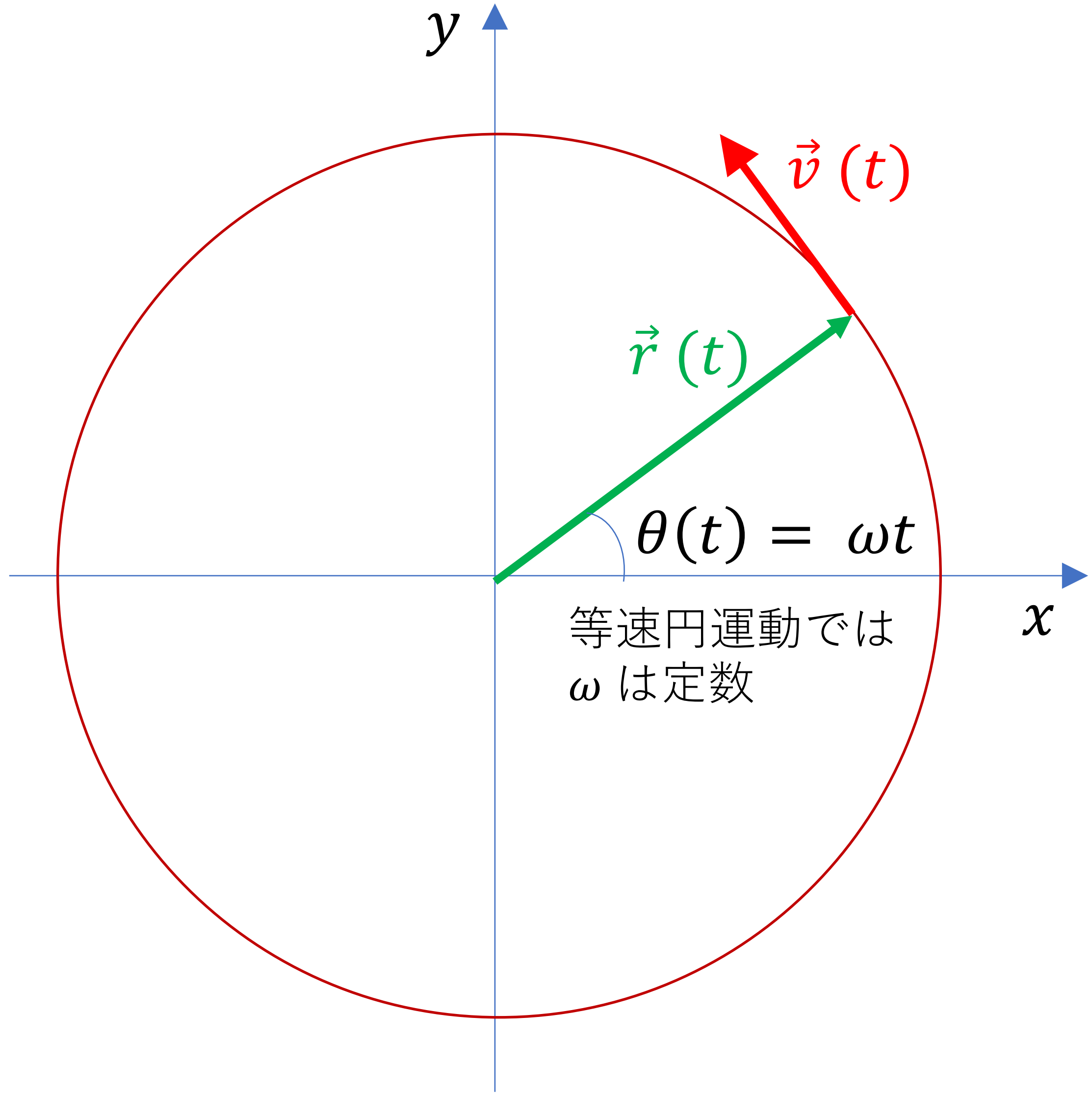
2) 角速度 $\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 20 = 40\pi\ \ rad/s$

3) 速さ $v = r\dot{\theta} = r\omega = 40\pi\, r\ \ \ m/s$

4) 加速度の大きさ

$$\omega^2 r = \frac{v^2}{r} = \frac{(40\pi r)^2}{r} = 1600\pi^2 r\ \ \ m/s^2$$

5.　等速円運動



$|\vec{v}|$……… 一定

$|\vec{r}|$……… 一定

$f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$ 回転数

（単位時間当たりに回転する数）

ω 角振動数、角速度

5.　等速円運動

位置ベクトル　$\vec{r}\,(t) = \left(x(t), y(t)\right)$

例えば

$$= \left(r\cos(\omega t)\,, r\sin(\omega t)\right)$$

$(\, r = |\vec{r}(t)|\,)$

x 成分、 y 成分はそれぞれ単振動

速度ベクトル　$\vec{v}\,(t) = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \left(\dfrac{dx}{dt}\,, \dfrac{dy}{dt}\right)$

$$= \left(-\omega r\sin(\omega t)\,, \omega r\cos(\omega t)\right)$$

5.　等速円運動

位置ベクトルと速度ベクトルの内積

$$\vec{r}(t)\cdot\vec{v}(t) = -\omega r^2\cos\omega t\sin\omega t + \omega r^2\sin\omega t\cos\omega t = 0$$

⇩

$$\vec{r}(t) \perp \vec{v}(t)$$

$\vec{r}(t)$と$\vec{v}(t)$は時間によらず常に垂直

また、

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{\omega^2 r^2\left((\sin\omega t)^2 + (\cos\omega t)^2\right)} = \omega r$$

5.　等速円運動

加速度ベクトル

$$\vec{a}\,(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = (-\omega^2 \underbrace{r\cos\omega t}_{x(t)}, -\omega^2 \underbrace{r\sin\omega t}_{y(t)})$$

$$= (-\omega^2 x(t), -\omega^2 y(t))$$

$$= -\omega^2\,\vec{r}\,(t)$$

加速度ベクトル$\vec{a}\,(t)$は位置ベクトル$\vec{r}\,(t)$と同じ方向で向きが逆 → 回転の中心を向いている

また、

$$|\vec{a}(t)| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2} = \sqrt{\omega^4 r^2\left((\cos\omega t)^2 + (\sin\omega t)^2\right)} = \omega^2 r$$

（前のスライドより）　$= \dfrac{|\vec{v}^2|}{r}$　向心加速度

力学1　課題2

1.　x軸上を一定の加速度$\alpha\,(\,\alpha > 0\,)$ で運動している質点の位置 x を時刻 t の関数として表せ．ただし $t = 0$ で $x = x_0$ ，$\dfrac{dx}{dt} = v_0$ とする．

2.　xy 平面上で原点を中心とした半径 r [m]の円周上を一定の速さで 1 秒間に 20 回転している質点がある．次の物理量を求めよ．単位も記すこと．円周率 π は π のままでよい．1）円運動の周期，2）角速度，3）質点の速さ（速度の絶対値），4）質点の加速度の大きさ．

3.　上記 2. において，運動が xy 平面上で原点を中心とした半径 r の円周上で反時計回りに行われている場合について，次の問いに答えよ．

1）$t = 0$ で質点の位置ベクトル $\vec{\boldsymbol{r}} = (\,r\,,\,0\,)$ とするとき，時刻 t における質点の位置ベクトル $\vec{\boldsymbol{r}}$ の x 成分 $x(t)$ および y 成分 $y(t)$ を時刻 t の関数として表せ．

2）質点に働いている力 $\vec{\boldsymbol{F}}$ が $\vec{\boldsymbol{F}} = m\vec{\boldsymbol{a}}$ （$\vec{\boldsymbol{a}}$ は質点の加速度、mは質量）として表される場合、力 $\vec{\boldsymbol{F}}$ のx 成分 $F_x(t)$ および y 成分 $F_y(t)$ を時刻 t の関数として表せ．

課題2

3.

1)

$$x = r\cos(40\pi t)$$

$$y = r\sin(40\pi t)$$

2)

$$\dot{x} = -40\pi r\sin(40\pi t)$$

$$\dot{y} = 40\pi r\cos(40\pi t)$$

$$\ddot{x} = -1600\pi^2 r\cos(40\pi t)$$

$$\ddot{y} = -1600\pi^2 r\sin(40\pi t)$$

$$F_x = m\ddot{x} = -1600m\pi^2 r\cos(40\pi t)$$

$$F_y = m\ddot{y} = -1600m\pi^2 r\sin(40\pi t)$$

5. 等速円運動

位置ベクトル $\vec{r}\,(t) = \big(x(t), y(t)\big)$

$$\overset{\text{例えば}}{=} \big(\underbrace{r\cos(\omega t)}_{\uparrow}\,,\underbrace{r\sin(\omega t)}_{\uparrow}\big) \qquad (\, r = |\vec{r}(t)|\,)$$

x 成分、 y 成分はそれぞれ単振動

速度ベクトル $\vec{v}\,(t) = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \left(\dfrac{dx}{dt}\,, \dfrac{dy}{dt}\right)$

$$= \big(-\omega r\sin(\omega t)\,, \omega r\cos(\omega t)\big)$$

加速度ベクトル

$$\vec{a}\,(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \big(-\omega^2 \underbrace{r\cos\omega t}_{x(t)}\,, -\omega^2 \underbrace{r\sin\omega t}_{y(t)}\big)$$

$$= \big(-\omega^2 x(t)\,, -\omega^2 y(t)\,\big)$$

$$= -\omega^2\,\vec{r}\,(t)$$

力学１　課題３

1.　3 次元直交座標系におけるある質点の座標 $(x,\ y,\ z)$ の各成分をそれぞれ 3 次元極座標 (r, θ, φ) を用いて表せ.

