問題用紙

2024 年度 線形代数 (イェーリッシュ) 中間試験 (5 月 29 日実施)

- 終了時間の前に退出を希望する場合は挙手で知らせること.
- 開始の合図があるまで開いてはいけない.

2024 年度 線形代数 (イェーリッシュ) 中間試験 (5 月 29 日実施)

次の問 (1) ∼ (10) に答えよ (20 点満点)。

(1) (1 点) 成分が $a_{ij} = (-1)^j \delta_{ij}$ の行列 $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$ を具体的に書け.

(2) (2 点) 次の正方行列 A が $A = {}^tA$ を満たすような a, b, c を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & b-c & b \\ a & a & 1 \\ 2c & c & a \end{bmatrix}$$

(3) (2 点) 次の行列 A に対し, A^2 と A^3 を計算せよ.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(4) (1 点) 次の行列 A,B に対して, 積 AB を計算せよ.

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

(5) (1 点) 次の行列 A,B に対して, 積 AB を計算せよ.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(6) (2 点) 行列 $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$ を次のように列ベクトルに分割する:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}.$$

次の積

$$A \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

を

$$\begin{bmatrix} \alpha\mathbf{a}_1 + \beta\mathbf{a}_2 & \gamma\mathbf{a}_1 + \delta\mathbf{a}_2 \end{bmatrix}$$

の形で表せ.

(7) (2 点) 次の行列が簡約行列になるような変数 s, t, u を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & t & u & 0 \\ s & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(8) (3 点) 次の連立一次方程式を解け.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(9) (4 点) 次の行列の逆行列を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(10) (2 点) 次の行列の逆行列を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \quad (a \neq 0,\ \ c \neq 0)$$

以上

1)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2)

$c = 1$

$b = 2c = 2$

$a = b - c = 1$

3)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_{3,3}$$

4) $AB = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 12 & 9 \\ -1 & -4 & -3 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

5) $AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} = 2$$

b)

$$\begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \vec{a}_1 - \vec{a}_2 & -2\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 \end{bmatrix}$$

7) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & t & u & 0 \\ s & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$s = 0 \quad t = 0 \quad u \in \{0, 1\}$

8) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$x_3 = c_1 \in \mathbb{R}$

$x_2 = x_3 = c_1$

$x_1 = -x_3 = -c_1$

解：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ c \in \mathbb{R}$, 9

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ 3-1 \end{array}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ 2+3 \end{array}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right] \left(\tfrac{1}{2}\right) \times 3$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ 2 - 3 \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right] \begin{array}{l} 1 - 2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\tilde{A}^{1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\blacksquare$

10)

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} a \neq 0 \\ c \neq 0 . \end{matrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & c & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & a^{-1}b & a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c^{-1} \end{array}\right] \begin{matrix} a^{-1} \times ① \\ c^{-1} \times ② \end{matrix}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & a^{-1} & -a^{-1}bc^{-1} \\ 0 & 1 & 0 & c^{-1} \end{array}\right] \quad ① - a^{-1}b \times ②$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a^{-1} & -a^{-1}bc^{-1} \\ 0 & c^{-1} \end{bmatrix}$$

Check:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^{-1} & -a^{-1}bc^{-1} \\ 0 & c^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -bc^{-1} + bc^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= E_2 \qquad \square$$