第 4 回講義：関数の極限について（教科書 1.4）．

• （関数の極限の定義）$\mathbb{R}$ の部分集合 A で定義されている関数 $f(x)$ を考える．$a \in \mathbb{R}$ とする．

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$$

であるとは

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists \delta > 0) \quad (\forall x) \quad (x \in A \text{ かつ } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon)$$

であることを意味する．一般に極限が問題になるのは関数 f が点 a で定義されないか，または定義されていても f の値が点 a でジャンプする場合だから，上の定義では $0 < |x - a| < \delta$ となっている．上の論理式を「心を込めて」日本語で表現すると，次のようになる：「どんなに小さい $\varepsilon > 0$ に対しても，それに応じて十分 $\delta > 0$ を小さくとれば，すべての $x \in A$ に対して『$0 < |x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$』になっている.」このように「限りなく近づく」という感覚を「有限の言葉」で言い換えることによって，論理にのせて極限の議論を行うことが可能になる．これが，この言い換えのメリットである．

この言い換えによって，例えば，次のような極限計算における基本定理（こういうことを記述する言語がないと当たり前としか言いようのなかったこと）を数学的に**証明できるようになる**．第一回講義で,「積の極限は極限の積」を数学的に証明したが，あのような厳密な議論が関数の極限でもできるようになる．

• （定理）関数の極限は（分母が 0 の割り算を除いて）4 則演算で保たれる：

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha, \ \lim_{x \to a} g(x) = \beta$$

ならば

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \alpha \pm \beta \ , \\
&\lim_{x \to a} (f(x) g(x)) = \alpha\beta \ , \\
&\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (\text{ただし } \beta \neq 0) \ .
\end{aligned}$$

である．

• 計算例その一

(1) $a > 0$ のとき $\lim_{x \to a} \dfrac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2} = \dfrac{3a}{2}$.
なぜなら

$$\lim_{x \to a} \frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2} = \lim_{x \to a} \frac{(x - a)(x^2 + xa + a^2)}{(x - a)(x + a)} = \lim_{x \to a} \frac{x^2 + xa + a^2}{x + a} = \frac{3a}{2}$$

(2) $a > 0$ のとき $\lim_{x \to a} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = \dfrac{2}{3\sqrt[6]{a}}$.
なぜなら，$y = \sqrt[6]{x}$, $b = \sqrt[6]{a}$ とおくと求める極限は (1) より

$$\lim_{y \to b} \frac{y^2 - b^2}{y^3 - b^3} = \frac{2}{3b} = \frac{2}{3\sqrt[6]{a}}$$

である．

(3) $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ は存在しない．理由：$\sin \frac{1}{x} = 0$ となる x は $\frac{1}{x} = n\pi$（nm は整数）を満たす．したがって，$y = \sin \frac{1}{x}$ のグラフは $x = \frac{1}{n\pi}$ すなわち $\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \ldots, \frac{1}{n\pi}, \ldots$ において x 軸と交わり，$x = \frac{1}{n\pi}$ と $x = \frac{1}{(n+1)\pi}$ の間における振幅は 1 である．

- （定理）はさみうち原理.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha\ ,$$
$$\lim_{x\to a} g(x) = \alpha\ ,$$
$$f(x) \le h(x) \le g(x)$$

ならば

$$\lim_{x\to a} h(x) = \alpha$$

である.

- （重要な極限定理，指数関数の微分法の基礎）

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$$

（証明 1）指数関数の定義から

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

だから

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

である．$x \neq 0$ のとき両辺を x で割ると

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n!} + \cdots$$

である．ここで $x \to 0$ とすれば $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ である．議論に $\ldots$ があって気持ち悪ければ第二の証明を見てほしい：

（証明 2）$0 < x < 1$ なら

$$\begin{aligned} 1 + x < e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \\ &< 1 + x + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

である．よって

$$1 < \frac{e^x - 1}{x} < \frac{1}{1-x} \quad (0 < x < 1)$$

である．$-1 < x < 0$ なら $0 < -x < 1$ だから $1 - x < e^{-x} < \frac{1}{1+x}$ である．よって

$$1 + x < e^x < \frac{1}{1-x}$$

である．これから

$$\frac{1}{1-x} < \frac{e^x - 1}{x} < 1 \quad (-1 < x < 0)$$

である．はさみうち原理によりほしい極限定理を得る．

- （重要な極限定理，3 角関数の微分法の基礎）極限公式

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

が成り立つ．

（説明）半径 1 の扇形 $O\overset{\frown}{AB}$ の中心角を $\angle AOB = x > 0$ とする．また，OB を延長した直線と点 A において OA に直交する直線の交点を C とする．このとき

$$\triangle OAB \subset \text{扇形 } O\overset{\frown}{AB} \subset \triangle OAC$$

である．この包含関係から従う面積の不等式の 2 倍をとると

$$\sin x < \underbrace{2 \times \pi \times \frac{x}{2\pi}}_{x} < \tan x$$

である．したがって

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

である．なぜなら $\sin x < x$ から $\frac{\sin x}{x} < 1$ であり，$x < \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ から $\cos x < \frac{\sin x}{x}$ だからである．ここで $x > 0$ のまま $x \to 0$ とすると挟み撃ち原理から

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

となることがわかる．$x < 0$ の時は $-x > 0$ であり $\sin(-x) = -\sin x$ ゆえ $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x}$ である．したがって $x > 0$ の場合に帰着する．□

• 計算例その二

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$

考え方．

(1) $t = \log(1+x)$ とおくと $x \to 0$ は $t \to 0$ と同値であり，$x = e^t - 1$ である．したがって求める極限は $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{t}{e^t - 1} = 1.$

(2) 方法 1：分母分子に $1 + \cos x$ を掛ける．求める極限は

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \frac{1}{1+\cos x} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ .$$

方法 2：2 倍角公式 $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$ を使う．$1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$ だから求める極限は

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2(x/2)}{4(x/2)^2} = 1/2\ .$$

• 課題：

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{5}} - (1-x)^{\frac{1}{5}}}{(1+2x)^{\frac{1}{3}} - (1-2x)^{\frac{1}{3}}}$ の計算．

ヒント：計算例その一の真似をする．分母分子を x で割って分子を $(\frac{(1+x)^{\frac{1}{5}}-1}{x} - \frac{(1-x)^{\frac{1}{5}}-1}{x})$ と書き換えて，例えば $\frac{(1+x)^{\frac{1}{5}}-1}{x}$ を $A = (1+x)^{\frac{1}{5}}$ とおき $x = A^5 - 1$ と書き換えることによって極限を計算しやすいように変形する．

2. 教科書の問 4.1, 4.2.