【第1回その１演習解答】

※以下 C を任意定数とします

1）

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx}=1+y^2$$

$$\frac{1}{1+y^2}dy=\frac{1}{1+x^2}dx$$

両辺積分して

$$Arc\tan y=Arc\tan x+C$$

$$y=\tan(Arc\tan x+C)$$

$$=\frac{\tan(Arc\tan x)+\tan C}{1-\tan(Arc\tan x)\tan C}$$

$$=\frac{x+C}{1-Cx}$$

2）

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-3y}{3x+2y}$$

同次形なので y=ux とすると

$$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$$

よって

$$\frac{2-3u}{3+2u}=u+x\frac{du}{dx}$$

$$\frac{-2u^2-6u+2}{3+2u}=x\frac{du}{dx}$$

$$\frac{(u^2+3u-1)'}{-2(u^2+3u-1)}du=\frac{1}{x}dx$$

両辺積分して

$$-\frac{1}{2}\ln|u^2+3u-1|=\ln|x|+C$$

$$\ln x^2|u^2+3u-1|=C$$

$$x^2(u^2+3u-1)=C$$

u=y/x より

$$x^2-3xy-y^2=C$$

3）

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + y^3}{xy^2}$$

同次形なので y=ux とすると

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

よって

$$x\frac{du}{dx} = \frac{x^3 + u^3x^3}{u^2x^3} - u$$

$$= \frac{1}{u^2}$$

$$u^2du = \frac{1}{x}dx$$

両辺積分して

$$\frac{1}{3}u^3 = \ln|x| + C$$

u=y/x より

$$\frac{y^3}{x^3} = 3\ln|x| + C$$

$$y = x(3\ln|x| + C)^{1/3}$$

4）

$$y + 2x\frac{dy}{dx} = 0$$

$$-\frac{1}{2x}dx = \frac{1}{y}dy$$

両辺積分して

$$-\frac{1}{2}\ln|x| = \ln|y| + C$$

$$y = \frac{C}{\sqrt{x}}$$

5）

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + y$$

$$\frac{1}{y^2 + y} dy = dx$$

両辺積分して

$$\int \frac{1}{y^2 + y} dy = x + C$$

ここで

$$\int \frac{1}{y^2 + y} dy = \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right) dy$$

$$= \ln|y| - \ln|y+1|$$

より

$$\ln|y| - \ln|y+1| = x + C$$

$$\frac{y}{y+1} = Ce^x$$

$$y = \frac{Ce^x}{1 - Ce^x}$$

6）

$$y^2 + (x^2 - xy)\frac{dy}{dx} = 0$$

同次形なので y=ux とすると

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

よって

$$u^2 + (1-u)\left(u + x\frac{du}{dx}\right) = 0$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{u^2}{u-1} - u$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{u}{u-1}$$

$$\left(1 - \frac{1}{u}\right) du = \frac{1}{x} dx$$

両辺積分して

$$u - \ln|u| = \ln|x| + C$$

$$u + C = \ln|ux|$$
$$Ce^{u} = ux$$

u=y/x より

$$y = Ce^{\frac{y}{x}}$$

7）

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

同次形なので y=ux とすると

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

よって

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{2u}{1 - u^2}$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{u^3 + u}{1 - u^2}$$

$$\frac{1}{x}dx = \frac{1 - u^2}{u^3 + u}du$$

両辺積分して

$$\ln|x| + C = \int \frac{1 - u^2}{u^3 + u}du$$

ここで

$$\int \frac{1 - u^2}{u^3 + u}du = \int \frac{1 - u^2}{u(u^2 + 1)}du$$

$$= \int \left(\frac{1}{u} - \frac{2u}{u^2 + 1}\right)du$$

$$= \ln|u| - \ln(u^2 + 1)$$

より

$$\ln|x| + C = \ln\left|\frac{u}{u^2 + 1}\right|$$

$$Cx = \frac{u}{u^2 + 1}$$

u=y/x より

$$\frac{y}{x^2 + y^2} = C$$