第 7 回講義：平均値の定理と不定形の極限について（教科書 1.7）．

• **連続関数に対する中間値の定理：**$y = f(x)$ を閉区間 $[a, b]$ で定義された連続関数とする．もし実数 c が条件 $f(a) < c < f(b)$ または $f(b) < c < f(a)$ を満たせば，開区間 (a, b) に $f(x) = c$ となる x が在る [1]．

• 例．n が奇数のとき，実数係数の n 次方程式 $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ は実数解を少なくとも 1 つ持つ．

証明：$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ を x の関数と見る．$|x|$ が大きいときに $f(x)$ の振舞を調べるため

$$f(x) = x^n\left(1 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n}\right)$$

と変形する．n が奇数なので，a が絶対値が十分大きい負の数のとき $f(a) < 0$ であり，b が絶対値が十分大きい正の数のとき $f(b) > 0$ である．よって中間値の定理より $f(c) = 0$ となる c が a と b の間のどこかにある．□

• **（Rolle の定理）：**$f(x)$：$[a, b]$ で連続かつ (a, b) で微分可能で $f(a) = f(b) \Longrightarrow f'(c) = 0$ となる $c \in (a, b)$ が在る．

証明：関数 $f(x)$ が定数関数なら結論は明らかだから，定数関数でないときだけを考えればいい．このとき，ある $c \in (a, b)$ において $f(x)$ は最大値または最小値 $(\neq f(a))$ が存在する．もし $f(x)$ が $x = c$ において最大値をとれば $f(c) \geq f(x)$ $(\forall x \in [a, b])$ だから

$$\begin{aligned} x > c \quad &\Rightarrow \quad \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \\ x < c \quad &\Rightarrow \quad \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \end{aligned}$$

で $f(x)$ は微分可能だから $f'c) \leq 0$ と $f'(c) \geq 0$ が同時に成り立つ．従って $f'(c) = 0$ であることがわかる．$f(x)$ が $x = c$ において最小値をとる場合も同様に考えて $f'(c) = 0$ が導かれる．□

• **（平均値の定理）：**$f(x)$：$[a, b]$ で連続かつ (a, b) で微分可能 $\Longrightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ となる $c \in (a, b)$ が在る．

証明：$F(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)$ とおくと $F(a) = F(b) = 0$ である．これに Rolle の定理を適用すればよい．□

• 応用例 1．微分可能関数の導関数の符号と増減．グラフ描画.

（定理）$f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) であるような区間で関数 $f(x)$ は狭義単調増加 (resp. 狭義単調減少) である．

証明：平均値の定理により $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ となる $c \in (a, b)$ が在るが．$f'(c) > 0$ だから $f(b) - f(a) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f'(c)(b - a) > 0$ である．□

この定理を使って関数のグラフ描画における増減表を書くことができる．

• 関数の増減は f' の符号からわかる．グラフの凹凸は f'' の符号からわかる．練習として

$$f(x) = e^{-x}(x^2 - 2x)$$

[1]（中間値の定理の証明概略）区間 $[a, b]$ の中点を x_1 とする．もし $f(x_1) = c$ なら終了．もし $c < f(x_1)$ なら $x_2 = \frac{x_1+b}{2}$ とし，$f(x_1) < c$ なら $x_2 = \frac{a+x_1}{2}$ とする．この操作を繰り返す．途中で終了すれば $f(x) = c$ となる x が終了点である．終了しなければ，$[a, b]$ に含まれる区間の列 $\{[x_n, x_{n+1}]\}_{n=1}^{\infty}$ で，$[x_{n+1}, x_{n+2}] \subset [x_n, x_{n+1}]$, 端点を一つ共有し，長さが前の半分になっていくものを得る．この「区間列の極限」は点 $x \in (a, b)$ で $f(x) = c$ となるものである．□

の増減と凹凸を調べてグラフを描く．

$$f'(x) = -e^{-x}(x^2 - 4x + 2)\ ,\ f''(x) = e^{-x}(x^2 - 6x + 6)$$

だから $f'(x) = 0$ となるのは $x = 2 \pm \sqrt{2}$, $f''(x) = 0$ となるのは $x = 3 \pm \sqrt{3}$ である．$2 - \sqrt{2} < 3 - \sqrt{3} < 2 + \sqrt{2} < 3 + \sqrt{3}$ である．

グラフを描くときにおさえるべき 4 つの重要ポイント：増減．極大値と極大値．凹凸．極限．

• 応用例 2. $y = \sqrt{x}$ に平均値の定理を適用して不等式

$$3 + \frac{3}{19} < \sqrt{10} < 3 + \frac{1}{6}$$

を示す．実際 $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ だから平均値の定理より $\sqrt{10} - 3 = \dfrac{1}{2\sqrt{c}}$, $(9 < c < 10)$ である．y' は単調減少だから $\sqrt{10} - 3$ は $\leq \dfrac{1}{2 \cdot 3}$ であり，$\geq \dfrac{1}{2\sqrt{10}}$ である．これから $\sqrt{10}$ の評価を得る．

• **（Cauchy の平均値の定理）：** $f(x)$, $g(x)$ は $[a, b]$ において連続，(a, b) において微分可能．(a, b) において $g'(x) \neq 0$ と仮定する．$\Longrightarrow$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

となる $c \in (a, b)$ が在る．

証明：

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)) - f(a)$$

とおくと $F(a) = F(b) = 0$ である．これに Rolle の定理を適用する． □

• Cauchy の平均値の定理の幾何的意味．平面曲線 $\Phi(t) := (g(t), f(t))$（運動する点）を考えると $(g(c), t(c))$ における速度ベクトルは $(g'(c), f'(c))$ である．ある $c \in (a, b)$ をとると，速度ベクトル $(g'(c), f'(c))$ が曲線の端点を結ぶ直線と平行になることを主張している．

注意：Cauchy の平均値の定理は，(a, b) 上で $g'(x) \neq 0$ という仮定なしでは成り立たない例（仮定を落としたときの反例）がある．

反例：$g(t) = t^3$, $f(t) = t^2$ $(t \in [-1, 1])$．曲線 $(g(t), f(t))$ は $t = -1$ のとき $(-1, 1)$, $t = 0$ のとき $(0, 0)$, $t = 1$ のとき $(1, 1)$ を通る曲線で端点を結ぶ直線の傾きは 0 だが，曲線上のどこをとっても傾き 0 の接線は存在しない．この例では $g'(0) = 0$ である．

• 課題：

1. 教科書の問 7.1.

2. (1) 中間値の定理を用いて奇数次の方程式は実数解を少なくとも一つ持つことを示せ．

(2) Rolle の定理を用いて，方程式 $x^5 + 3x + 3 = 0$ は実数解をただ 1 つしか持たないことを示せ．

(2) のヒント：背理法．もし実数解が 2 つあったら，2 つの解の間で関数 $x^5 + 3x + 3$ は増加から減少に転ずるか，またはその逆が成り立つはずである．すなわち導関数 $5x^4 + 3$ が値 0 をとる点が 2 つの解の間にあるはずである．そのようなことは可能だろうか？