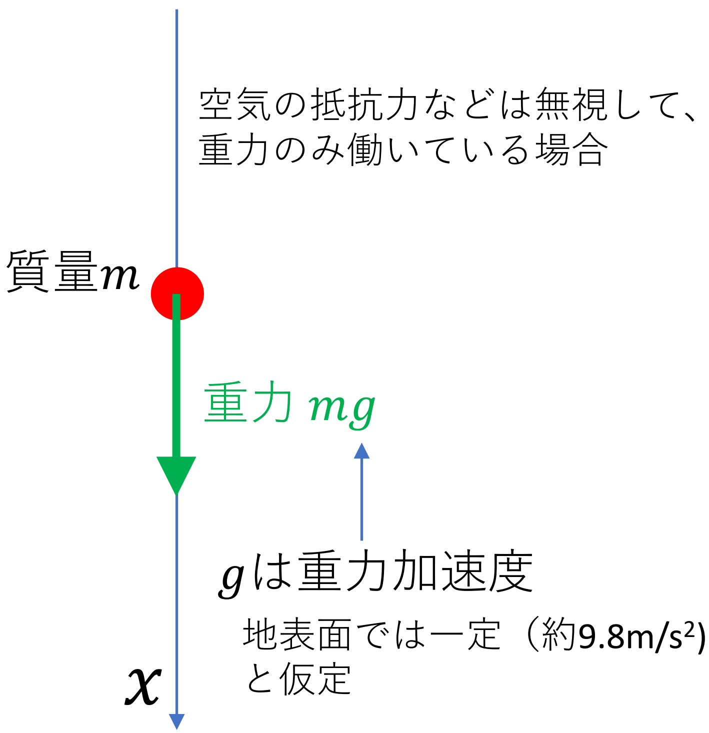
力学１

第5回目

ニュートンの運動の法則

1. 第1法則（慣性の法則）
2. 第2法則（運動方程式）
3. 第3法則（作用・反作用の法則）
4. 運動方程式の例
（落下運動、放物運動、単振り子）

4. 運動方程式の例（落下運動）



鉛直方向下向きをx軸の
正の向きとする

$$\vec{F} = m\,\vec{a} = m\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

x軸上の1次元の運動なので、

$$mg = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} = g$$

時間で積分

積分定数

（初期条件）
時刻$t = 0$で$v_x = v_0$とすると
$\mathrm{A} = v_0$

$$\dot{x} = v_x = gt + \mathrm{A} = gt + v_0$$

時間で積分

積分定数（時刻$t = 0$でのx）

$$x = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + \mathrm{B}$$

時刻$t = 0$で$x = 0$とすると$\mathrm{B} = 0$ （初期条件）

$$x = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$$

運動方程式

運動方程式の組み立て方

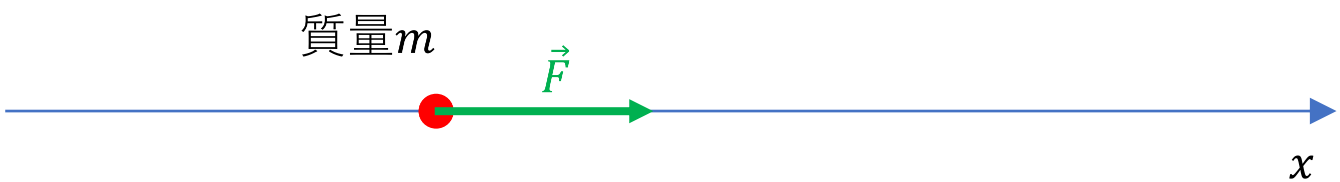
運動方程式の組み立て方

1. 座標軸を設定
2. 質点に働く力を（質点の位置、速度、時間の関数として）求める
3. 質点に働く力を運動方程式（$\vec{F}=m\,\vec{a}=m\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$）に当てはめる
4. 運動方程式を座標軸の各成分ごとに書き下す
5. 微分方程式を解く

