第 12 回講義：重積分の変数変換その 2．極座標変換に対する変数変換公式．一般の変数変換公式．

• 今回のテーマ：一変数の場合の置換積分の公式

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

を二重積分の場合に拡張する．ここで φ は C^1 級の関数で，$\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ であれば何でもいい．

• 一般の変数変換．$x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ を一般の変数変換とする．このとき，2 変数のテイラー公式から

$$\begin{aligned} x - x_0 &\fallingdotseq x_u(P_0)(u - u_0) + x_v(P_0)(v - v_0) \ , \\ y - y_0 &\fallingdotseq y_u(P_0)(u - u_0) + y_v(P_0)(v - v_0) \end{aligned}$$

である．これは，定義域の (u_0, v_0) と値域の (x_0, y_0) を原点と思い直せば，近似的に 1 次変換とみなせることを言っている式である．$\fallingdotseq$ はテイラー展開の二次式以降を落としたことによる近似式を意味する．この 1 次変換は面積の拡大（縮小）をもたらし，その拡大（縮小）率は行列式 $J(P_0)$ の絶対値

$$|J(P_0)| = \left| \det \begin{pmatrix} x_u(P_0) & x_v(P_0) \\ y_u(P_0) & y_v(P_0) \end{pmatrix} \right|$$

で与えられる．これは線形代数で習う通りである．

定理（積分の変数変換公式）

C^1 級変数変換 $\phi(u, v) = (x, y) = (x(u, v), y(u, v))$ によって uv 平面上の面積確定有界閉集合 E と xy 平面上の面積確定有界閉集合 D が対応するとき，D 上の連続関数 $f(x, y)$ に対し

$$(*) \qquad \iint_D f(x, y)dxdy = \iint_E f(x(u, v), y(u, v))|J(u, v)|dudv$$

が成り立つ [1]．

注意． 一変数の場合は $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ であるが二重積分の場合は $|J(u, v)|$ に絶対値がついているという違いがある．その理由は，一変数の場合には $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$（右から左に向かっての積分は左から右に向かっての積分のマイナス）という約束があって右向きの積分，左向きの積分両方を許容しているのに対して，二重積分では dxdy も dudv もどんな領域に対しても面積を対応させるという意味で必ず正の値をとると約束しているからである（数学の言葉で言えば，微分形式を考えるか測度を考えるかの違いが現れているということ）．

• 積分の変数変換公式 $(*)$ の証明の概略.

uv 平面の点 P を中心とする長方形 R を形を保ったまま小さくしていくと

$$\lim_{R \to P} \frac{\mathrm{Area}(\phi(R))}{\mathrm{Area}(R)} = J(P)$$

（ただし $J(P) > 0$ となるように (u, v) をとる）が成り立つ．すなわち，変換 ϕ は点 P のまわりで拡大率 $J(P)$ である．したがって P を含む小さな長方形の面積は ϕ によって面積が $J(P)$ 倍される（拡大率が場所の関数になっている）．領域 E を小さい長方形 $\{R_i\}$ に分割する．$(u_i, v_i) \in R_i$ をとる．領域 D は $\{\phi(R_i)\}$ に分割される．各 $\phi(R_i)$（R_i が十分小さければほとんど平行四辺形）の面積は近似的に R_i の面積の $J(u_i, v_i)$ 倍である．したがって近似式

$$\mathrm{Area}(D) = \sum_i \mathrm{Area}(\phi(R_i)) \fallingdotseq \sum_i J(u_i, v_i)\mathrm{Area}(R_i)$$

[1] 面積確定有界閉集合という言葉は難しいが，区分的に C^1 級の境界も含めた有界な領域を考えてくればいい.

が成り立つ．D の分割を細かくした極限で近似式は等式

$$\iint_D dxdy = \iint_E J(u,v)dudv$$

になる．これを示すところが証明の難しいところである（ここで E,D が面積確定集合であることを使う）．このようにして，公式 $(*)$ は定数関数の場合に成り立つことがわかる．ここまでの議論で，第 1 回講義で導入した積分の原理のひとつめである「**区間の分割に対する加法性**」を領域の分割に対する加法性に拡張したものを本質的に使った．

次に，定数関数を階段関数に一般化する．階段関数は定義域を小さい正方形に分割したとき，各正方形上では定数であるような関数のことである．定義により局所的には定数関数だから,「**被積分関数に対する線形性**」によって，階段関数に対しても公式 $(*)$ が成り立つことがわかる．

