第 14 回講義：端点で発散する関数の積分（第 2 種広義積分）とその例．積分の応用問題.（教科書 2.13）

第 2 種広義積分.

被積分関数が区間の端点で発散する積分を第 2 種広義積分と呼ぶ（ここだけの言葉だが...）.
$\lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ は収束することを，定積分の極限を調べることによって示せる．実際 $\lim_{a\to+0}\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to+0}[2\sqrt{x}]_a^1 = \lim_{a\to+0} 2(1-\sqrt{a}) = 2$ である．これを一般化して，第 2 種広義積分の収束の概念の定義とする．すなわち $f(x)$ が $x\to a+$, $x\to b-$ のとき $f(x)$ が発散する設定での積分 $\int_a^b f(x)dx$ を（存在すれば）極限値 $\lim_{\alpha\to a-,\beta\to b-}\int_\alpha^\beta f(x)dx$ でもって定義する．

例 1. $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ は発散することを，不定積分の極限を調べることによって示せる．
実際 $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a\to 0+}[\log x]_a^1 = \lim_{a\to 0+}(-\log a) = \infty$ である．図形的には，曲線 $y = 1/x$ $(0 < x < 1)$ 下には，互いに交わらない面積 1/2 の長方形 $\{(x,y)\,|\,0 < x < 2^{-n-1}, 2^n < y < 2^{n+1}\}$ $(n = 1,2,\dots)$ が無限個入っていることからもわかる．

例 2（重要！記憶するべき例）．$\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ は $p < 1$ なら収束し，$p \geq 1$ なら発散することを，定積分の極限を調べることによって示せる．
実際，もし $p < 1$ なら $\lim_{a\to+0}\int_a^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{a\to+0}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_a^1 = \frac{1}{1-p}$ であり，
$p > 1$ なら $\lim_{a\to+0}\int_a^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{a\to+0}\left[-\frac{1}{(p-1)x^{p-1}}\right]_a^1 = \lim_{a\to+0}\left\{-\frac{1}{p-1} + \frac{1}{(p-1)a^{p-1}}\right\} = \infty$ である．
$p = 1$ のときは例 1.

解釈．$p \geq 1$ なら，$x \to +0$ のとき $1/x^p$ は $(0,1]$ 上の積分が発散するくらい ∞ への発散のスピードが速い．$p < 1$ なら，$x \to +0$ のとき $1/x^p$ は $(0,1]$ 上の積分が収束するくらい ∞ への発散のスピードが遅い．

例 3. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ は存在しない．よくある間違い：$\left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$ だからといって $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^1 = 0$ という計算は正しくない．この計算が正しくない理由：関数 $\frac{1}{x^2}$ は $x = 0$ で定義できない（$x \to 0$ のとき $1/x^2$ は無限大に発散する）．例 2 より $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \infty$ である！

例 4. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}$ が収束することを，不等式 $\frac{1}{\sqrt{x+x^2}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ を使って，収束する広義積分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ と比較することによって示すことができる．

例 5. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ が収束することを，$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ すなわち $\frac{\sin x}{x} = 1$ と定義すれば被積分関数が $[0,1]$ で連続になることを使って示すことができる．

例 6. $f(x) = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x^2}$ は $x = 0$ で定義できない．関数 $f(x)$ は $x \to 0$ とすると無限回振動し，その振幅は x に対して $1/|x|$ のように大きくなっていく．それでも，広義積分 $\int_0^1 f(x)dx$ は収束することが判る．

（観察）$x_n = 1/\sqrt{n\pi}$ とおくと $1/x_n^2 = n\pi$ で $|\sin(1/x_n^2)| = 0$ である．区間 $[1/\sqrt{(n+1)\pi}, 1/\sqrt{n\pi}]$ における $(1/x)\sin(1/x^2)$ の積分は絶対値で $\sqrt{n}\times(1/\sqrt{n} - 1/\sqrt{n+1}) \fallingdotseq 1/n$ くらいの大きさである．振動するから，問題の積分の収束発散の運命は $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n}$ と同じである．この交代級数は収束するから，問題の積分も同様の原理で収束するように思われる（この収束は絶対値収束ではない）．

