

2024.11.25 力学Ⅱ 中間試験問題 担当：伊藤孝寛、原田俊太

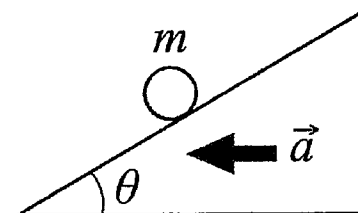
注意事項

- 教科書、ノート、配布資料等の持ち込みは認めない。
- 解答用紙2枚ともに授業科目名(力学Ⅱ)、教員名(伊藤孝寛)、名前、学生番号、所属(工1-マテなど)を記入すること。
- 問題番号を必ず記入し、解答部分には下線などを引き採点の際確認がしやすいようにすること。
- 解答用紙の裏も使用してよいが、その場合は裏にも解答があることを表面に明記すること。
- 解答を得た道筋を明確に記載していない場合は点数を与えない。
- 30分以内の遅刻は受験を認める。なお受験者は試験終了まで退室を許可しない。

(＊問題文にない物理量を用いる必要がある場合は定義した上で用いること。)

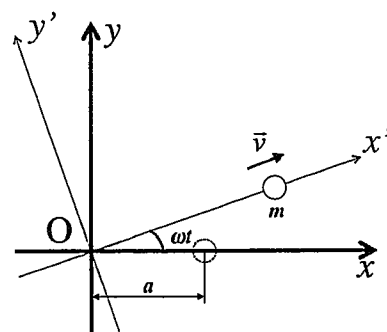
問1. 傾斜角 θ [rad] のなめらかな斜面を加速度 \vec{a} [m/s²] で図の矢印方向に動かしたとき、質量 m [kg] の質点が斜面上に対して静止していた。次の問いに答えよ。ただし、鉛直方向下向きにかかる重力加速度を g [m/s²] とする。

- (1) 斜面と共に動く並進座標系から見たとき、水平方向と鉛直方向の力のつり合いの式をそれぞれ答えよ。
- (2) \vec{a} の大きさを求めよ。



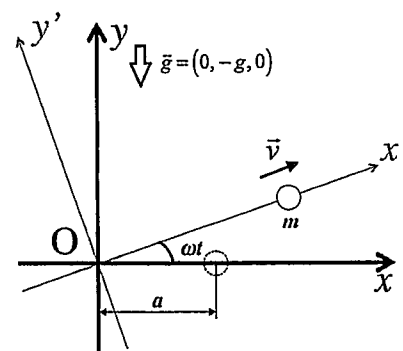
問2. 右図のように、質量 m [kg] の質点が x 軸になめらかに束縛された状態で、水平面内において点 O のまわりを (z 軸を回転軸として) 一定の角速度 ω [rad/s] で回転するとき、質点の運動を回転座標系において考えることで、次の問いに答えよ。ただし、 $t = 0$ [s] において質点は $x = a$ [m] に静止していたものとする。

- (1) この運動において、質点が受ける力のベクトルを模式図に作図し、それぞれの力の名称を答えよ。
- (2) 質点の運動方程式を x' 軸、 y' 軸方向に分けてそれぞれ答えよ。
- (3) 質点の位置 x' を時刻 t の関数として表せ。
- (4) 時刻 t において質点が x 軸から受ける抗力 N を求めよ。



次に、質量 m [kg] の質点が x 軸になめらかに束縛された状態で、鉛直面内において点 O のまわりを (z 軸を回転軸として) 一定の角速度 ω [rad/s] で回転するとき、質点の運動は回転座標系において考えることで、次の問いに答えよ。ただし、 $t = 0$ [s] において質点は $x = a$ [m] に静止していたものとする。また、鉛直方向を y 軸として、 y 軸下向きにかかる重力加速度を g [m/s²] とする。

- (5) 質点の運動方程式を x' 軸、 y' 軸方向に分けてそれぞれ答えよ。
- (6) 質点の位置 x' を時刻 t の関数として表せ。



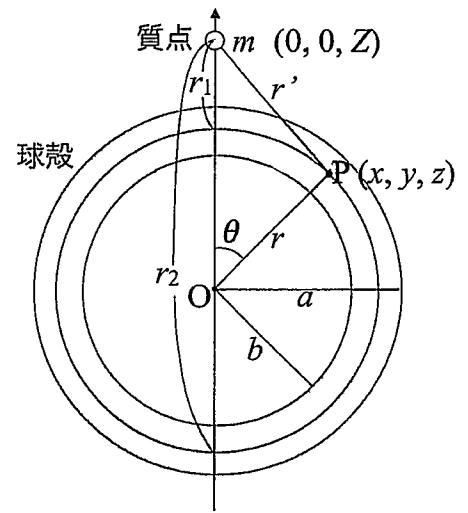
問3. 内半径 b [m], 外半径 a [m], 質量 $\triangle M$ [kg] の一様な密度 ρ [kg/m³] をもつ球殻から, 球殻の中心 O を通る z 軸上の点 $(0, 0, Z)$ にある質量 m [kg] の質点に作用する万有引力を求める以下の問いに答えよ. ただし, 万有引力定数は G [N m²/kg²] とする.

- (1) 球殻上の点 $P(x, y, z)$ における微小領域 dv [m³] が質点から受ける万有引力の z 成分 dF_z [N] を G, m, ρ, Z, z, r', dv を用いて書け. ただし, 点 P と質点の距離を r' [m] とする.
- (2) 球全体の積分は極座標 (r, θ, φ) を用いて以下の式で与えられる.

$$F_z = -Gm\rho \int \frac{Z - r\cos\theta}{r'^3} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

この式の θ 項を消して F_z を得るための積分を r', r および φ に対する積分として書け. ただし, r', r および φ に対する積分範囲は示さなくても良い.

- (3) $\theta = 0$ および $\theta = \pi$ における r' の値をそれぞれ r_1 および r_2 とするとき, F_z を得るための積分を r および φ に対する積分として書け. ただし, r および φ に対する積分範囲は示さなくても良い.
- (4) 球殻外に質点が存在するとき ($Z > r > a$), (3) の積分から質点が球殻から受ける万有引力の z 成分 F_z を求めよ.
- (5) 球殻内に質点が存在するとき ($Z < b < r$), (3) の積分から質点が球殻から受ける万有引力の z 成分 F_z を求めよ.



問4. 質量 m [kg] の質点の運動における角運動量 \vec{L} および力のモーメント \vec{N} に関する以下の問いに答えよ.

- (1) xyz 座標系において位置 (x, y, z) にある質点が, 原点 O を中心とした回転運動をする際に受ける角運動量の各成分を L_x, L_y, L_z とする. L_x, L_y, L_z を座標 x, y, z を用いて表せ. ただし, 外積は $(A \times B)_x$ のような一般式ではなく具体的に求め, その x, y, z 成分として表すこと.

次に, 図のように鉛直面内 (xy 平面内) で z 軸を回転軸として微小振動をする単振り子を考える. 時刻 t [s] における振れ角を θ [rad] とするとき, 以下の問いに答えよ. ただし, 振り子の糸の長さは l [m], 振り子の端点に取り付けられた質点の質量は m [kg], 鉛直下向きにかかる重力加速度は g [m/s²] とする.

- (2) 時刻 t において質点を受ける角運動量 L_z を, m, l, θ および t を用いて表わせ.
- (3) 時刻 t において質点を受ける力のモーメント N_z を, 反時計回りを正として m, l, θ および g を用いて表わせ.
- (4) 回転の運動方程式を用いて

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin\theta$$

となることを証明せよ.

