031 電位

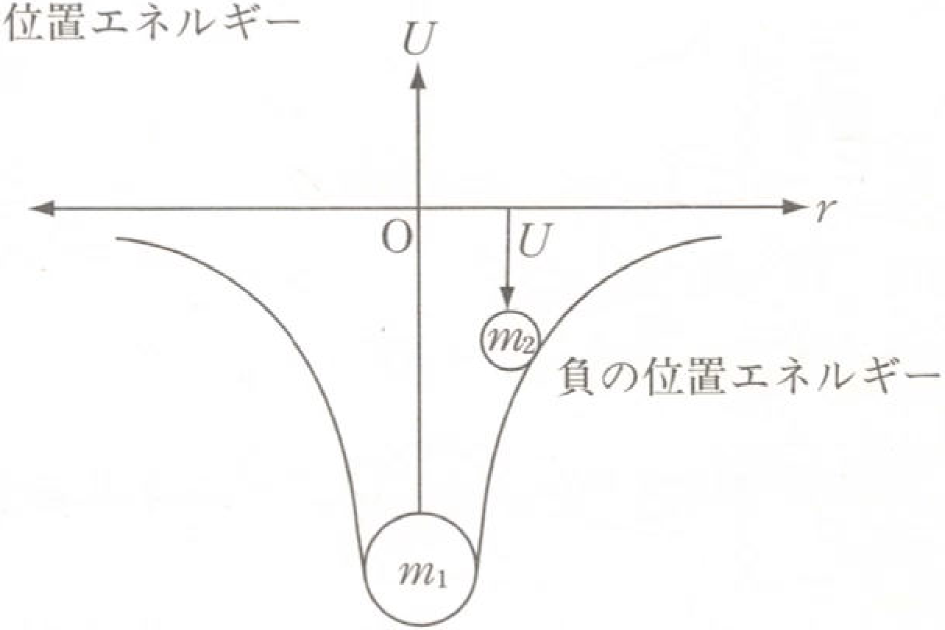
静電ポテンシャル

我々はすでに，万有引力における位置エネルギー(ポテンシャル・エネルギー)というものを知っている。講義１で用いた記号をそのまま使えば，万有引力の位置エネルギー U は，

$$U = -G\frac{m_1 m_2}{r}$$

である(『力学ノート』101～103ページ参照)。

図3-1●万有引力の位置エネルギー

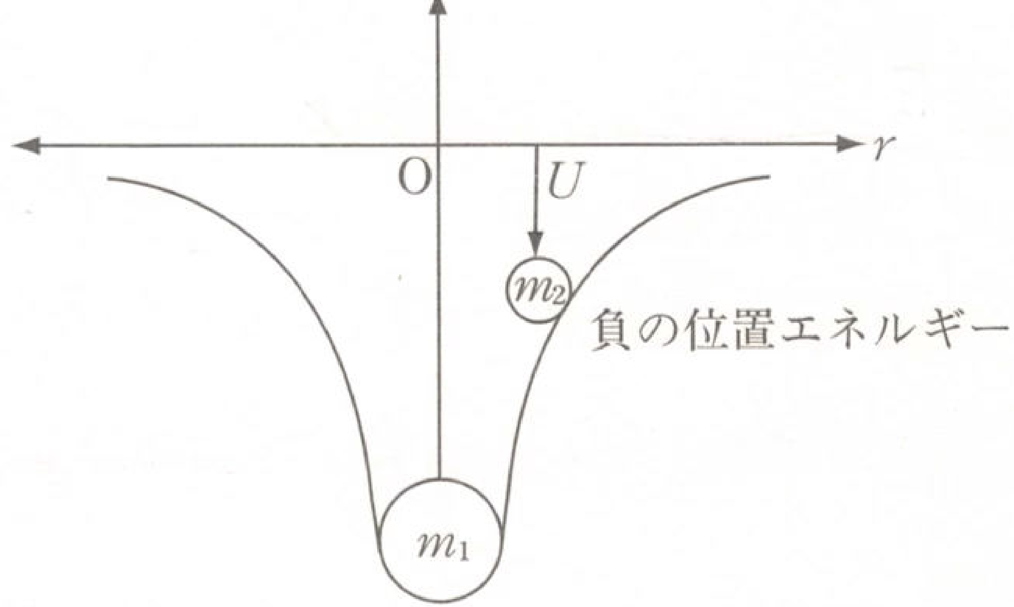


$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$$



符号のマイナスは便宜的なものではあるが，力が引力であることをイメージするのに都合がよい。つまり，図のようにマイナス方向にへこんだすり鉢の形状は，その上にパチンコ玉を置けば，力の中心へ向かって引かれていく様子がすぐにイメージできる。

