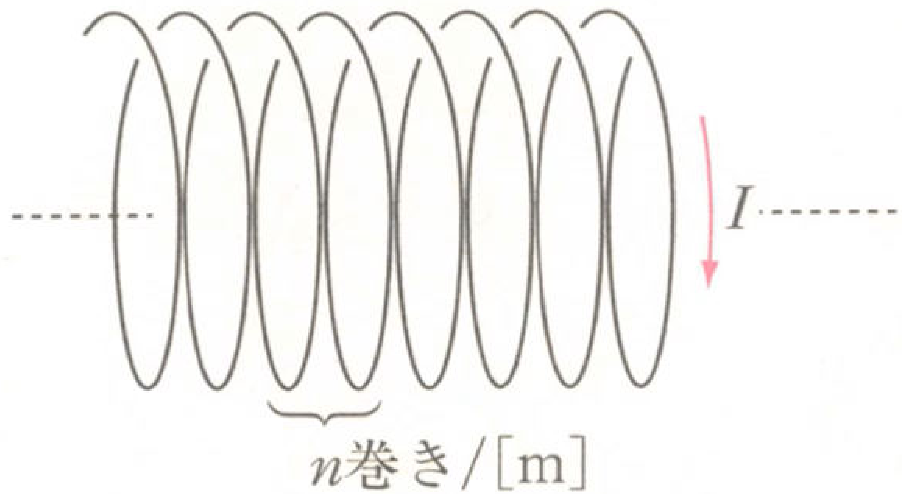
●ソレノイド・コイルのつくる磁場

問 2　無限に長いソレノイド・コイルの内部に生じる磁場の大きさを，アンペールの法則を用いて求めよ。ただしコイルに流れる電流を I，コイルの巻き数を単位長さあたり n とする。また，コイルの外部には磁場は生じないと仮定してよい。

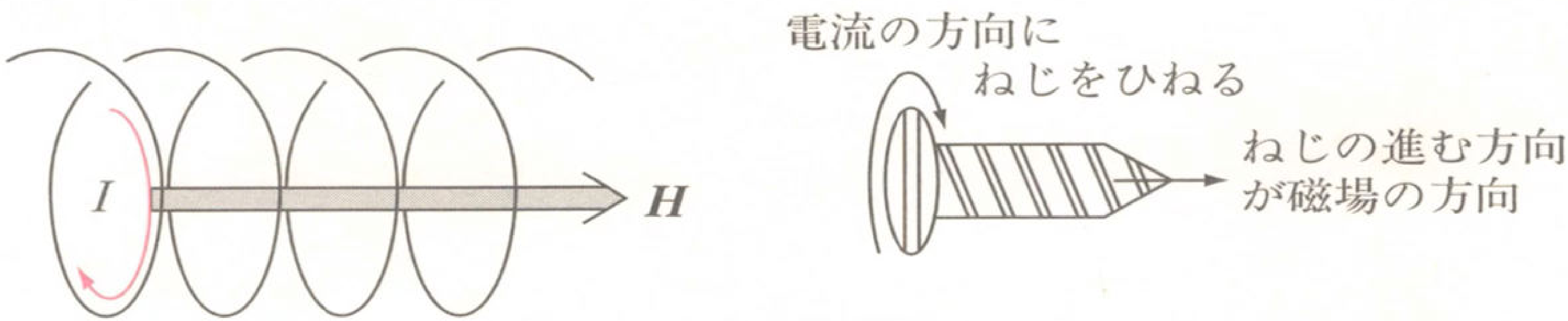
図7-19



解答　「(無限に長いソレノイド・)コイルの外部に磁場が生じない」という仮定は，さほど自明ではない(ほとんどのテキストは，このことを自明のこととしているのだが……)。ここでは，とりあえずこの仮定を認め，後程あらためて別の方法で，そうなることを確認することにしよう。

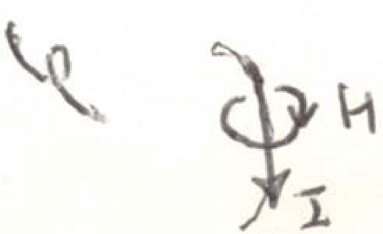
円筒コイルの中心軸の方向を x 方向とすると，コイルの内部に生じる磁場は x 軸と平行になる。なぜなら，コイルは無限に長いので，どの x 座標をとっても，その断面は同等である。もし，x 軸に平行ではない磁場の成分があれば(つまり磁場が平行でなく傾いていれば)，どの断面も同等という対称性が破られてしまうからである。

図7-20



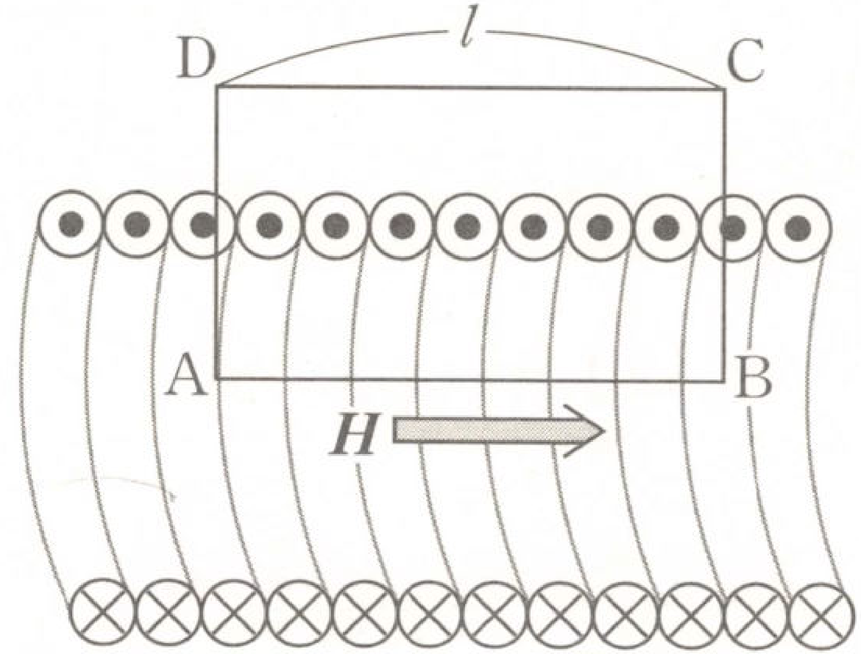
コイルの内部に生じる磁場の向きは，右ねじの規則より，コイルを流れる電流の方向にねじをひねったとき，ねじの進む方向である。

直線電流の場合は，磁場の方向にねじをひねったとき，ねじの進む方向が電流の方向であった。コイルの場合は，電流と磁場の関係が逆になっているが，右ねじの規則はそのまま使えるのである。



これでOK.