運動方程式の組み立て方

1. 座標軸を設定

1次元の運動であれば、



1次元（x軸上）の運動なので、

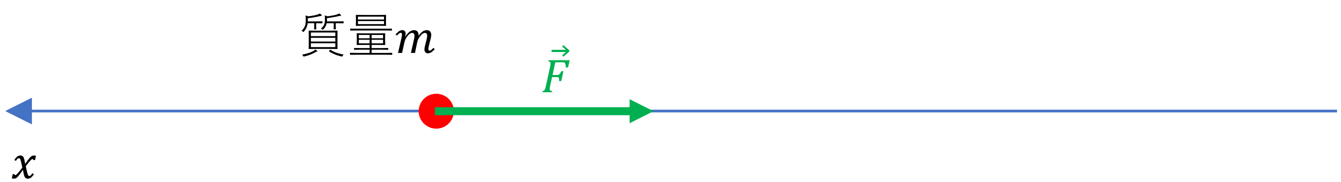
$$F_x = m\ddot{x}$$

運動方程式の組み立て方

1. 座標軸を設定

同じ物理的状況でx軸の正負を逆にとると？

1次元の運動であれば、



1次元（x軸上）の運動なので、

$$F_x = m\ddot{x}$$

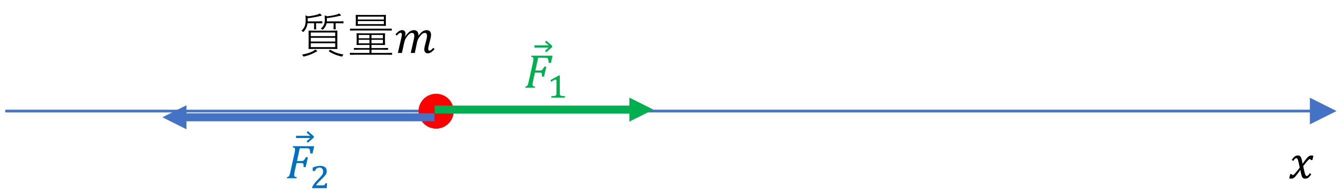
$F_x < 0$

運動方程式の組み立て方

1. 座標軸を設定

2種類の力 $\vec{F}_1$、 $\vec{F}_2$ が働いている場合

1次元の運動であれば、



1次元（x軸上）の運動なので、

$$F_{1x} + F_{2x} = m\ddot{x}$$

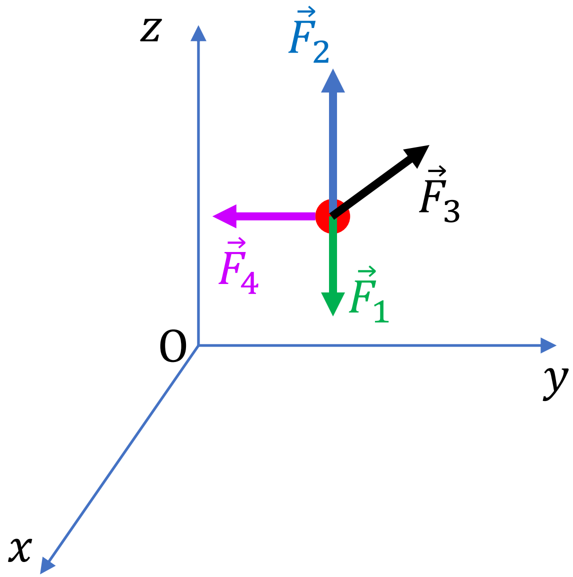
$F_{1x} > 0$　　$F_{2x} < 0$

運動方程式の組み立て方

1.　座標軸を設定

3次元の運動であれば、

（例えば3次元直交座標）



$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = m\ddot{\vec{r}}$$

各成分では、

$$\begin{cases} F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} = m\ddot{x} & (x\text{成分}) \\ F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} = m\ddot{y} & (y\text{成分}) \\ F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + F_{4z} = m\ddot{z} & (z\text{成分}) \end{cases}$$

