第 8 回講義：不定形の極限計算（教科書 1.7 続き）．

Goal：ロピタル (de l'Hospital) 計算．

Cauchy の平均値定理から，不定形の極限の形式的計算を可能にする強力なロピタルの定理が直ちに導かれる．

• （系）ロピタルの定理とその拡張版．$f(x)$, $g(x)$ が $x=a$ を含むある開区間で微分可能であって $f(a)=g(a)=0$ かつ $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するなら

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

である．

（注意）$a=\pm\infty$ のときや $\lim_{x\to a}|f(x)|=\lim_{x\to a}|g(x)|=\infty$ のときも同じ形の定理が成り立つ．

• ロピタル計算の例．ロピタル計算では $\frac{0}{0}$ の形や $\frac{\infty}{\infty}$ の形を確認することを決して忘れてはいけない．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2}=0$.

ロピタルの定理を使うだけでなく，関数の増大度比較の観点からの証明を理解することが数学の理解につながる（数学のセンスを養う）という点で重要である（という意味のことがいろんな教科書に書いてあり，私も幾分かそう思う）．もっとも，ロピタル計算にも数学のセンスは必要だが．

(2) のベターな別解．

$f(x)=x^3e^{-x}$ とおくと $x\ge 0$ で $f'(x)=(3x^2-x^3)e^{-x}=0$ となるのは $x=0,3$ だけで，$0<x<3$ では $f'(x)>0$, $3<x$ では $f'(x)<0$ である．よって $x\ge 0$ で $0\le f(x)\le f(3)$ である．したがって $0\le x^2e^{-x}=\dfrac{f(x)}{x}\le\dfrac{f(3)}{x}\to 0\ (x\to\infty)$ が成り立つ．したがって，はさみうち原理により $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x}=0$.

• ロピタルの定理の不定形の極限値の計算への応用．次の計算例のように，いきなりロピタル計算ができる形をしているとは限らない．そのような場合は，ロピタル計算を実行する前にやるべき整形作業がある：

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)&=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)(x+\sin x)}{x^2\sin^2 x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\,\frac{x+\sin x}{\sin x}\,\frac{x}{\sin x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\left(1+\frac{x}{\sin x}\right)\frac{x}{\sin x}\\
&=\frac{1}{6}\cdot 2\cdot 1=\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

である．ここで

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$$

というロピタル計算を行った．このように，不定形の極限計算ではロピタル計算をやりやすい形に持ち込む工夫をする．

再び注意：ロピタル計算を使うときには $\frac{0}{0}$ とか $\frac{\infty}{\infty}$ の確認を忘れないように．

• a が有限で $f(a)=g(a)=0$（$\frac{0}{0}$ の不定型）のときのロピタルの定理の証明．

Cauchy の平均値定理より任意の $x \neq a$ に対し，(a,x) または (x,a) のある点 c に対して

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

が成り立つ．ここで $x \to a$ とすると $c \to a$ である．仮定から

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{f'(x)}$$

は存在する．よって

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{f'(x)}$$

である．□

ロピタル計算

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

を，ロピタルの定理の証明に即して正当化しよう．$\frac{0}{0}$ の不定型

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2}$$

に対し，分母分子を微分すると

$$\frac{\sin x}{6x}$$

となる．ここで $x \to 0$ としたときの極限は $\frac{1}{6}$ である．よってロピタルの定理から

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} = \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

である．次に $\frac{0}{0}$ の不定型

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3}$$

に対し，分母分子を微分すると

$$\frac{1-\cos x}{3x^2}$$

となる．上の議論から，ここで $x \to 0$ としたときの極限があって

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} = \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

である．よってロピタルの定理から

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

である．このように，$\frac{0}{0}$ を確認しながら分母分子を微分していって最後に極限が求められた場合には,「右から左に向かって」ロピタルの定理を繰り返し適用することによって，計算が正当化される．

- **課題 1**：ロピタル計算により，次の不定形の極限を求めよ．
  (1) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x}$.
  (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^r}$ $(r > 0)$.
  (3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x}$ (n は自然数).

(4) $\lim_{x \to +0} x^x$.

(5) $\lim_{x \to \infty} x^{\frac{1}{x}}$.

- **課題 2**：教科書の問 7.2（ロピタル計算に持ち込む前に整形が必要な問題も混じっていることに注意）.
- **課題 3.** (1) $e^x = f(x)$ となる多項式 $f(x)$ は存在しない．なぜか？

  (2) $\sin x = g(x)$ となる多項式 $g(x)$ は存在しない．なぜか？

ヒント：うまく極限を考えるとこういうことを証明できる．e が無理数だということを証明したが，感覚的にはそれに近いことだ．理由を何通りか考えてみよう．