第 7 回講義：制限つき極値問題と陰関数について（教科書 3.19）.

• 今回のゴール：制限つき極値問題「制限条件 $g(x,y)=0$ のもとで関数 $f(x,y)$ の最大値を求めよ」というタイプの極値問題を解く.

• 制限つき極値問題への幾何的アプローチ.

曲線 $g(x,y)=0$ を道と思い，k をいろいろな値にとって等高線 $f(x,y)=k$ を描く．道 $g(x,y)=0$ に沿って歩くと，最高点（最低点）P では 2 つの曲線 $f(x,y)=f(P)$ と $g(x,y)=0$ は接していなければならない．これは，2 つの曲線の法線ベクトル（関数 $g(x,y)$, $f(x,y)$ の勾配ベクトル）が同一直線上にあることを意味している.（講義では絵を描いて説明する）．この考え方が機能するには，曲線 $g(x,y)=0$ がいつでも接線を持たねばならない．そこで常に g の全微分に対し $dg=g_x dx+g_y dy\neq 0$ であるという仮定をおく．この設定のもと，点 P は連立方程式

$$
\begin{aligned}
&(f_x,f_y)=\lambda(g_x,g_y) \quad [\,\text{法線ベクトルが同一直線上にある}\,]\ ,\\
&g(x,y)=0 \quad [\,\text{制限条件が満たされている}\,]
\end{aligned}
$$

すなわち

$$
\begin{aligned}
&f_x(x,y)=\lambda g_x(x,y)\ ,\\
&f_y(x,y)=\lambda g_y(x,y)\ ,\\
&g(x,y)=0
\end{aligned}
$$

の解の中から見つかる．この連立方程式の未知数は (x,y)（極値をとる場所の候補）と未定乗数 λ である．未知数 3 個に対し方程式も 3 本なので，基本的に解ける方程式である．(x,y,λ) 空間内の 3 枚の曲面の交わる点を求める問題だからである．未知数に対し条件が多すぎると原理的に「解なし」となるが，この問題はそうではないことに注意してほしい.

この解法を **Lagrange 未定乗数法**とよぶ.

• 陰関数定理.

制限条件 $g(x,y)=0$ があるとき，変数 (x,y) は自由には動けず，y は x の関数になる（または x は y の関数になる）と考えられる．たとえば,

1 次方程式 $g(x,y)=ax+by+c=0$ は,

$$b=g_y\neq 0 \text{ なら } y \text{ について } y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b} \text{ と解ける}$$

$$a=g_x\neq 0 \text{ なら } x \text{ について } x=-\frac{b}{a}y-\frac{c}{a} \text{ と解ける.}$$

この事実を一般の 1 次方程式とは限らない方程式 $g(x,y)=0$ の場合に拡張したものが**陰関数定理**である.

（陰関数定理） 2 変数関数 $g(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合 D において C^1 級とし,

$$g(a,b)=0\ ,\ g_y(a,b)\neq 0$$

とする．このとき $x=a$ のある近傍で定義された関数 $y=y(x)$ であって

$$g(x,y(x))=0\ , \quad y(a)=b$$

となるものがただ 1 つ存在し，微分公式

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{g_x(x,y(x))}{g_y(x,y(x))}$$

が成り立つ.

要するに，$g(x,y)=0$ は $g_y \neq 0$ を満たす点の近傍では y について $y=y(x)$ と解けて $\frac{dy}{dx}$ を計算できる，ということである．

方程式 $g(x,y)=0$ は関数 $y=y(x)$ または $x=x(y)$ を定める**陰関数**とよばれる．注意点は，y が x の関数として一意的に表されるのは，$g_y \neq 0$ となる点の「十分小さい近傍」であり，x が y の関数になるのは $g_x \neq 0$ となる点の「十分小さい近傍」である．全体でなく「十分小さい近傍」に制限しなければならない理由は以下のように説明される：たとえば $g(x,y)=x^2+y^2-1$ のとき，陰関数 $g(x,y)=0$ は $(1,0)$ の**十分小さい近傍**で $x=\sqrt{1-y^2}$ と陽に解ける（$x=-\sqrt{1-y^2}$ は棄却される）のに対して，y については $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ となり，値がただひとつに定まる関数としては定義できない.（注意）$g_y(1,0)=[2y]_{y=0}=0$ となり陰関数定理の仮定が満たされない.

