10/3

内容

線形代数II 木曜日　2時限目
中間テスト: ~~11月21日~~ 11月28日（第４章と５.１と５.２）
期末テスト: 1月23日
成績:中間テストと期末テストによって評価する

- ベクトル空間（第4章）
  行と列ベクトルを「ベクトル空間のベクトル」に一般化する.
  ベクトル空間で計算を行う.
  keyword: 1次独立と1次従属, ベクトル空間の基底と次元.
- 線形写像（第5章）
  ベクトル空間の間の線形性を持つ写像を導入する。
  線形写像と行列の関係、特に表現行列について勉強する。
  keyword: 表現行列,固有値と固有ベクトル, 行列の対角化.
- 内積空間（第6章）
  長さと角度を測ることができるベクトル空間
  keyword: 正規直交化(orthonormalization), 直交行列,
  対称行列の対角化(diagonalization of symmetric matrices)

Motivation 1 ベクトル空間と固有ベクトルI

線形微分方程式(linear differential equations)を考える.

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned}$$

ここで, 各i, jに対して,$a_{ij} \in \mathbb{R}$, x_iはベクトル空間

$$V := \{x : t \mapsto x(t) \mid \text{微分可能な関数}\}$$

のベクトルである.
そのベクトル空間Vに,
関数の和と関数のスカラー倍が定義されている.

次の2×2行列$A = [a_{ij}]$を考える.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Motivation 1 ベクトル空間と固有ベクトルII

ゼロでない列ベクトル$\mathrm{v} = \begin{bmatrix} \mathrm{v}_1 \\ \mathrm{v}_2 \end{bmatrix}$と$\lambda \in \mathbb{R}$が

$$\mathrm{A}\mathrm{v} = \lambda \mathrm{v} \qquad (1)$$

を満たすとき, vをAの固有値λに属する固有ベクトルと呼ぶ.

Fact vがAの固有値λに属する固有ベクトルであるとき,

$$\mathrm{x}_1 : \mathrm{t} \mapsto e^{\lambda \mathrm{t}} \mathrm{v}_1, \quad \mathrm{x}_2 : \mathrm{t} \mapsto e^{\lambda \mathrm{t}} \mathrm{v}_2$$

は微分方程式の解である.

Proof.

$$\begin{aligned} \mathrm{x}_1'(\mathrm{t}) &= (e^{\lambda \mathrm{t}})' \mathrm{v}_1 = e^{\lambda \mathrm{t}} \lambda \mathrm{v}_1 \overset{(1)}{=} e^{\lambda \mathrm{t}} (\mathrm{A}\mathrm{v})_1 = e^{\lambda \mathrm{t}} (\mathrm{a}_{11} \mathrm{v}_1 + \mathrm{a}_{12} \mathrm{v}_2) \\ &= \mathrm{a}_{11} e^{\lambda \mathrm{t}} \mathrm{v}_1 + \mathrm{a}_{12} e^{\lambda \mathrm{t}} \mathrm{v}_2 = \mathrm{a}_{11} \mathrm{x}_1(\mathrm{t}) + \mathrm{a}_{12} \mathrm{x}_2(\mathrm{t}). \end{aligned}$$

$\square$

Motivation 2 固有値 Hesse行列I

1 変数関数$f(x) = x^2 + 2x - 1$の極小値を求める.

- 微分が0となる値を求める(critical point) $f'(x) = 2x + 2 = 0$, よって, $x = -1$.
- 第二導関数テスト(Second derivative test) $f''(-1) = 2 > 0$なので, $f(-1)$は極小値である.

2変数の関数$g(x, y) = x^2 + y^2 - xy$の極小値を求める.

- 勾配(gradient)が0となる値を求める.

$$\nabla g(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y & 2y - x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

  よって, $x = 0$, $y = 0$である.
- 二階導関数は...

Motivation 2 固有値 Hesse行列II

...ヘッセ行列(Hesse matrix)

$$H(g)(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

ヘッセ行列の固有値(eigenvalue)を計算する:

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ 1 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = 0$$

を満たすλは$H(g)$の固有値となる.

$$(\lambda - 2)^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \lambda = 1, \lambda = 3$$

極小値の判定条件:
固有値が全て正なので, $g(0,0)$は極小値である.

4.1 ベクトル空間の定義

集合Vに次のような2つの演算が定義され,

- (ベクトルの和) $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ $(\mathbf{u},\mathbf{v}\in V)$
- (ベクトルのスカラー倍) $a\mathbf{u}$ $(\mathbf{u}\in V,\ a\in\mathbb{R})$

以下の性質を満たすとき,Vを($\mathbb{R}$上の)ベクトル空間であるといい,
Vの元をベクトルという.

<u>ベクトル空間の性質$(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V,\quad a,b\in\mathbb{R})$</u>

(V1) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$

(V2) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$

(V3) $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$となるベクトル$\mathbf{0}$が存在する.

(V4) $a(b\mathbf{u})=(ab)\mathbf{u}$

(V5) $(a+b)\mathbf{u}=a\mathbf{u}+b\mathbf{u}$

(V6) $a(\mathbf{u}+\mathbf{v})=a\mathbf{u}+a\mathbf{v}$

(V7) $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

(V8) $0\mathbf{u}=\mathbf{0}$.

