● rot $\boldsymbol{A}$ ($\nabla \times \boldsymbol{A}$)（ローテーション，日本語では回転）の意味

さて，いよいよ rot の登場である。

ベクトル ∇ とベクトル $\boldsymbol{A}$ のベクトル積は，何を意味するのだろうか。ベクトル積であるから，少なくとも何かの回転であるということは間違いない。この「回転」というイメージさえ押さえておけば，rot $\boldsymbol{A}$ も難しくないはずである。

$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}$　$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}$

たとえば，$\nabla \times \boldsymbol{A}$ の z 成分を見てみよう。その定義から，（P214 ~~？~~ 式）

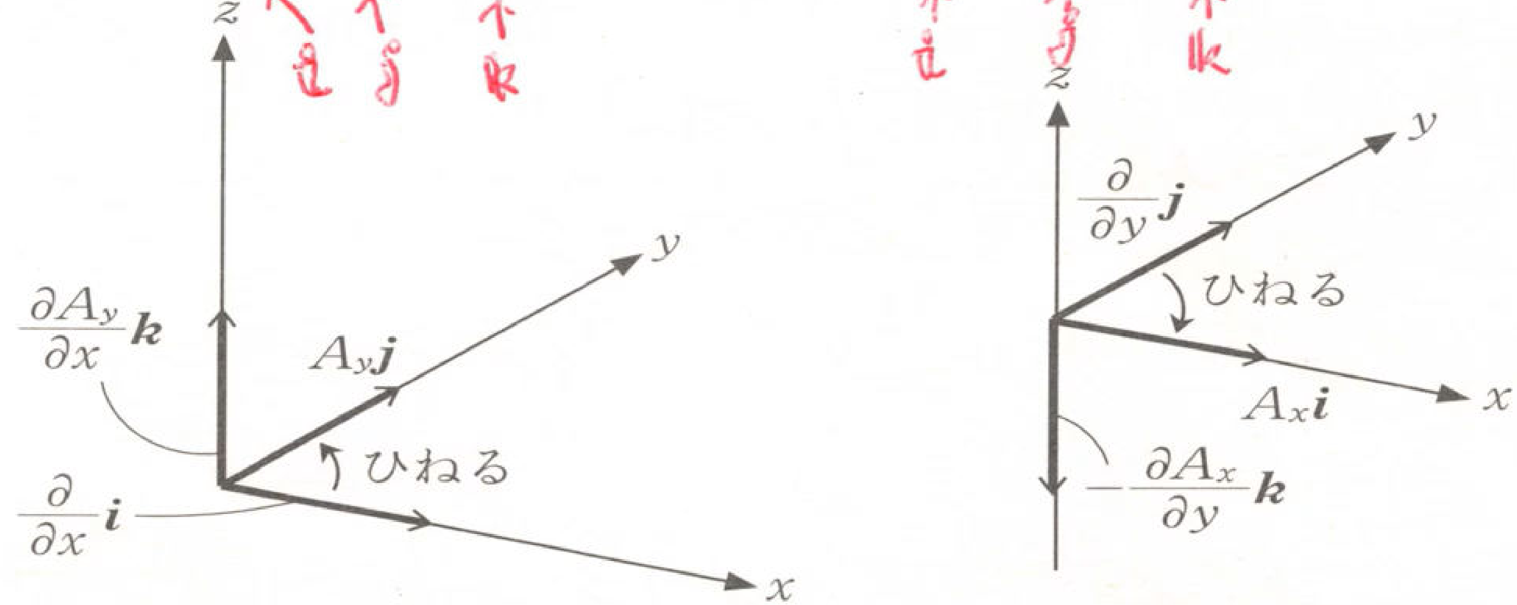
$$(\nabla \times \boldsymbol{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

← どっちに回るか？

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right), \quad A = (A_x, A_y, A_z)$$

$\boldsymbol{i}$　$\boldsymbol{j}$　$\boldsymbol{k}$　　$\boldsymbol{i}$　$\boldsymbol{j}$　$\boldsymbol{k}$

