力学II（後半：原田担当分）

第13回

今回の内容（p.120-127）

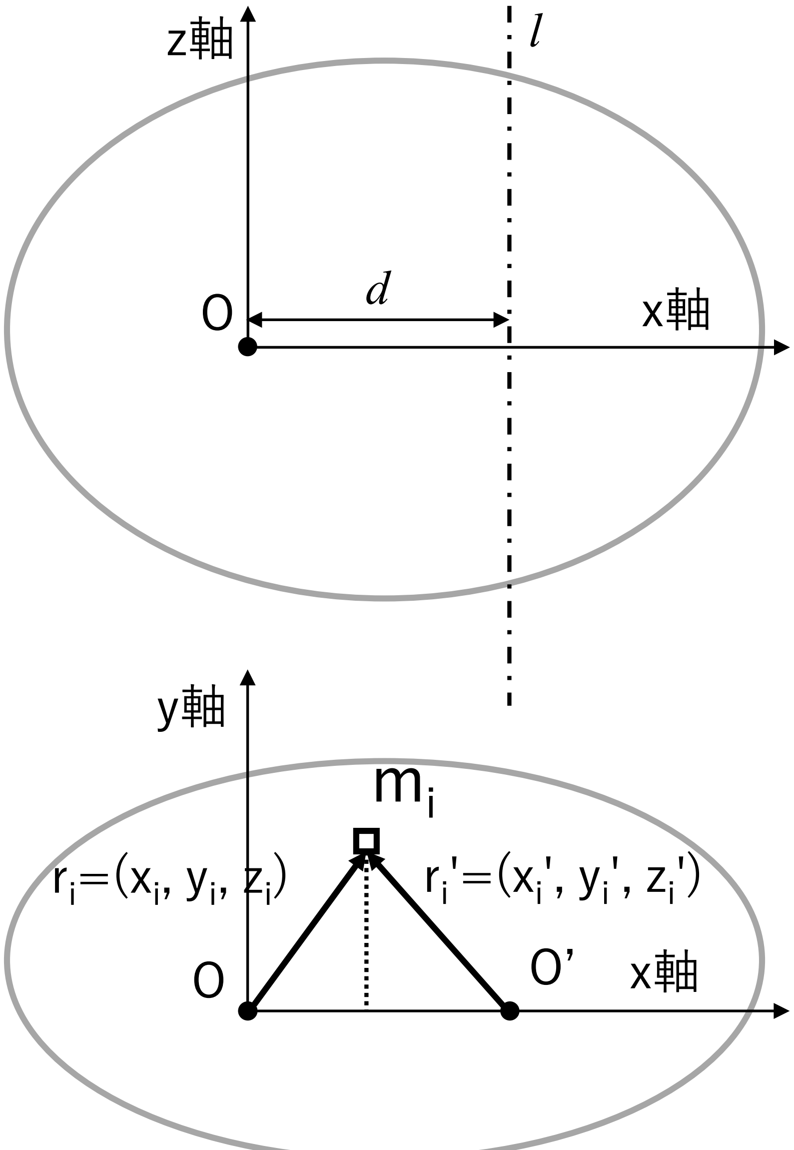
慣性モーメント：回転しにくさ

・慣性モーメントの性質
・慣性モーメントの計算（例題）

剛体の力学的エネルギー

・重力のポテンシャル
・運動エネルギー
・力学的エネルギー保存則

慣性モーメントの性質



剛体の質量：M
剛体の重心：O
z軸回りの慣性モーメント：I_0
l回りの慣性モーメント：I

$$\boxed{I = I_0 + Md^2}$$

z軸の周りの慣性モーメントI_0は、

$$I_0 = \sum_i m_i {\rho_i}^2$$

z軸に平行な直線l回りの慣性モーメントは

$$I = \sum_i m_i {\rho_i}'^2$$

ここで、

$${\rho_i}^2 - {x_i}^2 = {\rho_i}'^2 - (d - x_i)^2$$

$$\Leftrightarrow {\rho_i}'^2 = {\rho_i}^2 - 2dx_i + d^2$$

よって、

$$I = \sum_i m_i \left({\rho_i}^2 - 2dx_i + d^2 \right)$$

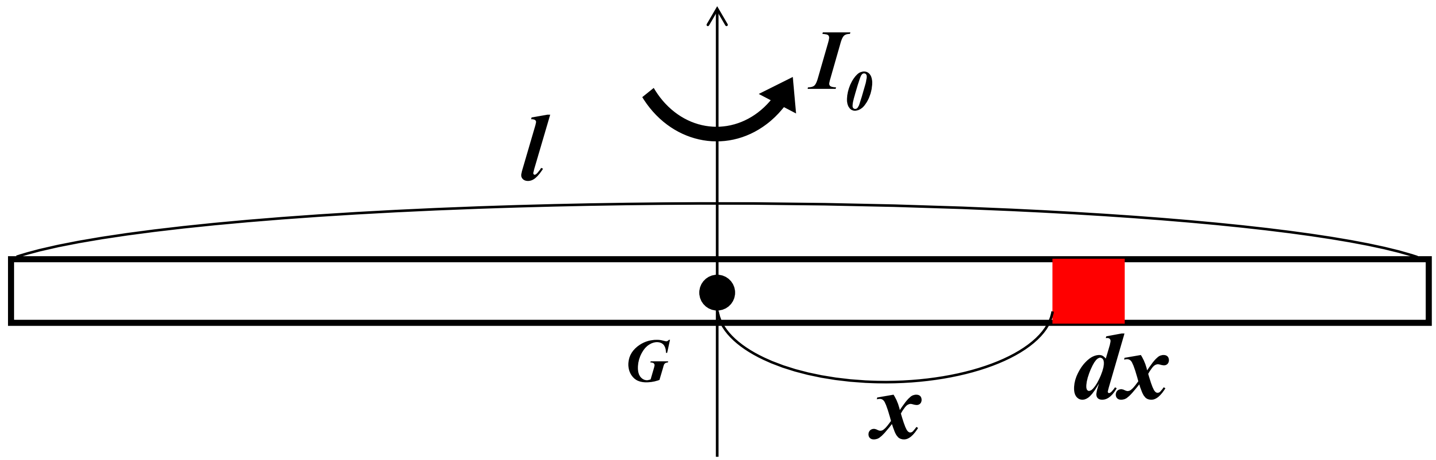
$$= I_0 - 2d \sum_i m_i x_i + Md^2$$

ここで、原点Oが重心であることに注意すると、

$$\sum_i m_i x_i = 0$$ であり、

$$I = I_0 + Md^2$$

例１：細い一様な棒



線密度σ、質量 M の長さ l の棒の重心を通り、棒に垂直な軸に関する慣性モーメント I_0 を求めよ。

距離 x にある微小部分 dx の質量 dm は、

$$dm = \sigma dx$$

微小部分 dx の回転軸周りの慣性モーメントは、

$$dm \cdot x^2 = \sigma x^2 dx$$

よって、慣性モーメントは、

$$I_0 = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sigma x^2 dx \qquad = \sigma \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \sigma \left(\frac{l^3}{24} + \frac{l^3}{24} \right) = \frac{\sigma}{12} l^3$$

$M = l\sigma$ より、

$$\therefore I_0 = \frac{\sigma}{12} l^3 = \frac{M}{12l} l^3 = \frac{1}{12} M l^2$$