陰関数定理が成り立つ理由は，次のように直観的に理解できる（きちんとした証明は非常に手が込んでいるので省略する）．陰関数関数を使うには，以下にような直観的な理解で十分である（直観的な理解の方が良い?!）．

与えられた方程式 $g(x,y)=0$ を 1 次関数で近似する（つまり曲線 $g(x,y)=0$ を曲線上のある点の近くで接線によって近似する）ことを考える．曲線 $g(x,y)=0$ 上の (a,b) における接線は $g_x(a,b)(x-a)+g_y(y-b)=0$ で与えられることを思い出そう．このとき，$g_y(a,b)\neq 0$ は，接線のレベルで y の係数が 0 でないこと意味する．このとき 1 次方程式 $g_x(a,b)(x-a)+g_y(a,b)(y-b)=0$ は y について解ける．だから，もし $g_y(a,b)\neq 0$ と仮定すると，$g(x,y)=0$ は (a,b) の近傍で $y=y(x)$ と解けると考えるのは自然であろう（ただし y を x の具体的な式で書くことまでは要求しない）．こうして，とにかく理論的には y は x の関数であることがわかる．そこで $g(x,y)=0$ の両辺を x で微分する．合成関数の微分法より $g_x+g_y\frac{dy}{dx}=0$ となるから，知りたかった $\frac{dy}{dx}$ が $\frac{dy}{dx}=-\frac{g_x}{g_y}$ であるとわかる．$\square$

• 陰関数 $g(x,y)=0$ で定まる関数 $y=y(x)$ の微分の計算例.

$g(x,y):=x^3-xy^2-y^3+1=0$ 上の点 $P=(1,1)$ において $f_y=-2xy-3y^2=-5\neq 0$ だから $x=1$ の近くで関数 $y=y(x)$ が定まる．このとき $\frac{dy}{dx}(1)$（簡単のため y' とか $y'(1)$ と書く）を求めるには次のように計算すればよい．$x^3-xy^2-y^3+1=0$ において y を x の関数と思って両辺を x で微分すると

$$3x^2-y^2-2xyy'-3y^2y'=0 \tag{1}$$

である．これを y' について解くと

$$y'=\frac{3x^2-y^2}{2xy+3y^2}\ .$$

したがって $x=y=1$ のとき

$$y'=\frac{3x^2-y^2}{2xy+3y^2}=\frac{2}{5}$$

である．特に点 $(1,1)$ における曲線 $g(x,y)=0$ の接線の方程式は

$$y=1+\frac{5}{2}(x-1)$$

で与えられる.

• 問題：y を x の関数だと思った時の y'' の計算はどうするか？

答：(1) の両辺を（積の微分公式を使って）x で微分すると

$$6x-2yy'-2yy'-2x(y')^2-2xyy''-6y(y')^2-3y^2y''=0$$

である．これを y'' について解いた式

$$y''=\frac{6y-4yy'-2x(y')^2-6y(y')^2}{2xy'+3y^2}$$

に $y' = \frac{3x^2-y^2}{2xy+3y^2}$ を代入すればいい．特に $x = y = 1$ のとき

$$y'' = \frac{6 - 4(2/5) - 2(2/5)^2 - 6(2/5)^2}{2(5/2)+3} = \frac{78}{95}$$

である．この計算を続けると原理的に全ての $k = 1, 2, \ldots$ に対し $y^{(k)}$ を計算できる．

関数 $y = y(x)$ の具体的な形が分からなくても，微分 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ が計算できてしまう点に注目してほしい．

