力学１

第2回目

運動の例

1. 静止
2. 等速度運動
3. 等加速度運動
4. 単振動
5. 等速円運動
6. らせん運動

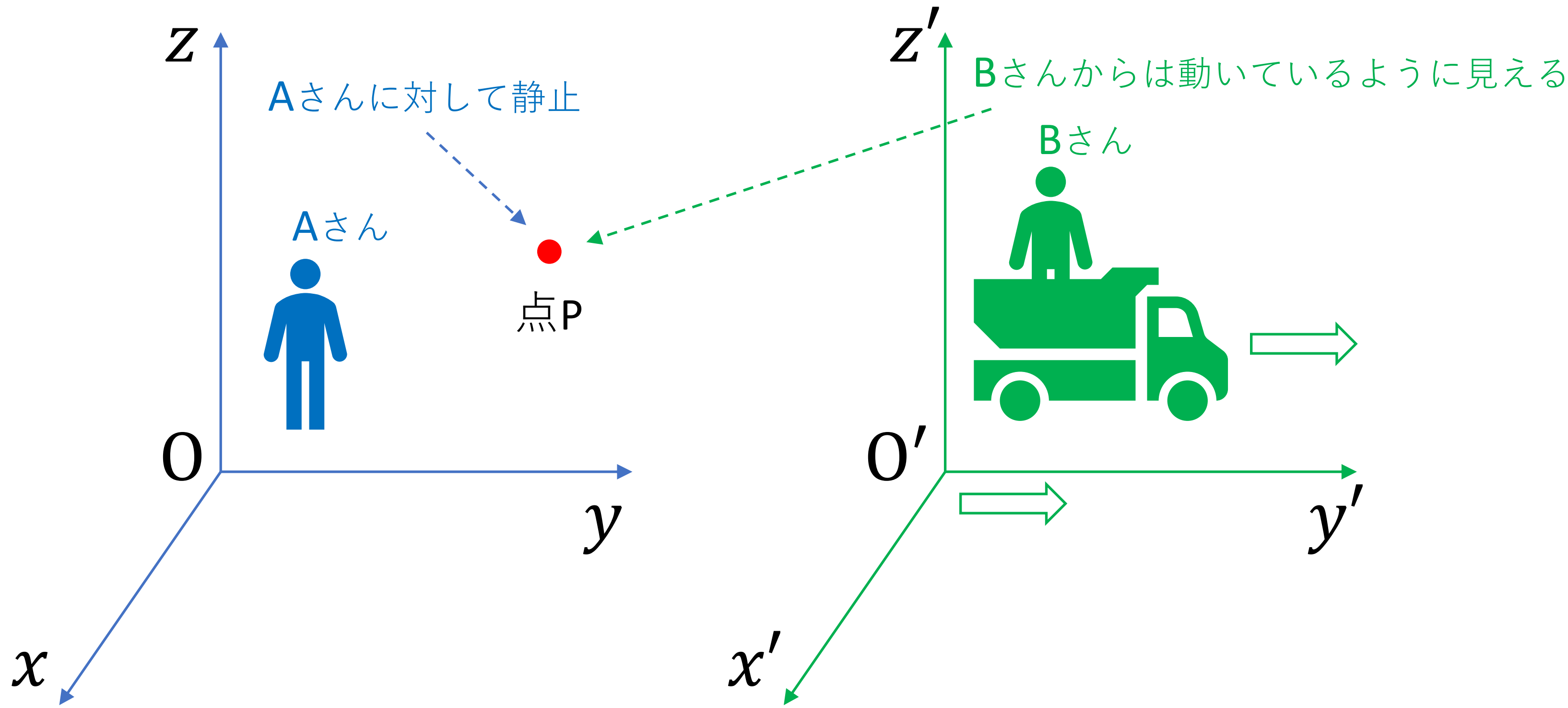
1.　静止（ある座標系に対して）

（慣性系を想定）

（ニュートンの運動の法則（第1法則）に関係）

座標系Σ…… Aさんに固定された座標系

座標系Σ'……Bさんに固定された座標系



質点の運動について考えるには座標系を設定する必要がある

1.　静止（ある座標系に対して）

・質点の位置ベクトル

$$\vec{r}\,(t) = \vec{r}_0$$ 定ベクトル

$$= (x_0, y_0, z_0)$$ それぞれ定数

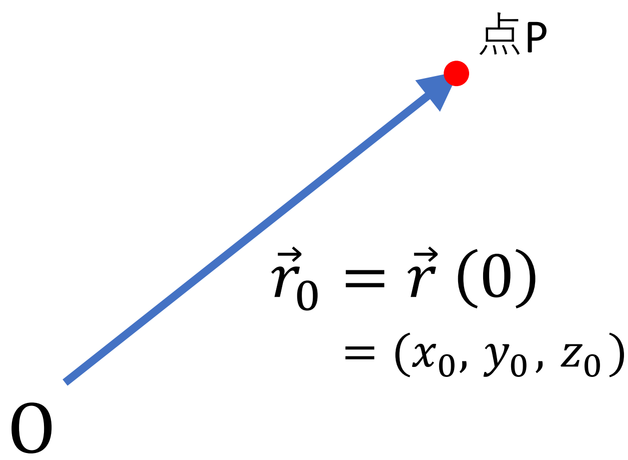
・質点の速度ベクトル

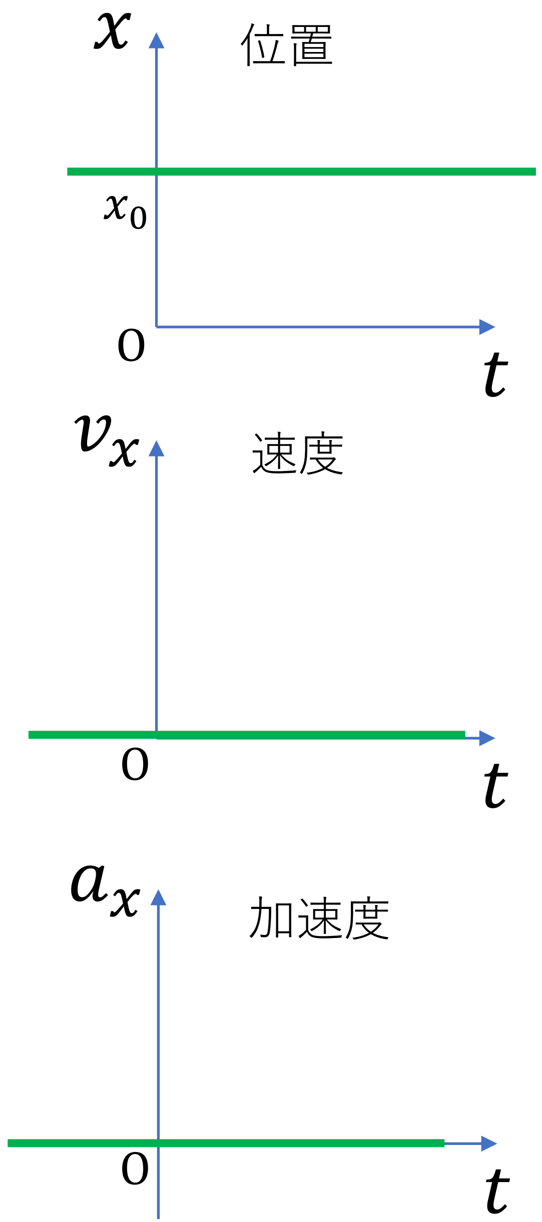
$$\vec{v}\,(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{0} = (0, 0, 0)$$