ベクトル空間の例

Example

$m, n \geq 1$とする．
実数を成分とする$m \times n$行列全体を$M(m, n)$と書く．

$$M(m,n) = \{A = [a_{ij}]_{m \times n} \mid a_{11}, \ldots, a_{mn} \in \mathbb{R}\}.$$

ベクトルの和とスカラー倍は行列の和とスカラー倍によって
ベクトル空間となる．

とくに，　m次の列ベクトル空間

$$\mathbb{R}^m := M(m,1) = \left\{ \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} : a_1, \ldots a_m \in \mathbb{R} \right\},$$

とn次行ベクトル空間

$$\mathbb{R}_n := M(1,n) = \{\mathbf{a} = [a_1, \ldots a_n] : a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}\}.$$

ベクトル空間の例(2)

Example

実数を係数とする高々n次の多項式の全体を$\mathbb{R}[x]_n$と書く.
$\mathbb{R}[x]_n$は普通の多項式の和と定数倍によってベクトル空間となる.

Example

区間(a,b)で連続な実数値関数全体を$C(a,b)$と書く.
$C(a,b)$は関数の和と関数の定数倍によってベクトル空間となる.

Definition

ベクトル空間Vの部分集合WがVの和とスカラー倍を用いてベクトル空間となるとき, WをVの部分空間という.

Example

n変数の同次連立一次方程式の解の全体は$\mathbb{R}^n$の部分空間となる.

部分空間の必要十分条件

Definition

ベクトル空間Vの部分集合WがVの和とスカラー倍を用いてベクトル空間となるとき, WをVの部分空間という.

Theorem (4.1.1)

ベクトル空間Vの部分集合Wが部分空間である必要十分条件は次の(1)(2)(3)が満たされることである.

1. $\mathbf{0} \in \mathrm{W}$
2. $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{W}$ならば$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathrm{W}$
3. $\mathbf{u} \in \mathrm{W}$, $\mathrm{c} \in \mathbb{R}$ならば,$\mathrm{c}\mathbf{u} \in \mathrm{W}$.

Proof.

（必要）明らかである. （十分）(2),(3)より,
Vの和とスカラー倍はWの演算として扱うことができる.
Wの元はVの元でもあるから,ベクトル空間の性質(V3以外)は満たされる.(1)より(V3)が成り立つ. □

部分空間(2)

Corollary

$A \in M(m,n)$とする．　次の集合Wは$\mathbb{R}^n$の部分空間となる．

$$W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \mathbf{0}\}.$$

証明. 定理4.1.1の3条件を確かめれば良い.

1. $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$であるから, $\mathbf{0} \in W$である．
2. $x, y \in W$とすると,行列の積の分配律より,

   $$A(x+y) = Ax + Ay = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

   よって$x + y \in W$.
3. $x \in W$, $c \in \mathbb{R}$とすると,

   $$A(cx) = c(Ax) = c\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

   よって, $cx \in W$.

部分空間の例

Corollary

$A \in M(n,m)$とする． 次の集合Wは$\mathbb{R}^m$の部分空間となる．

$$W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

よって,n変数の同次形の連立一次方程式の解の全体は$\mathbb{R}^n$の部分空間となる．

Example

系より,

$$W = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0,\ x_1 - 2x_2 + 3x_2 = 0\right\}$$

は$\mathbb{R}^3$の部分空間となる．

$$U = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1,\ x_1 - 2x_2 + 3x_2 = 2\right\}$$

は$\mathbb{R}^3$の部分空間ではない． $(\because \mathbf{0} \notin U)$

Example

部分空間の例II

Example

1. $$W_1 = \{f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(1) = 0, \quad f(-1) = 0\}$$
   は$\mathbb{R}[x]_3$の部分空間である.
2. $$W_2 = \{f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(1) = 1\}$$
   は$\mathbb{R}[x]_3$の部分空間ではない.
3. $$W_3 = \left\{f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid xf'(x) = 2f(x)\right\}$$
   は$\mathbb{R}[x]_3$の部分空間である.

4.2 1次独立と 1 次従属

Definition

Vのベクトル$\mathbf{v}$がVのベクトル$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$を用いて

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n \quad (c_i \in \mathbb{R})$$

と書けると, ベクトル$\mathbf{v}$は$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$の **1 次結合**で書けるという.
Vのベクトル$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$が

$$c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0} \quad (c_i \in \mathbb{R})$$

を満たすとき, これをベクトル$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$の **1 次関係**という.
Vのベクトル$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$が自明でない 1 次関係を持たない,
すなわち

$$c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad c_1 = \cdots = c_n = 0,$$

$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$を **1 次独立**であるという.$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$が 1 次独立でないとき, $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$は **1 次従属**であるという.

4.2 1次独立と 1 次従属

Example

$V = \mathbb{R}^n$とする．次のベクトルは 1 次独立である．

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

これらを$\mathbb{R}^n$の基本ベクトルという．

Example

$V = \mathbb{R}[x]_n$とする．次の$n+1$個のベクトルは 1 次独立である．

$$1, x, \ldots, x^n.$$

復習：自明でない解が存在する条件

Definition

$A \in M(m, n)$ の簡約化をBとするとき,

$$\mathrm{rank}(A) = \text{B の 0 ベクトルでない行の個数}.$$

Theorem (2.3.3)

$A \in M(m \times n)$とする.

1. 同次形の連立 1 次方程式
$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$
の解が自明なものに限る必要十分条件は
$$\mathrm{rank}(A) = n.$$
2. $m < n$ならば, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$は自明でない解を持つ.

例題4.2.1： 1次独立かどうか調べる

Example

$\mathbb{R}^4$のベクトルは 1 次独立か, 1 次従属か調べる.

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

解答:　以下は同値である.

1. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$は 1 次独立である
2. 連立 1 次方程式

$$[\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = [\mathbf{0}]$$

   は自明でない解を持たない.

3. $\mathrm{rank}([\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_3]) = 3$

4.2 1次独立と1次従属

Theorem (定理4.2.1)

Vのベクトル$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$が1次従属である必要十分条件は, $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$のうち少なくとも一個のベクトルが他の$n-1$個のベクトルの1次結合で書けることである.

Proof.

