# 線形代数学I 中間試験解答

Jacques Garrigue, 2017年6月23日

**問1**　15点

$$3\,{}^t\!A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \left[\begin{array}{ccc} & A & \\ \hline 1 & 0 & -1 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a \\ 5 \\ 3b-1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2c \\ 9 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} -b \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} z$$

**問2**　20点

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_2a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1}a_n \\ a_na_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_1a_2 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_2a_3a_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1}a_na_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_na_1a_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_1a_2a_3 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$A = [a_{ij}]$ とする. $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$, および $g(i) = \begin{cases} i & 0 < i \leq n \\ i-n & n < i \leq 2n \end{cases}$ と定めると,
$a_{ij} = \delta_{g(i+1)j}a_{g(i+1)}$ として定義できる.

$A^k = [a_{ij}^{(k)}]$ とする. 上から, $a_{ij}^{(k)} = \delta_{g(i+k)j}a_{g(i+1)}\dots a_{g(i+k)}$. それを帰納法で証明する.

- $k = 1$ のとき, $A$ の定義と一致する
- $k \leq n-1$ でなりたつとき, $k+1$ でなりたつことを証明する.

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(k+1)} &= \sum_{l=1}^{n} a_{il}a_{lj}^{(k)} = \sum_{l=1}^{n} \delta_{g(i+1)l}a_{g(i+1)}\delta_{g(l+1)j}a_{g(l+1)}\dots a_{g(l+k)} \\ &= a_{g(i+1)}\delta_{g(i+k+1)j}a_{g(i+2)}\dots a_{g(i+k+1)} = \delta_{g(i+k+1)j}a_{g(i+1)}\dots a_{g(i+k+1)} \end{aligned}$$

$l = g(i+1)$ でなければ 0
$g(l+s) = g(g(i+1)+s) = g(i+1+s)$
$(i+1+s \leq 2n)$

最後に, $A^n$ を考える. $a_{ij}^{(n)} = \delta_{g(i+n)j}a_{g(i+1)}\dots a_{g(i+n)} = \delta_{ij}a_1\dots a_n$, よって $A^n = a_1\dots a_nE$.

**問3**　5+10+10点

(1) $A = \left[\,\vec{a}\,\middle|\,\vec{b}\,\middle|\,\vec{c}\,\right]$ の階数が 3 なので, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が線形独立, ゆえに空間の基底をなす.

(2) $\left[\begin{array}{c|c} & 1 \\ A & 3 \\ & -1 \end{array}\right]$ を簡約化すると $\left[\begin{array}{c|c} & 2 \\ E_3 & 1 \\ & -1 \end{array}\right]$ になるので, $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

(3) 法線ベクトルを $\vec{n} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ とする. $(\vec{a}, \vec{n}) = (\vec{x}, \vec{n}) = 0$ から, $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$,

よって法線ベクトルは任意の $c \neq 0$ に対して $\begin{bmatrix} c \\ 0 \\ c \end{bmatrix}$ であり, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ は一例である.



**問4**　10+10点

簡約化で逆行列を計算する.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -2(1) \\ +(1) \end{array} \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -(2) \end{array}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \times\frac{1}{2} \end{array} \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \begin{array}{l} -(3) \\ +(3) \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -(1) \\ +(2) \end{array} \to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \times\frac{1}{2} \\ \times\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} +(3) \\ -(4) \\ \\ \\ \end{array}$$

**問5**　10+10点

簡約化で連立一次方程式を解く.

(1) $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -5 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

係数行列と拡大係数行列の階数が2なので解がある: $\begin{cases} x = 5k+1 \\ y = -3k \qquad (k \in \mathbf{R}) \\ z = k \end{cases}$

(2) $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 11 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

係数行列の階数が3でと拡大係数行列の階数が4なので解がない.