・質点の加速度ベクトル

$$\vec{a}\,(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} = (0, 0, 0)$$

1.　静止（ある座標系に対して）





2. 等速度運動

$t=0$での位置

$$\vec{r}\,(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\, t = (x_0 + v_{x0}t,\ y_0 + v_{y0}t,\ z_0 + v_{z0}t)$$

定ベクトル

時間で積分

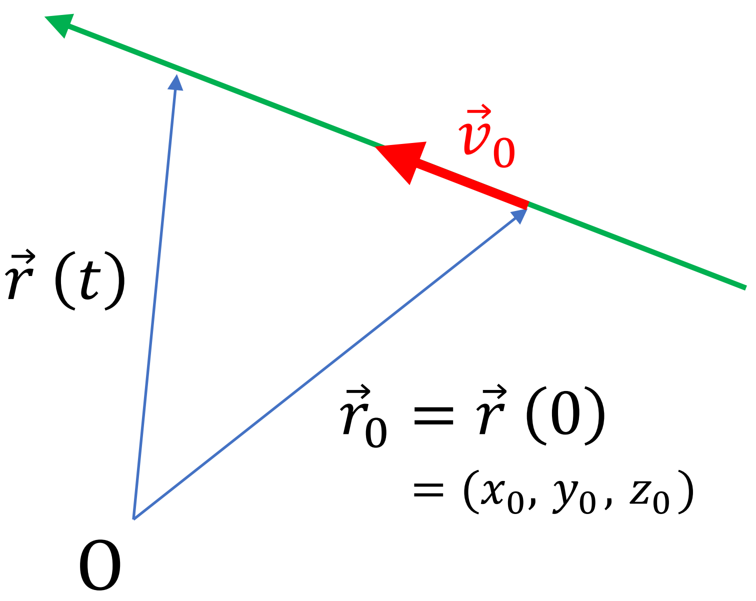
$$\boxed{\vec{v}\,(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0})}$$

等速度

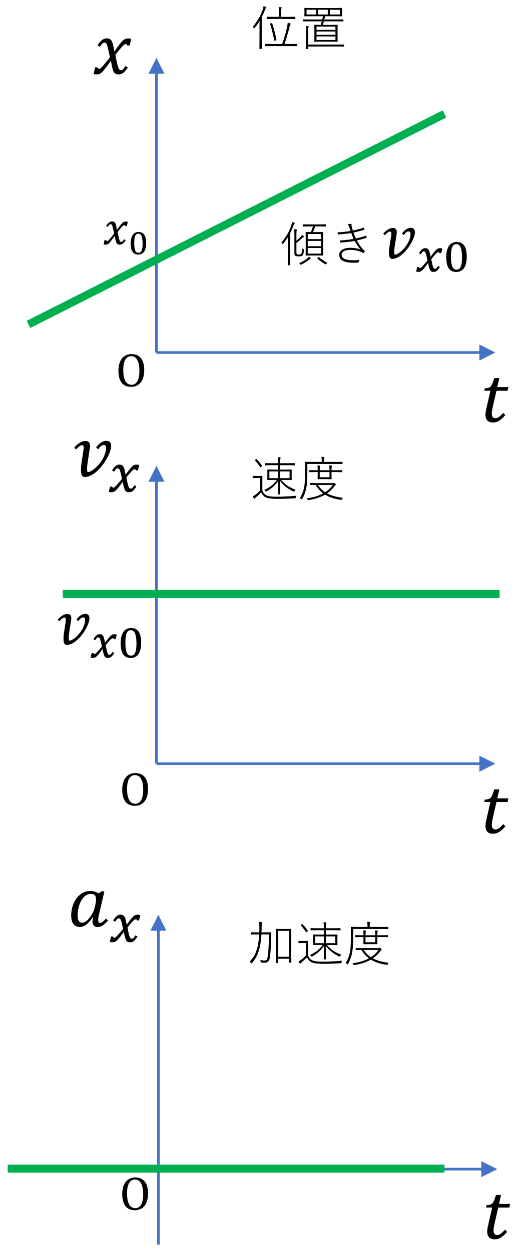
時間で微分

$$\vec{a}\,(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} = (0, 0, 0)$$

2. 等速度運動



$\vec{v}_0$
$\vec{r}\,(t)$
$\vec{r}_0 = \vec{r}\,(0)$
$= (x_0, y_0, z_0)$
O



位置
x
x_0
傾き v_{x0}
0
t
速度
v_x
v_{x0}
0
t
加速度
a_x
0
t

3. 等加速度運動

加速度が一定

$$\vec{a}\,(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{r}^{2}}{dt^{2}} = \vec{a}_0$$

定ベクトル

時間で積分

$$\vec{v}\,(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{a}_0 t + \vec{v}_0$$

時間で積分

$$\vec{r}\,(t) = \frac{1}{2}\vec{a}_0 t^{2} + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$$

時間tの2次関数

（$\vec{a}_0 = \vec{0}$の場合も含めて）

ベクトルの（時間による）積分

$$\boxed{\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}}$$

$$\int \vec{A} dt = \int \left(A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}\right) dt$$

$$= \int \left(A_x \vec{i}\right) dt + \int \left(A_y \vec{j}\right) dt + \int \left(A_z \vec{k}\right) dt$$

$$= \left(\int A_x \, dt\right)\vec{i} + \left(\int A_y \, dt\right)\vec{j} + \left(\int A_z \, dt\right)\vec{k}$$

$$\vec{a}_0 = a_{x0}\,\vec{i} + a_{y0}\,\vec{j} + a_{z0}\,\vec{k}$$

$$\int \vec{a}_0 dt = \int (a_{x0}\,\vec{i} + a_{y0}\,\vec{j} + a_{z0}\,\vec{k})dt$$

$$= \int (a_{x0}\,\vec{i})dt + \int (a_{y0}\,\vec{j})dt + \int (a_{z0}\,\vec{k})dt$$

$$= \int a_{x0}\,dt\;\vec{i} + \int a_{y0}\,dt\;\vec{j} + \int a_{z0}\,dt\;\vec{k}$$

