ガウスの法則

ガウス!

点電荷のつくる電場のイメージから，次のことは直感的に明らかである。

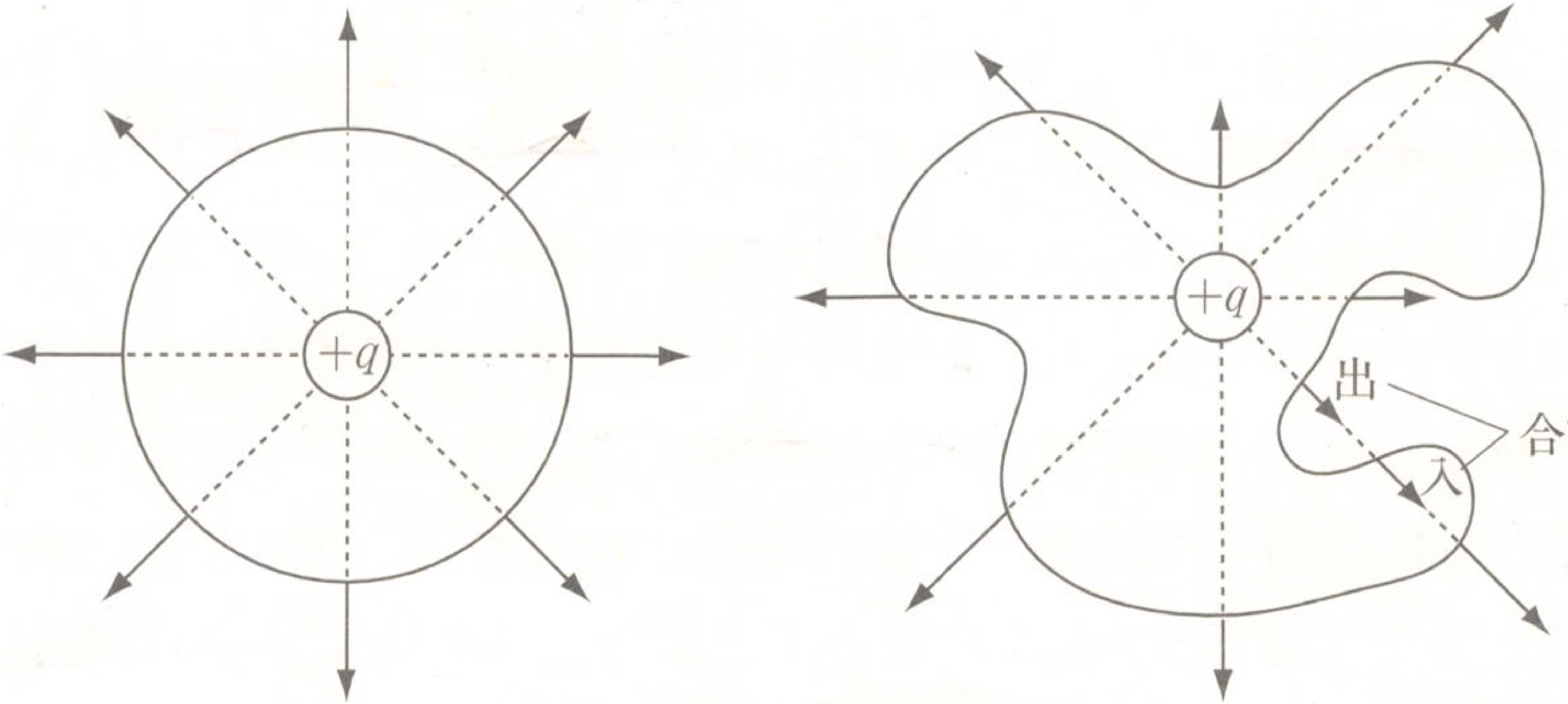


図2-7 電荷 q を囲む閉曲面から出る電気力線の本数は，閉曲面の形にかかわらずつねに q/ε_0

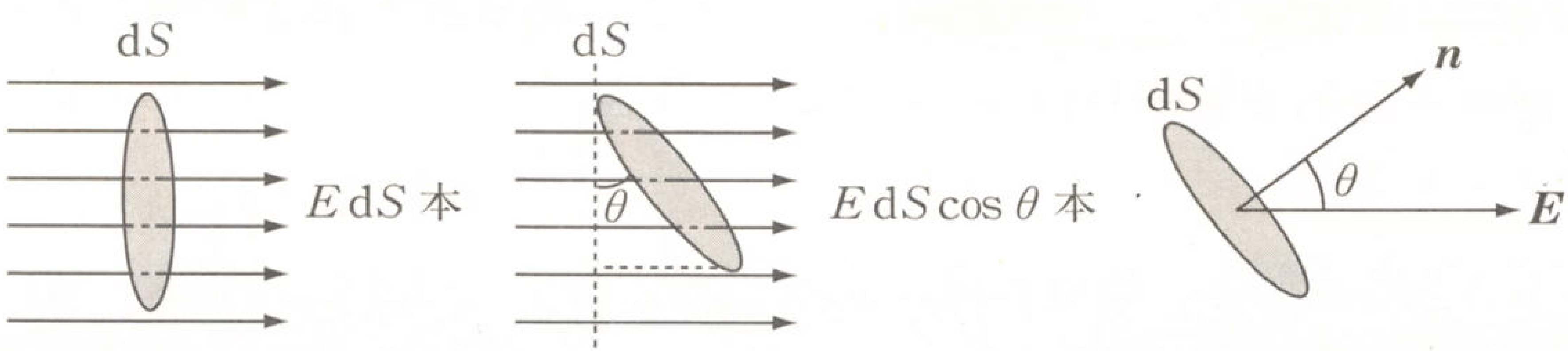
8 本出ている。　9 本出て 1 本入るから，けっきょく 8 本出ている。

点電荷を囲む球面を通って出ていく(入ってくる)電気力線の本数は，点電荷のもつ電気量 (÷ε_0) に等しい。

さらにいえば，点電荷を囲む面は，球面でなく，閉曲面であればどんな形でもよいことは明らかである(図 2-7)(もっといえば，点電荷でなくてもよい)。

ただし，直感的にはこれで十分であるが，この関係を式で表すときには，ちょっと注意しなければならない。

図2-8●面が斜めになっていると，電気力線が通過する実質的な面積は $\mathrm{d}S\cos\theta$ となる。すなわちその本数は $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$。



電気力線が面を直角に通過するときには，その本数は「電場(電気力線の密度)×面積」でよいが，斜めに通過するときには，図のように実質的な通過面積は $\mathrm{d}S\cos\theta$ となっている。つまり，面に対する単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を用いて，$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S(=E\,\mathrm{d}S\cos\theta)$ としなければならない。

これを式で書けば，　E×面積＝内部電荷/ε_0

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

—①

これを**ガウスの法則**という。　D×面積＝内部電荷　$\int_S \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}\,dS = q$

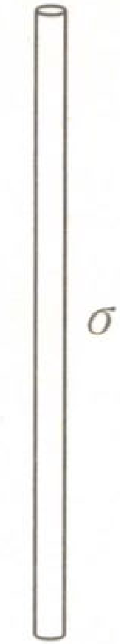
ここまでくると，式の形はクーロンの法則と似ても似つかないが，それでもこの式はクーロンの法則と同じことを主張している。つまり，クーロンの法則の成長した姿なのである。　→先に問へ P29

さて，次のステップに進むには，巻末の付録「やさしい数学の手引き」を熟読して頂かねばならない。大学の電磁気学の1つの大きな山場である。しかし，腰をすえて，これらの数学をいったん納得してしまえば，あとは形式的な慣れの問題となるだろう。たとえば，高校で微分の考え方を勉強したあと，その基本に帰らずとも，x^2 の微分係数を形式的に $2x$ とできるようなものである。

