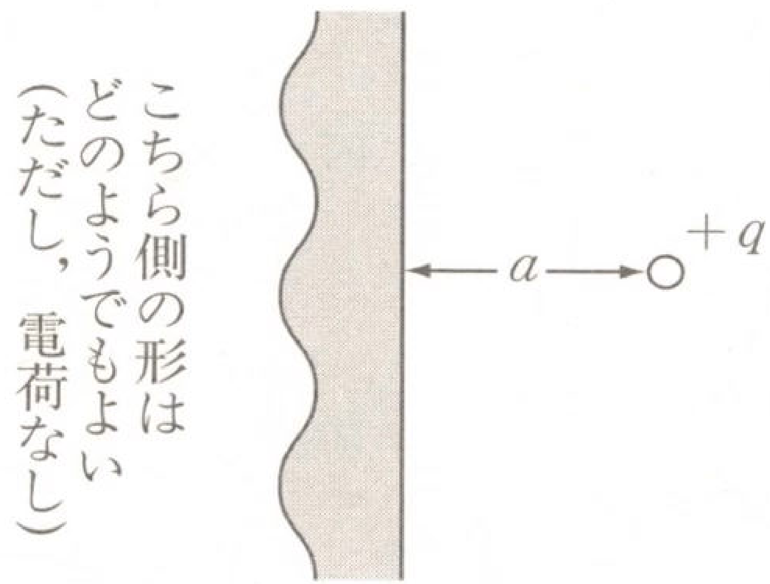
●鏡像法 ← この項は $\boxed{\text{問}}$ 扱い　鏡像法は高校でやらない

以上述べてきた導体の特徴を利用して，問題を簡単に解くための**鏡像法**と呼ばれる面白い解法があるので紹介しておこう。

図4-12●無限に拡がる導体平面の前に点電荷を置く。

問題



図のように，表面が平らで無限に広い導体を考える（この表面とは反対側の導体の形状は何でもよい。また，導体は帯電していないとする）。

この導体の表面から距離 a の地点に，電荷 q をもつ点電荷を置いたとき，その周囲の空間にどのような電位ができるか，導体の表面にはどのような電荷分布が現れるか，またこの点電荷は導体からどのようなクー

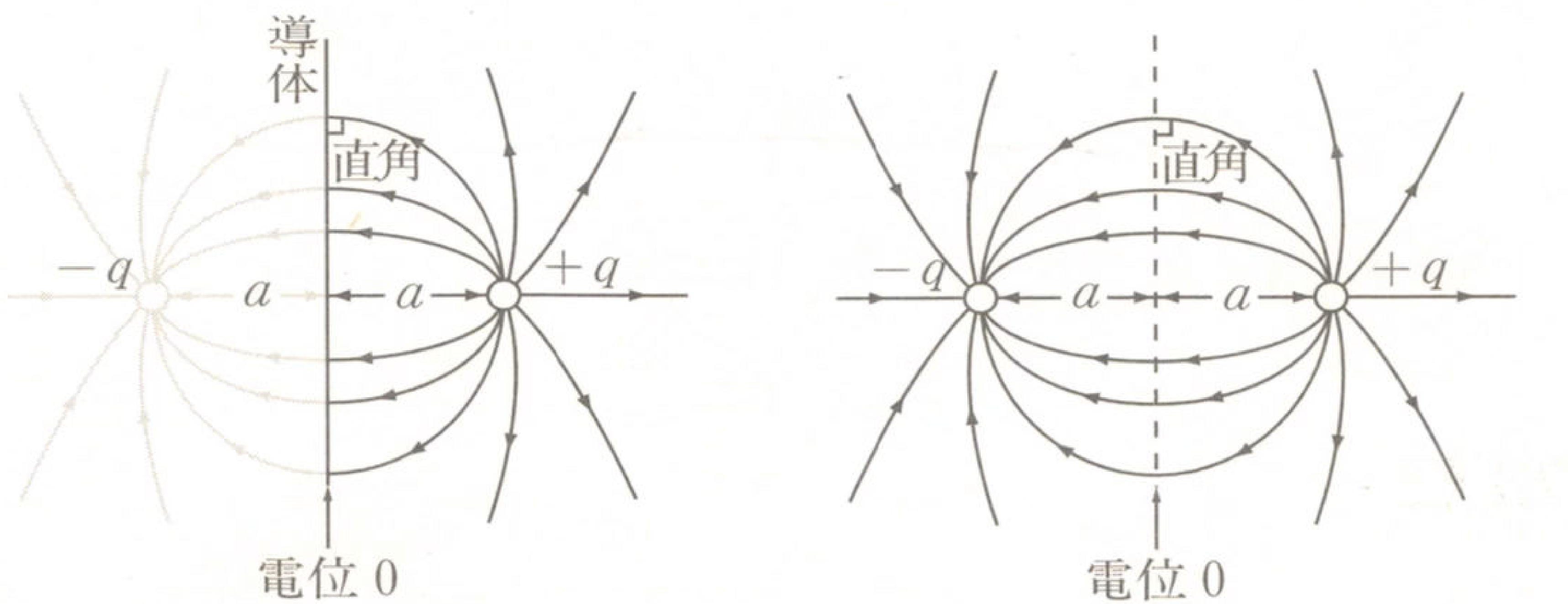
場

ロン力を受けるかということを考えてみよう。導体は帯電していないのだから，点電荷が導体から力を受けるのはおかしいように思えるが，そうではない。この点電荷をプラスとすると，導体内にあるマイナスの電荷が，導体表面に現れてくる。このマイナスの電荷によって，点電荷はクーロン力を受けることになるのである。

まず結論を先に述べておこう。

点電荷の前に置かれた導体は，ちょうど鏡のような役割をするのである。ただし，ふつうの鏡は鏡の中に鏡像(もちろん虚像である)をつくるだけであるが，導体の中にできる「鏡像」は，電荷の符号が逆になっている。

図4-13●導体は，まるで鏡のような役割を果たす。



つまり，この問題は，導体がなく距離 $2a$ 離れた $+q$ と $-q$ の2つの点電荷の問題に置き換えられるということである。

なぜそうなるかは，導体がある場合と，2つの点電荷がある場合の電気力線を描いてみれば分かる。

導体がある場合，電気力線すなわち電場は，導体の表面に必ず直角である。かつ，導体上の電位は0である(無限遠の電位を0とすれば，導体は無限遠からつづいているのだから)。

次に，距離 $2a$ 離れた $+q$ と $-q$ の点電荷がつくる電場は，その垂直二等分面(すなわち，導体の表面のある場所)上で，面に垂直である。かつ，その電位は $+q$ と $-q$ から等距離だから，0である。

