秋学期第十二回課題解答例

1（教科書の問 17.1）. $x = au + bv$, $y = bu + av$ (a, b 定数で $a^2 - b^2 = 1$) によって変数変換すると：チェインルールより

$$\begin{aligned}(z_u)^2 - (z_v)^2 &= (z_x x_u + z_y y_u)^2 - (z_x x_v + z_y y_v)^2 \\ &= (az_x + bz_y)^2 - (bz_x + az_y)^2 \\ &= (a^2 - b^2)z_x^2 + (2ab - 2ab)z_x z_y + (b^2 - a^2)z_y^2 \\ &= (z_x)^2 - (z_y)^2 \ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_{uu} - z_{vv} &= (az_x + bz_y)_u - (bz_x + az_y)_v \\ &= (a^2 z_{xx} + abz_{xy} + baz_{yx} + b^2 z_{yy}) - (b^2 z_{xx} + baz_{xy} + abz_{yx} + b^2 z_{yy}) \\ &= (a^2 - b^2)(z_{xx} - z_{yy}) \\ &= z_{xx} - z_{yy} \ .\end{aligned}$$

1（教科書の問 17.2）. $D : x + y > 0,\ x - y > 0$ 上の C^2 級関数 $z = f(x, y)$ を $x = r\cosh t$, $y = y\sinh t$ によって変数変換すると：チェインルールより

(1) $$z_r = z_x x_r + z_y y_r = z_x \cosh t + z_y \sinh t$$

であり,

(2) $$z_t = z_x x_t + z_y y_t = z_x r\sinh t + z_y r\cosh t$$

より

(3) $$\frac{z_t}{r} = z_x \sinh t + z_y \cosh t$$

である．よって (1)(3) から

$$\begin{aligned}(z_r)^2 - \frac{1}{r^2}(z_t)^2 &= (z_x^2\cosh^2 t + 2z_x z_y \cosh t\sinh t + z_y^2 \sinh^2 t) - (z_x^2 \sinh^2 t - 2z_x z_y \cosh t \sinh t + z_y^2 \cosh^2 t) \\ &= z_x^2(\cosh^2 t - \sinh^2 t) - z_y^2(\cosh^2 t - \sinh^2 t) \\ &= z_x^2 - z_y^2 \ .\end{aligned}$$

チェインルールを (1) に適用すると

(4) $$\begin{aligned}z_{rr} &= (z_{xx}x_r + z_{xy}y_r)\cosh t + (z_{yx}x_r + z_{yy}y_r)\sinh t \\ &= z_{xx}\cosh^2 t + 2z_{xy}\cosh t\sinh t + z_{yy}\sinh^2 t \ .\end{aligned}$$

チェインルールを (2) に適用すると

(5) $$\begin{aligned}z_{tt} &= (z_{xx} r x_t + z_{xy} r y_t) r\sinh t + z_x r\cosh t + (z_{yx}x_t + z_{yy}y_t) r\cosh t + z_y r\sinh t \\ &= z_{xx}(r\sinh t)^2 + 2z_{xy}(r\cosh t)(r\sinh t) + z_{yy}(r\cosh t)^2 + z_x r\cosh t + z_y r\sinh t\end{aligned}$$

(3)(4)(5) から

$$\begin{aligned}z_{rr} + \frac{1}{r}z_r - \frac{1}{r^2}r_{tt} &= z_{xx}\cosh^2 t + 2z_{xy}\cosh t\sinh t + z_{yy}\sinh^2 t \\ &\quad + \frac{1}{r}(z_x\cosh t + z_y\sinh t) \\ &\quad - \frac{1}{r^2}(z_{xx}(r\sinh t)^2 + 2z_{xy}(r\cosh t)(r\sinh t) + z_{yy}(r\cosh t)^2 + z_x r\cosh t + z_y r\sinh t) \\ &= z_{xx}(\cosh^2 t - \sinh^2 t) - z_{yy}(\cosh^2 t - \sinh^2 t) \\ &= z_{xx} - z_{yy} \ .\end{aligned}$$

2（教科書の問 22.2）. (1) 極座標に変換すると問題の積分は $2\pi\displaystyle\int_0^a r^{2n}rdr = 2\pi\int_0^a r^{2n}rdr = 2\pi\left[\frac{r^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^a = \frac{2\pi a^{2n+2}}{2n+2} = \frac{\pi a^{2n+2}}{n+1}$.

