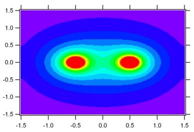
第１回

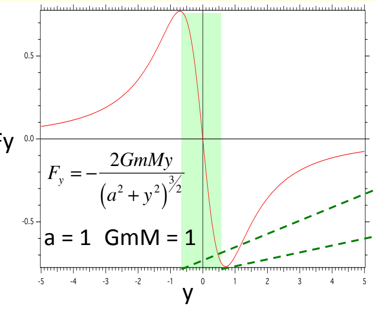
10/14　力学 II 講義 補足

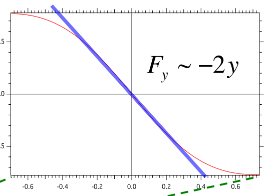
質問：２つの質点の垂直二等分線上では万有引力が
弾性力ポテンシャルのようにはたらくのではないか？

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{GmMy}{\left((x-a)^2+y^2\right)^{3/2}} - \frac{GmMy}{\left((x+a)^2+y^2\right)^{3/2}}$$



回答：y が十分に小さいときは、復元力として
近似できる (マクローリン展開で近似)。





～復元力

$m\ddot{y} \sim -2y$

１次の項までのマクローリン展開（もしくは漸近展開）

$$F_y = f(y) = -\frac{2y}{\left(1+y^2\right)^{3/2}}$$

$$\sim \sum_{k=0}^{1} \frac{f^k(0)}{k!} y^k = \frac{f(0)}{0!} y^0 + \frac{f'(0)}{1!} y = -2y$$

$$\left(\because f'(y) = -2\left(1+y^2\right)^{-3/2} + 3y\left(1+y^2\right)^{-5/2}\right)$$

第２回

10/21　力学 II 講義 補足

参考：保存力F = (Fx,Fy) のする仕事からポテンシャルを求める方法？

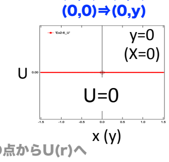
保存力がする仕事は経路によらない => どんな経路を選んでも良い

$$U = -\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{F} = \left(Axy, \frac{A}{2}x^2\right)$$

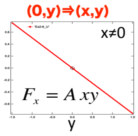
$$d\vec{r} = (dx, dy)$$

(0,0)⇒(x,0)
(0,0)⇒(0,y)

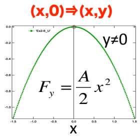


U=0の点からU(r)へ

(0,y)⇒(x,y)



(x,0)⇒(x,y)



$$U = -\int_0^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_0^{\vec{r}} \left(Axy, \frac{A}{2}x^2\right) \cdot (dx, dy)$$

$$= -\int_{(0,0)}^{(x,0)} Axy\,dx - \int_{(x,0)}^{(x,y)} \frac{A}{2}x^2\,dy$$

(0,0)⇒(x,y) は
F の r 成分がないと
計算が困難

0

Fxがする仕事
(0,0)⇒(x,0)

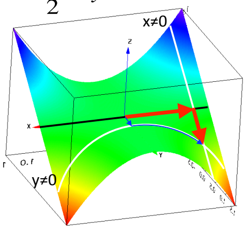
Fyがする仕事
(x,0)⇒(x,y)

$$= -\boxed{\left[\frac{A}{2}x^2 y\right]_{(0,0)}^{(x,0)}} - \left[\frac{A}{2}x^2 y\right]_{(x,0)}^{(x,y)}$$

$$= -\frac{A}{2}x^2 y$$

定積分として考える場合は
経路の工夫が必要

$$U = -\frac{A}{2}x^2 y$$



質問：ポテンシャルの積分の式で dr が θ積分の外にあるのに、
まとめて積分して良い？

$$U = -Gm\rho \int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}} \int_0^{2\pi} d\varphi$$

回答：r, θ, φ 項を見やすくするための表記なので、厳密には
下記のような積分と考えてみると良いかも。

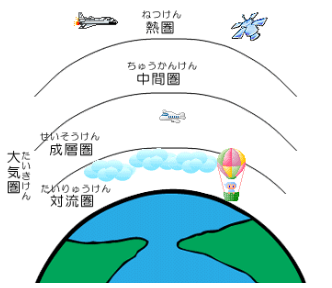
$$U = -Gm\rho \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^\pi r^2 \frac{\sin\theta}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}} d\theta\, dr\, d\varphi$$