実習問題 2-1

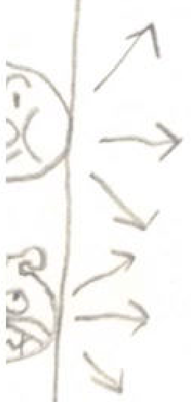
真空中の無限に伸びる直線の上に線密度 $\sigma(>0)$ の電荷が一様に分布している。このとき，この直線電荷はその周囲にどのような電場をつくるか。ただし，真空の誘電率を ε_0 とせよ。

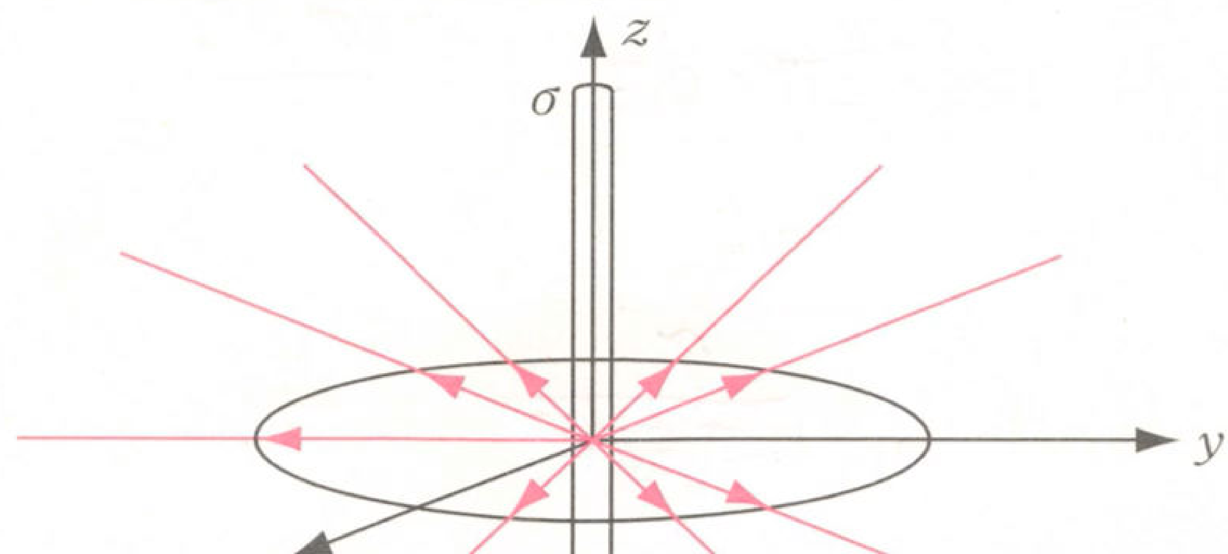
図2-14

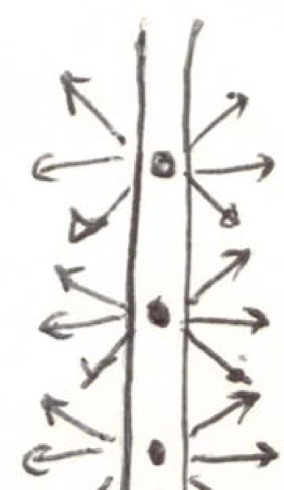


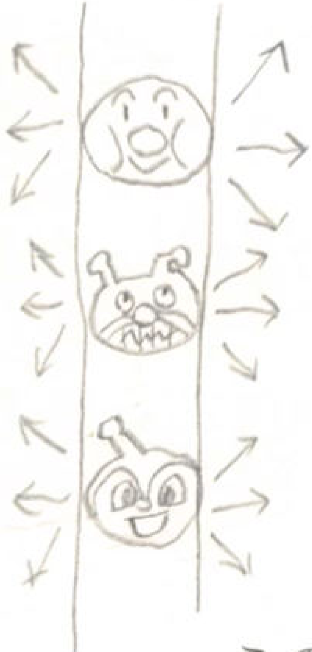
解答&解説 電荷の分布する直線を z 軸として，座標軸 x-y-z をとると，この直線電荷の周囲にできる電場は，その対称性から直感的に，x-y 平面上にあって，z 軸から放射状に放出していることが分かるであろう。

