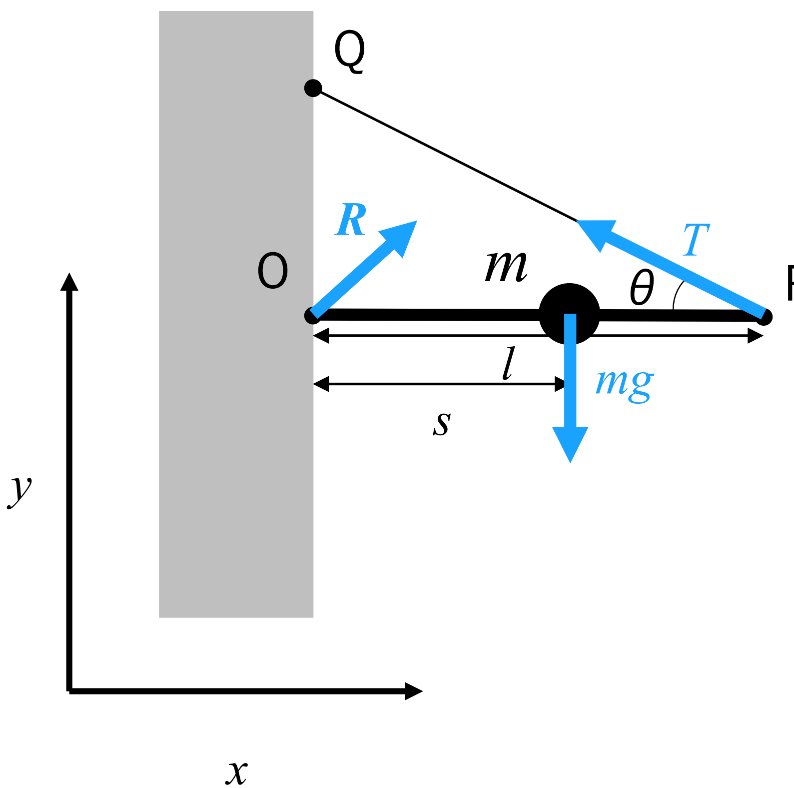
演習問題の解答例

原田　俊太

問題1

質点系のつり合いの例題

長さl、質量M（$M = 0$：(1)-(3)）の棒を垂直な壁面上の点Oに固定し、距離s だけ離れた点Sに質量mの物体をのせ、棒の他端Pを糸で引っ張り壁面上の点Qに∠QPO = θとなるように水平に固定する。糸の張力をT、点Oにおける抗力$\boldsymbol{R} = (R_x, R_y)$を求めよ。



(1)つり合いの条件より、棒に加わる外力の和はゼロであり、

$$R_x - T\cos\theta = 0$$

$$R_y + T\sin\theta - mg = 0$$

(2)点Oのまわりの力のモーメントはゼロなので、

$$mgs - Tl\sin\theta = 0$$

したがって、

$$T = \frac{mgs}{l\sin\theta}, R_x = \frac{mgs}{l\tan\theta}, R_y = mg\left(1 - \frac{s}{l}\right)$$

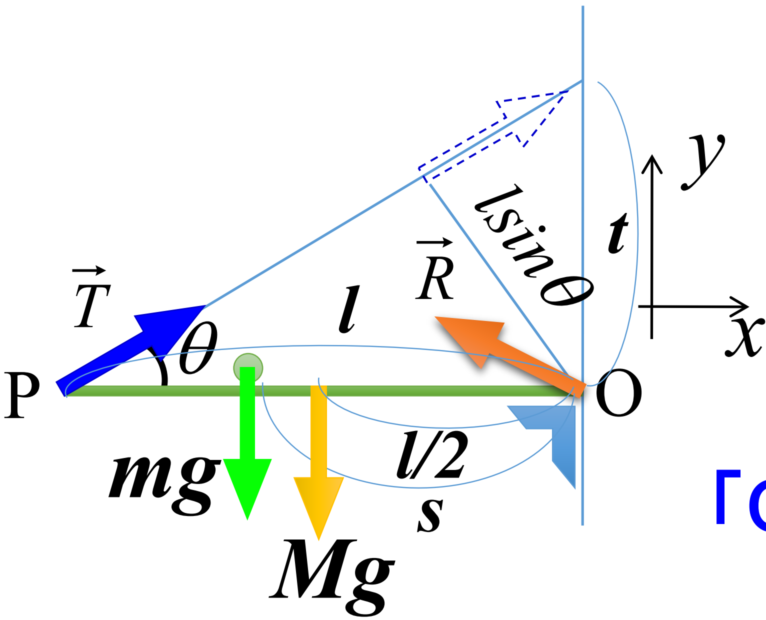
となる。

(3)点Sのまわりの力のモーメントの和はゼロなので、

$$(s-l)T\sin\theta - R_y s = 0$$

これよりT, R_x, R_xを求めても同様の結果が得られる。

（4）



ちょうつがいで一端Oをとめた棚

他端Pを角度 θ 向きに糸でひっぱる

質点系：棚＋物体において

つり合いの条件を考える

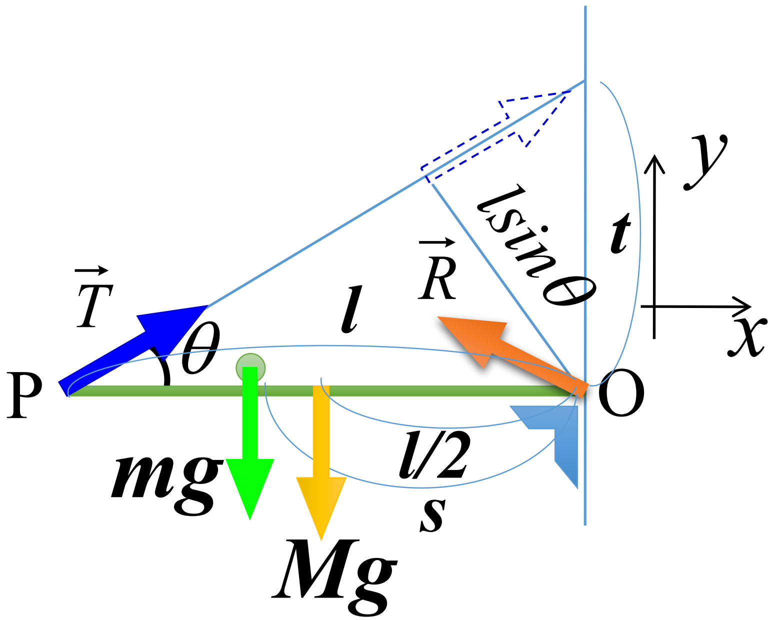
「Oに関する力のモーメントの和＝0」

反時計周りを正にとって、 $\boxed{mgs + \dfrac{Mgl}{2} - Tl\sin\theta = 0}$ ①

よって、①式より、 $T = \left(\dfrac{Mg}{2\sin\theta} + \dfrac{mgs}{l\sin\theta}\right) = \left(\dfrac{M}{2\sin\theta} + \dfrac{ms}{l\sin\theta}\right)g$ ②

②式右辺(　)内は、張力により支えている質量であるから、

糸が耐えられる最大の質量 M_{Max} に対して、



$$T=\left(\frac{M}{2\sin\theta}+\frac{ms}{l\sin\theta}\right)g \quad ②$$

$$T_{\mathrm{Max}}=M_{\mathrm{Max}}g$$

ここで、$\sin\theta = t\Big/\sqrt{t^2+l^2}=1\Big/\sqrt{1+(l/t)^2}$

$$=1\Big/\sqrt{1+(2)^2}=1\Big/\sqrt{5}$$

よって、$M_{Max}=\dfrac{M}{2\sin\theta}+\dfrac{ms}{l\sin\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta}\left(\dfrac{M}{2}+\dfrac{ms}{l}\right)$

$$=\sqrt{5}\left(\frac{0.5}{2}+\frac{2\times 0.6}{1}\right)=1.45\times\sqrt{5}=3.242\mathrm{L}$$

すなわち、糸は最大3.24 kgまで耐えられる。

問題2

問題 2

二体問題における角運動量を極座標で表現し、角運動量保存則が面積速度一定であることを示す。

質点のx, y座標は、

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

と書ける。これを微分すると、

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta \cdot \dot{\theta}, \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta \cdot \dot{\theta}$$

となる。角運動量保存則より、$L_z = \mathrm{const.}$であり、

$$L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = mr^2\dot{\theta} = \mathrm{const.}$$

質点が、Δt後に点Pら点Qに移動したとして、
∠POQ= $\Delta\theta$とすると、 Δtの間にOPが掃く面積はΔSは、

$$\Delta S = \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta$$

両辺をΔtでわり、 $\Delta t \to 0$ の極限をとると、

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \mathrm{const.}$$

となり、面積速度は一定である。

問題3

中心力による円運動:
角運動量およびエネルギー保存則

$$\boxed{F_r = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)}$$

$$\boxed{rF_\theta = d\left(mr^2\omega\right)/dt = 0}$$

問3 なめらかな板の中央にあけた小さい穴に軽いひもを通し、一端に質量 m の物体Aをつけ、他端に質量を変化させることができるおもりBをつけて水平に固定した。

Bの質量が m のとき、Aに初速度を与えると等速円運動をする。

(1) このとき、Aの速さ v_0 を半径 r_0、重力加速度 g を用いて表せ。

次に、Bの質量をゆっくり増加させると円運動の半径が小さくなる。

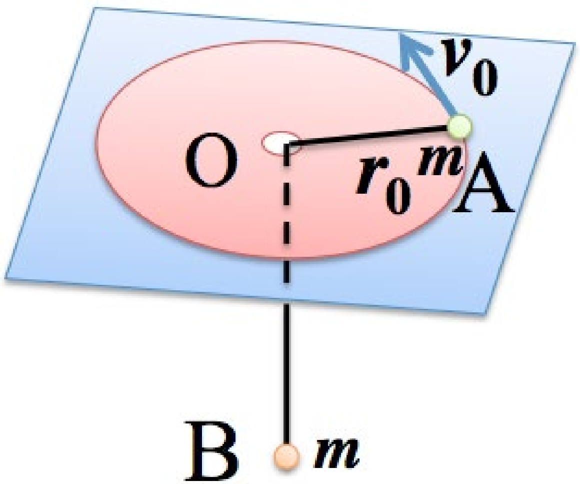
(2) 円運動の半径が r のときの A の速さ v を r_0、v_0、rで表わせ。