つまり，この2つのケースは，図の導体表面の右側の空間では，まったく同じ電場と電位を与える。

導体表面だけで電場と電位が等しくても，その他の場所では違うのではないかという疑問はとうぜんである　この疑問に対する答えは，境界条件がまったく同じラプ

ラスの方程式 $\Delta V=0$ は，同じ解を与えるということである。

電荷の存在しない空間の電位を決めるのは，講義3で見たように，ラプラスの方程式 $\Delta V=0$ だった。しかし，この2階偏微分方程式は，境界条件を決めないと，一意的には解は決まらなかった。それを逆にいえば，一点に q という点電荷があり，そこから距離 a 離れた面上の電位が0（かつ無限遠の電位も0）という境界条件を設定すれば，すべての空間の電位は決定されるということである。 P104

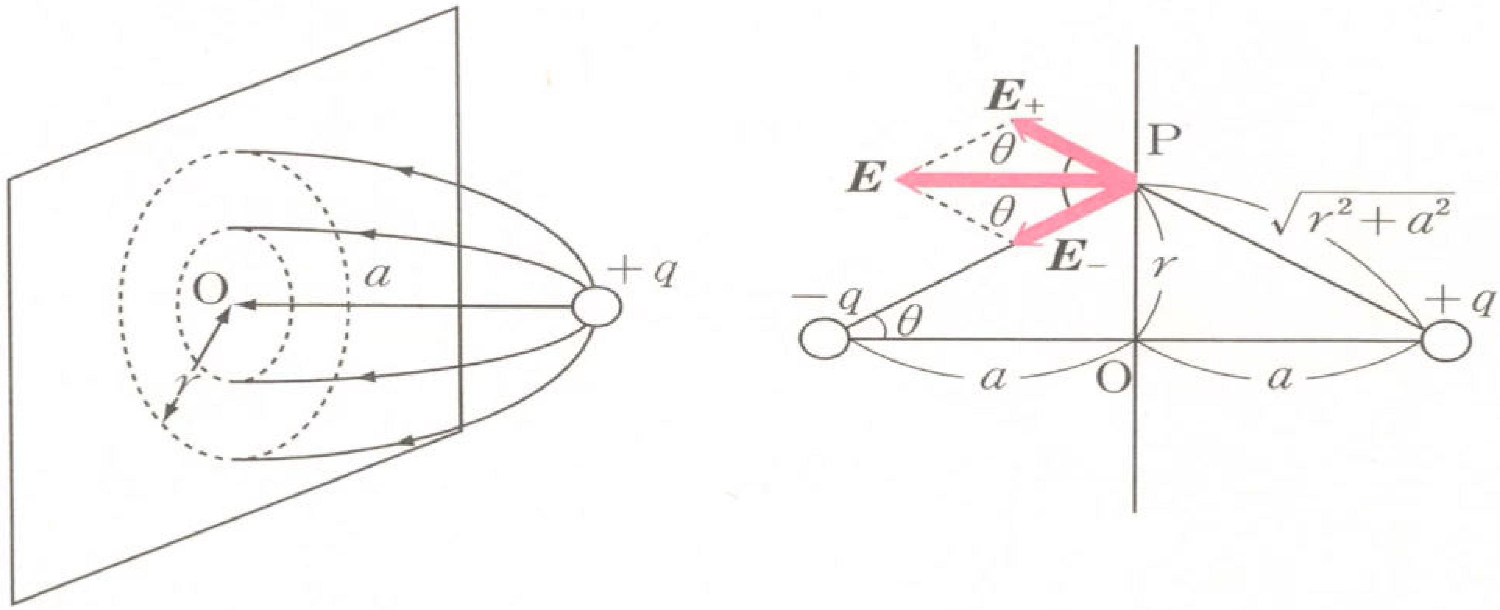
それでは，この問題に関して，一通りの結果を示しておこう。

点電荷が導体から受けるクーロン力は，いうまでもなく，鏡像のマイナスの点電荷からの引力だから，導体表面と点電荷の距離を a として，その大きさ F は，

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{(2a)^2}=\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2}$$

である。

図4-14●O を中心に半径 r の円周上で電場は等しくなる。

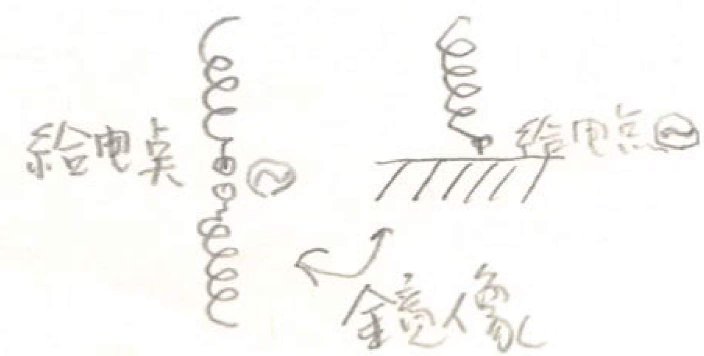


導体表面の電荷分布は，図のように，点電荷から導体表面におろした垂線の交点 O からの距離 r の関数となるだろう。この点を P として，点 P での電場の大きさを求めよう。

図より，点 P での電場の大きさ E は，点電荷 $+q$ のつくる電場の大きさを E_+，鏡像である点電荷 $-q$ がつくる電場の大きさを E_- とすると，$|E_+|=|E_-|$ だから，

$$E = 2E_+ \cos\theta$$

$E_+=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2+a^2}$，$\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{r^2+a^2}}$ を代入して，