10/21 レポート課題 (2)

地表と上空における万有引力の違いは？

問題 地上から高さ h の場所における重力の大きさが、地上の $1/a$ であるとする。h は地球の半径 R の何倍か。

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{GmM}{\left|\vec{r}-\vec{R}\right|^2}\frac{\vec{r}-\vec{R}}{\left|\vec{r}-\vec{R}\right|}}$$



レポート課題 問1解答例

R + h の高さにおける重力が地表の 1 / *a* のとき、

万有引力の関係式より

$$F = G\frac{mM}{(R+h)^2} = \frac{G}{a}\frac{mM}{R^2}$$

両辺を整理して

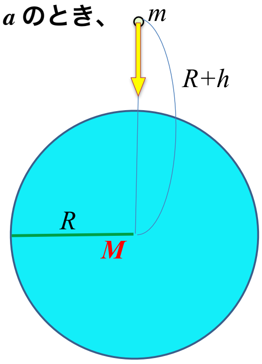
$$\frac{R^2}{(R+h)^2} = \frac{1}{a}$$

ここからRに対する２次方程式を得る

$$(a-1)R^2 - 2hR - h^2 = 0$$

Rについて解いて

$$R = \frac{2h \pm \sqrt{4h^2 + 4(a-1)h^2}}{2(a-1)} = \frac{2h \pm \sqrt{4ah^2}}{2(a-1)} = \frac{h}{a-1}\left(1 \pm \sqrt{a}\right)$$



$$R = \frac{2h \pm \sqrt{4h^2 + 4(a-1)h^2}}{2(a-1)} = \frac{2h \pm \sqrt{4ah^2}}{2(a-1)} = \frac{h}{a-1}\left(1 \pm \sqrt{a}\right)$$

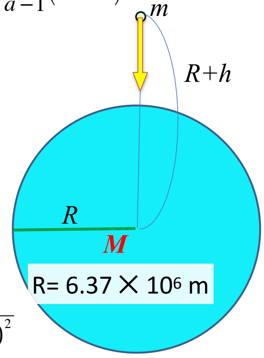
$$= -\frac{h}{\left(1-\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt{a}\right)}\left(1 \pm \sqrt{a}\right)$$

$$= -\frac{h}{1-\sqrt{a}}, \quad -\frac{h}{1+\sqrt{a}}$$

ここで、$R > 0, \quad a > 1$ **であるから、**

$$R = -\frac{h}{1-\sqrt{a}}$$

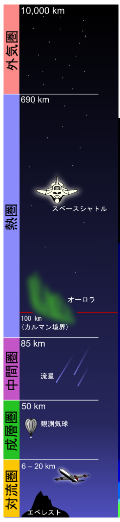
$$\therefore h = \left(\sqrt{a}-1\right)R \qquad \therefore m^* = \frac{m}{a} = \frac{m}{\left(h/R+1\right)^2}$$

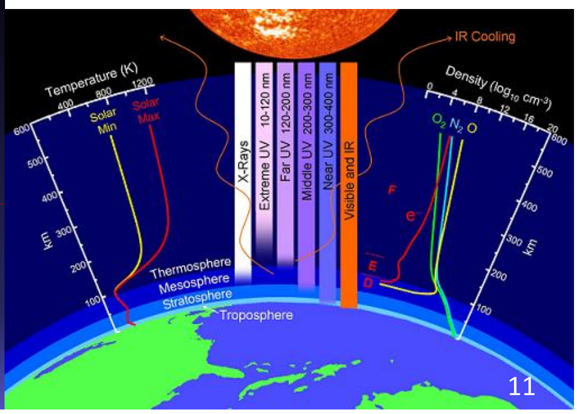


上空1万km ：10^7 m　h / R = 1.66　$m^*=0.14m$

上空1000km：10^6 m　h / R = 1.66 ×10^{-1}　$m^*=0.73m$

上空100km ：10^5 m　h / R = 1.66 ×10^{-2}　$m^*=0.97m$





球殻の内外における万有引力の導出：万有引力の積分型の活用

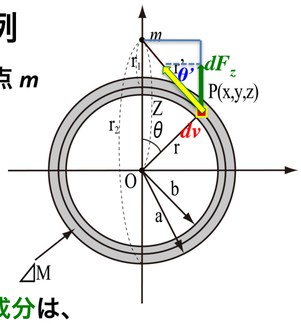
問題 内部が空洞の一様な球殻（内半径b、外半径a、密度ρ、全質量⊿M）から、z 軸上の質点 m がうける万有引力をそれぞれ求めよ。

$$\boxed{F_z = -Gm\rho\int\frac{Z-r\cos\theta}{r'^3}r^2\sin\theta drd\theta d\varphi}$$