万有引力と同じ形式で書かれるクーロン力にも，まったく同じ位置エネルギー U が定義できるであろう。すなわち，

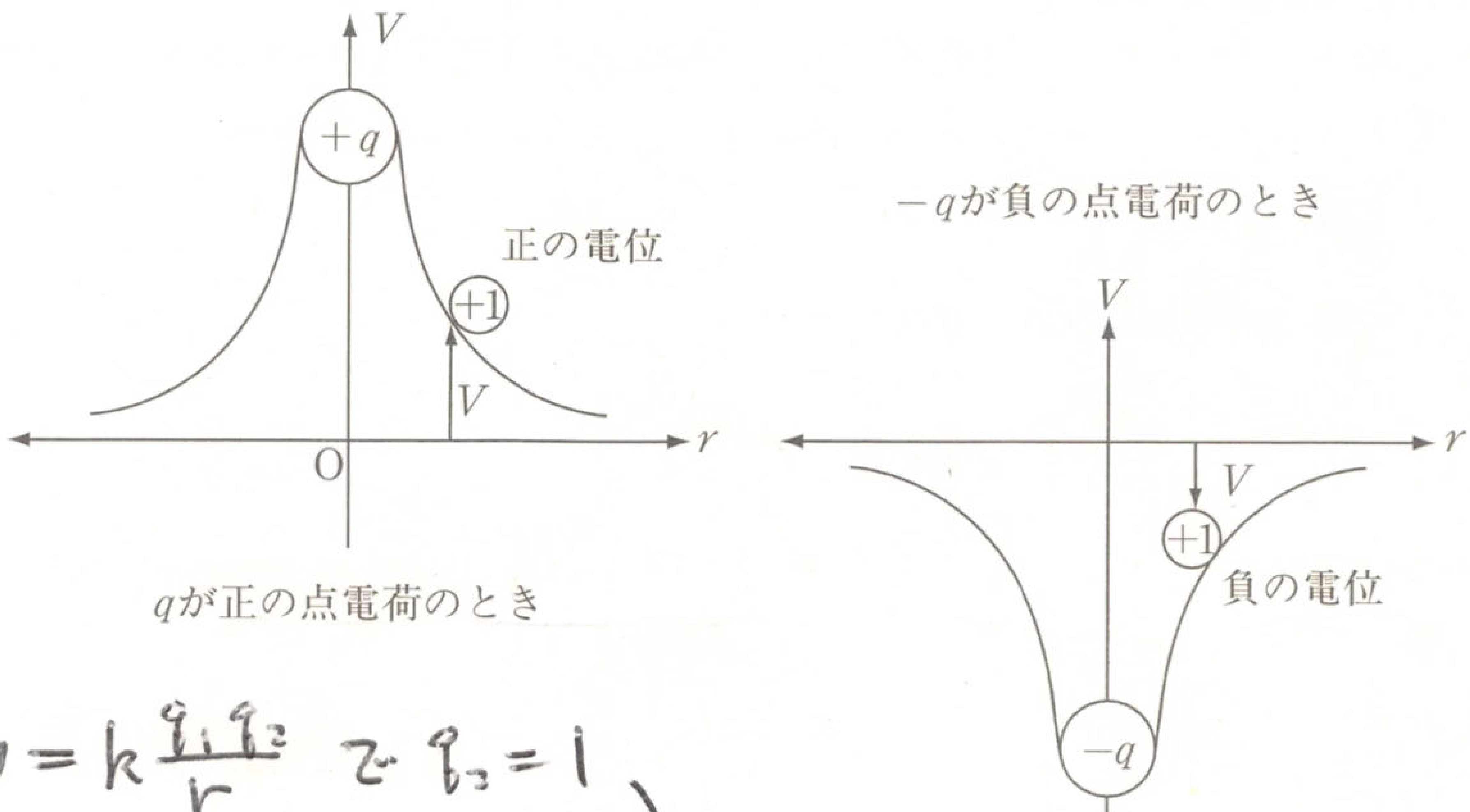
$$U = k\frac{q_1 q_2}{r}$$

ここで，全体にマイナスの符号をつけていないのは，電気力には引力と斥力があるからである。q_1 と q_2 の電気量を符号も込みで記すことにしておけば，q_1 と q_2 が異符号なら $q_1 q_2$ はマイナス，同符号ならプラス