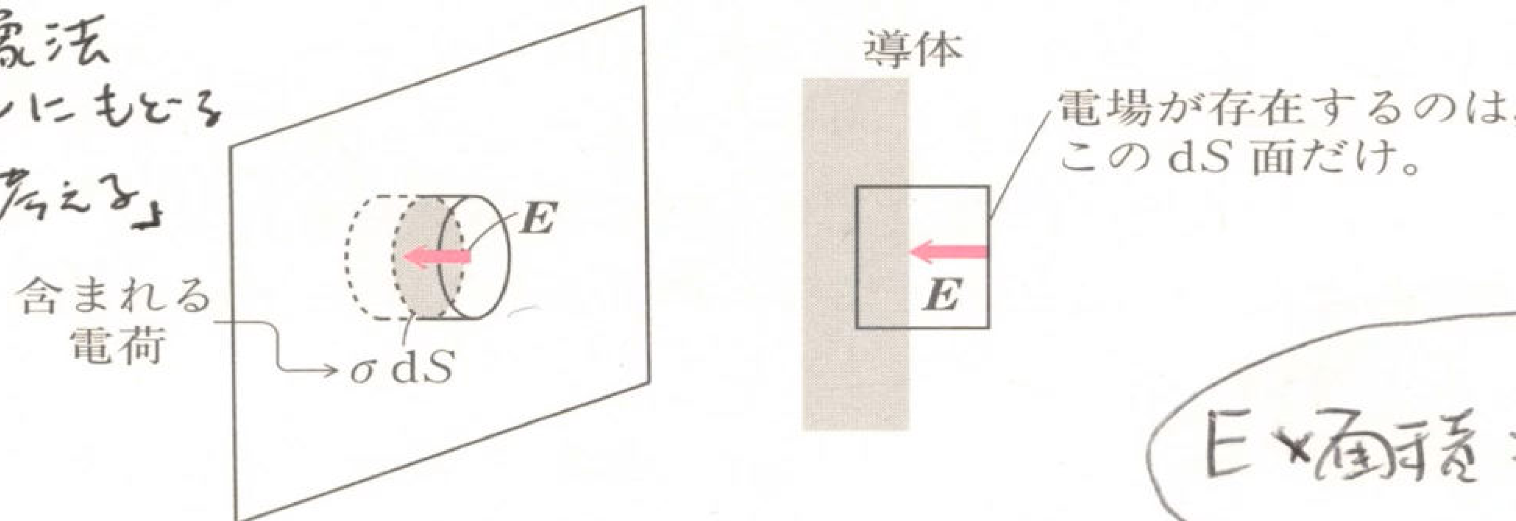
p
ref P22

導体表面の電荷は鏡像で仮定してない ⇨ 鏡像法では解けない

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{a}{(r^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

図4-15●導体表面をはさんで，断面積 dS の円筒にガウスの法則を適用。

↑ ここまで鏡像法
↓ ここからリアルにもどる
即ち「導体を考える」



$E \times 面積 = \frac{q}{\varepsilon_0}$

点Pにおける微小な面積dSを囲む円筒形の領域にガウスの法則を適用すると（電場が通る面は，導体表面の右側の円しかないから），電荷の面密度を $\sigma(r)$ として，

マイナスがぬけてる（Eが流入だからマイナス）

$$-E\,dS = \frac{\sigma(r)\,dS}{\varepsilon_0}$$

sigma

よって，

$$\sigma(r) = -\varepsilon_0 E = \frac{-qa}{2\pi(r^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

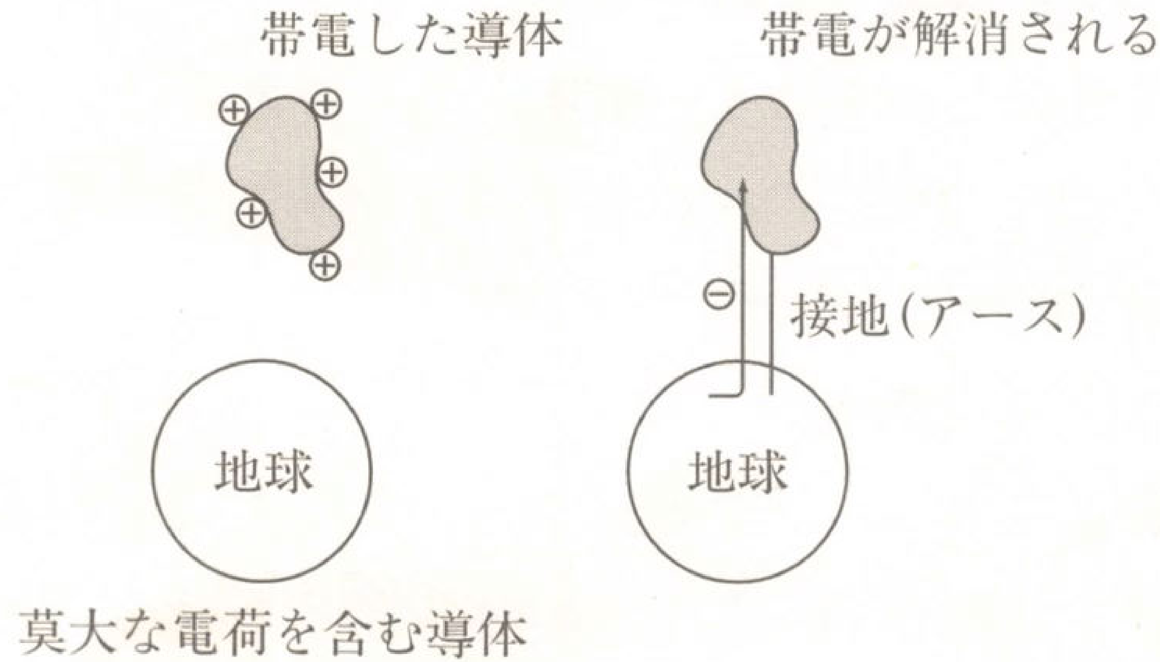
← 導体表面の電荷分布

となる。

●接地（アース）

高校物理で学ぶことではあるが，回路の問題などによく登場する**接地（アース）**について説明しておこう。

図4-16●導体の帯電を解消するため⊖が地球から導体に流れ込むが，それくらいの電荷の移動では地球は帯電しない。

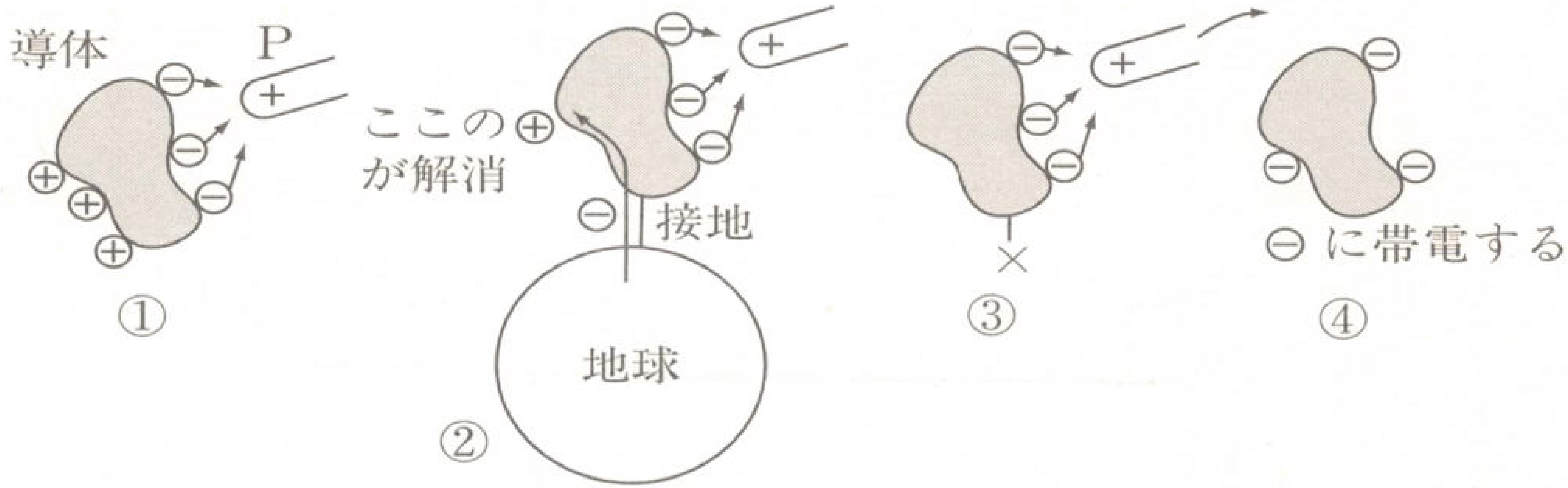


接地とは，文字通り地球につなぐという意味であるが，これは地球を莫大な電荷をもった導体とみなすのである。

たとえば，空中にプラスに帯電した導体があり，その周囲には電荷はないとしよう。この導体を接地すると，導体に帯電したプラスの電荷に引かれて，地球からマイナスの電荷が流れ込み，導体の電荷を打ち消してしまう。このとき，理屈の上からは，地球全体からなにがしかのマイナスの電荷がなくなったことになるが，地球に存在する電荷は莫大なのでほとんど無視できる。