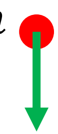
それぞれの力の向きと座標軸の向きで
力の成分の正負が決まる

運動方程式の組み立て方

2.　質点に働く力を求める
（質点の位置、速度、時間の関数として）

地表面近くでの重力なら、

質量m



質量

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

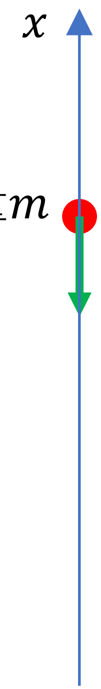
重力加速度

運動方程式の組み立て方

2.　質点に働く力を求める
（質点の位置、速度、時間の関数として）

地表面近くでの重力なら、

（鉛直線上の運動を考える）



質量

$\vec{F} = m\vec{g}$

重力加速度

（$|\vec{g}| = g$）

鉛直上向きにx軸をとると

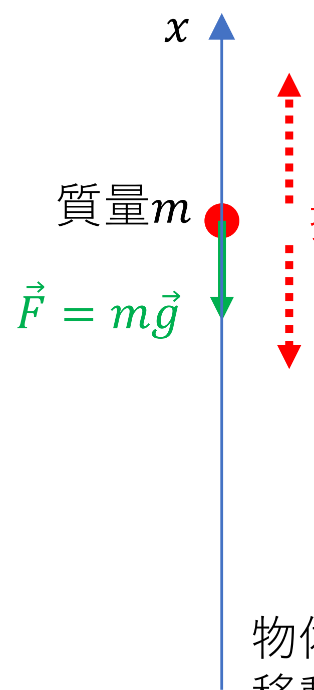
$F_x = -mg = m\ddot{x}$

運動方程式の組み立て方

2. 質点に働く力を求める（質点の位置、速度、時間の関数として）

重力に加えて、空気による**抵抗力**（大きさは速さに比例すると仮定）がある場合

（鉛直線上の運動を考える）（風は吹いていないとする）



抵抗力はどちら向き？

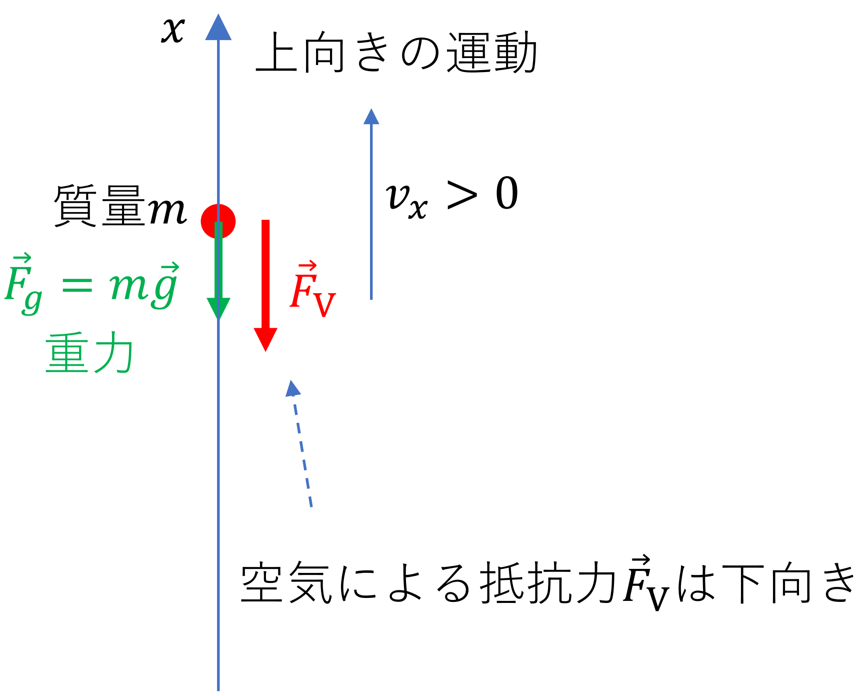
空気による抵抗力は、物体の進行方向とは逆向き

物体が、鉛直方向上向き、または下向きに移動している場合で、場合を分けて考えてみる