図7-21●長方形 ABCD にアンペールの法則を適用する。



さて，図のような長方形 ABCD の閉曲線を考える。辺 AB はコイルの内部を通る x 軸に平行な直線で，その長さを l とする。辺 CD はコイルの外部にとる。

この長方形 ABCD にアンペールの法則を適用してみよう。

この長方形にそって進むときカウントされる磁場は，磁場が x 軸に平行ということより，辺 AB の部分だけである。BC と DA は磁場に直角だからカウントされないし，CD はコイルの外部だからである。

AB 上の磁場の大きさはどこも同じはずだから，それを $\boldsymbol{H}$ とすると，

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

は，積分するまでもなく，

$$Hl$$

である。

一方，この長方形をつらぬくコイルの本数は nl だから，長方形をつらぬく電流の合計は，

$$nlI$$

である。よって，アンペールの法則より，

$$Hl = nlI$$

すなわち，

$$H = nI$$

結果のみ
天下りで高校公式

という簡単な法則が出てくる。◆

まっすぐ無限　　コイルが無限

∞ か ∞

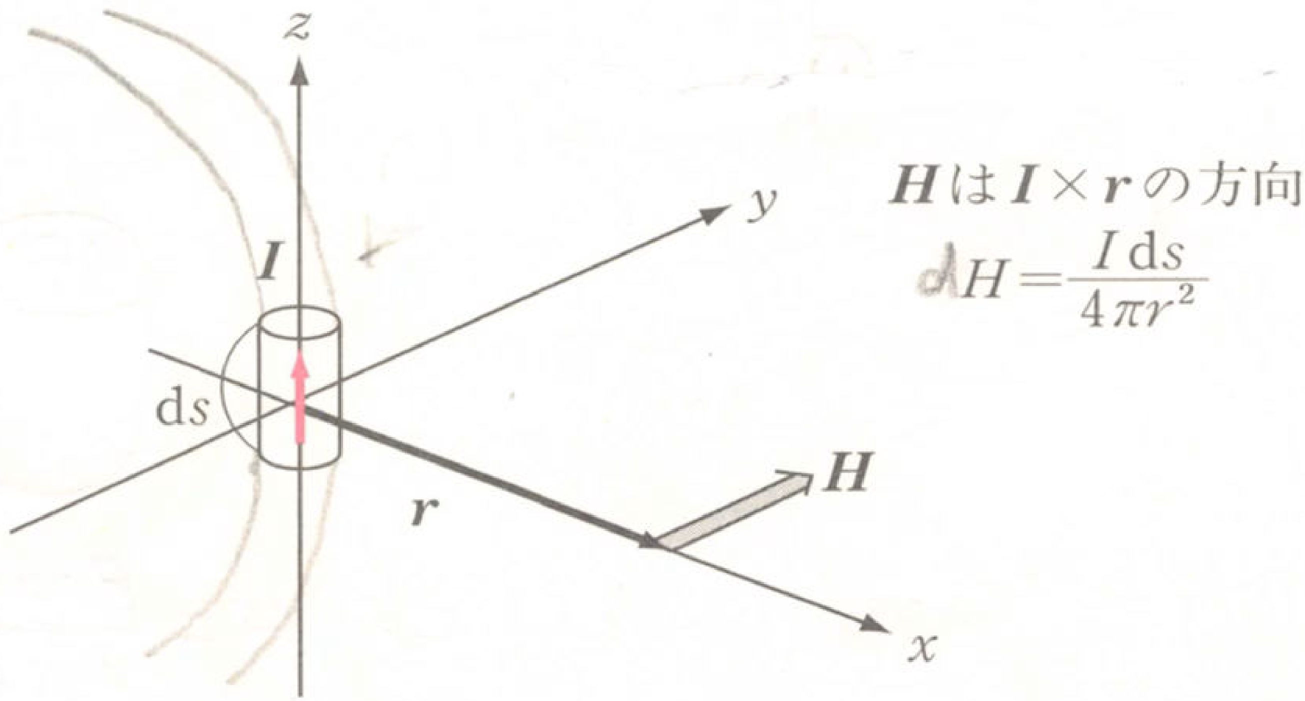
●ビオ-サバールの法則

電流がつくる磁場を求めるもう１つの有名な方法が，**ビオ-サバールの法則**である。有名な法則ではあるが，こちらはアンペールの法則と比べるといささか複雑である。それゆえ，たんに磁場を求める手段ということであれば，アンペールの法則を使えるケースでは，そちらで処理した方が賢明である。

しかし，我々はたんに答えを求めるための公式を覚えようとしているのではない。本来，**アンペールの法則もビオ-サバールの法則も，同じ自然法則であるはず**である。この２つの法則がどのようにして結びついているのか，そこのところまで知らなければ，本書の読者諸氏は納得されないであろう。そして，それが理解されれば，たんに磁場の法則だけではなく，静電場と静磁場を合わせた電磁気学の美しい体系が現れることだろう。本講義の第一の目的はそこにある。

まず，ビオ-サバールの法則を簡明な形で紹介する。

図7-22●ビオ-サバールの法則の基本形

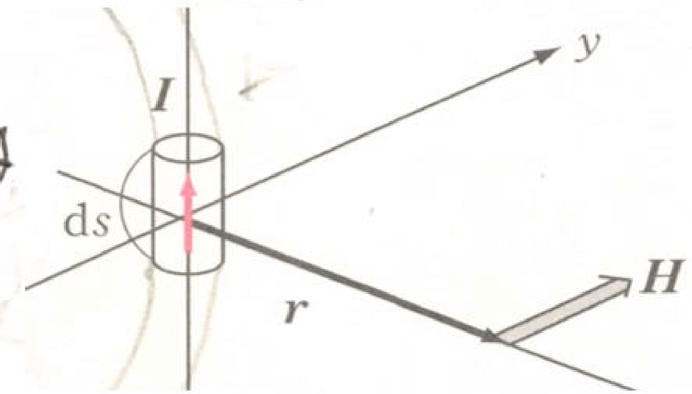


座標軸 x-y-z をとり，原点を通り z 軸にそった導線を考える。この導線の中を z 軸正方向に電流 I が流れているとしよう。電流はとうぜん連続した回路の中を流れているわけだが，いま，原点近傍の z 軸にそった $\mathrm{d}s$ という短い距離を流れている電流だけに着目する。ビオ-サバールの法則は，微小な電流がつくる磁場に関する法則なのである（それゆえ，長い距離を流れる電流がつくる磁場を求めるには，$I\,\mathrm{d}s$ を積分しなければならない。だから複雑になるのである）。

要するに円形の導線

$dH = \frac{I ds \times r}{4\pi r^3}$ ⇨ スカラーにすると $dH = \frac{I ds \cdot \sin\theta}{4\pi r^2}$

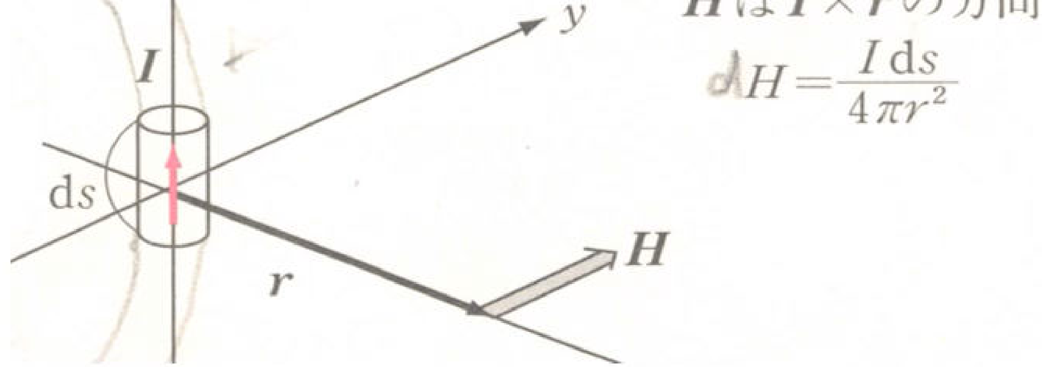
この微小な電流素片 $I\,\mathrm{d}s$ が，x 軸上の $x=r\,(>0)$ の点につくる磁場 $\mathrm{d}H$ について考えよう。この磁場の向きは，右ねじの規則より y 軸正方向である。それゆえ，ベクトル積を用いて磁場 $\mathrm{d}H$ の方向を示すなら，それは $\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{r}$ の方向である。



