第二回課題解説.

1. $n>1$ なら $n^{1/n}>1$ なので $n^{1/n}=1+h_n$ $(h_n>0)$ とおける．この両辺を n 乗すると二項定理より

$$n=(1+h_n)^n=1+\binom{n}{1}h_n+\binom{n}{2}h_n^2+\cdots>\binom{n}{2}h_n^2=\frac{n(n-1)}{2}h_n^2$$

である．よって

$$0<h_n^2<\frac{2}{n-1}\to 0 \quad (n\to\infty)$$

である．したがって，はさみうち原理より

$$\lim_{n\to\infty}h_n=0$$

である．これは

$$\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$$

であることを意味している．

2. まずは，旅人算から，アキレスが亀に追いつくには

$$100/(10-10/A)=10A/(A-1)\,[s]$$

だけの時間がかかる．

　次，アキレスが $100\,[m]$ 進む間に，亀は $100/A\,[m]$ 進む．アキレスが $100/A[m]$ 進む間に亀は $100/A^2\,[m]$ 進む．これの繰り返し．結局，亀に追いつくには，アキレスは

$$100+100/A+100/A^2+...+100/A^n+....=100\{1/(1-1/A)\}\,[m]$$

だけ進まねばならない．したがってアキレスが亀に追いつくのに要する時間は，これをアキレスの秒速 $10\,[m/s]$ で割れば計算できる．答えは

$$10/(1-1/A)=10A/(A-1)\,[s]$$

となって，旅人算の結果に一致する．なお，$A>1$ を仮定した．

3. 教科書の問.

2.1. 背理法．$\sqrt{2}$ が有理数だと仮定すると $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ と既約分数で表される．$2q^2=P^2$ だから p は偶数である．よって $p=2m$ と表される．よって $2q^2=4m^2$ となる．すると $q^2=2m^2$ だから q は偶数である．こうして p も q の偶数になってしまい，$\frac{p}{q}$ が既約分数であることに矛盾する．従って $\sqrt{2}$ は有理数ではない．

　（別解）$\sqrt{2}=\frac{p}{q}$（p,q は整数）と表されるところまでは同じ．規約であることを仮定しなくても次のように無限降下法によって矛盾を導くことができる．$2q^2=p^2$ によって p は 2 で割り切れて $p=2p_1$ と表される．これから $q^2=2p_1^2$ となるから q は 2 で割り切れて $q=2q_1$ と表される．すると $2q_1^2=p_1^2$ となって p_1 は 2 で割り切れて $p_1=2p_2$ と表される．このプロセスは終わらない．しかし整数を整数であることを保ったまま無限に 2 で割っていくことは不可能である．なぜならいつかは 1 より小さくなってしまい，整数であることに矛盾するからである．従って $\sqrt{2}$ は有理数ではない．

2.2. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少で下に有界なら，数列 $\{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加で上に有界である．よって $\{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に公理を適用すればいい．

2.3 教科書の問ですが，講義中に例題としてとり上げました．解答は講義資料に書いてあります．

2.4. $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ が収束するから $\lim_{n\to\infty}S_n=S$ となる実数 S が在る．よって $a_n=S_n-S_{n-1}$ に対し

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0$$

である．

2.5. (1) $|c|<1$ と仮定する．まず，等比数列の和の公式を証明するときの議論をやってみる．$S_n=1+2c+3c^2+\cdots+nc^{n-1}$ とおき，cS_n との差を考えると $|c|<1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}nc^n=0$$

を示すことに帰着する．これは初回の講義でやりました．

（別解）等比数列の和の公式

$$1 + c + c^2 + ... + c^n = \frac{1 - c^{n+1}}{1 - c}$$

の両辺を c で微分すると

$$1 + 2c + 3c^2 + ... + nc^{n-1} = \frac{d}{dc}\frac{1 - c^{n+1}}{1 - c} = \frac{1 - (1 - c)(n + 1)c^n}{(1 - c)^2}$$

となる．左辺で $n \to \infty$ としたものが計算したい無限級数である．$|c| < 1$ のとき初回講義でやった通り，$\lim_{n\to\infty} nc^n = 0$ だから問題の無限級数の和は $\frac{1}{(1-c)^2}$ である．

(2) 部分分数に分解すると $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ だから，問題の無限級数は $(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) + (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}) + ...$ となる．隣あう項の打ち消しあいにより，この無限級数の和は 1 である．

(3) 部分分数に分解すると $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\{\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\}$ だから，問題の無限級数は $\frac{1}{2}\{(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}) + (\frac{1}{6} - \frac{1}{12}) + \cdots + (\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}) + (\frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)}) + ...\}$ となる．隣あう項の打ち消しあいにより，この無限級数の和は $\frac{1}{4}$ である．

2.6. 無限級数の収束・発散は最初の数項を無視しても変わらない性質だから，$n > 1$ だけ考えればいい．このとき $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ であり，問題 2.5(1) によって $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}$ は収束する．よって優級数定理により $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ は収束する．