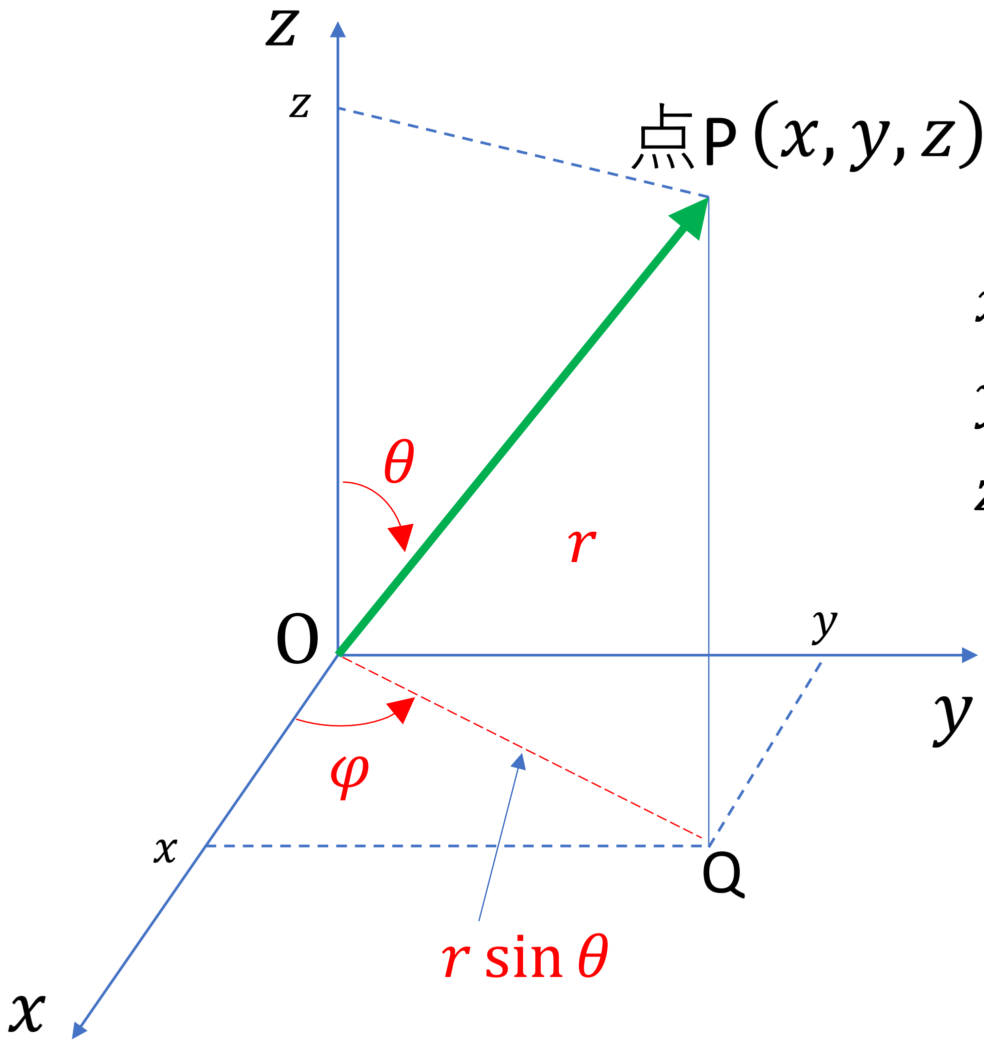
2.　3 次元直交座標系におけるある質点の加速度$(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$の各成分をそれぞれ 3 次元極座標 (r, θ, φ) とその時間微分 $(\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$ 及び$(\ddot{r}, \ddot{\theta}, \ddot{\varphi})$を用いて表せ.

3.　3 次元空間中の 2 つの質点が、お互いの距離Rを一定に保って運動しているとき、この 2 つの質点系の自由度はいくらか.

4.　ある平面上を運動する質点の軌道が極座標(r, θ)を用いて $r = f(\theta)$で与えられている. 質点の速さ$|\vec{v}|$を，$f(\theta)$，$f'(\theta) = df(\theta)/d\theta$，$\dot{\theta}$の関数として求めよ.

課題3

1.



$$x = x(r, \theta, \varphi) = r\sin\theta\cos\varphi$$

$$y = y(r, \theta, \varphi) = r\sin\theta\sin\varphi$$

$$z = z(r, \theta, \varphi) = r\cos\theta$$

力学１　課題３

1.　3 次元直交座標系におけるある質点の座標 $(x,\ y,\ z)$ の各成分をそれぞれ 3 次元極座標 (r, θ, φ) を用いて表せ.

2.　3 次元直交座標系におけるある質点の加速度$(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$の各成分をそれぞれ 3 次元極座標 (r, θ, φ) とその時間微分 $(\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$ 及び$(\ddot{r}, \ddot{\theta}, \ddot{\varphi})$を用いて表せ.

3.　3 次元空間中の 2 つの質点が、お互いの距離Rを一定に保って運動しているとき、この 2 つの質点系の自由度はいくらか.

4.　ある平面上を運動する質点の軌道が極座標(r, θ)を用いて $r = f(\theta)$で与えられている. 質点の速さ$|\vec{v}|$を，$f(\theta)$，$f'(\theta) = df(\theta)/d\theta$，$\dot{\theta}$の関数として求めよ.

課題3

2. $\dot{x} = \dot{r}\sin\theta\cos\varphi + r\cos\theta\,\dot{\theta}\cos\varphi - r\sin\theta\sin\varphi\,\dot{\varphi}$

$\dot{y} = \dot{r}\sin\theta\sin\varphi + r\cos\theta\,\dot{\theta}\sin\varphi + r\sin\theta\cos\varphi\,\dot{\varphi}$

$\dot{z} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta}$

$$\begin{aligned}\ddot{x} = {}& \ddot{r}\sin\theta\cos\varphi + \dot{r}\cos\theta\,\dot{\theta}\cos\varphi - \dot{r}\sin\theta\sin\varphi\,\dot{\varphi} \\ &+ \dot{r}\cos\theta\,\dot{\theta}\cos\varphi - r\sin\theta\,\dot{\theta}^2\cos\varphi - r\cos\theta\,\dot{\theta}\sin\varphi\,\dot{\varphi} + r\cos\theta\,\ddot{\theta}\cos\varphi \\ &- \dot{r}\sin\theta\sin\varphi\,\dot{\varphi} - r\cos\theta\,\dot{\theta}\sin\varphi\,\dot{\varphi} - r\sin\theta\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 - r\sin\theta\sin\varphi\,\ddot{\varphi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{y} = {}& \ddot{r}\sin\theta\sin\varphi + \dot{r}\cos\theta\,\dot{\theta}\sin\varphi + \dot{r}\sin\theta\cos\varphi\,\dot{\varphi} \\ &+ \dot{r}\cos\theta\,\dot{\theta}\sin\varphi - r\sin\theta\,\dot{\theta}^2\sin\varphi + r\cos\theta\,\ddot{\theta}\sin\varphi + r\cos\theta\,\dot{\theta}\cos\varphi\,\dot{\varphi} \\ &+ \dot{r}\sin\theta\cos\varphi\,\dot{\varphi} + r\cos\theta\,\dot{\theta}\cos\varphi\,\dot{\varphi} - r\sin\theta\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 + r\sin\theta\cos\varphi\,\ddot{\varphi}\end{aligned}$$

$$\ddot{z} = \ddot{r}\cos\theta - \dot{r}\sin\theta\,\dot{\theta} - \dot{r}\sin\theta\,\dot{\theta} - r\cos\theta\,\dot{\theta}^2 - r\sin\theta\,\ddot{\theta}$$

課題3

2.

$$\ddot{x} = \ddot{r}\sin\theta\cos\varphi + 2\dot{r}\cos\theta\,\dot{\theta}\cos\varphi - 2\dot{r}\sin\theta\sin\varphi\,\dot{\varphi}$$
$$-r\sin\theta\;\dot{\theta}^2\cos\varphi - 2r\cos\theta\,\dot{\theta}\sin\varphi\;\dot{\varphi} + r\cos\theta\;\ddot{\theta}\cos\varphi$$
$$-r\sin\theta\cos\varphi\;\dot{\varphi}^2 - r\sin\theta\sin\varphi\;\ddot{\varphi}$$

$$\ddot{y} = \ddot{r}\sin\theta\sin\varphi + 2\dot{r}\cos\theta\,\dot{\theta}\sin\varphi + 2\dot{r}\sin\theta\cos\varphi\,\dot{\varphi}$$
$$-r\sin\theta\;\dot{\theta}^2\sin\varphi + r\cos\theta\,\ddot{\theta}\sin\varphi + 2r\cos\theta\,\dot{\theta}\cos\varphi\,\dot{\varphi}$$
$$-r\sin\theta\sin\varphi\;\dot{\varphi}^2 + r\sin\theta\cos\varphi\;\ddot{\varphi}$$

$$\ddot{z} = \ddot{r}\cos\theta - 2\dot{r}\sin\theta\;\dot{\theta} - r\cos\theta\,\dot{\theta}^2 - r\sin\theta\,\ddot{\theta}$$

力学1　課題3

1.　3 次元直交座標系におけるある質点の座標 $(x,\ y,\ z)$ の各成分をそれぞれ 3 次元極座標 (r, θ, φ) を用いて表せ.

2.　3 次元直交座標系におけるある質点の加速度$(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$の各成分をそれぞれ 3 次元極座標 (r, θ, φ) とその時間微分 $(\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$ 及び$(\ddot{r}, \ddot{\theta}, \ddot{\varphi})$を用いて表せ.

3.　3 次元空間中の 2 つの質点が、お互いの距離Rを一定に保って運動しているとき、この 2 つの質点系の自由度はいくらか.

4.　ある平面上を運動する質点の軌道が極座標(r, θ)を用いて $r = f(\theta)$で与えられている. 質点の速さ$|\vec{v}|$を，$f(\theta)$，$f'(\theta) = df(\theta)/d\theta$，$\dot{\theta}$の関数として求めよ.

課題3

3.

1つの自由な質点の自由度

$$\underbrace{2}_{\text{2つの質点}}\times\overbrace{3}^{\text{1つの自由な質点の自由度}} - \underbrace{1}_{\text{束縛条件の数}} = 5$$

自由度は 5

力学１　課題３

1.　3 次元直交座標系におけるある質点の座標 $(x,\ y,\ z)$ の各成分をそれぞれ 3 次元極座標 (r, θ, φ) を用いて表せ.

2.　3 次元直交座標系におけるある質点の加速度$(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$の各成分をそれぞれ 3 次元極座標 (r, θ, φ) とその時間微分 $(\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$ 及び$(\ddot{r}, \ddot{\theta}, \ddot{\varphi})$を用いて表せ.

3.　3 次元空間中の 2 つの質点が、お互いの距離Rを一定に保って運動しているとき、この 2 つの質点系の自由度はいくらか.

4.　ある平面上を運動する質点の軌道が極座標(r, θ)を用いて $r = f(\theta)$で与えられている. 質点の速さ$|\vec{v}|$を，$f(\theta)$，$f'(\theta) = df(\theta)/d\theta$，$\dot{\theta}$の関数として求めよ.

