第4回演習解答

1) $x^2y''-xy'+y=x^3$, $\phi(x)=x$

与式の同次形の解の1つがxより.

$y=xz$ とおくと.

$$y'=z+xz'$$

$$y''=2z'+xz''$$

これらを与式に代入すると

$$xz''+z'=x$$

これはz'に関する1階線形方程式であるので. これを解くと

$$z'=\frac{x}{2}+\frac{c_1}{x}$$

両辺を積分して

$$z=\frac{x^2}{4}+c_1\log x+c_2$$

したがって求める一般解は

$$y=xz=\underline{\frac{x^3}{4}}+c_1 x\log x+\underline{c_2 x}$$

2) $x^2y''-2y=x^2$, $\phi(x)=x^2$

与式の同次形の解の1つがx^2より.

$y=x^2z$とお

$$y'=2xz+x^2z'$$

$$y''=2z+4xz'+x^2z''$$

これを与式に代入すると

$$x^2z''+4xz'=1$$

これはz'に関する1階線形方程式であるので これを解くと

$$z'=\frac{1}{3x}+\frac{c_1}{x^4}$$

両辺を積分して

$$z=\frac{1}{3}\log x+\frac{c_1}{x^3}+c_2.$$

したがって求める一般解は.

$$y=x^2z=\frac{1}{3}x^2\log x+\frac{c_1}{x}+c_2x^2$$

(2)

a) $y'' + y = \sin\omega x$, $\omega > 0$

まず同次形 $y'' + y = 0$ の一般解を求める。特性方程式より

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda = \pm i.$$

より

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x.$$

次に特殊解を求める。

基本解は $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ より。

ロンスキャンを用いて

$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1.$$

したがって特殊解 $\phi(x)$ は

i) $\omega \neq \pm 1$ のとき

$$\phi(x) = -y_1\int \frac{y_2 R(x)}{W}dx + y_2\int \frac{y_1 R(x)}{W}dx$$

$$= -\cos x\int \sin x\sin\omega x\,dx + \sin x\int \cos x\sin\omega x\,dx$$

$$= -\frac{\sin\omega x}{\omega^2 - 1}$$

したがって求める一般解は

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x - \frac{\sin\omega x}{\omega^2 - 1}$$ //

ii) $\omega = \pm 1$ のとき

$$\phi(x) = \frac{1}{2}x\cos x$$

したがって

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x + \frac{1}{2}x\cos x$$ //

b) $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}\log x$.

まず同次形 $y'' - 6y' + 9y = 0$ の一般解を求める。特性方程式より

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

$$(\lambda - 3)^2 = 0$$

$$\lambda = 3$$

より

$$y = e^{3x}(c_1 + c_2 x)$$

次に特殊解をもとめる。

基本解 $y_1 = e^{3x}$, $y_2 = xe^{3x}$ より。

ロンスキャンを用いて

$$W = \begin{vmatrix} e^{3x} & xe^{3x} \\ 3e^{3x} & (3x+1)e^{3x} \end{vmatrix} = e^{6x}$$

したがって特殊解 $\phi(x)$ は

$$\phi(x) = -y_1\int \frac{y_2 R(x)}{W}dx + y_2\int \frac{y_1 R(x)}{W}dx$$

$$= -e^{3x}\int \frac{xe^{3x}\cdot e^{3x}\log x}{e^{6x}}dx + xe^{3x}\int \frac{e^{3x}\cdot e^{3x}\log x}{e^{6x}}dx$$

$$= -\frac{3}{4}e^{3x}x^2 + \frac{1}{2}e^{3x}x^2\log x$$

よって求める一般解は

$$y = \left(c_1 + c_2 x - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2\log x\right)e^{3x}$$ //