ϑ 積分⇒r' 積分へ変換

レポート課題　問2解答例

右図のような球殻から z 軸上の質点 m が受ける万有引力を考える。



x, y 方向の成分は**対称性からゼロ**なので、z 成分についてのみ考えれば良い。

球殻上の点P における**微小領域 dv から質点m が受ける**万有引力の **z 成分**は、

$$dF_z = -\frac{GmdM}{r'^2}\cos\theta' = -\frac{GmdM}{r'^2}\boxed{\frac{Z-z}{r'}} = -\frac{Gm\rho(Z-z)}{r'^3}dv$$

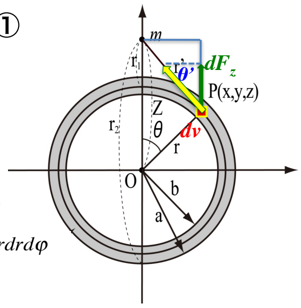
球全体について積分を考えれば、

$$F_z = \int dF_z = -Gm\rho\int\frac{Z-z}{r'^3}\boxed{dv} = -Gm\rho\int\frac{Z-r\cos\theta}{r'^3}\boxed{r^2\sin\theta drd\theta d\varphi} \quad ①$$

$$F_z = -Gm\rho\int\frac{Z-r\cos\theta}{r'^3}r^2\sin\theta drd\theta d\varphi \quad ①$$

$$r'^2 = Z^2 + r^2 - 2Zr\cos\theta \quad ②$$

$$r'dr' = Zr\sin\theta d\theta \quad ③$$



②、③を用いて

①式の **θ 項を消して**整理すると、

$$F_z = -Gm\rho\int\frac{Z-\left(\boxed{\left(Z^2+r^2-r'^2\right)/2Z}\right)}{r'^3}\cdot\boxed{\frac{r'dr'}{Z}}rdrd\varphi$$

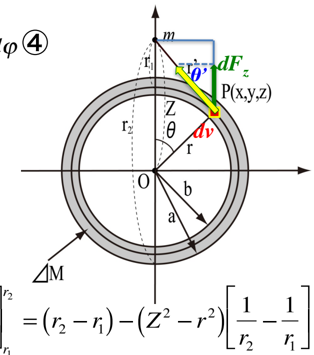
$$= -Gm\rho\int\left[\frac{1}{r'^2}-\frac{Z^2+r^2-r'^2}{r'^2\cdot 2Z^2}\right]dr'rdrd\varphi$$

$$= -Gm\rho\int\left[\frac{2Z^2-Z^2-r^2+r'^2}{2Z^2r'^2}\right]dr'rdrd\varphi$$

$$= -\frac{Gm\rho}{Z^2}\int\frac{1}{2}\left[\frac{Z^2-r^2+r'^2}{r'^2}\right]dr'rdrd\varphi$$

$$= -\frac{Gm\rho}{Z^2}\int\frac{1}{2}\left[1+\frac{Z^2-r^2}{r'^2}\right]dr'rdrd\varphi \quad ④$$

$$F_z = -\frac{Gm\rho}{Z^2}\int\frac{1}{2}\left[1+\frac{Z^2-r^2}{r'^2}\right]dr'rdrd\varphi \quad ④$$



④式において、**r'の定義域**を、

θ	0 ⟶ π
r'	r_1 ⟶ r_2

とおいて

r' 項について積分すれば、

$$\int_{r_1}^{r_2}\left[1+\frac{Z^2-r^2}{r'^2}\right]dr' = \left[r'-\frac{Z^2-r^2}{r'}\right]_{r_1}^{r_2} = \left(r_2-r_1\right)-\left(Z^2-r^2\right)\left[\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right]$$

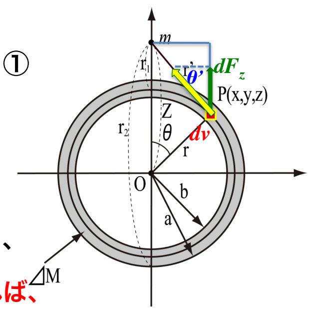
よって、（4）式は、

$$F_z = -\frac{Gm\rho}{Z^2}\int\frac{1}{2}\left\{\left(r_2-r_1\right)-\left(Z^2-r^2\right)\left[\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right]\right\}rdrd\varphi \quad ⑤$$