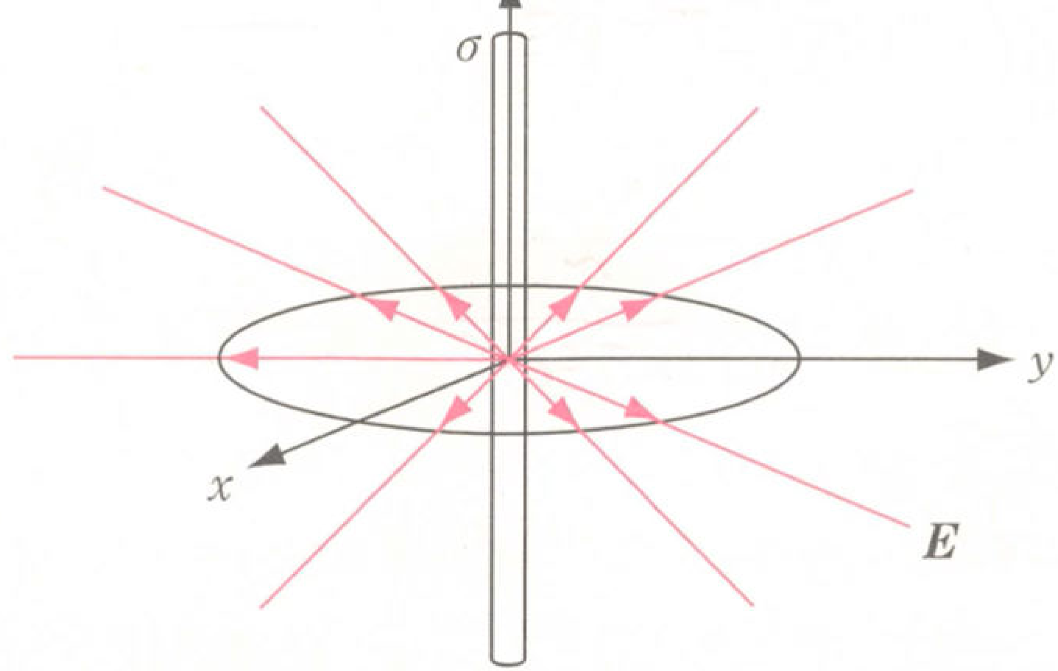
図2-15●電気力線は z 軸を中心に放射状に出る。

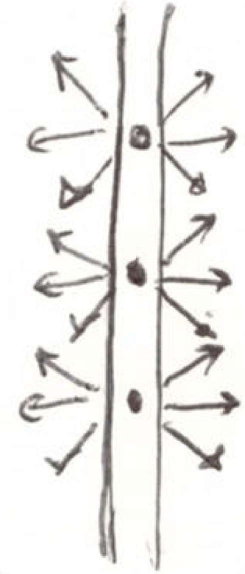






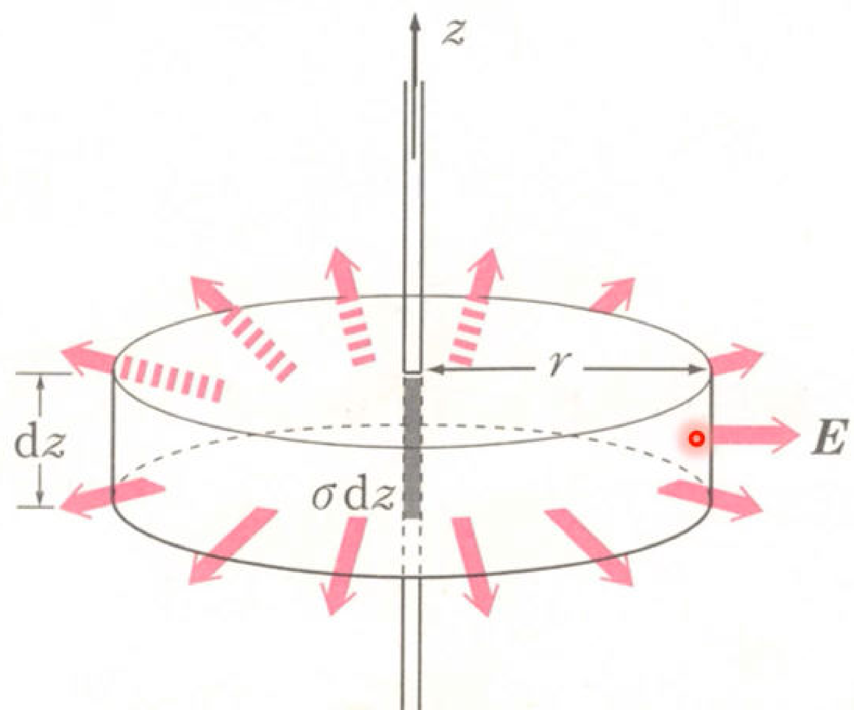






このような対称性があるときには，ガウスの法則を使って電場を求めるのがもっとも簡単である。

図2-16●半径 r，高さ dz の円筒にガウスの法則を適用する。



いま，図のように，z 軸方向に高さ dz で，z 軸を中心にした半径 r の円筒を考えよう。そうすると，この円筒の上面と下面からは電場は出ておらず，円筒の周囲のリングからは，どこも同じ大きさで，方向は円筒面に垂直な電場が出ているであろう。

また，この円筒の内部に存在する電気量は，いうまでもなく $\sigma \mathrm{d}z$ である。

P24上

以上のことから，この円筒で囲まれた閉曲面にガウスの法則を適用すれば，

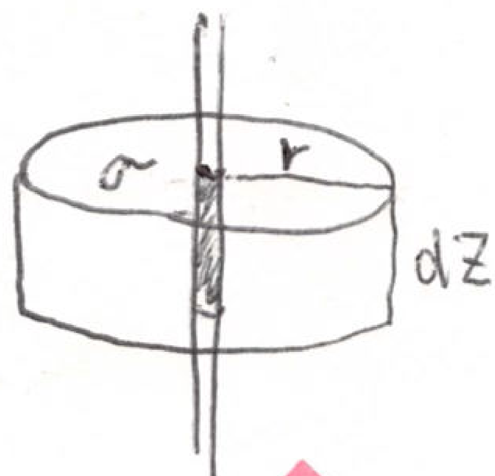
$= q/\varepsilon_0$

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = E \times \boxed{\text{(a)}\ 2\pi r\,dz}$$

└リングの部分の面積

であるから，

$$E \times \boxed{\text{(a)}\ 2\pi r\,dz} = \boxed{\text{(b)}\ \frac{\sigma\,dz}{\varepsilon_0}}$$



よって，

$$E = \boxed{\text{(c)}\ \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0 r}} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

はじめてこの解答を見られた方は，ガウスの法則を用いれば，電場は円筒の内部にある電荷だけで計算でき，外部の電荷の影響は受けないはずなのに，外側の電荷の形状をわざわざ上下に無限に伸びる直線としていることを奇妙に思われるかもしれない。しかし，たとえば，もし上下に伸びる電荷が直線ではなく曲がっていたり，あるいはまったくなかったりすれば，電場の z 成分が生じたり，半径 r の円周上の電場の大きさが違ってきたりして，仮定していた対称性が破れることになる。つまり，円筒の外側に上下に無限に伸びる電荷は，仮定した対称性を保証するためにぜひとも必要なのである。