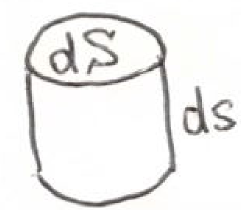
そして，磁場の大きさは，I と r が直角のときは

$$\mathrm{d}H = \frac{I\,\mathrm{d}s}{4\pi r^2}$$ 覚

となる。」これが，ビオ-サバールの法則の「基本形」である。基本形と書いた意味は，もし電流 $\boldsymbol{I}$ と位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ が直角でない場合，磁場の大きさは，ベクトル積 $\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{r}$ の大きさに比例して小さくなるからである（つまり，$\boldsymbol{I}$ の $\boldsymbol{r}$ に対する直角成分だけが磁場をつくるのに寄与する）。



この導線の断面積を dS，電流密度を i とすると，$I=i\,\mathrm{d}S$ であるから，dS×ds の微小な体積を dV として，



$$I\,\mathrm{d}s = i\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}s = i\,\mathrm{d}V$$

である。さらに，電流密度 i は，電荷密度 ρ に速度 v をかけたものであったから(111ページ)，

$$I\,\mathrm{d}s = i\,\mathrm{d}V = \rho v\,\mathrm{d}V$$

となる。けっきょく，電流の代わりに電荷密度 ρ とその速度 v を用いて，ビオ-サバールの法則を書けば，

$$\mathrm{d}H = \frac{\rho v}{4\pi r^2}\,\mathrm{d}V \qquad \mathrm{d}H = \frac{I\,\mathrm{d}s}{4\pi r^2}$$

基本形を一般形にして，ベクトル表示すると，

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H} = \frac{\rho \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}}{4\pi r^3}\,\mathrm{d}V \Rightarrow dH = \frac{\rho v \sin\theta}{4\pi r^2}\,dV$$

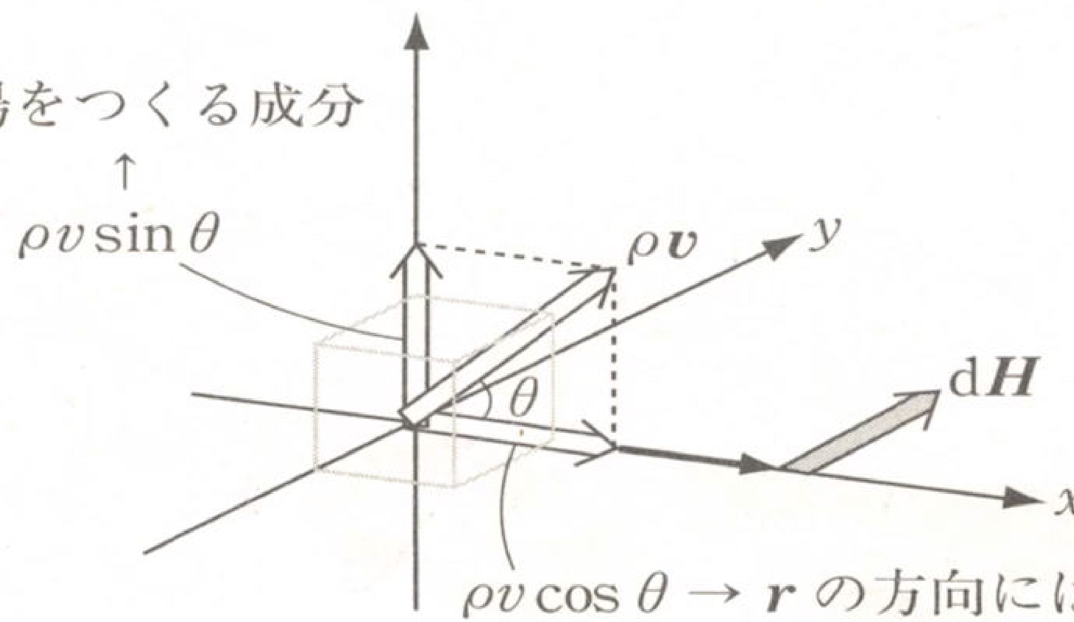
スカラー表記

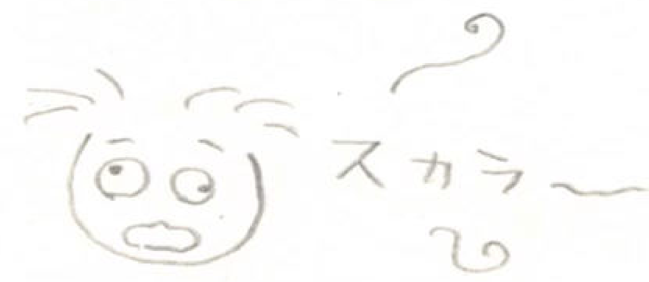
図7-23●磁場の大きさは $\rho\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}$ に比例

$$d\boldsymbol{H} = \frac{\rho \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}}{4\pi r^3} dV \Rightarrow dH = \frac{\rho v \sin\theta}{4\pi r^2} dV$$

スカラー表記

図7-23 磁場の大きさは $\rho \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}$ に比例





(分母の r が 3 乗になっているのは，もちろん，分子に記号 $\boldsymbol{r}$ を入れたためである。この法則は本質的に，クーロンの法則と同じ逆 2 乗則である。)

磁場の大きさが $\sin\theta$ の割合で減るのは，図のように電荷の速度を分解したとき，磁場をつくる速度成分は $\boldsymbol{r}$ に直角な成分だけだからである。すなわち，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{r}$ のベクトル積というわけである。→ 演習7-2へ

(分母の r が3乗になっているのは，もちろん，分子に記号 $\boldsymbol{r}$ を入れたためである。この法則は本質的に，クーロンの法則と同じ逆2乗則である。)

磁場の大きさが $\sin\theta$ の割合で減るのは，図のように電荷の速度を分解したとき，磁場をつくる速度成分は $\boldsymbol{r}$ に直角な成分だけだからである。すなわち，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{r}$ のベクトル積というわけである。→ 演習7-2へ

パス

さて，

$$\mathrm{d}H = \frac{\rho v}{4\pi r^2}\,\mathrm{d}V$$

を見て，何を感じられるであろう？

速度 v を取り除くと，

$$\frac{\rho}{4\pi r^2}\,\mathrm{d}V$$

であるが，これは密度 ρ の電荷がつくる電場(正確には電束密度)の式！である。

$\rho\,\mathrm{d}V$ を，考えている電荷分布で積分すれば，全体の電気量 q になるから，

$$\frac{q}{4\pi r^2} = D$$

となり，クーロンの法則そのものである。

ただし，これは電束密度 $\boldsymbol{D}$ である。電場 $\boldsymbol{E}$ は，

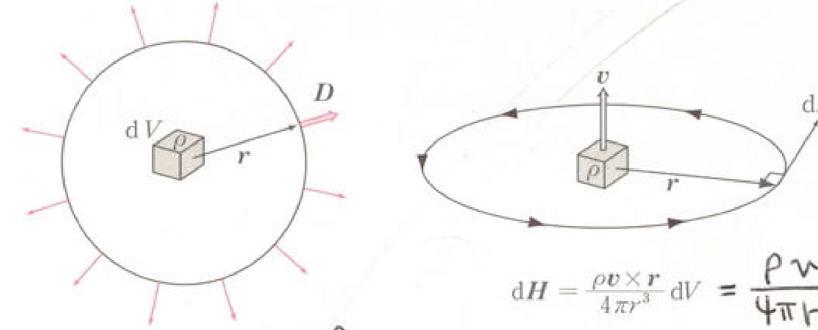
$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

