第3回演習解答

1) $y'' - 3y' - 10y = 0$

特性方程式より.

$\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0$

$(\lambda + 2)(\lambda - 5) = 0$

$\lambda = -2, 5$

したがって一般解は

$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{5x}$ //

2) $y'' + 6y' + 9y = 0$

特性方程式より.

$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$

$(\lambda + 3)^2 = 0$

$\lambda = -3$

したがって一般解は

$y = e^{-3x}(C_1 + C_2 x)$ //

3) $y'' + 2y' + 5y = 0$

特性方程式より

$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$

$\lambda = -1 \pm 2i$

したがって一般解は

$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ //

4) $y'' - 2y' + y = e^x \cos x$

i) まず $y'' - 2y' + y = 0$ の一般解を求める.

特性方程式より

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$(\lambda - 1)^2 = 0$

$\lambda = 1$

したがって一般解は

$y = e^x(C_1 + C_2 x)$

ii) 与式を満たす解を求める.

$y = Ae^x(a \sin x + b \cos x)$ とおくと.

$y' = Ae^x(a \sin x + b \cos x)$
$+ Ae^x(-b \sin x + a \cos x)$

$y'' = Ae^x(a \sin x + b \cos x)$
$+ 2Ae^x(-b \sin x + a \cos x)$
$+ Ae^x(-a \sin x - b \cos x)$
$= 2Ae^x(-b \sin x + a \cos x)$

よって

$y'' - 2y' + y = Ae^x(-a \sin x - b \cos x)$
$= e^x \cos x$

より係数比較して

$a = 0,\ b = -1,\ A = 1$

i) ii) より. 求める一般解は.

$y = (C_1 + C_2 x)e^x - e^x \cos x$ //

5)

$y''+3y'+2y=4x^3$

i) $y''+3y'+2y=0$の一般解を求める

特性方程式より

$t^2+3t+2=0$

$t=-1,-2$

一般解は

$y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$

ii) 与式の特殊解を求める。

$y=ax^3+bx^2+cx+d$ とおくと.

$y'=3ax^2+2bx+c$

$y''=6ax+2b$

よって

$$\begin{aligned} y''+3y'+2y &= 2ax^3+(2b+9a)x^2 \\ &\quad +(6a+6b+2c)x+2b+3c+2d \\ &= 4x^3 \end{aligned}$$

係数比較して

$a=2,\ b=-9,\ c=21,\ d=-\frac{45}{2}$

i), ii) より求める一般解は

$y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+2x^3-9x^2+21-\frac{45}{2}$ //

6)

$y''-2y'+y=2e^x$

i) $y''-2y'+y=0$の一般解を求める。

特性方程式より.

$t^2-2t+1=0$

$t=1$

一般解は.

$y=e^x(c_1+c_2x)$

ii) 与式の特殊解を求める。

$y=Ax^2e^x$ とおく.

$y'=Ax^2e^x+2Axe^x$

$y''=Ax^2e^x+4Axe^x+2Ae^x$.

より.

$y''-2y+y$

$=2Ae^x=2e^x$

係数比較より. $A=1$

i) ii) より求める一般解は

$y=(c_1+c_2x+x^2)e^x$ //

7) $y''+2y'=x+2\sin x$

i) $y''+2y'=0$ の一般解を求める.

特性方程式より.

$t^2+2t=0$

$t=0,\ -2$

より.

$y=C_1+C_2e^{-2x}$

ii) 与式の特殊解を求める.

$y=ax^2+bx+c\sin x+d\cos x$ とおくと

$y'=2ax+b+c\cos x-d\sin x$

$y''=2a-c\sin x-d\cos x$.

より.

$y''+2y'=2a+2b+\cancel{2}4ax$

$\quad+(2c-d)\cos x-(c+2d)\sin x$

$\quad=x+2\sin x$.

係数比較して.

$a=\frac{1}{4},\ b=-\frac{1}{4},\ c=-\frac{2}{5},\ d=-\frac{4}{5}$

i)ii)より求める一般解は

$$y=C_1+C_2e^{-2x}+\frac{x^2}{4}-\frac{x}{4}-\frac{2}{5}\sin x-\frac{4}{5}\cos x$$

8) $y''+y=e^x+3\cos x$.

i) $y''+y=0$ の一般解を求める.

特性方程式より.

$t^2+t=0$

$t=0,\ -1$.

より.

$y=C_1+C_2e^{-x}$

ii) 与式の特殊解を求める.

$y=ae^x+b\sin x+c\cos x$ とおくと

$y'=ae^x+b\cos x-c\sin x$

$y''=ae^x-b\sin x-c\cos x$

より.

$y''+y=2ae^x-(b+c)\sin x+(b-c)\cos x$

$\quad=e^x+3\cos x$

係数比較して.

$a=\frac{1}{2},\ b=\frac{3}{2},\ c=-\frac{3}{2}$

i)ii)より求める一般解は.

$$y=C_1+C_2e^{-x}+\frac{e^x}{2}+\frac{3}{2}\sin x-\frac{3}{2}\cos x$$

9) (a) $y'' - y' - 2y = \cos x$

i) $y'' - y' - 2y = 0$ の一般解を求める.

特性方程式より.

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

$\lambda = -1, 2$

より.

$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$

ii) 与式の特殊解を求める

$y = a\sin x + b\cos x$ とおくと.

$y = a\cos x - b\sin x$

$y' = -a\sin x - b\cos x$

より.

$y'' - y' - 2y = (-3a+b)\sin x + (-a-3b)\cos$

$= \cos x$

係数比較して.

$a = -\frac{1}{10}$, $b = -\frac{3}{10}$

i) ii) より求める一般解は.

$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - \frac{1}{10}\sin x - \frac{3}{10}\cos x$

(b) $y'' - 3y' + 2y = (1+2x)e^x$

i) $y'' - 3y' + 2y = 0$ の一般解を求める

特性方程式より.

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$\lambda = 1, 2.$

より.

$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$

ii) 与式の特殊解を求める

$y = (a + bx + cx^2)e^x$ とおくと

$y' = \{a + b + (b+2c)x + cx^2\}e^x$

$y'' = \{a + 2b + 2c + (b+4c)x + cx^2\}e^x$

より.

$y'' - 3y' + 2y = (2c-b)e^x - 2cxe^x$

$= (1+2x)e^x.$

係数比較して.

$b = -3$, $c = -1$

i) ii) より求める一般解は.

$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + ae^x - 3xe^x - x^2 e^x$

$y = c_1' e^x + c_2 e^{2x} - 3xe^x - x^2 e^x$