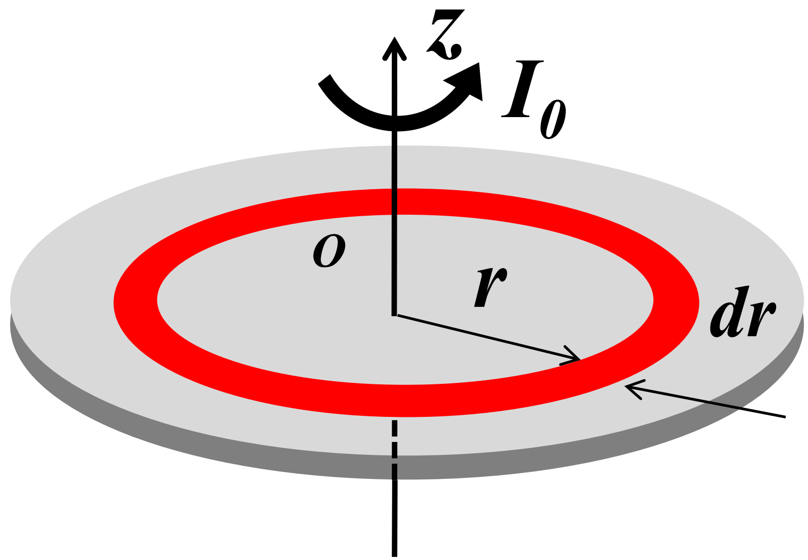
長さ l の棒の重心を通り
棒に垂直な軸に関する慣性モーメントは、

$$I_0 = \frac{1}{12} M l^2$$

よって、上記の軸と平行で重心から距離 l / 2 離れた
棒の端点を通る軸に関する慣性モーメントは、

$$I = I_0 + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{Ml^2}{12} + \frac{Ml^2}{4} = \frac{1+3}{12} Ml^2 = \frac{1}{3} Ml^2$$