で，ε_0 だけ係数が異なる。その理由は次の通りである。電場 $\boldsymbol{E}$ は直接測定できる力であり，力の単位「ニュートン」と一致させるために ε_0 が必要なのであった。一方，磁場 $\boldsymbol{H}$ は直接測定できる量ではないのである(さらにいえば，磁場は，絶対的に実在するものでもない(講義8参照))。それゆえ，磁場の大きさは定義次第であり，簡便のために妙な定数をつけるのはやめて，たんに，アンペア／メートルの単位としておくのである。

我々が直接測定できる量は力であるが，磁場の力は講義8で紹介するローレンツ力として見えてくる。そのとき，はじめて単位ニュートンと一致する係数が必要となる。その段階で我々は磁束密度 $\boldsymbol{B}\,(=\mu_0\boldsymbol{H})$ を導入することになる。

つまり，実用的な単位の面からみると，電場 $\boldsymbol{E}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ が対をなし，電束密度 $\boldsymbol{D}$ と磁場 $\boldsymbol{H}$ が対をなすのである。

図7-24●ρ が動くと，静電場に $\boldsymbol{v}$ をかけた静磁場ができる。



$$\boldsymbol{D} = \frac{\rho\boldsymbol{r}}{4\pi r^3}\,\mathrm{d}V = \frac{\rho}{4\pi r^2}\,\mathrm{d}V$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H} = \frac{\rho\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}}{4\pi r^3}\,\mathrm{d}V = \frac{\rho v}{4\pi r^2}\,\mathrm{d}V = Dv$$

↑ ここまで分かると

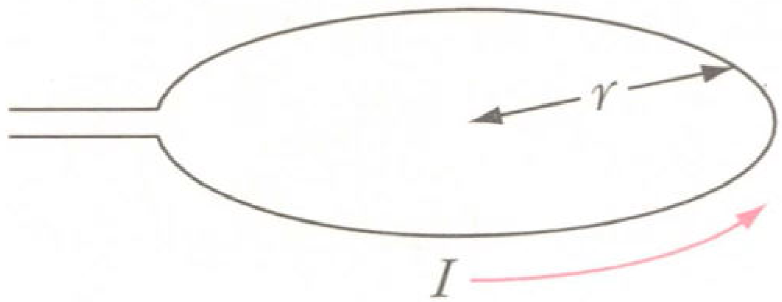
けっきょく，電荷が動くとき，その周囲に回転する磁場ができるのだが，その大きさは速度 $\boldsymbol{v}$ (の直角成分)に比例し，かつクーロンの静電場と同じ逆2乗則にしたがうのである。

ビオ-サバールの法則は，静電場におけるクーロンの法則の静磁場版であり，それはクーロンの法則に電荷の速度 $\boldsymbol{v}$ をかけたものである。

演習問題
7-2

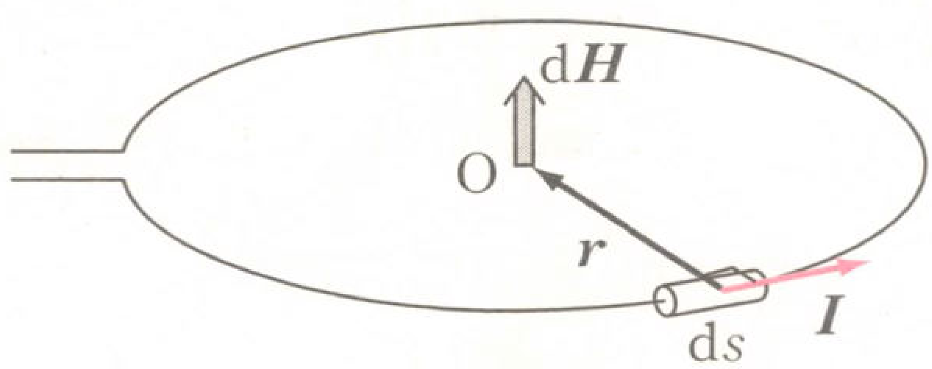
半径 r の円形コイルに定常電流 I が流れているとき，そのコイルの中心に生じる磁場を求めよ。

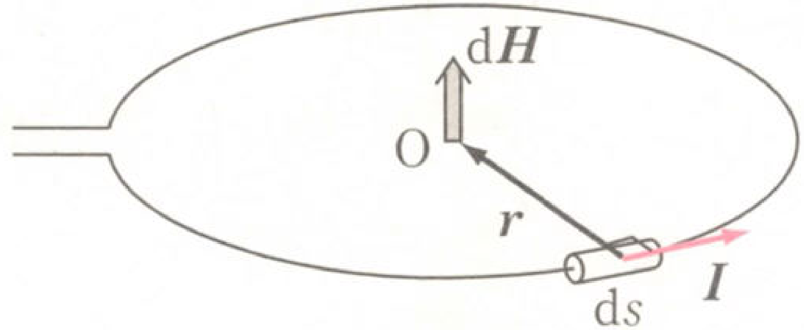
図7-25



解答＆解説 コイルの微小な円弧(長さ $\mathrm{d}s$)を考えると，その部分の電流がコイルの中心につくる磁場 $\mathrm{d}H$ の向きは，ビオ–サバールの法則によって，$\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{r}$ より，$\boldsymbol{I}$ から $\boldsymbol{r}$ の方向にねじをひねったときに，ねじの進む方向(あるいは，ソレノイド・コイルと同じで，I の流れる方向にねじをひねってもよい)である。

図7-26





その大きさは，ビオ-サバール

$$\mathrm{d}H = \frac{I\,\mathrm{d}s}{4\pi r^2}$$

これを円周にわたって積分すれば，I と r が一定だから，

$\oint_c$ は周回積分の記号 $$\oint_c \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 2\pi r$$ ← ds を1周足し合わせる。

→ p237参

よって，

$$H = \int \mathrm{d}H = \oint_c \frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{4\pi r^2}$$

$$= \frac{I}{4\pi r^2}\cdot 2\pi r = \frac{I}{2r} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$ ← 結果のみ天下りで高校でやる

となり，円形コイルの電流が円の中心につくる磁場が簡単に求まる。◆

→ 通常の積分なら $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi$ であって $2\pi r$ とはならない

