行列式

復習. 2×2行列の行列式は次のように定義される

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

連立一次方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

の解はクラーメルの公式で計算することができる:

$$x_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}} \quad x_2 = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}}.$$

問題

行列式とクラーメルの公式を一般化すること.

置換

定義

$\{1,\dots,n\}$から$\{1,\dots,n\}$への1対1の写像をn文字の置換（permutation）という．

- 置換σが
$$1 \to k_1, \quad 2 \to k_2, \dots, n \to k_n$$
という写像のときに, σを
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix} \tag{1}$$
と表す．つまり, 下の数字は上の数字の行き先を示す．
- $$\sigma(1) = k_1, \dots, \sigma(n) = k_n$$
とも書く．
- σが1対1の写像なので,
$$\{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\} = \{1, \dots, n\}.$$

置換

(1)の上下の組み合わせが変わらない限り、順序は変えても良い.
また、動かさない文字は省略しても良い.

Example

置換　$\sigma : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$

$$\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 2, \sigma(3) = 4, \sigma(4) = 1$$

は次のように表せる:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

置換の積

定義

二つのn文字の置換　σ, τの積$\sigma\tau$を

$$(\sigma\tau)(\mathrm{i}) = \sigma(\tau(\mathrm{i})), \quad (\mathrm{i} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n})$$

と定義する.

Example

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$のとき,

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

置換の逆置換

定義

全ての文字を動かさない置換をϵと書き，単位置換(identity permutation)という．

置換　$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix}$に対して，

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

とおき，σの逆置換(inverse permutation)という．

注意

$$\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = \epsilon.$$

対称群

Example

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ならば,

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Definition

$\{1, \ldots, n\}$の置換全体をn次対称群(symmetric group)と呼び、S_nと書く.

- 注意　S_nの元の個数は$n!$である.

巡回置換と互換

Definition

- $r \geq 2,\ 1 \leq k_1 < \cdots < k_r \leq n$に対して, 置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \ldots & k_r \\ k_2 & k_3 & \ldots & k_1 \end{pmatrix} \in S_n$$

  を巡回置換(cyclic permutation)といい,

$$\sigma = (k_1 \quad k_2 \quad \ldots \quad k_r)$$

  と書く.
- $(k_1 \quad k_2)$の巡回置換$(r = 2)$を互換(transposition)と呼ぶ.

Example

$\sigma = (2 \quad 5 \quad 3)$とすると, 次が成り立つ.

$$\sigma(2) = 5, \quad \sigma(5) = 3, \quad \sigma(3) = 2, \quad \sigma(k) = k \quad k \notin \{2, 5, 3\}.$$

置換の分解

命題（巡回置換の積への分解）

任意の置換は巡回置換の積で表される.

Example

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$を巡回置換の積で表せる.

- 何か一つの文字, 例えば1を取り,1がどう移っていくか見る.
  $\sigma(1) = 4$, $\sigma(4) = 2$, $\sigma(2) = 1$, $\sigma(1) = 4$なので,
  σと巡回置換$(1 \quad 4 \quad 2)$は$1, 4, 2$について, 同じ写像となる.
- $1, 4, 2$以外の何か一つの文字, 例えば3を取り,
  3がどう移っていくか見る.

  $$\sigma(3) = 6, \sigma(6) = 5, \sigma(5) = 7, \sigma(7) = 3, \sigma(3) = 6 \quad \text{なので}$$

  σと$(3 \quad 6 \quad 5 \quad 7)$は$3, 6, 5, 7$について, 同じ写像となる.
- よって, $\sigma = (3 \quad 6 \quad 5 \quad 7)(1 \quad 4 \quad 2)$.