例２：一様な円板



面密度 σ 、質量 M の半径 a の円板の重心を通り、円板に垂直な軸に関する慣性モーメント I_0 を求めよ。

距離 r にある微小部分 dr の質量 dmは、

$$dm = \sigma \cdot 2\pi r dr$$

微小部分 dr の回転軸周りの慣性モーメントは、

$$dm \cdot r^2 = 2\pi\sigma r^3 dx$$

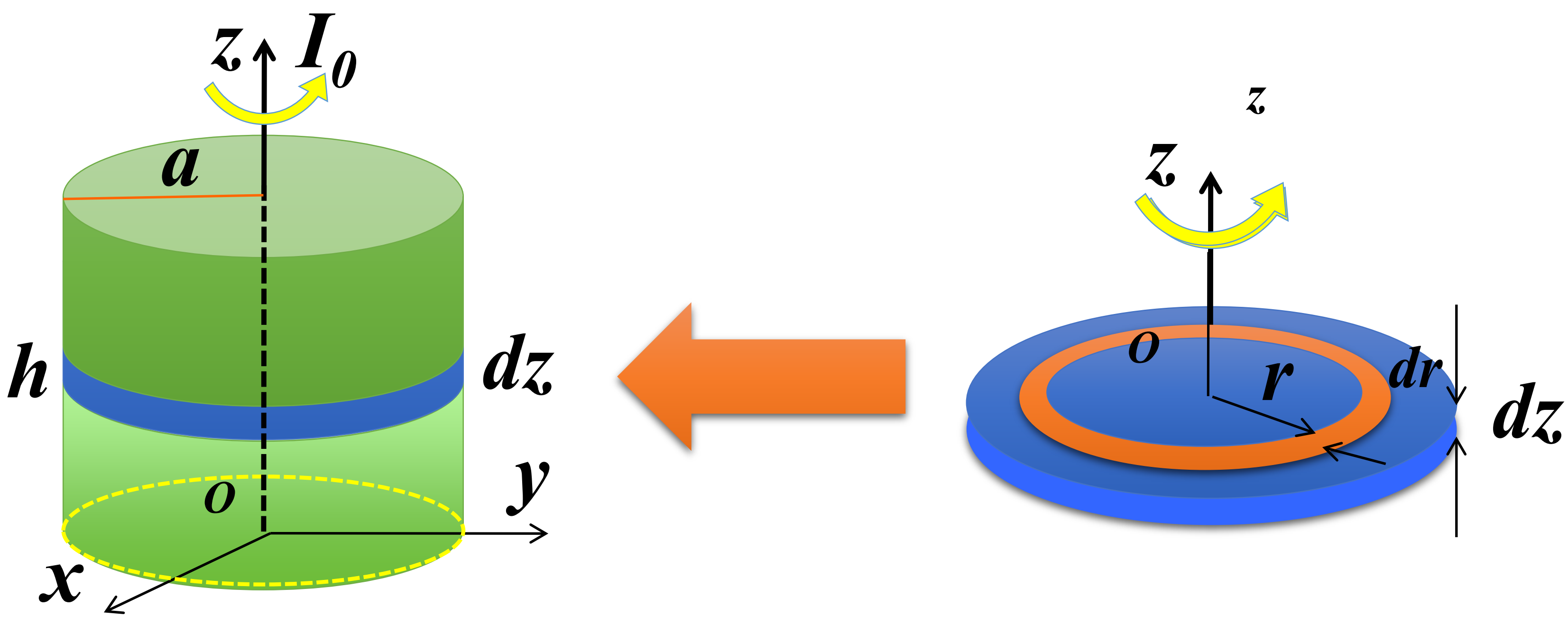
よって、慣性モーメントは、

$$I_0 = \int_0^a 2\pi\sigma r^3 dr \qquad = 2\pi\sigma\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a = \frac{\pi\sigma}{2}a^4$$

$M = \pi a^2 \sigma$ より、

$$\therefore I_0 = \frac{\pi\sigma}{2}a^4 = \frac{\pi}{2}\frac{M}{\pi a^2}a^4 = \frac{1}{2}Ma^2$$

例３：一様な円筒



密度 ρ 、質量 M の半径 a、高さ h の円筒の重心を通り、円筒に垂直な軸に関する慣性モーメント I_0 を求めよ。

z 軸から距離 r にある厚さ dz の微小部分 dr の質量 dm、円柱の密度を ρ とする。

$$dm = \rho \cdot 2\pi r dr dz$$

微小部分 dr の z 軸周りの慣性モーメントは、

$$dm \cdot r^2 = 2\pi\rho r^3 dr dz$$

よって一様な円柱の z 軸に関する慣性モーメントは、

$$I_0 = \int dm \cdot r^2 = \int_0^a 2\pi\rho r^3 dr \int_0^h dz \qquad = 2\pi\rho \int_0^a r^3 dr \int_0^h dz$$

$$= 2\pi\rho \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a [z]_0^h \qquad = 2\pi\rho \frac{a^4}{4} h = \frac{\pi\rho a^4 h}{2}$$

