秋第一回課題解答例

1. $\tan x$ の 0 を中心とするテイラー展開を x^7 の項まで求める．方針：$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\sin x}{1-(1-\cos x)} = \sin x\{1+(1-\cos x)+(1-\cos x)^2+\cdots\}$ に $\sin x = x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}-\dfrac{x^7}{5040}+\ldots$, $\cos x = 1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}-\dfrac{x^6}{720}+\cdots$ を代入する．代入して展開するとき，x の冪が 7 以下となる組み合わせが全部出てくるだけの項数を取らないといけない．講義資料の最後の例では，x の冪が 5 以下となる組み合わせが全部出てくるだけの項数を取っていることに注意する．

$$
\begin{aligned}
&\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{1-(1-\cos x)} \\
&= \sin x\{1+(1-\cos x)+(1-\cos x)^2+\cdots\} \\
&= \left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}\cdots\right) \\
&\quad \times\left\{1+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^6}{720}-\cdots\right)+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+...\right)^2+\left(\frac{x^2}{2}-\cdots\right)^3+\cdots\right\} \\
&= \left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}\cdots\right)\left\{1+\frac{x^2}{2}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{24}\right)x^4+\left(\frac{1}{720}-\frac{1}{24}+\frac{1}{8}\right)x^6+\cdots\right\} \\
&= x+\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)x^3+\left(\frac{1}{120}-\frac{1}{12}+\frac{5}{24}\right)x^5+\left(-\frac{1}{5040}+\frac{1}{240}-\frac{5}{144}-\frac{29}{720}+\frac{1}{8}\right)x^7\cdots \\
&= x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\cdots
\end{aligned}
$$

講義資料にも書いた通り，$\tan x$ のテイラー級数の収束半径は $\frac{\pi}{2}$ である．すなわち $|x|<\frac{\pi}{2}$ で収束，$|x|>\frac{\pi}{2}$ で発散である．理由：実際，まず $1-\cos x$ に関して等比級数の和の公式を使ったから，それが収束する範囲は $|1-\cos x|<1$ である．これを満たす x の範囲は $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ である．よって $\tan x$ の 0 を中心とするテイラー展開の収束半径は $\frac{\pi}{2}$ である．

2. $\sqrt{5}$ の近似計算．$5=4+1$ と分解して $(4+1)^{\frac{1}{2}}=2(1+\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$ に一般二項定理を適用する．

$$
\begin{aligned}
\sqrt{5} &= (4+1)^{\frac{1}{2}} = 2\left(1+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\approx 2\left\{1+\frac{1}{2}\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{4}\right)^3\right\} \\
&= 2\left(1+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^{10}}\right) \\
&= \frac{1145}{512} = 2.2363...
\end{aligned}
$$

2.2363 を近似値とすると $(2.2363)^2=5.0010103769$ である．2.236 を近似値とすると $(2.236)^2=4.999696$ である．よって $2.236<\sqrt{5}<2.2363$ である．

コメント：$(1+1/4)^{1/2}$ を一般二項定理で展開すると $(1/4)$ のべきが大きくなると正の係数と負の係数が交互に現れ，それらの絶対値は狭義単調減少してどんどん 0 に近づく．従って二項定理を打ち切ると奇数項で打ち切ると $\sqrt{5}$ より大きく，偶数項で打ち切ると $\sqrt{5}$ より小さい．$(1/4)^3$ の項で打ち切ると $\sqrt{5}$ より大きい（二乗すると $5.001...>5$）のはそのためである．$(1/4)^3$ で打ち切って得られる $\frac{1145}{512}$ を小数展開したものを 2.23 で打ち切ると．大きすぎるのを少し減らした形になって，$\sqrt{5}$ の近似値になっている．

3. 教科書の問 8.4. 小数第三位までの $\sqrt[3]{9}$ の近似計算．$9=8+1=2^3+1=2^3(1+1/8)$ と書き換えて一般二項定理を使う．

$$
\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{2^3+1} = 2\left(1+\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = 2\left(1+\frac{1}{3}\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{-2}{3}\left(\frac{1}{8}\right)^2+\cdots\right) = 2.080\ldots .
$$