課題3

4.

$$r = f(\theta)$$

$$\vec{r} = r\,\vec{e}_r$$

（第3回目16枚目スライド参照）

動径方向単位ベクトル

動径と垂直方向単位ベクトル

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$|\vec{v}| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{\dot{r}^2 + \left(r\dot{\theta}\right)^2} = \sqrt{\left(f'\dot{\theta}\right)^2 + \left(f\dot{\theta}\right)^2}$$

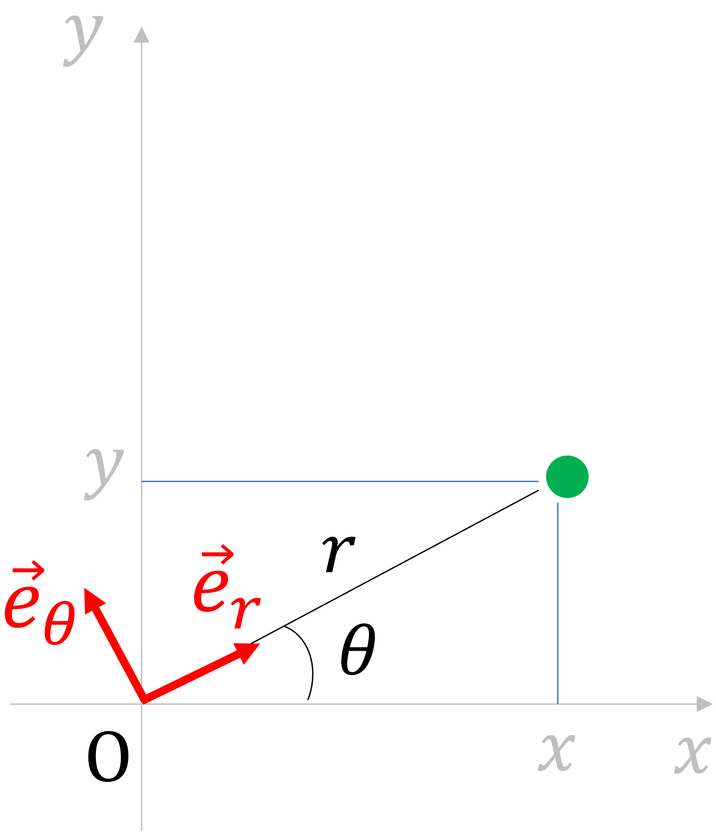
$$= \dot{\theta}\sqrt{f'^2 + f^2}$$

$$f' = \frac{df}{d\theta}$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{df}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = f'\dot{\theta}$$

５．２次元極座標での速度、加速度

速度、加速度を$\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ 成分を用いて表す



$$|\vec{e}_r| = |\vec{e}_\theta| = 1$$

位置　$\vec{r} = r\vec{e}_r$

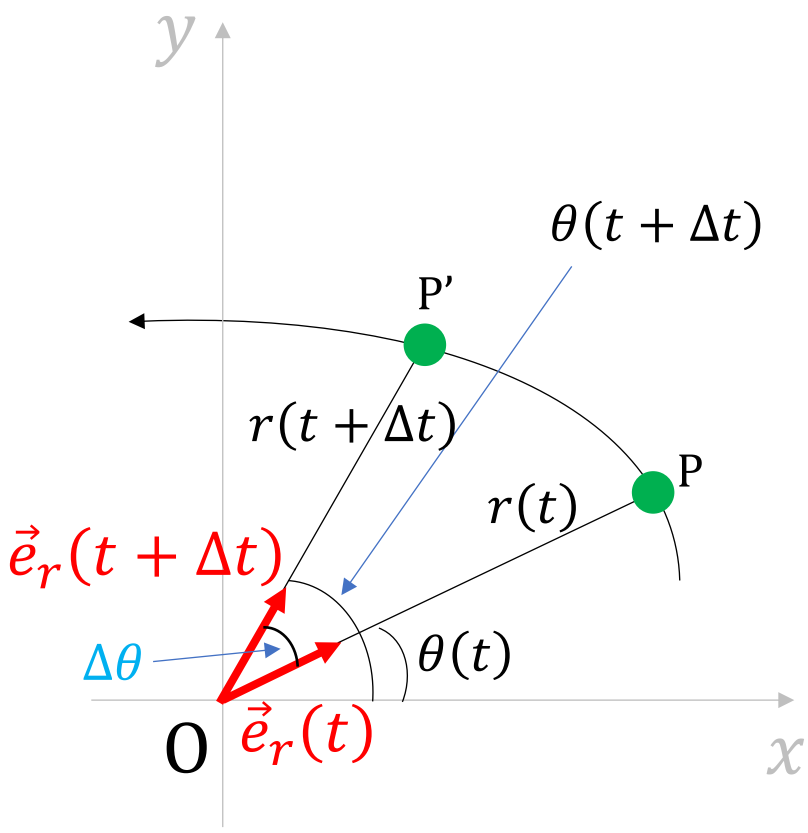
速度

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r) = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

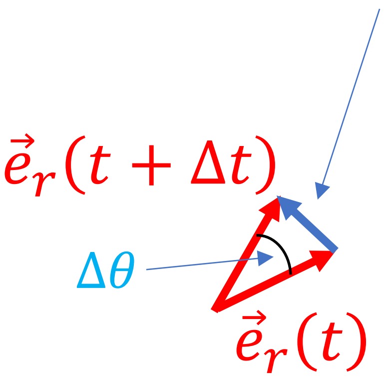
?

５．２次元極座標での速度、加速度

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt}$$ について（$\vec{e}_r$ は大きさは１で変化しないが、向きが変わる）



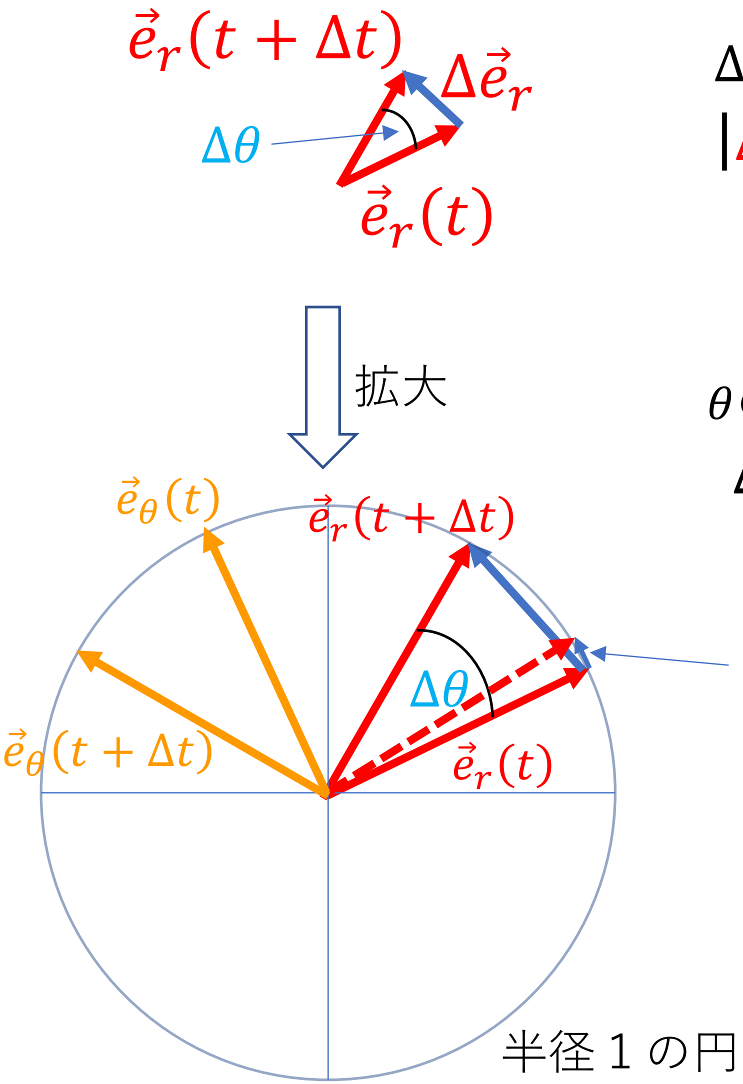
$$\Delta\vec{e}_r = \vec{e}_r(t+\Delta t) - \vec{e}_r(t)$$



$$|\vec{e}_r(t)| = |\vec{e}_r(t+\Delta t)| = 1$$

5．2次元極座標での速度、加速度

$\Delta\vec{e}_r$の大きさと向きについて



$\Delta\theta \to 0$ $(\Delta t \to 0)$の極限で

$$|\Delta\vec{e}_r| = |\vec{e}_r(t+\Delta t) - \vec{e}_r(t)| = 1\times|\Delta\theta|$$

$$= |\theta(t+\Delta t) - \theta(t)|$$

半径　角度

θの増える向きをΔe_rの正の向きとして絶対値を外すと

$$\Delta e_r = \theta(t+\Delta t) - \theta(t)$$

$\Delta\vec{e}_r$は$\Delta t \to 0$の極限で$\vec{e}_r$に垂直な方向（θの増える向き）になる

⇩

$\vec{e}_\theta$の向き

5．2次元極座標での速度、加速度

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt}$$ について（$\vec{e}_r$の大きさは１で変化しないが、向きが変わる）

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{e}_r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{e}_r(t+\Delta t) - \vec{e}_r(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta e_r}{\Delta t} \vec{e}_\theta$$

大きさ

向き

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\theta(t+\Delta t) - \theta(t)}{\Delta t} \vec{e}_\theta$$

$$= \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

５．２次元極座標での速度、加速度

位置　$\vec{r} = r\vec{e}_r$

速度　$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r) = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

$$= \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

（これを）

$$= v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta$$ と書くと、

$\vec{v}$ の動径方向成分　　$\vec{v}$ の動径に垂直な方向の成分

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \end{cases}$$

円運動では、$\dot{r} = 0$、$v = v_\theta = r\dot{\theta} = r\omega$

課題3

4.

$$r = f(\theta)$$

$$\vec{r} = r\,\vec{e}_r$$

（第3回目16枚目スライド参照）

動径方向単位ベクトル

動径と垂直方向単位ベクトル

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$|\vec{v}| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{\dot{r}^2 + \left(r\dot{\theta}\right)^2} = \sqrt{\left(f'\dot{\theta}\right)^2 + \left(f\dot{\theta}\right)^2}$$

$$= \dot{\theta}\sqrt{f'^2 + f^2}$$

$$f' = \frac{df}{d\theta}$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{df}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = f'\dot{\theta}$$

力学１　課題４

（以下の問題では重力加速度をgとする.）

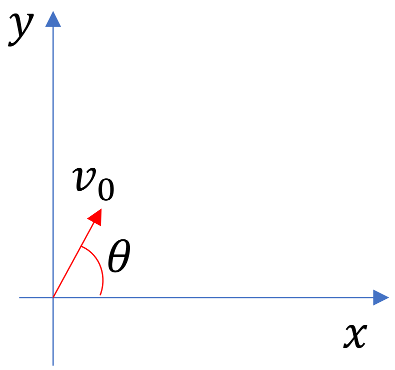
1. 質量m の質点を速さ v_0 , 迎角 θ で投げ上げた. 空気の抵抗は働かないとする. 質点の運動は xy 平面内行われるとし, x 軸方向を水平方向, y 軸の正の向きを鉛直上向きとする. 迎角 θ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ はx 軸の正の方向から測った角度とする.