これも 同

別解 この問題を，クーロンの法則の電場の式から求めることにしよう。

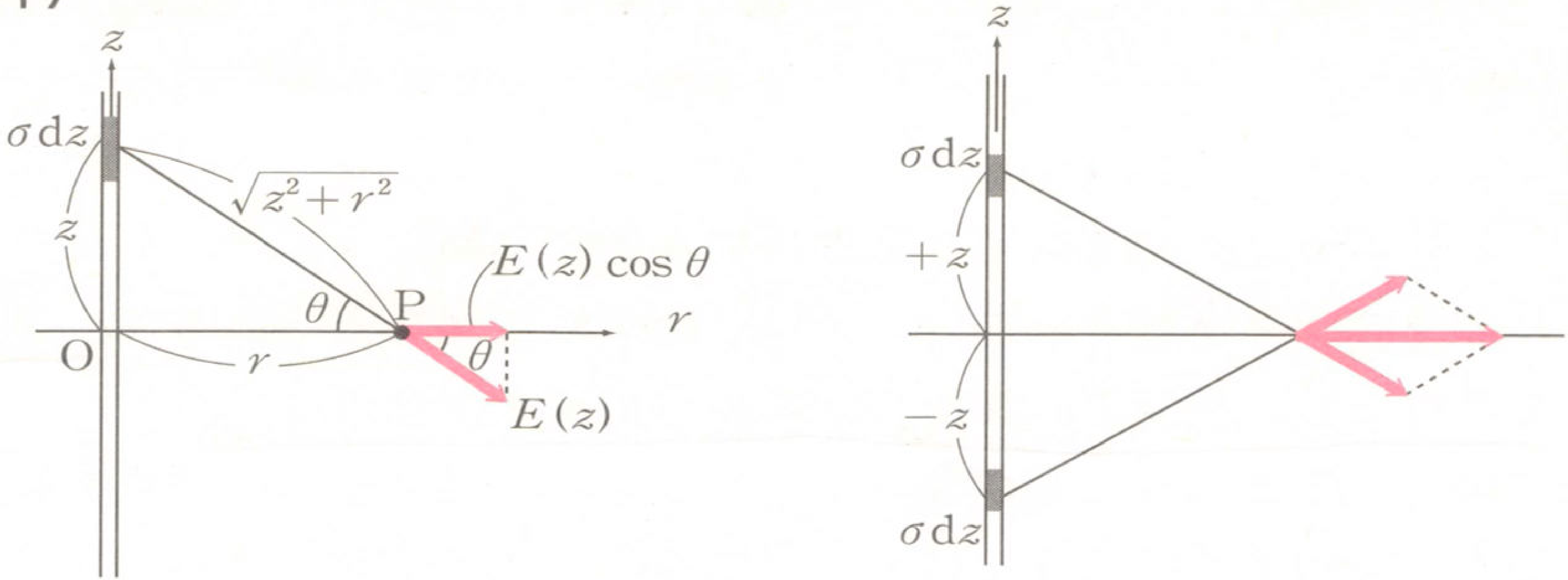
$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

は，点電荷のつくる電場の式だから，直線電荷にこの式を適用するには，点電荷とみなせる微小な断片をとって，それを積分しなければならない。

(a) $2\pi r\,\mathrm{d}z$ (b) $\dfrac{\sigma\,\mathrm{d}z}{\varepsilon_0}$ (c) $\dfrac{\sigma}{2\pi r\varepsilon_0}$

sigma

図2-17



$+z$ 側と $-z$ 側の電荷によって，
電場の z 成分は打ち消される。

そこで図のように，座標 z の位置に微小な断片 $\mathrm{d}z$ をとると，この断片(電気量は $\sigma\,\mathrm{d}z$)が図の点 P(OP$=r$) (慣例にしたがえば，OP 間の長さは $\overline{\mathrm{OP}}$ と表記すべきであるが，本書ではバーは省略する。)につくる電場は，図の $E(z)$ である。

ここで直線電荷の対称性を考えれば，点 P における電場(の合計)は，z 軸に垂直で，r の外側の方向を向くことは明らかだから，図の $E(z)$ の r 方向成分である $E(z)\cos\theta$ だけを考えればよい。つまり，$E(z)$ の z 方

向成分は，z 軸のプラス側とマイナス側の微小断片同士で打ち消し合うからである。さらに，積分は z 軸のプラス方向に 0 から ∞ までを計算し，それを 2 倍しておけばよい(もちろん，$-\infty$ から $+\infty$ としても同じ)。

さて，この微小な断片の電荷が点 P につくる電場は，

$$E(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\,\mathrm{d}z}{z^2+r^2}$$