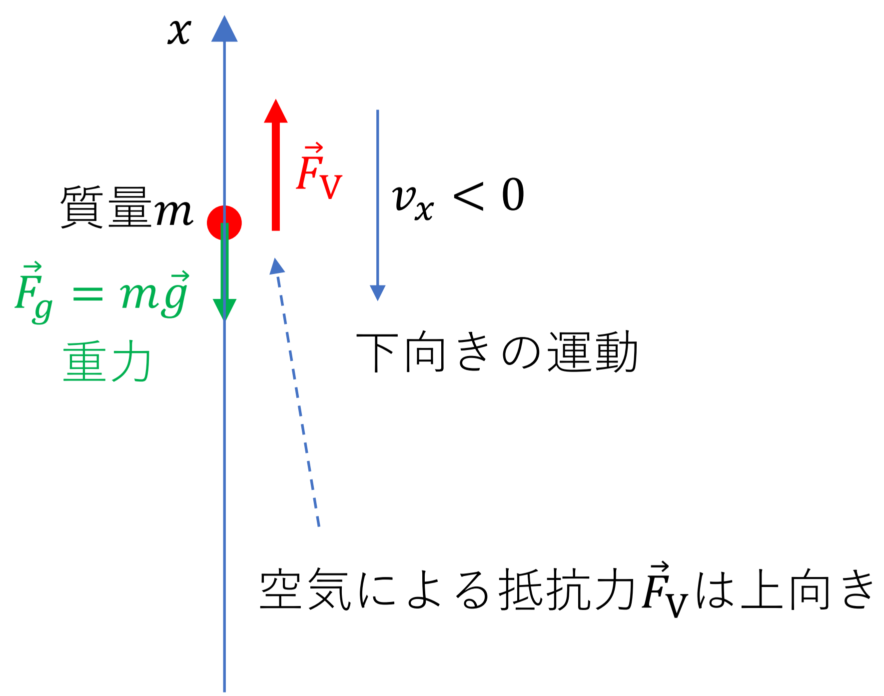
運動方程式の組み立て方

重力に加えて、空気による抵抗力（大きさは速さに比例すると仮定）がある場合

1）　$v_x > 0$



2）　$v_x < 0$

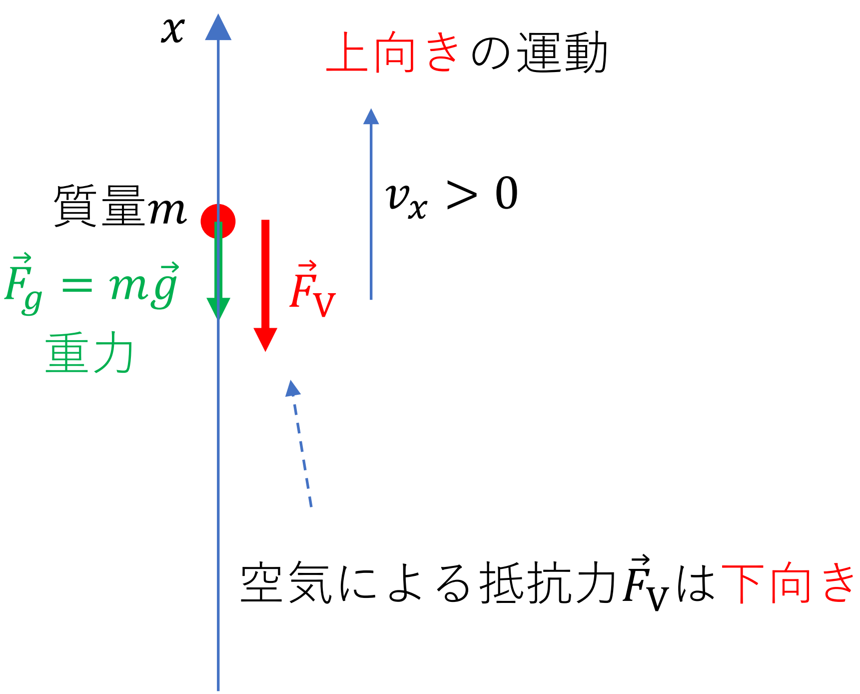


運動方程式の組み立て方

3. 質点に働く力を運動方程式（$\vec{F} = m\,\vec{a} = m\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$）に当てはめる
4. 運動方程式を座標軸の各成分ごとに書き下す

重力に加えて、空気による抵抗力（大きさは速さに比例すると仮定）がある場合

1） $v_x = \frac{dx}{dt} > 0$



空気による抵抗力の大きさが速さに比例すると仮定しているので、

$|\vec{F}_\mathrm{V}| = \gamma|v_x|$と置く。 （教科書では$m\gamma|v_x|$）

ギリシャ文字のガンマ

比例係数（定数、γ >0）

x軸に関する運動方程式は、

$$F_g + F_\mathrm{V} = m\ddot{x}$$

負

$$-mg - \gamma v_x = m\ddot{x}$$

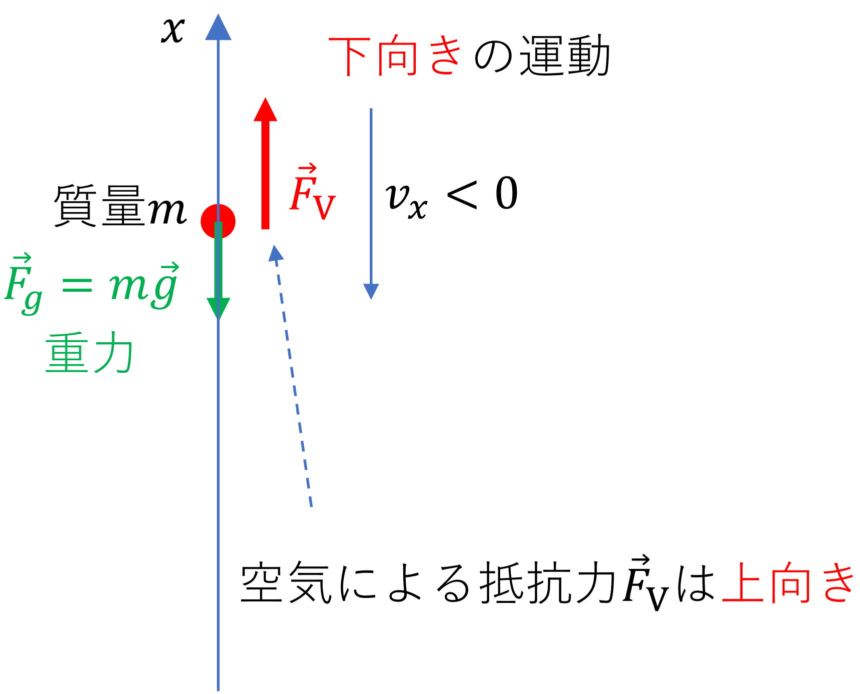
$$-mg - \gamma\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