   1) 投げ上げた後の質点の x 方向および y 方向の運動方程式を示せ.

   2) $t = 0$ で質点の位置は $(x, y) = (0, 0)$, 質点の速さは $|v| = v_0$ とする. 質点が最高点に到達したときの質点の x 座標およびy 座標を求めよ.

課題4

1.



1) $$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = -mg \end{cases}$$

（xy 面内での質点の軌道から求めてみる）

2) $$m\ddot{x} = 0$$

$$\ddot{x} = 0$$

$$\dot{x} = C_1$$

$$x = C_1 t + C_2$$

$$\begin{cases} x(0) = 0 = C_2 \\ \dot{x}(0) = v_0 \cos\theta = C_1 \end{cases}$$

$$x = v_0 \cos\theta \, t$$

$$m\ddot{y} = -mg$$

$$\ddot{y} = -g$$

$$\dot{y} = -gt + D_1$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + D_1 t + D_2$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 = D_2 \\ \dot{y}(0) = v_0 \sin\theta = D_1 \end{cases}$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\theta \, t$$

課題4

1.
$$\begin{cases} x = v_0 \cos\theta \, t \\ y = -\dfrac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\theta \, t \end{cases}$$

t を消去すると、

$$y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta} \right)^2 + v_0 \sin\theta \frac{x}{v_0 \cos\theta}$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{g}{{v_0}^2 \cos^2\theta} x^2 + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} x$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{g}{{v_0}^2 \cos^2\theta} \left(x^2 - \frac{2{v_0}^2 \cos\theta \sin\theta}{g} x \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{g}{{v_0}^2 \cos^2\theta} \left\{ \left(x - \frac{{v_0}^2 \cos\theta \sin\theta}{g} \right)^2 - \frac{{v_0}^4 \cos^2\theta \sin^2\theta}{g^2} \right\}$$

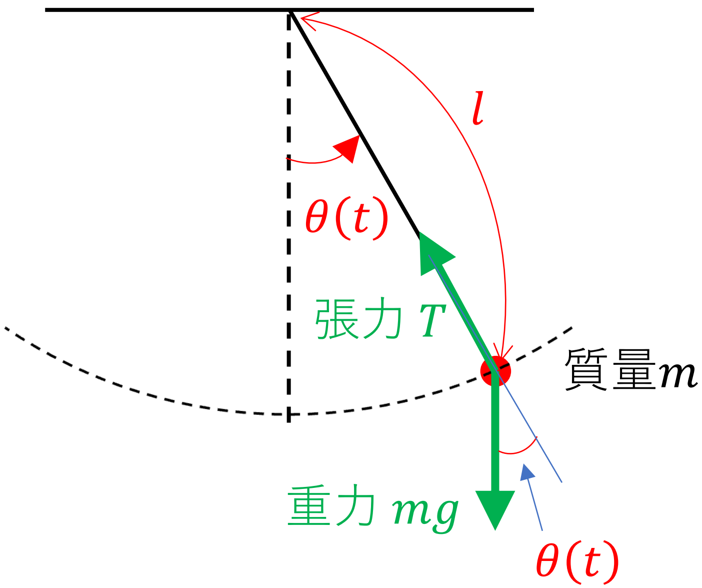
$$= -\frac{1}{2} \frac{g}{{v_0}^2 \cos^2\theta} \left(x - \frac{{v_0}^2 \sin 2\theta}{2g} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{{v_0}^2 \sin^2\theta}{g}$$

最高点は、 $(x, y) = (\dfrac{{v_0}^2 \sin 2\theta}{2g}, \dfrac{{v_0}^2 \sin^2\theta}{2g})$

2. ひもの長さ L の振り子の先端に質量 m のおもりが取り付けてある．ひもはたるむことがなく，ひもの質量は無視できるものとする．おもりの運動は，ある鉛直平面内で行われるものとする．鉛直方向とひものなす角度を θ として，おもりの軌道に対して接線方向および法線方向の運動方程式を示せ.

7.　単振り子

2次元極座標の速度、加速度を用いて運動方程式を考える
（パラメータは l と θ）



動径方向の運動方程式は、

$$\underbrace{mg\cos\theta - T}_{\text{動径方向の力}} = \underbrace{ma_r}_{\text{動径方向の加速度}}$$

$F = ma$

第3回講義（26枚目）

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{cases}$$

今の場合、$r = l$（一定）なので、

$$a_r = -l\dot{\theta}^2 = -\frac{{v_\theta}^2}{l}$$

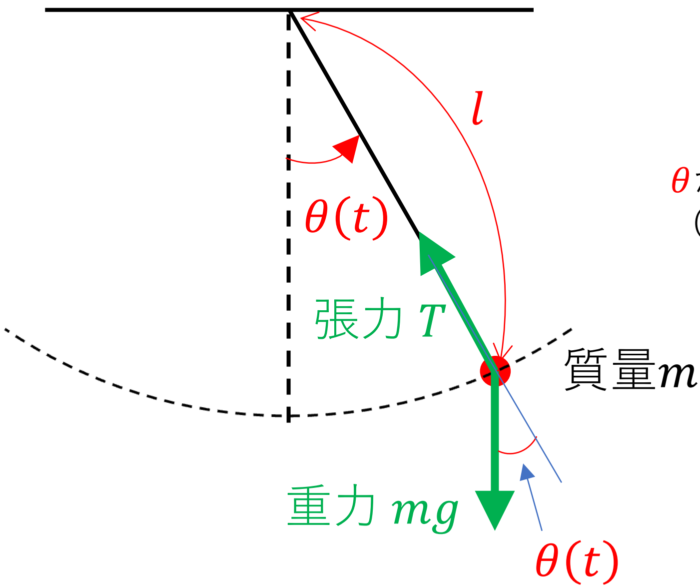
第3回講義（20枚目）
$v_\theta = r\dot{\theta}$

$v_\theta = r\dot{\theta}$がわかればば張力がわかる。

（動径方向の位置は、原点からの距離 l で一定）

$$T = m\left(g\cos\theta + \frac{{v_\theta}^2}{l}\right)$$

7. 単振り子



動径と垂直方向（接線方向）の運動方程式は、

$$-mg\sin\theta = ma_\theta = m\,l\ddot{\theta}$$

（今の場合、$r = l$（一定））

θが増える方向が接線方向の正方向
（重力の接線方向成分は負の方向）

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

単振り子は運動の自由度が1 $\longrightarrow$ θ

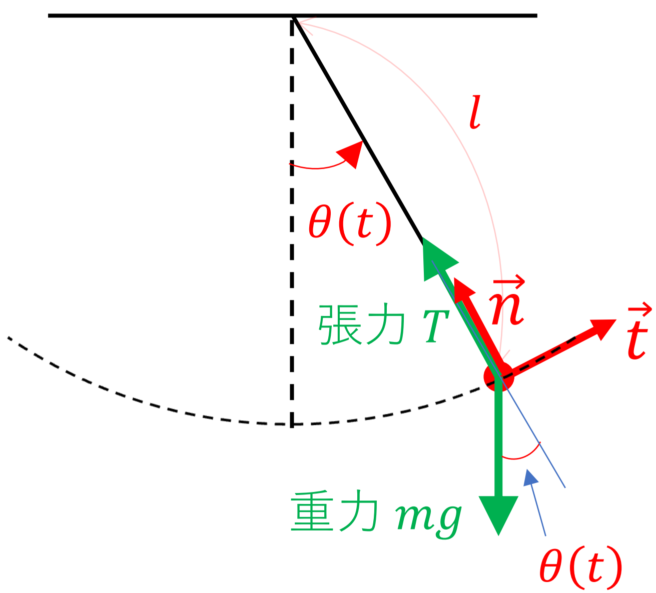
（上のθについての微分方程式を解いて）
θが求まると、運動が求まる。

7. 単振り子

接線加速度と法線加速度を使って運動方程式を考える

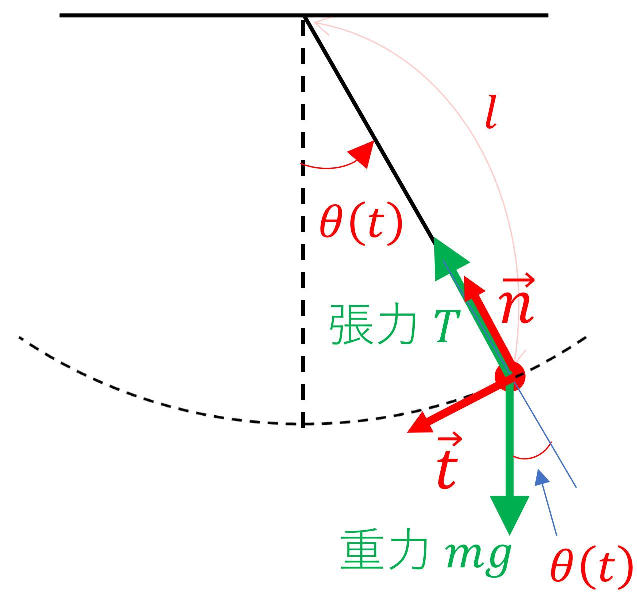
1） $\dot{\theta} > 0$

質点の運動は θ が大きくなる方向



2） $\dot{\theta} < 0$

質点の運動は θ が小さくなる方向

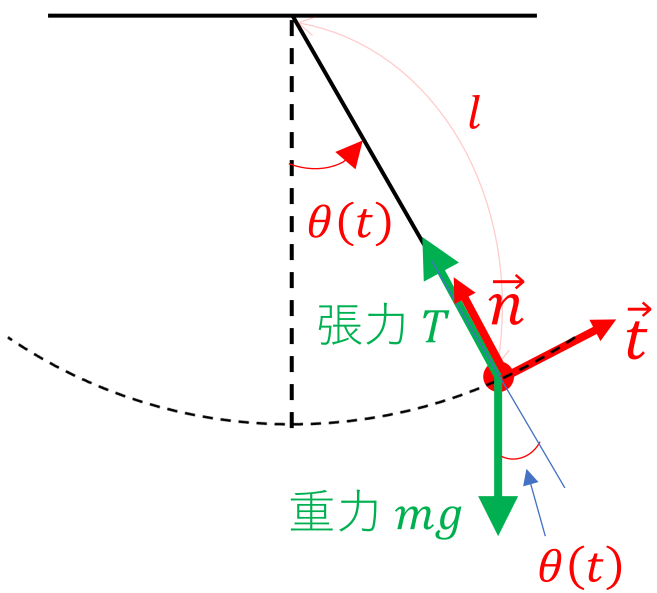


$\dot{\theta} > 0$ と $\dot{\theta} < 0$ で運動の方向が逆であり、単位ベクトル $\vec{t}$ の方向も逆になるので、場合を分けて検討する