(3) 円運動の運動エネルギーの差 $E-E_0$を求めよ。

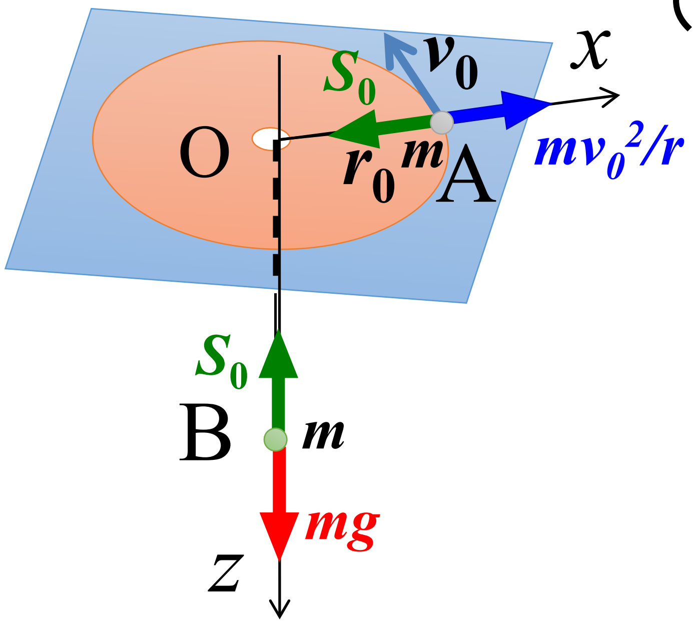
(4) $\omega_0 E - \omega E_0$を求めよ。

(5) 円運動の半径が r_0 から r になるまでの間にひもの張力が A に対してする仕事 W を求めよ。

$$W = E - E_0$$



問2　中心力がなめらかに変化する円運動



（1）　糸の張力S_0とおく。

中心軸方向（x軸）における
運動方程式より、

$$m\ddot{x} = 0 = m\frac{v_0^2}{r_0} - S_0 \quad ①$$

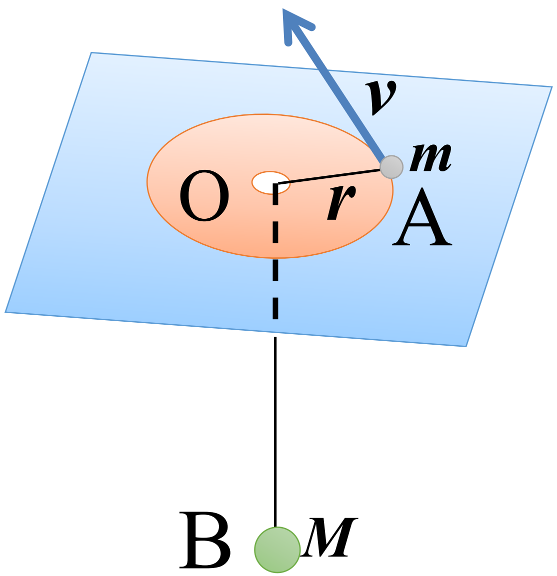
鉛直方向（z軸）における
力のつり合いより、

$$S_0 = mg \quad ②$$

①、②より、$v_0^2 = \dfrac{r_0}{m}S_0 = \dfrac{r_0}{m}mg = r_0 g$

$\therefore \quad \underline{v_0 = \sqrt{r_0 g}}$

問2　中心力がなめらかに変化する円運動



（2）Bの質量の増加により

円運動の半径は小さくなる。

点Oに対する**角運動量保存則**より、

$$\boxed{L=\left|L_x\right|=rmv\sin\left(\pi/2\right)=rmv=r_0mv_0}$$

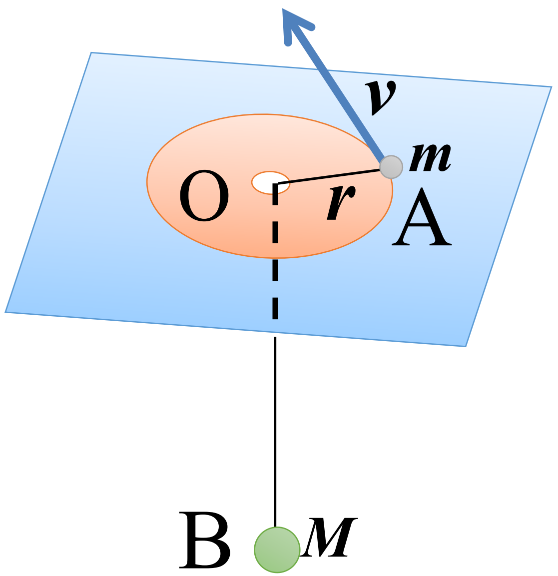
$$\therefore v=\frac{r_0}{r}v_0 \quad ③$$

（3）Aにおける**運動エネルギー**は、

r_0のとき、$E_0=\dfrac{1}{2}mv_0^2$　　rのとき、$E=\dfrac{1}{2}mv^2=\dfrac{1}{2}mv_0^2\left(\dfrac{r_0}{r}\right)^2$　④

よって、$E-E_0=\dfrac{1}{2}mv^2-\dfrac{1}{2}mv_0^2=\dfrac{1}{2}mv_0^2\left[\left(\dfrac{r_0}{r}\right)^2-1\right]$

問2　中心力がなめらかに変化する円運動



（2）$\therefore v = \dfrac{r_0}{r} v_0$ ③

（3）$E_0 = \dfrac{1}{2} m v_0^2 \quad E = \dfrac{1}{2} m v_0^2 \left(\dfrac{r_0}{r} \right)^2$ ④

$$E - E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^2 - 1 \right]$$

（4）円運動の角速度は、

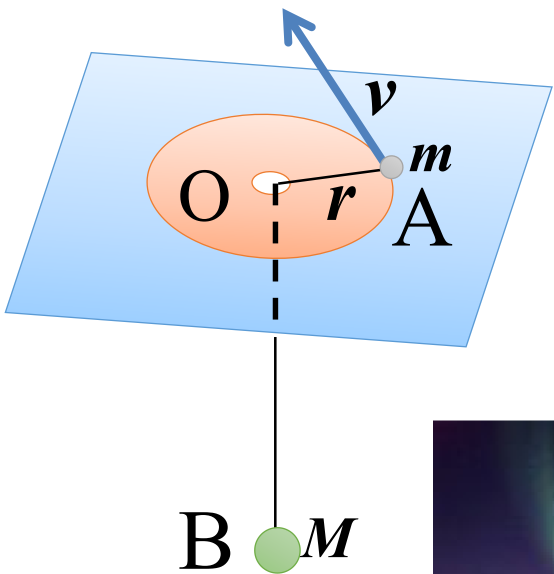
r_0のとき、$\omega_0 = \dfrac{v_0}{r_0}$　rのとき、$\omega = \dfrac{v}{r} = \dfrac{r_0 v_0}{r^2}$ ⑤

④、⑤より

$$\omega_0 E - \omega E_0 = \frac{v_0}{r_0} \frac{1}{2} m v_0^2 \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \right] - \frac{r_0 v_0}{r^2} \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$= \frac{m v_0^3 r_0}{2r^2} - \frac{m v_0^3 r_0}{2r^2} = 0$$

問25日　中心力がなめらかに変化する円運動



パラメータがゆっくり変化する周期運動(単振動など)において

$\boxed{I=\dfrac{E}{\omega}}$ は一定となり、

断熱保存量と呼ばれる。

(例)プラズマ物理学：
磁場中の荷電粒子の旋回運動により生じる磁気モーメント
＝断熱保存量

(4)　$\omega_0 E-\omega E_0=0$

(5)　$W=E-E_0=\dfrac{1}{2}mv_0^2\left[\left(\dfrac{r_0}{r}\right)^2-1\right]$

[別解]

$$W=\int_{r_0}^{r}(-S)dr=mr_0^2v_0^2\int_{r_0}^{r}\left(-\frac{1}{r^3}\right)dr=mr_0^2v_0^2\left[\frac{1}{2r^2}\right]_{r_0}^{r}=\frac{1}{2}mv_0^2\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^2-1\right]$$

