2017 年度 7 月 25 日微分積分学 I テスト

● 以下の 6 題の問題から 4 題を選んで答えよ．
● 解答用紙に氏名，学籍番号，選んだ問題番号と解答を書くこと．解答が複数枚のときには各解答用紙に氏名と学籍番号を書くこと．
● 解答を書く際には答だけでなく答に至った理由または途中式も論理的かつ簡潔に書くこと．

1. 次の漸化式で定義される数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ の収束発散を判定し，収束する場合は極限値を求めよ．

(1) $a_1 = 2$，$a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{2}{a_n}\right)$　(2) $a_1 > 0$，$a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{a_n}$

2. e を $e = 1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots + \dfrac{1}{n!} + \cdots$ で定義する．次の問に答えよ．

(1) $2.5 < e < 3$ を示せ．

(2) e は無理数であることを示せ．

ヒント：$n!\,e$ は，ある整数に $\dfrac{1}{n+1}\left(1 + \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots\right)$ を加えたものである．

3. 次の問に答えよ．

(1) n を自然数とする．関数 $f(x) = x^n e^{-x}$ $(x \geq 0)$ の最大値を求めよ．

(2) n を自然数とする．ロピタル計算を使わない初等的方法で極限 $\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x}$ を求めよ．

(3) 関数 $f(x) = x^n e^{-x}$ $(x \geq 0)$ のグラフの概形を描け．

(4) 積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$ の値を求めよ．

4. 次の問に答えよ．

(1) t が実数全体を動くとき，点 $\left(\dfrac{e^t + e^{-t}}{2}, \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}\right)$ が描く曲線はどのような曲線か？曲線が満たす方程式を求め，概形を描け．

(2) t が 0 から 1 を動くとき，2 点 $(0,0)$ と $\left(\dfrac{e^t + e^{-t}}{2}, \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}\right)$ を結ぶ線分が通過する領域を図示し，その面積を求めよ．

5. テイラー公式を用いて，次の極限の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \arctan x}{x^3}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sin x}\right)$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x \log \frac{x}{1+x}$

6. (1) 積分 $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + \sqrt{x}}\,dx$ の値を求めよ．ヒント：$\sqrt{x} = t$ とおいてから部分積分．

(2) 積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} \left(\log \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1}\right) dx$ の値を求めよ．この値は正か負か？

2017 年 7 月 25 日微分積分学 I テスト解答例.

採点基準：数学がわかっているかどうかを見る．4 題を超えて答えた場合は点が最大になるように採点する．

1. (1) $a_n > 0$ だから相加平均 $\geq$ 相乗平均より $a_{n+1} \geq \sqrt{a_n(2/a_n)} = \sqrt{2}$ である．よって $a_{n+1} - a_n = \frac{2-a_n^2}{2a_n} \leq 0$ だから $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ は単調減少である．下に有界な単調減少数列は収束するから $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ が在る．漸化式より α は $\alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \frac{2}{\alpha})$ の根であり $\forall a_n \geq \sqrt{2}$ より $\alpha > 0$ だから $\alpha = \sqrt{2}$ である．

(2) $a_1 > 0$ のとき $a_2 = 1 + \frac{1}{a_1}$ に対し $a_1 < a_2$ と仮定すると $a_3 = 1 + \frac{1}{a_2} < 1 + \frac{1}{a_1} = a_2$ である．一般に $a_{2n-1} < a_{2n}$，$a_{2n+1} < a_{2n}$ である．そこで隣接 2 項間の差の絶対値を較べてみると $a_{n+1} - a_n = (1 + \frac{1}{a_n}) - (1 + \frac{1}{a_{n-1}}) = \frac{a_{n-1} - a_n}{a_{n-1}a_n}$ となる．分母は $a_{n-1}a_n = a_{n-1}(1 + \frac{1}{a_{n-1}}) = 1 + a_{n-1} > 1$ だから結局 $|a_{n+1} - a_n| < |a_n - a_{n-1}|$ である．こうして $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ を奇偶に分けると，たとえば $a_1 < a_3 < \cdots < a_{2n-1} < a_{2n} < \cdots < a_4 < a_2$ などとなる．したがって偶数番目，奇数番目だけは有界な単調数列になるから，それぞれ収束する．漸化式から，収束先は両方とも $\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}$ の正の根である．したがって，問題の数列は $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ に収束する．

2. (1) $2.5 = 1 + 1 + \frac{1}{2} < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = e$, $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 3$.

