秋学期第十一回課題解答例

22.1. (1) $2x+y=u,\ x+2y=v$ とおくと，$x=\dfrac{2}{3}u-\dfrac{1}{3}v,\ y=-\dfrac{1}{3}u+\dfrac{2}{3}v$ である．この一次変換によって (uv) 平面の積分領域 $E: 0\le u\le a, 0\le v\le a$ は，(xy) 平面の積分領域 D に写る．一次変換 $2x+y=u,\ x+2y=v$ によって (xy) 平面の積分領域 D は (uv) 平面の積分領域 $E: 0\le u\le a, 0\le v\le a$ に写る，と言っても同じである．一次変換 $x=\dfrac{2}{3}u-\dfrac{1}{3}v,\ y=-\dfrac{1}{3}u+\dfrac{2}{3}v$ による符号付き面積比 J は，$J=\det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}$ である．よって問題の積分は $V=\dfrac{1}{3}\iint_E uvdudv=\dfrac{1}{3}\int_0^a udu\int_0^a vdv=\dfrac{1}{3}\dfrac{a^2}{2}\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{a^4}{12}$.

(2) 対称性から，問題の積分は，(xy) 平面の領域 $D': x\ge 0,\ y\ge 0, x+y\le a$ における積分 $\iint_{D'}(x^2+y^2)dxdy$ の 4 倍である．$x-y=u,\ x+y=v$ とおくと，$x=\dfrac{1}{2}u+\dfrac{1}{2}v,\ y=-\dfrac{1}{2}u+\dfrac{1}{2}v$ である．この一次変換の符号付き面積比は $J=\det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}$ である．(xy) 平面の積分領域 D' は (uv) 平面の積分領域 $E': -y\le u\le y,\ 0\le y\le a$ に写る（(xy) 平面の点 $(a,0)$ は (uv) 平面の点 (a,a) に写り，(xy) 平面の点 $(0,a)$ は (uv) 平面の点 $(-a-a)$ に写る）．$x^2+y^2=\dfrac{1}{2}(u^2+v^2)$ だから，問題の積分は $V=4\times\dfrac{1}{2}\times\iint_{E'}\dfrac{u^2+v^2}{2}dudv=\int_0^a dv\int_{-v}^v(u^2+v^2)du=2\int_0^a dv\int_0^v(u^2+v^2)du=2\int_0^a dv\left[\dfrac{u^3}{3}+v^2u\right]_{u=0}^{u=v}=\dfrac{8}{3}\int_0^a v^3dv=\dfrac{8}{3}\left[\dfrac{v^4}{4}\right]_0^a=\dfrac{2a^4}{3}$.

(3) 戦略：一次変換をうまくとって $x+y$ を一つの文字に写す．そこで，$u=x-y,\ v=x+y$ とおくと，$x=\dfrac{1}{2}u+\dfrac{1}{2}v,\ y=-\dfrac{1}{2}u+\dfrac{1}{2}v$ である．この一次変換の符号付き面積比は $J=\det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}$ である．(xy) 平面の積分領域 $D: x\ge 0, y\ge 0, x+y\le 1$ は (uv) 平面の積分領域 $E: -v\le u\le v,\ 0\le v\le 1$ に写る（対応関係は uv 平面の $(0,0)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$ は xy 平面の $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ に対応する）．被積分関数は $\dfrac{1}{1+v^4}$ となって u によらないから，E を横線領域と思って先に u で積分する．すると問題の積分は $V=\dfrac{1}{2}\int_0^1 dv\int_{-v}^v\dfrac{du}{\sqrt{1+v^4}}=\dfrac{1}{2}\int_0^1\dfrac{2vdv}{\sqrt{1+v^4}}$ となるから $v^2=t$ とおくと $V=\dfrac{1}{2}\int_0^1\dfrac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$．$t=\sinh w$ とおくと $\sinh w=1$ となる w は $w=\log(1+\sqrt{2})$ だから $V=\dfrac{1}{2}\int_0^{\log(1+\sqrt{2})}\dfrac{\cosh wdw}{\sqrt{1+\sinh^2 w}}=\dfrac{1}{2}\int_0^{\log(1+\sqrt{2})}1dw=\dfrac{1}{2}\log(1+\sqrt{2})$.