7.　単振り子

1）　$\dot{\theta} > 0$

質点の運動は θ が大きくなる方向



・接線方向の運動方程式

$$F_t = ma_t = -mg\sin\theta = m\,\dot{v} = ml\ddot{\theta}$$

（今日の8枚目 $F_t = m\,\dot{v}$）

第3回講義（20枚目）
$v_\theta = r\dot{\theta}$ より、 $\dot{v} = l\ddot{\theta}$

したがって

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

・法線方向の運動方程式

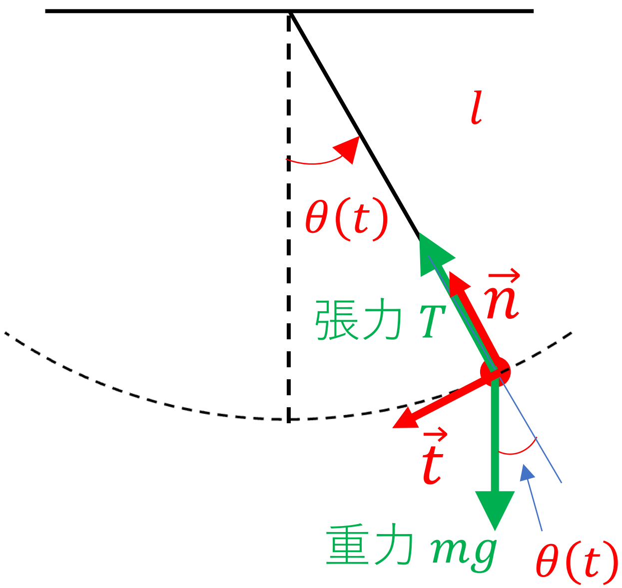
$$F_n = ma_n = T - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{l}$$

$$T = m\left(g\cos\theta + \frac{v^2}{l}\right)$$

7. 単振り子

2） $\dot{\theta} < 0$

質点の運動は θ が小さくなる方向



・接線方向の運動方程式

$$F_t = ma_t = mg\sin\theta = m\,\dot{v} = m\frac{d}{dt}\left(-l\dot{\theta}\right)$$

$\vec{t}$ は質点の進行方向を向くので、 $\vec{v}$ と $\vec{t}$ は同じ方向であり、vは正でなければいけないが、 $\dot{\theta}$ は負なので、マイナス符号が付く

したがって、

$$F_t = mg\sin\theta = m\frac{d}{dt}\left(-l\dot{\theta}\right) = -ml\ddot{\theta}$$

結局、

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

・法線方向の運動方程式

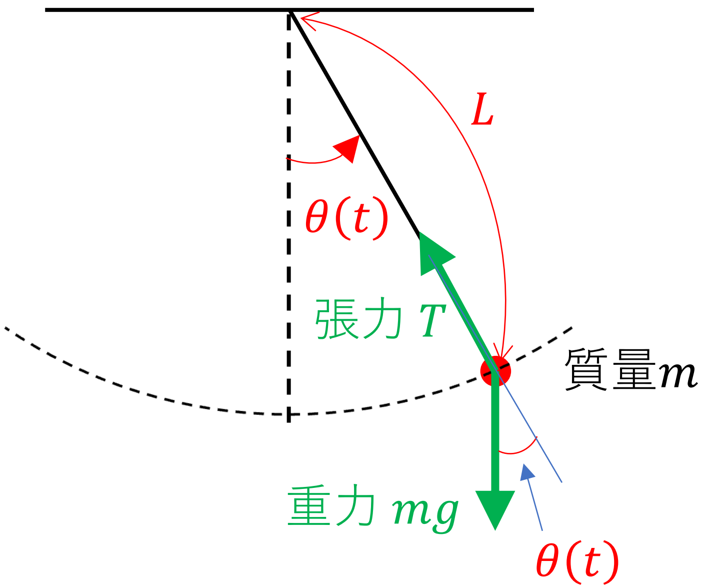
$$F_n = ma_n = mg\cos\theta - T = -m\frac{v^2}{l}$$

$$T = m\left(g\cos\theta + \frac{v^2}{l}\right)$$

結局、$\dot{\theta} > 0$ も、 $\dot{\theta} < 0$ も同じ形の運動方程式となる。

課題4

2.



接線方向の運動方程式（第4回目29、30枚目スライド）

$\dot{\theta} > 0$

$$F_t = ma_t$$

$$-mg\sin\theta = mL\ddot{\theta}$$

$\dot{\theta} < 0$

$$F_t = ma_t$$

$$mg\sin\theta = -mL\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\sin\theta$$

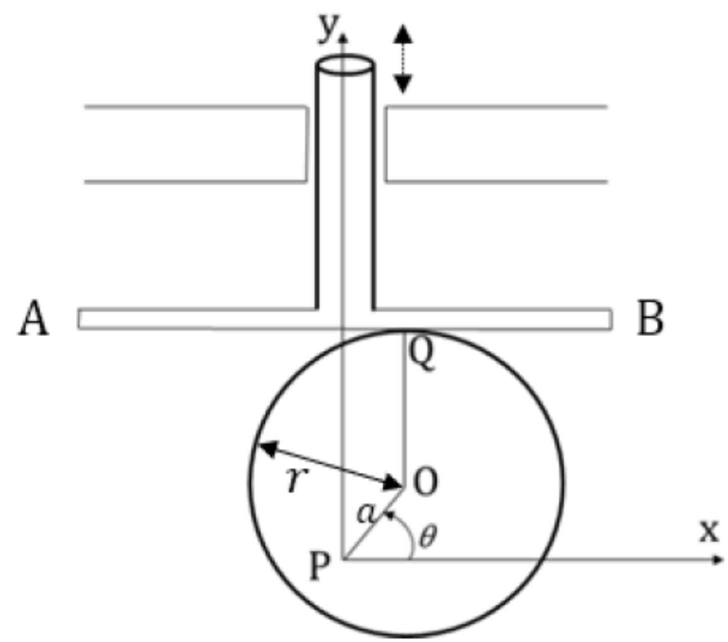
法線方向の運動方程式（第4回目29、30枚目スライド）

$$F_n = ma_n$$

$$T - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{L} = m\frac{\left(L\dot{\theta}\right)^2}{L} = mL\dot{\theta}^2$$

$$T = mg\cos\theta + mL\dot{\theta}^2$$

3. 次の図のように半径 r の円板が中心から a だけ離れた点 P を中心として一定の角速度 ω で xy面内を回転している（$\theta = \omega t$）．また、板 AB は円板と接していて y 軸方向で上下運動を行う．座標原点を点 P にとり、水平方向右に x 軸の正方向、鉛直上向きを y 軸正方向とする．以下の問いに答えよ．（教科書第 1 章演習問題 10）

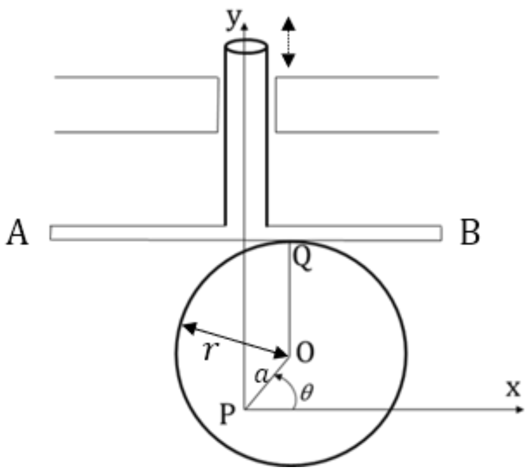


(1) 円板と板 AB が接する点を Q とする．ベクトル $\overrightarrow{PQ}$ （$= \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ}$）を時間の関数として表せ.

(2) 板 AB の上下運動の速度と加速度を求めよ.

課題4

3.



(1) $$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{PO}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

$$= (a\cos\theta, a\sin\theta) + (0, r)$$

$$= (a\cos\theta, a\sin\theta + r)$$

$$= (a\cos\omega t, a\sin\omega t + r)$$

(2) 板ABの上下運動の速度、加速度は、 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ のy 成分を時間で1回および２回微分すればよい。

速度（速さ）

$$\frac{d}{dt}(a\sin\omega t + r) = a\omega\cos\omega t$$

加速度

$$\frac{d^2}{dt^2}(a\sin\omega t + r) = -a\omega^2\sin\omega t$$

力学１　課題５

質量m のある物体が重力と空気の抵抗力$\vec{F}_{\mathrm{V}}$を受けながら運動している．空気の抵抗力 $\vec{F}_{\mathrm{V}}$の大きさは，物体の速さに比例（$|\vec{F}_{\mathrm{V}}| = \gamma\ |\vec{v}|$）しているとする（$\gamma$ は正の定数）．鉛直方向に x 軸をとり下向きを正とする．物体は x 軸上を運動しており，風は吹いていないとする．重力加速度はgとし，積分定数は各自で設定すること．

（1）物体の運動方程式を，物体のx軸方向の速さ $v(t)\,(=\dot{x}(t))$ の，時間tに関する１階微分方程式として表せ．

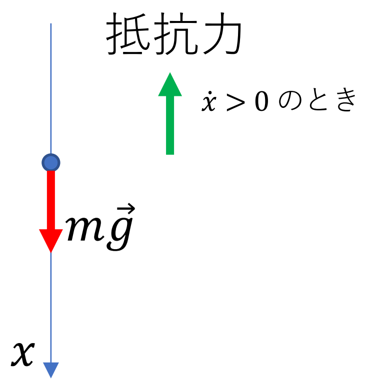
（2）(1) の微分方程式の一般解を求めることにより $v(t)$ を時間t の関数として表せ．