図A-14



$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$だから，$z$のプラス成分は$\frac{\partial A_y}{\partial x}$。

$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k}$だから，$z$のマイナス成分は$\frac{\partial A_x}{\partial y}$。

140 4？

この z 成分が，上式のようにプラスの $\partial A_y/\partial x$ とマイナスの $\partial A_x/\partial y$ の 2 項になることは，図を描けばよく分かる。ベクトル積の項で述べた，$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}$ と $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}$ の 2 つだけが 0 とならずに(プラスとマイナスで)「生き残る」からである。

た

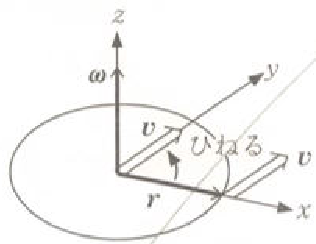
質問で「$\frac{\partial A_y}{\partial x}$ はゼロですよね？」と来た。A_y は (x, y, z) の 関数だと理解させる 11.10.28 131

これかなり言わないとわかりにくい

以下各自でよめ

さらに，その大きさが何を意味するかを直感的に考えてみよう。それには，力学の円運動で登場した，速度と角速度のベクトルを考えてみるのが分かりやすい。

図A-15●ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ は，向きが $\boldsymbol{r}$ から $\boldsymbol{v}$ にひねり，大きさは $v=r\omega$ より $\omega=\dfrac{v}{r}$。

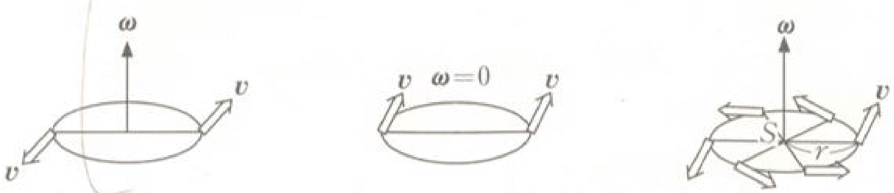


$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$

図で，$\boldsymbol{r}$ が x 軸方向，$\boldsymbol{v}$ が y 軸方向を向いていると，角速度のベクトルは z 軸を向く(ように取り決める)。よって，$\boldsymbol{\omega}$ は $\boldsymbol{r}$ から $\boldsymbol{v}$ の方向へ(右)ねじをひねるとき，ねじの進む方向である。そして，その大きさは，$v=r\omega$ の関係から，$\omega=v/r$ となる。この v/r と，$\partial A_y/\partial x$ を比べてみれば，∂ の記号はどうでもよいとして，その大きさを距離で割り算しているという共通性があるから，$\boldsymbol{A}$ と $\nabla\times\boldsymbol{A}$ の関係は，まさに円運動における速度 $\boldsymbol{v}$ と角速度 $\boldsymbol{\omega}$ の関係と同じだということが分かる。 → p116へ戻る

つまり，$\boldsymbol{A}$ を何か流速のようなものだとみなすと，$\nabla\times\boldsymbol{A}$ はその流速の回転の効果を見る角速度のようなものなのである。

図A-16●(c)の説明。v を円周にそって全部足すと，$2\pi rv$。円の面積は πr^2 だから，ω は(係数2は別にして) v を円周にそった合計を円の面積で割ったものに等しい。



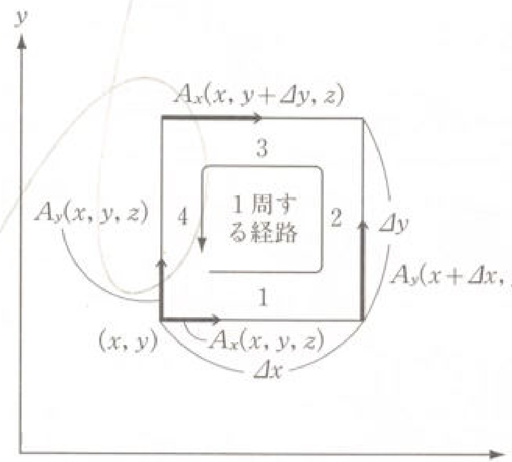
(a)回転している　(b)回転していない　(c)