運動方程式の組み立て方

3. 質点に働く力を運動方程式（$\vec{F} = m\,\vec{a} = m\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$）に当てはめる
4. 運動方程式を座標軸の各成分ごとに書き下す

重力に加えて、空気による抵抗力（大きさは速さに比例すると仮定）がある場合

2） $v_x = \frac{dx}{dt} < 0$



空気による抵抗力の大きさが速さに比例すると仮定しているので、

$|\vec{F}_{\mathrm{V}}| = \gamma |v_x|$と置く。

比例係数（定数、γ >0）

x軸に関する運動方程式は、

$$F_g + F_{\mathrm{V}} = m\ddot{x}$$

負　正　負

$$-mg - \gamma v_x = m\ddot{x}$$

正

1） $v_x = \frac{dx}{dt} > 0$ と同じ形

$$-mg - \gamma \frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

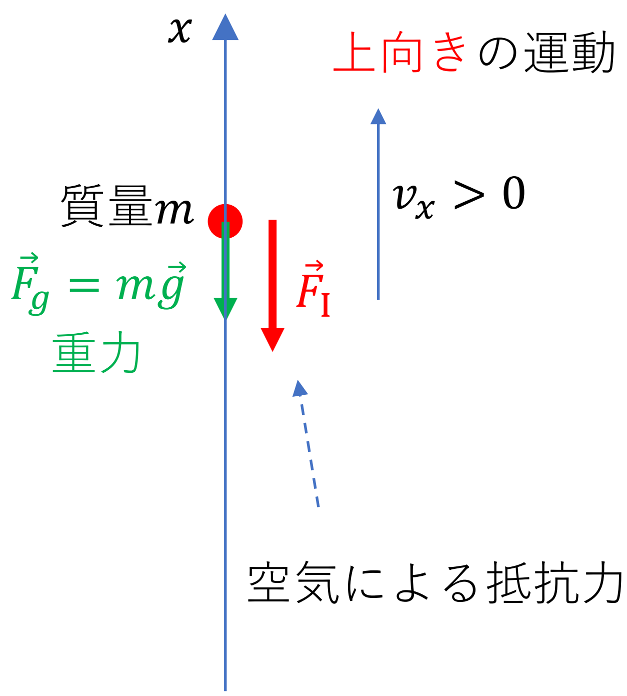
運動方程式の組み立て方

2. 質点に働く力を（質点の位置、速度、時間の関数として）求める

重力に加えて、空気による抵抗力（大きさが速さの２乗に比例すると仮定）がある場合

（鉛直線上の運動を考える）
（風は吹いていないとする）

1）　$v_x = \dfrac{dx}{dt} > 0$



空気による抵抗力$\vec{F}_\mathrm{I}$は下向き

空気による抵抗力の大きさが速さの2乗に比例すると仮定しているので、

$\left|\vec{F}_\mathrm{I}\right| = \mu {v_x}^2$と置く。

比例係数（定数、μ >0）

x軸に関する運動方程式は、

$$F_g + F_\mathrm{I} = m\ddot{x}$$

負

$$-mg - \mu {v_x}^2 = m\ddot{x}$$

$$-mg - \mu\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

運動方程式の組み立て方

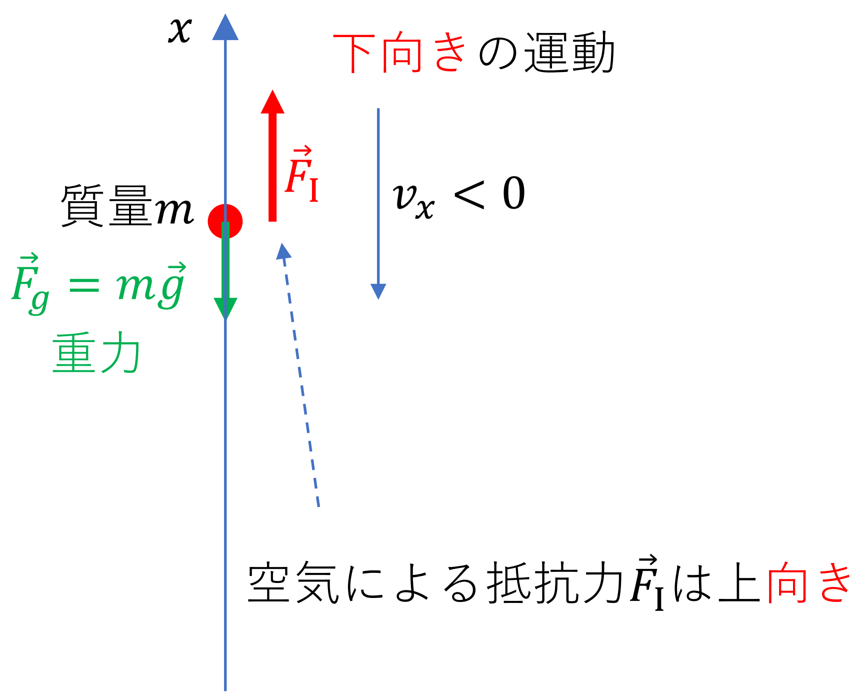
2. 質点に働く力を（質点の位置、速度、時間の関数として）求める

重力に加えて、空気による抵抗力（大きさが速さの２乗に比例すると仮定）がある場合

（鉛直線上の運動を考える）

（風は吹いていないとする）

2） $v_x = \dfrac{dx}{dt} < 0$



空気による抵抗力の大きさが速さの2乗に比例すると仮定しているので、

$\left|\vec{F}_{\mathrm{I}}\right| = \mu {v_x}^2$ と置く。

比例係数（定数、μ >0）

x軸に関する運動方程式は、

$$F_g + F_{\mathrm{I}} = m\ddot{x}$$

負　正

$$-mg + \mu {v_x}^2 = m\ddot{x}$$