⑤式における場合分けを**球外**、**球内**について行う。

球全体について積分を考えれば、

$$F_z = -Gm\rho\int\frac{Z-r\cos\theta}{r'^3}r^2\sin\theta drd\theta d\varphi \quad ①$$



ここで、
$$r'^2 = \vec{r'}\cdot\vec{r'} = \left(\vec{Z}-\vec{r}\right)\cdot\left(\vec{Z}-\vec{r}\right)$$
$$= Z^2 + r^2 - 2\vec{Z}\cdot\vec{r}$$
$$= Z^2 + r^2 - 2Zr\cos\theta \quad ②$$

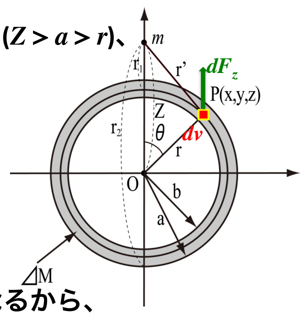
①式における θ 成分を解くために、**r を定数と考えて**②式の両辺を θ について**微分すれば、**

（左辺）$= \dfrac{d}{d\theta}r'^2 = \underline{\dfrac{d}{dr'}\dfrac{dr'}{d\theta}}r'^2 = 2r'\dfrac{dr'}{d\theta}$

（右辺）$= \dfrac{d}{d\theta}\left(Z^2+r^2-2Zr\cos\theta\right)$
$= 2Zr\sin\theta$

よって、 $r'dr' = Zr\sin\theta d\theta$ ③

(1) 球外に質点が存在するとき ($Z > a > r$)、



$r_1 = Z - r$
$r_2 = Z + r$ より、

⑤式の｛　｝内は、

$$2r-\left(Z^2-r^2\right)\left[\frac{-2r}{Z^2-r^2}\right] = 4r$$

また、**ϕ の項の積分**は **2π** となるから、

$$F_z = -\frac{Gm\rho}{Z^2}\int\frac{1}{2}\cdot\boxed{4r}\,rdrd\varphi = -\frac{Gm\rho}{Z^2}\int 2r^2drd\varphi = -\frac{Gm\rho}{Z^2}\int_b^a 4\pi r^2dr$$

ここで、**r に対する積分**は $b \le r \le a$ において**球殻の体積**を表すので、

$$F_z = -\frac{Gm\Delta M}{Z^2}$$

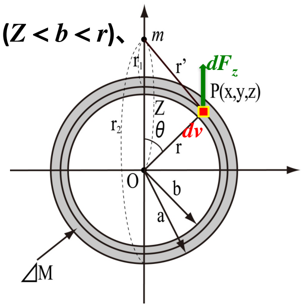
(2) 球内に質点が存在するとき ($Z < b < r$)、

$r_1 = r - Z$
$r_2 = r + Z$ より、

⑤式の｛　｝内は、

$$2Z - (Z^2 - r^2)\left[\frac{-2Z}{r^2 - Z^2}\right] = 0$$

よって、 $F_z = 0$



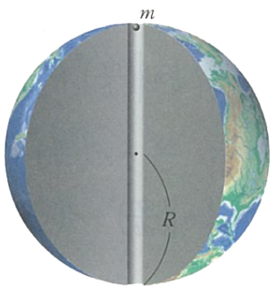
以上より、球殻から作用する引力は
球殻内部の点に対しては０となり、
球殻外部の点に対しては球殻の全質量が
中心に集まったときに生ずる引力と等しい。

地球貫通トンネル

問題 地球を半径Rの一様な密度の球と仮定する。地球の直径を貫通する細いなめらかな穴をあけ、その中に質量mの質点を入れるとき、以下の問いに答えよ。

(1) 地球の中心から距離 x の位置にあるときの質点の運動方程式を書け。

(2) 質点がどのような運動をするか説明せよ。



（１）一様な球の内部（位置 $x < R$）における質点 m が うける万有引力ポテンシャルは極座標積分により、

$$U = -Gm\rho \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{x^2 + r^2 - 2xr\cos\theta}} \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= -Gm\rho\left[\int_0^x r^2 dr \cdot \boxed{\frac{2}{x}} + \int_x^R r^2 dr \cdot \boxed{\frac{2}{r}}\right] \cdot 2\pi$$

$$= \frac{2\pi Gm\rho}{3} x^2 - 2\pi R^2 Gm\rho \quad ①$$

講義２レジメ
$R \to x,\ a \to R$
に対応

ここで、U は保存力ポテンシャルであるから、
質点がうけるトンネル方向 (x) の力は、

$$\boxed{F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}} = -\frac{4\pi Gm\rho}{3} x \quad ②$$

