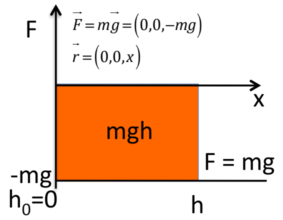
参考：万有引力ポテンシャルはなぜマイナスがつくのでしょうか？

$$U = -\frac{GmM}{r}$$

$$U = -\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$ 経路はU=0からU=Uとなる任意の経路

回答：万有引力ポテンシャルは無限遠（無限の高さ）でゼロになる。
それよりも内側 r (低い高さ) の位置エネルギーはマイナスになる。

重力の位置エネルギー

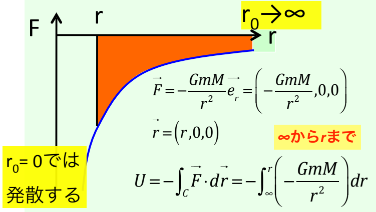


$\vec{F} = m\vec{g} = (0,0,-mg)$

$\vec{r} = (0,0,x)$

$U = -\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_0^h (-mg)dx = mgh$

万有引力ポテンシャル



$\vec{F} = -\frac{GmM}{r^2}\vec{e}_r = \left(-\frac{GmM}{r^2}, 0, 0\right)$

$\vec{r} = (r, 0, 0)$

∞からrまで

$U = -\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_\infty^r \left(-\frac{GmM}{r^2}\right) dr$

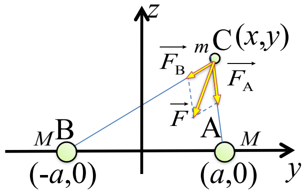
$= -GmM\left[\frac{1}{r}\right]_\infty^r = -\frac{GmM}{r}$

10/14　レポート課題（1）

万有引力の合力：
$\boldsymbol{F} = -\nabla U$とどっちが楽？

問題 (1) 万有引力F_A (A→C)、F_B (B→C) を求めよ。

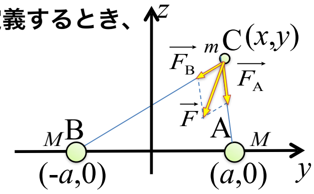
(2) F_A と F_B の合力を求めよ。



$$\boxed{\vec{F} = -\frac{GmM}{|\vec{r}-\vec{R}|^2}\frac{\vec{r}-\vec{R}}{|\vec{r}-\vec{R}|}}$$

問１ 演習問題4. 1 p.73

（1）右図のようにベクトルを定義するとき、



$$|\vec{r} - \vec{R_A}| = \sqrt{a^2 + b^2} = |\vec{r} - \vec{R_B}|$$

$$\vec{r} - \vec{R_A} = (-a, b)$$

$$\vec{r} - \vec{R_B} = (a, b)$$

が成り立つ。よって、（3）式に代入して、

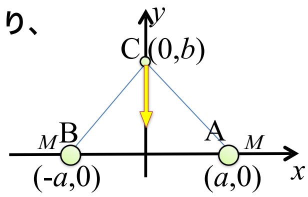
$$\vec{F_A} = -\frac{GmM}{|\vec{r}-\vec{R_A}|^3}(\vec{r}-\vec{R_A}) = \left(\frac{GmMa}{(a^2+b^2)^{3/2}}, -\frac{GmMb}{(a^2+b^2)^{3/2}}\right)$$

$$\vec{F_B} = -\frac{GmM}{|\vec{r}-\vec{R_B}|^3}(\vec{r}-\vec{R_B}) = \left(-\frac{GmMa}{(a^2+b^2)^{3/2}}, -\frac{GmMb}{(a^2+b^2)^{3/2}}\right)$$

