**秋第三回課題解答例**

**1.** (A) 第三回講義資料の冒頭の方法を適用する．解きたい方程式は

$$x^2 - 2 = 0\ . \tag{1}$$

$1 < \sqrt{2} < 2$ より，$x = 1+p$ とおく．$x = 1+p$ を (1) に代入する．計算すると $p = 1/2$. よって $x = 3/2 = 1.5$. $x = 3/2 + q$ とおく．$x = 3/2 + q$ を (1) に代入する．計算すると $q = -1/12$. よって $x = 17/12 = 1.416\cdots$. このまま分数で計算する．$x = 17/12 + r$ とおく．$x = 17/12 + r$ を (1) に代入する．計算すると $r = -1/408$. よって $x = 577/408 = 1.4142156\cdots$. このまま分数で計算する．$x = 577/408 + s$ とおく．$x = 577/408 + s$ を (1) に代入する．計算すると $s = -1/470832$. よって $x = 665857/470832 = 1.4142135\cdots$. このまま分数で計算する．$x = 665857/470832 + t$ とおく．$x = 665857/470832 + t$ を (1) に代入する．計算すると $t = -1/627013566048$. よって $x = 886731088897/627013566048 = 1.41421356237\cdots$. よって $\sqrt{2} = \fallingdotseq 1.41421357237\cdots$ となる．注意：小数に直すのは最終段階.

(B) 漸化式

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}\ , \quad a_1 = 2$$

を解く：

$$\begin{aligned}
&a_1 = 2\ ,\\
&a_2 = 2/2 + 1/2 = 3/2 = 1.5\ ,\\
&a_3 = 3/4 + 2/3 = 17/12 = 1.41666666666\cdots\ ,\\
&a_4 = 17/24 + 12/17 = 577/408 = 1.414215686\cdots\ ,\\
&a_5 = 577/816 + 408/577 = 665857/470832 = 1.41421356237\cdots\ ,\\
&a_6 = 665857/941664 + 470832/665857 = 886731088897/627013566048 = 1.41421356237\cdots\ .
\end{aligned}$$

注意：漸化式を小数のまま計算すること．小数に直すのは最終段階.

(A), (B) では同じ計算をやっている．

**2.** (1) もちろん，テイラー公式の定義にもどって計算する方法がある．それより計算が楽な方法は $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ...$ と比較する初等的方法.

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(x/2)}$$

と書き直して

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(x/2)} = \frac{1}{2}\left\{1 + \left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \dots\right\}$$

と展開すると，

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} + \frac{x}{2^2} + \frac{x^2}{2^3} + \frac{x^3}{2^4} + \cdots + \frac{x^n}{2^{n+1}} + ....$$

であることがわかる．そこでダランベールの判定法を使う：

**定理.** 冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

に対して，もし

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = r$$

があれば，それが収束半径である．

この問題の場合は

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^{n+2}}}\right| = 2$$

なので，問題の収束半径は 2 である．もちろん，

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} + \frac{x}{2^2} + \frac{x^2}{2^3} + \frac{x^3}{2^4} + \cdots + \frac{x^n}{2^{n+1}} + .... = \frac{1}{2}\left\{1 + \left\{1 + \left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \ldots\right\}\right.$$

の形から，等比級数の和の公式と比較することによって，これが収束する範囲は $x/2| < 1$ すなわち $|x| < 2$ であることがわかる．よって収束半径は 2 である．この論法の方が簡単だが，ダランベール判定法を思い出すために使ってみた．

(2) もちろん，テイラー公式の定義に戻って計算する方法がある．それより計算が楽な方法は次である：$x^4$ の項まで求めるだけなら，定義にも戻らなくても $\sin x$ を $x - x^3/6$ で近似して $1/(x-2)$ を $-1/2 - x/4 - x^2/8 - x^3/16$ で近似して $(x - x^3/6)(-1/2 - x/4 - x^2/8 - x^3/16)$ を展開するだけで答えは出せる：

$$\frac{\sin x}{x-2} = \left(x - \frac{x^3}{6} + \ldots\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \ldots\right) = -\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{24} - \frac{x^4}{48} + \ldots$$

である．