(2) 背理法．e が有理数と仮定する．十分大きいすべての自然数 N に対して $N!e$ は整数のはずである．$N!e =$ 整数 $+ \frac{1}{N+1} + \frac{1}{(N+1)(N+2)} + \cdots$ は整数だから，$A := \frac{1}{N+1} + \frac{1}{(N+1)(N+2)} + \cdots$ も整数である．しかし $0 < A = \frac{1}{N+1} + \frac{1}{(N+1)(N+2)} + \cdots < \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{N+1})^n = \frac{1}{N+1}\frac{1}{1-\frac{1}{N+1}} = \frac{1}{N}$ だから N が十分大きいとき A は整数になり得ない．これは矛盾である．したがって e は有理数ではない．

3. (1) $f'(x) = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x} = x^{n-1}e^{-x}(n-x)$ だから $x \geq 0$ のとき $x < n$ で $f(x)$ は単調増加，$x > n$ で単調減少である．したがって $f(x)$ $(x \geq 0)$ は $x = n$ で最大値 $f(n) = n^n e^{-n}$ をとる．

(2) $g(x) = x^{n+1}e^{-x}$ $(x \geq 0)$ は (1) より $x = n+1$ で最大値 $g(n+1)$ をとる．したがって $f(x) = x^n e^{-x} = \frac{g(x)}{x}$ は $x \geq 0$ で不等式 $f(x) \leq \frac{g(n+1)}{x}$ を満たす．したがって $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ である．

(4) $a_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-x}$ とおくと $a_0 = 1$ であり，部分積分により $a_n = na_{n-1}$ である．よって $a_n = n!$.

4. (1) $x = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$, $y = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ のとき $x^2 - y^2 = 1$ はすぐわかる．t が実数全体を動くとき y は実数全体を動き，x は 1 以上の実数全体を動く．したがって問題の曲線は方程式 $x^2 - y^2 = 1$ で表される曲線のうち $x > 0$ を満たす方である（これは双曲線 $xy = 1$ の第 1 象限にある部分を $-\frac{\pi}{4}$ 回転して原点を中心に全体を $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍に縮小したものである）.

(2) 曲線 $x^2 - y^2 = 1$ の第 1 象限にある弧は $x = \sqrt{y^2+1}$ $(y \geq 0)$ のグラフで，その "傾き" $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ は "常に 1 より大きく"，"傾き" 1 の直線 $y = x$ は漸近線である．したがって，$0 \leq t \leq T$ のとき原点と $(\frac{e^t + e^{-t}}{2}, \frac{e^t - e^{-t}}{2})$ を結ぶ線分が掃く領域の面積は $\int_0^{\frac{e^T - e^{-T}}{2}} \sqrt{y^2+1}dy - \frac{1}{2} \times \frac{e^T - e^{-T}}{2} \times \frac{e^T + e^{-T}}{2}$ である．第 1 項を $y = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ とおいて置換積分すると $\int_0^T \frac{e^t + e^{-t}}{2} \cdot \frac{e^t + e^{-t}}{2}dt = \frac{e^{2T} - e^{-2T}}{8} + \frac{T}{2}$ となり，第 2 項は $-\frac{e^{2T} - e^{-2T}}{8}$ である．したがって求める面積は $\frac{T}{2}$ である．いま $T = 1$ だから答えは $\frac{1}{2}$ である．

5. (1) $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$ より $\lim_{x\to 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - (x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \cdots}{x^3} = \frac{1}{3}$.

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x - x)(\sin x + x)}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{(-\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots)(2x - \frac{x^3}{3!} + \cdots)}{x^4} \frac{x^2}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}(-\frac{1}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \cdots)(2 - \frac{x^2}{3!} + \cdots)\frac{x^2}{\sin^2 x} = -\frac{1}{3}$.

(3) $t = x^{-1}$ とおくと $x \to \infty$ は $t \to 0$ におきかわる．$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \cdots$ より $\lim_{x\to 0} x \log \frac{x}{1+x} = \lim_{t\to 0} t^{-1} \log \frac{1}{1+t} = \lim_{t\to 0} t^{-1}(-t + \frac{t^2}{2} + \cdots) = -1$.

6. (1) $\sqrt{x} = t$ とおくと $dx = 2tdt$ である．よって $\int_0^1 \sqrt{1+\sqrt{x}}dx = 2\int_0^1 \sqrt{1+t}\,tdt = 2([\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}t]_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}dt) = 2(\frac{2}{3}2^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}[\frac{2}{5}(1+t)^{\frac{5}{2}}]_0^1) = 2(\frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{15}(4\sqrt{2}-1)) = \frac{8}{15}(\sqrt{2}-1)$.

(2) $\int_1^{\infty}(\log \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1})dx = \int_1^{\infty}(\log x - \log(x+1) + \frac{1}{x+1})dx = [x \log x - x - (x+1)\log(x+1) + (x+1) + \log(x+1)]_1^{\infty} = [x \log \frac{x}{x+1}]_1^{\infty} = \lim_{x\to\infty} x \frac{x}{x+1} - \log \frac{1}{2} = -1 + \log 2$. 最後の等式は問題 5(3) による．テイラー公式により $x > 0$ のとき $\log \frac{x}{x+1} = \log(1 - \frac{1}{x+1}) = -\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}(\frac{1}{x+1})^2 - \frac{1}{3}(\frac{1}{x+1})^3 - \cdots$ である．よって被積分関数は負の値をとる．だから（または積分の結果 $-1 + \log 2$ が負だから）積分の値は負である．