力学II（後半：原田担当分）

第12回

今回の内容（pp. 113-120）

剛体の静力学

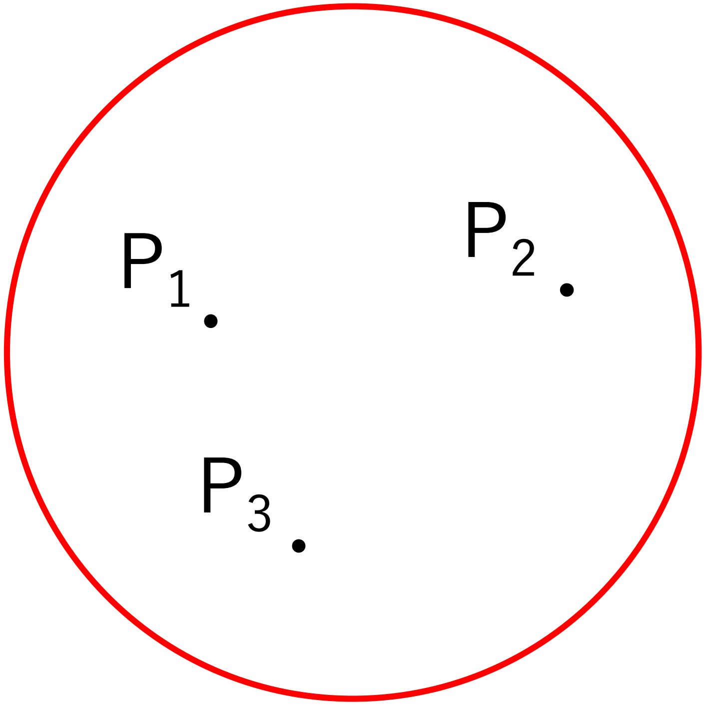
→変形を無視できる理想的な固体

・剛体の自由度とつり合い
・剛体のつり合いの例題

固定軸を持つ剛体の力学

・慣性モーメントによる記述
・固定軸を持つ剛体の例題
・慣性モーメントの性質

剛体の自由度とつり合い



P_1、P_2、P_3の位置座標
$3\times3=9$
P_1P_2、P_2P_3、P_3P_1の長さ一定
より、自由度が3減るので、

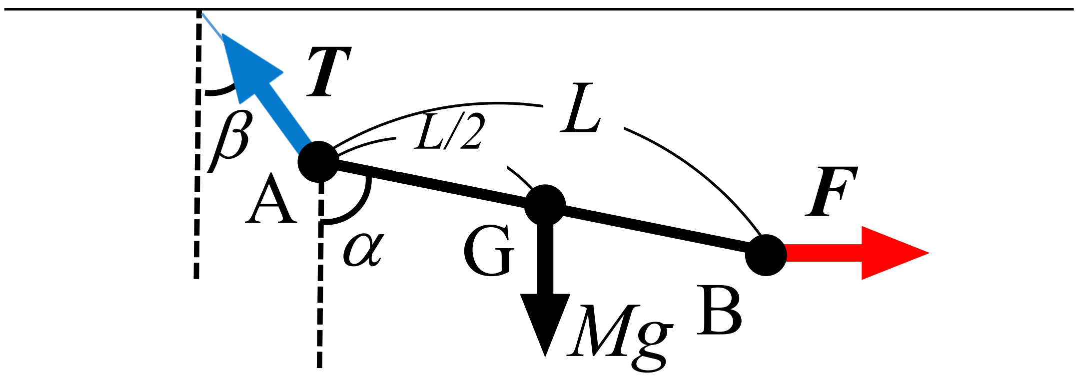
剛体の自由度：6

剛体のつり合い条件：質点系のつり合いと同じ

（1）外力の和0：$\boldsymbol{F}=0$

（2）外力のモーメントの和0：$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{0}$

剛体のつり合いの例



ゴム糸の張力

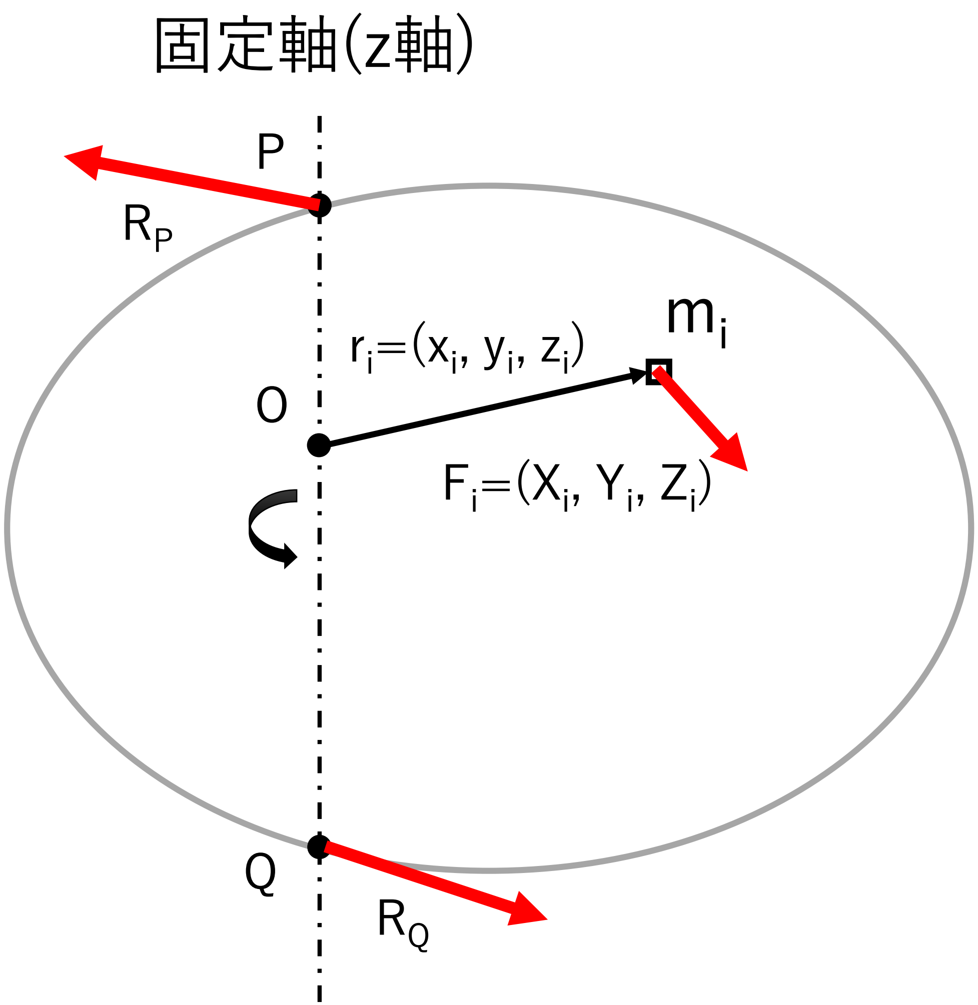
$T = k(l - l_0)$

自然長 l_0 の質量を無視できるゴム糸（ばね定数 k）をつるし、その他端 A に長さ L、質量 M の細長い一様な棒をつるす。この棒の他端 B に図のように水平方向に大きさ $\boldsymbol{F}$ の力を加えたところ、全体はつりあった。

(1)　ゴム糸および棒が鉛直となす角 α、β を求めよ。

(2)　ゴム糸はどれだけ伸びるか求めよ。

固定軸を持つ剛体の力学



運動の自由度は１
（変数：回転角）

P、Qに働く抗力は、
考えなくてよい。
（力のモーメント=0）

剛体の全角運動量は、

$$\boldsymbol{L} = \sum_i (\boldsymbol{r_i} \times m_i \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}})$$

角運動量保存則より

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N}$$ （力のモーメント）

z成分をとると、

$$L_z = \sum_i x_i m_i \dot{y}_i - y_i m_i \dot{x}_i$$

$$\frac{dL_z}{dt} = N_z$$

$$N_z = \sum_i x_i Y_i - y_i X_i$$

直交座標系(x_i, y_i, z_i)を円筒座標系(ρ_i, φ_i, z_i)であらわす。

$$x_i = \rho_i \cos\varphi_i \qquad y_i = \rho_i \sin\varphi_i$$

ここで、 ρ_iが時間に依存しないことと、
剛体の回転の角速度をωとすると、

$$\dot{x}_i = -\rho_i \omega \sin\varphi_i \qquad \dot{y}_i = \rho_i \omega \cos\varphi_i$$

したがって、

慣性モーメント

$$L_z = \left(\sum_i m_i {\rho_i}^2 \right) \omega = I\omega \qquad \boxed{I = \sum_i m_i {\rho_i}^2}$$