問題4

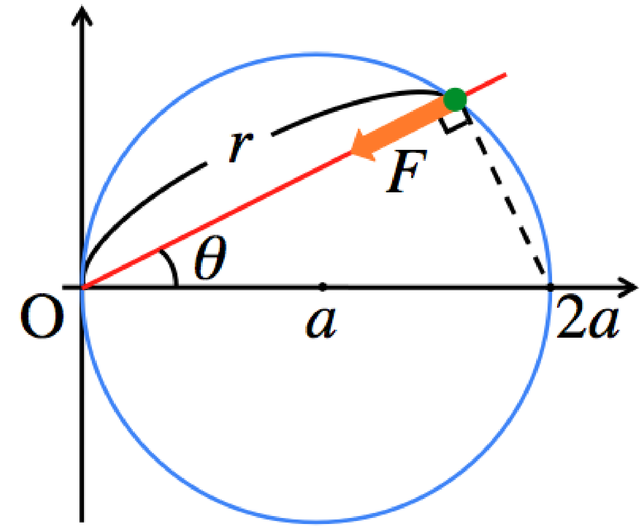
中心力による円運動:
極座標系の運動方程式

問4

質量 m の質点が、半径 a の円軌道を描いて運動している。このとき、質点はつねに原点 O から中心力 $F(r)$ を受けているものとする。

(1) r を a と θ を用いて表せ。

$$r = 2a\cos\theta$$



(2) 角運動量の大きさを L とするとき、中心力 $F(r)$ が r^5 に反比例することを示せ。

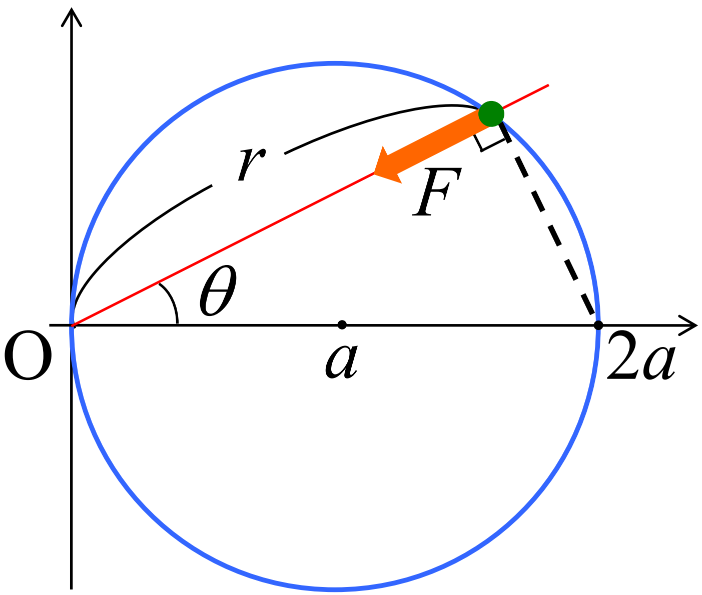
中心方向の運動方程式

$$\boxed{F = m\frac{d^2r}{dt^2} - mr\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}$$

角運動量保存の法則

$$\boxed{L = mr^2\frac{d\theta}{dt} = \text{一定}}$$

問3　中心力を受けて円運動する物体



(1)　図より、$r = 2a\cos\theta$

(2)　$F(r)$ は中心力であるから、
角運動量 L は常に一定である。

すなわち、$\boxed{L = mr^2\dfrac{d\theta}{dt} = \text{一定}}$　①

また、r 方向の運動方程式は、$\boxed{F = m\dfrac{d^2r}{dt^2} - mr\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2}$　②

ここで、$\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{dr}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{dr}{d\theta}\dfrac{L}{mr^2}$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2r}{d\theta^2}\frac{d\theta}{dt}\frac{L}{mr^2} + \frac{dr}{d\theta}\frac{L}{m}(-2)r^{-3}\frac{dr}{dt} = \frac{d^2r}{d\theta^2}\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2 - \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\frac{2L^2}{m^2r^5}$$

また、 $\dfrac{dr}{d\theta} = -2a\sin\theta, \quad \dfrac{d^2 r}{d\theta^2} = -2a\cos\theta = -r$

よって、

$$F = m(-r)\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2 - m(-2a\sin\theta)^2 \frac{2L^2}{m^2 r^5} - mr\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2$$

$$= -mr^2 \frac{2L^2}{m^2 r^5} - m(-2a\sin\theta)^2 \frac{2L^2}{m^2 r^5}$$

$$= -\frac{2L^2}{mr^5}\left[r^2 + (2a\sin\theta)^2\right] = -\frac{2L^2}{mr^5}\left[(2a\cos\theta)^2 + (2a\sin\theta)^2\right]$$

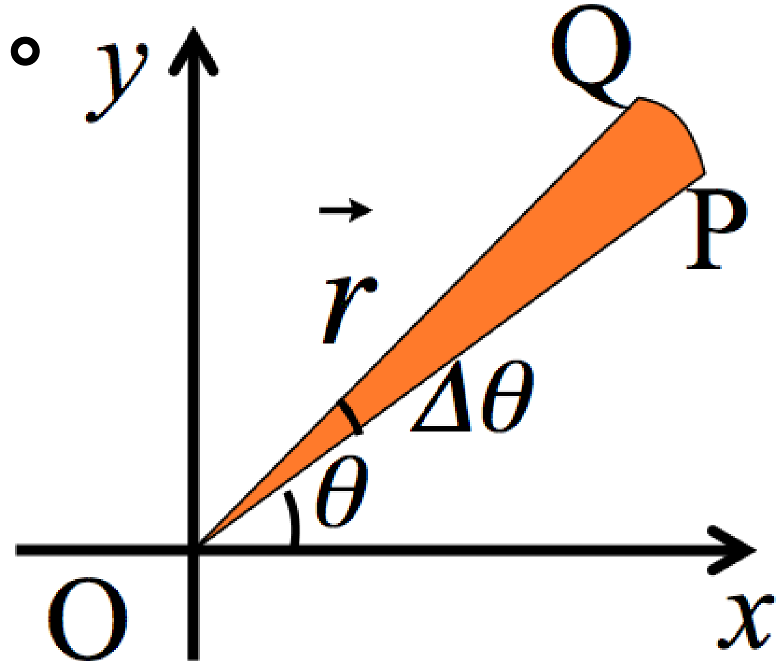
$$= -\frac{8a^2 L^2}{mr^5} \propto \frac{1}{r^5}$$

以上より、F は r^5 に反比例する。

問題5

原点に対する質点の面積速度

問題 平面上を運動する質点の位置を極座標で表したとき、原点に対する質点の面積速度を求めよ。



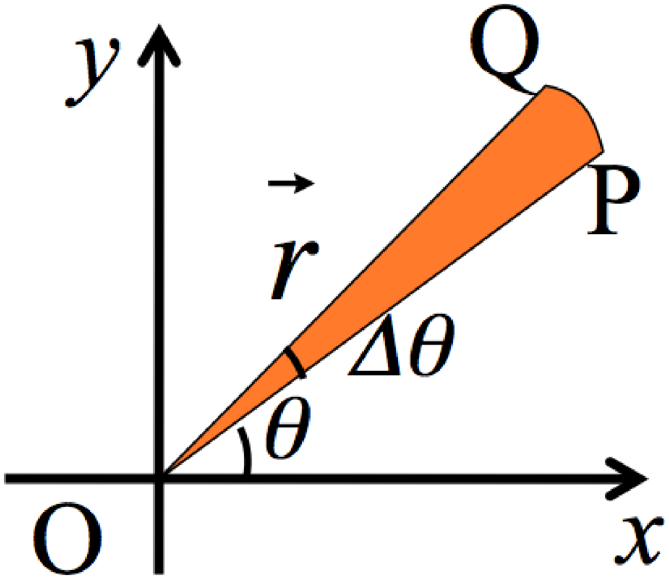
面積速度の極座標表示

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m} = \frac{\left|\vec{r} \times \vec{v}\right|}{2} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$$

中心力を受けた質点の運動

$$N = rF_\theta = \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = 0$$

角運動量保存則



微小時間*Δt*の間の面積速度の変化*ΔS*は、扇形*OPQ*の面積で与えられるから、

$$\Delta S = 2 \times \frac{1}{2} r \cdot r \sin\frac{\Delta\theta}{2} \approx \frac{r^2 \Delta\theta}{2}$$

よって、面積速度 ***dS/dt*** は ***Δt → 0*** の極限をとって、

$$\frac{dS}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r^2 \Delta\theta}{2} \frac{1}{\Delta t} = \frac{r^2}{2} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$$

同じ形！

$$\boxed{\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m} = \frac{\left|\vec{r} \times \vec{v}\right|}{2} = \text{一定} \quad (50)}$$

問題6

地球表面から投げ出された物体の軌道：軌道の方程式と速度の関係

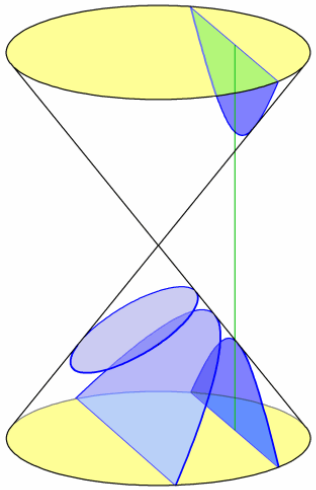
問題 地球表面から水平方向に初速度 v_0 で質点を投げたとき、質点の軌道はどのようになるか。v_0 の値によって分類せよ。