で，引力と斥力の両方を表すことができる。

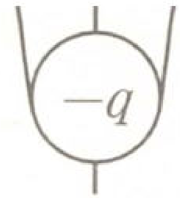
しかし，我々は講義 1，2 で見たように，クーロンの法則を電場という考え方で捉えることにしたわけだから，点電荷の一方を $+1$ クーロンとし（さらにはその点電荷を取ってしまって），q クーロンの点電荷がその周りにつくる（$+1$ クーロンあたりの）位置エネルギーを考えることにしよう。それが**電位**である。

図3-2●クーロン力の電位



$U = k\dfrac{q_1 q_2}{r}$ で $q_2 = 1$

$U = k\frac{q_1 q_2}{r}$ で $q_2 = 1$



電位を V で表し，さらに定数などを講義 2 で使った表記にすれば，

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

電位の単位は，その定義から [J/C] である。 $V = U/q_2$ ともいえる

なぜ電位なのか

さて，静電気力の話は，クーロンの法則，あるいは電場の考え方で言い尽くされているのに，なぜ電位というものを考えるのであろうか。

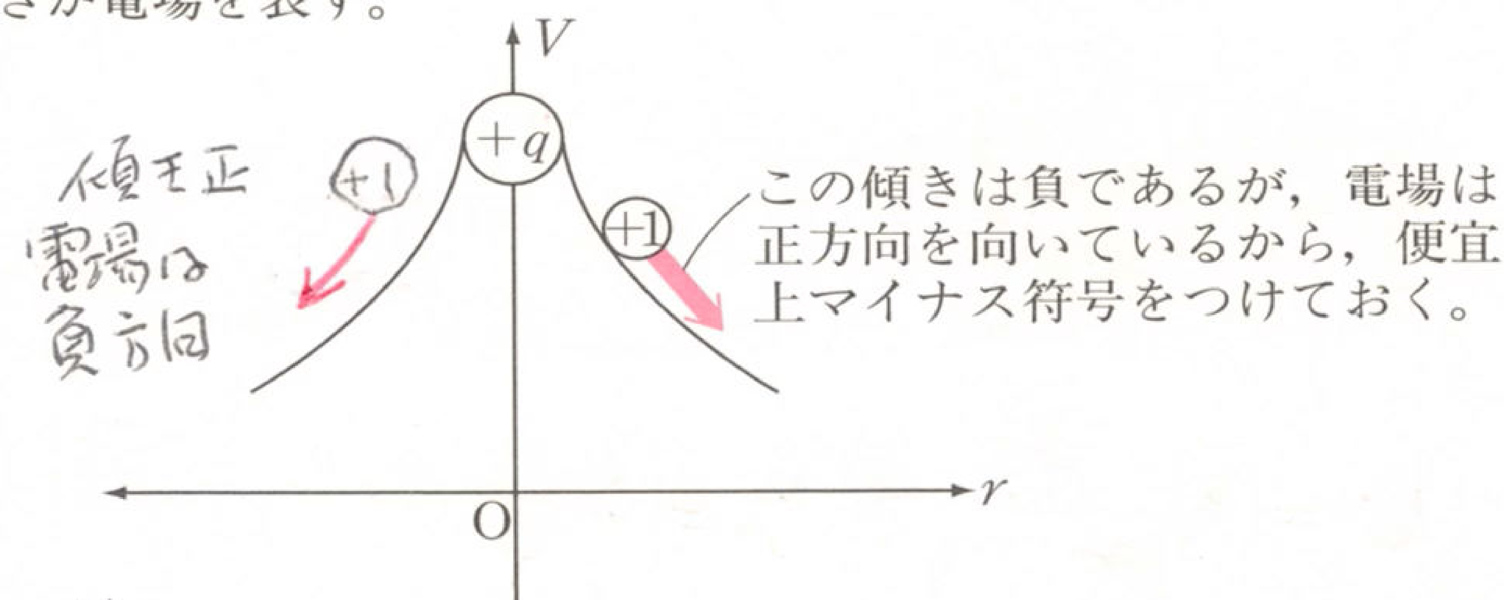
力，あるいは電場は，方向をもったベクトルである。それゆえ，空間のある点の電場を求めるということは，スカラー的には 3 つの未知数を求めるということに等しく，とうぜんのことながら計算がはなはだ面倒になる(div$\boldsymbol{E}$ が，未知数 3 つを含む解けない方程式であったことを想起しよう)。