だから，それらを積分した全電場の大きさ E は，

$$\begin{aligned} E &= 2\int_0^{\infty} E(z)\cos\theta\,\mathrm{d}z \\ &= 2\int_0^{\infty}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\cos\theta\,\mathrm{d}z}{z^2+r^2} \qquad \text{—— ①} \end{aligned}$$

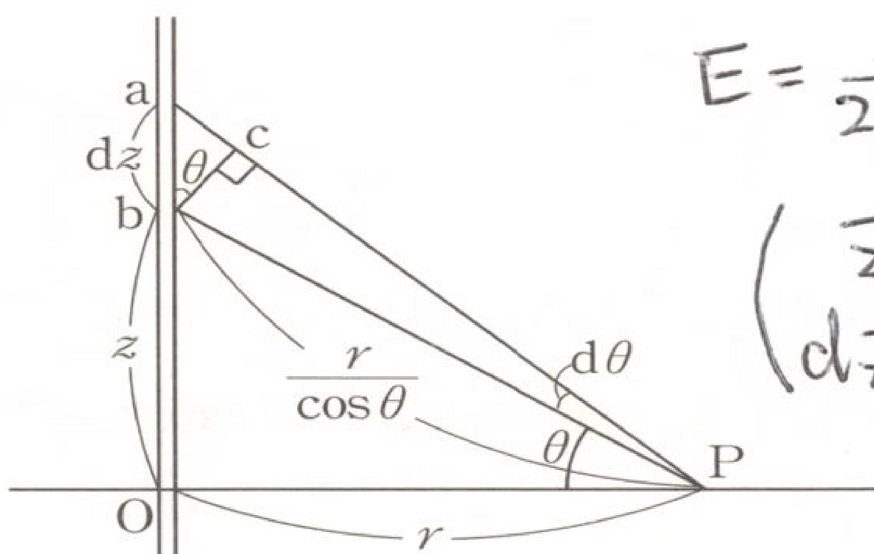
あとはたんなる積分計算であるが，この機会に積分の練習もしておこう。

$\sigma/4\pi\varepsilon_0$ はもちろん定数であるが，$\cos\theta$ は，z が変化すれば変化する。すなわち，$\cos\theta = r/\sqrt{z^2+r^2}$ と置き換えて，全体を z で積分することになる。

この積分は，高等数学としては初歩的な部類に入るが，それでもこの計算をスラスラできるのは，よほど数学の得意な人であろう。答えを出すだけなら，数学公式集から，この形の式を探せばよい。しかし，それではいつまでたっても積分コンプレックスを脱せない。公式を暗記せずとも，納得ずくでできる積分計算法を，ここで紹介しておこう。

まず，角 θ が変化するような積分では，x-y-z 座標ではなく極座標を用いる方がスマートである(たとえば『力学ノート』151 ページ参照)。そこで，$\cos\theta$ は残しておいて，微小な変数を $\mathrm{d}z$ から $\mathrm{d}\theta$ に置き換えることを考えよう。

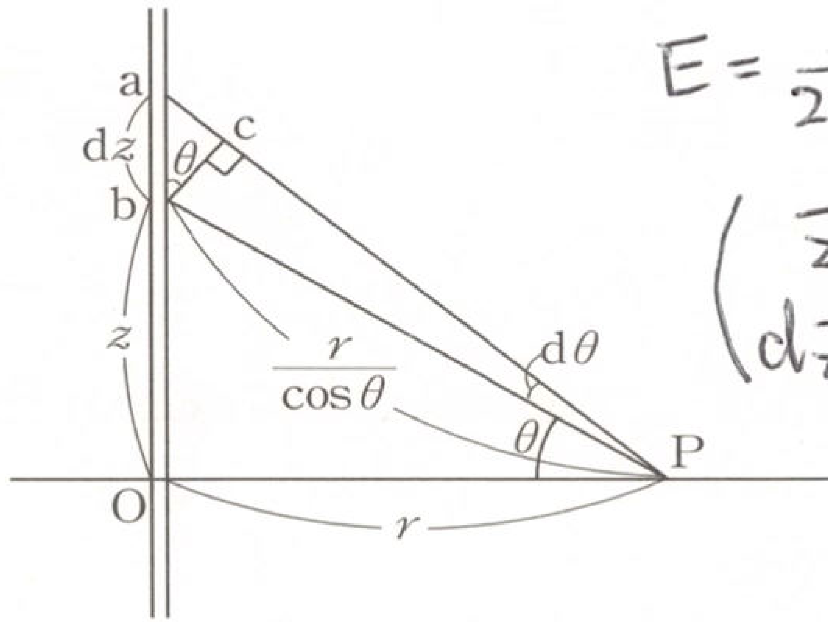
図2-18●微分による近似を使って，$\mathrm{d}z$ と $\mathrm{d}\theta$ の関係を求める。



