第 9 回講義：高階微分とテイラー公式について（教科書 1.8）.

- **（定理 Leibniz の公式）**

$$\{f(x)g(x)\}' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x) \ .$$

証明は $f(x)g(x)$ を微分していって規則性を見つける作業である．実際,

$$\begin{aligned}
&(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \ ,\\
&(f(x)g(x))'' = f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x) \ ,\\
&(f(x)g(x))''' = f'''(x)g(x) + 3f''(x)g'(x) + 3f'(x)g''(x) + f(x)g'''(x) \ ,\\
&(f(x)g(x))^{(4)} = f^{(4)}(x)g(x) + 4f'''(x)g'(x) + 6f''(x)g''(x) + 4f'(x)g'''(x) + f(x)g^{(4)}(x) \ ,\\
&\cdots
\end{aligned}$$

このように係数はパスカルの三角形と同じ規則性で決まることがわかる.

- 高階微分の計算例

(1) （定理の応用）$(x^2e^x)^{(n)} = e^x\{x^2 + 2nx + n(n-1)\}$.

実際, $(x^2e^x)^{(n)} = x^2(e^x)^{(n)} + n(x^2)'(e^x)^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2}(x^2)''(e^x)^{(n-2)} = e^x\{x^2 + 2nx + n(n-1)\}$.

(2) $(\frac{1}{x^2-1})^{(n)}$ の計算.

そのままやると大変なことになる．$\frac{1}{2}(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1})$ と部分分数分解してから計算する．答えは $(-1)^n\frac{n!}{2}\{\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\}$.

(3) $(\sin^3 x)^{(n)}$ の計算.

3 倍角公式により $\{\frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)\}^{(n)}$ に帰着する．$(\sin x)^{(n)}$ は n を 4 で割った余りが $0, 1, 2, 3$ のとき順に $\sin x$, $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$ となる．答えは

$n = 4m \Rightarrow \dfrac{3}{4}\sin x - \dfrac{3^{4m}}{4}\sin 3x.$

$n = 4m+1 \Rightarrow \dfrac{3}{4}\cos x - \dfrac{3^{4m+1}}{4}\cos 3x.$

$n = 4m+2 \Rightarrow -\dfrac{3}{4}\sin x + \dfrac{3^{4m+2}}{4}\sin 3x.$

$n = 4m+3 \Rightarrow -\dfrac{3}{4}\cos x + \dfrac{3^{4m+3}}{4}\cos 3x.$

そもそも，$\sin x$, $\cos x$ の微分を何度もすると周期 4 で繰り返しになる：

$$(\sin x)^{(k)} = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) \ , \ (\cos x)^{(k)} = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) \ .$$

これは記憶しておくといい基本公式である！覚え方：$\frac{\pi}{2}$ 回転の表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ だから

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x+\frac{\pi}{2}) \\ \sin(x+\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}\\
\frac{d^k}{dx^k}\begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k\begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x+\frac{k\pi}{2}) \\ \sin(x+\frac{k\pi}{2}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

複素数で同じことを表せば

$$\frac{d^k}{dx^k}(\cos x + i\sin x) = i^k(\cos x + i\sin x) = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^k(\cos x + i\sin x) = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$$

である．

• **（定理）$x=a$ を中心とするテイラー公式．** $f(x)$ は $[a,b]$ を含む開区間で n 階微分可能のとき $\forall x\in[a,b]$ に対して

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+R_n(x)\ ,\quad R_n(x)=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

となる $c\in(a,x)$ が在る．

区間の右端を使ってもテイラー公式は成り立つ．すなわち，$f(x)$ は $[a,b]$ を含む開区間で n 階微分可能のとき

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(b)}{k!}(x-b)^k+R_n(x)\ ,\quad R_n(x)=\frac{f^{(n)}(c')}{n!}(x-b)^n$$

となる $c'\in(x,b)$ が在る．

• **（定義）テイラー多項式**.

$$f_{n-1}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

により a のまわりで f を近似する $(n-1)$ 次式を定義する．これを $(n-1)$ 次のテイラー多項式とよぶ．$f_{n-1}(x)$ は条件

$$\begin{aligned}&f(a)=f_{n-1}(a),\\&f'(a)=f'_{n-1}(a)\ ,\\&\vdots\\&f^{(n-1)}(a)=f^{(n-1)}_{n-1}(a)\end{aligned}$$

によって特徴づけられる．

テイラー公式の証明：$(n-1)$ 次のテイラー多項式と元の関数の誤差が高々$(x-a)^n$ のオーダーであることを示すのが証明のアイディア．Cauchy の平均値定理を $(n-1)$ 回使い，最後に平均値定理を使うことにより

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f_{n-1}(x)}{(x-a)^n}&=\frac{(f(x)-f_{n-1}(x))-(f(a)-f_{n-1}(a))}{(x-a)^n-(a-a)^n}=\frac{f'(x_1)-f'_{n-1}(x_1)}{n(x_1-a)^{n-1}}=\cdots\\&=\frac{f^{(n-1)}(x_{n-1})-f^{(n-1)}_{n-1}(x_{n-1})}{n!(x_{n-1}-a)}=\frac{f^{(n-1)}(x_{n-1})-f^{(n-1)}_{n-1}(a)}{n!(x_{n-1}-a)}\\&=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}\end{aligned}$$