(2) 極座標に変換すると問題の積分は $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^4\theta d\theta\int_0^a r^4rdr$ となる．部分積分により $I_n = \displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^n\theta d\theta$ は漸化式 $I_n = \dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $I_0 = 2\pi$, $I_1 = 0$ を満たす（$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta d\theta$ と同じ漸化式で，初期条件だけが違う）．実際，$I_n = \displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^n\theta d\theta = \int_0^{2\pi}\cos^{n-1}\theta(\sin\theta)'\theta = [\cos^{n-1}\theta\sin\theta]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}(n-1)\cos^{n-2}\theta(\cos\theta)'(\sin\theta)d\theta = \int_0^{2\pi}(n-1)\cos^{n-2}\sin^2\theta d\theta = \int_0^{2\pi}(n-1)\cos^{n-2}(1-\cos^2\theta)d\theta = (n-1)(I_{n-2}-I_n)$ であるから，$I_n = \dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$ である．よって $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^4\theta d\theta = \frac{3}{4}\frac{1}{2}I_0 = \frac{3\pi}{4}$ である．一方，$\displaystyle\int_0^a r^5dr = \frac{a^6}{6}$ である．よって問題の積分は $\dfrac{3\pi}{4}\times\dfrac{a^6}{6} = \dfrac{\pi a^6}{8}$ である．

(3) 極座標に変換すると問題の積分は $2\pi\displaystyle\int_1^2\frac{rdr}{r^2} = 2\pi\int_1^2\frac{dr}{r} = 2\pi[\log r]_1^2 = 2\pi\log 2$.

(4) 第一象限における積分だから，極座標に変換すると問題の積分は $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta d\theta\int_0^a r^2e^{-r^2}rdr$ となる．$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta d\theta = \left[-\frac{1}{4}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$, $\displaystyle\int_0^a r^3e^{-r^2}dr \overset{r^2=t}{=} \frac{1}{2}\int_0^{a^2}te^{-t}dt = \frac{1}{2}\left([-te^{-t}]_0^{a^2} + \int_0^{a^2}e^{-t}dt\right) = \frac{1}{2}\{1-(1+a^2)e^{-a^2}\}$ だから，結局問題の積分は $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\{1-(1+a^2)e^{-a^2}\} = \dfrac{1}{4}\{1-(1+a^2)e^{-a^2}\}$ である．

3. 不等式 $x^2+y^2 \leq 1$（resp. $y^2+z^2 \leq 1$）で定義される立体は円柱である．この円柱を $y =$ 一定という平面で切ったときの切り口を xz 平面に射影する（z 方向の光を当てて xz 平面をスクリーンだと思った時の影を考える）と，xz 平面の領域ができる．その領域は不等式 $|x| \leq \sqrt{1-y^2}$（resp. $|z| \leq \sqrt{1-y^2}$）によって定められる帯状領域である．よって不等式 $x^2+y^2 \leq 1$ と $y^2+z^2 \leq 1$ によって定まる立体を $y =$ 一定という平面で切ったときの切り口を xz 平面に射影した時に現れる xz 平面上の図形は二本の不等式

$$|x| \leq \sqrt{1-y^2}\ ,\ |z| \leq \sqrt{1-y^2}$$

によって与えられる図形である．これは，1 辺の長さが $2\sqrt{1-y^2}$ の正方形を表している．その面積は $4(1-y^2)$ である．一方，y の動く範囲は $[-1,1]$ である．したがって問題の体積は

$$\int_{-1}^1 4(1-y^2)dy = 8\int_0^1(1-y^2)dy = 8\left[y-\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = 8\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{3}\ .$$

