第八回課題解説.

● **課題 1**：ロピタル計算の練習.

(1)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{-2} = \frac{1}{2} \quad \text{または} \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi-2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{2(\frac{\pi}{2}-x)} = \frac{1}{2} \ .$$

(2) $r > 0$ とする.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^r} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{rx^{r-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{rx^r} = 0 \ .$$

(3) n は自然数とする.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \dots \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{e^x} = 0 \ .$$

(4)

$$\lim_{x\to+0} x^x = \lim_{x\to0} e^{x\log x}$$

であり，e の肩に乗っているものを取り出すと

$$\lim_{x\to0} x\log x \overset{x=1/y}{=} -\lim_{y\to\infty} \frac{\log y}{y} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} -\lim_{y\to\infty} \frac{\frac{1}{y}}{1} = -\lim_{y\to\infty} \frac{1}{y} = 0$$

だから，問題の極限はこれを e の肩に戻して e である.

(5)

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\log x}{x}}$$

であり，e の肩に乗っているものを取り出すと

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

だから，問題の極限はこれを e の肩に戻して 1 である.

● **課題 2**：教科書の問 7.2. (1)

$$\lim_{x\to0} \frac{x-\tan x}{x^3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to0} \frac{1-(\cos x)^{-2}}{3x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to0} \frac{\frac{-2\sin x}{\cos^3 x}}{6x} = -\frac{1}{3} \lim_{x\to0} \frac{1}{\cos^3 x} \frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{3}\cdot1\cdot1 = -\frac{1}{3} \ .$$

(2) $y = \arctan x$ とおくと $x - \arctan x = \tan y - y$ なので $\frac{x-\arctan x}{x^3} = \frac{\tan y - y}{\tan^3 y}$ である．よって

$$\lim_{x\to0} \frac{x-\arctan x}{x^3} = \lim_{y\to0} \frac{\tan y - y}{\tan^3 y} = \lim_{y\to0} \frac{\tan y - y}{y^3} \left(\frac{y}{\tan y}\right)^3 = \lim_{y\to0} \frac{\tan y - y}{y^3} \left(\frac{y}{\sin y}\cos y\right)^3$$

である．(1) を使うと，これは $\frac{1}{3}\times1 = \frac{1}{3}$ である.

(3) ロピタル計算に持ち込む前に，基本極限公式 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$ を使ってロピタル計算できる形に整形する.

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x} = \frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}\frac{x^2}{\sin^2 x} = \frac{x-\sin x}{x^3}\frac{x+\sin x}{x}\frac{x^2}{\sin^2 x} \to 2\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3} \quad (x\to0)$$

だから問題の極限計算は

$$2\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

の計算に帰着する．これはロピタル計算できる形である：

$$2\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3} \overset{\frac{0}{0}}{=} 2\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} 2\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{6x} = 2\times\frac{1}{6} = \frac{1}{3} \ .$$

(4) $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$ は 1^∞ の不定形．e の肩の上での出来事に書き換える（対数をとる）と $\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\log\cos x}$ となる．$\lim_{x\to 0}\frac{\log\cos x}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x} = -\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x} = -\frac{1}{2}$．よって問題の極限は $e^{-\frac{1}{2}}$ である．

(5) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}$ は $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形．分母分子を n 階微分するとロピタルの定理より $\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{2^x} = 0$ である．（別解）$f(x) = x^{n+1}e^{-x}$ とおくと $f'(x) = x^n(n+1-x)e^{-x}$ だから $f(0) = 0$, $f(x)$ は $0 < x < 1$ で狭義単調増加，$n < x$ で狭義単調減少である．よって $x > 0$ のとき $0 < f(x) = x^{n+1}e^{-x} \leq f(n+1) = (n+1)^n e^{-n-1}$ である．よって $0 < xe^{-x} < \frac{f(n)}{x} \to 0\ (x\to\infty)$ である．はさみうち原理より $\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} = 0$ である．

• **課題 3.** 理由はたくさんある．以下はそれらの一例に過ぎない．

(1) $e^x = f(x)$ となる多項式 $f(x)$ が存在しない理由．例えば，$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ となるが，n 次多項式 $f(x)$ は $f(x) = x^n(a_0 + a_1/x + \cdots + a_n/x^n)$ と表すことにより $\lim_{x\to\infty}|f(x)|$ は必ず ∞ に発散する．よって e^x は多項式になり得ない．

他にも，ロピタル計算から如何なる n に対しても $\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x} = 0$ になってしまうことからも，e^x は多項式でないことがわかる．

(2) $\sin x = g(x)$ となる多項式 $g(x)$ は存在しない理由．(1) と同じ議論が可能である．

他の議論としては $\sin x = 0$ は無限個の解を持つ（π の整数倍は全てこの方程式の解である）が，n 次多項式 $= 0$ の解は n 個を超えない．よって $\sin x$ は多項式になり得ない．