軌道の方程式

$$r = \frac{l}{1 + e\cos\theta}$$

面積速度（一定）

$$S = \frac{1}{2} R v_0$$



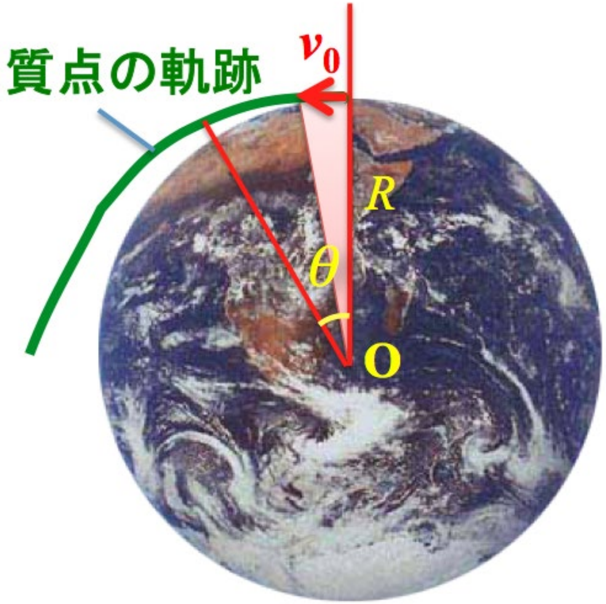
離心率

$$e = \frac{R v_0^2}{GM} - 1$$

半直弦

$$l = \frac{R^2 v_0^2}{GM}$$

$e = 0$	：円
$0 < e < 1$	：楕円
$e = 1$	：放物線
$e > 1$	：双曲線



$$u = \frac{1}{r} = A\cos\theta + \frac{GM}{4S^2}$$

投げ出した点を $\theta = 0°$　とするとき、

$r = R$ である。

このとき、面積速度は初速度 v_0 を用いて

$$S = \frac{1}{2}Rv_0$$　で与えられる。

また、軌道の方程式より、

$$\frac{1}{R} = A\cos 0° + \frac{GM}{4}\left(\frac{4}{R^2 v_0^2}\right) = A + \frac{GM}{R^2 v_0^2}$$

$$\therefore A = \frac{1}{R} - \frac{GM}{R^2 v_0^2}$$

面積速度は一定であるので、

$$\therefore r=\frac{1}{A\cos\theta+\dfrac{GM}{4S^2}}=\frac{1}{\left(\dfrac{1}{R}-\dfrac{GM}{R^2v_0^2}\right)\cos\theta+\dfrac{GM}{R^2v_0^2}}=\frac{R^2v_0^2/GM}{1+\left(\dfrac{Rv_0^2}{GM}-1\right)\cos\theta}$$

円錐曲線型における比較より、

$$\therefore r=\frac{R^2v_0^2/GM}{1+\left(\dfrac{Rv_0^2}{GM}-1\right)\cos\theta}=\underbrace{\frac{l}{1+e\cos\theta}}_{\text{円錐曲線}}$$

よって、与えられた軌道の方程式は、

離心率 $e=\dfrac{Rv_0^2}{GM}-1$　　半直弦 $l=\dfrac{R^2v_0^2}{GM}$

の円錐曲線とみなせる

離心率 e に対する場合分けより、

$e=0$ のとき、 $\dfrac{Rv_0^2}{GM}=1 \Longleftrightarrow v_0=\sqrt{\dfrac{GM}{R}}$ 円運動 第一宇宙速度 $7.92\ km/s$

$1>e>0$ のとき、 $1>\dfrac{Rv_0^2}{GM}-1>0 \Longleftrightarrow 2>\dfrac{Rv_0^2}{GM}>1 \Longleftrightarrow \sqrt{\dfrac{2GM}{R}}>v_0>\sqrt{\dfrac{GM}{R}}$

楕円軌道

$e=1$ のとき、 $1=\dfrac{Rv_0^2}{GM}-1 \Longleftrightarrow \dfrac{Rv_0^2}{GM}=2 \Longleftrightarrow v_0=\sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$ 放物運動

第二宇宙速度 $11.2\ km/s$

$e>1$ のとき、 $1<\dfrac{Rv_0^2}{GM}-1 \Longleftrightarrow \dfrac{Rv_0^2}{GM}>2 \Longleftrightarrow v_0>\sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$ 双曲線軌道

$e=0$ $1>e>0$ $e=1$ $e>1$

宇宙速度

宇宙速度	意味	地球の場合の値
第一宇宙速度	人工衛星になるための最低速度	秒速約7.9km
第二宇宙速度	人工惑星になるための最低速度	秒速約11.2km
第三宇宙速度	太陽系を脱出するための最低速度	秒速約16.7km

地表すれすれでは、 $mg = G\dfrac{Mm}{R^2}$

重力加速度　　地球半径

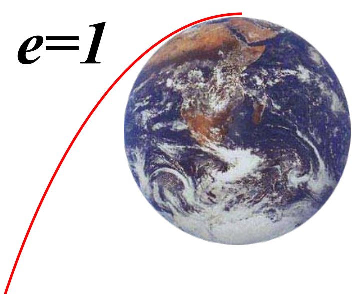
g=9.81 m/s^2　　***R=6.36 × 10^6 m***

e=0

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{gR}$$

$$= 7.89\mathrm{L}$$

e=1



$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR}$$

$$= 11.17\mathrm{L}$$

問題7

万有引力によるエネルギー保存則：エネルギーと運動可能領域の関係

問題 **惑星の運動に対して、以下の力学的エネルギーと離心率との関係を求めよ。**

力学的エネルギー

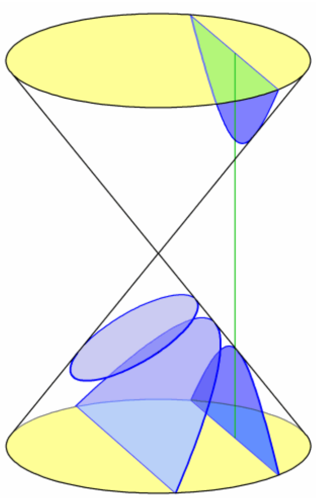
$$E=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+\frac{h^2}{r^2}\right)-\frac{GmM}{r}$$

$$r=\frac{l}{1+e\cos\theta}$$

$$\dot{r}=\frac{eh\sin\theta}{l}$$

$$E=-\frac{GmM}{2l}\left(1-e^2\right)$$

$$h=r^2\dot{\theta}$$



離心率 $e=\dfrac{Rv_0^2}{GM}-1$

半直弦 $l=\dfrac{R^2v_0^2}{GM}$

$e=0$	：円
$0<e<1$	：楕円
$e=1$	：放物線
$e>1$	：双曲線

極座標表示による力学的エネルギーは、

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{GmM}{r} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{h}{r^2}\right) - \frac{GmM}{r} \quad \textbf{(57)}$$

$$\because\ h \equiv r^2\dot{\theta} \quad \textbf{(53)}$$

また、円錐曲線における半直弦の極座標表示から、

$$l = \frac{L^2/m^2}{GM} = \frac{\left(mr^2\dot{\theta}\right)^2/m^2}{GM} = \frac{\left(r^2\dot{\theta}\right)^2}{GM} = \frac{h^2}{GM} \quad \Longleftrightarrow \quad h^2 = GMl \qquad \textbf{(73)}$$

ここで、軌道の方程式*(*円錐曲線*)*は、

$$r = \frac{l}{1 + e\cos\theta} \quad \textbf{(74)}$$

t について一回微分して、

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{l}{1 + e\cos\theta}\right)\cdot\dot{\theta} = \frac{el\sin\theta}{\left(1 + e\cos\theta\right)^2}\cdot\dot{\theta}$$

$$= \frac{el\sin\theta}{\left(1 + e\cos\theta\right)^2}\frac{h}{r^2} = \frac{elh\sin\theta}{\left(1 + e\cos\theta\right)^2}\frac{\left(1 + e\cos\theta\right)^2}{l^2} = \frac{eh\sin\theta}{l}$$

以上より、力学的エネルギー保存則を書き換えて、

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{e^2h^2\sin^2\theta}{l^2} + \frac{(1+e\cos\theta)^2h^2}{l^2}\right) - \frac{GmM(1+e\cos\theta)}{l}$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{e^2GMl\sin^2\theta}{l^2} + \frac{(1+e\cos\theta)^2GMl}{l^2}\right) - \frac{GmM(1+e\cos\theta)}{l}$$

$$= \frac{GmM}{2l}\left(e^2\sin^2\theta + (1+e\cos\theta)^2 - 2(1+e\cos\theta)\right)$$

$$= \frac{GmM}{2l}\left(e^2\sin^2\theta + 1 + 2e\cos\theta + e^2\cos^2\theta - 2 - 2e\cos\theta\right)$$

$$= \frac{GmM}{2l}\left(e^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + 1 - 2\right)$$

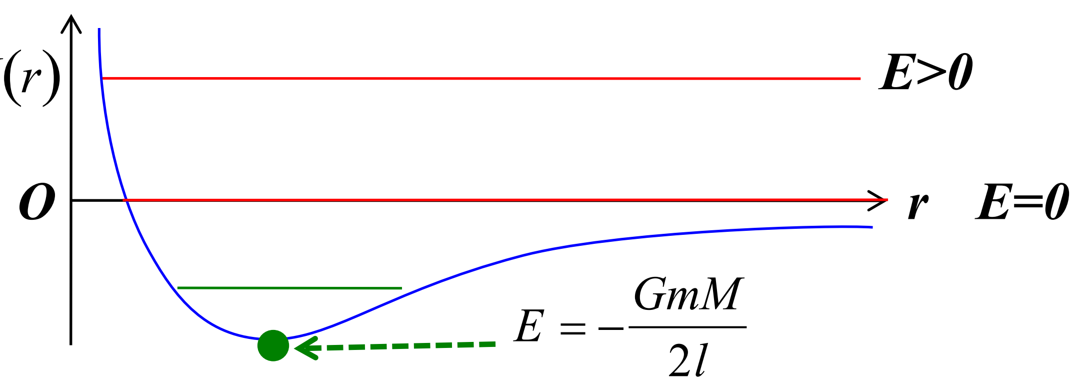
$$= -\frac{GmM}{2l}\left(1 - e^2\right)$$