（注意）問題の立体 $x^2+y^2 \leq 1, y^2+z^2 \leq 1$ を $x =$ 一定という平面で切ったときの yz 平面への影を記述します．ここで言葉の確認：切り口を射影するのであって，立体全体を射影するのではありません．切り口の射影と立体全体の射影は違います．第一の式から $y^2 \leq 1-x^2$ という yz 平面の領域が出てきますが，これは z 軸を中心とする幅 $2\sqrt{1-x^2}$ の帯です．第二の式からは原点中心半径 1 の円盤（単位円盤）が出てきます．従って $x =$ 一定という平面で問題の立体を切った切り口は，これらの共通部分，すなわち単位円盤を z 軸中心の幅 $2\sqrt{1-x^2}$ の帯で切りとった領域です．$x = \pm 1$ のときは z 軸の区間 $[-1,1]$ に潰れてしまい，$x = 0$ のときは単位円盤全体になります．体積を計算するには，まず．この領域の面積

$$4\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-y^2}dy = 2x\sqrt{1-x^2} + 2\arccos x$$

を 0 から 1 まで x について積分して 2 倍します（-1 $\leq x \leq 0$ と $0 \leq x \leq 1$ で立体は yz 平面に関して対称なので）．すると $2\times\{(2/3)+2\} = 16/3$ という結果になり，同じ答えになります（当然！）．ただ，計算はご覧のように大変です．

補足説明.

(1)
$$\int_0^a r^n e^{-r^2} dr$$

という形の積分（実際には $n=3$ の場合が現れる）について.

まず $r^2 = t$ という**置換積分**から始めるのが有効です．ではやってみましょう．$r^2 = t$ とおくと $2rdr = dt$, したがって

$$dr = \frac{1}{2}\frac{dt}{r} = \frac{1}{2}\frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}}$$

となります．対応する t に関する積分区間は $[0, a^2]$ であることに注意して，$r = t^{\frac{1}{2}}$, $dr = \frac{1}{2}\frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}}$ を代入すれば，$\displaystyle\int_0^{a^2} t^{\frac{n}{2}} e^{-t} \frac{dt}{2t^{\frac{1}{2}}}$，すなわち $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{a^2} t^{\frac{n-1}{2}} e^{-t} dt$ となります．したがって (1) で $n \geq 1$ に限れば

$$\int_0^b t^{\frac{n}{2}} e^{-t} dt \quad (n \geq 0)$$

という形の積分が分かればいいことになります．$\displaystyle I_n = \int_0^b t^{\frac{n}{2}} e^{-t} dt$ とおくと

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^b t^{\frac{n}{2}} e^{-t} dt \\
&= \int_0^b t^{\frac{n}{2}} (-e^{-t})' dt \\
&= \left[t^{\frac{n}{2}} (-e^{-t}) \right]_0^b + \int_0^b \frac{n}{2} t^{\frac{n-1}{2}} e^{-t} dt \\
&= -b^{\frac{n}{2}} e^{-b} + \frac{n}{2} I_{n-1} \ .
\end{aligned}$$

こうして，部分積分によって漸化式が得られます.

$\displaystyle\int_0^a r^3 e^{-r^2} dr$ の場合は $r = t^2$ とおくと

$$\begin{aligned}
\int_0^a r^3 r^{-r} dr &= \frac{1}{2}\int_0^{a^2} t^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} e^{-t} dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{a^2} t e^{-t} dt \\
&= \frac{1}{2}\left\{ [-te^{-t}]_0^{a^2} + \int_0^{a^2} e^{-t} dt \right\} \\
&= \frac{1}{2}\{ -a^2 e^{-a^2} + [-e^{-t}]_0^{a^2} \} \\
&= \frac{1}{2}\{ 1 - e^{-a^2}(1 + a^2) \}
\end{aligned}$$

となります.

(1) で $n = 0$ の時，初等的に定積分 (1) を表すことはできません.

別法. 部分積分.

$$\begin{aligned}
\int_0^a r^3 e^{-r^2} dr &= -\frac{1}{2}\int_0^r r^2 (e^{-r^2})' dr \\
&= -\frac{1}{2}[r^2 e^{-r^2}]_0^a + \frac{1}{2}\int_0^a (2r) e^{-r^2} dr \\
&= -\frac{1}{2} a^2 e^{-a^2} - \frac{1}{2}\int_0^a (e^{-r^2})' dr \\
&= -\frac{1}{2} a^2 e^{-a^2} - \frac{1}{2}[e^{-r^2}]_0^a \\
&= \frac{1}{2}\{1 - e^{-a^2}(1 + a^2)\} \ .
\end{aligned}$$