第 6 回講義：2 変数関数のテイラー展開と極値問題について（教科書 3.16,3.18）．

- **（定理）** 関数 $f(x,y)$ が C^2 級ならば $f_{xy}=f_{yx}$.

証明は難しくはない[1]が，具体例で確認する方が教育的だと思うので，証明のかわりに

$$f(x,y)=\arctan\frac{y}{x}$$

で調べてみる．

$$\begin{aligned}
\left(\arctan\frac{y}{x}\right)_x &= \frac{-y/x^2}{1+(y/x)^2}=\frac{-y}{x^2+y^2}\ ,\\
\left(\arctan\frac{y}{x}\right)_{xy} &= -\frac{1}{x^2+y^2}+y\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\ ,\\
\left(\arctan\frac{y}{x}\right)_y &= \frac{1/x}{1+(y/x)^2}=\frac{x}{x^2+y^2}\ ,\\
\left(\arctan\frac{y}{x}\right)_{yx} &= \frac{1}{x^2+y^2}-x\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\ .
\end{aligned}$$

確かに成り立っている．

上の定理が成り立つ理由の説明をする．もし $f(x,y)$ が x,y の単項式なら定理は成り立つ．実際 $f(x,y)=x^my^n$ だとすると $f_{xy}=(mx^{m-1}y^n)_y=mnx^{m-1}y^{n-1}$, $f_{yx}=(x^mny^{n-1})_x=mnx^{m-1}y^{n-1}$ だから確かに $f_{xy}=f_{yx}$ である．したがって $f(x,y)$ が多項式のときも定理は成り立つ．関数 $f(x,y)$ に対して定理が成り立てば $1/f$ に対しても成り立つ．実際，$(1/f)_x=(-1/f^2)f_x$, $f_{xy}=(2/f^3)f_yf_x+(-1/f^2)f_{xy}$, $(1/f)_y=(-1/f^2)f_y$, $(1/f)_{yx}=(2/f^3)f_xf_y+(-1/f^2)f_{yx}$ だから．f, g に対して定理が成り立てば fg に対しても定理は成り立つ．実際，$(fg)_x=f_xg+fg_x$, $(fg)_{xy}=(f_xg+fg_x)_y=f_{xy}g+f_xg_y+f_yg_x+fg_{xy}$, $(fg)_y=f_yg+fg_y$, $(fg)_{yx}=(f_yg+fg_y)_x=f_{yx}g+f_yg_x+f_xg_y+fg_{yx}$ だから．よって $f(x,y)$ が有理関数のときにも定理は成り立つ．このように定理が成り立つ関数の集合は広がっていく．しかしこの議論は定理が成り立つことを支持しているだけであり，証明ではない．ここにこういう議論を書いた理由は，$f_{xy}=f_{yx}$ が成り立つ説得力のある理由を示したかったからである．

- **（定理）テイラー公式．** 関数 $f(x,y)$ が $A=(a,b)$ の近傍で C^n 級のとき，次のテイラー公式が成り立つ：

$$\begin{aligned}
f(a+h,b+k) &= \underbrace{\sum_{m=0}^{n-1}\frac{1}{m!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(a,b)}_{(h,k)\ \text{の多項式}}\\
&\quad + R_n(a+h,b+k)\ ,\\
R_n(a+h,b+k) &= \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a+th,b+tk)\\
&\quad (0<\exists t<1)\ .
\end{aligned}$$

ここで $0<\exists t<1$ というのは「$0<t<1$ であるようなある数 t に対して」を意味している（$\exists$ は「或る」の意味の論理記号）．t が区間 $(0,1)$ のどこにあるかは関数によっても場所によっても違う（$t=$ 何とかという形の公式はない）．$R_n(a+h,b+k)$ は**残項（誤差項）**とよばれる．テイラー公式は，$f(a+h,b+k)$ を (h,k) の多項式（**テイラー多項式**）

$$\sum_{m=0}^{n-1}\frac{1}{m!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(a,b)$$

