第十四回課題解説.

- **課題 1.** 教科書の問 13.1 (5)(6).
- **課題 2.** 第 2 種広義積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$ を求めよ．ヒント：被積分関数の分母分子に $\sqrt{1+x}$ を掛けると簡単になる．
- **課題 3.** サイクロイド $x=t-\sin t,\ y=1-\cos t\ (0\le t\le 2\pi)$ の概形を描いて弧長を求めよ．
- **課題 4.** 不等式 $2x^2-2xy+y^2+z^2\le 1$ で定義される立体の体積を求めよ．

1. 教科書の問 13.1 (5) $x=at$ とおいて置換積分すると

$$\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=[\arcsin t]_{-1}^{1}=\pi\ .$$

(6) $y=\left(\dfrac{x}{1-x}\right)^{1/3}$ とおくと $x=1-\dfrac{1}{1+y^3}$ だから $dy=\dfrac{3y^2}{(1+y^3)^2}$. よって問題の積分は

$$\int_0^1\frac{1}{x}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\frac{1}{3}}dx=\int_0^{\infty}\frac{1+y^3}{y^3}y\frac{3y^2}{(1+y^3)^2}dy=3\int_0^{\infty}\frac{dy}{1+y^3}$$

となる．これは教科書の例題 12.10 を 3 倍したものだから教科書 85 ページの 3 行目の 3 倍を使うと

$$\left[\frac{1}{2}\log\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]_0^{\infty}=\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}\ .$$

2. $-1<x$ のとき，$\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=\sqrt{\dfrac{(1+x)^2}{1-x^2}}=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ である．このように被積分関数を書き換えると $x=\pm1$ で発散するから，$\displaystyle\int_a^b\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$ において $a\to-1+0,\ b\to 1-0$ の極限を考える．

$$\begin{aligned}
\int_a^b\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx&=\int_a^b\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx+\int_a^b\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx\\
&=\int_a^b\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx-\int_a^b(\sqrt{1-x^2})'dx\\
&=[\arcsin x]_a^b-[\sqrt{1-x^2}]_a^b\\
&\xrightarrow{a\to-1+0,b\to1-0}[\arcsin x]_{-1}^{1}-[\sqrt{1-x^2}]_{-1}^{1}\\
&=\left\{\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}-0=\pi\ .
\end{aligned}$$

3. 弧長計算のみ解説する．パラメータ表示された曲線 $x=\varphi(t),\ y=\psi(t)\ (t\in[a,b])$ の弧長 L は公式

$$L=\int_a^b\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt$$

で与えられる．$\cos t=1-2\sin^2\dfrac{t}{2}$ だからサイクロイドの一周期の弧長は

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+(\sin t)^2}dt&=\int_0^{2\pi}\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}dt\\
&=\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}dt\\
&=2\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=-4\left[\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=8.
\end{aligned}$$

作図をするのに凹凸の情報が欲しいときには，次のように考える．$x'(t) = 1 - \cos t$, $x''(t) = \sin t$, $y'(t) = \sin t$, $y''(t) = \cos t$ だから，合成関数の微分公式と逆関数の微分公式から

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{x'(t)}\frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t))^3} = -\frac{1}{(1-\cos t)^2} < 0$$

である．よって曲線は上に凸である．また，$dy/dx = y'(t)/x'(t)$ だから曲線の接線は $t = 0$, $t = 2\pi$ のとき y 軸に平行（垂直線）である．

4. x 一定として y, z で整理すると $(y-x)^2 + z^2 \leq 1 - x^2$ となる．よって x の動きうる範囲は $-1 \leq x \leq 1$ であり，x 一定という平面で問題の立体を切ると切り口は半径 $\sqrt{1-x^2}$ の円である．その面積は $\pi(1-x^2)$ である．よって求める体積は

$$\int_{-1}^{1} \pi(1-x^2)dx = \pi\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{4\pi}{3}$$

である．