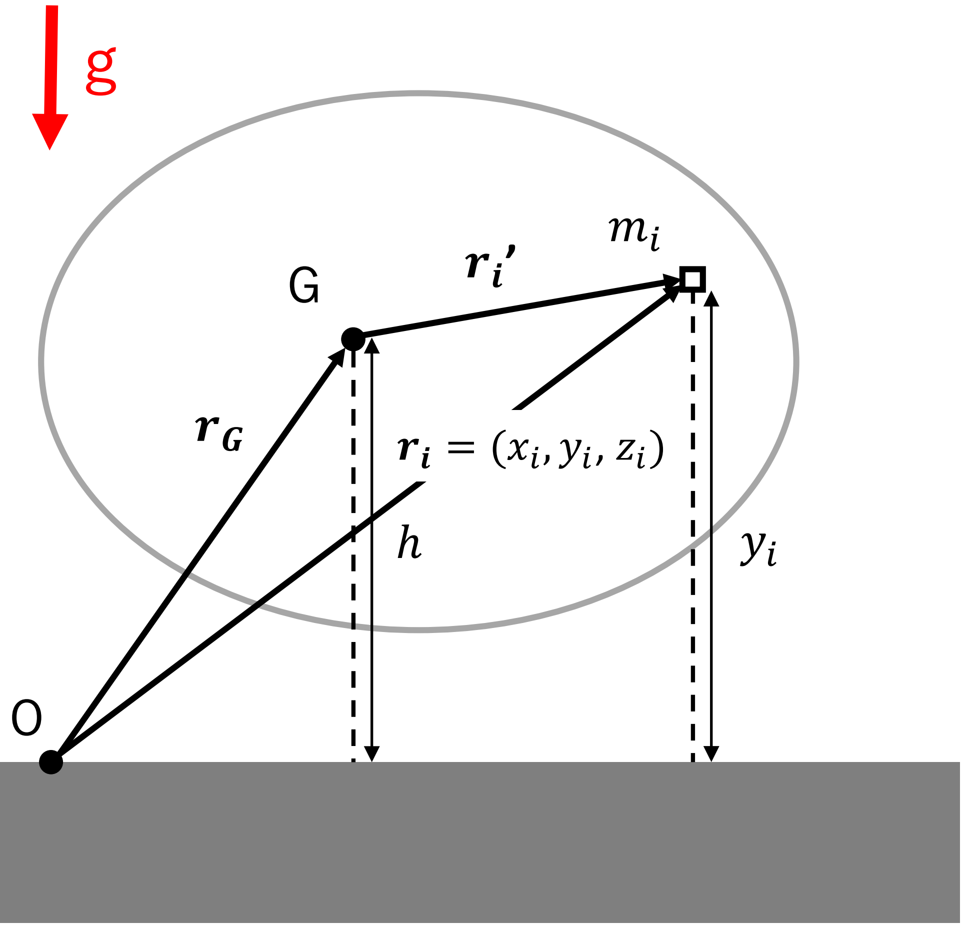
$M = \pi a^2 h \rho$ 　より、

$$\therefore I_0 = \frac{\pi\rho a^4 h}{2} = \frac{\pi a^4 h}{2} \frac{M}{\pi a^2 h} = \frac{1}{2} M a^2$$

剛体の力学的エネルギー

$$M = \sum_i m_i$$

$$M\boldsymbol{r_G} = \sum_i m_i \boldsymbol{r_i}$$



<u>重力のポテンシャルU</u>

$$U = \sum_i m_i g y_i$$

重心の式より

$$Mh = \sum_i m_i y_i$$

なので、

$$U = Mgh$$

運動エネルギーK

$$K = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}{}^2$$

ここで、

$$\boldsymbol{r_i} = \boldsymbol{r_G} + \boldsymbol{r_i}', \ \ \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} = \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{G}} + \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}'$$

であるから、

$$K = \frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{G}}{}^2 + 2\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{G}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}' + \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}'^2\right)$$

ここで、

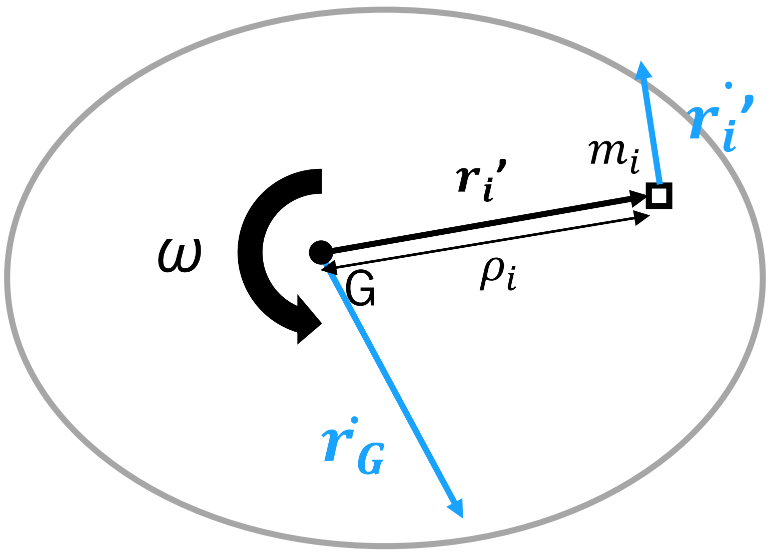
$$\sum_i m_i \boldsymbol{r_i}' = 0, \ \sum_i m_i \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}' = 0$$

に注意して、式を整理すると、

$$K = \frac{1}{2} M \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{G}}{}^{2} + \frac{1}{2} \sum_{i} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}'^{2}$$