角運動量保存則の式に代入すると、

$$I\frac{d\omega}{dt} = N_z$$

となる。

等角加速度運動

N$_z$=一定 の時、ωの時間微分も一定となる。
すなわち、等各加速度運動となる。

$$I\frac{d\omega}{dt}=N_z$$

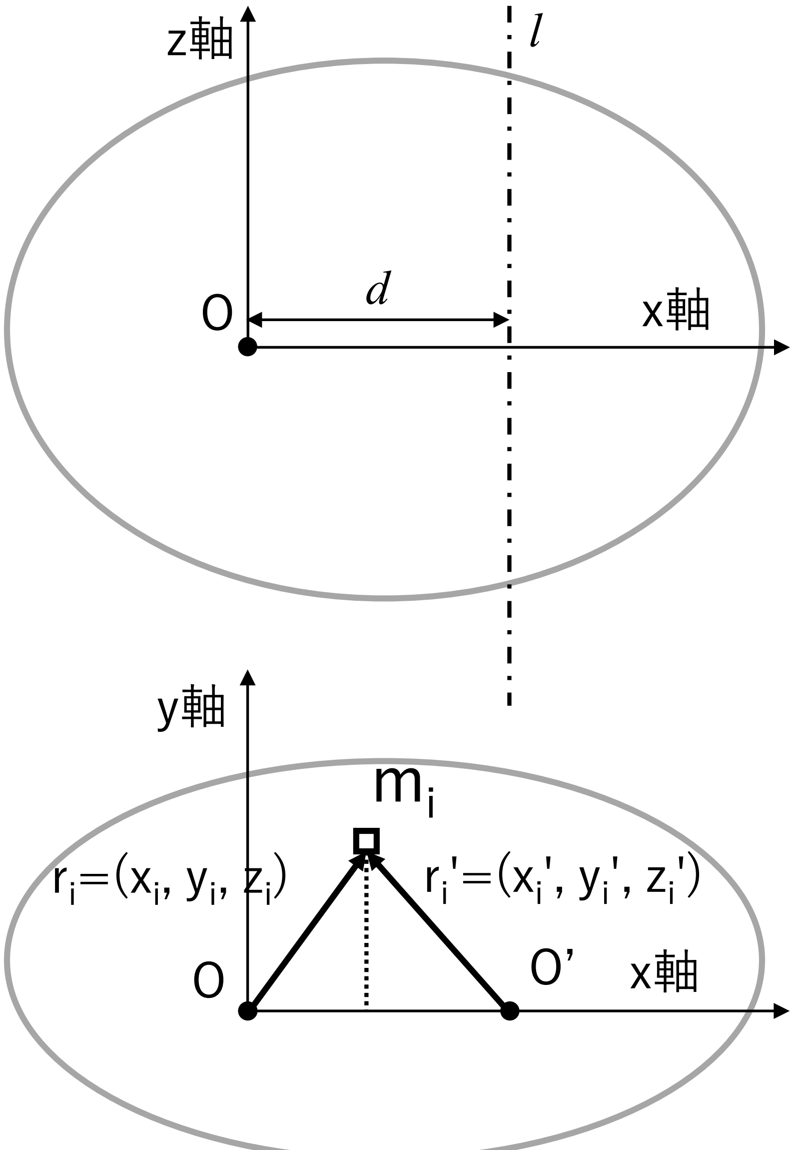
を時間で積分すると、

$$\omega=\frac{N_z}{I}t+\omega_0$$

回転角θは、もう一度積分して、

$$\theta=\frac{N_z}{2I}t^2+\omega_0 t+\theta_0$$

慣性モーメントの性質



剛体の質量：M
剛体の重心：O
z軸回りの慣性モーメント：I_0
l回りの慣性モーメント：I

$$\boxed{I = I_0 + Md^2}$$

z軸の周りの慣性モーメントI_0は、

$$I_0 = \sum_i m_i {\rho_i}^2$$

z軸に平行な直線l回りの慣性モーメントは

$$I = \sum_i m_i {\rho_i}'^2$$

ここで、

$${\rho_i}^2 - {x_i}^2 = {\rho_i}'^2 - (d - x_i)^2$$

$$\Leftrightarrow \rho_i{}'^2 = {\rho_i}^2 - 2dx_i + d^2$$

よって、

$$I = \sum_i m_i \left({\rho_i}^2 - 2dx_i + d^2 \right)$$

$$= I_0 - 2d \sum_i m_i x_i + Md^2$$

ここで、原点Oが重心であることに注意すると、

$$\sum_i m_i x_i = 0$$ であり、

$$I = I_0 + Md^2$$