それに対して，電位はスカラー量であり，空間の各点の電位が与えられていると，電場は(3次元的な曲面である)電位の傾きとして求められるのである(問1参照)。そうすると，理屈の上からは，電場を直接求めるよりは，まず電位を求め，その傾斜(微分)から電場を求めた方が計算が簡単だということになる(とはいえじっさいは，電場と電位のどちらを先に求めた方が簡単かは，個々の問題による)。

問 1　点電荷のつくる電位 V および電場 E を，点電荷からの距離 r の1次元の関数で表すとき，電位 V と電場 E の間にはどのような関係があるか。

解答　$E = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$

図3-3●電位の傾きが電場を表す。



じっさい，前頁で導いた

$$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

を，r で微分すれば，

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = -E$$

である。q が正電荷のとき，電場はプラス方向を向くから，上の結果は，符号を逆にしておく方がイメージに合う。そこで，

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$$

◆ P22のEと同じ

球対称な電場の場合，中心外向き方向に座標軸をとれば，電場と電位の関係は問１のように１次元的に扱うことができる。これに対して，球対称でない一般的な場合には，これを３次元に拡張すればよいだろう。式は少し複雑になるが，本質的な差異は何もないはずである(イメージし

$$F=k\frac{q_1 q_2}{r^2} \text{ で } F/q_2=E=k\frac{q_1}{r^2}$$

にくければ，とりあえず 2 次元に拡張してみればよい)。

スカラー場

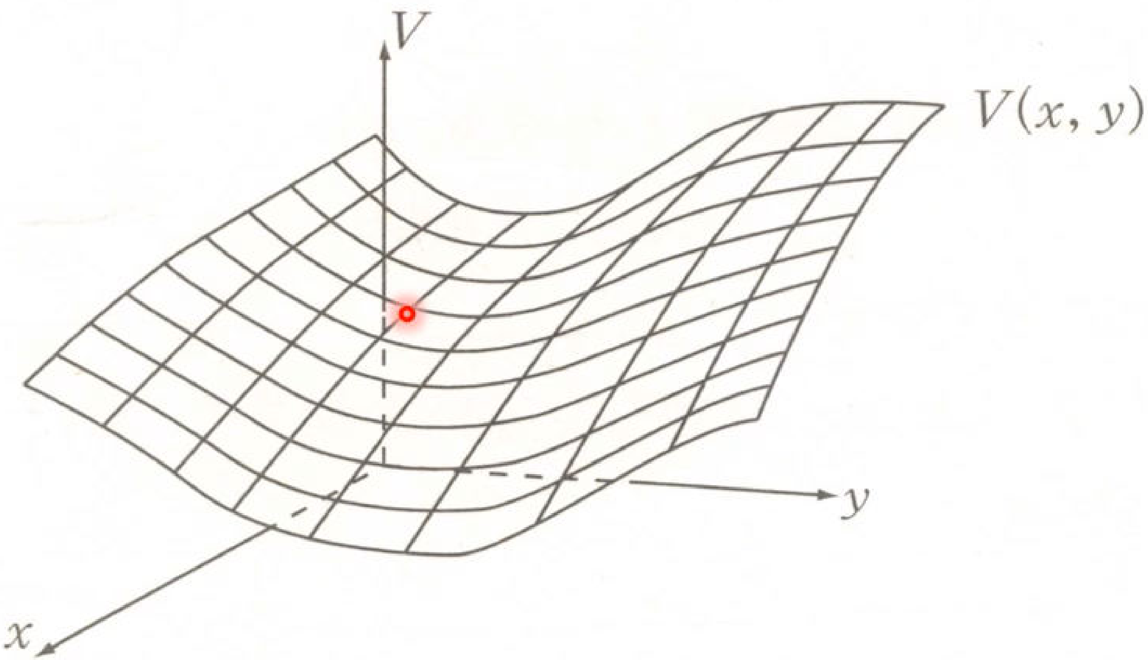
ある電荷の分布によって，3 次元空間に電位 V が与えられているとしよう。

$$V = V(x, y, z)$$

V はスカラー量，すなわちたんなる数である(もちろん，プラスだけでなく，0 やマイナスの値もとる)。これは電場がベクトルであるのと決定的に違っているが，x, y, z を与えれば V の値が決まるという意味において，やはり場の量である。こういう場を**スカラー場**と呼ぶ。すなわち，電場はベクトル場であるが，電位はスカラー場である。