たとえば，図(a)のように，点Oの周りを $\boldsymbol{v}$ が回転するようにとりまいていれば，角速度 $\boldsymbol{\omega}$ が発生するが，図(b)のようであれば回転の効果がなく $\boldsymbol{\omega}=0$ である。

これをもう少し追究して，図(c)のように円周にそってずっと $\boldsymbol{v}$ がとりまいていたとすると，回転の効果は $\boldsymbol{v}$ に円周の長さ $2\pi r$ をかけたものになりそうである($2\pi rv$)。ところで，$\boldsymbol{\omega}$ の大きさは，v/r であるから，回転の効果 $2\pi rv$ を $2\pi r^2$ で割り算すれば $\boldsymbol{\omega}$ の大きさになる。$2\pi r^2$ は，図の円の面積の2倍である。ここで係数2はどうでもよいとすれば，$\boldsymbol{v}$ を円周にそって合計し，それを円の面積で割ったもの(すなわち面積密度)が，(係数2だけは別にして) $\boldsymbol{\omega}$ そのものということになる。

以上のような直感的イメージが，$\nabla\times\boldsymbol{A}$ (rot $\boldsymbol{A}$) のすべてである。では，きちんと恰好をつけないと気がすまない人のために，同じことをそれらしく計算してみよう。

図A-17●経路1，2はプラス，経路3，4はマイナスとして計算。



図のように，x-y 平面上に微小な長方形(面積 $\Delta x\Delta y$)をとる。そして，(場の)ベクトル $\boldsymbol{A}$ が，この長方形を(左)回転させる効果を計算してみよう。分かりやすく $\boldsymbol{A}$ の成分 A_x，A_y は，すべて正方向を向いている図にしておく。すると，辺1に沿う $A_x(x, y, z)$ は長方形を左回転させようとするが，辺3に沿う $A_x(x, y+\Delta y, z)$ は右回転させようとする。すなわちマイナスである。同じく辺2に沿う $A_y(x+\Delta x, y, z)$ はプラスだが，辺4に沿う $A_y(x, y, z)$ はマイナスである。そこで，上の円運動で v を円周にそって足し合わせたのと同じことをすれば，

経路 1＋経路 2－経路 3－経路 4

$$= A_x(x, y, z)\Delta x + A_y(x+\Delta x, y, z)\Delta y - A_x(x, y+\Delta y, z)\Delta x - A_y(x, y, z)\Delta y$$

$$= \{A_y(x+\Delta x, y, z) - A_y(x, y, z)\}\Delta y - \{A_x(x, y+\Delta y, z) - A_x(x, y, z)\}\Delta x$$

ここで例のごとく偏微分の考え方を使えば，

$$= \frac{\partial A_y}{\partial x}\Delta x \cdot \Delta y - \frac{\partial A_x}{\partial y}\Delta y \cdot \Delta x$$

$$= \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\Delta x \Delta y$$

じっくり見るまでもなく，この式のかっこ内は $\nabla\times\boldsymbol{A}$ の z 成分であり，$\Delta x\Delta y$ は長方形の面積である。すなわち，

(回転の効果を足したもの)＝($\nabla\times\boldsymbol{A}$ の大きさ)×(経路で囲まれる面積)

つまり $\nabla\times\boldsymbol{A}$ は，経路にそって回転の効果を足したものを，その経路で囲まれる面積で割ったもの(すなわち面積密度)である。(係数 2 の違いはあるが)これは，速度と角速度の関係に他ならない。