接地(アース)は，このように物体の帯電を解消してしまう役目をするのである。テレビや冷蔵庫といった電化製品を接地して使うのは，製品が帯電することによる危険を防ぐためである。

図4-17● 帯電していない導体を，接地を利用して帯電させることもできる。



ただし，他の電荷に引かれて導体の表面に誘導されている電荷は，接地しても消すことはできない。

たとえば，図のように，

①最初，帯電していない導体に，他の電荷 P(＋) を近づけて，導体の表面に＋と－の電荷を誘導させる。

②次に，導体を接地すると，導体上の－の電荷は，電荷 P に引かれて動けないため，導体上の＋の電荷だけが解消される。

③次に電荷 P を近づけたまま，接地をはずし，

④そのあとで電荷 P を遠ざける。

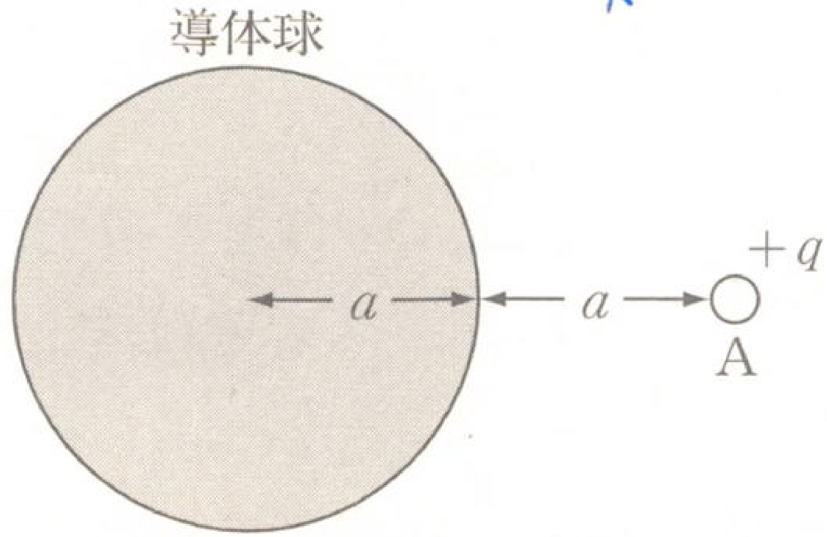
このようにすると，導体の上に－の電荷だけが残ることになる。このようにして，接地を利用して，導体を帯電させることもできる。

実習問題 4-1 真空中に半径 a の帯電していない導体球がある。この導体球の表面から距離 a の点に電気量 $q(>0)$ の点電荷 A を置いたとき，点電荷 A が導体球から受ける力を，以下のそれぞれの場合について求めよ。ただし，真空の誘電率を ε_0 とする。

(1) 導体球を接地している場合。

(2) 導体球を接地していない場合。 ← 難問

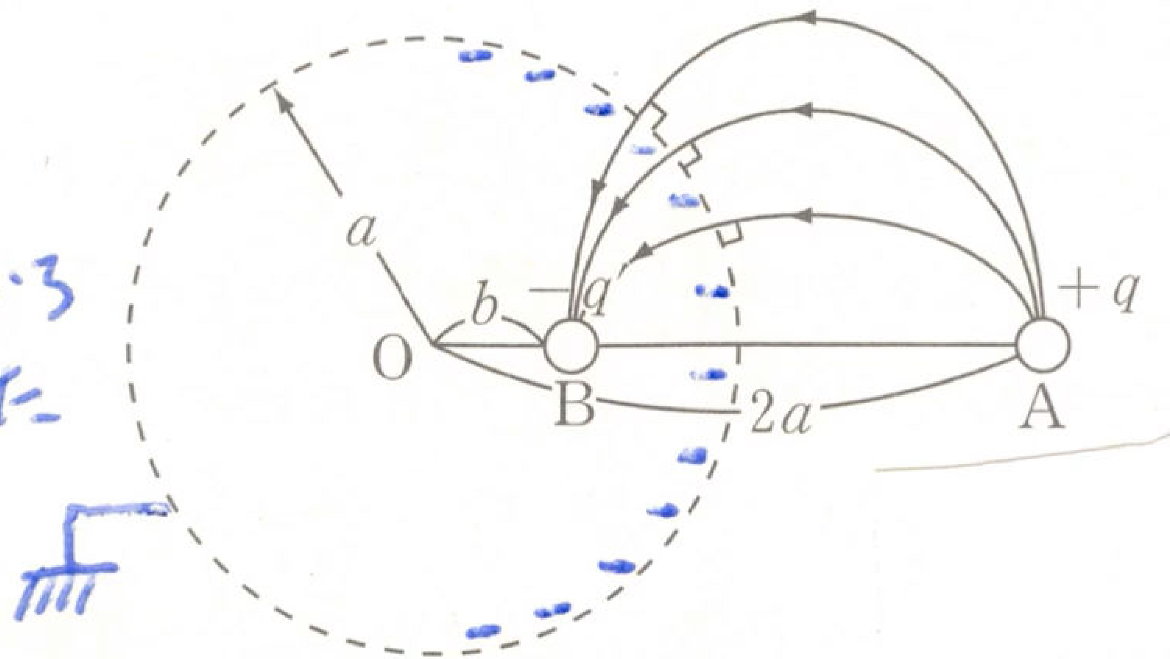
図4-18



解答＆解説 (1) 鏡像法を用いて解くことを考えよう。鏡像法は，導体表面を鏡とみなすわけだが，導体の表面が球面になると，光学の鏡像とは話が少し違ってくる。鏡像法のポイントは，導体の表面で電場が垂直になること，また，導体球の電位がどこも一定であるという境界条件にある。

