2　1階常微分方程式

この章では，いくつかの型の1階常微分方程式について解の求め方を説明する．主として与えられた微分方程式の解があるものとして，方程式の変形，変数の変換，代数的演算，不定積分を組み合わせて x と y との間の導関数を含まない関係をみちびく．こうして C を任意定数として $f(x, y, C)=0$ なる関係式が得られたとき，かならずしもこれを $y=\varphi(x, C)$ の形にしないで，$f(x, y, C)=0$ をも一般解ということにする．なお任意定数といっても全く任意の定数であるとはかぎらない．C のとる値がある範囲にかぎられる場合もある．

また，一般解をみちびく途中の計算は形式的に行なう．たとえば $\dfrac{1}{y}$ を考えるとき $y \neq 0$ とするとか，$\sqrt{z}$ を考えるとき $z \geqq 0$ とするとか，$\log x$ を考えるとき $x>0$ とするとかいうようなことをいちいちことわらない．ここで述べるのは解があるとして，その形を見いだす方法で，真に解であることは得られた結果から検証によってたしかめられることだからである．

2.1　変数分離形

$$y' = f(x)g(y) \tag{1}$$

の形の方程式を**変数分離形**という．これを

$$\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{2}$$

の形に書けば，左辺は，$G(y)=\displaystyle\int \frac{dy}{g(y)}$ を x について微分したものであるから，(2) は

$$\frac{d}{dx}\int \frac{dy}{g(y)} = f(x)$$

[別の理解の方法]

$y' = f(x)g(y)$

$y' = \dfrac{dy}{dx}$ なので、

$\dfrac{dy}{dx} = f(x)g(y)$

これを機械的に次の様に変形する。

左辺に y の項を，右辺に x の項のみとし，

変数を左辺，右辺に分離する(＝変数分離)

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

両辺それぞれ積分すると，

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x)dx + C$$

これは式(3)と同じ。

と書かれる．これを x で積分すれば

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C \qquad (C\text{は任意定数}) \qquad (3)$$

となる．(3) の両辺を x について微分すれば，(2) したがって (1) が得られるから，(3) は (1) の一般解である．

また，$g(y) = 0$ をみたす y_0 があれば

$$y = y_0$$

も (1) の解であることは (1) の両辺が 0 に等しいことからすぐわかる．

注意　変数分離形の方程式は，x, y について対称な

$$X(x)dx + Y(y)dy = 0$$

の形に書くことができる．この一般解は

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = C \qquad (C\text{は任意定数})$$

で与えられる．

例題 1　$y' = y^2$ の一般解を求め，x, y 平面上で解がどのような曲線になるかをしらべよ．

解　与えられた方程式を y^2 で割って $y'/y^2 = 1$ の形とすると

$$\left(\frac{1}{y}\right)' = -1$$

となる．これを積分すれば，C を任意定数として

$$y = \frac{1}{C - x} \qquad (4)$$

が一般解である．

C の値をいろいろにかえて x, y 平面上で曲線をえがくと次のようになる．

注意 1　$y = 0$ はこの方程式の解である．(4) の C にどんな値をいれても $y = 0$ を得ることはできない．しかし，$y = 0$ を特異解とは考えない．そのわけは，(4) で $C = \frac{1}{C'}$ とおけば $y = \frac{C'}{1 - C'x}$ となり，ここで $C' = 0$ とおけば $y = 0$ が得られるからである．

例題1.の解説

$y' = y^2$ の一般解.

1階微分方程式の一般解には、必ず積分定数が1つ含まれる。

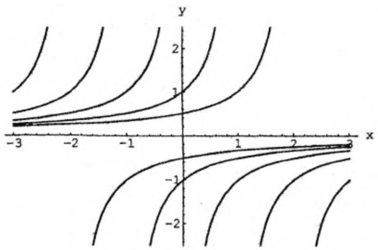
$\frac{dy}{dx} = y^2$　変数分離する.

$\frac{dy}{y^2} = dx$　両辺積分すると.

$\int \frac{1}{y^2} dx = \int dx$

$\rightarrow -y^{-1} = x + C$

$\rightarrow \quad y = -\frac{1}{x+C} = \frac{1}{x - C'}$



注意２ $a>0$とする．$x=0$のとき$y=a$となる解は$y(x)=\dfrac{a}{1-ax}$である．したがってxが0から$\dfrac{1}{a}$まで増加すると$y(x)$はaから$+\infty$へ増加する．すなわち$x=0$のとき$y=a$となる解$y(x)$は$-\infty<x<\dfrac{1}{a}$の範囲で存在し，この解を$x\geqq\dfrac{1}{a}$へひろげることはできない．$y'=y^2$の解で$-\infty<x<\infty$で存在するものは$y=0$だけである．

例題２ $xy'=y^2-1$の一般解を求め，x,y平面上で解がどのような曲線になるかをしらべよ．

解 この方程式を$\dfrac{dy}{y^2-1}=\dfrac{dx}{x}$，すなわち

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y+1}\right)dy=\frac{1}{x}dx$$

と書いて積分すれば

$$\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right|=2\log x+C_1 \qquad (C_1\text{ は任意定数})$$

ゆえに

$$\frac{y-1}{y+1}=Cx^2 \qquad (C\text{ は任意定数})$$

これが一般解である．yについて解いた形にすれば

$$y=\frac{1+Cx^2}{1-Cx^2} \tag{5}$$

［例題２の解説］

解き方は，テキスト通りですが，最後の解の表現の仕方について一言．

一般解は $\dfrac{y-1}{y+1}=Cx^2$ ですが，これを

$y=\dfrac{1+Cx^2}{1-Cx^2}$ と最終的に表現すべきか？です。

数学的には意味のない議論ですが，試験時にはどうすれば良いか？と聞かれます。

結論は，当然 $y=\cdots$ と容易に書ける時は，$y=\cdots$と書く，とても手間が書かる場合には，$y=\cdots$と直す必要はない，ということです。

（あいまいですが……）

問いに $y=\cdots$ の形で整理するように指示があれば，指示に従って下さい。

（P.16～25 は省略）

数学１及び演習（常微分方程式）　演習問題（１回目）
（テキスト該当ページ：pp.13〜25）

次の常微分方程式の一般解を求めよ．

1) $(1+x^2)\dfrac{dy}{dx} = 1+y^2$

2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x-3y}{3x+2y}$

3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^3+y^3}{xy^2}$

4) $y + 2x\dfrac{dy}{dx} = 0$

5) $\dfrac{dy}{dx} = y^2 + y$

6) $y^2 + (x^2 - xy)\dfrac{dy}{dx} = 0$

7) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$

注　意

演習問題の答案を pdf 形式でアップロードし，提出してください．
学生番号，氏名を記入することを忘れないで下さい