$$E = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{\cos\theta}{z^2+r^2}\,dz \quad \text{—①}$$

(z を θ に代える!
dz を $d\theta$ に 〃

図2-18● 微分による近似を使って，dz と $d\theta$ の関係を求める。



$$E = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{\cos\theta}{z^2+r^2}\,dz \quad \text{— ①}$$

(z を θ に代える!
dz を $d\theta$ に 〃

代入

まず，図より，考えている dz と点 P の距離は，

$$\sqrt{z^2+r^2} = \frac{r}{\cos\theta} \quad \text{— ②}$$

である。

$$bc = \sqrt{z^2+r^2}\,d\theta = \frac{r}{\cos\theta}\,d\theta = dz\cos\theta$$

($d\theta$ が小さいから，bc を半径 Pb，角 $d\theta$ の円弧とみなしている。)

また，図の dz を斜辺とする小さな直角三角形 abc において，$\angle abc = \theta$ だから (bc は Pb に比べて非常に小さいから，$\angle bcP = \angle cbP = 90°$ とみなしている)，

$$dz = bc/\cos\theta = \frac{r}{\cos^2\theta}\,d\theta \quad \text{— ③}$$

$$dz = \frac{bc}{\cos\theta} = \frac{r}{\cos^2\theta}\,d\theta \quad — ③$$

積分範囲についていえば，$z=0$ のとき $\theta=0$ で，z が大きくなるにつれて θ も大きくなり，$z\to\infty$ で $\theta\to\pi/2$ となる。

以上のように，微分の意味を捉えて図を描けば，公式を丸暗記する必要などまるでない。これで変数 z をすべて θ に置き換えることができたから，

$$E = 2\cdot\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\cos\theta\cdot\frac{1}{z^2+r^2}\cdot dz$$

①←②③を代入

$$E = 2\,\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\left(\frac{\cos\theta}{r}\right)^2\frac{r}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0 r}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta$$

けっきょく，$\cos\theta$ の積分という簡単な式になるから，

$$= \frac{\sigma}{2\pi r\varepsilon_0}\Big[\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\pi r\varepsilon_0} \quad \cdots\cdots(答)$$

この解法は，積分計算の練習としては申し分ないが，ガウスの法則による解法に比べれば，はなはだ面倒なことは明らかである。

《教訓》対称的な電場を求めるのは，ガウスの法則にかぎる。

⇒ P24☆に戻る

これを式で書けば，　　E×面積＝内部電荷/ε_0

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

—①

これを**ガウスの法則**という。　D×面積＝内部電荷　$\int_S \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = q$

ここまでくると，式の形はクーロンの法則と似ても似つかないが，それでもこの式はクーロンの法則と同じことを主張している。つまり，クーロンの法則の成長した姿なのである。　→先に問へ P29

さて，次のステップに進むには，巻末の付録「やさしい数学の手引き」を熟読して頂かねばならない。大学の電磁気学の１つの大きな山場である。しかし，腰をすえて，これらの数学をいったん納得してしまえば，あとは形式的な慣れの問題となるだろう。たとえば，高校で微分の考え方を勉強したあと，その基本に帰らずとも，x^2 の微分係数を形式的に $2x$ とできるようなものである。

巻末の　やさしい数学の手引きへ