ここで、地球の質量を M とすると、

$$M = \frac{4\pi R^3}{3}\rho \Leftrightarrow \frac{4\pi}{3}\rho = \frac{M}{R^3} \quad ③$$

また、地表における万有引力の関係式より、

$$\boxed{\frac{GMm}{R^2} = mg} \Leftrightarrow GM = gR^2 \quad ④$$

③、④を②式に代入して、

$$F_x = -\frac{4\pi Gm\rho}{3} x = -\frac{GMm}{R^3} x = -\frac{mg}{R} x$$

よって、トンネル方向における質点の運動方程式は、

$$\boxed{m\ddot{x} = -\frac{mg}{R} x}$$

（２）（１）より、質点は以下のように単振動する。

角振動数 $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{R}}$　周期 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$　振幅 R

第３回

10/28　力学 II 講義

慣性系：F = ma が成り立つ系

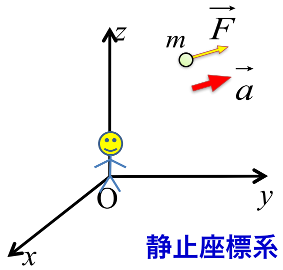
外部から作用を受けない物体は

○等速直線運動（静止）を続ける（第一法則）

加速度 a を与えられた物体は

○ニュートンの運動方程式を満たす（第二法則）

$$\vec{F} = m\vec{a}$$



§5　相対運動

座標系と運動方程式の違い

静止座標系(O系)

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

静止系ではたらく力　全外力

ニュートン運動方程式

相対座標系 (O’系)

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_0$$

相対系ではたらく力　静止系ではたらく力　慣性力（見かけの力）

観測者（原点）が物体に対して動いている　[並進, 回転]

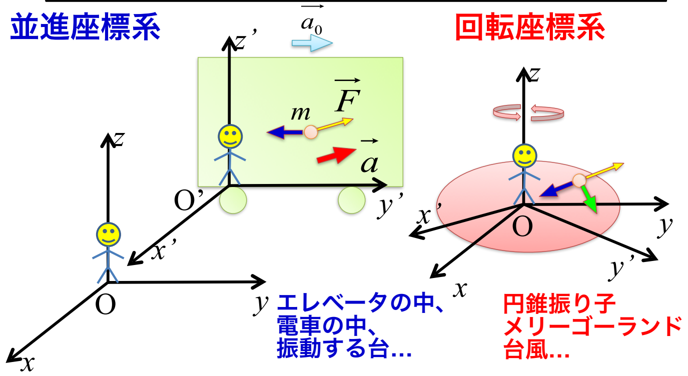
Point

慣性力（見かけの力）とはなにか？

非慣性系：F = ma が成立しない系 $\vec{F} \neq m\vec{a}$

物体の運動を異なる座標系（O’系）でとらえる必要がある

O’系から見た物体の運動には、「見かけの力」が働く



相対運動の運動方程式を得る方法

座標変換　位置ベクトル

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0$$

時間微分

運動方程式 (静止系基準)

$$m\ddot{\vec{r}} = m\ddot{\vec{r}}' + m\ddot{\vec{r}}_0$$

運動方程式(相対系基準)

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_0$$

相対系ではたらく力　静止系ではたらく力　慣性力（見かけの力）

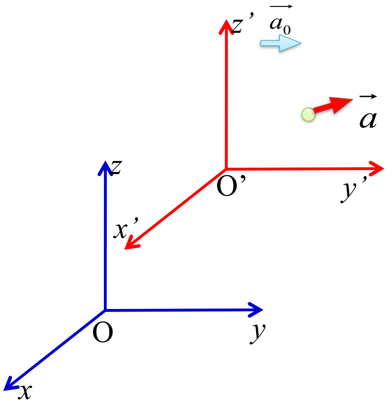
問題

静止座標系で F の力を受ける物体の運動を
静止座標系に対して加速度 a_0 で並進運動する
相対座標系において観測するとき、
物体の相対運動を表す運動方程式が
次の式で与えられることを示せ。

$$m\vec{a}' = m\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \vec{F} - m\frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} = \vec{F} - m\vec{a}_0$$