3 次元空間のスカラー場は，図では描けないので，イメージをするために 2 次元空間で描いておこう。

図3-4● 2 次元の電位 $V(x, y)$ は，x-y 平面を覆う曲面で表される。



このように描くと，スカラー場は，2 次元平面 x-y 上を覆う曲面として表されることが分かる。このとき，各点の電場は，この曲面の最大傾斜の傾きとして表される(ただし，符号は逆)。直感的なイメージでいえば，この曲面にパチンコ玉をそっと置いたとき，そのパチンコ玉が転がり落ちる方向が電場の向きであり，パチンコ玉の加速の大きさが電場の大きさだとみなせばよい。

さて，1 次元の場合の傾きは，たんに $\mathrm{d}V/\mathrm{d}r$ でよかったが，2 次元あるいは 3 次元における最大傾斜方向とその傾きはどのように表されるだろうか。

これには，少々の数学が必要である。しかし，div の数学的意味を理解した人には，もはやたやすいことだろう。付録の「やさしい数学の手引き」に示した通り，x, y, z それぞれの傾き（偏微分）を求めてやればよい。

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

これは，1つのベクトルとして，

$$\boldsymbol{E} = \left(-\frac{\partial V}{\partial x},\ -\frac{\partial V}{\partial y},\ -\frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

と書いてもよいし，また記号∇（ナブラ）を用いて，

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V$$

と書けることも，付録に示した通りである。また，この∇V は傾斜そのものであるから，傾斜を意味する英語 gradient から，

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} V$$

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\, V \quad ☆$$

と書いても同じことである。

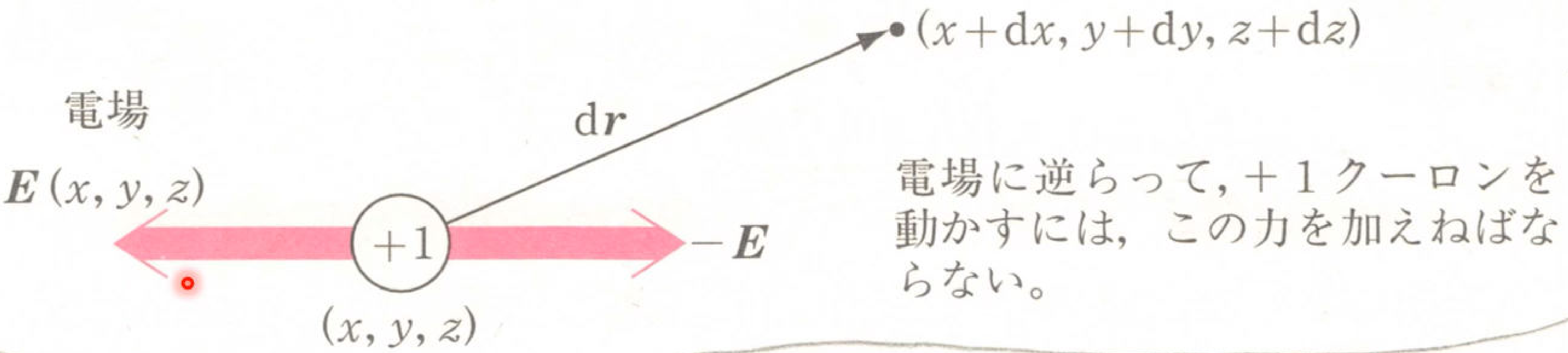
以上は，$\mathrm{d}V/\mathrm{d}r$ の微分と本質的な違いが何もない。あとは記号に慣れるだけのことである。

☆の関係が成立つときVをEのポテンシャルと呼ぶ

●保存力とポテンシャル・エネルギー

さて，力学において万有引力は保存力であるということを学んだ。保存力とは，そのような力の存在する空間で，質点をある点からある点まで運んだとき，要する仕事がその経路によらないような力のことであった。そして，保存力であるということは，ポテンシャル・エネルギーをもつということなのである。クーロン力もまた万有引力と同じ中心力であるから，とうぜん保存力である。そのことを，「やさしい数学の手引き」にもとづいて証明してみよう。

