$$u + Xu' = \frac{3+u}{1-3u}\text{, すなわち } \frac{1-3u}{1+u^2}du = 3\frac{dX}{X}$$

となる．これを積分すれば

$$2\tan^{-1}u - 3\log(X^2 + Y^2) = C$$

ゆえに，もとの方程式の一般解は

$$2\tan^{-1}\frac{y+1}{x-1} - 3\log((x-1)^2 + (y+1)^2) = C$$

である．□

**例題 2**　$y' = \dfrac{4x-2y+1}{2x-y-1}$ の一般解を求めよ．

**解**　$u = 2x - y - 1$ とおく．もとの方程式は $2 - u' = \dfrac{2u+3}{u}$，すなわち $uu' = -3$ となる．したがって $u^2 = -6x + C$ となるから，求める一般解は

$$(2x - y - 1)^2 + 6x = C$$

で与えられる．

**問**　次の微分方程式の一般解を求めよ．

i)　$y' = \dfrac{x+2y+6}{2x+y+6}$　　ii)　$y' = \dfrac{x-y-1}{x-y-5}$

iii)　$y' = 2\dfrac{(y+1)^2}{(x+y+3)^2}$

## 2.4　線形微分方程式

$y'$ と $y$ とについて1次であるような微分方程式

$$\boldsymbol{y' + f(x)y = g(x)} \tag{1}$$

を**1階線形微分方程式**という．

$g(x) \equiv 0$ の場合の (1) を**同次形**という．同次形

$$y' + f(x)y = 0 \tag{2}$$

は変数分離形で，これを

$$\frac{dy}{y} + f(x)dx = 0$$

の形に書いて積分すれば

$$\log|y| + \int f(x)dx = C_1 \quad (\text{定数})$$

となる．この関係は$C$を定数として

$$y = Ce^{-\int f(x)\,dx} \tag{3}$$

と書かれる．任意の定数$C$に対して，(3) が (2) をみたすことは直ちにたしかめられるから，(3) は (2) の一般解である．

次に，方程式 (1) の一般解を求めよう．(3) において$C$を定数でなく$x$の適当な関数と考えて (1) の解が得られるかどうかを考えてみよう．

$$y = C(x)e^{-\int f(x)\,dx} \tag{4}$$

とおいて，$x$で微分すれば

$$\begin{aligned} y' &= C'(x)e^{-\int f(x)\,dx} - f(x)C(x)e^{-\int f(x)\,dx} \\ &= -f(x)y + C'(x)e^{-\int f(x)\,dx} \end{aligned}$$

したがって，$C(x)$ を

$$C'(x)e^{-\int f(x)\,dx} = g(x) \tag{5}$$

をみたすように定めれば，(4) が (1) の解となる．(5) から$C$を定数として

$$C(x) = \int e^{\int f(x)\,dx} g(x)dx + C$$

となる．これを (4) に代入した

$$y = e^{-\int f(x)\,dx}\left(\int e^{\int f(x)\,dx} g(x)dx + C\right) \tag{6}$$

が，$C$を任意定数として (1) の解になっていることは微分することによって容易にたしかめられるから，(6) は (1) の一般解である．

上記のように (3) における$C$を関数とみなして (1) の一般解を求める方法を**定数変化法**という．

$y' + f(x)y = 0$　同次形

$y' = \frac{dy}{dx}$ なので，$\frac{dy}{dx} = -f(x)y$

変数分離すると，$\frac{dy}{y} = -f(x)dx$

それぞれ積分すると，$\log|y| = \ln|y| = -\int f(x)dx + C$

《以降，特別に注意を払う場合を除き，
$\log|y| = \ln|y| = \underline{\log y}$ と書きます》

$\log y = -\int f(x)dx + C_1$

書き直すと，
$y = Ce^{-\int f(x)dx}$　(3)

(P.28〜30は省略)

# 数学１及び演習（常微分方程式）　演習問題（２回目）
# （テキスト該当ページ：pp.26〜30）

（今回の演習は，p.30 問 1〜3，p.53 問題 1 と同じです．章末に解答が掲載されています）

(1) 次の常微分方程式の一般解を求めよ．

1) $\dfrac{dy}{dx} - xy = x$

2) $x\dfrac{dy}{dx} - 2y = x^4$

3) $\dfrac{dy}{dx} + (\tan x)y = \sin 2x$

4) $\dfrac{dy}{dx} + 3y = x^3$

5) $\dfrac{dy}{dx} + xy = x^2$

6) $\dfrac{dy}{dx} = (x-y)^2$

(1) 次の常微分方程式の初期値問題を解け．

＜注＞「初期値問題」とは，$y(0) = a$ のように与えられる条件を用いて，一般解の積分定数を定める問題のことを言います．なお「初期」とは通常 $x = 0$ のことを意味しますが，異なる場合もあります．$x = 0$ ではない場合は，境界条件と呼ばれることがあります．

7) $\dfrac{dy}{dx} + 3y = e^x,\ y(0) = 1$

8) $\dfrac{dy}{dx} + x^2 y = \sin x,\ y(0) = 0$

9) $x\dfrac{dy}{dx} - 3y - 2x,\ y(1) = 0$

**注　意**

演習問題の答案を pdf 形式でアップロードし，提出してください．
学生番号，氏名を記入することを忘れないで下さい