最後に，任意の連続関数は階段関数でいくらでも近似できる（グラフが図形としていくらでも近くなる，という意味）ことに注意する．このことから，公式 $(*)$ は任意の連続関数に対して成り立つことが示される．実際，第 1 回講義で $[a,b]$ 上の連続関数 f に対し $\lim_{h\to 0}\delta_h = 0$ を示したが，そのときの証明がそのまま通用する．積分の原理のふたつめである「**上限下限性質**」を使えば，証明が完成する．なお，積分領域が面積確定有界閉集合であると仮定する理由は，第十回講義と同様である．

もっと直観的に言えばこうなる：

分割して小部分の面積を集めれば全体の面積になることを言っている式

$$\mathrm{Area}(D) = \sum_i \mathrm{Area}(\phi(R_i)) \fallingdotseq \sum_i J(u_i,v_i)\mathrm{Area}(R_i)$$

を重みつきで考えると

$$\begin{aligned}&\sum_i f(x_i,y_i)\mathrm{Area}(\phi(R_i))\\ &\quad\fallingdotseq \sum_i f(x(u_i,v_i),y(u_i,v_i))J(u_i,v_i)\mathrm{Area}(R_i)\end{aligned}$$

である．E の長方形への分割を限りなく細かくしていくと，この近似式は等式

$$\int_D f(x,y)dxdy = \iint_E f(x(u,v),y(u,v))J(u,v)dudv$$

となる．

自習． この考え方を用いて，一変数の置換積分の公式 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ を説明してみよ．

この考え方さえ理解すれば（感じをつかめば），工学への応用上は**十分**だと思う．応用上，証明の詳細は大体不要であるが，公式の意味がわからないと応用ができないと言う事実があるから，考え方だけは直観的なレベルでの理解が**必要**でもある．

以下は計算例である．

- 極座標およびその他の変数変換による積分の計算例．

例 1.

$$V = \iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy\ .$$

積分領域は $D: x^2+y^2 \le a^2$ である．

極座標への変換

$$\begin{aligned}x &= r\cos\theta\\ y &= r\sin\theta\end{aligned}$$

を考える．このとき，(xy) 平面の領域 D と $(r\theta)$ 平面の領域 $E: 0 \leq r \leq a,\, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ が対応する．ここで

$$J(r,\theta) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

を忘れないこと．実際の計算は

$$V = \iint_E \sqrt{a^2 - r^2}\, r dr d\theta = 2\pi \int_0^a r\sqrt{a^2 - r^2} dr = (2\pi)\left(-\frac{2}{3}\right)\left[\frac{1}{2}(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a = \frac{2}{3}\pi a^3$$

となる．これは，半球の体積を求める計算に他ならない．

例 2.

$$V = \iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

積分領域は $D: x \geq 0,\, y \geq 0,\, x^2 + y^2 \leq a^2$ である．

極座標への変換

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

を考える．すると (xy) 平面の領域 D に $(r\theta)$ 平面の領域 $E: 0 \leq r \leq a,\, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ が対応する．実際の計算は

$$V = \iint_E e^{-r^2} r dr d\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^a r e^{-r^2} dr = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^a = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-a^2})$$

となる．

うんちく．例 2 からガウス積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ を計算できる．

$D_a = \{(x,y) \,|\, x \geq 0,\, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq a^2\}$, $D'_a = \{(x,y) \,|\, 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a\}$ とすると

$$D'_{a/\sqrt{2}} \subset D_a \subset D'_a$$

である．被積分関数は正だから

$$\begin{aligned} \iint_{D'_{a/\sqrt{2}}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &\leq \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &\leq \iint_{D'_a} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \end{aligned}$$

である．両端は累次積分し，真中は例 2 を使うと

$$\left(\int_0^{a/\sqrt{2}} e^{-x^2} dx\right)^2 \leq \frac{\pi}{4}(1 - e^{-a^2}) \leq \left(\int_0^a e^{-x^2} dx\right)^2$$

がわかる．ここで $a \to \infty$ とすると挟みうちの原理から

$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

すなわちガウス積分

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

を得る．$y=e^{-x^2}$ は偶関数だから，これは

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi} \quad (\text{ガウス積分})$$

と同じことである．理論的にも応用上も非常に重要な積分なので，その導き方とともに記憶しておくといい．

例 3.