図A-18●共通する微小な経路は全部打ち消し合って，外周を 1 周する大きな経路が残る。

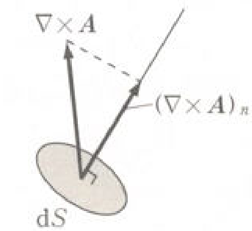
以上の微小な部分の計算は，上図から分かるように，どんどん面積を拡げていくことができる。そして，経路にそった足し算は，線積分と呼ばれ，記号 $\oint_C$ で書かれる。ベクトル $\boldsymbol{A}$ と経路とのかけ算は，線素ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ なるものを考えれば，$\boldsymbol{A}$ と $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ のスカラー積である。

また，$\nabla\times\boldsymbol{A}$ と微小面積 $\Delta x\Delta y$ (＝$\mathrm{d}S$ としておく)のかけ算は，正確にいえば，$\nabla\times\boldsymbol{A}$ の $\mathrm{d}S$ に直角な成分(それを $(\nabla\times\boldsymbol{A})_n$ としておく)と $\mathrm{d}S$ のかけ算であるから，正確に書くなら，

$$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_S (\nabla\times\boldsymbol{A})_n\cdot\mathrm{d}S$$

↑ P117の図で証明

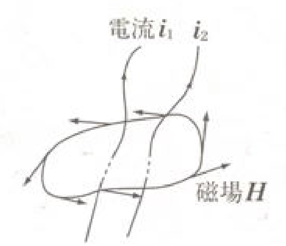
図A-19●$(\nabla\times\boldsymbol{A})_n$ は，$\nabla\times\boldsymbol{A}$ の $\mathrm{d}S$ に垂直な成分。



となる。これが有名な**ストークスの定理**である。ガウスの定理は，体積積分と面積積分の関係であるが，ストークスの定理は，線積分と面積積分の関係である。

細かい記号はどうでもよろしい。この定理の意味は，ある場のベクトル $\boldsymbol{A}$ を任意の経路で足し算して 1 周すれば，それはその経路を境界とする任意の曲面をつらぬいて出ていくベクトル $\nabla\times\boldsymbol{A}$ の合計に等しいということである。くどいようだが，記号はどうでもよい。ポイントはイメージである。

図A-20●磁場 $\boldsymbol{H}$ を 1 周足した量 $\oint_C \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ は，その閉曲線経路をつらぬく電流の合計 $\boldsymbol{i}_1+\boldsymbol{i}_2+\cdots$ に等しい。



たとえば，$\boldsymbol{H}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ という式を見たとき，そのイメージは，磁場 $\boldsymbol{H}$ というものは，あるベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の回転の効果として $\boldsymbol{H}$ が生まれるのだ，というようなことである。あるいは，$\boldsymbol{i}=\nabla\times\boldsymbol{H}$ は，磁場 $\boldsymbol{H}$ の回転の効果を調べれば，そこをつらぬく電流(密度) $\boldsymbol{i}$ が分かるというようなことである(もっとも，電流と磁場の関係は，物理的には電流が原因であり，磁場はその結果である)。

2016.5.25
2014.10.

Ｐ２２７やさしい数学の手引きの残り

015 ここまで（10月）

∇・はdivで湧き出し，∇はgradで傾き，∇×はrotで回転

その他の簡単な公式

grad, div, rot のそれぞれのイメージは，大体お分かり頂けたであろうか。

最後に，それらを組み合わせた簡単な，しかし重要な公式を紹介しておく。div(gradψ) 傾きの湧出し スカラー積（内積）

∇・はdivで湧き出し，∇はgradで傾き，∇×はrotで回転

おく。 div(grad ψ) 傾きの湧き出し

スカラー積（内積）

$\mathrm{div}A = \nabla\cdot A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