(必要) 仮定より,少なくとも1つは0でない定数 $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$で$c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$を満たすものが存在する. 例えば$c_1 \neq 0$とすると,

$$\mathbf{u}_1 = -\frac{c_2}{c_1}\mathbf{u}_2 - \cdots - -\frac{c_n}{c_1}\mathbf{u}_n \quad \text{となる.}$$

(十分) 例えば, $\mathbf{u}_1 = c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n$とする. よって, $c_1 = -1$とすると, $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$. つまり, $\mathbf{u}_1, \ldots \mathbf{u}_n$は1次従属である. □

4.2 1次独立と 1 次従属

Theorem (定理4.2.2)

$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$が 1 次独立で, $\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \ldots \mathbf{u}_n$が 1 次従属ならば,
$\mathbf{u}$は$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$の 1 次結合で書ける.

Proof.

仮定より,少なくとも 1 個は0でない実数 $c, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$で

$$c\mathbf{u} + c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

を満たすものが存在する. $\mathbf{u}_1, \ldots \mathbf{u}_n$が 1 次独立であるから,
$c \neq 0$. よって

$$\mathbf{u} = -\frac{c_1}{c}\mathbf{u}_1 - \cdots - \frac{c_n}{c}\mathbf{u}_n$$

となるから, $\mathbf{u}$は$\mathbf{u}_1, \ldots \mathbf{u}_n$の 1 次結合で書ける. □

4.2 1次結合の記法

Definition

Vのm個のベクトルの組$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$と行列$A = [a_{ij}] \in M(m, n)$に対し,

$$(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m)A := (a_{11}\mathbf{u}_1 + \cdots + a_{m1}\mathbf{u}_m, \ldots, a_{1n}\mathbf{u}_1 + \cdots + a_{mn}\mathbf{u}_m)$$

と定義する.

Example

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} = (3\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_2)$$

Theorem (定理4.2.3)

$n > m$とする.Vのベクトルの2つの組$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$と$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$に対し,$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$の各ベクトルは$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$の 1 次結合で書けるならば, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$は 1 次従属である.

Proof.

仮定より,次の条件を満たす$A \in M(m, n)$が存在する

$$(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m) A.$$

$n > m$なので, 連立一次方程式$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$は自明でない解を持つ.

それを$\mathbf{x} = \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$とおくと,

$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)\mathbf{c} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m) A\mathbf{c} = 0.$$

□

4.2 1次独立と 1 次従属

Theorem (定理4.2.4)

$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ が 1 次独立なベクトルで, $A \in M(m, n)$ のとき

$$(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m)\, A = (\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}) \quad \text{ならば} A = 0.$$

Proof.

$A = [a_{ij}]$ とおくと, 各 $1 \leq j \leq n$ に対して,

$$a_{1j}\mathbf{u}_1 + \cdots + a_{mj}\mathbf{u}_m = \mathbf{0}.$$

$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ が 1 次独立であるから,

$$a_{1j} = \cdots = a_{mj} = 0.$$

よって, $A = 0$. □

Corollary (定理4.2.5)

$\mathbf{u}_1, \ldots \mathbf{u}_m$ は 1 次独立なベクトルとする. $A, B \in M(m, n)$ に対し

$$(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m)\, A = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m)\, B \quad \text{ならば} A = B.$$

Proof.

右辺を左辺に移項すると,

$$(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m)\,(A - B) = (\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}).$$

よって, 定理4.2.4より ,$A - B = 0$. すなわち$A = B$ である. □

4.3 ベクトルの1次独立な最大個数

Example (例4.3.1)

次の$\mathbb{R}^4$のベクトルを考える.

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_5\}$ の 1 次独立な最大個数をrとし,rを求める.
- $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_5\}$のr個の 1 次独立なベクトルを求める.
- 事実:そのr個の 1 次独立なベクトルを用いて,
  他の$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_5\}$のベクトルを 1 次結合で表せる.

答え

$\mathrm{r} = 3$, $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4\}$は 1 次独立で,次が成り立つ.

$\boldsymbol{\alpha}_3 = -\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_5 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_4$.

4.3 ベクトルの1次独立な最大個数

Definition

ベクトルの集合Xの中にr個の１次独立なベクトルがあり,
Xのどのr + 1個のベクトルも１次従属であるとき,
rを集合Xのベクトルの１次独立な最大個数という.

Theorem (定理4.3.1)

Vのベクトルの2つの組$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$と$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$に対し,
$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$の各ベクトルが$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$の１次結合で書けるならば,

$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ の１次独立な最大個数
$\leq \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ の１次独立な最大個数.

4.3 ベクトルの1次独立な最大個数

定理4.3.1の証明のために必要な定理を復習する.

Theorem (定理4.2.2)

$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$が 1 次独立で, $\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$が 1 次従属ならば, $\mathbf{u}$は$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$の 1 次結合で書ける.

Theorem (定理4.2.3)

$n > m$とする.Vのベクトルの2つの組$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$と$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$に対し,$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$の各ベクトルが$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$の 1 次結合で書けるならば, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$は 1 次従属である.

定理4.3.1の証明.

$r := \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ の 1 次独立な最大個数.
$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$が一次独立であるとする.
定理4.2.2より,$\mathbf{u}_{r+1}, \ldots, \mathbf{u}_m$は$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$の一次結合で書ける.
よって,$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$の各ベクトルは$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$の一次結合で書ける.
定理4.2.3より,$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ の 1 次独立な最大個数 $\leq r$. $\square$

4.3 ベクトルの1次独立な最大個数

Theorem (定理4.3.2)

$\{u_1, \ldots, u_m\}$の1次独立な最大個数$= r \quad \Leftrightarrow$
$\{u_1, \ldots, u_m\}$の中にr個の1次独立なベクトルがあり,他の
$m - r$個のベクトルはこのr個のベクトルの1次結合で書ける.