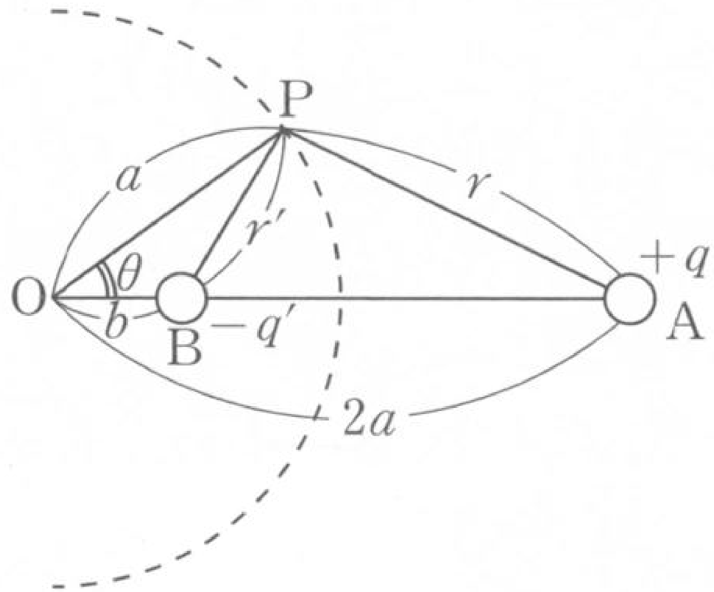
図4-19● 中心から距離 b に点電荷 $-q'$ を置く。

接地してるから
+は逃げた



そこで，対称性を利用して，導体球の中心と点電荷Aを結ぶ直線上の，導体球の中心から距離 b の地点に，鏡像である $-q'$ の点電荷Bを考える。「導体の存在を1つの点電荷に置き換えるという仮定だけ認め，その位置や電気量は未知としておくわけである。その上で，この点電荷Bと点電荷Aのつくる電位が，導体球の表面では0になるという境界条件をみたすように，距離 b や電気量 $-q'$ を決めることにしよう。」重要!

円上どこでも $V_P=0$
の条件だけで解ける。
(垂直入射の条件使わなくても)



導体表面の任意の点をPとし，∠POAを θ とする。このとき(導体がなく，点電荷Aと点電荷Bだけがあると仮定して)，点Pでの電位 V は，

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r}-\frac{q'}{r'}\right)$$

よって，$V=0$ という境界条件を設定すると，

$$\frac{q}{r}-\frac{q'}{r'}=0$$

すなわち，

$$qr'=q'r$$

$$qr' = q'r$$

三角関数の余弦定理を用いて,

$$q\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta} = q'\sqrt{(2a)^2+a^2-4a^2\cos\theta}$$

$$q^2(a^2+b^2-2ab\cos\theta) = q'^2a^2(5-4\cos\theta)$$

ここで, $q'=\mu q$, $b=\lambda a$ とおくと, μ と λ だけの式になる。それを整理して,

$$1+\lambda^2-5\mu^2-2(\lambda-2\mu^2)\cos\theta = 0$$

半径 a の球面上のどこでも電位 V が 0 という条件は, 角度 θ がどんな値であろうと上式が成立するということだから,

$$\begin{cases} 1+\lambda^2-5\mu^2 = 0 \\ \lambda-2\mu^2 = 0 \end{cases}$$

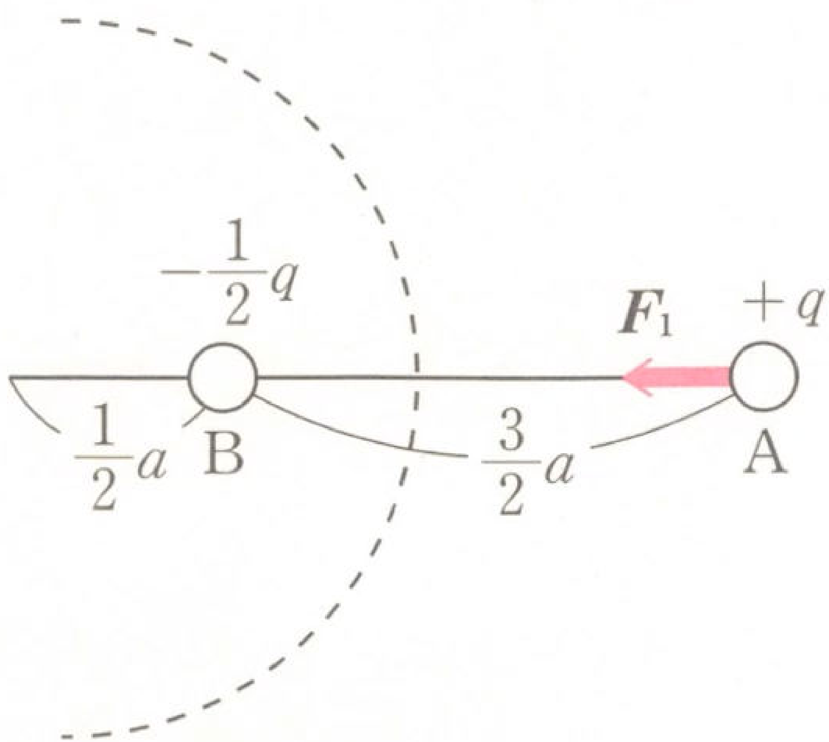
が, 恒等的にみたされねばならない。これは簡単な連立方程式である。これを解いて($\mu=1$, $\lambda=2$ は, この場合の解にはならないので),

↖ Aに−qを足す⇒ゼロクーロン

$$\begin{cases} \mu = \dfrac{1}{2} \\ \lambda = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{すなわち,} \quad \begin{cases} q' = \text{(a)} \boxed{q/2} \\ b = \text{(b)} \boxed{a/2} \end{cases}$$

を得る。つまり，電気鏡像は，OA の直線上の中心から半径 $a/2$ のところに，電荷 $-q/2$ の点電荷を置けばよいということになる。

図4-21● けっきょく，$\dfrac{3}{2}a$ 離れた q と $-\dfrac{1}{2}q$ に働く引力と同等になる。



よって，点電荷 A が導体球から受ける引力(＝点電荷 B から受ける引力)の大きさ F_1 は，

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|\,qq'\,|}{\left(a+\dfrac{a}{2}\right)^2}$$

$$= \boxed{\text{(c)}\ q^2/18\pi\varepsilon_0 a^2} \quad \cdots\cdots(答)$$

(2) 導体球を接地していない場合。

まず，導体球を接地した場合と，接地していない場合で，何が違うかを明確にしておこう。導体球を接地した場合，プラスの点電荷 A の引力によって，導体表面の A に近い方には，マイナスの電荷が分布する。しかし，導体球に含まれるプラスの電荷は(点電荷 A の斥力を受けて)，接

（１）からアースを切って（２）じゃない。（２）は独立した問

地していることによって，導体球から地球へと去ってしまう(あるいは，マイナスの電子が導体球に流れ込んでくると考えてもよい)。つまり，この場合，導体球全体はマイナスに帯電することになる(設問(1)では，これを鏡像である点電荷Ｂに置き換えたのだった)。