090124

●円形コイルの中心軸上の磁場

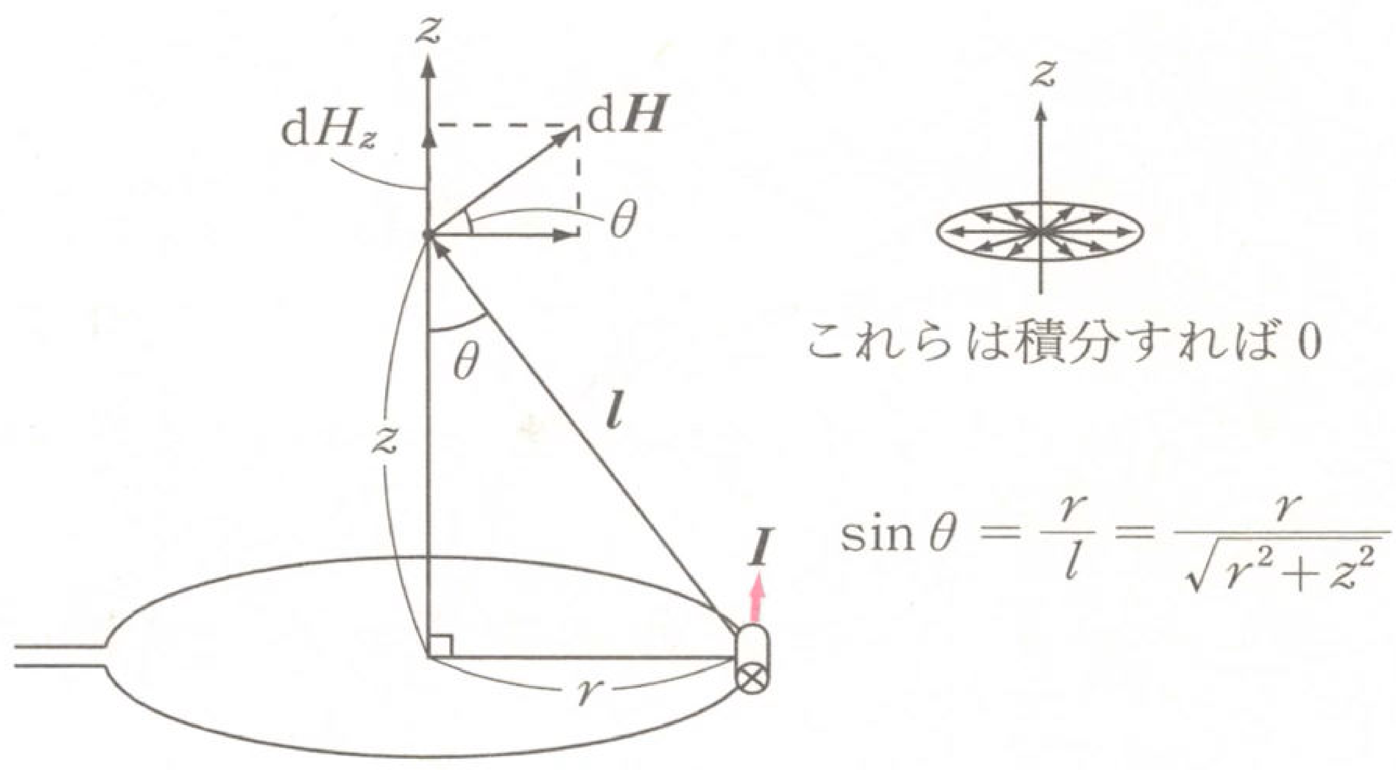
これも図

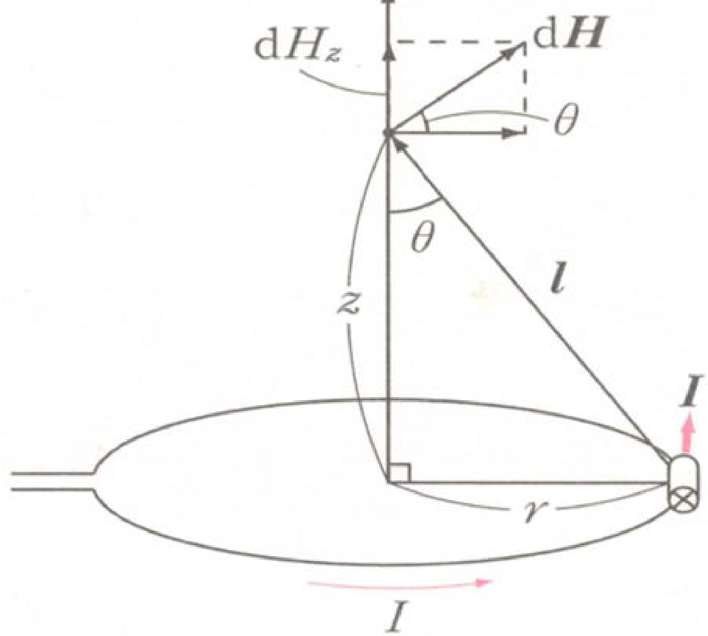
次に，円形コイルの中心だけではなく，中心軸上の磁場の大きさを求めてみよう。座標軸や記号は，図のようにとるとする。

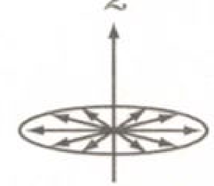
中心軸上でも，磁場の方向は，電流をコイルにそってひねったときのねじの進む方向であることは，対称性から明らかである。しかし，微小な円弧上の電流 $I\,\mathrm{d}s$ が中心軸上につくる磁場は，図のように $\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{l}$ の方向だから，z 軸方向を向かない。

dH

図7-27● $\oint_C \mathrm{d}\boldsymbol{H}$ は，$\mathrm{d}H_z$ の合計となる。







これらは積分すれば0

$$\sin\theta = \frac{r}{l} = \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

そこで，この $I\,\mathrm{d}s$ がつくる磁場 $\mathrm{d}H$ を，その z 成分 $\mathrm{d}H_z$ とそれに直角な成分に分解すれば，

$$\mathrm{d}H_z = \mathrm{d}H\sin\theta$$

であり，直角な成分は，円周方向に積分すれば(放射状に拡がるベクトルの和だから) 0 となるだろう。それゆえ，$\mathrm{d}H_z$ だけを求めればよい。

ビオ–サバールの法則より，

$$\mathrm{d}H = \frac{I\,\mathrm{d}s}{4\pi l^2}\left(= \frac{I\,\mathrm{d}s}{4\pi}\cdot\frac{1}{r^2+z^2}\right)$$

ゆえに，

$$\mathrm{d}H_z = \mathrm{d}H\sin\theta = \mathrm{d}H\frac{r}{l}\left(= \mathrm{d}H\frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}\right)$$

$$= \frac{I\,ds\,r}{4\pi l^3} \quad 但し\ l = \sqrt{r^2+z^2}$$

$$= \frac{I\,\mathrm{d}s}{4\pi(r^2+z^2)} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$= \frac{Ir}{4\pi(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}s$$

