# 第2回演習解答

(1) $3\dfrac{dy}{dx}+xy=\dfrac{x}{y^2}$

$3y^2y'+xy^3=x$ ―①

$Y=y^3$ とおけば $Y'=3y^2y'$ なので

①は $Y'+xY=x$ とおける

積分因子として $e^{\int x\,dx}=e^{\frac{1}{2}x^2}$ が得られ

両辺にかけると

$$e^{\frac{1}{2}x^2}Y'+xe^{\frac{1}{2}x^2}Y=xe^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$\left(e^{\frac{1}{2}x^2}Y\right)'=xe^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$\therefore\ e^{\frac{1}{2}x^2}Y=\int xe^{\frac{1}{2}x^2}dx$$

$$=e^{\frac{1}{2}x^2}+C_1$$

$$Y=1+C_1e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$\therefore\ y=\left(1+C_1e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

(2) $x^2\dfrac{dy}{dx}-xy+y^2=0$

両辺を $y^2$ で割って

$x^2y^{-2}y'-xy^{-1}+1=0$ ―①

$Y=y^{1-2}=y^{-1}$ とおけば、$Y'=-y^{-2}y'$ なので

①は

$$-x^2Y'-xY+1=0$$

$Y'+\dfrac{1}{x}Y=\dfrac{1}{x^2}$ とおける.

積分因子として $e^{\int\frac{1}{x}dx}=x$ が得られ

両辺にかけると.

$$xY'+Y=\frac{1}{x}$$

$$(xY)'=\frac{1}{x}$$

$$xY=\int\frac{1}{x}dx=\ln x+C_1$$

$$Y=\frac{\ln x+C_1}{x}$$

$$\therefore\ y=x(C+\ln x)^{-1}$$

(3) $x^3\dfrac{dy}{dx} = x^2 y - y^4\cos x$

両辺を$y^4$で割ると

$x^3 y^{-4} y' = x^2 y^{-3} - \cos x$ ― ①

$Y = y^{1-4} = y^{-3}$とすると $Y' = -3y^{-4}y'$より

①は

$-\frac{1}{3}x^3 Y' = x^2 Y - \cos x$

$\frac{1}{3}x^3 Y' + x^2 Y = \cos x$ とおける

$\left(\frac{1}{3}x^3 Y\right)' = \cos x$

$\frac{1}{3}x^3 Y = \int \cos x\,dx = \sin x + C_1$

$Y = x^{-3}(3\sin x + C)$

$\frac{1}{y^3} = x^{-3}(C + 3\sin x)$

$x^3 = y^3(C + 3\sin x)$

(4) $\dfrac{dy}{dx} + y^2 = \dfrac{1}{x^2}$ ― ①

$y = \frac{\alpha}{x}$ ($\alpha$:定数)とおくと

$-\frac{\alpha}{x^2} + \frac{\alpha^2}{x^2} = \frac{1}{x^2}$, $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$ ∴ $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

よって $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2x}$ は①の1つの解である.

$y = \frac{1+\sqrt{5}}{2x} + z$ とおくと

$-\frac{1+\sqrt{5}}{2x^2} + z' + \frac{6+2\sqrt{5}}{4x^2} + \frac{1+\sqrt{5}}{x}z + z^2 = \frac{1}{x^2}$

$z' + z^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{x}z = \frac{1+\sqrt{5}}{2x^2} - \frac{3+\sqrt{5}}{2x^2} + \frac{2}{2x^2} = 0$

$z = \frac{1}{u}$ とおくと

$-\frac{u'}{u^2} + \frac{1}{u^2} + \frac{1+\sqrt{5}}{x}\frac{1}{u} = 0$

$-u' + 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{x}u = 0$

$u' - \frac{1+\sqrt{5}}{x}u = 1$ ― ②

ここで $u' - \frac{1+\sqrt{5}}{x}u = 0$ の解は

$\frac{du}{dx} = \frac{1+\sqrt{5}}{x}u$

$\int \frac{1}{u}\,du = \int \frac{1+\sqrt{5}}{x}\,dx$

$\ln u = \ln x^{1+\sqrt{5}} + C_1$

∴ $u = C_2 x^{1+\sqrt{5}}$

$C_2$を$C_2(x)$とみて②に代入すると

$C_2' x^{1+\sqrt{5}} = 1$

$C_2 = \int x^{-(1+\sqrt{5})}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{5}}x^{-\sqrt{5}} + C_1$

したがって

$u = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}x^{-\sqrt{5}} + C\right)x^{1+\sqrt{5}}$

$= -\frac{1}{\sqrt{5}}x + Cx^{1+\sqrt{5}}$

つづく

(4) つづき

$z = \frac{1}{u}$ より

$$z = \frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{5}}x + Cx^{1+\sqrt{5}}}$$

$$= \frac{-\sqrt{5}}{x - \sqrt{5}Cx^{1+\sqrt{5}}}$$

$y = \frac{1+\sqrt{5}}{2x} + z$ より

$$\therefore y = \frac{1+\sqrt{5}}{2x} - \frac{\sqrt{5}}{x - \sqrt{5}Cx^{1+\sqrt{5}}}$$

