行列式の定義

Definition

n次正方行列$A = [a_{ij}]$に対し

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdot \cdots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

とおき, Aの行列式と呼ぶ.

Aの行列式は$|A|$とも書き表す.

Example

$S_2 = \{\epsilon, (1 \quad 2)\}$であり, $\mathrm{sgn}(\epsilon) = 1$, $\mathrm{sgn}(1 \quad 2) = -1$であるから,

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} &= \mathrm{sgn}(\epsilon) a_{11} a_{22} + \mathrm{sgn}((1 \quad 2)) a_{12} a_{21} \\ &= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}. \end{aligned}$$

行列式の定義

Example

$S_3 = \{\epsilon, (1\quad 2), (1\quad 3), (2\quad 3), (1\quad 2\quad 3), (1\quad 3\quad 2)\}$であり，
ϵ, $(1\quad 2\quad 3), (1\quad 3\quad 2)$は偶置換，
$(1\quad 2), (1\quad 3), (2\quad 3)$は奇置換であるから

$a_{1(1\,2\,3)(1)}\,a_{2(1\,2\,3)(2)}\,a_{3(1\,2\,3)(3)}$

$a_{1\epsilon(1)}\,a_{2\epsilon(2)}\,a_{3\epsilon(3)}$

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \underbrace{a_{11}a_{22}a_{33}}_{} + \underline{a_{12}a_{23}}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{12}a_{21}a_{33} \boxed{- a_{13}a_{22}a_{31}} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

$\sigma = (1\ 3)$
$\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$
$-a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot a_{3\sigma(3)}$

行列の性質

Theorem (定理3.2.1)

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \boxed{a_{11}} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Example

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\,(2 \cdot 4 - 1 \cdot 3) = 15.$$

Example

$|E_n| = 1$

行列式の行に関する多重線形性

Theorem (定理3.2.2)

1. cをスカラーとする.

$$
\text{i行} \longrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ca_{i1} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

2.

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

行列式の性質

Example

定理3.2.2より，

$3\,(1\ \ 2\ \ 3)$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ a+3 & b+6 & c+9 \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} \overset{3.2.2(2)}{=} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ a & b & c \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ \boxed{3 \quad 6 \quad 9} \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{3.2.2(1)}{=} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ a & b & c \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

行列式の性質

Theorem (定理3.2.3)

1. (交代性) 二つの行を入れ替えると, 行列式は-1倍になる.
2. 二つの行が等しいならば, 行列式は0である.

Example

1. 定理3.2.3(2)より,

2·(2 3 1)

3.2.3(2)

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

3.2.2(2)

2. 定理3.2.3(1)より,

3.2.1

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \boxed{3} & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6.$$

Theorem (定理3.2.4)

行列の一つの行に他の行の何倍かを加えても，
行列式の値は変わらない．

Example

定理3.2.4より，

2(I)+II

3(I)+III

$$\begin{vmatrix}1&3&4\\-2&-5&7\\-3&2&-1\end{vmatrix} \overset{3.2.4}{=} \begin{vmatrix}1&3&4\\ \boxed{0\quad 1\quad 15}\\ \boxed{0\quad 11\quad 11}\end{vmatrix} \overset{3.2.1}{=} \begin{vmatrix}1&15\\11&11\end{vmatrix} = 11\begin{vmatrix}1&15\\1&1\end{vmatrix}.$$

$$\overset{3.2.4}{=} 11\begin{vmatrix}1&15\\ \boxed{0\quad -14}\end{vmatrix} \leftarrow (\mathrm{I})(-1)+\mathrm{II}$$

$$= 11\cdot(-14) = -154. \qquad \square$$

行列の性質

Theorem (定理3.3.1)

$$\det\left({}^t A\right) = \det(A).$$

Theorem (定理3.3.2)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

行列の性質

Theorem (定理3.3.3)

1. 一つの列をc倍すると, 行列式はc倍になる.
2. 一つの列が二つの列ベクトルの和である行列の行列式は, 他の列は同じで,その列に上の列ベクトルを別々にとった行列の行列式の和となる.
3. 二つの列を入れ替えると行列式は-1倍になる.
4. 二つの列が等しい行列の行列式は0である.
5. 一つの列に他の列の何倍かを加えても行列式は変わらない.

(1)と(2)を列に関する多重線形性, (3)を交代性という.

注意　$n \times n$行列上で定義されたスカラー関数Fで,
列に関する多重線形性かつ交代性を持ち,
$F(E_n) = 1$を満たすものはただ一つ存在する.

行列の性質

Theorem (定理3.3.4)

Aが$r \times r$行列, Dが$s \times s$行列, Bが$r \times s$行列, Cが$s \times r$行列ならば,

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} = \det(A)\det(D)$$

Theorem (定理3.3.5)

$n \times n$行列A, Bに対して

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$