各成分ごとに積分を行う

$$= a_{x0}\int dt\;\vec{i} + a_{y0}\int dt\;\vec{j} + a_{z0}\int dt\;\vec{k}$$

C_x, C_y, C_z はそれぞれの成分における積分定数

$$= a_{x0}(t + C_x)\,\vec{i} + a_{y0}(t + C_y)\vec{j} + a_{z0}(t + C_z)\vec{k}$$

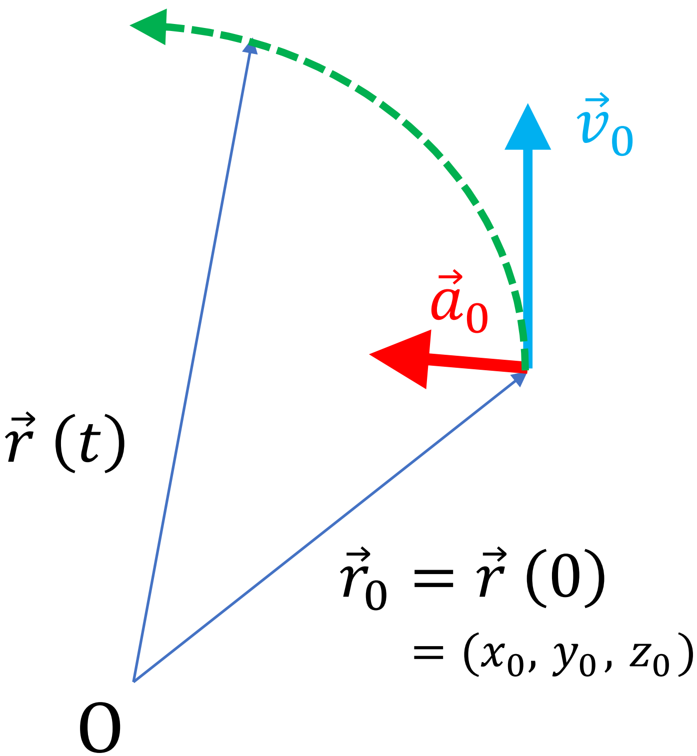
$$= a_{x0}t\,\vec{i} + a_{y0}t\,\vec{j} + a_{z0}t\,\vec{k} + a_{x0}C_x\,\vec{i} + a_{y0}C_y\vec{j} + a_{z0}C_z\vec{k}$$

$$= (a_{x0}\,\vec{i} + a_{y0}\,\vec{j} + a_{z0}\,\vec{k})t + \underbrace{a_{x0}C_x\,\vec{i} + a_{y0}C_y\vec{j} + a_{z0}C_z\vec{k}}_{t=0\text{ における速度ベクトル }\vec{v}_0}$$

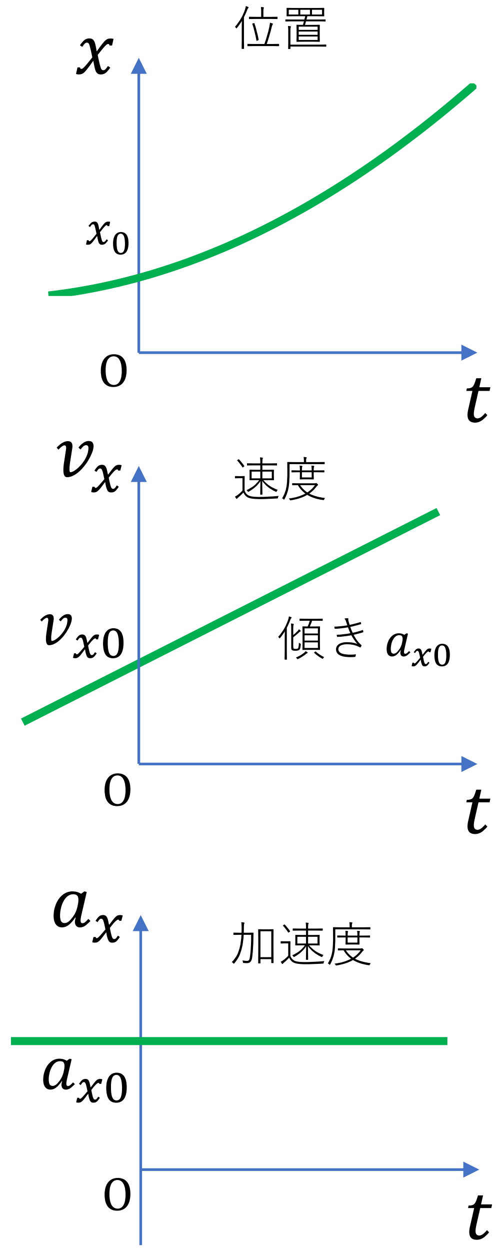
$$= \vec{a}_0 t + \vec{v}_0 = \vec{v}\,(t)$$

もう一度積分すると位置ベクトルが出る。（時間について2次関数）

3. 等加速度運動



$\vec{v}_0$
$\vec{a}_0$
$\vec{r}\,(t)$
$\vec{r}_0 = \vec{r}\,(0)$
$= (x_0, y_0, z_0)$
O



