

[追加問題 1]

(1) 有限の曲線 $C: \mathbf{r} = 2\cos t \mathbf{i} + 2\sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) を図示し, その長さを求めよ。

(2) $A(1, 0, 2), B(0, 1, 2), C(0, -1, -2)$ を頂点とする $\triangle ABC$ の面積を ①外積 ②面積分 を利用してそれぞれ求めよ。

(3) ベクトル場 $\mathbf{A} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + (z+1)\mathbf{k}$ について, (1)の曲線 C に沿っての線積分 $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$, (2)の $\triangle ABC$ の表面 S に沿っての面積分 $\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ をそれぞれ求めよ。

[追加問題 2]

円 C を $x^2 + y^2 = 4, z = 2$ とし, 円 C で囲まれた領域 (円板) を S とする。スカラー場 $\phi = y^2 + xz + z^2$, ベクトル場 $\mathbf{A} = -2y\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ について, 次の値を求めよ。

(a) $\oint_C \phi ds$ (b) $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ (c) $\int_S \phi dS$ (d) $\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$

[追加問題 3]

$O(0, 0, 0), P(1, 0, 0), Q(0, 3, 0), R(0, 0, 6)$ を頂点とする四面体の体積を体積分 (三重積分) を用いて求めよ。

[追加問題 4]

教科書 p.71 問題 1 に対し, ガウスの定理が成立することを確かめよ。

[追加問題 5]

$O(0, 0, 0), A(a, 0, 0), D(a, b, 0), B(0, b, 0)$ を頂点とする長方形を $O \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow O$ の順に一周する経路を C とし, ベクトル場 $\mathbf{A} = ky\mathbf{i} + lx\mathbf{j} + m(x+y+z)\mathbf{k}$ とする。これらに対し, ストークスの定理が成立することを確かめよ。

[追加問題 6]

球面 $S_1: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ に沿ってのベクトル場 $\mathbf{A} = (x-1)\mathbf{i} + (y-1)\mathbf{j} + (z-1)\mathbf{k}$ の面積分を求めよ。また, S_1 のうち $z \geq 0$ の部分 (半球面) S_2 に沿って \mathbf{A} を面積分すると, 解はいくらになるか。

[追加問題 7]

xy 平面上の円 $C: x^2 + y^2 = 4$ に沿ってのベクトル場 $\mathbf{A} = (x^2 + y)\mathbf{i} + (x^2 + 2z)\mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$ の線積分を求めよ。

[追加問題 8]

円 $C: x^2 + y^2 = 1, z = 1$ に沿ってのベクトル場 $\mathbf{A} = yz\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ の線積分を求めよ。