定理4.3.2の証明.

$(\Longrightarrow)$ r個の1次独立なベクトルを例えば, $u_1, \ldots, u_r$とする.
$r < t \leq m$とすると,$u_1, \ldots, u_r, u_t$は1次従属であるから,
定理4.2.2より,u_tは$u_1, \ldots, u_r$の1次結合で書ける.
$(\Longleftarrow)$
例えば,$u_1, \ldots, u_r$が1次独立独立で,$u_{r+1}, \ldots, u_m$は$u_1, \ldots, u_r$の
1次結合で書けるとする.よって,

$$r \leq \{u_1, \ldots, u_m\} \text{ の1次独立な最大個数.}$$

$\{u_1, \ldots, u_m\}$は$\{u_1, \ldots, u_r\}$の1次結合で書けるから,定理4.3.1より

$$r \geq \{u_1, \ldots, u_m\} \text{ の1次独立な最大個数.}$$

4.3 ベクトルの1次独立な最大個数

行列Aの簡約化をBとする． 定義より，

$$\begin{aligned}\mathrm{rank(A)} &= \text{Bのゼロベクトルでない行の個数} \\ &= \text{Bの主成分を含む列の個数.}\end{aligned}$$

Bの主成分を含まない列は主成分を含む列の１次結合で書けるから，定理4.2.3より，

$$\mathrm{rank(A)} \geq \text{Bの列ベクトルの１次独立な最大個数}$$

Bの主成分を含む列は１次独立であるから，

$$\mathrm{rank(A)} = \text{Bの列ベクトルの１次独立な最大個数}$$

Bのゼロベクトルでない行は１次独立であるから，

$$\mathrm{rank(A)} = \text{Bの行ベクトルの１次独立な最大個数.}$$

Theorem（定理4.3.3の特別の場合）

$$\begin{aligned}\mathrm{rank(A)} &= \text{Bの列ベクトルの１次独立な最大個数} \\ &= \text{Bの行ベクトルの１次独立な最大個数}\end{aligned}$$

4.3 ベクトルの1次独立な最大個数

行列Aの簡約化をBとする. A,Bの列ベクトルの分割を

$$A = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n], \quad B = [\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_n] \quad \text{と書く.}$$

このとき,

$$Ax = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow Bx = \mathbf{0}.$$

すなわち,

$$x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = 0 \quad \Leftrightarrow x_1\mathbf{b}_1 + \cdots + x_n\mathbf{b}_n = 0.$$

言い換えると,$\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n$と$\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_n$には同じ一次関係が成り立つ.

Aの列ベクトルの１次独立な最大個数
=Bの列ベクトルの１次独立な最大個数

4.3 ベクトルの1次独立な最大個数

行基本変形で変形された行列の各行ベクトルは元の行列の行ベクトルの 1 次結合で書ける.
よって,Bの行ベクトルはAの行ベクトルの一次結合で書ける.
よって,定理4.3.1より,

$$
\begin{aligned}
r :=& \text{Aの行ベクトルの 1 次独立な最大個数} \\
\geq& \text{Bの行ベクトルの 1 次独立な最大個数} =: s
\end{aligned}
$$

逆に,AはBからも行基本変形で得られるから, $r = s$.
これと定理4.3.3の特別の場合より,次を得る.

Theorem (定理4.3.3)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rank}(A) =& \text{Aの列ベクトルの 1 次独立な最大個数} \\
=& \text{Aの行ベクトルの 1 次独立な最大個数}
\end{aligned}
$$

4.3 ベクトルの1次独立な最大個数

Theorem (定理4.3.3)

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}(A) &= \text{Aの列ベクトルの1次独立な最大個数}\\ &= \text{Aの行ベクトルの1次独立な最大個数}\end{aligned}$$

定理2.4.2　n次正方行列Aは正則である$\Leftrightarrow \mathrm{rank}(A) = n$.

Corollary (定理4.3.4)

n次正方行列Aについて,次の３条件は同値である.

1. Aは正則行列である.
2. Aのn個の列ベクトルは1次独立である.
3. Aのn個の行ベクトルは1次独立である.

4.3 ベクトルの1次独立な最大個数

Theorem (定理4.3.6)

Vのベクトル$\mathbf{u}_1, \ldots \mathbf{u}_m$は1次独立とする.$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$が$m \times n$行列$A = [\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_n]$を用いて

$$(\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n) = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m)\, A$$

と書けているとする.

1. $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$と$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$には同じ一関係が成り立つ.
2. $m = n$のとき,

$$\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n \text{が1次独立} \quad \Leftrightarrow A\text{が正則行列}.$$

(2)は(1)と定理4.3.4よりわかる.

Proof.

$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ と $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ が

$$(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)\,\mathbf{c} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

を満たすとする．よって,

$$(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m)\,A\mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

$\mathbf{u}_1, \ldots \mathbf{u}_m$ が 1 次独立であるから,定理4.2.4より,

$$(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m)\,A\mathbf{c} = \mathbf{0} \Leftrightarrow A\mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

よって, $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \Leftrightarrow c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}.$ □

4.3 ベクトルの1次独立な最大個数

行列Aの簡約化をBとする. A,Bの列ベクトルの分割を

$$\mathrm{A} = [\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_n], \quad \mathrm{B} = [\mathbf{b}_1 \ldots \mathbf{b}_n] \quad \text{と書く.}$$

このとき,

$$\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \mathrm{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

これを利用することで、次を得る.

Theorem (定理4.3.5)

行列の簡約化は唯一通り決まる.

10/24

11月21日: 休講
中間テスト: ~~11月21日~~ 11月28日（第４章と５.１と５.２）

4.4 ベクトル空間の基と次元

Definition

ベクトル空間Vのベクトル$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$がVを生成するとは,
Vの全てのベクトルが$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$の1次結合で表せるときをいう.