位置
x
x_0
0
t
速度
v_x
v_{x0}
傾き a_{x0}
0
t
加速度
a_x
a_{x0}
0
t

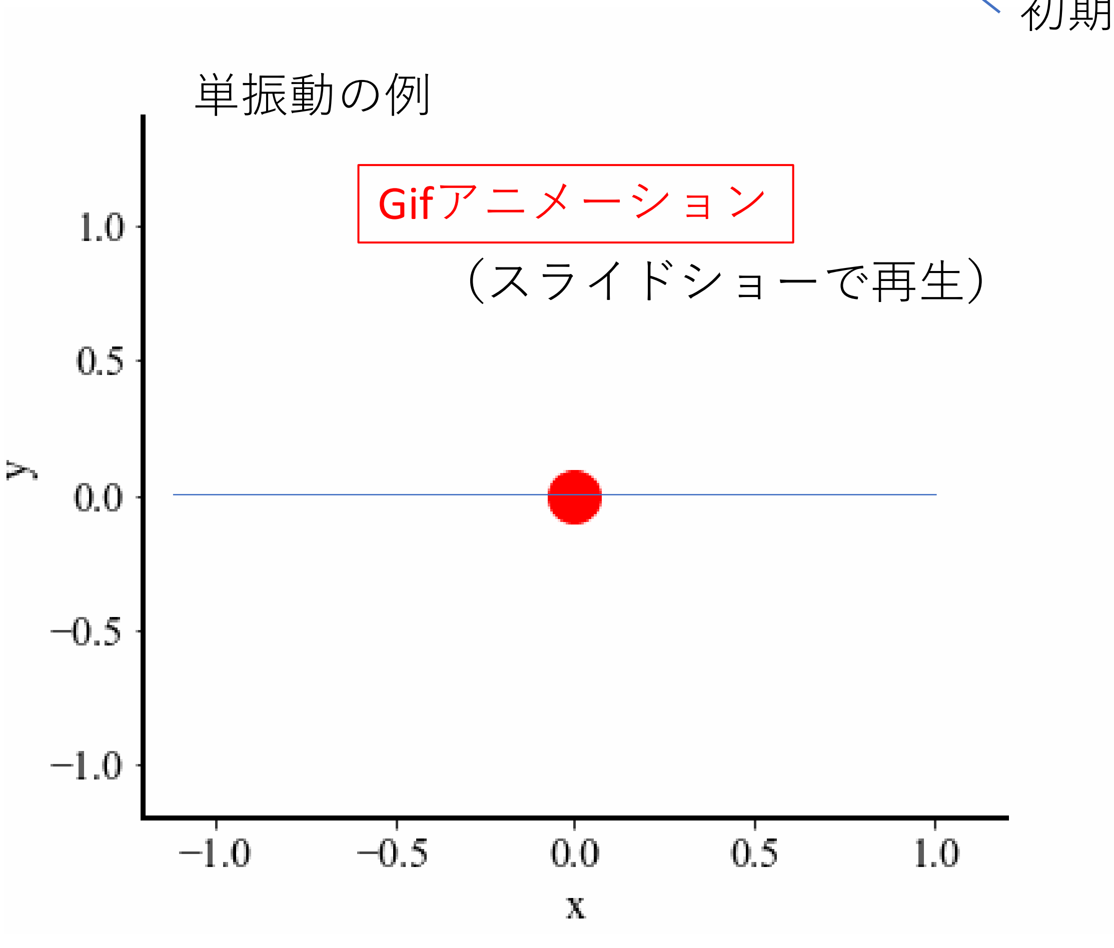
4. 単振動

ある直線上の運動であり

x 軸とすると $x(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$

振幅　角振動数

初期位相

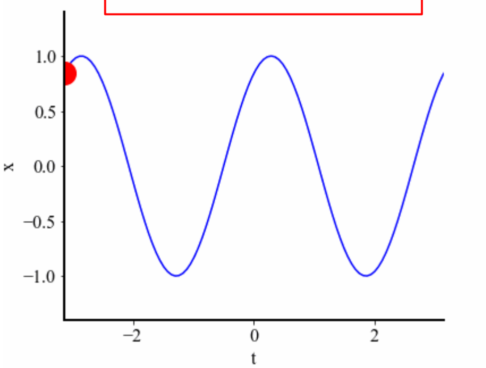


Gifアニメーション

（スライドショーで再生）

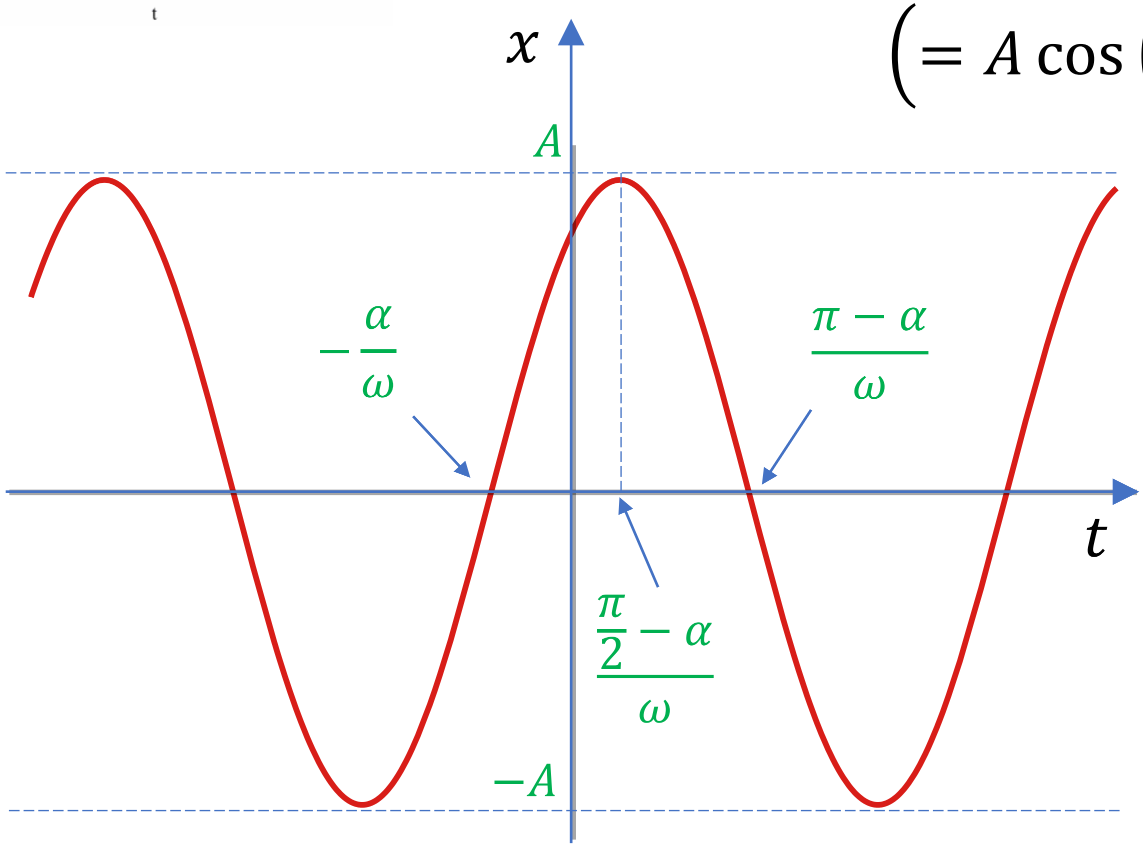
4.　単振動

Gifアニメーション



位置 $x(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$

$$\left(= A\cos\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$



4. 単振動

位置 $x(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$

速さ $v_x(t) = \dfrac{dx}{dt} = \omega A\cos(\omega t + \alpha)$

加速度 $a_x(t) = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\sin(\omega t + \alpha)$

$$= \underline{-\omega^2 x(t)}$$

加速度は振動の中心からの距離に比例した大きさで、
振動の中心を向いている

4. 単振動

運動の繰り返し

時刻 t_1 と時刻 $t_2 = t_1 + \frac{2\pi}{\omega}$ について

$$x(t_1) = A\sin(\omega t_1 + \alpha)$$

$$x(t_2) = A\sin(\omega t_2 + \alpha) = A\sin\left(\omega\left(t_1 + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \alpha\right)$$