離心率 $e=\dfrac{Rv_0^2}{GM}-1$ に対して $E=-\dfrac{GmM}{2l}\left(1-e^2\right)$ を場合分けして、

e = 0	***1 > e > 0***	***e = 1***	***e > 1***

$v_0=\sqrt{\dfrac{GM}{R}}$	$\sqrt{\dfrac{2GM}{R}}>v_0>\sqrt{\dfrac{GM}{R}}$	$v_0=\sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$	$v_0>\sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$
$E=-\dfrac{GmM}{2l}$	$0>E>-\dfrac{GmM}{2l}$	$E=0$	$E>0$
円運動	楕円軌道	放物運動	双曲線

$E=\dfrac{1}{2}mv^2+U(r)$



問題8

$0 < e < 1$のとき、

$$r = \frac{l}{1 + e\cos\theta}$$

が、楕円を表すことを示す。

$$r + ex = \frac{l}{1 + e\cos\theta}(1 + e\cos\theta) = l$$

$$\Leftrightarrow r = l - ex$$

両辺を二乗すると、

$$r^2 = x^2 + y^2 = (l - ex)^2 = l^2 - 2lex + e^2x^2$$

$$(1 - e^2)\left(x + \frac{le}{1 - e^2}\right)^2 + y^2 = \frac{l^2}{1 - e^2}$$

$$\frac{\left(x+\dfrac{le}{1-e^2}\right)^2}{\left(\dfrac{l}{1-e^2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\dfrac{l}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2}=1 \qquad \cdots \qquad (*)$$

楕円の式　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　と比較すると、

$$a=\frac{l}{1-e^2}, b=\frac{l}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}$$

であり楕円軌道を表す。

$e = 1$のとき、

$$r^2 = x^2 + y^2 = (l - x)^2 = l^2 - 2lx + x^2$$

$\Leftrightarrow y^2 = -2lx + l^2$　　であり放物線軌道を表す。

$e > 1$のとき、

$$r^2 = x^2 + y^2 = (l - x)^2 = l^2 - 2lx + x^2$$

$$\Leftrightarrow (e^2 - 1)\left(x - \frac{le}{e^2 - 1}\right)^2 - y^2 = \frac{l^2}{e^2 - 1}$$

$$\frac{\left(x - \frac{le}{e^2 - 1}\right)^2}{\left(\frac{l}{e^2 - 1}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{l}{(e^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}\right)^2} = 1$$

であり双曲線軌道を表す。

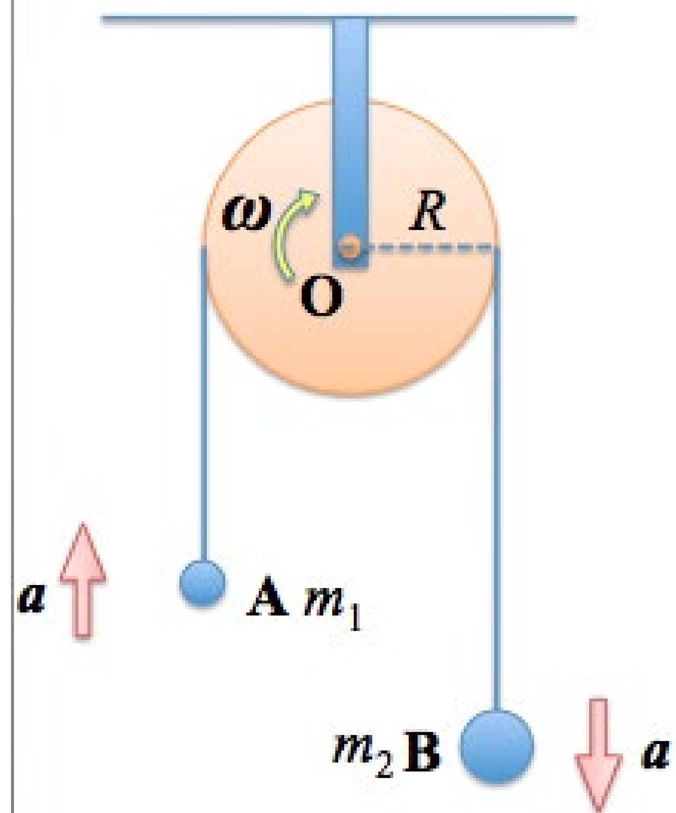
問題9

固定軸のまわりの回転運動：アトウッドの器械

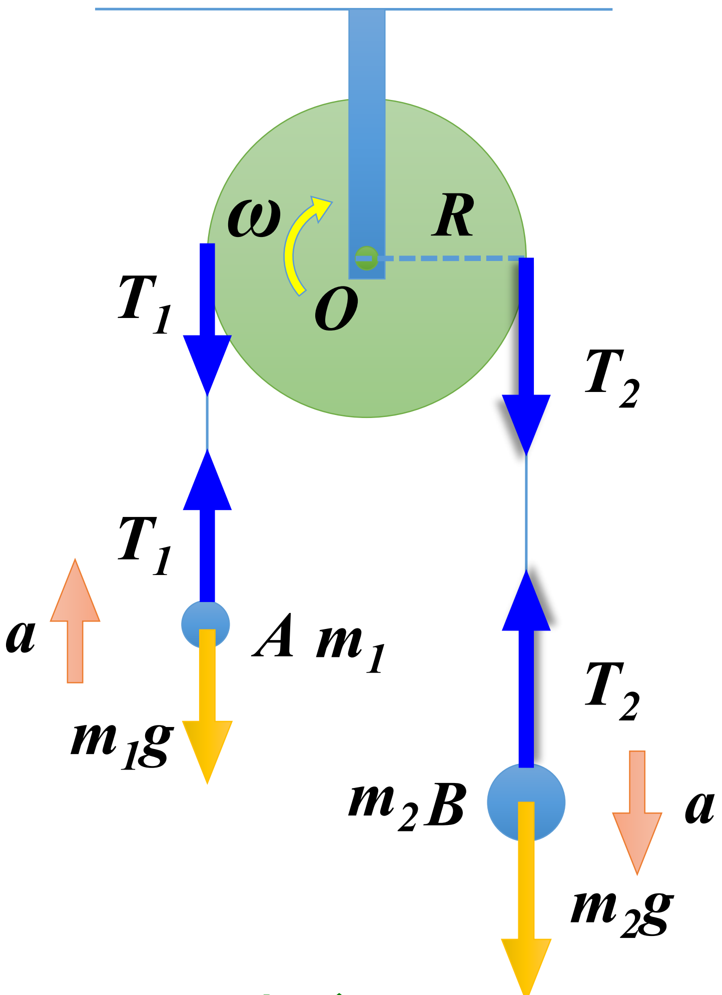
問題 質量 m_1、m_2 ($m_1 < m_2$) のおもりA、B を伸び縮みしない軽いひもの両端に固定し、半径 R、質量M、中心軸周りの慣性モーメント I の一様な円板状定滑車の両側につるした。おもりBを支えた静止状態からおもりBを静かにはなした。以下の問に答えよ。

（1）A、B がひもから受ける張力の大きさ T_1 、T_2およびAの上昇運動の加速度 a を求めよ。

B を放して時間 t 経過したときの A、B、定滑車の運動エネルギーの総和の変化 ΔK （2）および重力の位置エネルギーの総和の変化ΔU （3）を求めよ。



問1　定滑車を介した2質点（アトウッドの器械）



円周上の点が
単位時間に移動する距離

‖

ひもが単位時間に進む距離
(=速さv)

（1）$m_1 < m_2$より、滑車の時計回り角速度をωとおく。

まず、各質点の「並進運動に対する運動方程式」は、

I

Aの上昇運動	$m_1a=T_1-m_1g$	①
Bの下降運動	$m_2a=m_2g-T_2$	②

次に、定滑車の点Oに対する「回転運動の運動方程式」は、

II

$$I\frac{d\omega}{dt} = T_2R - T_1R \quad ③$$

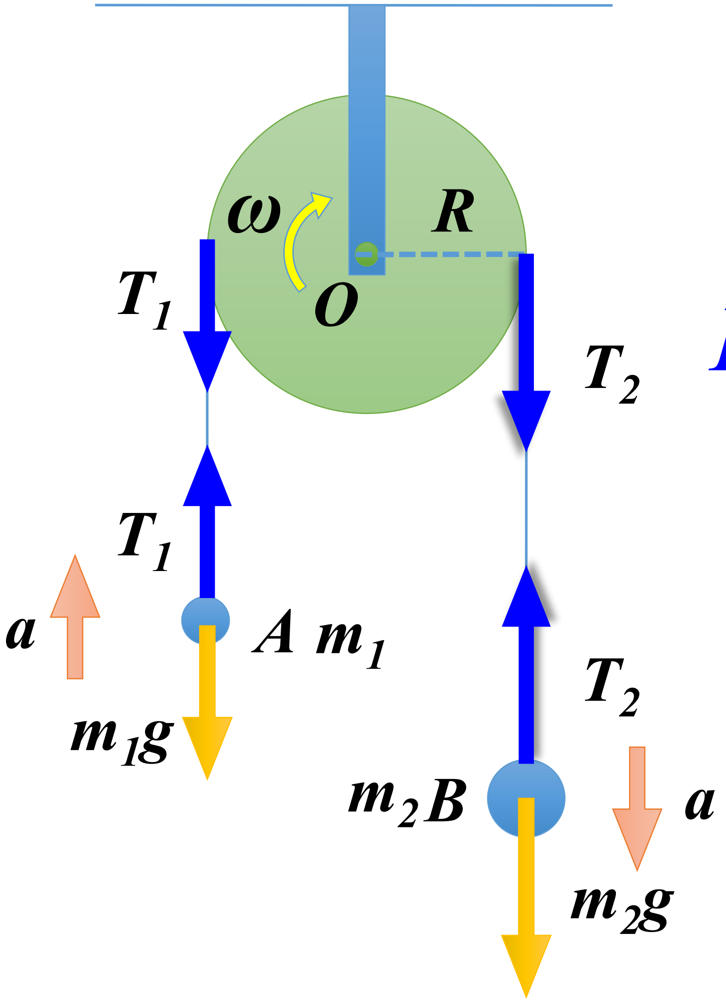
また、ひもが滑車に対して滑らないという束縛条件から

III

$$v=R\omega \quad ④$$

注意！！ $\omega = \dot{\theta}$

問1　定滑車を介した2質点（アトウッドの器械）



（1）

I　Aの上昇運動　$m_1a=T_1-m_1g$　①

Bの下降運動　$m_2a=m_2g-T_2$　②

II　$I\dfrac{d\omega}{dt}=T_2R-T_1R$　③

III　$v=R\omega$　④

④を用いて③式からωを消去すると、

$$I\frac{d}{dt}\left(\frac{v}{R}\right)=\frac{I}{R}\frac{dv}{dt}=\frac{I}{R}a=T_2R-T_1R \quad ⑤$$