（2）（1）のベクトル和より、

$$\vec{F} = \vec{F_A} + \vec{F_B} = \left(0, -\frac{2GmMb}{(a^2+b^2)^{3/2}}\right)$$

p.69　問の解答と等しい



力はベクトルなので、*x, y* 成分をそれぞれ求めてから合力をベクトル和として計算する必要がある。

保存力の場合は、ポテンシャルを求めてからx, y成分について微分する方がだんぜん楽！

$$\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} U}$$

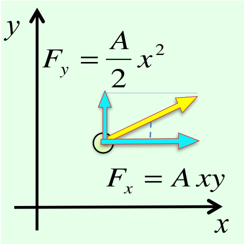
保存力とポテンシャルの関係 7

問題 (1)力 F が保存力であることを示せ。
(2)力 F によるポテンシャルを求めよ。

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$$

保存力の条件

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$



保存力→ポテンシャル

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \Rightarrow \boxed{U = -\int F_x dx}$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

10

保存力がする仕事は経路によらない！

問２ (1)

§3（9）参考

F が保存力ならば、

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$$

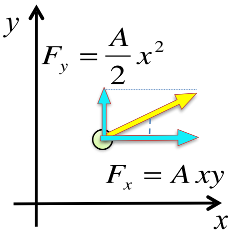
を満たすような U が存在する。

ここで、

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x},\quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

の両辺をそれぞれ y, x で微分すれば、

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x},\quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}}$$



8

問２ (2) 11

(1)より、F は保存力なので、

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$$ が成り立つ。

ここで、F_x の式の両辺を x について積分すれば、

$$U = -\int F_x dx = -\int A\,xy\,dx = -\frac{A}{2}x^2 y + C(y) \qquad ③$$

($C(y)$: x に依存しない任意の関数)

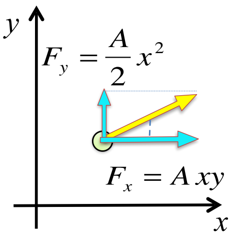
また、F_y の式に③を代入して、

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left\{-\frac{A}{2}x^2 y + C(y)\right\} = \frac{A}{2}x^2 - C'(y) = \frac{A}{2}x^2$$

よって、

F が保存力である条件は、

$$\boxed{\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}}$$ である。



ここで、

$$F_x = A\,xy \Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(A\,xy) = Ax \cdot 1 = Ax \quad ①$$

$$F_y = \frac{A}{2}x^2 \Rightarrow \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A}{2}x^2\right) = \frac{A}{2} \cdot 2x = Ax \quad ②$$