(1) $\nabla\cdot(\nabla\psi)$ ラプラシアン

スカラー場 ψ の grad（というベクトル）の div は，簡単に分かるように，$\nabla\psi = \mathrm{grad}\,\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$

$$\nabla\cdot(\nabla\psi) = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

である。

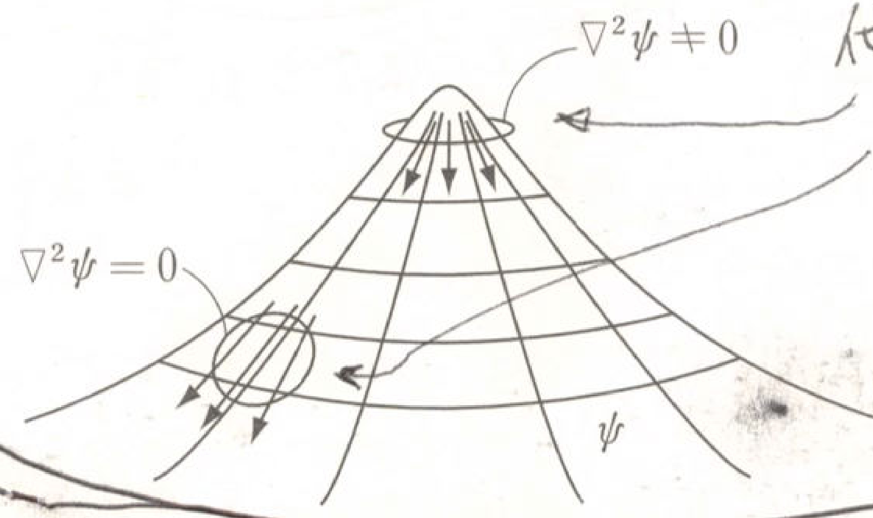
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

2階微分 ⇒ 傾きの変化

は，ラプラシアンと呼ばれ，しばしば ∇^2 と書かれる。電磁気にかぎらず，物理のさまざまな場面で登場する演算子である。

Δとも書く

図A-21 ● $\nabla^2\psi$ のイメージ



傾きが湧き出す点

〃 さない点

rot(grad ψ)=0 傾きに回転なし

(2) $\nabla\times(\nabla\psi)=0$

grad の rot は，つねに 0 である。なぜなら，たとえばこのベクトルの z 成分を書いてみると，$\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(\frac{\partial\psi}{\partial x},\frac{\partial\psi}{\partial y},\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$ のz成分

$$(\nabla\times(\nabla\psi))_z=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$$

ψ がまともな関数であるかぎり，x と y のどちらから偏微分しても結果は同じだから，上式は 0 である。x，y 成分にも同じことがいえるから，けっきょく

rot(grad ψ)=0

$$\nabla\times(\nabla\psi)=0$$

P38

電位V

たとえば，電場 $\boldsymbol{E}$ がつくる電気力は保存力なので，ポテンシャル ψ を用いて，

−grad ψ

$\boldsymbol{E}=-\text{grad}\,V$

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\psi$$

と書ける。このことから，つねに，$\text{rot}\,\boldsymbol{E}=\nabla\times(-\nabla\psi)=0$

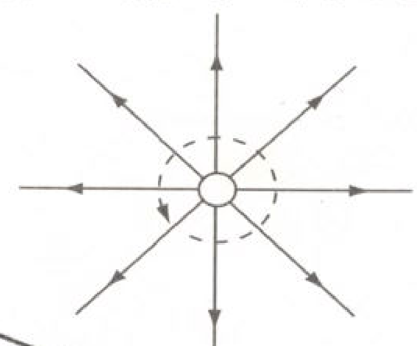
$$\text{rot}\,\boldsymbol{E}=0$$

注

が導かれる。$\boxed{\text{静電場}}$には回転の効果がないというのは物理法則であるが，静電場がポテンシャルをもつ保存場であることから，それは数学的必然としても導かれるのである。

図A-22 ~~発散していく力線で「渦」をつくることはできない。~~

電位ψの傾きEは
渦をつくれない
(但し静電場のとき)