$$= A\sin(\omega t_1 + 2\pi + \alpha)$$

$$= A\sin(\omega t_1 + \alpha) = x(t_1)$$

整数

$$x(t_1) = x\left(t_1 + \frac{2\pi}{\omega}n\right)$$

4. 単振動

ここで、$T = \frac{2\pi}{\omega}$ を周期という。

（運動を1回繰り返す時間間隔）

$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ ……… 振動数

（単位時間当たりの振動回数）

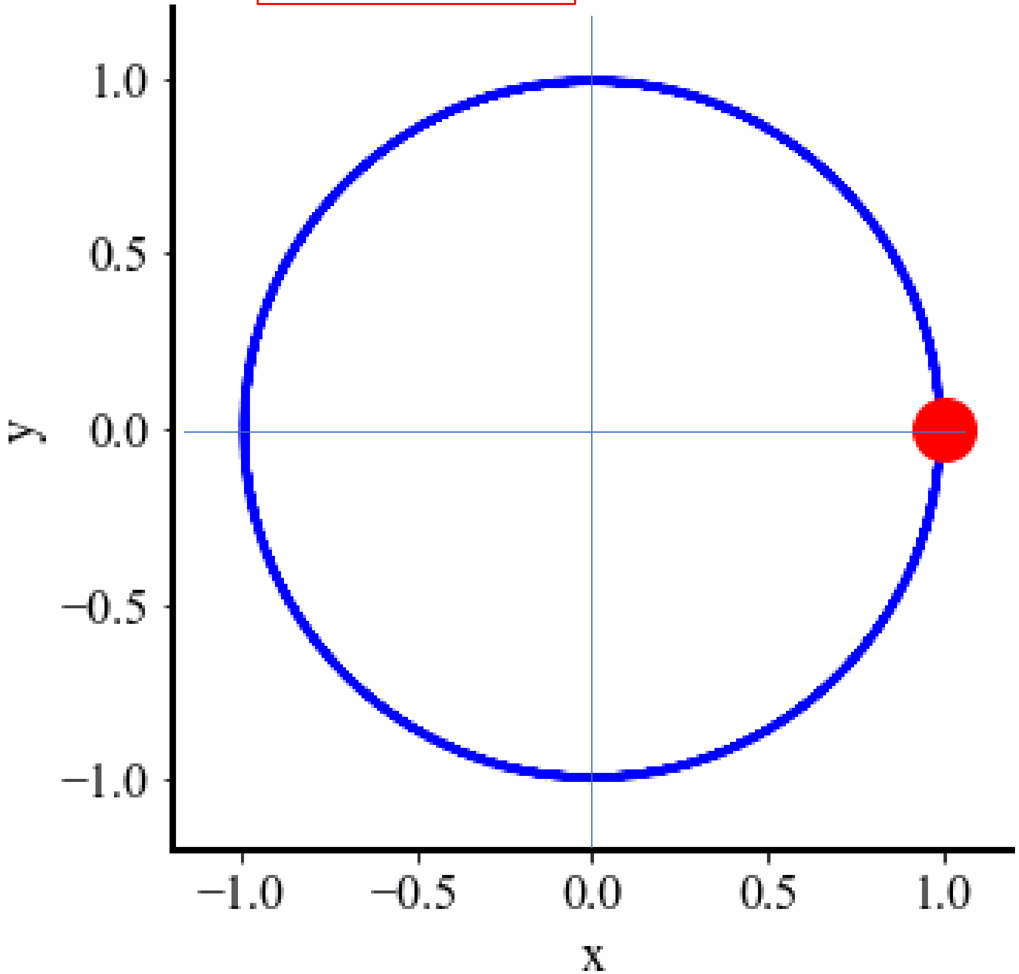
$\omega = 2\pi f$ ……………… 角振動数

周期運動

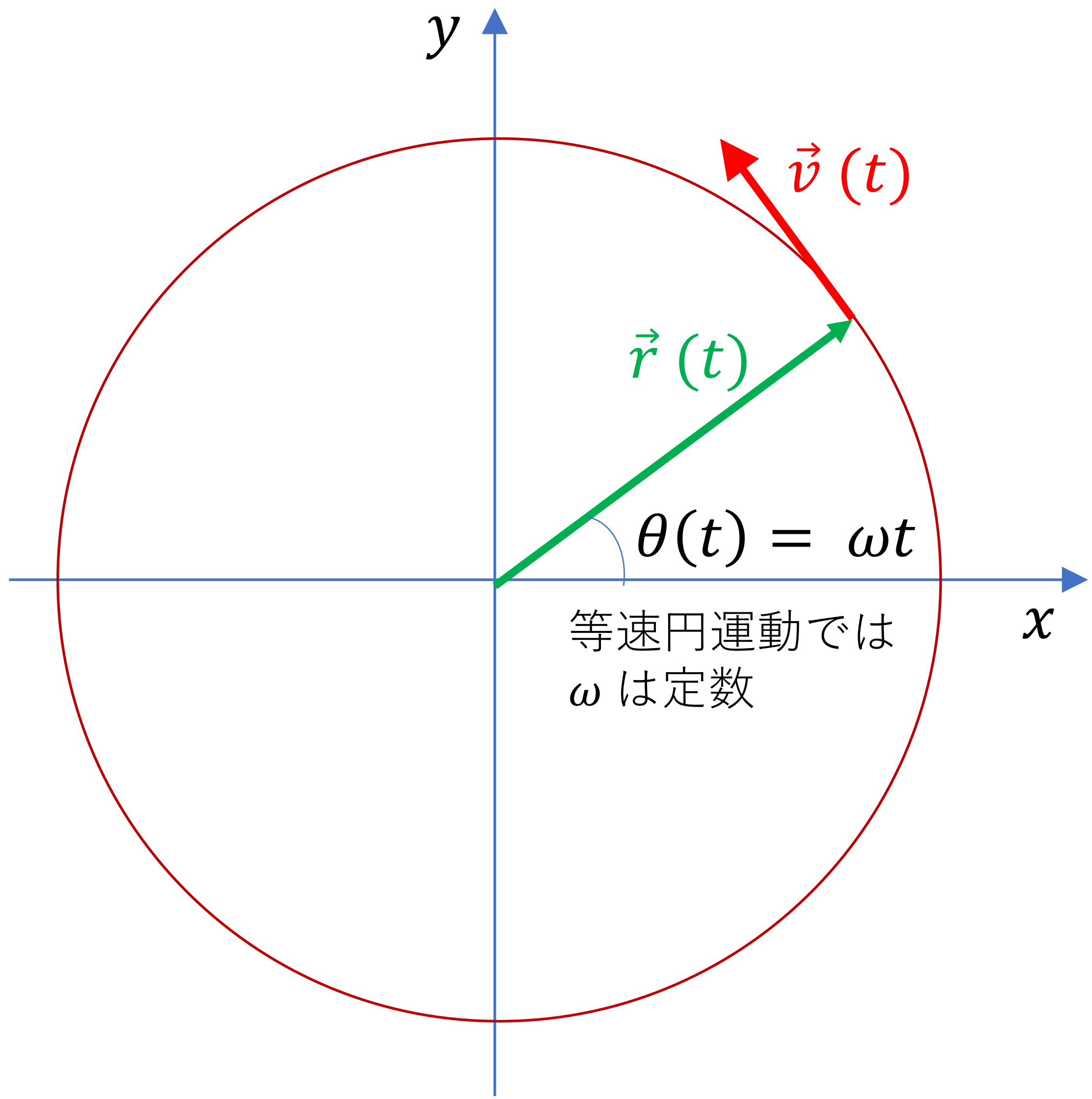
ある時間経過後に、運動の状態が元に戻る。

5. 等速円運動

Gifアニメーション



5. 等速円運動



$|\vec{v}|$……… 一定

$|\vec{r}|$……… 一定

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$ 回転数

（単位時間当たりに回転する数）

ω 角振動数、角速度

5. 等速円運動

位置ベクトル　$\vec{r}\,(t) = \big(x(t), y(t)\big)$

例えば

$$= \;(r\cos(\omega t)\,, r\sin(\omega t))$$

$(\,r = \;|\vec{r}(t)|\,)$

x 成分、y 成分はそれぞれ単振動

速度ベクトル　$\vec{v}\,(t) = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \left(\dfrac{dx}{dt}\,, \dfrac{dy}{dt}\right)$