∴①＝②より、F は保存力である。

9

すなわち、

$$C'(y) = 0 \Leftrightarrow C(y) = C \quad (C：任意定数) \quad ④$$

ここで、初期条件より

原点 $(x = y = 0)$ におけるポテンシャル $U = 0$ だから、

③、④式より、

$$-\frac{A}{2}(0)^2(0) + C = C = 0$$

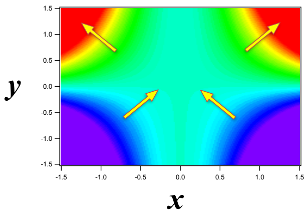
以上より、

与えられた保存力 F によるポテンシャルは、

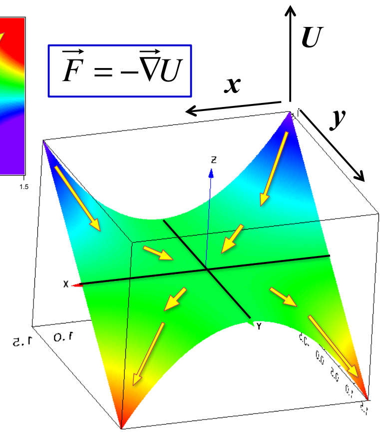
$$U = -\frac{A}{2}x^2 y$$

12

ポテンシャル $U = -\frac{A}{2} x^2 y$



$$\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} U}$$



$$F_x = A\,xy$$

$$F_y = \frac{A}{2} x^2$$

第２回

10/21　力 学 II 講義

§４．２　球による万有引力

万有引力ポテンシャル

$$\boxed{U=-\int\frac{Gm\,dM}{r'}=-\int\frac{Gm\rho\,dv}{r'}}$$

極座標変換

$$=-Gm\rho\int\frac{r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}}$$

Point

極座標積分の方法をマスターする

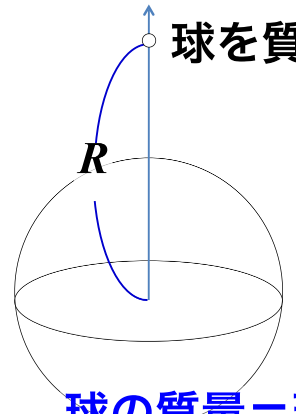
問題

半径 a、密度ρ、質量Mの球が球の中心から R 離れた質量 m の質点に及ぼす万有引力ポテンシャルを求めよ。

(1) 質点が球外($R>a$)にある場合

(2) 質点が球内($R<a$)にある場合

球と質点



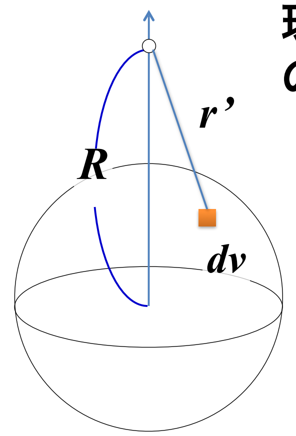
球を質点とみなせば簡単

$$U=-\frac{GMm}{R}$$

$$=-\frac{4\pi a^3}{3}\cdot\rho\cdot\frac{Gm}{R}$$

球の質量＝球の体積×密度

ステップ１



距離 r'における球の微小体積dvの質量dMを考える

$$U=\int dU$$

$$=-\int\frac{Gm\,dM}{r'}$$

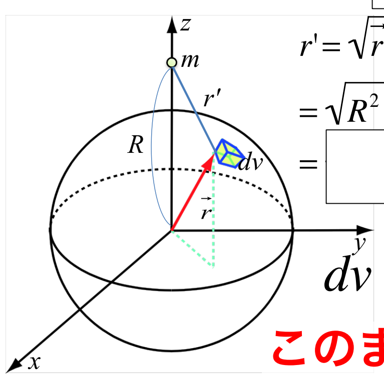
$$=-\int\frac{Gm\rho\,dv}{r'}$$

$$=\boxed{\quad①\quad}\qquad(14)$$

ステップ２　r'、dvについて、

微小部分の質量

$$dM=\rho\,dv$$



$$\vec{r'}=\boxed{\quad②\quad}$$

$$r'=\sqrt{\vec{r'}\cdot\vec{r'}}=\sqrt{(\vec{r}-\vec{R})\cdot(\vec{r}-\vec{R})}$$

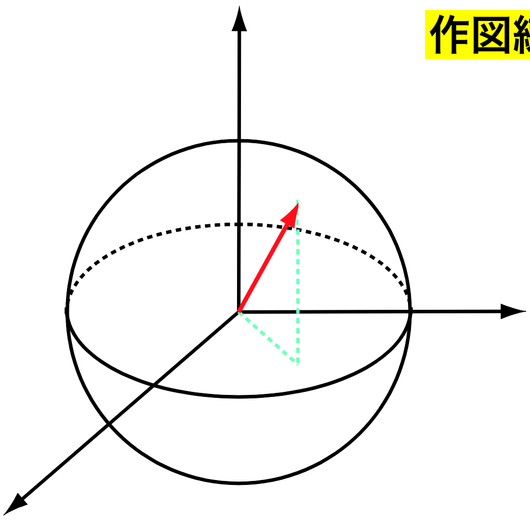
$$=\sqrt{R^2+r^2-2\vec{R}\cdot\vec{r}}$$