⑤式に①、②式を代入して、

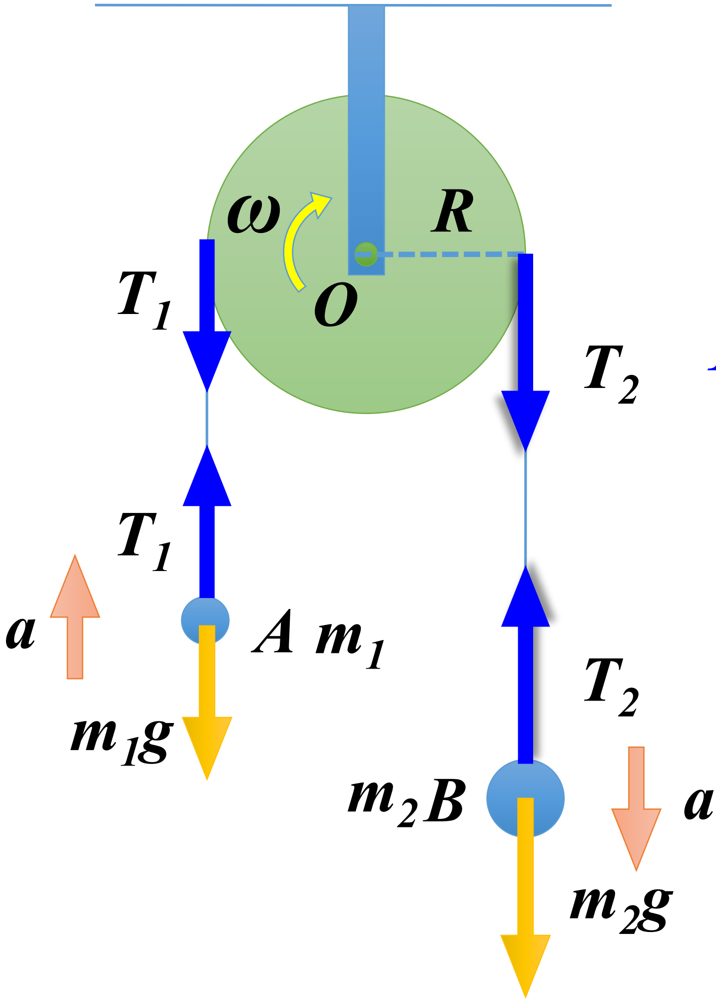
$$\frac{I}{R}a=(m_2g-m_2a)R-(m_1g+m_1a)R$$

$$=-m_1gR+m_2gR-m_1aR-m_2aR$$

$$=(m_2-m_1)gR-(m_1+m_2)aR$$

$$\left[(m_1+m_2)R+\frac{I}{R}\right]a=(m_2-m_1)gR \Leftrightarrow a=\frac{m_2-m_1}{(m_1+m_2)+\dfrac{I}{R^2}}g \quad ⑥$$

問1　定滑車を介した2質点（アトウッドの器械）



（1）

I

Aの上昇運動　$m_1a=T_1-m_1g$ ①

Bの下降運動　$m_2a=m_2g-T_2$ ②

II

$$I\frac{d\omega}{dt}=T_2R-T_1R \quad ③$$

III

$$v=R\omega \quad ④$$

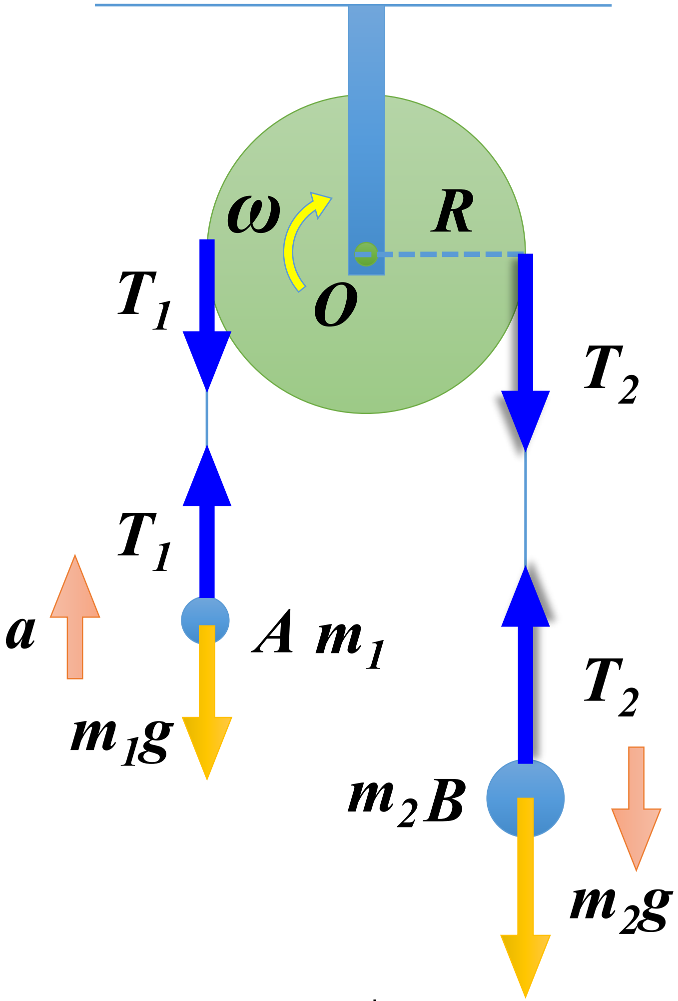
$$a=\frac{m_2-m_1}{(m_1+m_2)+\frac{I}{R^2}}g \quad ⑥$$

①式に⑥式を代入して、

$$T_1=m_1g+m_1\cdot\frac{m_2-m_1}{(m_1+m_2)+\frac{I}{R^2}}g$$

$$=\frac{\left[(m_1+m_2)+\frac{I}{R^2}+m_2-m_1\right]\cdot m_1g}{(m_1+m_2)+\frac{I}{R^2}}=\frac{2m_2R^2+I}{(m_1+m_2)R^2+I}m_1g$$

問1　定滑車を介した2質点（アトウッドの器械）



（1）

I

Aの上昇運動　$m_1a=T_1-m_1g$ ①

Bの下降運動　$m_2a=m_2g-T_2$ ②

II

$$I\frac{d\omega}{dt}=T_2R-T_1R \quad ③$$

III

$v=R\omega$ ④

$$a=\frac{m_2-m_1}{(m_1+m_2)+\dfrac{I}{R^2}}g \quad ⑥$$

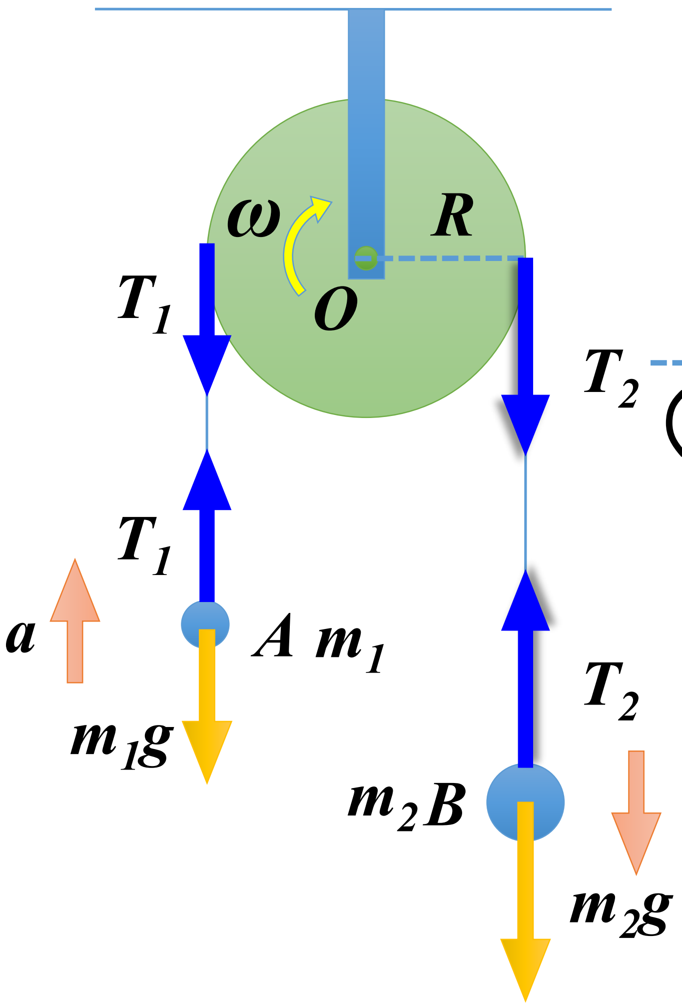
$$T_1=\frac{2m_2R^2+I}{(m_1+m_2)R^2+I}m_1g$$