$$= \;(-\omega r\sin(\omega t)\,, \omega r\cos(\omega t))$$

5. 等速円運動

位置ベクトルと速度ベクトルの内積

$$\vec{r}(t)\cdot\vec{v}(t) = -\omega r^2 \cos\omega t \sin\omega t + \omega r^2 \sin\omega t \cos\omega t = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{r}(t) \perp \vec{v}(t)$$

$\vec{r}(t)$と$\vec{v}(t)$は時間によらず常に垂直

また、

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{\omega^2 r^2\left((\sin\omega t)^2 + (\cos\omega t)^2\right)} = \omega r$$

5.　等速円運動

加速度ベクトル

$$\vec{a}\,(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left(-\omega^2 \underbrace{r\cos\omega t}_{x(t)}\,, -\omega^2 \underbrace{r\sin\omega t}_{y(t)}\right)$$

$$= \left(-\omega^2 x(t)\,, -\omega^2 y(t)\right)$$

$$= -\omega^2\,\vec{r}\,(t)$$

加速度ベクトル$\vec{a}\,(t)$ は位置ベクトル$\vec{r}\,(t)$と
同じ方向で向きが逆

回転の中心を向いている

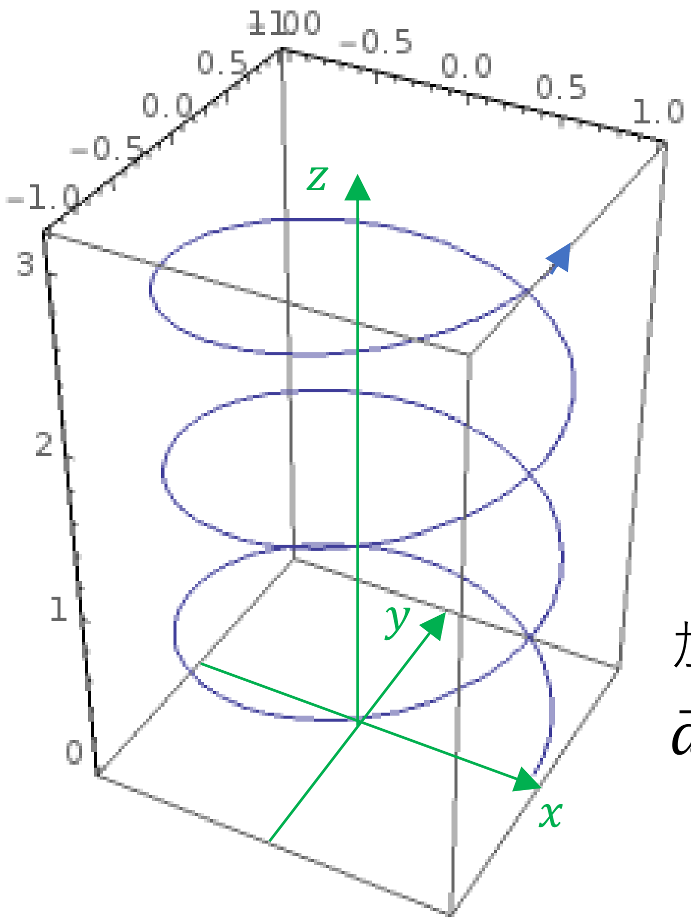
また、

$$|\vec{a}(t)| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2} = \sqrt{\omega^4 r^2\left((\cos\omega t)^2 + (\sin\omega t)^2\right)} = \omega^2 r$$

（前のスライドより）　$= \dfrac{|\vec{v}^2|}{r}$　向心加速度

5. らせん運動

（らせん運動の例）



例えば、xy平面では等速円運動、
z方向には等速運動

位置ベクトル

一定

$$\vec{r}(\mathrm{t}) = (r\cos\omega t, r\sin\omega t, v_z t)$$

速度ベクトル

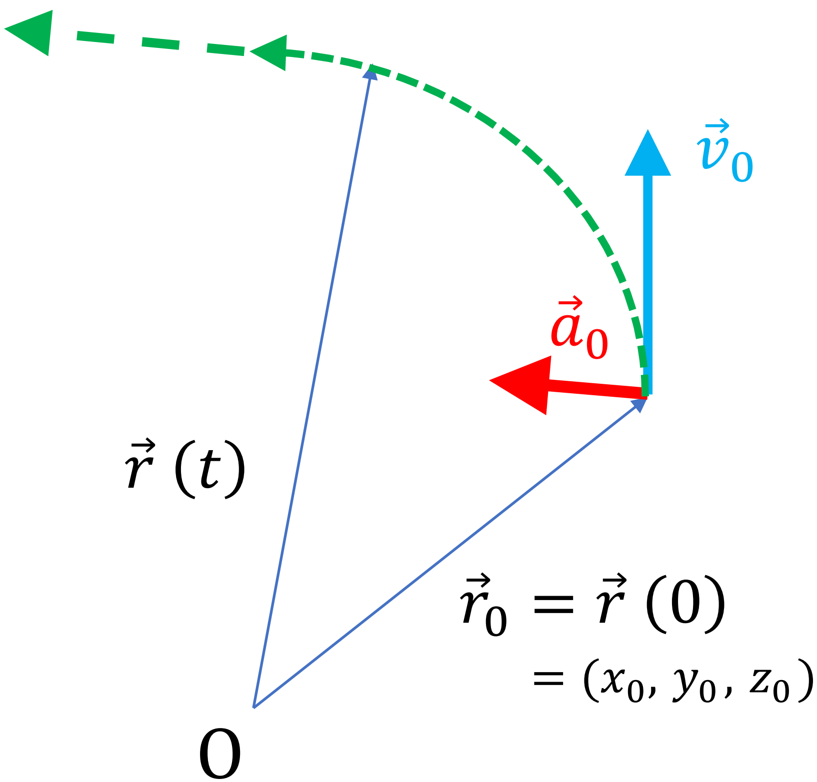
$$\vec{v}(\mathrm{t}) = \frac{d\vec{r}}{dt} = (-\omega r\sin\omega t, \omega r\cos\omega t, v_z)$$