$$=\boxed{\quad③\quad}\qquad(16)$$

$$dv=dxdydz$$

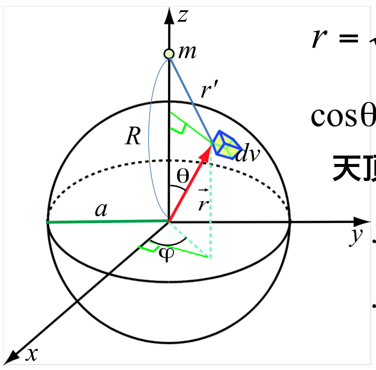
このまま積分は困難

作図練習



ステップ３−１ §1．５（42）

極座標変換 $\vec{r}=(x,y,z) \Rightarrow \vec{r}=(r,\theta,\varphi)$



$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$\cos\theta=\dfrac{z}{r}$ 天頂角 $\tan\varphi=\dfrac{y}{x}$ 方位角

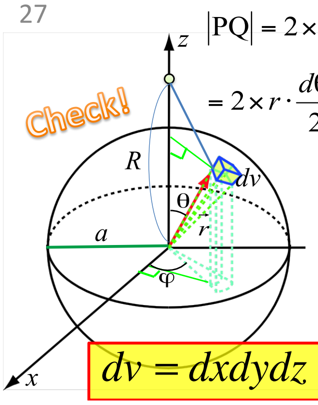
$x=$ ④
$y=$
$z=$

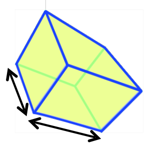
ステップ３−２ dv を極座標変換する

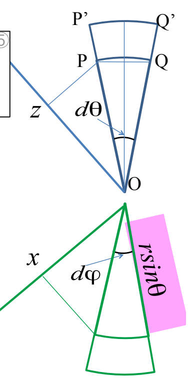
$d\vartheta$ が十分小さいとき弧PQ ～ PQ

$|PQ|=2\times$ ⑤

$=2\times r\cdot\dfrac{d\theta}{2}=rd\theta$







$dv=dxdydz=$ ⑥ （17）

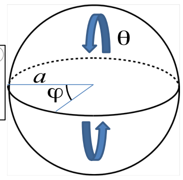
ステップ４ Uの極座標積分

（16）、（17）を（14）に代入して

$$U=-Gm\rho\int \frac{⑦}{⑧} \quad (18)$$

積分範囲は球内全体だから、

⑨



（18）を各積分項に分離して、

$$U=-Gm\rho\int_0^a r^2dr\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}}\int_0^{2\pi}d\varphi$$

ϑ に関する積分を r は定数とみて行う

$\cos\theta=t$ とおけば、$dt=-\sin\theta d\theta$

θ	$0 \longrightarrow \pi$
t	$1 \longrightarrow -1$

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}}= ⑩$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{R^2+r^2-2Rrt}}$$

$$=\left[2\cdot\left(\frac{1}{-2Rr}\right)\sqrt{R^2+r^2-2Rrt}\right]_{-1}^{1}=\left[-\frac{\sqrt{R^2+r^2-2Rrt}}{Rr}\right]_{-1}^{1}$$

$$=\frac{\left(-\sqrt{R^2+r^2-2Rr}+\sqrt{R^2+r^2+2Rr}\right)}{Rr}$$

$$=\frac{-(R-r)+(R+r)}{Rr}=\frac{2}{R}\ \text{内側} \Leftrightarrow \frac{2}{r}\ \text{外側}$$

$\sqrt{R^2+r^2-2rR}=|R-r|$

質点内側（R > r）
質点外側（R < r）

⑪

また、φ積分項について、$\int_0^{2\pi}d\varphi=[\varphi]_0^{2\pi}=2\pi$

以上より、

$$U=-Gm\rho\int_0^a r^2dr\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}}\int_0^{2\pi}d\varphi$$