（3）(2)で求めた$v(t)$において、$t\to\infty$の極限における$v(t)$（終端速度）を求めよ．

（4）(2)で求めた$v(t)$を時間tで積分することにより、物体の位置 $x(t)$ を求めよ．

課題5

(1)



$$m\ddot{x} = mg \ - \gamma v$$

$$m\dot{v} = mg \ - \gamma v$$

$$\dot{v} + \frac{\gamma}{m} v = g \qquad ①$$

力学1　課題5

質量m のある物体が重力と空気の抵抗力$\vec{F}_V$を受けながら運動している．空気の抵抗力 $\vec{F}_V$の大きさは，物体の速さに比例（$|\vec{F}_V| = \gamma\ |\vec{v}|$）しているとする（$\gamma$ は正の定数）．鉛直方向に x軸をとり下向きを正とする．物体は x軸上を運動しており，風は吹いていないとする．重力加速度はgとし，積分定数は各自で設定すること．

（1）物体の運動方程式を，物体のx軸方向の速さ $v(t)\ (=\dot{x}(t))$ の，時間tに関する1階微分方程式として表せ．

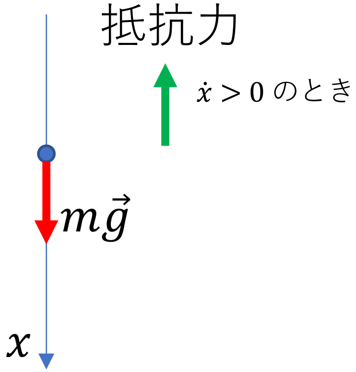
（2）(1) の微分方程式の一般解を求めることにより $v(t)$ を時間t の関数として表せ．

（3）(2)で求めた$v(t)$において、$t \to \infty$の極限における$v(t)$（終端速度）を求めよ．

（4）(2)で求めた$v(t)$を時間tで積分することにより、物体の位置 $x(t)$ を求めよ．

課題5

(1)



$$m\ddot{x} = mg - \gamma v$$

$$\downarrow$$

$$m\dot{v} = mg - \gamma v$$

$$\downarrow$$

$$\dot{v} + \frac{\gamma}{m}v = g \quad ①$$

(2) $\dot{v} + \dfrac{\gamma}{m}v = 0$ ② とすると、 ①の一般解は②の一般解と①の特殊解の和

②の一般解は、（第5回21～23枚目スライド参照）

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\gamma}{m}v$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dt} = -\frac{\gamma}{m}$$

$$\downarrow$$

$$\ln|v| = -\frac{\gamma}{m}t + C \longrightarrow v = Ce^{-\frac{\gamma}{m}t}$$

課題5

(2) ①の特殊解は、 $v = \frac{mg}{\gamma}$

したがって、①の一般解は、 $v = Ce^{-\frac{\gamma}{m}t} + \frac{mg}{\gamma}$

力学１　課題５

質量m のある物体が重力と空気の抵抗力$\vec{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{V}}$を受けながら運動している．空気の抵抗力 $\vec{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{V}}$の大きさは，物体の速さに比例（$|\vec{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{V}}| = \gamma\ |\vec{\boldsymbol{v}}|$）しているとする（$\gamma$ は正の定数）．鉛直方向に x 軸をとり下向きを正とする．物体は x 軸上を運動しており，風は吹いていないとする．重力加速度はg とし，積分定数は各自で設定すること．

（1）物体の運動方程式を，物体のx軸方向の速さ $v(t)\,(=\dot{x}(t))$ の，時間tに関する１階微分方程式として表せ．

（2）(1) の微分方程式の一般解を求めることにより $v(t)$ を時間t の関数として表せ．

（3）(2)で求めた$v(t)$において、$t\to\infty$の極限における$v(t)$（終端速度）を求めよ．

（4）(2)で求めた$v(t)$を時間t で積分することにより、物体の位置 $x(t)$ を求めよ．

課題5

(2) ①の特殊解は、 $v = \frac{mg}{\gamma}$

したがって、①の一般解は、 $v = Ce^{-\frac{\gamma}{m}t} + \frac{mg}{\gamma}$

---

(3) $t \to \infty$ とすると、

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty}\left(Ce^{-\frac{\gamma}{m}t} + \frac{mg}{\gamma}\right) = \frac{mg}{\gamma}$$

終端速度

(4)

$$x(t) = \int v(t)dt = C_1\left(-\frac{m}{\gamma}\right)e^{-\frac{\gamma}{m}t} + \frac{mg}{\gamma}t + C_2$$

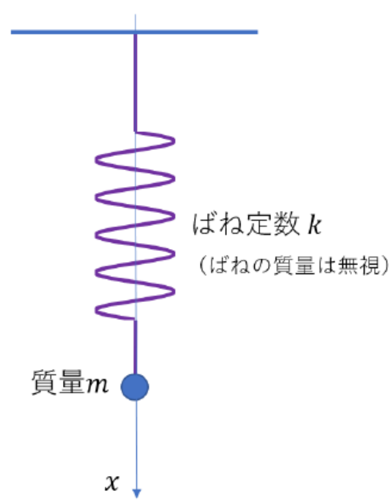
$$= Ce^{-\frac{\gamma}{m}t} + \frac{mg}{\gamma}t + C_2$$

力学 1　課題 6

質量 m のある物体が下図のように質量の無視できるばね（ばね定数 k）につるされている．鉛直方向下向きに x 軸の正方向をとる．x 軸の原点（$x=0$）を下の (1) と (2) のようにとる場合，(1) と (2) のそれぞれについて物体の運動方程式を示し，それを解くことによって物体の位置 $x(t)$ を求めよ．重力加速度は g とし，微分方程式を解く際の任意定数は各自で設定すること．

（1）ばねが自然長の場合の物体の位置を原点とする．

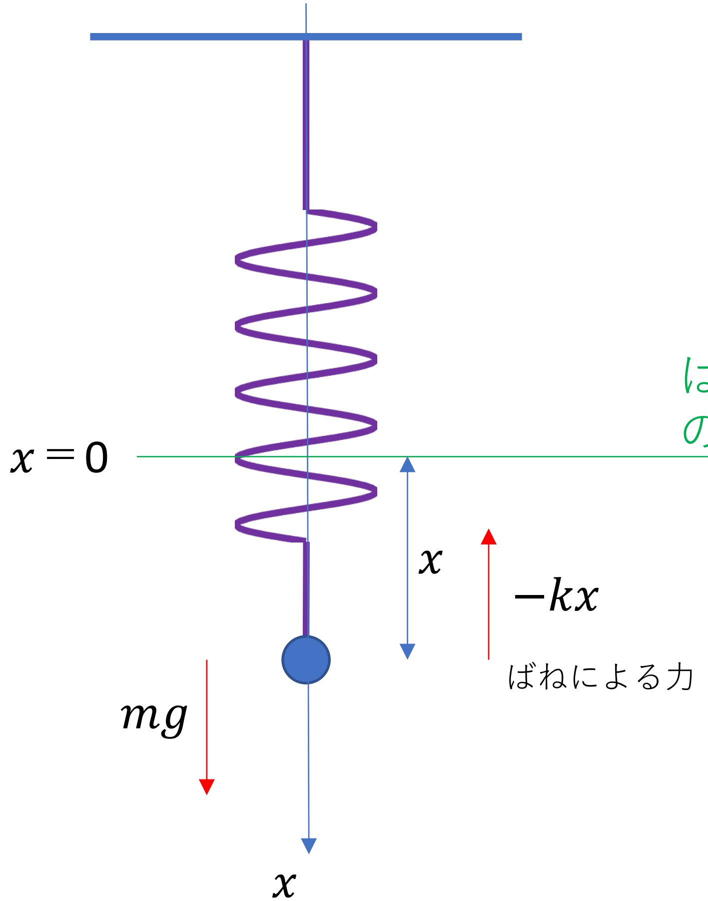
（2）重力とばねによる力が釣り合っている位置を原点とする．



課題6

（1）

ばねが自然長のとき の
おもりの位置を$x = 0$



位置xでおもりに働く力は、$mg - kx$

$$\boxed{\text{運動方程式は、}\ m\ddot{x} = mg - kx}$$

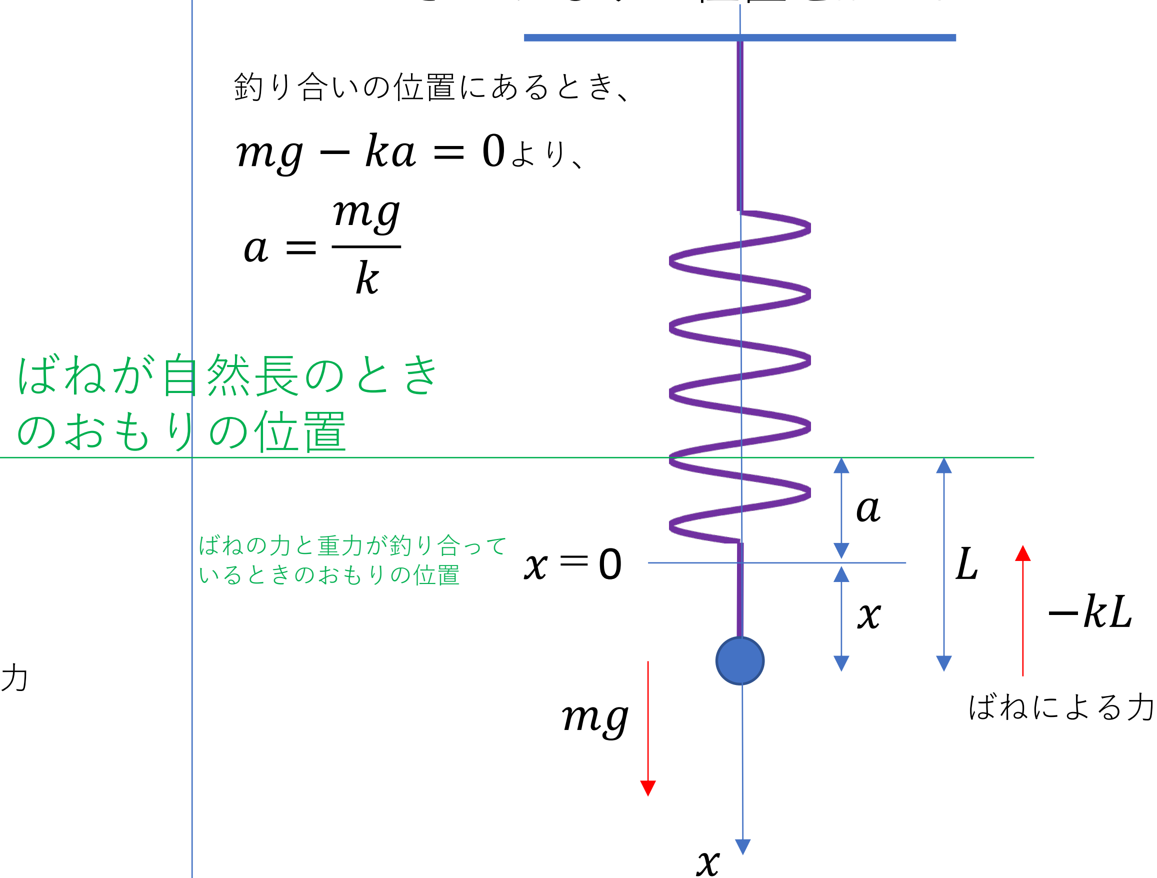
（2）

ばねの力と重力が釣り合っている
ときのおもりの位置を$x = 0$

釣り合いの位置にあるとき、

$mg - ka = 0$より、

$$a = \frac{mg}{k}$$



位置xでおもりに働く力は、

$$mg - kL = mg - k(x + a)$$

$$= mg - k\left(x + \frac{mg}{k}\right) = -kx$$

$$\boxed{\text{運動方程式は、}\ m\ddot{x} = -kx}$$

課題6

（1）　$m\ddot{x} = mg - kx$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = g \qquad ①$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad ②$$