置換の分解

任意の巡回置換は

$$(\mathrm{k}_1 \quad \mathrm{k}_2 \quad \ldots \quad \mathrm{k}_r) = (\mathrm{k}_1 \quad \mathrm{k}_r)(\mathrm{k}_1 \quad \mathrm{k}_{r-1})\ldots(\mathrm{k}_1 \quad \mathrm{k}_2)$$

と表せる.
従って、巡回置換の積への分解の定理より， 次の命題を得る.

命題（互換の積への分解）

任意の置換は互換の積で表される.

置換の分解

Example

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 6 & 8 & 2 & 1 & 4 & 9 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ を互換の積に分解する.

- まず巡回置換の積に分解する：

$$1 \to 7 \to 9 \to 5 \to 1, \quad 2 \to 6 \to 4 \to 2, \quad 3 \to 8 \to 3$$

であるから

$$\sigma = (3 \quad 8)(2 \quad 6 \quad 4)(1 \quad 7 \quad 9 \quad 5).$$

- 次に,互換の積に分解する:

$$\sigma = (3 \quad 8)(2 \quad 4)(2 \quad 6)(1 \quad 5)(1 \quad 9)(1 \quad 7).$$

置換の符号

Definition

- 置換σがm個の互換の積で表されるとき,

$$\mathrm{sgn}(\sigma) := (-1)^{\mathrm{m}}$$

  とおき, σの符号(signature or sign)という.
  ここで, $\mathrm{sgn}(\epsilon) := 1$とする.

- $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$となるσを偶置換(even permutation),
  $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$となるσを奇置換(odd permutation)という.

注意

置換の互換の積への分解は 1 通りではない.

命題

置換σの符号$\mathrm{sgn}(\sigma)$は互換の積の表し方によらない.

置換の符号

Example

置換$\sigma = (1\quad 2\quad 3\quad 4)$は次のように互換の積で表される.

$$\sigma = (1\quad 4)(1\quad 3)(1\quad 2) = (1\quad 3)(1\quad 4)(3\quad 4)(2\quad 3)(1\quad 3).$$

表し方によらず,

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^3 = (-1)^5 = -1.$$

Example

置換$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 6 & 8 & 2 & 1 & 4 & 9 & 3 & 5 \end{pmatrix}$の符号を求めよ.

$$\sigma = (3\quad 8)(2\quad 4)(2\quad 6)(1\quad 5)(1\quad 9)(1\quad 7) \quad \text{なので}$$

$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^6 = 1.$

置換の符号の性質

命題

次が成り立つ.

1. $\sigma, \tau \in \mathrm{S_n}$ に対して$\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau)$.
2. $\sigma \in \mathrm{S_n}$に対して $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$.

Proof.

(1)を示す: σがk個, τがℓ個の互換の積で表されるならば, $\sigma\tau$はk + ℓ個の互換の積で表される. よって,

$$\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = (-1)^{\mathrm{k}+\ell} = (-1)^{\mathrm{k}}(-1)^{\ell} = \mathrm{sgn}(\tau)\mathrm{sgn}(\tau)$$

(2)を示す: (1)より,

$$\mathrm{sgn}\left(\sigma^{-1}\right)\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}\left(\sigma^{-1}\sigma\right) = \mathrm{sgn}(\epsilon) = 1.$$

また, sgnの値は±1なので, $\mathrm{sgn}\left(\sigma^{-1}\right) = \mathrm{sgn}(\sigma)$. □

対称群

Example

$$S_3 = \{\epsilon, (1 \quad 2), (1 \quad 3), (2 \quad 3), (1 \quad 2 \quad 3), (1 \quad 3 \quad 2)\}.$$

ここで,
ϵ, $(1 \quad 2 \quad 3), (1 \quad 3 \quad 2)$は偶置換,
$(1 \quad 2), (1 \quad 3), (2 \quad 3)$は奇置換である.

sgnの定義について(1)

Definition

n変数$x_1, \ldots, x_n$の多項式$\Delta(x_1, \ldots, x_n)$を

$$\Delta(x_1, \ldots, x_n) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$$

とおき, n変数の差積(difference product)という.