[1] 例えば教科書「理工系微分積分」松木俊彦著に証明がある．証明は平均値の定理に基づいている．難しくはないので興味があれば自習してほしい．

と残項（誤差項）

$$R_n(a+h, b+k)$$

に分解する公式である．

証明は直線 $x = a + th$, $y = b + tk$ に制限して 1 変数の場合に帰着させて行う．

t による微分 $\frac{d}{dt}$ を (h, k) 方向への方向微分 $h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}$ に置き換えることがポイントである．

1 変数関数 $g(s)$ を

$$g(s) := f(x + sh, y + sk)$$

により定義する．1 変数関数のテイラー公式を $g(s)$ に適用して第十二回講義で導入した方向微分の考え方を適用すると

$$\begin{aligned}
f(x+h, y+k) &= g(1) \\
&= g(0) + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{g^{(m)}(0)}{m!} + \frac{g^{(n)}(t)}{n!} \quad (0 < \exists t < 1) \\
&= f(a,b) + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{m!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(a,b) \\
&\quad + \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a+th, b+tk) \quad (0 < \exists t < 1)
\end{aligned}$$

二つ目の等号は一変数のテイラー公式，三つ目の等号は二変数関数を直線に制限したときの「方向微分」である．これで 2 変数関数のテイラー公式の証明は終わりである． □

- $A = (a, b)$, $X = (x, y)$ とおく．テイラー公式を

$$\begin{aligned}
&f(X) = f(a,b) + f_x(A)(x-a) + f_y(A)(y-b) \\
&+ \frac{1}{2}\{f_{xx}(A)(x-a)^2 + 2f_{xy}(A)(x-a)(y-b) + f_{yy}(A)(y-b)^2\} \\
&+ R_3(X)
\end{aligned}$$

または $X = (a+h, b+k)$ とおいて

$$\begin{aligned}
&f(a+h, b+k) = f(A) + f_x(A)h + f_y(A)k \\
&+ \frac{1}{2}\left\{f_{xx}(a+th, b+tk)h^2 + 2f_{xy}(a+th, b+tk)hk + f_{yy}(a+th, b+tk)k^2\right\} \quad (0 < \exists t < 1)
\end{aligned}$$

などと覚えるのがよいと思う．

なぜなら，このように覚えると次のようなご利益があるからである：

- たとえば $f(A) = 0$ のとき，$f_x(A)$, $f_y(A)$ 少なくとも一方が零でなければ曲線 $f(X) = 0$ の点 A における接線は方程式

$$f_x(A)(x-a) + f_y(A)(y-b) = 0$$

で与えられることがわかる．

- さらに，2 次の項も見ると次のように極値の判定ができるからである．

(2 変数関数の極値の判定法）

- f が A で極値をとれば勾配ベクトルは零：$f_x(A) = f_y(A) = 0$.
- f が A で極値となるための判定条件：$f_x(A) = f_y(A) = 0$ とせよ．
  このとき，テイラー公式の 2 次の項を見ることによってから次がわかる．

$$D(A) := f_{xx}(A)f_{yy}(A) - f_{xy}(A)^2$$

とおくと

(1) $D(A) > 0$ かつ $f_{xx}(A) < 0$ ならば $f(A)$ は極大値.

(2) $D(A) > 0$ かつ $f_{xx}(A) > 0$ ならば $f(A)$ は極小値.

(3) $D(A) < 0$ ならば $f(A)$ は極値でない.

（理由）$f_x(A) = f_y(A) = 0$ となる点 $A = (a, b)$ を中心とするテイラー公式を 2 番目の覚え方で

$$f(a+h, b+k) = f(A) + \frac{1}{2}(\alpha h^2 + 2\beta hk + \gamma k^2)$$

と書くと, $\alpha = f_{xx}(a+th, b+tk)$, $\beta = f_{xy}(a+th, b+tk)$, $\gamma = f_{yy}(a+th, b+tk)$ $(0 < \exists t < 1)$ である．右辺の括弧の中を平方完成すると

$$\alpha\left(h + \frac{\beta}{\alpha}k\right)^2 + \frac{\alpha\gamma - \beta^2}{\alpha}k^2$$