を得る．ここで x_1 は a と x の間，..., x_{n-1} は a と x_{n-2} の間，c は a と x_{n-1} の間にある． □

例えば $f(x)=e^x$, $a=0$ のとき $f_{n-1}(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}$, $R_n(x)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ である．$x>0$ なら $\frac{x^n}{n!}e^0=\frac{x^n}{n!}<R_n(x)=\frac{x^n}{n!}(1+\frac{x}{n+1}+\frac{x^2}{(n+1)(n+2}+\dots)<\frac{x^n}{n!}(1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots)=\frac{x^n}{n!}e^x$ だから中間値の定理によって $R_n(x)=\frac{e^c}{n!}x^n$ となる c が 0 と x の間のどこかにある．

また，例えば $f(x)=\frac{1}{1+x}$, $a=0$ のとき $f_{n-1}(x)=1-x+x^2-\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}$, $R_n=\frac{(-1)^{n+1}x^n}{1-x}$ である．なぜなら等比数列の和の公式より $1-x+\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}=\frac{1-(-1)^nx^n}{1+x}$ だから．

• （テイラー公式の意味）テイラー公式とは「与えられた関数を与えられた点のまわりで最良近似 $n-1$ 次多項式と誤差に分解する公式」である．

• （定理-定義）$x=a$ を中心とするテイラー公式において

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x_0)=0$$

が成り立てば，関数 $f(x)$ は $|x-a|<|x_0-a|$ の形の $x=a$ の近傍で**テイラー級数**

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\
&= f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots \\
&+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots
\end{aligned}
$$

に展開され，この無限級数は $|x-a|<|x_0-a|$ において絶対値収束する．

- **（定義-定理）**収束半径の内部では冪級数は項別微分積分できる．

  証明は教科書 1.9 章にある（補題 9.1）[1]．

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

の形の無限級数を，c を中心とする**冪（べき）級数**とよぶ．もし冪級数 $f(x)$ が $x=b$ で収束すれば区間 $|x-c|<|b-c|$ で絶対値収束し，その区間内で**項別微分公式**

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1}$$

が成り立つ．冪級数が収束する c を中心とする最大の開区間が決まる．その半分の長さを**収束半径**とよぶ．
冪級数はその収束域において何回でも微分可能で項別微分公式が成り立つ．
ただし，$x=c$ を中心とする冪級数の収束域とは，ρ を収束半径とするとき $|x-c|<\rho$ のことである．

- （注意）：収束域の端点では収束することも発散することもある．また，収束しても絶対値収束するとは限らない．

- 記憶しておくべきテイラー級数．$(|x|<1)$ などは収束半径を表す．テイラー級数では収束半径に注意することが非常に重要である．

(1) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots$．$(|x|<\infty)$.

(2) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$．$(|x|<\infty)$.

(3) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$．$(|x|<\infty)$.

(4) $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$．$(|x|<1)$.

(5) $\log(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots+\dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}+\cdots$．$(|x|<1)$.

$|x|<1$ で成立している項別微分定理

$$\frac{d}{dx}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots\right)=1-x+x^2-x^3+\dots$$

は

$$\frac{d}{dx}\log(1+x)=\frac{1}{1+x}$$

[1] 講義時間の不足から教科書 1.9 章を夏季休暇の課題とします（後程，資料をアップロードします）．

と整合的であることに注意する．

(6) **一般二項定理**．α は任意の実定数とする．

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$. $(|x|<1)$.

x^n の係数は一般二項係数

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$$

である．α がゼロ以上の整数でない限り，これは決してゼロにならない．一方，α が正の整数のときは有限和なので収束の問題は起きない．よって x は何でもよい．

$(4)'$ $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$. $(|x|<1)$.

$(5)'$ $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots + \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$. $(|x|<1)$.

$|x|<1$ で成立している項別微分定理

$$\frac{d}{dx}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots\right) = 1 - x^2 + x^4 + \ldots$$

は

$$\frac{d}{dx}\ \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

と整合的であることに注意する．

• テイラー公式を使う不定形の極限計算例：

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{3}} - (1-x)^{\frac{1}{3}}}{x} = \frac{2}{3}$.

$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}-1\right)\right)x^2 + ...,$

$(1-x)^{\frac{1}{3}} = 1 - \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}-1\right)\right)x^2 - ...$ を代入．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x - \log(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

$\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - ...$ を代入．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$.

$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots$ を代入．

• **課題**：

1. 教科書の問 8.1.

ヒント：$(\cos x + i\sin x)' = i(\cos x + i\sin x)$．$\cos x + i\sin x$ を微分するという解析的な操作と i を掛けるという代数的操作が同じ！

2. (1) $f(x)$ の $x=0$ を中心とするテイラー公式を
$f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{4}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_5(x)$ と書くことにする．$f(x) = \log(\cos x)$ とするとき，上のテイラー公式を具体的に書き下せ（残項は $R_5(x)$ のままでよい）．

(2) 定数 a_i $(i=0,1,2,3)$ の値を極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x) - (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)}{x^4}$$

が存在するように定めよ．また，このときの極限を求めよ．