（証明）上の観察を直接証明するのは難しいので，まず置換積分して $\sin$ の中身を $t=1/x^2$ に変数変換すると積分区間は $[1,\infty)$ となる．$x=t^{-1/2}$ なので $dx=-dt/2t^{3/2}$ である．$(1/x)\sin(1/x^2)=t^{1/2}\sin t$ だから $\int_0^1 (1/x)\sin(1/x^2)dx = \int_\infty^1 t^{\frac{1}{2}}\sin t(-dt/2t^{\frac{3}{2}}) = (1/2)\int_1^\infty \frac{\sin t}{t}dt$. よって問題は $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t}$ が収束するかどうかの判定になる．$\sin t=(-\cos t)'$ と考えて部分積分すると $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t}dt=[(-\cos t)/t]_1^\infty - \int_1^\infty (-1/t^2)(-\cos t)dt = \cos 1 - \int_1^\infty \frac{\cos t}{t^2}dt$ となる．被積分関数は $|\cos t|/t^2 \le 1/t^2$ を満たし，$\int_1^\infty \frac{dt}{t^2}$ は収束するから，比較定理により問題の積分 $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t}$ は収束する．よって $\int_0^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x^2}dx$ も収束する．

積分の応用問題.

積分が応用できる場面はスピードメーターから走行距離を求める，線密度から棒の質量を求める，力から仕事を求める，正のグラフ下の面積を求める，弧長の計算，立体の体積の計算などがある．このことが，積分を物理学や工学に応用できる理由である．

積分の応用 1．弧長計算：(A) 曲線 $y=f(x)$ ($f(x)$ は C^1 級，$a\le x\le b$) の弧長は

$$L=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

で与えられる．この公式は，$[a,b]$ を分割して曲線を折れ線で近似し，分割を限りなく細かくしたときの折れ線の長さの極限を平均値の定理を使って計算することによって，導かれる．

(B) パラメータ表示された曲線 $x=x(t), y=y(t)$ ($x(t)$, $y(t)$ は C^1 級，$a\le t\le b$) の弧長は

$$L=\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$$

で与えられる．この公式は，陰関数定理を用いて局所的に (A) の場合に帰着させてから合成関数の微分法を用いることにより導かれる．直観的には，曲線 $t\mapsto (x(t),y(t))$ の速度ベクトルは $(x'(t),y'(t))$ で与えられるから速度がほとんど一定とみなせる微小時間 Δt の間の移動距離が近似的に $\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\Delta t$ で与えられ，Δt が小さいほどこの近似が正確になることから，理解できる [1]．

例 1. 放物線 $y=x^2$ $(0\le x\le 1)$ の弧長．$L=\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx$ を $t-2x=\sqrt{1+4x^2}$ とおいて置換積分．答は $L=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\log(2+\sqrt{5})$.

確認：積分 $\int_0^1 \sqrt{1+((x^2)')^2}dx=\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx$ の計算．$\sqrt{1+4x^2}=t-2x$ とおくと $1+4x^2=t^2-4tx+4x^2$ だから $x=\frac{t}{4}-\frac{1}{4t}$. よって $dx=\frac{1+t^2}{4t^2}dt$, $\sqrt{1+4x^2}=t-2(\frac{t}{4}-\frac{1}{4t})=\frac{t^2+1}{2t}$. した

[1] この公式は陰関数定理を用いて (A) に帰着させることによって導かれる．

がって

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx &= \int_1^{2+\sqrt{5}} \frac{t^2+1}{2t}\frac{1+t^2}{4t^2}dt \\
&= \int_1^{2+\sqrt{5}} \frac{t^4+2t^2+1}{8t^3}dt \\
&= \int_1^{2+\sqrt{5}} \frac{1}{8}\left(t+\frac{1}{t^3}\right)dt + \frac{1}{4}\int_1^{2+\sqrt{5}} \frac{dt}{t} \\
&= \frac{1}{16}\left[t^2-\frac{1}{t^2}\right]_1^{2+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\log(2+\sqrt{5}) \\
&= \frac{1}{16}\left(\sqrt{5}+2+\frac{1}{\sqrt{5}+2}\right)\left(\sqrt{5}+2-\frac{1}{\sqrt{5}+2}\right) + \frac{1}{4}\log(2+\sqrt{5}) \\
&= \frac{1}{16}(2\sqrt{5})(4) + \frac{1}{4}\log(2+\sqrt{5}) = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\log(2+\sqrt{5})\ .
\end{aligned}
$$

例 2. 円周 $x=\cos t, y=\sin t$ $(0\le t\le a)$. $L=\displaystyle\int_0^a \sqrt{((\cos t)')^2+((\sin t)')^2}dt = \int_0^a 1dt = a.$

例 3. $x=t^2\cos t,\ y=t^2\sin t$ $(0\le t\le\sqrt{5})$.