$$-mg + \mu\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

運動方程式の組み立て方

重力に加えて、空気による抵抗力（大きさが速さの２乗に比例すると仮定）がある場合

1） $v_x = \frac{dx}{dt} > 0$

2） $v_x = \frac{dx}{dt} < 0$

$$-mg - \mu\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$-mg + \mu\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

座標軸の正負どちら向きに進んでいるかで、
場合を分けて運動方程式を考える必要がある。

物体が空気中で運動する場合、空気の抵抗力は、大きさが速さに比例する力（粘性抵抗 Viscous resistance $\vec{F}_\mathrm{V}$）と、速さ2乗に比例する力（慣性抵抗 Inertial resistance $\vec{F}_\mathrm{I}$）のどちらも働いていると考えられる。速さが小さい場合には、速さに比例する力の影響が大きく、速さが大きくなるにつれ、速さの2乗に比例する力の影響が大きくなる。
（参考文献：例えば「物理学序論としての**力学**　藤原邦男著　東京大学出版会」）

上の微分方程式には$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$が含まれている。（非線形微分方程式）
非線形の微分方程式は解を求めるのが難しい

5. 微分方程式を解く

重力に加えて、空気による抵抗力（大きさは速さに比例すると仮定）がある場合（今日のスライド13枚目）

運動方程式（微分方程式）　$$-mg-\gamma\frac{dx}{dt}=m\frac{d^2x}{dt^2}$$

移項して整理すると、　$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\gamma}{m}\frac{dx}{dt}=-g$$

これは、単純に積分して$x(t)$を求めるというわけにはいかない。

5. 微分方程式を解く

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\gamma}{m}\frac{dx}{dt} = -g \qquad ①$$

どうする？

解法の例（教科書）

①式は、$\frac{d^2x}{dt^2}$と$\frac{dx}{dt}$は含まれているが、xが含まれていない。

$\frac{dx}{dt} = v_x$ と置いて、①式を v_x の微分方程式にすると、

微分の階数を下げることができる。

（時間についての2階の微分方程式から、1階の微分方程式に変形できる）

5.　微分方程式を解く

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\gamma}{m}\frac{dx}{dt} = -g$$ ①　　2階の微分方程式