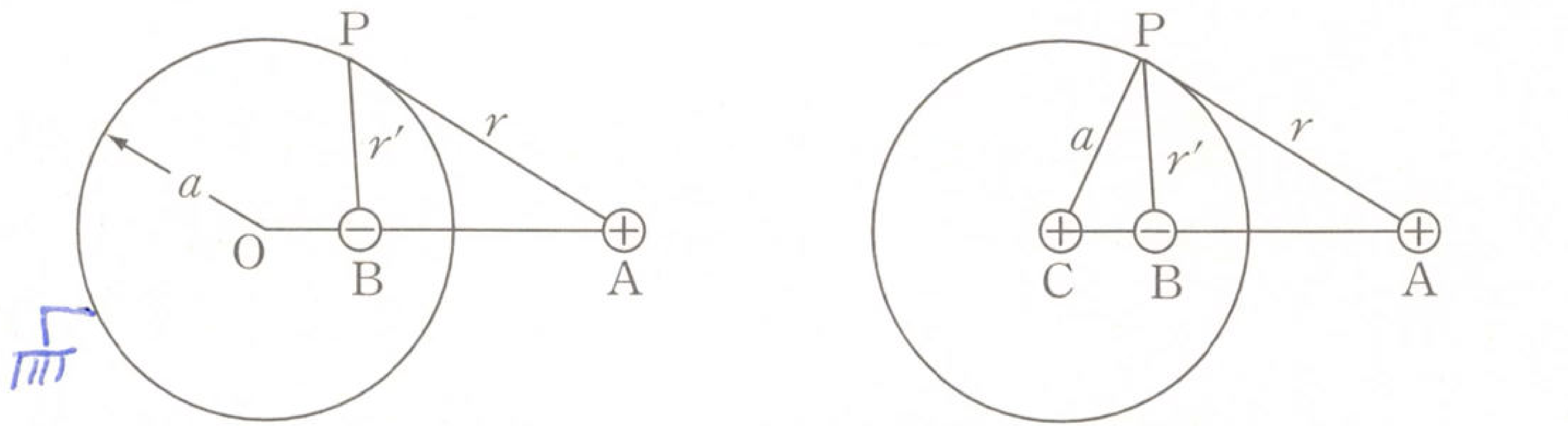
しかし，導体球が接地されずに，電荷の逃げ道がない場合，導体球全体の電荷は０でなくてはならないから，さきほどの電気量 $+q'$ 分の電荷が表面上のどこかに分布しなければならない。

つまり，導体球を接地するか，しないかの違いは，電気量 $+q'$ の電荷がないか，あるかの違いということになる。$-q'$ の分布は変わらない

そこで，この $+q'$ の電荷分布を，鏡像法によって，導体内のどこかに点電荷Ｃとして置くことを考えよう。前問の解を利用する

アースはフワフワで力を及ぼさない、という説明は間違い

図4-22 導体球が接地されていない場合の鏡像BとC



AとBによって，球面上の電位はどこも0

球面上の電位を一定にするには，Cを球の中心に置かねばならない。

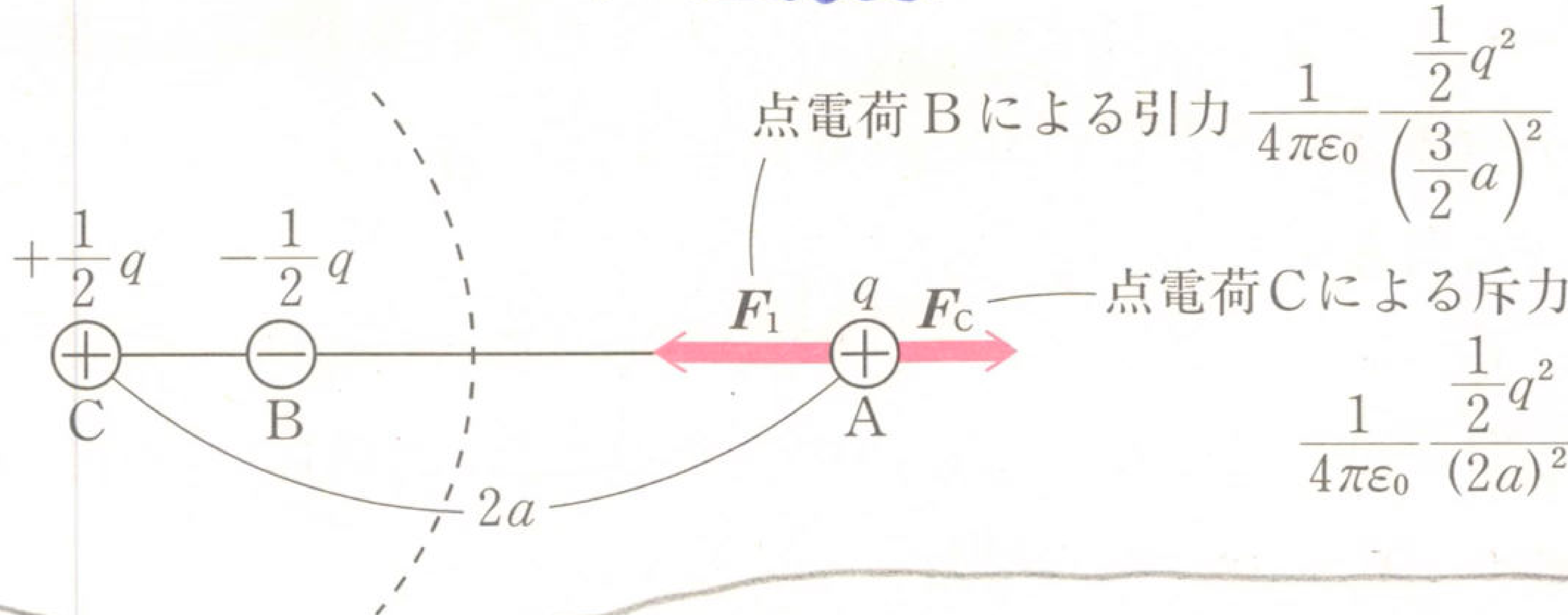
この場合，導体球の電位は0にはならない。なぜなら，点電荷Aと点電荷Bがあるとしたとき，球面の電位が0であったのだから，それに＋の点電荷Cが加われば，その球面の電位はプラスになるであろう。

しかし，導体球の電位は必ず一定でなければならないから，点電荷Cを置くことによって，半径 a の球面を一定の電位にするためには，点電荷Cは球の中心に置かないといけない。 あくまでも導体あいき

点電荷Aと点電荷Bによって電位0となった球面に対し，その球の中心に点電荷C$(+q')$を置けば，球面の電位は一様に，$\dfrac{+1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q'}{a}$ となるであろう。