図3-5●＋１クーロンを電場の中で動かす。d$\boldsymbol{r}$ は十分小さいので，
その間，$\boldsymbol{E}$ は変化しないとみなす(微分の考え方)。



いま，クーロン場において，＋1 クーロンの点電荷を，短い距離 d$\boldsymbol{r}$ だけ動かしてみる($\boldsymbol{r}$ は，x, y, z の関数)。このとき，電場 $\boldsymbol{E}$ に逆らってしなければならない仕事 dW は，

$$\mathrm{d}W = -\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

であるが，ベクトルの内積の定義より，

$$= -(E_x\,\mathrm{d}x + E_y\,\mathrm{d}y + E_z\,\mathrm{d}z)$$

電場の各成分を，電位に直して，

$$= \frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathrm{d}z$$

やはり「やさしい数学の手引き」の偏微分と全微分の公式を見れば分かるように，これはまさに V の全微分である。すなわち，

p.216

$$= \varDelta V$$

つまり，求める仕事は，どんな経路であろうと，$\varDelta V$，すなわち2点間の電位の差だけで与えられる。これを長い経路A点からB点まで積分すれば，

dW

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} -\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = V(\mathrm{B}) - V(\mathrm{A})$$

すなわち，クーロン場に逆らってする仕事や，クーロン場によって電荷が得る運動エネルギーなどは，$V(\mathrm{B}) - V(\mathrm{A})$ という電位の差だけで求められることになるわけである。

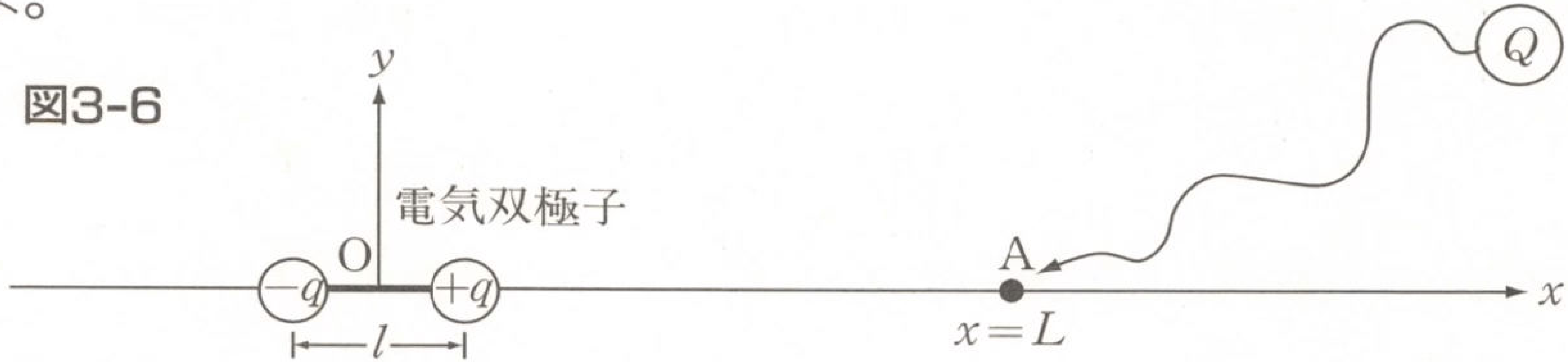
「差」というのがイメージしにくければ，次のように「足し算」で考えてもよい。

$$\underset{V(\mathrm{A})}{\text{はじめの電位}} + \underset{\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} -\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\text{電場に逆らってする仕事}} = \underset{V(\mathrm{B})}{\text{あとの電位}}$$

演習問題 3-1

真空中の $x=+l/2\,(l>0)$ に電気量 が $q\,(>0)$ の点電荷が，また $x=-l/2$ に電気量 $-q$ の点電荷固定された電気双極子がある。$x=L\,(>0)$ の点 A においてこの電気双極子がつくる電位 V と電場 E を求めよ。また，このとき，電荷 $Q\,(>0)$ の点電荷を無限の彼方から点 A まで運ぶのに要する仕事はいくらか。ただし，真空の誘電率を ε_0 とし，L は l より十分大きいとして近似計算せよ。

図3-6



解答＆解説 あとの説明のために，定数 L の代わりに変数 x を使って，$x=x$ の地点の電位を求めることにする。ただし，この x は正で l に比べて十分大きいとしておく。