このdHを円周にそって積分，すなわち$2\pi r$をかければ，zでの磁場の大きさとなるはずである。

$\oint_C \mathrm{d}s = 2\pi r$

$$H_z = \int_{円周} \mathrm{d}H_z = \oint_C \frac{Ir}{4\pi(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}s$$

$$= \frac{Ir}{4\pi(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot 2\pi r$$

$$= \frac{Ir^2}{2(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ここへつづく

もちろん，$z=0$とすれば，コイルの中心での磁場$I/2r$となる。

以上，ビオ-サバールの法則は，アンペールの法則より複雑ではあるが，円形コイルに関してはなかなか便利のよい方法であることが分かるだろう。

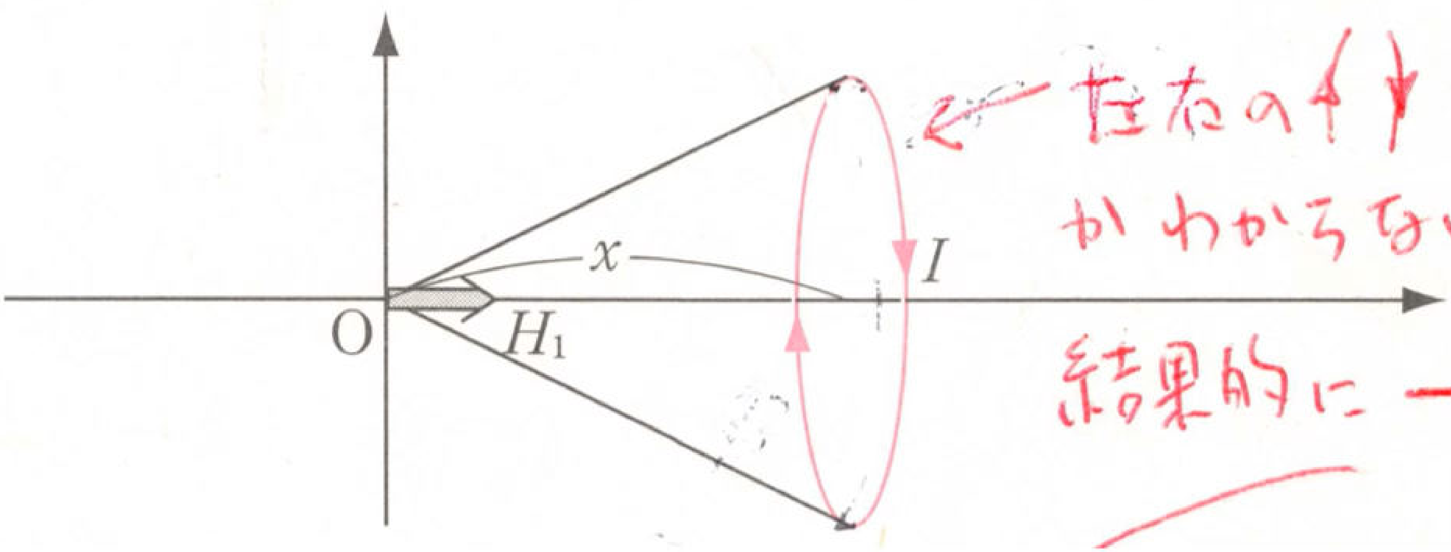
さて，この結果を用いて，実習問題では，積分の練習をして頂こう。

実習問題 7-2

ソレノイド・コイルを，円形コイルの重ね合わせたものとみなして，コイルの中心軸上の磁場の大きさを求めよ。ただし，ソレノイド・コイルは無限に長く，その半径を r，単位長さあたりの巻き数を n，コイルに流れる電流の大きさを I とする。

解答＆解説 コイルの中心軸を x 軸にとり，中心軸上のある点(そこを原点とする)の磁場を求めよう。

図7-28●ソレノイド・コイルの１巻きは，円形コイルと同じ。



左右の↑↓どちらが手前かわからないので。

結果的に − が要る

$x=x$ にある１巻きのコイルが原点につくる磁場の大きさは，円形コイルの場合と同じだから，その磁場を H_1 とすると，（但し向きを逆にとってるので）

$$H_1=\frac{-Ir^2}{2(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

x と $x+\mathrm{d}x$ の間のコイルの巻き数は $n\,\mathrm{d}x$ だから，この間のコイルが原点につくる磁場の大きさ $\mathrm{d}H$ は，

$$\begin{aligned}\mathrm{d}H &= H_1\times n\,\mathrm{d}x\\ &=\frac{-Ir^2}{2(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\times n\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

これを $-\infty$ から $+\infty$ まで，$\mathrm{d}x$ について積分すればよい。あるいは対称性から，０から $+\infty$ まで積分し，それを２倍しておいてもよいだろう。

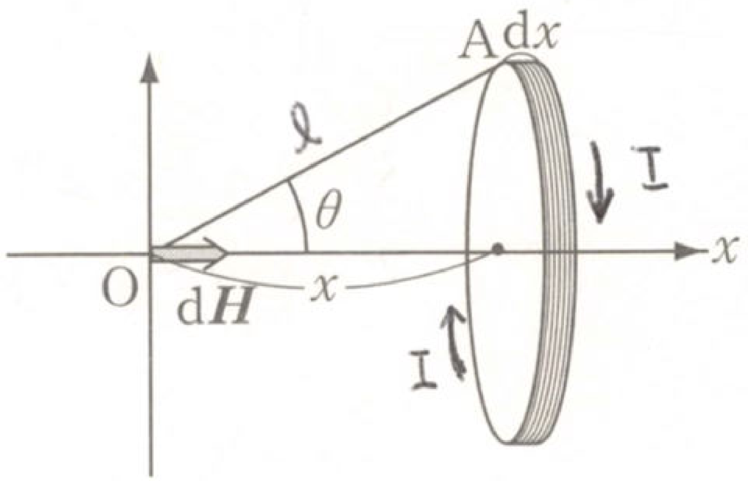
$$H=\int\mathrm{d}H=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-Ir^2}{2(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\times n\,\mathrm{d}x = nIr^2\int_0^{\infty}\frac{-1}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$$

I，r，n は定数だから前に出して，

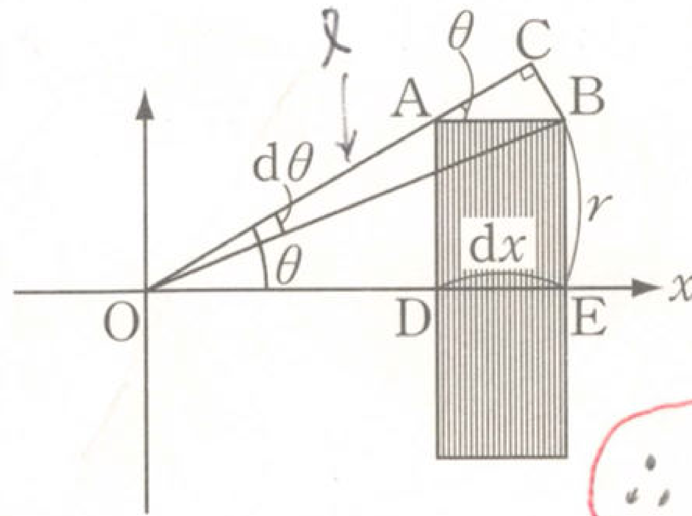
$$H = \boxed{\text{(a)} \int_0^{\infty} \frac{1}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}} dx \times (-nIr^2)$$

さて，ここからの計算は，積分の公式をそのまま適用してもよいのだが，それではいつまでたっても公式依存から抜け出せないから，公式を知らなくても計算できる方法を身につけておこう。

図7-29● 図より dx と $d\theta$ の関係を求める。



(a)



(b)

$BC = AB \sin\theta$ $= dx \sin\theta$

$\parallel$ また

$BC = OB\, d\theta$

$\fallingdotseq \ell\, d\theta = \frac{r}{\sin\theta} d\theta$

$$\therefore dx = \frac{r\,d\theta}{\sin^2\theta}$$

これでOK

図 7-29 (a) のように角度 θ をとると，x を 0 から ∞ まで動かす間に，θ は $\pi/2$ から 0 まで動く。そこで変数を x から θ に変換することにしよう（たいていの場合，こうした方が計算が簡単である）。 dx も $d\theta$ に