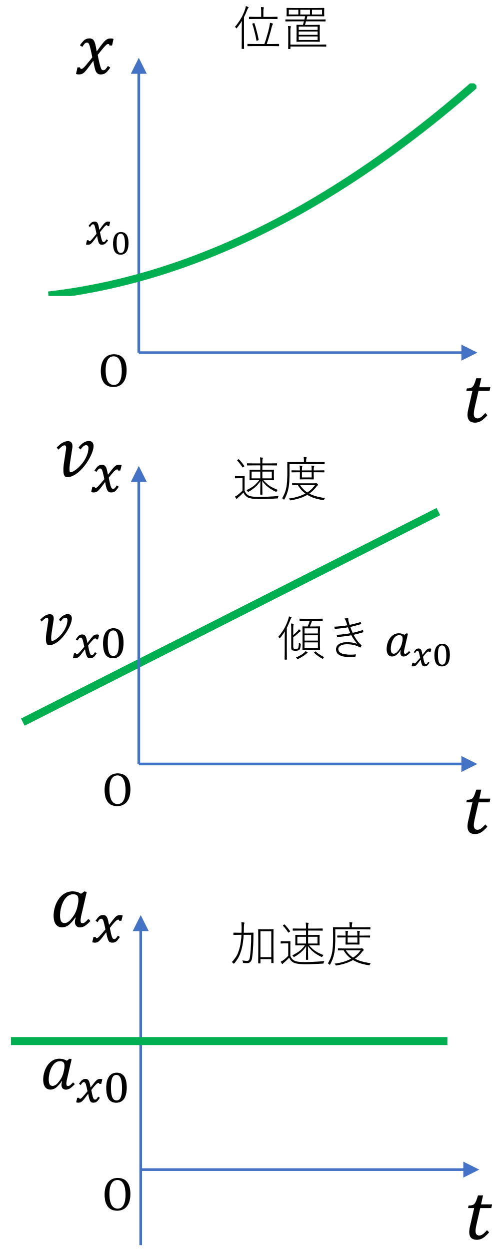
加速度ベクトル

$$\vec{a}(\mathrm{t}) = \frac{d\vec{v}}{dt} = (-\omega^2 r\cos\omega t, -\omega^2 r\sin\omega t, 0)$$

位置ベクトル、速度ベクトル、加速度ベクトルの
x, y 成分は等速円運動と同じ

3. 等加速度運動





一般的には$\vec{v}_0$ と$\vec{a}_0$ は直交しない

3.　等加速度運動

加速度が一定

$$\vec{a}\,(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{r}^{2}}{dt^{2}} = \vec{a}_0$$

定ベクトル

内積をとっても
ゼロとは限らない

時間で積分

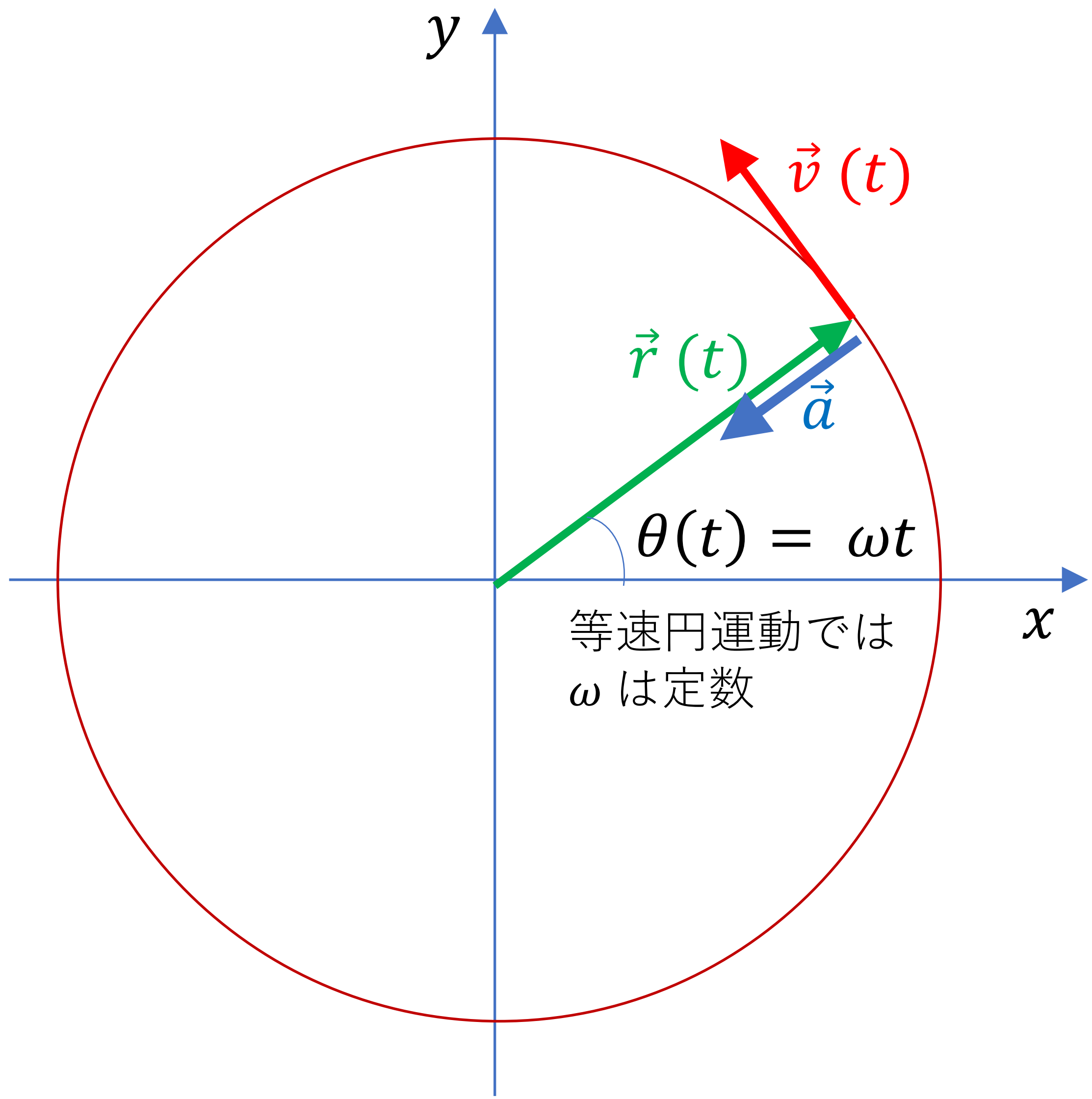
$$\vec{v}\,(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{a}_0 t + \vec{v}_0$$

時間で積分

$$\vec{r}\,(t) = \frac{1}{2}\vec{a}_0 t^{2} + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$$