Example

$\mathbb{R}^n$の基本ベクトル$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$は$\mathbb{R}^n$を生成する.
実際$\mathbb{R}^n$の任意のベクトルは

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = a_1\mathbf{e}_1 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n$$

と,$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$の1次結合で書けている.

4.4 ベクトル空間の基と次元

Definition

ベクトル空間Vのベクトルの組$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$が次の2つの条件を満たすときにVの基(き),または基底という.

1. $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$は1次独立である.
2. $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$はVを生成する.

Example

$\mathbb{R}^n$の基本ベクトル$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$は$\mathbb{R}^n$の基底である.
この$\mathbb{R}^n$の基底$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$を$\mathbb{R}^n$の標準基底という.

4.4 ベクトル空間の基と次元

次の定理より,基底をなすベクトルの個数は一定である.

Theorem (定理4.4.1)

ベクトル空間Vの基底をなすベクトルの個数は,
基底の取り方によらず一定である.

Proof.

$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ と $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ が共にVの基底であるとする.
$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ はVの基底だから $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ の1次結合で書ける.
もし $n > m$ ならば定理4.2.3により, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ は1次従属となり,
$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ が基底であることに矛盾する.
よって, $n \leq m$ である. 同じように $m \leq n$ を得る. □

4.4 ベクトル空間の基と次元

Definition

零ベクトルのみからなるベクトル空間を零空間という.
零空間および有限個のベクトルからなる基底を持つベクトル空間Vを有限次のベクトル空間という.このとき,Vの基底を構成するベクトルの個数をVの次元といい,dim(V)と書く.
ただし,Vが零空間であるときは$\dim(V) = 0$とする.

定理4.4.1により,Vの次元は基底の取り方によらない.

Example

$\mathbb{R}^n$の基本ベクトル$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$は$\mathbb{R}^n$の基底であったから

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n.$$

Example

$1, x, \ldots, x^n$は$\mathbb{R}[x]_n$の基底となる.従って,$\dim(\mathbb{R}[x]_n) = n + 1$.

4.4 ベクトル空間の基と次元

Theorem (定理4.4.2)

ベクトル空間Vが有限次元である必要十分条件はVの１次独立なベクトルのな最大個数が有限であることである.このとき,

$$\dim(V) = (V\text{の１次独立なベクトルの最大個数}).$$

Proof.

$\dim(V) = n$とすると,Vにはn個のベクトルからなる基底が存在する.Vの任意の$n+1$個以上のベクトルはこれらのn個のベクトルの１次結合で書けるから定理4.2.3により1次従属である.
従って,Vのベクトルの１次独立な最大個数はnである.
逆にVの１次独立な最大個数がnであるとし,$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$が１次独立であるとする.Vの任意のベクトル$\mathbf{u}$に対して$\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$は１次従属であるから,定理4.2.2により$\mathbf{u}$は$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$の１次結合で書ける.よって$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$はVの基底となり
$\dim(V) = n$である. □

4.4 ベクトル空間の基と次元

Definition

ベクトル空間Vのベクトルで$\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_t$の１次結合全体のなす集合

$$W = \{c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_t\mathbf{u}_t \mid c_i \in \mathbb{R}\}$$

はVの部分空間である.このWを

$$\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_t \rangle$$

と書き,$\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_t$で生成されるVの部分空間という.

Theorem (定理4.4.4)

$\dim(\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_t \rangle) = (\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_t\}$の１次独立な最大個数$)$.

Proof.

定理4.4.2と同じように. $\square$

4.4 ベクトル空間の基と次元

Theorem（定理4.4.5）

$\dim(V) = n$とする.
Vのn個のベクトル$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$について次の３条件は同値である.

1. $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$はVの基底である.
2. $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$は１次独立である.
3. $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$はVを生成する.

Proof: 定義より,(1) $\Leftrightarrow$ (2)と(3).よって (2) $\Leftrightarrow$ (3)を示せば良い.
(2) $\Rightarrow$ (3):$\mathbf{u} \in V$を任意とする.$\dim(V)$はVの１次独立な最大個数であるから(定理4.4.2), $\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n$は１次従属である.
よって定理4.2.2より$\mathbf{u}$は$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$の１次結合で書ける.
(3) $\Rightarrow$ (2):仮定より$V = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$であるから,定理4.4.4より,

$$n = \dim(V) = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} \text{ の１次独立な最大個数.}$$

よって,$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$は１次独立である.

4.4 ベクトル空間の基と次元

Definition

同次形の連立 1 次方程式の解空間の 1 組の基底を,その連立 1 次方程式の基本解という.

Theorem (定理4.4.3)

$\mathrm{A} \in \mathrm{M}(\mathrm{m}, \mathrm{n})$とする.同次形の連立 1 次方程式$\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$の解空間

$$\mathrm{W} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \mid \mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

の次元は次のように表される.

$$\dim(\mathrm{W}) = \mathrm{n} - \mathrm{rank}(\mathrm{A}).$$

Proof.

Wの次元は基本解の個数である.これはAの簡約化Bの,主成分を含まない列に対応する変数の個数に等しい.
よって,$\dim(\mathrm{W}) = \mathrm{n} - \mathrm{rank}(\mathrm{A})$. □

5.1 線形写像

Definition

U, Vを（$\mathbb{R}$上の）ベクトル空間とする.UからVへの写像Tが（$\mathbb{R}$上の）**線形写像**であるとは,次の(1),(2)を満たすときにいう.