図 7-29 (a) のように角度 θ をとると，x を 0 から ∞ まで動かす間に，θ は $\pi/2$ から 0 まで動く。そこで変数を x から θ に変換することにしよう（たいていの場合，こうした方が計算が簡単である）。 dx も $d\theta$ に それでOK

次頁

そこで，微小な dx の部分を少し拡大して描き，図 (b) のように各点を表す記号を定める。DE および AB の長さが dx であり，AD および BE がコイルの半径 r である。

x が D から E まで dx だけ動く間に，角度 θ は OA から OB まで $d\theta$ だけ動く。△ABC は直角三角形であるが，辺 BC は微小な角 $d\theta$ に対する円弧でもある。そこで，

$$BC = AB\sin\theta = dx\sin\theta \quad ①$$

$$BC = OB\,d\theta \quad ②$$

ここで，OB は原点とコイルの間の距離 l $(=OA=r/\sin\theta)$ にほぼ等しいから（この「ほぼ」を「イコール」にしてしまうところが，微分の微分たるところである），

$$OB = OA = l = r/\sin\theta \quad ③$$

② ← ③ より

$$BC = \frac{r}{\sin\theta}\,d\theta \quad ④$$

以上より，
① = ④ より

$$dx\sin\theta = \frac{r}{\sin\theta}\,d\theta \quad ⑤$$

$$\therefore\ dx = \frac{r}{\sin^2\theta}\,d\theta$$

まわりくどい

$$\mathrm{d}x \sin\theta = \frac{r}{\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

テストに出すときは積分公式を与える

⑤より $\therefore\ \mathrm{d}x = \boxed{\text{(b)}\ \frac{r}{\sin^2\theta}}\,\mathrm{d}\theta$

また，

$$\sqrt{r^2+x^2} = l = \frac{r}{\sin\theta}$$ ← xをθに

であるから，けっきょく，

$$H = \boxed{\text{(a)}\ nIr^2\int_0^\infty \frac{-1}{(r^2+x^2)^{3/2}}}\,dx$$

$\int_0^\infty dx \to \int_{\pi/2}^0 d\theta$

ここで -1 がないと合わない

$$= nIr^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3\theta}{r^3}\cdot\frac{r\,\mathrm{d}\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= nI\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

という具合に，x を θ に変換すれば，簡単な積分計算になる。積分部分は１であるから，

$$H = \boxed{\text{(c)}\ nI}$$

となり，問２で求めた値と同じになる。◆ P123 ☆ の proof

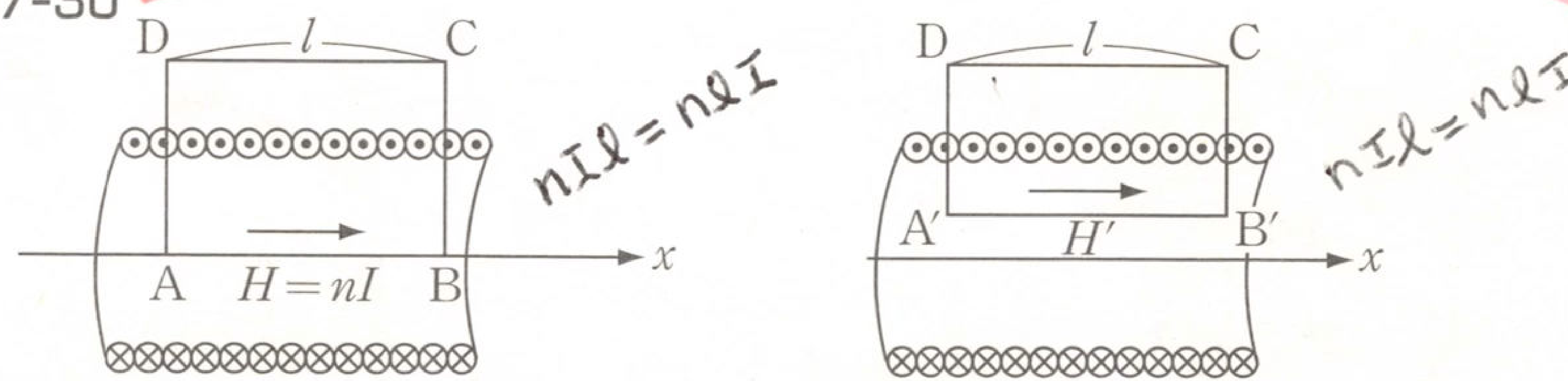
$$H = \boxed{(c)\ nI}$$

となり，問 2 で求めた値と同じになる。◆ Φ123☆のproof

さて，このようにしてビオ-サバールの法則を元にして求めた結果は，あくまでコイルの中心軸上の磁場であり，それ以外の場所(コイルの外部や，内部の中心軸以外の場所)とは何のかかわりもない。

それに対してアンペールの法則から求めた磁場は，1周する長方形をとったから，中心軸以外の場所にもかかわってくる。

図7-30



A→B の積分だけで nIl となるから，C→D の積分は 0 でなくてはならない。

C→D の積分が 0 なら，中心軸以外の A′→B′ の積分も nIl でなくてはならない。

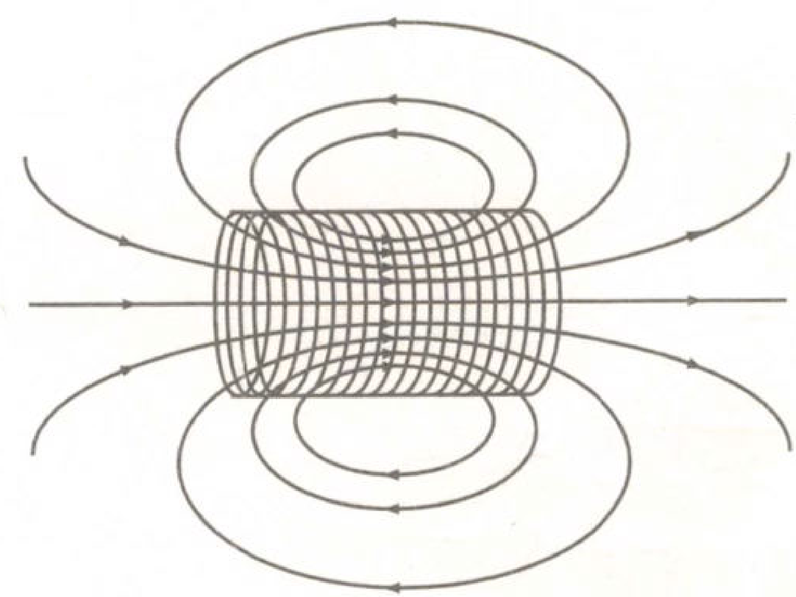
(a) $nIr^2\int_0^\infty \frac{1}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$ (b) $\frac{r}{\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$ (c) nI

たとえば，図のようにコイルの中心とコイルの外部を含む長方形をとるとしよう。そうすると，ビオ-サバールの法則から辺 AB 上の磁場が nI と分かっていれば，コイルの外部の磁場は必然的に 0 にならざるを得ないことが分かる。アンペールの法則が成立するためには $nIl = nlI$

