練 習 問 題

2024/11/08

【１】3 点 O(0, 0, 0)，P(1, 1, 2)，Q(1, –1, 1)，スカラー場$\varphi = -2x - y + 2z$，ベクトル場 $\boldsymbol{f} = (x^2 + y^2 + z^2)\,\boldsymbol{i} + (2xy - x - z)\,\boldsymbol{j} + (2xz + x + y)\,\boldsymbol{k}$ について，次の各問に答えよ。（配点 48 点）

(1) gradφ，div$\boldsymbol{f}$，rot$\boldsymbol{f}$ を計算せよ。（8 点）

(2) 三角形 OPQ の面積および単位法線ベクトルを求めよ。（8 点）

(3) 次の線積分および面積分の値を求めよ。（各 8 点）

a. $\int_{\mathrm{OP}} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r}$

b. $\int_{\mathrm{PQ}} \varphi ds$

c. $\int_{\mathrm{OP}} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{\mathrm{PQ}} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{\mathrm{QO}} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r}$

d. $\int_{\triangle\mathrm{OPQ}} \varphi dS$

【２】回転放物面 $z = x^2 + y^2$ と平面 $z = 1$ で囲まれた閉領域を V とし，V の全表面を S とする。次の各問に答えよ。（配点 32 点）

(1) S 上の点 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ および点 $\mathrm{Q}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\right)$ における S の外向きの単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}_{\mathrm{P}}$，$\boldsymbol{n}_{\mathrm{Q}}$ をそれぞれ求めよ。（8 点）

(2) S の面積と V の体積をそれぞれ求めよ。（12 点）

(3) 本問で定義した S，V と，ベクトル場 $\boldsymbol{F} = 2x\,\boldsymbol{i} + 2y\,\boldsymbol{j} - z\,\boldsymbol{k}$ について，ガウスの定理 $\int_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} dS = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{F} dv$ が成立することを確かめよ。（12 点）

【３】スカラー場φ，λについて，次の各問に答えよ。（配点 20 点）

(1) 任意のスカラー場φ，λについて，

$$\nabla \times \varphi \nabla \lambda = \nabla \varphi \times \nabla \lambda$$

が成り立つことを示せ。（10 点）

(2) ストークスの定理を用いることにより，任意のスカラー場φ，λおよび任意の閉曲線 C について，

$$\int_C \varphi \nabla \lambda \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_C \lambda \nabla \varphi \cdot d\boldsymbol{r}$$

が成り立つことを示せ。（10 点）