時間tの2次関数
（$\vec{a}_0 = \vec{0}$の場合も含めて）

5.　等速円運動



$|\vec{a}|$ ……… 一定

$|\vec{v}|$ ……… 一定

$|\vec{r}|$ ……… 一定

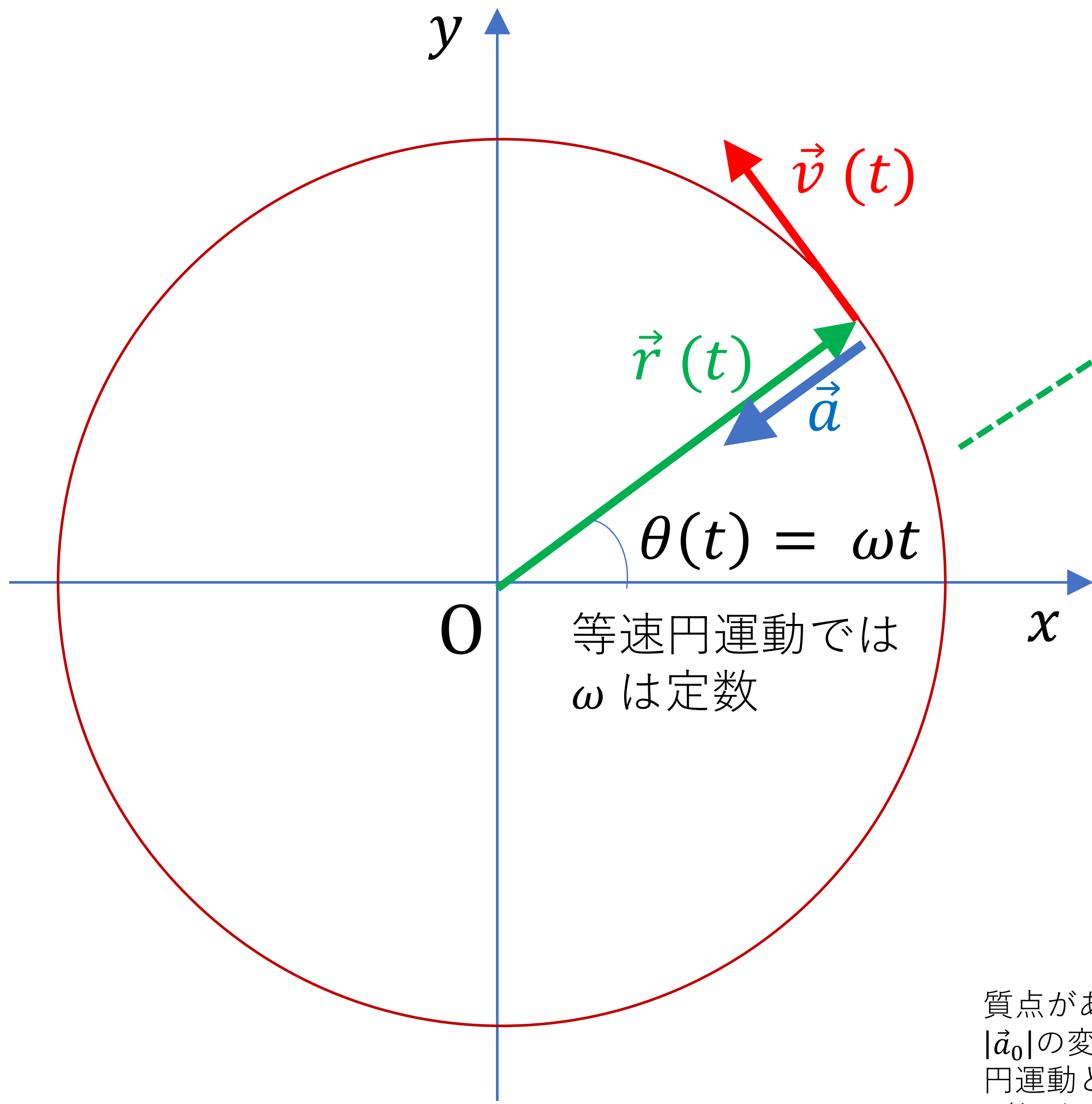
（向きは変化）

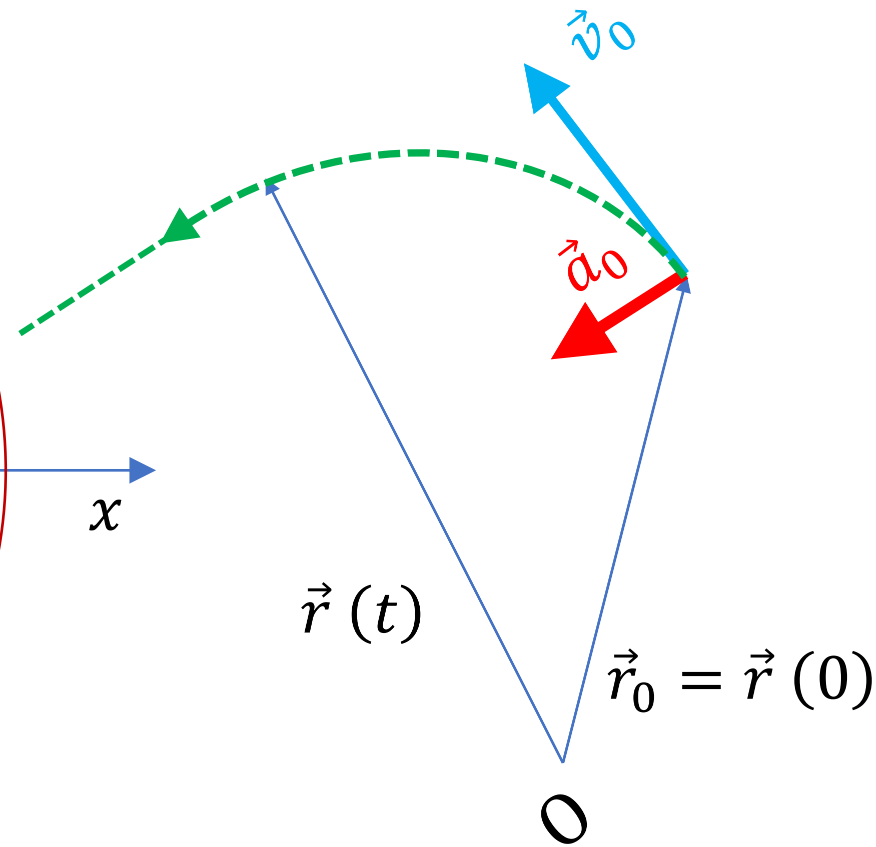
$f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$　回転数

（単位時間当たりに回転する数）

ω　角振動数、角速度

5.　等速円運動





質点がある曲線上を運動していて、ある瞬間に、$|\vec{v}_0|$や$|\vec{a}_0|$の変化が小さいと考えてよい場合に、質点の運動を円運動と近似する場合がある。
（加速度が変化する場合でも）