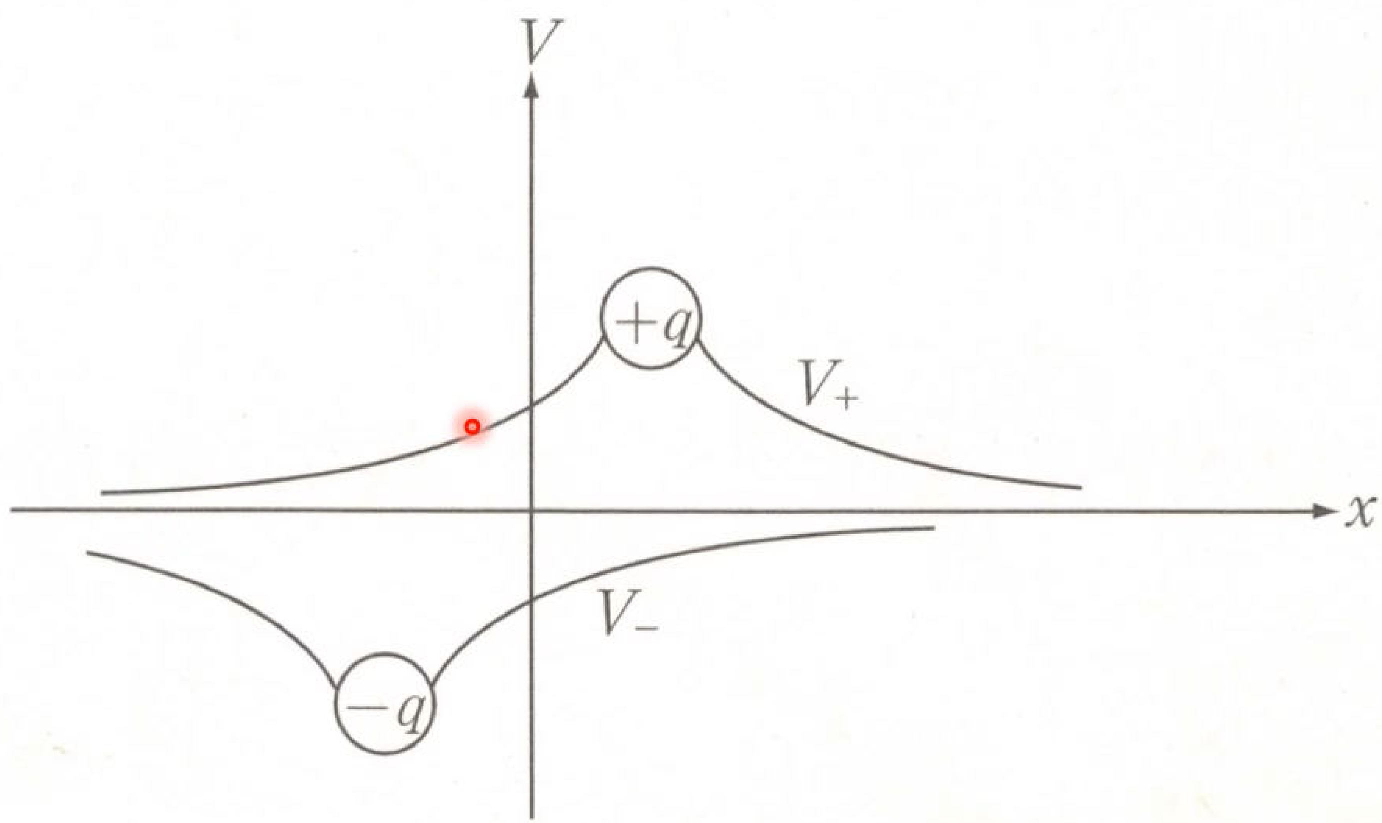
＋の点電荷と－の点電荷が，x の地点につくる電位 V_+ と V_- は，それぞれ次の通りである。

$V = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ より

$$V_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{x-\dfrac{l}{2}}$$

$$V_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{x+\dfrac{l}{2}}$$

図3-7●電位はスカラーだから，V_+ と V_- を単純に足せばよい。



それゆえ，この 2 つの点電荷の合成電位 V は，

$$V = V_+ + V_-$$

ここで注目しておきたいことは，電場の合成はベクトルの足し算であるのに対して，電位はスカラー量だから，単純な数の足し算でよいということである。このように，複数の電荷があるときには，合成電場より合成電位を求める方が，はるかに簡単である。