①の一般解は②の一般解と①の特殊解の和

②の一般解は単振動

$$x(t) = A\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha)$$

①の特殊解は　$x = \dfrac{mg}{k}$

①の一般解は　$x(t) = A\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t + \alpha\right) + \dfrac{mg}{k}$

（2）　$m\ddot{x} = -kx$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad \text{単振動}$$

一般解は

$$x(t) = A\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha)$$

力学 1　課題 7

1. x 軸上を運動する質量 m の質点があり，ばねによる復元力 $-m\omega^2 x$ 、空気による抵抗力 $-2m\gamma\dot{x}$ および 外力 $mF_0 \cos \omega_0 t$ が働いている．

(1) 質点の運動方程式を x に関する微分方程式として示せ．

(2) (1) の運動方程式の一般解を求めよ．

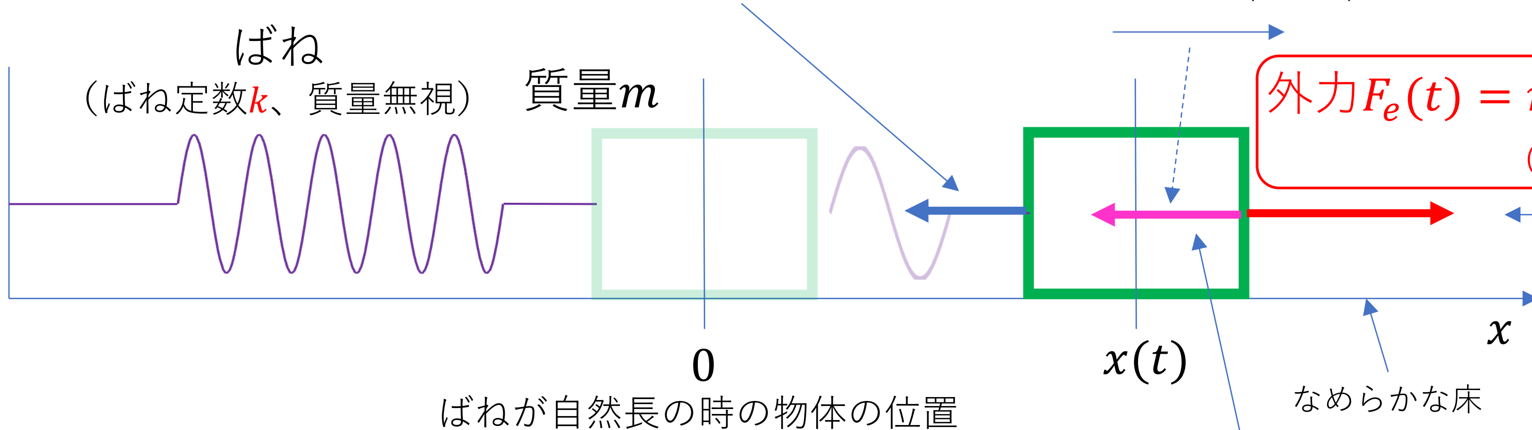
課題7

ばねの復元力＋周期的な外力＋抵抗力

1.

ばねによる復元力$F_r(t) = -kx(t)$
$= -m\omega^2 x$

運動方向（$\dot{x} > 0$）の場合



外力$F_e(t) = mF_0 \cos\omega_0 t$
（周期的な外力）

空気による抵抗力 $\vec{F}_V$
(大きさは速さに比例すると仮定)
$F_V = -2m\gamma\dot{x}$

運動方程式 $$F(t) = m\ddot{x} = F_r(t) + F_V(t) + F_e(t)$$
$$= -m\omega^2 x - 2m\gamma\dot{x} + mF_0\cos\omega_0 t$$

ばねの復元力＋周期的な外力＋抵抗力

運動方程式　$$m\ddot{x} = -m\omega^2 x - 2m\gamma\dot{x} + mF_0 \cos\omega_0 t$$

移項して整理

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = F_0 \cos\omega_0 t \qquad ①$$

微分方程式の解法の常套手段を使うため
①の右辺（xの入っていない項）を0と置いた微分方程式を作っておく。

$$\ddot{x}_1 + 2\gamma\dot{x}_1 + \omega^2 x_1 = 0 \qquad ②$$

これは　減衰振動の運動方程式 と同じ

①の一般解は、②の一般解と①の特殊解の和である。

減衰振動の運動方程式の一般解
（第7回講義で導出した）

これを求めれば①の一般解が
求まる。

$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = F_0 \cos\omega_0 t$ の特殊解の導出方法

（講義スライドを再掲）

ばねの復元力＋周期的な外力＋抵抗力

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = F_0 \cos\omega_0 t \quad ①$$ の特殊解は？

前回の講義で、強制振動を考える際に、

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F_0 \cos\omega_0 t$$ の特殊解として、

$$x(t) = C\cos\omega_0 t$$ と仮定してうまくいった。

①に代入して計算すると、

$$\frac{C(\omega^2 - {\omega_0}^2) - F_0}{2C\gamma\omega_0} = \tan\omega_0 t$$

左辺は定数なので、どのような定数Cをとったとしても、すべてのtでこの式が成立するようにはできない。

今回は、①に $\dot{x}$ が入っているので、上の形を使うと、

$\cos\omega_0 t$と$\sin\omega_0 t$が混ざってしまう。

それなら、はじめから$\cos\omega_0 t$と$\sin\omega_0 t$の混ざった形を仮定して

$$x(t) = \underbrace{A}_{\text{定数}}\cos\omega_0 t + \underbrace{B}_{\text{定数}}\sin\omega_0 t$$

とおいてみる。

ばねの復元力＋周期的な外力＋抵抗力

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

代入

$$\dot{x} = -A\omega_0 \sin\omega_0 t + B\omega_0 \cos\omega_0 t$$

$$\ddot{x} = -A{\omega_0}^2 \cos\omega_0 t - B{\omega_0}^2 \sin\omega_0 t$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = F_0 \cos\omega_0 t \quad ①$$

$$-A{\omega_0}^2 \cos\omega_0 t - B{\omega_0}^2 \sin\omega_0 t$$
$$-2\gamma A\omega_0 \sin\omega_0 t + 2\gamma B\omega_0 \cos\omega_0 t$$
$$+A\omega^2 \cos\omega_0 t + B\omega^2 \sin\omega_0 t = F_0 \cos\omega_0 t$$

整理

$$\{-A{\omega_0}^2 + 2\gamma B\omega_0 + A\omega^2 - F_0\}\cos\omega_0 t$$
$$+\{-B{\omega_0}^2 - 2\gamma A\omega_0 + B\omega^2\}\sin\omega_0 t = 0$$

これが t によらず常に成立するためには、

ばねの復元力＋周期的な外力＋抵抗力

$$\begin{cases} -A{\omega_0}^2 + 2\gamma B\omega_0 + A\omega^2 - F_0 = 0 \\ -B{\omega_0}^2 - 2\gamma A\omega_0 + B\omega^2 = 0 \end{cases}$$

$\alpha \cos \omega_0 t + \beta \sin \omega_0 t$

$= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin(\omega_0 t + \delta) \qquad \tan \delta = \dfrac{\alpha}{\beta}$

なので　$\alpha = 0$,　$\beta = 0$

あるいは

$\cos \omega_0 t$ と $\sin \omega_0 t$ は独立な関数なので、それぞれの係数部分が0

これらから A と B を求めると、

$$A = \frac{\omega^2 - {\omega_0}^2}{(\omega^2 - {\omega_0}^2)^2 + 4\gamma^2{\omega_0}^2} F_0$$

$$B = \frac{2\gamma\omega_0}{(\omega^2 - {\omega_0}^2)^2 + 4\gamma^2{\omega_0}^2} F_0$$

ばねの復元力＋周期的な外力＋抵抗力

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = F_0 \cos\omega_0 t \quad ①$$ の特殊解は？

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

AとBに代入

$$= \frac{\omega^2 - {\omega_0}^2}{(\omega^2 - {\omega_0}^2)^2 + 4\gamma^2{\omega_0}^2} F_0 \cos\omega_0 t$$

整理

$$+ \frac{2\gamma\omega_0}{(\omega^2 - {\omega_0}^2)^2 + 4\gamma^2{\omega_0}^2} F_0 \sin\omega_0 t$$

$$= \frac{F_0}{(\omega^2 - {\omega_0}^2)^2 + 4\gamma^2{\omega_0}^2}\{(\omega^2 - {\omega_0}^2)\cos\omega_0 t + 2\gamma\omega_0 \sin\omega_0 t\} \quad ③$$

ばねの復元力＋周期的な外力＋抵抗力

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = F_0 \cos\omega_0 t$$ ①の一般解は、

$$\ddot{x}_1 + 2\gamma\dot{x}_1 + \omega^2 x_1 = 0$$ ②の一般解＋③

$\gamma > \omega$、$\gamma = \omega$、$\gamma < \omega$ で場合分け

1）$\gamma > \omega$

任意定数　任意定数

$$x(t) = A_1 e^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)t} + A_2 e^{\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)t} + ③$$

2）$\gamma = \omega$

任意定数　任意定数

$$x(t) = (A_1 t + A_2)\, e^{-\gamma t} + ③$$

3）$\gamma < \omega$

任意定数　任意定数

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \cos\left(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\, t + \theta\right) + ③$$