$$V=\iint_D xdxdy=\pi$$

積分領域は $D: x^2+y^2\le 2x$ である．D は (xy) 平面の $(1,0)$ を中心とする半径 1 の円板である．

点 $(1,0)$ を中心とする極座標を考える．つまり $x=1+r\cos\theta, y=\sin\theta$ とおく．すると (xy) 平面の領域 D と $(r\theta)$ 平面の領域 $E: 0\le r\le 1, 0\le\theta\le 2\pi$ が対応する．また，曲座標変換の中心に関係なく $J(r,\theta)=r$ である．実際の計算は

$$V=\iint_E (1+r\cos\theta)rdrd\theta=2\pi\int_0^1 rdr+\int_0^1 r^2dr\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta=2\pi\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1=\pi$$

となる．

例 4.

$$V=\iint_D \frac{x^2}{(x+y)^3}dxdy\ .$$

積分領域は $D: x\ge 0, y\ge 0, 1\le x+y\le 2$ である．

変数変換

$$\begin{aligned} x&=(1-v)u\\ y&=vu \end{aligned}$$

とおく．図形的には，$(x,y)=((1-v)u, vu)$ は $(u,0)$ と $(0,u)$ を結ぶ線分を $v:(1-v)$ に内分する点である．この意味で，この座標変換 $(x,y)\mapsto(u,v)$ は極座標変換 $(x,y)\mapsto(r,\theta)$ によく似ている．実際，u が r に対応（$x+y=u$ が $x^2+y^2=r^2$ に対応）し，v が θ に対応している．だから，応用上，極座標への変換と同じような目的で使われる．

また，

$$J(u,v)=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1-v & -u\\ v & u\end{pmatrix}=u$$

である．実際の計算:この座標変換で (xy) 平面の領域 D に対応する (uv) 平面上の領域 E は $E=[1,2]\times[0,1]$ である．したがって

$$V=\iint_E \frac{(1-v)^2u^2}{u^3}ududv=\iint_E (1-v)^2dudv=\int_1^2 1du\int_0^1(1-v)^2dv=-\frac{1}{3}[(1-v)^3]_0^1=\frac{1}{3}$$

である．

例 5. 積分

$$V=\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

ただし積分領域は $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x\ge 0,\ y\ge 0,\ x\le x^2+y^2\le 1\}$ である．D は第一象限と円板 $x^2+y^2\le 1$ の内部と円板 $(x-\frac{1}{2})^2+y^2\le(\frac{1}{2})^2$ の外部の共通部分である．これを極座標で表せば

$$E=\left\{(r,\theta)\,|\,0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ \cos\theta\le r\le 1\right\}$$

である．極座標変換により

$$
\begin{aligned}
V &= \iint_E r r dr d\theta \quad [\because\ \sqrt{x^2+y^2} = r\ , J(r,\theta) = r\,] \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\cos\theta}^1 r^2 dr \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3}\right]_{\cos\theta}^1 d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^3\theta) d\theta \\
&= \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta
\end{aligned}
$$

である．ここで部分積分によって

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta(\sin\theta)' d\theta \\
&= \Big[\cos^2\theta\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\theta(-\sin\theta)\sin\theta d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta(1-\cos^2\theta) d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta
\end{aligned}
$$

だから

$$
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta = \frac{2}{3}
$$

である．したがって

$$
V = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{9}
$$

である．

積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta$ を計算するのに漸化式を使うのも，もちろんよい．$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta d\theta$ とおくと

$$
I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}
$$

だから

$$
I_3 = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta = \frac{2}{3}[\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}
$$

である．

- **課題 1.** 教科書の問 17.1, 17.2.
- **課題 2.** 教科書の問 22.2.
- **課題 3（これは変数変換と関係ない応用問題です）．** 不等式 $x^2+y^2 \le 1$ と $y^2+z^2 \le 1$ によって定まる 3 次元空間の立体（円柱を別の円柱で切り取ってできる立体）の体積を求めよ．

ヒント：$y=$ 一定という平面で切ったときの切り口は xz 平面の領域である．その定義方程式は $|x| \le \sqrt{1-y^2}$ と $|z| \le \sqrt{1-y^2}$ である．したがって 1 辺の長さが $2\sqrt{1-y^2}$ の正方形である．この正方形の面積を y で表し，y について -1 から 1 まで積分せよ．