重心の運動エネルギー　重心のまわりの剛体の運動エネルギー

重心のまわりの運動が固定軸の回転運動の場合、



$$\left| \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}' \right| = \rho_i \omega$$

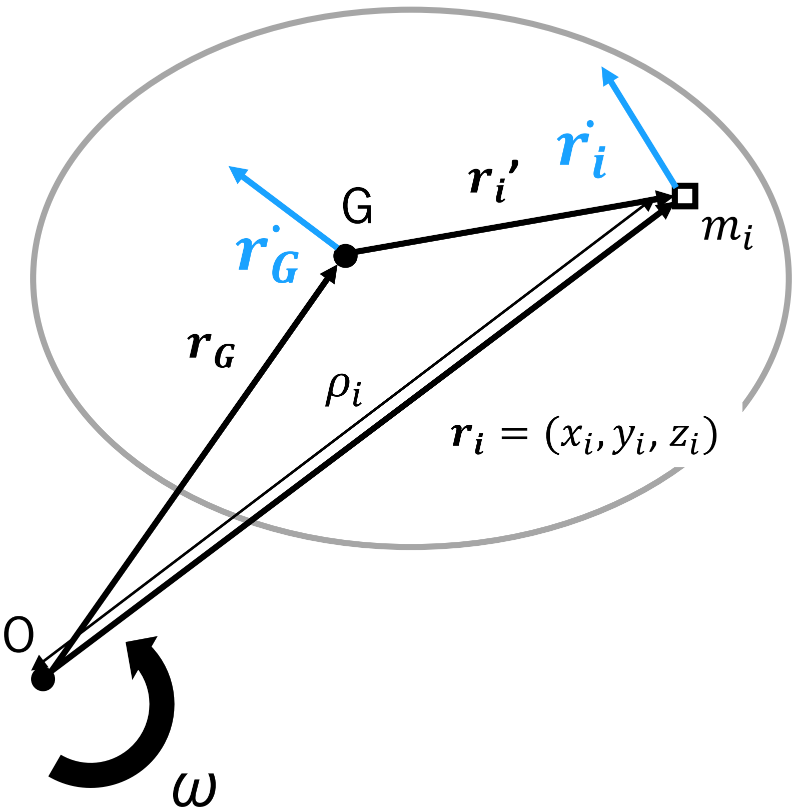
であるので、

$$K = \frac{1}{2} M \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{G}}{}^{2} + \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i} m_i \rho_i{}^{2}$$

$$= \frac{1}{2} M \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{G}}{}^{2} + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

原点の周りの運動を考えて、慣性モーメントに関する平行軸の定理を用いても同様の式が得られる。

$$\boxed{I = I_0 + M|\boldsymbol{r_G}|^2}$$



$$K = \sum_i m_i \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}{}^2$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i {\rho_i}^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} I_0 \omega^2 + \frac{1}{2} M |\boldsymbol{r_G}|^2 \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} I_0 \omega^2 + \frac{1}{2} M \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{G}}{}^2$$

剛体の力学的エネルギー保存則

剛体では内力のポテンシャルは考えなくてよい。
外力のポテンシャルを$U(\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2}, \ldots, \boldsymbol{r_n})$とすると、
微小体積iの運動方程式は、

$$m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} = -\boldsymbol{\nabla}_i U = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r_i}} = \left(-\frac{\partial U}{\partial x_i}, -\frac{\partial U}{\partial y_i}, -\frac{\partial U}{\partial z_i} \right)$$

両辺に$\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}$を内積でかけて、和をとると

$$\sum_i m_i \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} \cdot \ddot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} = -\sum_i \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} \cdot \boldsymbol{\nabla}_i U$$

ここで、

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} \cdot \ddot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}{}^{\boldsymbol{2}}\right) \qquad \frac{dU}{dt} = \sum_i \boldsymbol{\nabla}_i U \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}$$

に注意すると、

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}{}^{\boldsymbol{2}} + U\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(K + U) = 0$$

$$\Leftrightarrow K + U = E(\text{一定})$$

であり、エネルギー保存則が成り立つ。