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^{\sqrt{5}} \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt \\
&= \int_0^{\sqrt{5}} \sqrt{4t^2+t^4}dt \\
&= \int_0^{\sqrt{5}} \sqrt{4+t^2}tdt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^5 \sqrt{4+u}du \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(4+u)^{\frac{3}{2}}\right]_0^5 = \frac{19}{3}\ .
\end{aligned}
$$

積分の応用 2. 立体の体積の計算：3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ の立体に対し x 軸に垂直な平面による切り口の面積が連続関数 $S(x)$ $(a\le x\le b)$ であるとき，立体の体積は

$$V=\int_a^b S(x)dx$$

で与えられる．

　とくに，連続関数 $y=f(x)$ $(a\le x\le b)$ を x 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積は

$$V=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2dx$$

である．

例 1. 立体 $x^2+y^2\le 1,\ 0\le z\le y$ の体積．yz 平面（x 座標が一定の平面）に平行な平面で切った断面は $|y|\le\sqrt{1-x^2},\ 0\le z\le y$ である．これは，直角をはさむ辺の長さが $\sqrt{1-x^2}$ の yz 平面内の直角 2 等辺 3 角形である．その面積は $\frac{1}{2}(1-x^2)$ である．よって $V=\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1-x^2)dx=\frac{2}{3}.$

例 2（重要なので再度登場）．部分積分や置換積分では求めることができないガウス積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$$

を，立体 $0 \le z \le e^{-x^2-y^2}$ の体積を 2 通りに計算して求めることができる．問題の立体は，$z = e^{-x^2}$ のグラフを z 軸まわりに回転してできる立体である．その体積を V とする．回転体の体積の公式 [2] から $V = \pi \int_0^1 \log \frac{1}{z} dz = [-z \log z - z]_0^1 = \pi$ である．一方，平面 $y = a$ で切った切り口の面積 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-a^2}dx$ を $a = -\infty$ から $a = \infty$ まで積分すると $V = \int_{-\infty}^{\infty} da \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-a^2}dx = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2$ である．両方とも同じ立体の体積ゆえ $\pi = V = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2$ である．よって $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ である．

- **課題 1.** 教科書の問 13.1 (5)(6).
- **課題 2.** 第 2 種広義積分 $\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$ を求めよ．

  ヒント：被積分関数の分母分子に $\sqrt{1+x}$ を掛けると簡単になる．
- **課題 3（弧長計算への積分の応用）．** サイクロイド $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ $(0 \le t \le 2\pi)$ の概形を描いて弧長を求めよ．
- **課題 4（積分の体積計算への応用）．** 不等式 $2x^2 - 2xy + y^2 + z^2 \le 1$ で定義される立体の体積を求めよ．

  ヒント：yz 平面に平行な平面で切った断面は，$x =$ 一定という平面内の，$(y-x)^2 + z^2 \le 1 - x^2$ という式で表される図形である．x を定数と考えれば，これは yz 平面の図形である．その面積は x の関数なので $S(x)$ とおいて，x の適切な区間（それは何だろうか，ここが考えどころだ）で $S(x)$ を積分すれば，求めたい体積が得られる．

---

[2] 回転体の体積を求める手順：(1) z 軸の回りに回転する関数 $z = f(x)$ のグラフを描く．(2) 回転軸に直交する高さ z の水平面で問題の回転体を切ったときの切り口は円であり，その半径は $f(r) = z$ となる r である．の面積は πr^2 である．したがって r が何なのかをグラフから読み取らなければならない．この例では $z = e^{-x^2}$ となる x^2 が r^2 である．よって $r^2 = \log \frac{1}{z}$ である．(3) 求める立体の体積を求めるには積分区間 $[a, b]$ を z 軸上にどうのようにとればいいかを考える．この例では $[0, 1]$ である．(4) 積分 $\int_a^b \pi f^{-1}(z)^2 dz$ を計算する．この例では $\pi \int_0^1 \log \frac{1}{z} dz$ である．