rot(grad ψ)=0
傾きに渦はない

∇・はdivで湧き出し，∇はgradで傾き，∇×はrotで回転

∇・はdivで湧き出し，∇はgradで傾き，∇×はrotで回転

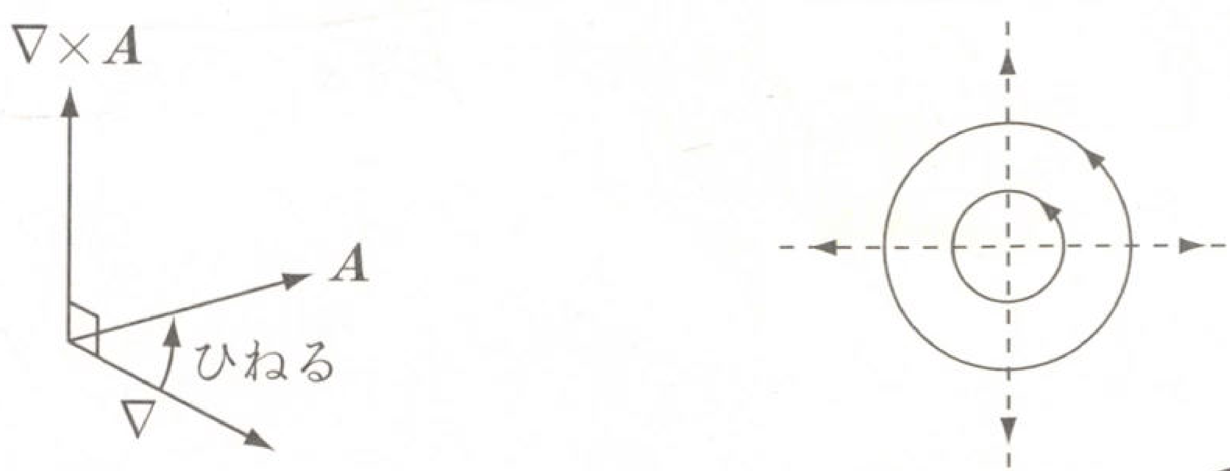
div(rot A) = 0

回転に湧き出しなし

(3) $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$

rot の div は，つねに 0 である。なぜなら，∇ をベクトルとみなすと，$\nabla\times\boldsymbol{A}$ はつねに ∇ に直角である。よって，∇ と $\nabla\times\boldsymbol{A}$ はつねに直角であるが，互いに直角をなす 2 つのベクトルの内積はつねに 0 だからである。

図A-23● $\nabla\times\boldsymbol{A}$ はつねに ∇ に直角だから，∇ と $\nabla\times\boldsymbol{A}$ のスカラー積はつねに 0。



このイメージは，(2)とちょうど逆である。すなわち，

回転する(渦のある)場は，けっして発散しない。

これもまた，証明抜きではあるが，重要な定理に導かれる。

div がつねに 0 となるような場には，必ず $\nabla \times \boldsymbol{A}$ と書けるような場 $\boldsymbol{A}$ が存在する。 湧き出しが 0 → 回転場Aが存在する

この $\boldsymbol{A}$ をベクトル・ポテンシャルと呼ぶ。たとえば，磁場 $\boldsymbol{H}$ は，この世に単独の磁荷なるものが存在しないため，つねに，