Definition

n変数$x_1, \ldots, x_n$の多項式$f(x_1, \ldots, x_n)$と$\sigma \in S_n$に対して,
多項式σfを

$$(\sigma f)(x_1, \ldots, x_n) := f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

と定義する.

sgnの定義について(2)

Lemma (I)

$\sigma, \tau \in S_n$に対して,

$$\sigma(\tau\Delta) = (\sigma\tau)\Delta.$$

Proof.

$$\begin{aligned}\sigma\left((\tau\Delta)(x_1, \ldots, x_n)\right) &= \sigma\left(\Delta(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)})\right)\\ &= \Delta(x_{\sigma\tau(1)}, \ldots, x_{\sigma\tau(n)})\\ &= (\sigma\tau)\Delta(x_1, \ldots, x_n).\end{aligned}$$

□

Lemma (II)

$\sigma \in S_n$が互換ならば,

$$\sigma\Delta = -\Delta.$$

sgnの定義について(3)

命題

置換σの符号$\mathrm{sgn}(\sigma)$は互換の積の表し方によらない.

Proof.

$\sigma \in \mathrm{S_n}$の二つの互換の積への分解

$$\sigma = \rho_1 \dots \rho_\mathrm{k} = \tau_1 \dots \tau_\ell$$

に対して, $(-1)^\mathrm{k} = (-1)^\ell$を示す. 補題 (I)と補題(II)より,

$$\sigma\Delta = (\rho_1 \dots \rho_\mathrm{k})\,\Delta = (-1)^\mathrm{k}\Delta$$

と

$$\sigma\Delta = (\tau_1 \dots \rho_\ell)\,\Delta = (-1)^\ell\Delta.$$

$\Delta \neq 0$なので, $(-1)^\mathrm{k} = (-1)^\ell$. $\square$

Lemma (II)について

Lemma (II)

$\sigma \in \mathrm{S_n}$が互換ならば,

$$\sigma\Delta = -\Delta.$$

Lemma (II)について

例1：$n = 4$, $\sigma = (1, 2)$のとき,

$$\begin{aligned}\Delta(x_1, x_2, x_3, x_4) =& (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4) \\ &\cdot (x_2 - x_3)(x_2 - x_4) \\ &\cdot (x_3 - x_4).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}((1, 2)\Delta)(x_1, x_2, x_3, x_4) =& \Delta(x_2, x_1, x_3, x_4) \\ =& (x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) \\ &\cdot (x_1 - x_3)(x_1 - x_4) \\ &\cdot (x_3 - x_4).\end{aligned}$$

$(x_1 - x_2) = -(x_2 - x_1)$と

$$(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) = (x_2 - x_3)(x_1 - x_3)$$
$$(x_1 - x_4)(x_2 - x_4) = (x_2 - x_4)(x_1 - x_4)$$

なので,

$$(1, 2)\Delta = -\Delta.$$

Lemma (II)について

例2：$n = 4,\ \sigma = (2,4)$のとき,

$$\begin{aligned}\Delta(x_1, x_2, x_3, x_4) =& (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)\\ &\cdot(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)\\ &\cdot(x_3 - x_4).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}((2,4)\Delta)\,(x_1, x_2, x_3, x_4) =& \Delta(x_1, x_4, x_3, x_2)\\ =& (x_1 - x_4)(x_1 - x_3)(x_1 - x_2)\\ &\cdot(x_4 - x_3)(x_4 - x_2)\\ &\cdot(x_3 - x_2).\end{aligned}$$

$(x_2 - x_4) = -(x_4 - x_2)$と

$$(x_1 - x_2)(x_1 - x_4) = (x_1 - x_4)(x_1 - x_2)$$
$$(x_2 - x_3)(x_3 - x_4) = (x_4 - x_3)(x_3 - x_2)$$

なので,

$$(2,4)\Delta = -\Delta.$$