同様に②式に⑥式を代入して、

$$T_2=m_2g-m_2\cdot\frac{m_2-m_1}{(m_1+m_2)+\dfrac{I}{R^2}}g$$

$$=\frac{\left[(m_1+m_2)+\dfrac{I}{R^2}-m_2+m_1\right]}{(m_1+m_2)+\dfrac{I}{R^2}}m_2g=\frac{2m_1R^2+I}{(m_1+m_2)R^2+I}m_2g$$

問1　定滑車を介した2質点（アトウッドの器械）



II $\boxed{I\dfrac{d\omega}{dt} = T_2R - T_1R \quad ③}$ **III** $\boxed{v=R\omega \quad ④}$

$$a = \frac{m_2 - m_1}{(m_1 + m_2) + \dfrac{I}{R^2}} g \quad ⑥$$

（2）時間t 経過したときのA、Bの速さv は、aを時間積分して、

$$v = \frac{m_2 - m_1}{(m_1 + m_2) + \dfrac{I}{R^2}} gt + C_1 \qquad (C_1 : \text{積分定数})$$

ここで、初期条件t=0のときv=0よりC_1=0

すなわち、 $$v = \frac{m_2 - m_1}{(m_1 + m_2) + \dfrac{I}{R^2}} gt \quad ⑦$$

さらに、$v=R\omega$より、 $$\omega = \frac{1}{R}\frac{m_2 - m_1}{(m_1 + m_2) + \dfrac{I}{R^2}} gt \quad ⑧$$

問1　定滑車を介した2質点（アトウッドの器械）

（2）$v = \dfrac{m_2 - m_1}{(m_1 + m_2) + \dfrac{I}{R^2}} gt$ ⑦　$\omega = \dfrac{1}{R} \dfrac{m_2 - m_1}{(m_1 + m_2) + \dfrac{I}{R^2}} gt$ ⑧

ここで、運動エネルギーの総和の変化ΔKは、

$$\Delta K = \underbrace{\frac{1}{2} m_1 v^2}_{\text{質点A}} + \underbrace{\frac{1}{2} m_2 v^2}_{\text{質点B}} + \underbrace{\frac{1}{2} I \omega^2}_{\text{滑車}}$$

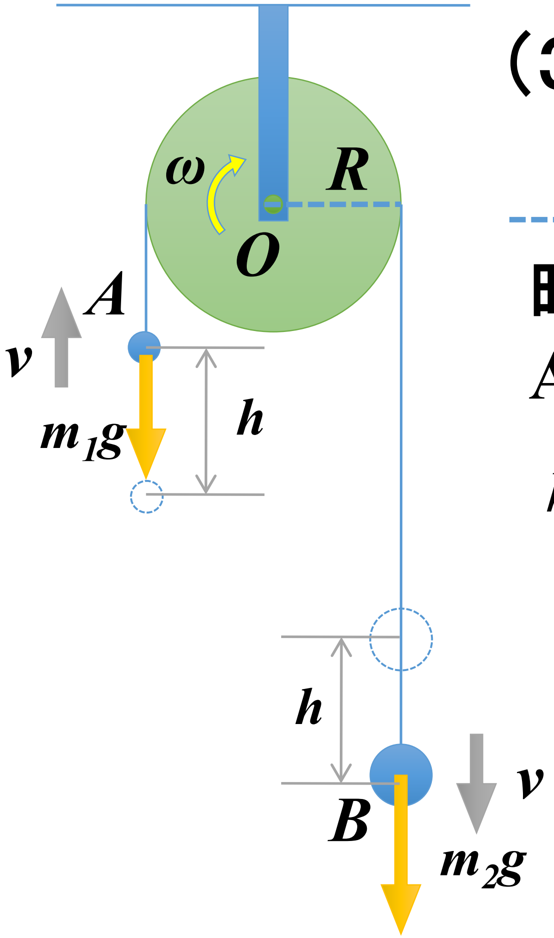
で与えられる。

よって、⑦、⑧式を代入して、

$$\Delta K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left[\frac{m_2 - m_1}{(m_1 + m_2) + \dfrac{I}{R^2}}\right]^2 g^2 t^2 + \frac{1}{2}\frac{I}{R^2}\left[\frac{m_2 - m_1}{(m_1 + m_2) + \dfrac{I}{R^2}}\right]^2 g^2 t^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)\left[\frac{m_2 - m_1}{(m_1 + m_2) + \dfrac{I}{R^2}}\right]^2 g^2 t^2 = \frac{1}{2}\frac{(m_2 - m_1)^2}{(m_1 + m_2) + \dfrac{I}{R^2}} g^2 t^2$$

問1　定滑車を介した2質点（アトウッドの器械）



（3）$v=\dfrac{m_2-m_1}{(m_1+m_2)+\dfrac{I}{R^2}}gt$　⑦　$\Delta K=\dfrac{1}{2}\dfrac{(m_2-m_1)^2}{(m_1+m_2)+\dfrac{I}{R^2}}g^2t^2$

時間t経過したときの

A、Bの上昇(下降)距離hは、vを時間積分して、

$$h=\frac{1}{2}\frac{m_2-m_1}{(m_1+m_2)+\frac{I}{R^2}}gt^2+C_2 \quad (C_2:\text{積分定数})$$

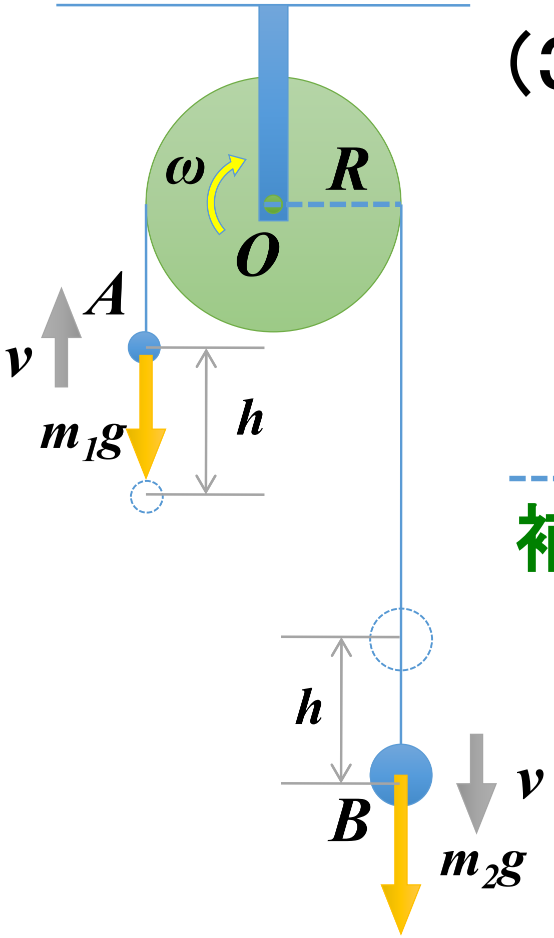
ここで、初期条件$t=0$のとき$h=0$より$C_2=0$

すなわち、$h=\dfrac{1}{2}\dfrac{m_2-m_1}{(m_1+m_2)+\dfrac{I}{R^2}}gt^2$

よって、A、Bの重力の位置エネルギーの総和の変化ΔUは、

$$\Delta U=m_1gh-m_2gh=(m_1-m_2)g\cdot\frac{1}{2}\frac{m_2-m_1}{(m_1+m_2)+\frac{I}{R^2}}gt^2=-\frac{1}{2}\frac{(m_2-m_1)^2}{(m_1+m_2)+\frac{I}{R^2}}g^2t^2$$

問1　定滑車を介した2質点（アトウッドの器械）



（3）$v = \dfrac{m_2 - m_1}{(m_1 + m_2) + \dfrac{I}{R^2}} gt$　⑦　$\Delta K = \dfrac{1}{2} \dfrac{(m_2 - m_1)^2}{(m_1 + m_2) + \dfrac{I}{R^2}} g^2 t^2$

$$\Delta U = -\frac{1}{2} \frac{(m_2 - m_1)^2}{(m_1 + m_2) + \dfrac{I}{R^2}} g^2 t^2$$

補足 力学的エネルギーEの変化量ΔE

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = 0 \qquad \text{(49')}$$

すなわち、

$$K + U = E \quad \text{：定数} \qquad \text{(50)}$$

力学的エネルギー保存則が成り立つ

関連：第7章演習問題5

Check!

