第 9 回講義．累次積分．（教科書 4.20）

• 重積分と体積（重積分の実用的な定義）．

平面領域 D 上の 2 変数関数 $f(x,y)$ について，$f(x,y) \geq 0$ の場合，その重積分

$$V = \iint_D f(x,y)dxdy$$

を立体

$$W = \{(x,y,z) \,|\, (x,y) \in D,\ 0 \leq z \leq f(x,y)\}$$

の**体積**でもって定義する．$f(x,y) < 0$ となる部分があるときは，その分の体積をマイナスにする．

この考え方は，定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ が曲線下の符号つき面積であることを，重積分の設定に拡張したものである．

• 重積分の計算法（累次積分）．$D = [a,b] \times [c,d]$ のとき．立体 W の $x =$ 一定の平面による切り口の面積は $S(x) = \displaystyle\int_c^d f(x,y)dy$ なので $V = \displaystyle\int_a^b S(x)dx$ である．立体 W の $y =$ 一定の平面による切り口の面積は $T(y) = \displaystyle\int_a^b f(x,y)dy$ なので $V = \displaystyle\int_c^d T(y)dy$ である．この二つの考察をまとめると

$$\begin{aligned} V &= \iint_D f(x,y)dxdy \\ &= \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,y)dy \right\} dx \\ &= \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,y)dx \right\} dy \end{aligned}$$

である．この計算法を**累次積分**とよぶ．

• 累次積分以外にも体積の計算法はあるが，原理的には平面で切った切り口の面積を足し合わせるという点で，考え方は同じである．応用上よく現れるのは，z 一定という平面で切った切り口の面積の積分から重積分を計算する方法．z 軸を法線方向にもつ平行な平面族で切ったときの切り口の面積 $S(z)$ は z の 1 変数関数と考えられる．それを z 軸の区間上で積分すると，体積の公式

$$V = \int_\alpha^\beta S(z)dz$$

を得る．たとえば，地図に描かれている多数の（閉じた）等高線から山の体積を求めるときには，この方法を用いるのが自然である．地形図からわかることは，山を多角柱が積み重なってできた立体とみなして

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \text{標高 } z_i \text{ の等高線で囲まれる平面図形の面積 } \times (z_i - z_{i-1}) \\ \leq\ &\text{山の体積} \ \leq\ \sum_{i=1}^{n} \text{標高 } z_{i-1} \text{ の等高線で囲まれる平面図形の面積 } \times (z_i - z_{i-1}) \end{aligned}$$

という，山の体積の上と下からの評価である．このように，どのやり方が最も単純な計算になるかで，色々なやり方を使い分ける．

• 累次積分の計算例．

例 1．$f(x,y) = x + y$, $D = [0,2] \times [0,1]$ に対し，
$V = \displaystyle\iint_D (x+y)dxdy = 3$ である．

実際 $V = \int_0^1 dy \int_0^2 (x+y)dx = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_{x=0}^{x=2} = \int_0^1 (2+2y)dy = [2y+y^2]_0^1 = 3.$

● 応用上は，積分領域 D が長方形でないが頻繁に現れるが，その場合の対処法を述べる：
　このときは，D を含む長方形 E をとり D の外側で $f(x,y)=0$ と拡張しておいて $\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_E f(x,y)dxdy$ と定義する．しかしこのように定義してもこれが計算に役立つわけではない．実際の計算は，次のように実行する：

● 縦線集合

$$D : a \leq x \leq b\ ,\ \phi(x) \leq y \leq \psi(x)$$

上での $f(x,y)$ の積分は

$$\int_a^b dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$$

という累次積分になる．

● 横線集合

$$D : a \leq y \leq b\ ,\ \phi(y) \leq x \leq \psi(y)$$

上での $f(x,y)$ の積分は

$$\int_a^b dy \int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx$$

という累次積分になる．

注意. 累次積分を表す次のような記法がよく使われる（本講義でも使うだろう）：

$$\int_a^b dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy = \int_a^b \left\{ \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right\} dx$$

これを見かけたら，その意味は右辺の累次積分であることを思い出さないといけない．

● 任意の平面領域は，何本かの水平線と垂直線により，同時に縦線集合かつ横線集合であるようないくつかの部分領域に分割できることが知られている（絵を描くと明らかな感じがするが，きちんと証明するのは骨が折れる）．したがって，積分の原理その 1 により，平面領域上の積分は縦線集合または横線集合上の積分に帰着する．

　重積分の計算問題では

積分領域の絵を描いてから，積分計算を実行する．

例 2. $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ (if $x^2+y^2 \leq 1$), $= 0$ (if $x^2+y^2 \geq 1$), $D = [-1,1] \times [-1,1]$ に対し，
$V = \iint_D f(x,y)dxdy = \frac{2}{3}\pi$ である．

　実際，被積分関数は $[-1,1] \times [-1,1]$ で定義されているが円板 $x^2+y^2 \leq 1$ の外側では値が 0 だから，積分への寄与はない（円板の外側から来る体積は 0 だ）．よって $\int_{-1}^1 f(x,y)dy = \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}dy$ である．だから積分領域を縦線集合と思った時の累次積分は $V = \int_{-1}^1 dx \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}dy$ である．ここで
$\int_{-a}^a \sqrt{a^2-y^2}dy$ $(a > 0)$ という積分を計算しておく．式の意味を考えると，これは半径 a の半円の面積すなわち $\frac{\pi a^2}{2}$ であることが判る（計算途中でこういうことに気づくと，少し計算が楽になる）．

$$V = \int_{-1}^1 \frac{\pi}{2}(\sqrt{1-x^2})^2 = \int_0^1 \pi(1-x^2)dx = \pi\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\pi\ .$$

意味を考えると，この積分は，半径 1 の球の上半分の体積の計算に他ならない．

注意．例えば $f(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x \leq 1) \\ 0 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$ という関数の区間 $[0, 2]$ における積分は（区分求積法を思い浮かべれば明らかなように）$\displaystyle\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$ である．この注意と同様に，例 2 でも，被積分関数が 0 になっているところを無視して積分領域を最初っから円板 $x^2 + y^2 \leq 1$ と考えて累次積分するのと実質的に同じである．

例 3. $f(x, y) = 1 + xy$, $D : x^2 \leq y \leq x$. $V = \displaystyle\iint_D f(x, y)dxdy$.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 dx \left(\int_{x^2}^x (1 + xy) \right) dy \\ &= \int_0^1 dx \left[y + \frac{x}{2} y^2 \right]_{y=x^2}^{y=x} \\ &= \int_0^1 dx \left(x + \frac{x^3}{2} - x^2 - \frac{x^5}{2} \right) \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{12} \right]_0^1 \\ &= \frac{5}{24} \ . \end{aligned}$$

例 4. $f(x, y) = \sin(x + y)$, $D : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq x$. $V = \displaystyle\iint_D f(x, y)dxdy$.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^x \sin(x + y)dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx [-\cos(x + y)]_{y=0}^{y=x} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos 2x + \cos x)dx \\ &= \left[-\frac{\sin 2x}{2} + \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1 \ . \end{aligned}$$

- **課題.** 教科書の問 20.1, 20.2.