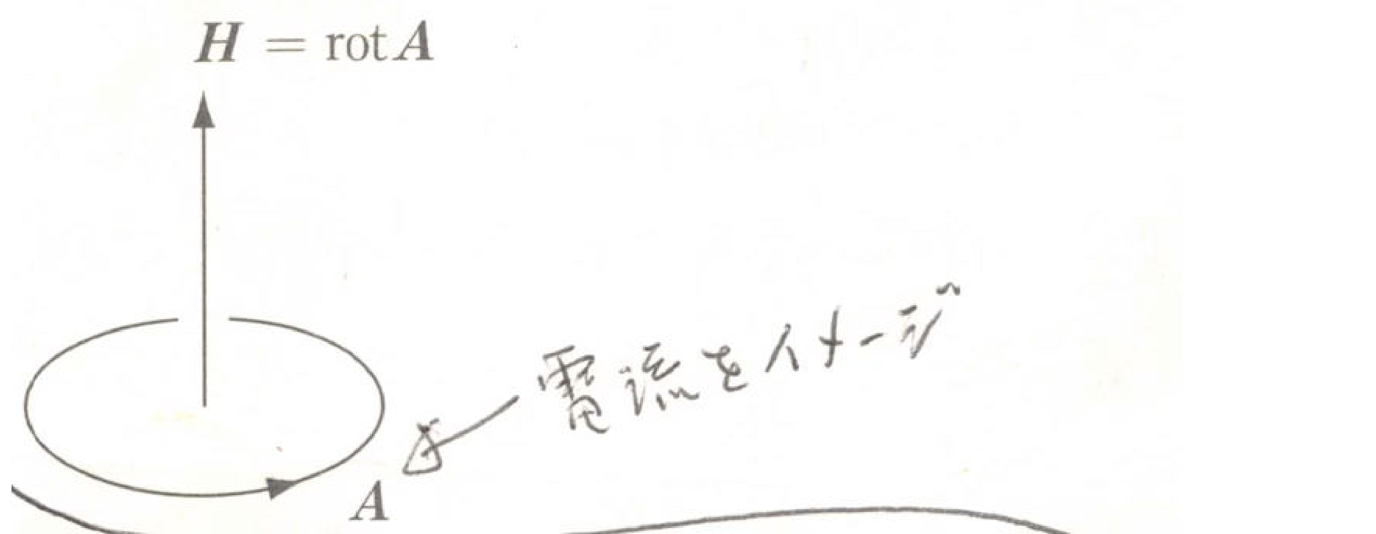
$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{H} = 0$$

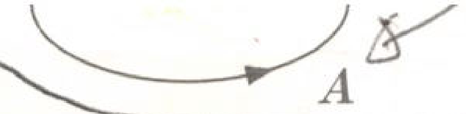
である。その結果として，

$$\boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

と書けるようなベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を必ず想定することができる。

図A-25●磁場 $\boldsymbol{H}$ は，ベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ の回転の効果として生じる。





rot(rotA)

(4) $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$

このベクトルは，ときどき登場する(講義 10，192 ページ)。

これは，回転の回転であるから，元のベクトル $\boldsymbol{A}$ と同じ平面上にあるベクトルになる。しかし，その表現はさほど単純にはならない。いま，このベクトルの z 成分を計算してみよう。

$$(\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}))_z$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\nabla\times\boldsymbol{A})_y - \frac{\partial}{\partial y}(\nabla\times\boldsymbol{A})_x$$

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x},\ (\nabla\times\boldsymbol{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

を代入して，

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 A_x}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial y\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 A_x}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y\partial z} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)A_z$$

ここで，ちょっとしたテクニックを使う。$\partial^2 A_z/\partial z^2$ を式の前半に加え，後半で引いても値は同じだから，

$$= \frac{\partial^2 A_x}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y\partial z} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)A_z$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)A_z$$

第 1 項のかっこ内は $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ であり，第 2 項のかっこ内は ∇^2 であるから，けっきょく，

rot (rot A) = grad (div A) − ∇^2A

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}$$ ⇐ 天下り公式 P192

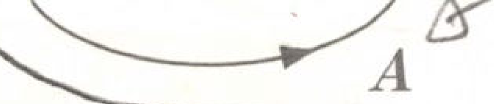
となることが分かる。

この公式の物理的意味はイメージしにくいが，もし $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$ という条件があれば，そのイメージは明らかになる(第 10 講参照)。

P192へ ← div E = 0

110525
120516
130605

rot (rot A)



(4)　$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$

このベクトルは，ときどき登場する(講義 10，192 ページ)。

これは，回転の回転であるから，元のベクトル $\boldsymbol{A}$ と同じ平面上にあるベクトルになる。しかし，その表現はさほど単純にはならない。いま，このベクトルの z 成分を計算してみよう。

$$(\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}))_z$$

中略

ら，けっきょく，

$$\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,A) = \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,A) - \nabla^2 A$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}$$

⇐ 天下り公式
P192

となることが分かる。

この公式の物理的意味はイメージしにくいが，もし $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$ という条件があれば，そのイメージは明らかになる(第 10 講参照)。

P192へ ← div E = 0