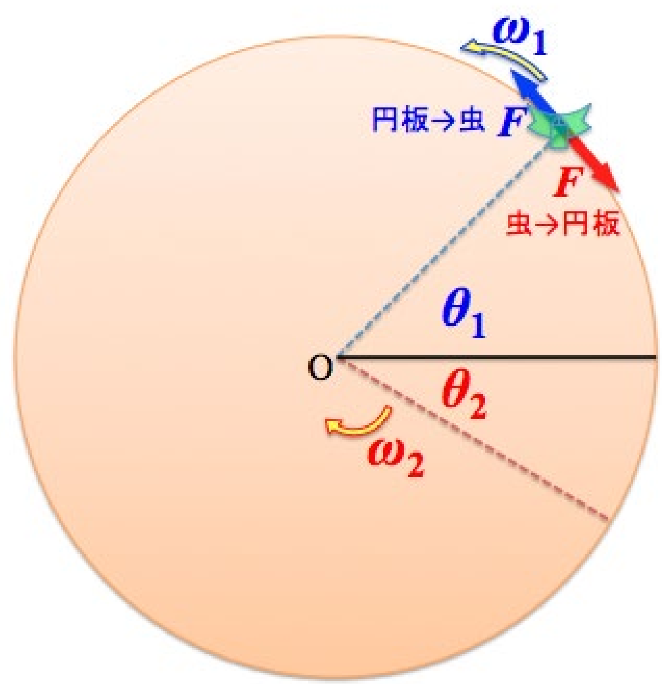
問題10

固定軸のまわりの回転運動2：円運動する質点と回転する円板

問題 鉛直な固定軸のまわりに自由に回転できる半径 r の円板があるとし、軸の周りの**慣性モーメントを I_0** とする。この円板の円周に沿って質量 m の小さい虫が1周する間に、円板は逆向きにどれだけ回転するか。ここで、円板の質量は M とする。

回転の運動方程式

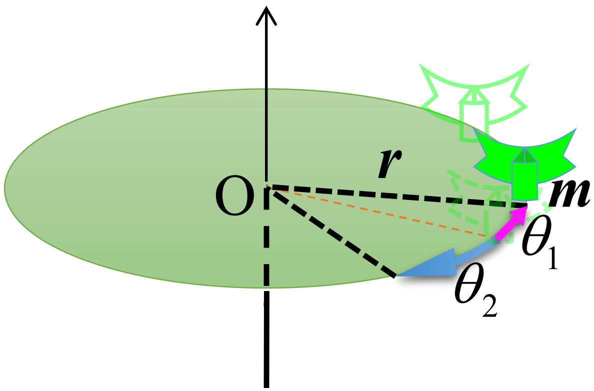
$$\boxed{I_i \frac{d\omega_i}{dt} = N_i}$$



Attention

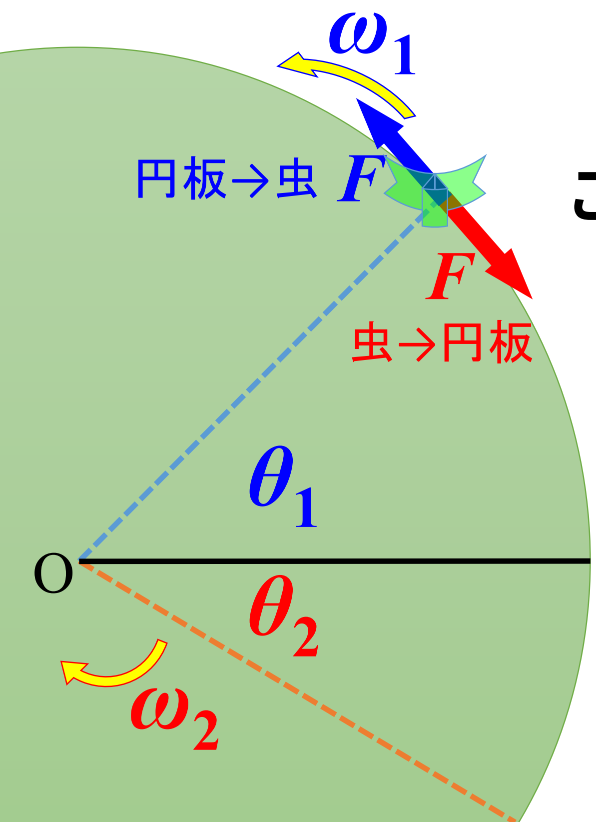
外力をうけない回転運動の運動方程式を積分すると角度が得られる

問2　円運動する質点と回転する円板



鉛直な固定軸まわりの回転運動に対する
虫および円板の慣性モーメントを
それぞれI_1およびI_2とおく。

虫が反時計回りに回る角度θ_1
円板が時計回りに回る角度θ_2
虫と円板の間に働く力をFとおく
(作用−反作用の法則が成り立つ)



ここで、回転軸に関して反時計回りを正とする。

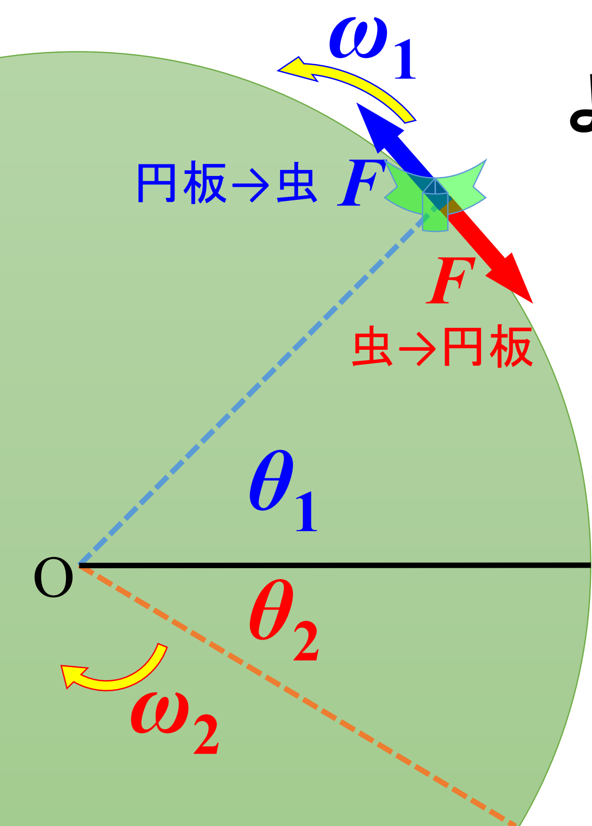
回転の運動方程式は、

虫	$I_1\dfrac{d\omega_1}{dt}=Fr$	①
円板	$-I_2\dfrac{d\omega_2}{dt}=-Fr$	②

①＋②より、 $I_1\dfrac{d\omega_1}{dt}-I_2\dfrac{d\omega_2}{dt}=0$

回転の運動方程式は、

虫	$I_1\dfrac{d\omega_1}{dt}=Fr$	①
円板	$-I_2\dfrac{d\omega_2}{dt}=-Fr$	②



①＋②より、

$$I_1\frac{d\omega_1}{dt}-I_2\frac{d\omega_2}{dt}=0$$

初期条件t=0においてω_1=ω_2=0を考慮して両辺を積分すれば、

$$I_1\omega_1=I_2\omega_2=L_1=L_2$$ **角運動量保存**

よって、

$$I_1\frac{d\theta_1}{dt}=I_2\frac{d\theta_2}{dt}$$

初期条件t=0においてθ_1=θ_2=0を考慮して両辺を積分すれば、

$$I_1\theta_1=I_2\theta_2$$

虫が円板のふちにそって一周するとき(円板の元の場所に戻るとき)θ_1=2π-θ_2であるから、

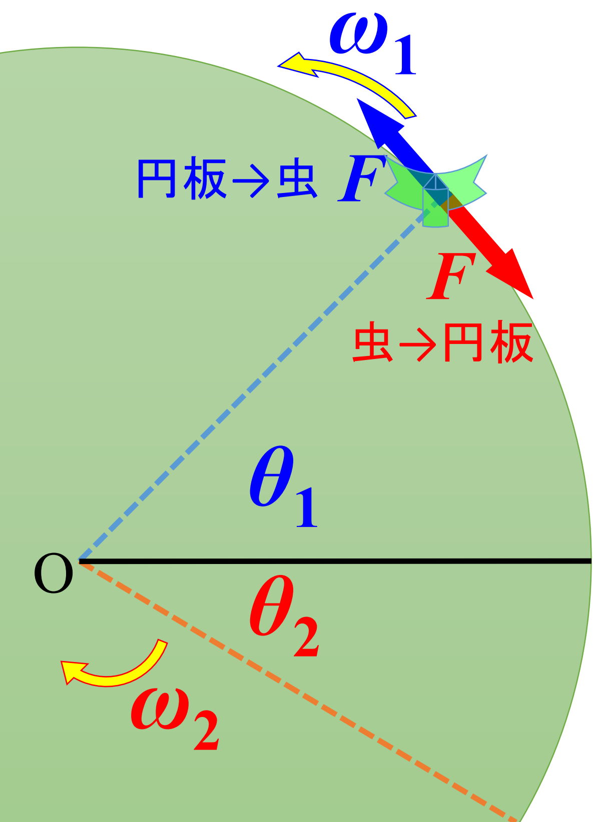
$$I_1\theta_1=I_1(2\pi-\theta_2)=I_2\theta_2 \rightarrow 2\pi I_1-I_1\theta_2=I_2\theta_2$$

$$(I_1+I_2)\theta_2=2\pi I_1 \rightarrow \theta_2=\frac{2\pi I_1}{I_1+I_2} \quad ③$$

回転の運動方程式は、

虫 $$I_1 \frac{d\omega_1}{dt} = Fr \quad ①$$

円板 $$-I_2 \frac{d\omega_2}{dt} = -Fr \quad ②$$



虫が円板を一周するとき
$\theta_1=2\pi-\theta_2$であるから、

$$\theta_2 = \frac{2\pi I_1}{I_1 + I_2} \quad ③$$

ここで、
虫の回転軸に対する慣性モーメントI_1

$$I_1 = mr^2 \quad ④$$

円板の回転軸に対する慣性モーメントI_2

$$I_2 = I_0 = \frac{1}{2} Mr^2 \quad ⑤$$

よって、④、⑤を③に代入して、

$$\theta_2 = \frac{2\pi mr^2}{mr^2 + I_0} = \frac{2\pi m}{m + \frac{1}{2}M} = 2\pi \frac{2m}{2m + M}$$