また，コイルの外部の磁場が 0 と分かれば，こんどは中心軸に平行だが，中心軸ではない辺 A′B′ を含む長方形をとると，そこの磁場もまた nI でならねばならないと分かる。

もっとも，これらはソレノイド・コイルが無限に長い場合である。現実のコイルは有限の長さであるから，その長さに応じて，外部にも磁場が生じ，またコイルの内部の磁場も一様ではなくなってくる(図 7-31)。

図7-31● 有限の長さのソレノイド・コイルのつくる磁場



たとえば，図のようにコイルの中心とコイルの外部を含む長方形をとるとしよう。そうすると，ビオ-サバールの法則から辺 AB 上の磁場が nI と分かっていれば，コイルの外部の磁場は必然的に 0 にならざるを得ないことが分かる。アンペールの法則が成立するためには $nIl = nlI$

また，コイルの外部の磁場が 0 と分かれば，こんどは中心軸に平行だが，中心軸ではない辺 A′B′ を含む長方形をとると，そこの磁場もまた nI でならねばならないと分かる。

もっとも，これらはソレノイド・コイルが無限に長い場合である。現実のコイルは有限の長さであるから，その長さに応じて，外部にも磁場が生じ，またコイルの内部の磁場も一様ではなくなってくる(図 7-31)。

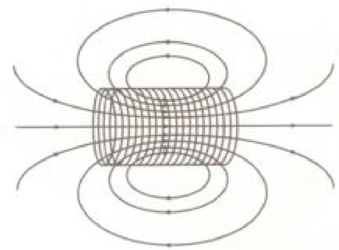


図7-31●有限の長さのソレノイド・コイルのつくる磁場

160178
↑
080528
091218
ここまで読了
1104
110510
130111
130508

パス⇒

●ベクトル・ポテンシャル

さて，アンペールの法則とビオ-サバールの法則は，どのように結びつくのであろうか。それが我々のもっとも知りたいところである。講義 7 のしめくくりとして，そのことを調べてみよう。

静電場と静磁場の構造的な関係を直感的に把握するには，簡潔な形式であるマクスウェルの方程式，すなわち場の微分形をみるのがよい。

クーロンの法則，あるいはガウスの法則は，「ぜい肉」をそぎ落とせば次のように書けるのであった。

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \rho$$

(余分な比例定数 ε_0 を除くため，電場 $\boldsymbol{E}$ ではなく電束密度 $\boldsymbol{D}$ で表現しておく。)

この式の意味は，電荷があるところでは，その電荷に相当する場が球対称状に発散しているということである。

一方，アンペールの法則の「ぜい肉」をそぎ落とすと，

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \rho\boldsymbol{v}$$

と書ける。この式の意味は，電荷が動いているとき，その速度に比例す

る場が，渦巻き状に存在するということである。

静電場と静磁場のこのように見事な対応関係には，何か深い意味があると推測されるが，その答えは相対性理論によって明らかにされる。相対性理論は，一言でいえば，物体が速度 $\boldsymbol{v}$ をもつとき，それに応じて時間や空間の尺度を変更しなければならないと主張する。すなわち，端的にいえば，静磁場とは静電場の相対論的補正なのである。

さて，電場は中心力であるがゆえに，万有引力と同様なポテンシャルを想定することができた。すなわち，スカラー場である電位 V をもってくると，電場はその傾きとして記述できる。こうして我々は，起伏のある山や谷と，その斜面を転がり落ちるボール，というような直感的なイメージで電場というものを捉えることができるのである。

点電荷 q のつくる電位は，比例定数 ε_0 を除き，さらに電荷密度 ρ を用い，それを ϕ とすれば，

$$\phi = \frac{\rho}{4\pi r}$$

である。

磁場についてもこのようなポテンシャルを想定できないだろうか。

結論をいえば，電場と同様なスカラー・ポテンシャルをつくることはできない。なぜなら，磁場は回転であるが，「発散」によって生じる山や谷といった斜面上で，ループを描くような傾斜をつくることはできないからである。

しかし，抽象的ではあるが，次のような数学的操作を考えてみよう。

まず，単独の磁荷は存在しないことより，つねに，

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{H} = 0$$

が成立する。ところで，付録の「やさしい数学の手引き」に示したように，純粋な数学的恒等式として，任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ をもってきたとき，つねに，

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) = 0 \quad \text{あるいは，} \quad \mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}) = 0$$

となる。そこで，$\mathrm{div}\,\boldsymbol{H}$ がつねに 0 であるなら，

$$\boldsymbol{H} = \nabla\times\boldsymbol{A} \quad \text{あるいは，} \quad \boldsymbol{H} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$$

となるような $\boldsymbol{A}$ が，必ず存在する（$\boldsymbol{A}$ の一般的な定義は，講義 8 で登場する真空の透磁率 μ_0 を用いて，$\mu_0\boldsymbol{H}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ であるが，本質的なことは何も変わらないので，μ_0 を省いておく）。証明は略するが，このベクトル $\boldsymbol{A}$ には，スカラー・ポテンシャル同様，一定の任意性がある。すなわち上式に，

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \rho\boldsymbol{v}$$

を適用すると，

$$\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}) = \rho\boldsymbol{v}$$

「やさしい数学の手引き」に示したベクトル解析，

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$$

において，$\boldsymbol{A}$ の任意性より $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$ を選ぶと，

$$\nabla^2\boldsymbol{A} = -\rho\boldsymbol{v}$$

を得る。これはベクトル式であるが，3 つの成分に分けて書けば，

$$(A_x, A_y, A_z) = \left(\frac{\rho v_x}{4\pi r}, \frac{\rho v_y}{4\pi r}, \frac{\rho v_z}{4\pi r}\right)$$

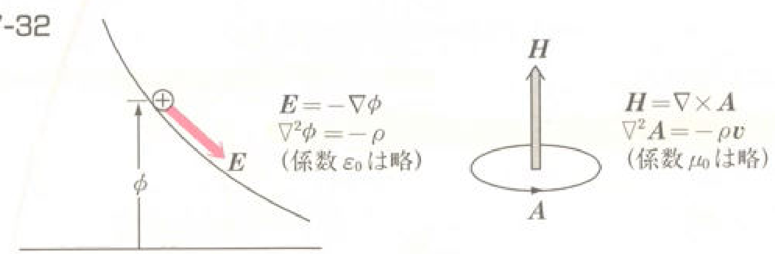
つまり，電場のスカラー・ポテンシャル ϕ に $\boldsymbol{v}$ をかけたものに等しい！

こうして，電位 ϕ と A_x, A_y, A_z は，見事に対応することになる。

よって，$\boldsymbol{A}$ は磁場に関するポテンシャルとみなすことができるであろう。この $\boldsymbol{A}$ を，磁場 $\boldsymbol{H}$ の**ベクトル・ポテンシャル**と呼ぶ。

ビオ-サバールの法則は，ベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ の rot（回転）をとったものであることはいうまでもない。

図7-32



電場はスカラー・ポテンシャル ϕ の傾き（grad）である。

磁場はベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ の回転（rot）である。

このようにして，我々はマクスウェルの方程式という形式的な表現を通して，アンペールの法則とビオ-サバールの法則だけではなく，静電場と静磁場の見事なまで美しい対称性を知ることができるのである。

2008年 部会案：電磁気Iはここまでやる