そこで，点電荷 A が導体球から受ける引力(＝点電荷 B ＋点電荷 C から受ける引力)の大きさ F_2 は，

図4-23 点電荷に働く引力 F_2 は $F_1 - F_C$ となる。



$$F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}|qq'|\left\{\frac{1}{\left(\frac{3}{2}a\right)^2} - \frac{1}{(2a)^2}\right\}$$

$$= \boxed{\text{(d)}\ \frac{7q^2}{288\pi\varepsilon_0 a^2}} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

このように，導体を接地するかしないかで，状況は違ってきてしまうことを心しておこう。

さて，この問題では，点電荷Aを導体球の中心から $2a$ と固定したが，点電荷Aを導体球からどんどん離していくと，どうなるであろうか。

直感的にも明らかであるが，このとき，鏡像である点電荷Bは，球の中心にどんどん近づいていくであろう。それに対して，導体球が接地されていないとすると，プラスの点電荷Cはつねに球の中心にある。それゆえ，点電荷Aが導体から十分に離れた点にあれば，鏡像である点電荷Bと点電荷Cは十分近くにくっついている。つまり，これは電気双極子である。

接地してない

図4-24●一様な電場の中に置かれた導体球は，電気双極子となる。

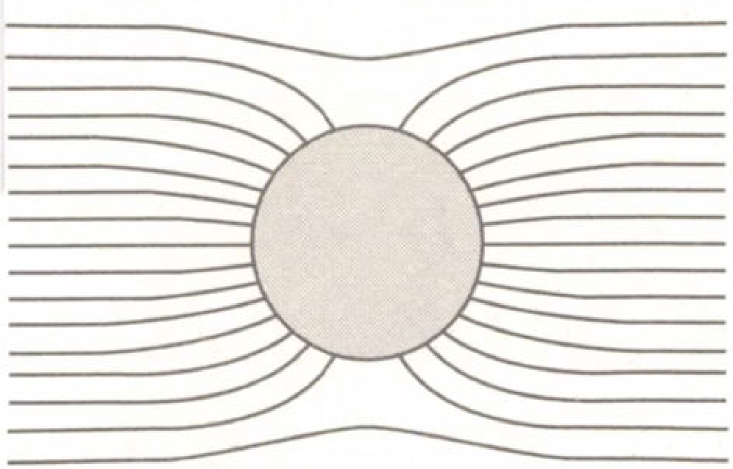
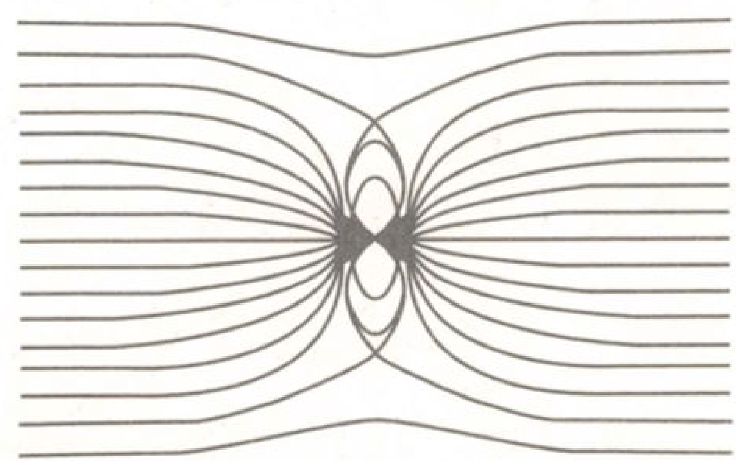
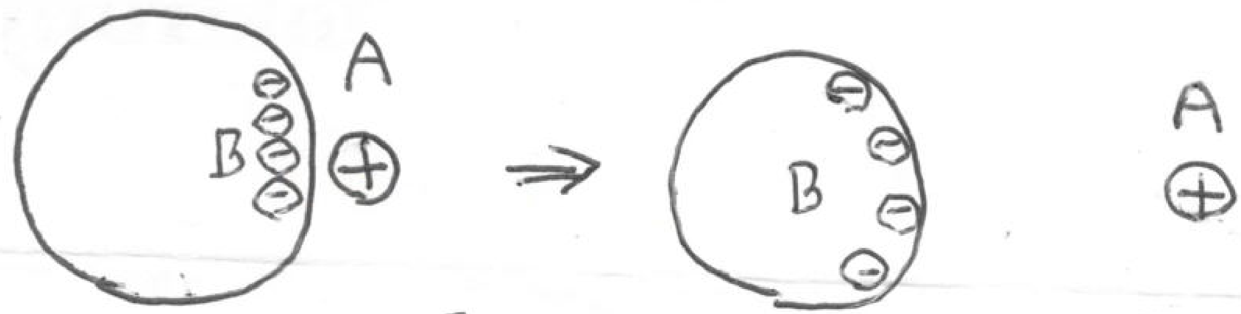


図4-6　再掲

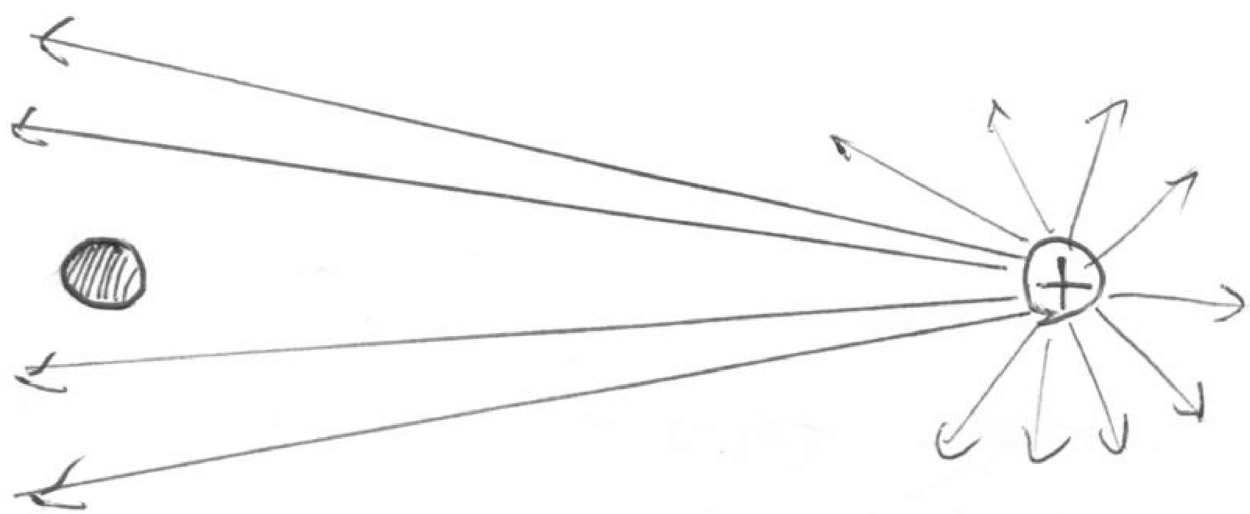


一様な電場の中に電気双極子を置いたときの電場

このようにして，一様な電場の中に接地していない導体球を置くと，それは一様な電場内に電気双極子を置いたときと同じ電場を周囲につくるという，興味深い結果が得られることになる。