§5．1　並進座標系における運動方程式

並進座標系



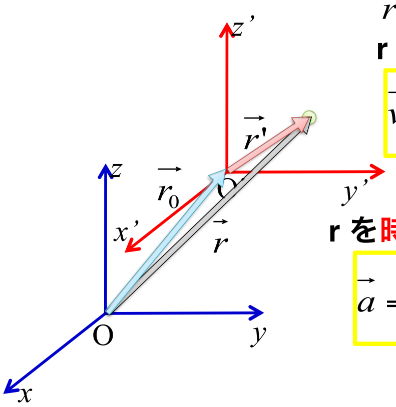
座標変換のための定義

静止系：O系
O系から見た物体
$\vec{r}$　$\vec{v}$　$\vec{a}$

相対系：O'系
O'系から見た物体
$\vec{r}'$　$\vec{v}'$　$\vec{a}'$

O系から見た
O'系の原点
$\vec{r}_0$　$\vec{v}_0$　$\vec{a}_0$

並進座標系



座標変換

$\vec{r} =$ ①　(1)

r を時間　t で微分する

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} =$ ②

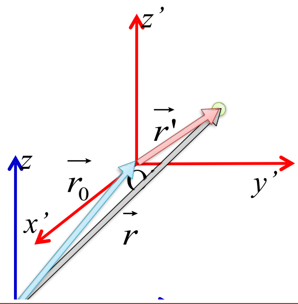
よって、$v = v' + v_0$

r を時間　t で2回微分する

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} =$ ③

よって、$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0$

並進座標系



座標変換

$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0$　(1)

$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0$

$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0$

O系は慣性系と考えて
ニュートンの運動方程式
④　(3)
を代入すると、

$$m\vec{a}' = m\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \vec{F} - m\frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} = \vec{F} - m\vec{a}_0 \quad (4)$$

§5．1　並進座標系における運動方程式

O'系の運動方程式

$$m\vec{a}' = m\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \vec{F} - m\frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} = \vec{F} \underbrace{- m\vec{a}_0}_{\text{慣性力（見かけの力）}} \quad (4)$$

O'系の運動を考えるとき、
見かけの力が物体に働いてると考えれば
形式上ニュートンの運動方程式が成り立つ

$\vec{a}_0 = 0$ のときはガリレイ変換が成り立つ

$\vec{r}' =$ ⑤　等速度運動　$m\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$

「ニュートン方程式はガリレイ変換に対して不変である」

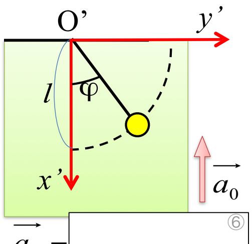
例題１

一定の加速度 a で鉛直方向に上昇している
エレベーターの天井に固定された長さ l の
単振り子で質量 m のおもりが振動している。
エレベータの中から見たおもりの
相対運動の運動方程式を書け。
また、エレベータの中から見た
単振り子の微小振動周期を求めよ。

例題２

水平面上を単振動する台の底に長さ l の
単振り子で質量 m のおもりがつるされている。
台が振幅 B、角振動数 ω_0 で単振動して
いるとき、台からみた
おもりの**相対運動の運動方程式**を書け。
また、微小振動の角度 φ の時間依存性は
どのように表わされるか求めよ。

例1　上昇するエレベータ内の単振子



O’系で見たおもりに対する
運動方程式は、
x、y成分について

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \boxed{⑦} \quad (6)$$

慣性力

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \boxed{⑧} \quad (7)$$

$$\vec{a}_0 = \boxed{⑥}$$

Check!