//

---

(5) $x\frac{dy}{dx} - y + y^2 = x^2$ —①

$\alpha(x) = x$ は①の1つの解なので

$$\begin{cases} xy' - y + y^2 = x^2 \\ x\alpha' - \alpha + \alpha^2 = x^2 \end{cases}$$

上式から下式を引いて

$$x(y' - \alpha') = y - \alpha - (y^2 - \alpha^2)$$

$$= y - \alpha - (y-\alpha)(y+\alpha)$$

$Y = y - \alpha$ とおけば

$y + \alpha = Y + 2\alpha$ より

$$xY' = Y - Y(Y + 2\alpha)$$

$\alpha = x$ より

$$xY' + (2x-1)Y = -Y^2$$

$$xY^{-2}Y' + (2x-1)Y^{-1} = -1$$

$u = Y^{-1}$ とすると $u' = -Y^{-2}Y'$ より

$$-xu' + (2x-1)u = -1$$

$$u' + \left(\frac{1}{x} - 2\right)u = \frac{1}{x}$$

積分因子として $\frac{x}{e^{2x}}$ をかけると

$$\frac{x}{e^{2x}}u' + \left(\frac{1}{x} - 2\right)\frac{x}{e^{2x}}u = \frac{1}{e^{2x}}$$

$$\left(\frac{x}{e^{2x}}u\right)' = e^{-2x}$$

$$\frac{x}{e^{2x}}u = \int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C_1 \quad \text{—②}$$

$u = \frac{1}{Y} = \frac{1}{y-x}$ より ②は

$$\frac{xe^{-2x}}{y-x} = \frac{-1+Ce^{2x}}{2e^{2x}}$$

$$\frac{y-x}{xe^{-2x}} = \frac{2e^{2x}}{-1+Ce^{2x}}$$

$$y - x = \frac{2x}{Ce^{2x}-1}$$

$$y = \frac{Ce^{2x}+1}{Ce^{2x}-1}x$$

//

(6) $(y-x^3)dx+(x-\cos y)dy=0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}(y-x^3)=1 \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(x-\cos y)=1 \end{cases}$$

より. これは完全形である。このとき

$$F(x,y)=\int(y-x^3)dx=xy-\frac{1}{4}x^4$$

$$h(y)=\frac{\partial F}{\partial y}-y=\cos y$$

よって

$$u(x,y)=xy-\frac{1}{4}x^4-\sin y$$

したがって一般解は

$$\underline{xy-\frac{1}{4}x^4-\sin y=C}$$

(7) $2xydy+(y^2-x^2)dy=0$

$P(x,y)=2xy$, $Q(x,y)=y^2-x^2$とおくと

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2x,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=-2x$$

つぎに.

$$\psi(y)=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)/P=-\frac{2}{y}$$

よって積分因子は

$$\exp\left\{\int\left(-\frac{2}{y}\right)dy\right\}=\frac{1}{y^2}$$

与式の両辺に$\frac{1}{y^2}$をかけると.

$$\frac{2x}{y}dx+\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)dy=0.$$

これは完全形であるので.

$$\int_0^x\frac{2x}{y}dx+\int_1^y\left(1-\frac{0^2}{y^2}\right)dy=C_1$$

$$\frac{x^2}{y}+y-1=C_1$$

したがって一般解は.

$$\underline{x^2+y^2=Cy}$$

(8) $y\,dx-(x^2+y^2+x)\,dx=0$

上式を$x^2+y^2$で割ると

$$\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}-dy=0$$

となる。したがって

$$d\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}-y\right)=0$$

よって$x^2+y^2$が1つの積分因子で求める一般解は、

$$\tan^{-1}\frac{y}{x}-y=C$$

$$x=y\tan(C+y)$$

(9) $y=xy'+\frac{1}{y'}$

$p=y'$とおくと、与式は

$$y=xp+\frac{1}{p} \quad \cdots ①$$

これを両辺$x$で微分すると、

$$p=p+xp'-\frac{p'}{p^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{p^2}\right)p'=0.$$

(i) $p'=0$のとき

$p=C$(定数)となり、一般解は

$$y=Cx+C^{-1}$$

(ii) $x-\frac{1}{p^2}=0$のとき

①に代入して、$p$を消去し、特異解は

$y^2=4x$ となる。

(10) $y = -x \cdot y' + x^4 y'^2$

$p = y'$ とおくと与式は

$y = -xp + x^4 p^2$

これを両辺 $x$ で微分すると

$p = -p - xp' + 4x^3 p^2 + x^4 \cdot 2pp'$

$\Leftrightarrow (2x^3 p - 1)(xp' + 2p) = 0$

(i) $p = -\frac{1}{2x}$ のとき.

$y = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^2} + c$

これを与式に代入して. $c = 0$ となるので

求める特異解は

$\underline{y = -\frac{1}{4x^2}}$ //

(ii) $xp' + 2p = 0$ のとき

$\frac{p'}{p} = -\frac{2}{x}$

両辺を積分して.

$\log p = \log (C/x^2)$

$\Leftrightarrow p = Cx^{-2}$

さらに積分して.

$y = -\frac{C_1}{x} + C_2$

これを与式に代入して. $C_2 = C_1^2$ となる

ので求める一般解は

$\underline{y = -\frac{C}{x} + C^2}$ //