p97 1, (1)

$$T(\vec{x}) = \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}}^{A} \vec{x} \ : \ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ に関する T の表現行列 B を求める.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

定理 5.2.1 $\Longrightarrow$

$$B = Q^{-1} A P$$

$$Q^{-1} = (-1)\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det Q} \cdot \tilde{Q}$$

$$\tilde{Q}_{ij} = (-1)^{i+j} |Q_{ji}|$$

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \boxed{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \boxed{\begin{bmatrix} 3 & 12 & 5 \\ 4 & 17 & 8 \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -36+34 & -15+16 \\ 2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \end{bmatrix} //$$

(2) $T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3.$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q^{-1} = (-1) \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = Q^{-1} A P = Q^{-1} \begin{bmatrix} 8 & 10 & -1 & 9 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 4 \\ -6 & -7 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$\blacksquare$

2. (1)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = P^{-1} A P$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \tilde{P} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -4 & -4 & -5 \\ 7 & 11 & 13 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -11 & -15 & -18 \\ 8 & 13 & 14 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad //$$

2. (2) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$B = P^{-1} A P$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 9 & 1 & 5 \\ -5 & 0 & -2 \end{bmatrix} \,/\!/$$

2. (3) $T(f(x)) = 2f'(x) + 3f(x) : \mathbb{R}[x]_2 \longrightarrow \mathbb{R}[x]_2$.

基底 $\{1, x, x^2\}$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

2. (4) 基底 $\{1+x, \quad x+x^2, \quad 1-2x^2\}$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = (-1)\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & +1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & +1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & +1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & -8 \\ 0 & 3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 8 \\ -4 & 7 & -16 \\ -2 & 2 & -5 \end{bmatrix} \quad //$$