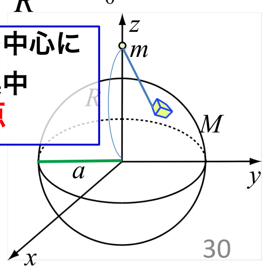
$$=-Gm\rho\ ⑫ =-\frac{4\pi Gm\rho}{R}\int_0^a r^2dr$$

$$=-\frac{4\pi Gm\rho}{R}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a$$

$$= ⑬ =-\frac{GMm}{R}$$

M

有限の球の中心に全質量が集中 ⇨ 質点



問題

半径 a、密度ρ、質量Mの球が
球の中心から R 離れた質量 m の質点
に及ぼす万有引力ポテンシャルを求めよ。

(1) 質点が球外($R > a$)にある場合

$$U = -\frac{GMm}{R}$$

(2) 質点が球内($R < a$)にある場合

球内の質点が受ける万有引力

演習4.3（p.73）

一様な球の内部（位置$R < a$）における質点m

$$U = -Gm\rho\left[\int_0^R r^2 dr \cdot \boxed{⑭} + \int_R^a r^2 dr \cdot \boxed{⑮}\right] \cdot \boxed{⑯}$$

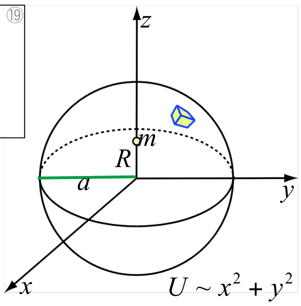
$$= -\frac{4\pi Gm\rho}{R}\int_0^R r^2 dr - 4\pi Gm\rho \int_R^a r dr$$

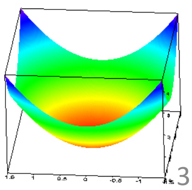
$$= -\frac{4\pi Gm\rho}{R}\boxed{⑰} - 4\pi Gm\rho \boxed{⑱}$$

$$= -\frac{4\pi R^2 Gm\rho}{3} - 2\pi a^2 Gm\rho + 2\pi R^2 Gm\rho$$

$U = \boxed{⑲}$

$F_x = \boxed{⑳} \propto x$





距離に比例する
復元力

Check! 定義の確認

$$\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR} = |R - r|$$

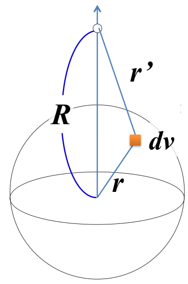
質点内側（R > r）$R - r$　　質点外側（R < r）$r - R$

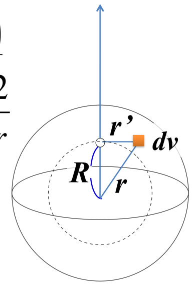
質点より内側の
dvに対する積分

$$\int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta}} = \frac{\left(-\sqrt{R^2+r^2-2Rr} + \sqrt{R^2+r^2+2Rr}\right)}{Rr}$$

質点より外側の
dvに対する積分

$\dfrac{2}{R}$　　$\dfrac{2}{r}$





問題

地球の表面にある質量 1kgの物体
にはたらく引力をもとめよ。

地球半径　$a = 6.37 \times 10^6$ m

地球質量　$M = 5.98 \times 10^{24}$ kg

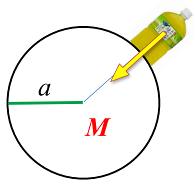
万有引力定数　$G = 6.67 \times 10^{-11}$ N m^2/kg^2

地球上の重力

地表にある 1 kg の物体が
地球から受ける万有引力

$F = \boxed{㉑}$

$= \boxed{㉒}$ N



重力加速度　$g = 9.80665$ m/s^2

一様な球が球外の質点mにおよぼす万有引力は
球の中心にある質点Mが質点mにおよぼす
万有引力に等しい