$\frac{dx}{dt} = v_x$と置くと、

$$\frac{dv_x}{dt} + \frac{\gamma}{m}v_x = -g$$ ②　　1階の微分方程式

微分方程式として、少し簡単になった。

今の目的（微分方程式を解く）は、②式を満たすv_xを求めること。

5. 微分方程式を解く

（ここからのプロセスは、微分方程式を
解く際の常套手段の一つ）

方程式が違うので、v_xではなく、
別の関数v_{1x}としておく

もし、②が $$\frac{dv_{1x}}{dt}+\frac{\gamma}{m}v_{1x}=0 \quad ③$$ の形だったら？

$-g$でなく0

$$\frac{dv_x}{dt}+\frac{\gamma}{m}v_x=-g \quad ②$$

③を移項して変形すると、

$$\frac{1}{v_{1x}}\frac{dv_{1x}}{dt}=-\frac{\gamma}{m} \quad ④$$

（ここでは$v_{1x}\neq 0$として続ける）

この形はよく出てくる

$$\frac{d}{dt}(\ln|v_{1x}|)=-\frac{\gamma}{m} \quad ⑤$$

$\ln|v_{1x}|=\log_e|v_{1x}|$

これは、両辺を積分してv_{1x}を求めることができる。

5. 微分方程式を解く

$$\frac{d}{dt}(\ln|v_{1x}|) = -\frac{\gamma}{m} \quad ⑤$$

積分

$$\int \frac{d}{dt}(\ln|v_{1x}|)dt = \int \left(-\frac{\gamma}{m}\right) dt \quad ⑥$$

積分定数

$$\ln|v_{1x}| = -\frac{\gamma}{m}t + \mathrm{C}_1 \quad ⑦$$

5. 微分方程式を解く

$$\ln|v_{1x}| = -\frac{\gamma}{m}t + \mathrm{C}_1 \quad ⑦$$

$$|v_{1x}| = e^{-\frac{\gamma}{m}t+\mathrm{C}_1} = e^{\mathrm{C}_1}e^{-\frac{\gamma}{m}t} \quad ⑧$$

e^{C_1}はある定数なので、改めてCとおく

$$v_{1x} = \pm \mathrm{C}e^{-\frac{\gamma}{m}t} \quad ⑨$$

±も含めてCとかくと、

$$v_{1x} = \mathrm{C}e^{-\frac{\gamma}{m}t} \quad ⑩$$

$$\frac{dv_x}{dt} + \frac{\gamma}{m}v_x = -g \quad ②$$

$$\frac{dv_{1x}}{dt} + \frac{\gamma}{m}v_{1x} = 0 \quad ③$$

これは、③の解である。（③の一般解）

$$\frac{dv_x}{dt} + \frac{\gamma}{m} v_x = -g \quad ②$$

$$\frac{dv_{1x}}{dt} + \frac{\gamma}{m} v_{1x} = 0 \quad ③$$

5. 微分方程式を解く

求めたいのは、②の解

②の左辺に、$v_x = v_{1x} + v_{2x}$ とおいて代入してみると、

③の解

今はまだわからない何かある関数

$$\frac{dv_x}{dt} + \frac{\gamma}{m} v_x = -g \quad ②$$

$$\frac{d(v_{1x} + v_{2x})}{dt} + \frac{\gamma}{m}(v_{1x} + v_{2x}) = -g \quad ⑪$$

$$\frac{dv_{1x}}{dt} + \frac{\gamma}{m} v_{1x} + \frac{dv_{2x}}{dt} + \frac{\gamma}{m} v_{2x} = -g \quad ⑫$$

5. 微分方程式を解く

$$\frac{dv_{1x}}{dt} + \frac{\gamma}{m}v_{1x} + \frac{dv_{2x}}{dt} + \frac{\gamma}{m}v_{2x} = -g \qquad ⑫$$

v_{1x}は③の解なので、この部分は 0

これを満たすv_{2x}を見つけたい

(②の特殊解)

$$\frac{dv_x}{dt} + \frac{\gamma}{m}v_x = -g \quad ②$$

$$\frac{dv_{1x}}{dt} + \frac{\gamma}{m}v_{1x} = 0 \quad ③$$

$$\frac{dv_{2x}}{dt} + \frac{\gamma}{m}v_{2x} = -g \qquad ⑬$$

差し当たり、v_{2x}が定数と仮定すると、

$\frac{dv_{2x}}{dt} = 0$なので、$\frac{\gamma}{m}v_{2x} = -g$より、

$$v_{2x} = -\frac{mg}{\gamma} \quad ⑭$$

⑭を⑬に代入すると、式を満たすので

⑭は⑬（すなわち②）の（特殊）解

5. 微分方程式を解く

$$\frac{dv_x}{dt}+\frac{\gamma}{m}v_x=-g \quad ②$$

$$\frac{dv_{1x}}{dt}+\frac{\gamma}{m}v_{1x}=0 \quad ③$$

したがって、

$$\boxed{v_x=v_{1x}+v_{2x}=Ce^{-\frac{\gamma}{m}t}+(-\frac{mg}{\gamma}) \quad ⑮}$$