双曲線関数が出てきたついでに（教科書の第十七章を自習してから問 17.1, 17.2 を解いてください）：

教科書の問 17.2 領域 $-x < y < x$ 上の C^2 級関数 $z = f(x,y)$ を $x = r\cosh t$, $y = r\sinh t$（ただし, $\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$, $\sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ である）によって (r,t) に座標変換するとき

$$
\begin{aligned}
(z_x)^2 - (z_y)^2 &= (z_r)^2 - \frac{1}{r^2}(z_t)^2 \\
z_{xx} - z_{yy} &= z_{rr} + \frac{1}{r}z_r - \frac{1}{r^2}z_{tt}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ただし，左辺では $z = z(x,y)$ であり，右辺では $z = z(u,v)$ であると考えている．：

（証明）以下の計算で双曲線関数の性質

$$
\begin{aligned}
(\cosh t)' &= \sinh t \\
(\sinh t)' &= \cosh t \\
\cosh^2 t - \sinh^2 t &= 1
\end{aligned}
$$

を使う．チェインルールより

$$
\begin{aligned}
z_r &= z_x x_r + z_y y_r = z_x \cosh t + z_y \sinh t \\
z_t &= z_x x_t + z_y y_t = z_x r\sinh t + z_y r\cosh t = r(z_x \sinh t + z_y \cosh t)
\end{aligned}
$$

だから

$$
(z_r)^2 - \frac{1}{r^2}(z_t)^2 = (z_x)^2(\cosh^2 t - \sinh^2 t) + (z_y)^2(\sinh^2 - \cos^2 t) = (z_x)^2 - (z_y)^2 \ .
$$

さらにチェインルールより

$$
\begin{aligned}
z_{rr} &= (z_{xx}x_r + z_{xy}y_r)r\cosh t + (z_{yx}x_r + z_{yy}y_r)r\sinh t \\
&= z_{xx}\cosh^2 t + 2z_{xy}\cosh t\sinh t + z_{yy}\sinh^2 t \\
z_{tt} &= (z_{xx}x_t + z_{xy}y_t)r\sinh t + z_x r\cosh t + (z_{yx}x_t + z_{yy}y_t)r\cosh t + z_y r\sinh t \\
&= r^2(z_{xx}\sinh^2 t + z_{yy}\cosh^2 t) + 2z_{xy}r^2\cosh t\sinh t + rz_r
\end{aligned}
$$

だから

$$
z_{xx} - z_{yy} = z_{rr} + \frac{1}{r}z_r - \frac{1}{r^2}z_{tt}
$$

である．

教科書の問 17.1 チェインルールの練習：C^2 級関数 $z = f(x,y)$ を，一次変換 $x = au + bv$, $y = bu + av$（ここで a, b は $a^2 - b^2 = 1$ を満たす定数）によって (u,v) の関数に変換するとき

$$
\begin{aligned}
(z_u)^2 - (z_v)^2 &= (z_x)^2 - (z_y)^2 \\
z_{uu} - z_{vv} &= z_{xx} - z_{yy}
\end{aligned}
$$

成り立つ．ただし，左辺では $z = z(u,v)$ であり，右辺では $z = z(x,y)$ であると考えている

（証明）チェインルールより $z_u = z_x x_u + z_y y_u = z_x a + z_y b$, $z_v = z_x x_v + z_y y_v = z_x b + z_y a$ なので $z_u^1 - z_v^2 = (az_x + bz_y)^2 - (bz_x + az_y)^2 = (a^2 - b^2)z_u^2 + (b^2 - a^2)z_y^2 = z_x^2 - z_y^2$ である．

　次に，再びチェインルールより $z_{uu} = (z_{xx}x_u + z_{xy}y_u)a + (z_{yx}x_u + z_{yy}y_u)b = z_{xx}a^2 + 2z_{xy}ab + z_{yy}b^2$, $z_{vv} = (z_{xx}x_v + z_{xy}y_v)b + (z_{yx}x_v + z_{yy}y_v)a = z_{xx}b^2 + 2z_{xy}ab + z_{yy}a^2$ なので $z_{uu} - z_{vv} = (a^2 - b^2)z_{xx} + (b^2 - a^2)z_{yy} = z_{xx} - z_{yy}$ である．