• **陰関数定理と制限付き極値問題の関係**を述べる：

x, y が陰関数 $g(x,y) = 0$ によって制限を受けながら動くとせよ．$g_y \neq 0$ となる $g(x,y) = 0$ 上の点のある近傍で $y = y(x)$ と解ける．このような点で関数 $h(x) := f(x, y(x))$ が極値をとるとせよ．すると

$$h'(x) = f_x + f_y \frac{dy}{dx} = f_x - f_y \frac{g_x}{g_y} = 0$$

が成り立つ．したがって

$$f_x = \lambda g_x \ , \ f_y = \lambda g_y$$

となる λ（未定乗数）がなければならない．こうして，陰関数定理を使うことにより Lagrange 未定乗数法を導くことができる．

しかし，Lagrange 未定乗数法を導くために陰関数定理のような難しい定理を経由する必要はなく，最初に述べたように，制限 $g(x,y) = 0$ によって表される曲線と極値を求めたい関数 $f(x,y)$ の等高線を描いて図形的に理解することが可能である．

• 条件つき極値問題の例.

1. 問題：条件 $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ のもとで $f(x,y) = xy$ の最大値と最小値を求めよ．

解答：$f(x,y) = xy$, $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ とする．$f_x = \lambda g_x$, $f_y = \lambda g_y$, $g = 0$ という連立方程式を解く．$y = \lambda(2x)$, $x = \lambda(2y)$, $x^2 + y^2 - 1 = 0$ だから $\lambda = \pm\frac{1}{2}$, $(x,y) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ である．よって $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ で最大値 $\frac{1}{2}$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ で最小値 $-\frac{1}{2}$ をとる．

注意．問題 1 は線形代数で学習する二次形式の直交対角化への Lagrange 未定乗数法の応用である．例えば $x^2 + y^2 = 1$ のもとで二次形式 $3x^2 + 4xy + 3y^2$ が最大値，最小値をとる点とそれらの値を求めよ．$3x^2 + 4xy + 3y^2 = 1$ のもとで $x^2 + y^2$ が最大値と最小値をとる点とそれらの値を求める問題とどういう関係にあるだろうか？ **通常の課題に加えてこういう問題を考察すれば内容によっては $A+$ を進呈**する．

2. 問題：凸閉曲線（へっこみがない閉曲線）γ 上の 2 点 x, z に対し曲線 γ 上の点 y を $|xy| + |yz|$ が最大になるように決めよ．

この問題は曲線 γ の定義方程式もパラメータ表示も具体的な形では与えられていない．それでも「制限付き極致問題」への幾何的アプローチのアイディアは有効に働く．

解答：これは関数 $f(y) = |xy| + |yz|$ の最大値を条件 $g(y) = 0$ のもとで求める問題である．ここで $g(y) = 0$ は平面の点 y が曲線 γ に乗っていることを表す条件である．関数 f の勾配ベクトルは ∇f は点 x から y に向かう単位ベクトルと点 z から y に向かう単位ベクトルの和である．一方，関数 g の勾配ベクトルは曲線 γ の法線ベクトルである．これらが比例するための必要十分条件は，xy が曲線 γ（の接線）となす角度と zy が曲線 γ となす角度が等しいことである．γ の凸性（へっこみがないこと）を使って，そのような点が二つだけ必ず取れることを示す．異なる 2 点 x と z を γ の上にとる．y が x から z に向かって動くとき，$\vec{yx}$ と y における接線がなす角度 $< \pi$ を，$\vec{yx}$ を回転して y における接線に重なる角度で測ると，0 から出発して単調に大きくなり，最後には $\vec{zx}$ を回転して z における接線に重なるようににするときの回転角になる（この単調性が凸性からの帰結である）．一方，$\vec{yz}$ と y における接線がなす角度 $< \pi$ を $\vec{yz}$ を回転して接線に重なるときの回転角で測ると，最初は $\vec{xz}$ を回転して x における接線に重なるようにするときの回転角であり，単調に小さくなって，最後には z において 0 になる．だから，中間値の定理によって，y が x から z に向かって動く途中で 1 箇所だけ問題の角度が一致する点 y がある．x と z を

結ぶ γ の弧は二つある．それぞれの弧に応じて現れる点 y で $|xy|+|yz|$ を比較して大きい方をとれば，それが答えである．

• **課題：** 教科書の問 19.1, 19.2, 19.3.