$\ddot{x}_1 + 2\gamma\dot{x}_1 + \omega^2 x_1 = 0$ の一般解の導出方法

（講義スライドを再掲）

2. 減衰振動

運動方程式 $m\ddot{x} = -m\omega^2 x - 2m\gamma\dot{x}$

移項して整理

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad ⑤$$

xに関係しない項が0

⑤の一般解は、常套手段を使って求める。

$x(t) = e^{\alpha t}$ と置いてみる （αは定数）

⑤に代入すると、

$$\frac{d^2}{dt^2}e^{\alpha t} + 2\gamma\frac{d}{dt}e^{\alpha t} + \omega^2 e^{\alpha t} = 0$$

微分を実行

$$e^{\alpha t}(\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega^2) = 0 \qquad ⑥$$

2. 減衰振動

$$e^{\alpha t}(\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega^2) = 0 \qquad ⑥$$

⑥が常に成立するためには

（⑤の特性方程式）

$$\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega^2 = 0 \qquad ⑦$$

解と係数の関係を用いると、

$$\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \qquad ⑧$$

γ と ω の大小関係により、下の3つの場合がある。

（⑤の特性方程式⑦が）

1. 2つの実数解　$\gamma > \omega$
2. 重解（1つの実数解）　$\gamma = \omega$
3. 2つの複素数解　$\gamma < \omega$

2. 減衰振動

（⑤の特性方程式が）

1. 2つの実数解　$\gamma > \omega$　（抵抗力が大きい場合）

$$\alpha = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$
$$= -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

⑤の一般解は、

任意定数　　任意定数

$$x(t) = A_1 e^{\left(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}\right)t} + A_2 e^{\left(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}\right)t}$$

$|\gamma| > \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$ なので、

$-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} < 0$

$-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} < 0$

どちらの項も減衰する（振動を表す項はない）

過減衰

（⑤の特性方程式が）

2. 重解（1つの実数解） $\gamma = \omega$

$$\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \qquad ⑧$$

$$\Big\downarrow \; \gamma = \omega$$

$$\alpha = -\gamma = -\omega$$

$$\Big\downarrow \; x(t) = e^{\alpha t} \text{ に代入}$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad ⑤$$

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} = A\,e^{-\omega t} \qquad ⑨$$

は⑤の解になっている

任意定数

ところで、⑤の微分方程式の一般解は、 $x(t) = C_1\psi_1(t) + C_2\psi_2(t)$ の形

互いに一次独立な関数

⑨と一次独立で⑤の解となるもう一つの関数を見つけなければいけない。

（⑤の特性方程式が）

2. 重解（1つの実数解） $\gamma = \omega$

⑨と一次独立で⑤の解となるもう一つの関数を見つけるために、

ここでも常套手段を使う。

$$x(t) = Ae^{\alpha t} = Ae^{-\gamma t} = A\, e^{-\omega t} \qquad ⑨$$

Aを定数ではなく、tの関数と考えてみる。

$$x(t) = A(t)\, e^{\alpha t} \qquad ⑩$$

と置いてみる。

（常套手段） （定数変化法）

⑩を⑤に代入（以下を考慮すると）

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \dot{A}e^{\alpha t} + A\alpha e^{\alpha t} \\
\ddot{x} &= \ddot{A}e^{\alpha t} + \dot{A}\alpha e^{\alpha t} + \dot{A}\alpha e^{\alpha t} + A\alpha^2 e^{\alpha t} \\
&= \ddot{A}e^{\alpha t} + 2\dot{A}\alpha e^{\alpha t} + A\alpha^2 e^{\alpha t}
\end{aligned}$$

（⑤の特性方程式が）

2. 重解（1つの実数解） $\gamma = \omega$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad ⑤$$

$$\downarrow$$

$$\ddot{A}e^{\alpha t} + 2\dot{A}\alpha e^{\alpha t} + A\alpha^2 e^{\alpha t} + 2\gamma\left(\dot{A}e^{\alpha t} + A\alpha e^{\alpha t}\right) + \omega^2 A e^{\alpha t} = 0$$

$$\downarrow \quad \begin{array}{l} \alpha = -\gamma \\ \omega = \gamma \end{array}$$

$\ddot{A} = 0$ だけが残る。

$$\downarrow \quad t \text{ で2回積分}$$

$$A(t) = A_1 t + A_2$$

任意定数（積分定数）

（⑤の特性方程式が）

2. 重解（1つの実数解） $\gamma = \omega$

$$x(t) = A(t)\, e^{\alpha t}$$ ⑩ に代入すると、

$$x(t) = (A_1 t + A_2)\, e^{\alpha t}$$

$A_1 t\, e^{\alpha t}$ と $A_2 e^{\alpha t}$ は1次独立な2つの解

最初に見つけた解の形

したがって一般解は、

$$x(t) = (A_1 t + A_2)\, e^{-\gamma t} = (A_1 t + A_2)\, e^{-\omega t}$$

臨界減衰

3. 2つの複素数解 $\gamma < \omega$ （抵抗力が小さい場合）

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad ⑤$$

$x(t) = e^{\alpha t}$ と置いて⑤に代入

$$\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \qquad ⑧$$

$\gamma < \omega$

$$\alpha = -\gamma \pm i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$$

$x(t) = e^{\alpha t}$ に代入すると、

3. 2つの複素数解　$\gamma < \omega$　（抵抗力が小さい場合）

$$x(t) = A_1 e^{\left(-\gamma + i\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\right)t} + A_2 e^{\left(-\gamma - i\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\right)t}$$

任意定数　　　　任意定数

$$= A_1 e^{-\gamma t} e^{i\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t} + A_2 e^{-\gamma t} e^{-i\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t}$$

オイラーの公式を用いて変形

$$= A_1\, e^{-\gamma t}\left\{\cos\left(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t\right) + i\sin\left(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t\right)\right\}$$

$$+A_2\, e^{-\gamma t}\left\{\cos\left(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t\right) - i\sin\left(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t\right)\right\}$$

整理

$$= (A_1 + A_2)e^{-\gamma t}\cos\left(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t\right)$$

$$+i(A_1 - A_2)e^{-\gamma t}\sin\left(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t\right)$$

3. 2つの複素数解　$\gamma < \omega$　（抵抗力が小さい場合）

$x(t)$ は実数なので、

$$\begin{cases} (A_1 + A_2) = \mathrm{a} \\ (A_1 - A_2) = i\mathrm{b} \end{cases}$$

$(A_1 + A_2) = \mathrm{a}$ ← 実数なので

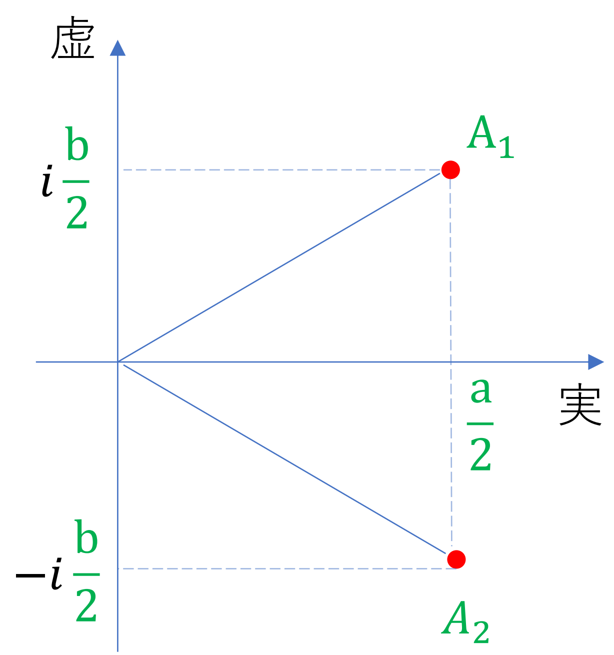
$(A_1 - A_2) = i\mathrm{b}$ ← 虚数なので

（a と b は実数）

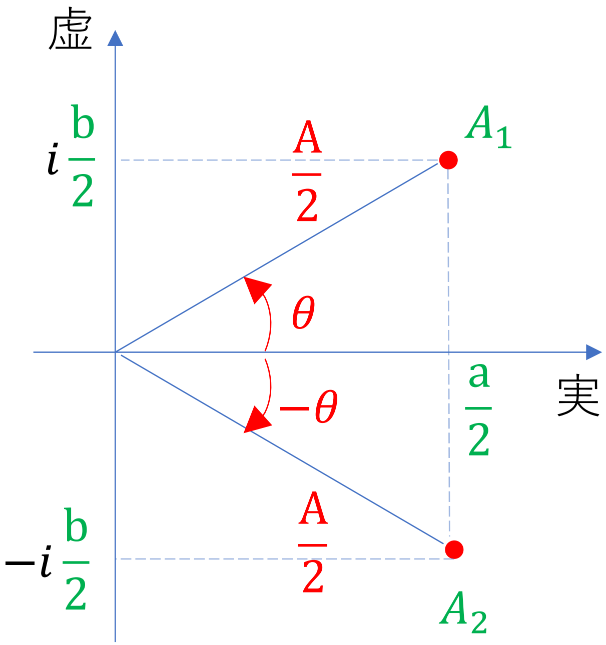
とおく。

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{1}{2}(\mathrm{a} + i\mathrm{b}) \\ A_2 = \dfrac{1}{2}(\mathrm{a} - i\mathrm{b}) \end{cases}$$

A_1 と A_2 は互いに複素共役



3. 2つの複素数解　$\gamma < \omega$　（抵抗力が小さい場合）



（A_1とA_2は互いに複素共役）

複素平面上の極座標表示を用いて、

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{A}{2}\cos\theta + \dfrac{A}{2}\, i\sin\theta \\ A_2 = \dfrac{A}{2}\cos\theta - \dfrac{A}{2}\, i\sin\theta \end{cases}$$

とおくと、（Aとθは実数のある定数）

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = A\cos\theta \\ A_1 - A_2 = iA\sin\theta \end{cases}$$

3. 2つの複素数解　$\gamma < \omega$　（抵抗力が小さい場合）

$$x(t) = (A_1 + A_2)e^{-\gamma t}\cos\left(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\, t\right)$$

$$+i(A_1 - A_2)e^{-\gamma t}\sin\left(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\, t\right)$$

$$\left.\begin{aligned} A_1 + A_2 &= A\cos\theta \\ A_1 - A_2 &= iA\sin\theta \end{aligned}\right\}$$

$$= A\cos\theta\, e^{-\gamma t}\cos\left(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\, t\right)$$

$$-A\sin\theta\, e^{-\gamma t}\sin\left(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\, t\right)$$

$$= Ae^{-\gamma t}\cos\left(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\, t + \theta\right)$$

（cos の形で書くと）

任意定数　　　　任意定数