２章p.29
単振子

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - T\cos\varphi \quad (44)$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -T\sin\varphi \quad (45)$$

２章p.35
単振動周期

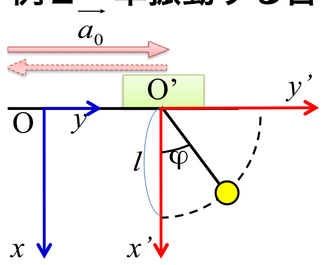
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (76)$$

$$T = \boxed{⑩}$$

見かけの
重力加速度

$\boxed{⑨}$

例２　単振動する台につるされた単振子



O’系はO系に対して、
振幅 B、角振動数 ω で単振動

O系から見たO’系の座標

$$x_0 = 0 \qquad y_0 = B\cos\omega_0 t$$

O’系の加速度 $a_0 = (0, a_0)$

$$a_0 = \frac{d^2y_0}{dt^2} = \boxed{⑪}$$

O’系における運動方程式は、

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = \boxed{⑫} \quad (9)$$

$$m\frac{d^2y'}{dt^2} = -T\sin\varphi \boxed{-ma_0} = -T\sin\varphi + \boxed{⑬} \quad (10)$$

慣性力

例題２

水平面上を単振動する台の底に長さ l の単振り子で質量 m のおもりがつるされている。台が振幅 B、角振動数 ω_0 で単振動しているとき、台からみたおもりの相対運動の運動方程式を書け。
また、**微小振動の角度 φ の時間依存性**はどのように表わされるか求めよ。

$$\begin{matrix} x' = l\cos\varphi \\ y' = l\sin\varphi \end{matrix} \xrightarrow{①} \begin{matrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \end{matrix} \xrightarrow{②} \begin{matrix} \sin\varphi \sim \varphi \\ \cos\varphi \sim 1 \end{matrix} \xrightarrow{③} \varphi(t)$$

O'系における運動方程式を φ の関数として解く

p.29 単振動の運動方程式と同様

（９）、（１０）式から T を消去して、

$$\boxed{\quad ⑭ \quad} \Big/ \cos\varphi = \boxed{\quad ⑮ \quad} \Big/ \sin\varphi$$

$$-m\ddot{x}'\sin\varphi + mg\sin\varphi = -m\ddot{y}'\cos\varphi + m\omega_0{}^2 B\cos\omega_0 t\cos\varphi$$

$$m(\ddot{x}'\sin\varphi - \ddot{y}'\cos\varphi) = mg\sin\varphi - m\omega_0{}^2 B\cos\omega_0 t\cos\varphi \quad （１１）$$

ここで、$x' = \boxed{\quad ⑯ \quad}$ $y' = \boxed{\quad ⑰ \quad}$ より、

$$\boxed{\frac{dx'}{dt}} = \frac{d}{dt}(l\cos\varphi) = \boxed{\quad ⑱ \quad} = -l\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d^2x'}{dt^2}} = \frac{d}{dt}\left(-l\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}\right) = \boxed{\quad ⑲ \quad}$$

$$= -l\cos\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - l\sin\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad ①\text{-}1$$

$$\boxed{\frac{dy'}{dt}} = \frac{d}{dt}(l\sin\varphi) = \boxed{\quad ⑳ \quad} = l\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d^2y'}{dt^2}} = \frac{d}{dt}\left(l\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}\right) = \boxed{\quad ㉑ \quad}$$

$$= -l\sin\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + l\cos\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad ①\text{-}2$$

よって、（１１）式をφの関数で書けば、

$$m(\ddot{x}'\sin\varphi - \ddot{y}'\cos\varphi) = mg\sin\varphi - m\omega_0{}^2 B\cos\omega_0 t\cos\varphi$$

（左辺）＝

$$m\left(\left[\boxed{\quad ㉒ \quad}\right]\sin\varphi - \left[\boxed{\quad ㉓ \quad}\right]\cos\varphi\right)$$

$$= -ml(\cos\varphi\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}^2 + \sin^2\varphi\cdot\ddot{\varphi} - \sin\varphi\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}^2 + \cos^2\varphi\cdot\ddot{\varphi})$$

$$= -ml(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\ddot{\varphi} = \boxed{\quad ㉔ \quad}$$

よって、$-ml\ddot{\varphi} = mg\sin\varphi - m\omega_0{}^2 B\cos\omega_0 t\cos\varphi$

微分方程式の形に変形して、

$$\ddot{\varphi} = \boxed{\quad ㉕ \quad} \quad （１２）$$

O'系の振動速度 $\omega = \sqrt{g/l}$ 　台の振動による見かけの力

微小振動のとき、$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \cdots \sim \varphi$ 　$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \cdots \sim 1$ 　$(\varphi \ll 1)$

$$\ddot{\varphi} = \boxed{\quad ㉖ \quad} \quad （１３）$$

② p.37 （79）式 $\ddot{x} + \omega^2 x = F_0\cos\omega_0 t$ 強制振動

比較から、A, α を適当な定数として、

$$\varphi = \boxed{\quad ㉗ \quad} \quad ③$$

共振条件 $\omega_0 = \omega = \boxed{\quad ㉘ \quad}$ 　$(\because F_0 = \omega_0{}^2 B/l)$