問 19.2(3) と 19.3 の (3) は難しいと思うので，これだけは選択問題とし，**これに正解できれば（正解に到達できなくても何らかの見るべきところのあるアイディアを出せば）** $A+$ **進呈**します．

ヒント：19.2, 19.3：129 ページの図．$x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$ を代入して θ の関数としての最大最小を求める方法の方が簡単かもしれない．この方法で考えておいてから制限付き極値問題を解くのもいいと思う．

Lagrange multiplier 補足 (2024).

Lagrange 未定乗数法では制限付き極値問題において極値をとる点の候補しか求めることができない．これらの点において本当に極値をとるのか，極大極小を判定するにはどうしたらいいのか，という問題が生じ，この問題について質問を受けることが多い．この**補足**の目的は，この質問に答えることである．

Lagrange 未定乗数法で得られた制限付き極値をとる点の候補が本当に極値をとる点かどうかを判定する条件を述べる．

曲線 $g(x,y)=0$ は $x=x(t), y=y(t)$ によってパラメータ表示されるとしよう．ここで，曲線 $g(x,y)=0$ は滑らかな曲線と仮定しているので，はじめから $x'(t)\neq 0$, $y'(t)\neq 0$ $(\forall t)$ と仮定してよい．関数 $f(x,y)$ を曲線 $g(x,y)=0$ に制限するということは，関数

$$h(t)=f(x(t),y(t))$$

を考えることと同じである．

命題. 曲線 $g(x,y)=0$ 上の点 $A=(a,b)=(x(0),y(0))$ において $f(x,y)$ が制限つき極値をとると仮定する．合成関数の微分法の計算により，

$$h''(0)=\begin{pmatrix} x'(0) & y'(0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{xx}-\lambda g_{xx} & f_{xy}-\lambda g_{xy} \\ f_{yx}-\lambda g_{xy} & f_{yy}-\lambda g_{yy}\end{pmatrix}(A)\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0)\end{pmatrix} \tag{$*$}$$

が成り立つことがわかる．だから，この式の右辺が正のとき極小値，負のとき極大値をとる．

命題の証明.

$h''(0)$ の計算：
条件は $g(x(t),y(t))\equiv 0$ だから

$$0=\frac{d^2}{dt^2}|_{t=0}g(x(t),y(t))=\begin{pmatrix} x'(0) & y'(0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{yx} & g_{yy}\end{pmatrix}(A)\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} g_x & g_y\end{pmatrix}(A)\begin{pmatrix} x''(0) \\ y''(0)\end{pmatrix}$$

である．よって

$$\begin{pmatrix} g_x & g_y\end{pmatrix}(A)\begin{pmatrix} x''(0) \\ y''(0)\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} x'(0) & y'(0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{yx} & g_{yy}\end{pmatrix}(A)\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0)\end{pmatrix} \tag{1}$$

である．一方，合成関数の微分法を使って直接計算すると

$$h''(0)=\begin{pmatrix} x'(0) & y'(0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy}\end{pmatrix}(A)\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} f_x & f_y\end{pmatrix}(A)\begin{pmatrix} x''(0) \\ y''(0)\end{pmatrix}$$

となる．この式に Lagrange の未定乗数法の帰結である条件

$$df(A)=\lambda\, dg(A)$$

を代入すると

$$h''(0)=\begin{pmatrix} x'(0) & y'(0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy}\end{pmatrix}(A)\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0)\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} g_x & g_y\end{pmatrix}(A)\begin{pmatrix} x''(0) \\ y''(0)\end{pmatrix}$$

となる．さらに (1) を代入すると所要の式 $(*)$ を得る．$\square$