1. $\mathrm{T}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathrm{T}(\mathbf{u}) + \mathrm{T}(\mathbf{v}) \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{U})$,
2. $\mathrm{T}(c\mathbf{u}) = c\mathrm{T}(\mathbf{u}) \quad (\mathbf{u} \in \mathrm{U}, c \in \mathbb{R})$.

線形写像は 1 次写像とも呼ぶ.
Uの全てのベクトルをVの$\mathbf{0}$にうつす線形写像を零写像といい,0で表す.

Example

$A \in M(m, n)$であるとき,$\mathbb{R}^n$から$\mathbb{R}^m$への写像T_Aを

$$\mathrm{T}_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$$

で定義すると,T_Aは線形写像である.

5.1 線形写像

Definition

TがベクトルUからVへの線形写像のとき,

$$\mathrm{Im}(\mathrm{T}) = \{\mathrm{T}(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in \mathrm{U}\}$$

とおき,Tの像という. Tの像はT(U)とも書く.また,

$$\ker(\mathrm{T}) = \{\mathbf{u} \in \mathrm{U} \mid \mathrm{T}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\}$$

とおき,Tの核という.

Theorem

Tはベクトル空間UからVへの線形写像とする.

1. Tの像Im(T)はVの部分空間である.
2. Tの核ker(T)はUの部分空間である.

5.1 線形写像

Definition

TがベクトルUからVへの線形写像のとき,

$$\mathrm{rank}(\mathrm{T}) = \dim(\mathrm{Im}(\mathrm{T})),$$
$$\mathrm{null}(\mathrm{T}) = \dim(\ker(\mathrm{T}))$$

と書き,各々Tの階数,Tの退化次数という.

Theorem

Tがベクトル空間UからVへの線形写像のとき,

$$\mathrm{null}(\mathrm{T}) + \mathrm{rank}(\mathrm{T}) = \dim(\mathrm{U}).$$

11/7

5.2 線形写像の表現行列

Definition

Tがベクトル空間UからVへの線形写像とする.
Uの基底$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$,Vの基底$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$を決めておく.
次の条件を満たす行列$A \in M(m, n)$をUの基底$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$,
Vの基底$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$に関するTの表現行列であるという.

$$(T(\mathbf{u}_1), \ldots, T(\mathbf{u}_n)) = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m)A$$

注意: $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$が1次独立であるから,Aは一意に定まる.

Example (例1)

$A \in M(m, n)$とする.T_Aを$\mathbb{R}^n$から$\mathbb{R}^m$への線形写像で

$$T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$$

で定義されるものとする.このとき,$\mathbb{R}^n$の標準基底$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$,
$\mathbb{R}^m$の標準基底$\{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_m\}$に関する表現行列はAである.

5.2 線形写像の表現行列

ベクトル空間Wの 2 つの基底$\{w_1,\ldots,w_s\}$,$\{w'_1,\ldots,w'_s\}$とする.

$$\{w'_1,\ldots,w'_s\} = \{w_1,\ldots,w_s\}\,P \quad \text{を満たす} P \in M(s,s) \text{を}$$

$\{w_1,\ldots,w_s\}$から$\{w'_1,\ldots,w'_s\}$への**変換行列**という.

注意: 定理4.3.6(2)より,Pは正則行列である.

定理5.2.1. Tがベクトル空間UからVへの線形写像とする.
$\{u_1,\ldots,u_n\}$,$\{u'_1,\ldots,u'_n\}$,$\{v_1,\ldots,v_m\}$,$\{v'_1,\ldots,v'_m\}$をUとVの各々2つ基底とする.

$$\text{T の } \{u_1,\ldots,u_n\},\{v_1,\ldots,v_m\} \text{ に関する表現行列を} A,$$
$$\text{T の } \{u'_1,\ldots,u'_n\},\{v'_1,\ldots,v'_m\} \text{ に関する表現行列を} B$$

とする. Pを$\{u_1,\ldots,u_n\}$から$\{u'_1,\ldots,u'_n\}$への表現行列,
Qを$\{v_1,\ldots,v_m\}$から$\{v'_1,\ldots,v'_m\}$への表現行列とする.このとき,

$$B = Q^{-1}AP.$$

12/5

Definition

Tは$\mathbb{R}$上のベクトル空間Vの線形写像(=線形変換)とする.

$$\mathrm{T}(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u} \quad (\mathbf{u} \in \mathrm{V}, \mathbf{u} \neq \mathbf{0}, \lambda \in \mathbb{R})$$

を満たすλをTの固有値,**u**を(固有値λに属する)Tの固有ベクトルという.

Example (例1)

$\mathrm{T}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. ここで,

$$\mathrm{T}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

であるから,$\lambda = 4$はTの固有値で,$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$はTの固有値$\lambda = 4$に属する固有ベクトルである.

Definition

Tはベクトル空間Vの線形写像(=線形変換)とする.

$$T(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u} \quad (\mathbf{u} \in V, \mathbf{u} \neq \mathbf{0}, \lambda \in \mathbb{R})$$

を満たすλをTの固有値,$\mathbf{u}$を(固有値λに属する)Tの固有ベクトルという.
Tの固有値λに対し,

$$W(\lambda; T) = \{\mathbf{u} \in V \mid T(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u}\}$$

とおき,Tの固有値λの固有空間という.

注意: $W(\lambda; T)$はVの部分空間である.
$W(\lambda; T)$の$\mathbf{0}$でないベクトルがλに属するTの固有ベクトルである.

Definition

正方行列Aに対し,次の多項式$g_A(t)$をAの固有多項式という.

$$g_A(t) = |tE - A|.$$

$g_A(t) = 0$の根を行列Aの固有値という.

Example

$A = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$とすると,

$$g_A(t) = |tE - A| = \left| \begin{bmatrix} t-7 & -6 \\ 3 & t+2 \end{bmatrix} \right| = t^2 - 5t + 4 = (t-1)(t+4).$$

よって,Aの固有値は$\lambda = 1, 4$である.