台が振動しないとき $B = 0$ もしくは $\omega_0 = 0$

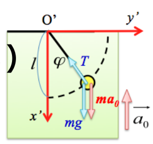
O系＝O'系 $\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi$ 　p.30 （49）式

相対運動の運動方程式の例

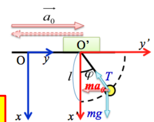
上昇するエレベータ内の単振子

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - T\cos\varphi \boxed{+ma_0} \quad （６）$$

相対系ではたらく力 　静止系ではたらく力 　慣性力（見かけの力）



単振動する台につるされた単振子



$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi \boxed{+\frac{\omega_0{}^2 B}{l}\cos\omega_0 t\cos\varphi} \quad （１２）$$

相対系ではたらく力 　静止系ではたらく力 　慣性力（見かけの力）

回転座標の下準備

ベクトル積

回転座標系の理解に必須

ベクトル *a* がベクトル *b* に重なるように
***a* – *b* 面内で回転するとき**

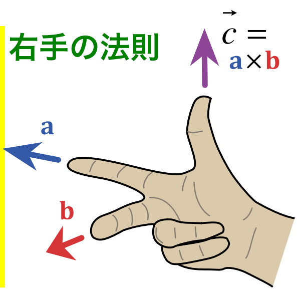
回転軸ベクトル

$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$

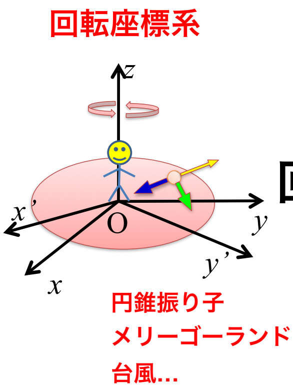
(反時計回り：正)

回転の勢い

$|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$



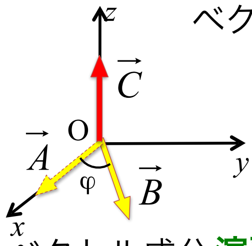
ベクトル積（外積）



回転を表す量？

回転角度、回転軸..

ベクトル積（外積）



ベクトル**A**とベクトル**B**の外積
：ベクトル量

$$\boxed{\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}}$$

ベクトル成分 **演習６**

$$C_x = A_y B_z - A_z B_y$$
$$C_y = A_z B_x - A_x B_z$$
$$C_z = A_x B_y - A_y B_x$$

大きさ：

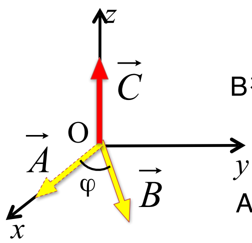
A,Bの張る平行四辺形の面積

$|\vec{C}| = |\vec{A} \times \vec{B}| =$ ㉙

向き：

AをBに重ねるように角度φ
回したときに右ねじが進む向き

ベクトル積（外積）の性質



$\vec{B} \times \vec{A} =$ ㉚

BをAに重ねる＝－（AをBに重ねる）

$\vec{A} \times \vec{A} =$ ㉛

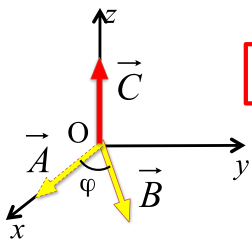
AをAに重ねる＝回転しない

$\vec{A} \times (-\vec{A}) = -\vec{A} \times \vec{A} =$ ㉜

Aを反転させる＝大きさ０

ベクトル成分を代入すれば簡単に証明できる

ベクトル積（外積）の重要な公式



３重積

$$\boxed{\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})}$$

A,B,Cを辺とする平行六面体の体積

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

演習問題５

$$(\vec{A} + \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{C} + \vec{B} \times \vec{C}$$
$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

Check!

直交座標の単位ベクトル $\vec{e_x} = \vec{i}, \quad \vec{e_y} = \vec{j}, \quad \vec{e_z} = \vec{k}$

㉝ $= \vec{k}$, ㉞ $= \vec{i}$, ㉟ $= \vec{j}$