第四回課題解説.

1. $\lim_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{5}}-(1-x)^{\frac{1}{5}}}{(1+2x)^{\frac{1}{3}}-(1-2x)^{\frac{1}{3}}}$ の計算．これは $\frac{0}{0}$ の不定形．不定形からどうやって脱出するかが問題である．$A=(1+x)^{\frac{1}{5}}$, $B=(1-x)^{\frac{1}{5}}$, $C=(1+2x)^{\frac{1}{3}}$, $D=(1-2x)^{\frac{1}{3}}$ とおくと $A^5=1+x$, $B^5=1-x$, $C^3=1+2x$, $D^3=1-2x$ である．したがって $x=A^5-1=1-B^5=\frac{1}{2}(C^3-1)=\frac{1}{2}(1-D^3)$ である．そこで，問題の関数 $\frac{(1+x)^{\frac{1}{5}}-(1-x)^{\frac{1}{5}}}{(1+2x)^{\frac{1}{3}}-(1-2x)^{\frac{1}{3}}}$ を $\frac{((1+x)^{\frac{1}{5}}-1)-((1-x)^{\frac{1}{5}}-1)}{((1+2x)^{\frac{1}{3}}-1)-((1-2x)^{\frac{1}{3}}-1)}$ と書き換えてから分母分子を x で割ると

$$\begin{aligned}\text{問題の関数} &= \frac{\frac{A-1}{A^5-1}+\frac{B-1}{B^5-1}}{\frac{2(C-1)}{C^3-1}+\frac{2(D-1)}{D^3-1}} \\ &= \frac{\frac{1}{1+A+A^2+A^3+A^4}+\frac{1}{1+B+B^2+B^3+B^4}}{\frac{2}{1+C+C^2}+\frac{2}{1+D+D^2}}\end{aligned}$$

となる．$x\to 0$ は $A\to 1$, $B\to 1$, $C\to 1$, $D\to 1$ と同じことだから，結局，問題の極限は

$$\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}=\frac{3}{10}$$

である．

2.

教科書の問 4.1. 講義中に計算例その一としてとり上げました．第四回講義資料を見てください．

教科書の問 4.2. (1)

$$\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}=\frac{(e^{ax}-1)-(e^{bx}-1)}{x}=a\frac{e^{ax}-1}{ax}-b\frac{e^{bx}-1}{bx}$$

だから

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}=a\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{ax}-b\lim_{x\to 0}\frac{e^{bx}-1}{bx}=a-b$$

である．

(2)(3) 講義中に計算例その二としてとり上げました．第四回講義資料を見てください．