Aが近いとBも寄る　　逆もしかり



Aが遠いと球の近くで一様な
電界に近付く

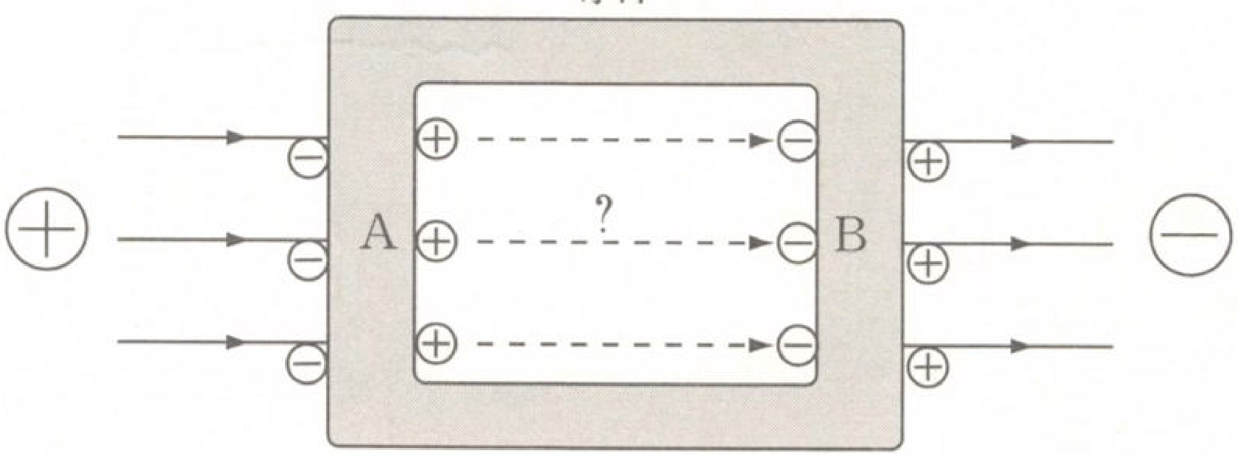
●静電遮蔽

導体のしめくくりとして，導体の中にうがたれた空洞について話しておこう。

よく知られたことであるが，このような空洞の内部では，導体の外で何が起ころうと電気的な影響を受けない。たとえば，落雷の恐れのあるとき，自動車や電車といった金属の箱の中にいると安全だといわれるのは，この事実による。

静電気の言葉で言い換えれば,「導体の外部にどのような電場があろうと，空洞内の電場は(空洞内に電荷がないかぎり) 0 である」。これを**静電遮蔽**という。

図4-25 導体内の空洞に電場は存在するか？
Aから B に傾斜があって，かつ A と B は等電位にはなりえない。



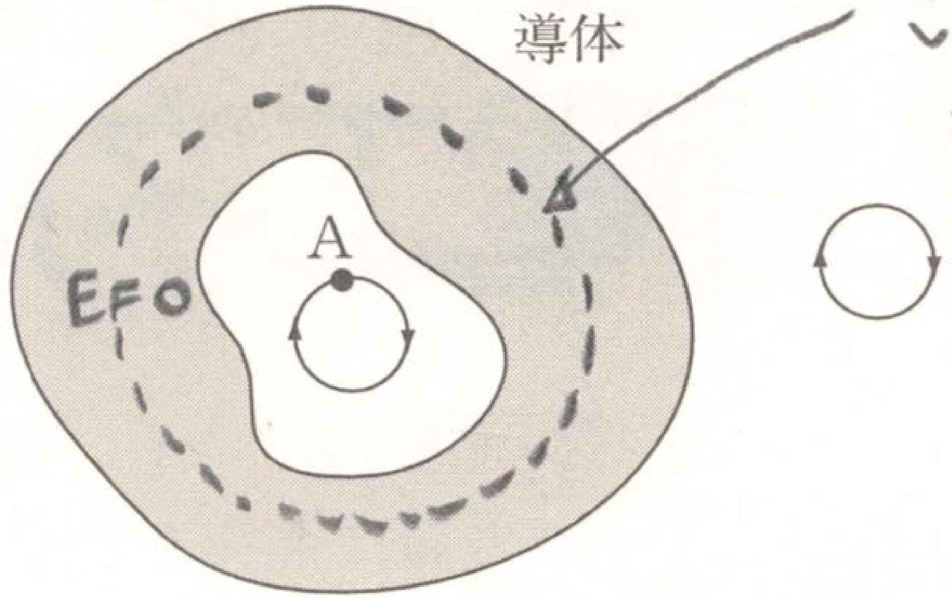
たとえば，図のような場合，外部に電場をかけると，空洞の表面に図のような電荷が分布し，空洞内に点 A から点 B に向かって電場が生じるように思える。

電場とは電位の傾きであるから，点 A から点 B に向かって電気力線をたどっていくと，この間，この空洞内の電位は着実に下がっていくはずである。そこで，電気力線の終着点 B では，出発点 A より必ず電位が低くなければならない。ところが，1つの導体の電位はどこも同じでなければならないはずだから，これは明らかに矛盾である。つまり，空洞の表面にはいかなる電荷も分布しないし，電場も存在しない。

内側　　次頁に証明☆

図4-26●回転する電場は，空洞の内外にかかわらず存在しない。
（ただし，静電気力の範囲内で。）

☆



この袋にガウス則を適用すると．0＝0
∴空洞内面に表面電荷なし

導体表面のある点からある点に向かって電場があるといけないのだから，図のように空洞の空中にだけ「回転」するような電場が存在できないだろうか。

このような閉じた輪の一点をＡとして，Ａから電気力線にそってたどっていくと，電位が下がっていくはずである。それがふたたび点Ａにくると，電位は元に戻らないといけないから，まるでエッシャーのだまし絵のように，下がっているはずが，いつの間にか元の高さに戻っているという矛盾を生じてしまう。

●rot $\boldsymbol{E}=0$

じつは，導体内の空洞にかぎらず，上に述べたような理由で，このように回転する閉じた電場は，いかなる場所にも存在しえない。この閉じた輪を微小な領域にまでもっていけば，付録「やさしい数学の手引き」にしたがって，我々は，

P 227

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}=0$$

というイメージを得る。すなわち，電場は点電荷からわき出したり，吸い込まれたりという「発散」($\mathrm{div}\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon_0$)はありうるが，「回転」は存在しないという法則である。

しかし，これもまた電荷が静止している場合という条件つきであることを心しておこう。我々は目下，静電気力だけを対象にしている。電荷が動き(電流が生じ)それが時間的に変化する，などというような場合には，もはや rot $\boldsymbol{E}=0$ ではなくなる。それについては，講義 9 で考察することになるだろう。