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x-\frac{l}{2}} - \frac{1}{x+\frac{l}{2}}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{l}{\left\{x^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2\right\}}$$

微分の考え方より，x^2 に比べて $(l/2)^2$ は，「十分小さい」の 2 乗だから無視して，

$$= \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^2}$$

$x=L$ として，

$$V = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{L^2} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

この電気双極子がつくる電場 $\boldsymbol{E}$ を求めるには，電位 V を x で微分すればよいだろう。すなわち，

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} V$$

で，V は x だけの関数だから（本当はそうではないが，対称性からそうみなせる），

$$E = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = -\frac{ql}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-2}{x^3}$$

$$= \frac{ql}{2\pi\varepsilon_0 x^3}$$

$x>0$ だから，$E>0$ で，電場の向きは正方向であることが分かる。

$x=L$ として，

$$E = \frac{ql}{2\pi\varepsilon_0 L^3} \quad \cdots\cdots (答)$$

P27 は 直接E を求めた。 それほど かわらない…

話が単純すぎるから

この結果は，もちろん演習問題 2-1 と同じである。しかし，先に電位を求めた分だけ，計算が簡単になっていることに留意しておこう。

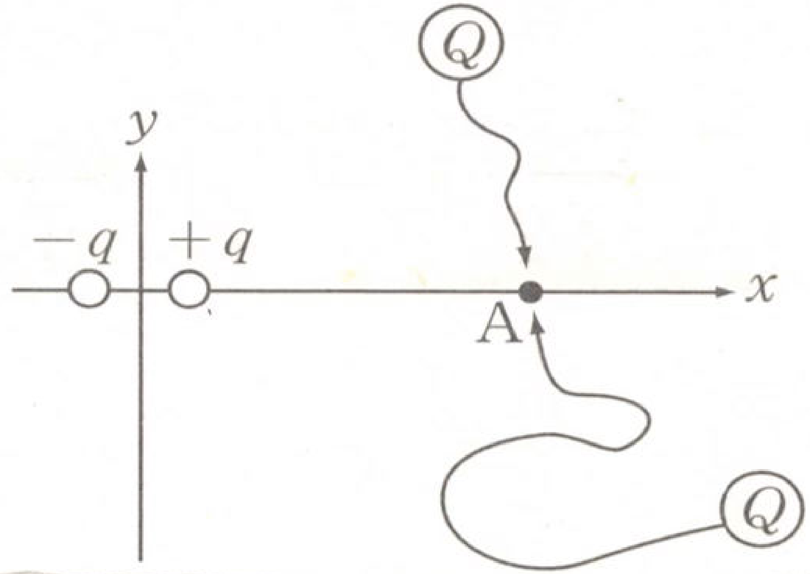


図3-8●無限の彼方では，どこも $V_\infty = 0$ だから，どこからどのように運んでも，点 A まで運ぶのに要する仕事は QV_A である。

電荷がどのように分布していても(点電荷によるクーロン力が保存力であるので)，その全体はやはり保存力である(これを**重ね合わせの原理**と呼ぶ)。よって，この電気双極子のつくる電場のもとで，電荷 Q を運ぶのに要する仕事は，その経路によらない。すなわち，

$$\begin{array}{c}\text{はじめの電荷 } Q \text{ の}\\ \text{ポテンシャル・エネルギー}\end{array} + \text{仕事} = \begin{array}{c}\text{あとの電荷 } Q \text{ の}\\ \text{ポテンシャル・エネルギー}\end{array}$$

という式がつねに成立する。求める仕事をWとして，これを式で書けば，

$$Q\cdot V(\infty)+W=Q\cdot V(\text{点A})$$

念のために説明しておけば，電位Vは$+1$クーロンあたりのポテンシャル・エネルギーだから，電荷$Q\,(>0)$のポテンシャル・エネルギーはそれをQ倍して，QVとなる(もし，電荷Qが負電荷であれば，ポテンシャル・エネルギーの符号も変わる)。

よって，

$$W=Q(V(\text{点A})-V(\infty))$$

$V(\infty)$は0だから，

$$=Q\cdot V(\text{点A})$$

$$V(A)=\frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 L^2}$$

$$=\frac{Qql}{4\pi\varepsilon_0 L^2}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

←前問の解

◆