となる．$h, k \to 0$ のとき $\alpha \to f_{xx}(A)$, $\beta \to f_{xy}(A)$, $\gamma \to f_{yy}(A)$ だから,

$\boxed{f_{xx}(A) \text{ と } D(A) := f_{xx}(A)f_{yy}(A) - f_{xy}(A)^2 \text{ がともに零でない}}$

とき，f は C^2 級と仮定しているから 2 階偏導関数は連続ゆえ，$|h|, |k|$ が十分小さければ，α と $\alpha\gamma - \beta^2$ の符号は，それぞれ $f_{xx}(A)$ と $f_{xx}(A)f_{yy}(A) - f_{xy}(A)^2$ の符号に等しい．よって，$z = f(x, y)$ のグラフの形状は $f_{xx}(A)$ と $D(A) = f_{xx}(A)f_{yy}(A) - f_{xy}(A)^2$ の符号によって決まる．

• $D(A) > 0$ かつ $f_{xx}(A) > 0$ のとき：点 $(A, f(A))$ の近くで $z = f(x, y)$ のグラフは上に開いた放物面のような形状で z は A で極小値をとる．

• $D(A) > 0$ かつ $f_{xx}(A) < 0$ のとき：点 $(A, f(A))$ の近くで $z = f(x, y)$ のグラフは下に開いた放物面のような形状で z は A で極大値をとる．

• $D(A) < 0$ のとき $z = f(x, y)$ のグラフは点 $(A, f(A))$ の近くで馬の鞍状になっていて z は点 A で極値をとらない．

• $D(A) = 0$ のとき．2 次の項だけでは分からない．ケースバイケースで別の考察が必要である．

• 例．$f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ の極値．$f_x = 3x^2 - 3y$, $f_y = -3x + 3y^2$ だから $f_x = f_y = 0$ は $x^2 - y = 0$, $y^2 - x = 0$ となる．$y = x^2$ を $y^2 - x = 0$ に代入すると $x^4 - x = 0$ したがって $x = 0$ または $x = 1$ である（実数解だけが問題だから）．したがって，$f_x = f_y = 0$ となる点は $(0, 0)$ と $(1, 1)$ である．$D(x, y)$ を計算するために f_xx, f_{xy}, f_{yy} を計算すると $f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = -3$, $f_{yy} = 6y$ である．よって $D(x, y) = 36x^2y^2 - 9$ である．$D(0, 0) = -9 < 0$ ゆえ $(0, 0)$ では極値をとらない．$D(1, 1) = 27 > 0$ で $f_{11}(1, 1) = 6 > 0$ だから $(1, 1)$ で極小値 $f(1, 1) = -1$.

• 例．$f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 3y$ の極値．極値をとる点の候補は $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ を満たす点 (x, y) である．$f_x(x, y) = 6xy = 0$ より $x = 0$ または $y = 0$ である．$f_y(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 3 = 0$ より $x = 0$ なら $y = \pm 1$, $y = 0$ なら $x = \pm 1$ である．よって極値をとる点の候補は $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$ の四点である．これらの四点 A で $f_{xx}(A)$ と $D := f_{xx}(A)f_{yy}(A) - f_{xy}(A)^2$ の符号を調べる．$f_{xx}(x, y) = 6y$, $f_{xy}(x, y) = 6x$, $f_{yy}(x, y) = 6y$ だから $D = 36(y^2 - x^2)$ である．$A = (\pm 1, 0)$ のとき．$f_{xx} = 0$, $D = -36 < 0$．よって $A = (1, 0)$ で極値をとらない．$A = (0, \pm 1)$ のとき．$f_{xx}(A) = \pm 6$, $D = 36 > 0$．よって $A = (0, 1)$ なら $f_{xx}(A) > 0$, $D > 0$ である．よって $f(x, y)$ は $(0, 1)$ で極小値 -2 をとる．$A = (0, -1)$ なら $f_{xx}(A) < 0$, $D > 0$ である．よって $f(x, y)$ は $(0, -1)$ で極大値 2 をとる．

• **課題**：教科書の問 16.1, 16.2, 18.1, 18.2, 18.3.