これを②に代入すると、成立している。

⑮は、②の解（一般解）である。 これを積分して$x(t)$を求めると、①の解が求まる。

微分方程式の解として今求めたい解

ところで、前のスライドで、v_{2x}が②を満たしていることを見た。

v_{2x}を②の解と考えてはいけないのか？

v_{2x}も②の解ではあるが、すべての解を表現しているわけではない。

v_{2x}は②の特殊解であるが、一般解ではない。

今我々が微分方程式の解として求めたいのは一般解

5. 微分方程式を解く

常微分方程式の解

（常微分方程式：パラメータが一つ、今の場合時間 t）

一般解：微分方程式の階数と同じ数の任意定数を含む解

特殊解：一般解の任意定数にある値を入れて得られる解

特異解：一般解からは得られない解

次回、力学1で出てくる微分方程式の解法について、少し一般的な内容を扱う予定

（2年生の数学1及び演習（常微分方程式）で詳しく学習することになる。）

5. 微分方程式を解く

⑮を導出した方法をまとめてみると、

求めたいのは②の解v_x

$$\frac{dv_x}{dt} + \frac{\gamma}{m} v_x = -g \qquad ②$$

②でv_xを含まない項を0とした別の方程式③を作っておく
（この形の微分方程式は解を求めやすい）

$$\frac{dv_{1x}}{dt} + \frac{\gamma}{m} v_{1x} = 0 \qquad ③$$

③の一般解v_{1x}を求める。

$$v_{1x} = Ce^{-\frac{\gamma}{m}t} \qquad ⑩$$

②の特殊解v_{2x}を求める。

$$v_{2x} = -\frac{mg}{\gamma} \qquad ⑭$$

$v_x = v_{1x} + v_{2x}$ が②の一般解となる。

$$v_x = Ce^{-\frac{\gamma}{m}t} + \left(-\frac{mg}{\gamma}\right) \qquad ⑮$$

5.　微分方程式を解く

スライド19枚目の②　別の解法（なんとか積分してみる）

$$\frac{dv_x}{dt}+\frac{\gamma}{m}v_x=-g \qquad ②$$

↓ 移項

$$\frac{dv_x}{dt}=-\frac{\gamma}{m}v_x-g \qquad ②\text{-}1$$

↓ 右辺を整理

$$\frac{dv_x}{dt}=-\frac{\gamma}{m}\left(v_x+\frac{mg}{\gamma}\right) \qquad ②\text{-}2$$

↓ かっこ内を左辺へ移項

$$\frac{1}{v_x+\frac{mg}{\gamma}}\frac{dv_x}{dt}=-\frac{\gamma}{m} \qquad ②\text{-}3$$

1階の微分方程式を解く際の変数分離形と呼ばれる

$$\frac{1}{v_x+\frac{mg}{\gamma}}dv_x=-\frac{\gamma}{m}dt$$

ここで、$v_x+\frac{mg}{\gamma}=v_3$と置いてみると、

5. 微分方程式を解く

スライド19枚目の② 別の考え方（なんとか積分してみる）

$$\frac{1}{v_x + \frac{mg}{\gamma}} \frac{dv_x}{dt} = -\frac{\gamma}{m}$$ ②-3

定数

$$\begin{cases} v_x + \dfrac{mg}{\gamma} = v_3 \\ \dfrac{dv_3}{dt} = \dfrac{dv_x}{dt} \end{cases}$$

$$\frac{1}{v_3} \frac{dv_3}{dt} = -\frac{\gamma}{m}$$ ②-4

これは、スライド21枚目④式と同じなので、

$$v_3 = Ce^{-\frac{\gamma}{m}t}$$ ②-4の一般解　（Cは積分定数）

つまり、

$$v_3 = v_x + \frac{mg}{\gamma} = Ce^{-\frac{\gamma}{m}t}$$

$$\boxed{v_x = Ce^{-\frac{\gamma}{m}t} - \frac{mg}{\gamma}}$$

26枚目⑮式と同じ答えが得られる。

$v_x = Ce^{-\frac{\gamma}{m}t} - \frac{mg}{\gamma}$ において、$\mathrm{C} = \frac{mg}{\gamma} = 1$ とすると、