Theorem

λがT_Aの固有値$\Longleftrightarrow g_A(\lambda) = 0$.

Proof.

$$\begin{aligned} \lambda\text{が}T_A\text{の固有値} &\Leftrightarrow \exists \mathbf{u} \neq \mathbf{0} : A\mathbf{u} = \lambda \mathbf{u} \\ \exists \mathbf{u} \neq \mathbf{0} : A\mathbf{u} = \lambda \mathbf{u} &\overset{\text{定理}2.4.2}{\Leftrightarrow} \lambda E - A\text{が正則行列でない} \\ \lambda E - A\text{が正則行列でない} &\overset{\text{定理}3.3.5\&3.4.2}{\Leftrightarrow} |\lambda E - A| = 0. \end{aligned}$$

$|\lambda E - A| = g_A(\lambda)$であるから,定理を得る. $\square$

多項式$f(t) = a_m t^m + \cdots + a_0$と正方行列Aに対して,

$$f(A) = a_m A^m + \cdots + a_0 E$$

と定義する.

Theorem (ケーレー・ハミルトンの定理)

$g_A(t)$が正方行列Aの固有多項式ならば,

$$g_A(A) = 0.$$

5.3 固有値と固有ベクトル

Definition

Tをn次元のベクトル空間Vの線形変換とする.
Vの基底$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$を取る.
Tの$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$に関する表現行列をAとする.
Aの固有多項式をTの固有多項式といい,$g_T(t)$と書く.
すなわち

$$g_T(t) = g_A(t) = |tE - A|.$$

注意:$g_T(t)$はTの表現行列の取り方によらない.

Proof.

証明:BをTの表現行列とすると,定理5.2.2より,$B = P^{-1}AP$と書ける.よって,

$$\begin{aligned} g_B(t) &= |tE - B| = \left|tP^{-1}EP - P^{-1}BP\right| \\ &= \left|P^{-1}(tE - B)P\right| \\ &\overset{\text{定理3.3.5}}{=} |tE - A| = g_A(t). \end{aligned}$$

12/5

$A \in M(n,n)$とする．

$$T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad T_A(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}.$$

Theorem (定理5.3.3)

Tをベクトル空間Vの線形変換とする．
λがTの固有値$\Longleftrightarrow g_T(\lambda) = 0$.

定理5.2.2の復習

$T: U \to U$がベクトル空間Uの線形変換とする.
Tの,Uの基底$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$に関する$T$の表現行列$A$を

$$(T(\mathbf{u}_1), \ldots, T(\mathbf{u}_n)) = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)A$$

で定義する.
$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$,$\{\mathbf{u}'_1, \ldots, \mathbf{u}'_n\}$を$U$の2つの基底とする.
Tの $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ に関する表現行列をA,
Tの $\{\mathbf{u}'_1, \ldots, \mathbf{u}'_n\}$ に関する表現行列をBとする.
$P \in M(n, n)$を$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$から$\{\mathbf{u}'_1, \ldots, \mathbf{u}'_n\}$へ変換行列とする.
つまり

$$(\mathbf{u}'_1, \ldots, \mathbf{u}'_n) = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)\, P.$$

このとき(定理5.2.2)より

$$B = P^{-1}AP.$$

Definition

行列$A, B \in M(n,n)$が同値であるとは

$$B = P^{-1}AP$$

となる正則行列$P \in M(n,n)$が存在するときにいう.

$A \in M(n,n)$が与えられたとき,$B = P^{-1}AP$が対角行列になるような正則行列Pと対角行列Bを求めることを**行列Aの対角化**という.
P, Bが実数（複素数)を成分とする行列で取れるとき,
Aは**実数体上（複素数体上)対角化**されるという.

Example

行列$A = \begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$が与えられたとき,

$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$とすると,$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$となる.

Theorem (定理5.4.1の行列のversion)

$A \in M(n,n)$の相異なる固有値を$\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$とすると,

$$\sum_{i=1}^{r} \dim\left(W(\lambda_i; T_A)\right) \leq n.$$

Theorem (定理5.4.2)

$A \in M(n,n)$の相異なる固有値の全体 を$\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$とする.
Aが$\mathbb{R}$上対角化される必要十分条件は

$$\sum_{i=1}^{r} \dim\left(W(\lambda_i; T_A)\right) = n.$$

注意:$\mathbb{R}$の代わりに$\mathbb{C}$を用いれば,5.4.1と5.4.2はそのまま成り立つ.

Definition

$\mathbb{R}$上のベクトル空間Vのベクトル$\mathbf{u}, \mathbf{v}$に対して実数$(\mathbf{u}, \mathbf{v})$を対応させる対応$(\cdot, \cdot)$が次の条件を満たすとき,ベクトル空間Vの**内積**という.任意の$\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{v} \in V$,$c \in \mathbb{R}$に対して,

1. $(\mathbf{u} + \mathbf{u}', \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}', \mathbf{v})$
2. $(c\mathbf{u}, \mathbf{v}) = c\,(\mathbf{u}, \mathbf{v})$
3. $(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$
4. $\mathbf{u} \neq 0$ならば,$(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0$.

内積を持つベクトル空間を**内積空間**という.

Example (例1)

$V = \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a}$,$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$に対して,

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) :={}^t\mathbf{a}\mathbf{b} = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$$

と定義する.$\mathbb{R}^n$の標準的な内積という.

Definition

$\mathbb{R}$上のベクトル空間Vのベクトル$\mathbf{u}, \mathbf{v}$に対して実数$(\mathbf{u}, \mathbf{v})$を対応させる対応$(\cdot, \cdot)$が次の条件を満たすとき,ベクトル空間Vの**内積**という.任意の$\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{v} \in V$,$c \in \mathbb{R}$に対して,

1. $(\mathbf{u} + \mathbf{u}', \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}', \mathbf{v})$
2. $(c\mathbf{u}, \mathbf{v}) = c\,(\mathbf{u}, \mathbf{v})$
3. $(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$
4. $\mathbf{u} \neq 0$ならば,$(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0$.

内積を持つベクトル空間を**内積空間**という.

Example (例2)

$V = \mathbb{R}[x]_n$, $f, g \in V$に対して,

$$(f, g) := \int_{-1}^{+1} f(x)g(x)dx$$

と定義する.これはVの内積である.

Definition

内積空間Vのベクトル$\mathbf{u}$に対し$(\mathbf{u},\mathbf{u})\geq 0$であるから,

$$\|\mathbf{u}\| := \sqrt{(\mathbf{u},\mathbf{u})}$$

とおき$\mathbf{u}$のノルムまたは長さという.

注意:$\|\mathbf{u}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = 0.$

Theorem (定理6.1.1)

内積空間Vのノルムについて次が成り立つ.任意の$\mathbf{u},\mathbf{v}\in V, \mathbf{c}\in \mathbb{R}$に対して,

1. $\|\mathbf{c}\mathbf{u}\| = |\mathbf{c}|\,\|\mathbf{u}\|$
2. $|(\mathbf{u},\mathbf{v})| \leq \|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|$(シュワルツの不等式)
3. $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (三角不等式)

Definition

内積空間Vのベクトル$\mathbf{u}, \mathbf{v}$が直交するとは

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

が成り立つときにいう.

Theorem (定理6.1.1)

零ベクトルでないベクトル$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$が互いに直交すれば,
一次独立である.

Definition

Vを内積空間とする.$n = \dim(V)$とする.
次の条件を満たすVのベクトル$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$を正規直交基底という.

$$(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = \delta_{ij} \quad (1 \le i, j \le n).$$

注意:定理6.1.2と定理4.4.5より,$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$はVの基底である.

Example

$\mathbb{R}^n$の内積は標準的なものとする.

- $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$は正規直交基底である.
- $\mathbb{R}^2$のベクトル

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

　は$\mathbb{R}^2$の正規直交基底である.

Theorem (定理6.2.1 (シュミットの直交化))

Vを内積空間とする.$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$をVの基底とすると,
正規直交基底$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$で

$$\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle \quad (1 \leq r \leq n)$$

となるものが存在する.

手順:

- $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 / \|\mathbf{v}_1\|$
- $\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}'_2 / \|\mathbf{v}'_2\|$
- $\mathbf{v}'_3 = \mathbf{v}_3 - (\mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1 - (\mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2)\,\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}'_3 / \|\mathbf{v}'_3\|$
- ...
- $\mathbf{v}'_r = \mathbf{v}_r - \sum_{i=1}^{r-1} (\mathbf{v}_r, \mathbf{u}_i)\,\mathbf{u}_i$, $\mathbf{u}_r = \mathbf{v}'_r / \|\mathbf{v}'_r\|$

Definition

Vを内積空間とする.$n = \dim(V)$とする.
次の条件を満たすVのベクトル$\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$を正規直交基底という.

$$(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = \delta_{ij} \quad (1 \le i, j \le n).$$

注意:定理6.1.2と定理4.4.5より,$\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$はVの基底である.

Theorem (定理 6.2.2)

$\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$を内積空間Vの正規直交基底とする.Vのベクトル$\mathbf{u}, \mathbf{v}$を$\mathbf{u} = a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_n\mathbf{u}_n$,$\mathbf{v} = b_1\mathbf{u}_1 + \cdots + b_n\mathbf{u}_n$と書くと

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n.$$

Definition

Vを内積空間とする.Vの線形変換Tが**直交変換**であるとは,

$$(T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v})) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V)$$

が成り立つときにいう.

Theorem (定理 6.2.3)

$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$は内積空間Vの正規直交基底とする.Vの線形変換Tに対して

$$T\text{は直交変換} \Leftrightarrow \{T(\mathbf{u}_1), \ldots, T(\mathbf{u}_n)\}\ \text{はVの正規直交基底}$$

である.

Definition

n次の実正方行列Pが直交行列であるとは

$$ {}^{t}PP = E_n $$

を満たすときにいう.

注意: Pが直交行列のとき,Pは正則で$P^{-1} = {}^{t}P$である.
従って,$(\det(P))^2 = 1$となる.つまり,$\det(P) = \pm 1$.

Theorem (定理 6.2.4)

n次の実正方行列Aに対し

$$ A\text{は直交行列} \Leftrightarrow T_A\text{が直交変換.} $$

Theorem (定理 6.2.5)

n次の実正方行列$A = [a_1, \ldots, a_n]$を列ベクトル表示すると,

$$ A\text{は直交行列} \Leftrightarrow \{a_1, \ldots, a_n\}\text{は}\mathbb{R}^n\text{の正規直交基底.} $$

Definition

正方行列Aが**対称行列**であるとは${}^{t}A = A$を満たすときにいう.

Theorem (定理 6.3.1)

実対称行列の固有値は全て実数である.

Theorem (定理 6.3.2 (上三角化))

n次実正方行列Aの固有値が全て実数ならば,次のような直交行列Pが存在する.

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

直交行列Pは$\det P = 1$と取ることができる.

Theorem (定理 6.3.2 (上三角化))

Aがn次実対称行列ならば,次のような直交行列Pが存在する.

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

直交行列Pは$\det P = 1$と取ることができる.

Theorem (定理 6.3.3 (対角化))

Aがn次実対称行列ならば,次のような直交行列Pが存在する.

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

直交行列Pは$\det P = 1$と取ることができる.