第 15 回講義． グリーンの公式.（教科書に記載がないが物理への応用では非常に重要）

● 線積分．平面の点 A から B に向かう C^1 **パラメータ付き曲線** $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ($t \in [\alpha, \beta]$, $A = \gamma(\alpha)$, $B = \gamma(\beta)$) 上での $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ の**線積分**を

$$\begin{aligned}&\int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy \\ :=& \int_\alpha^\beta \{P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\}dt\end{aligned}$$

によって定義する．形式的には，$x = x(t)$, $y = y(t)$ を代入し，$dx = x'(t)dt$, $dy = y'(t)dt$ となっている．$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ とは何ぞや，という質問は当然である．これは 1 変数関数の積分において，積分記号 $\displaystyle\int$ の中にある $f(x)dx$ を 2 変数関数の場合に (xy) 平面で類似物を考えたものである．1 変数の場合「$a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ となる変数変換 $x = \varphi(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$) をすると $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ となる」という置換積分の公式を一般化したものと考えられる．左辺の積分が行われる曲線 γ は図形としての曲線であるだけでなく，パラメータ付き（運動する点の軌跡）であることが重要である．点が曲線上を逆向きに進むようにパラメータを変更すると，線積分の値は -1 倍になってしまう．一方，曲線に向きを定めておけば，**積分は向きに合致するパラメータのとりかたによらない**．この事実は**置換積分の公式**からの帰結である．

（問）線積分されるものと線積分をこのように定義したとき，微積分学の基本定理に対応する何ものかはあるのだろうか？

（答）微積分学の基本定理の二次元版というべき公式がある．それが Green の公式である：

● (**定理（Green の公式）**) D を xy 平面の領域でその境界 $C = \partial D$ は互いに交わらないいくつかの区分的 C^1 級の単純閉曲線から成り，C には領域 D を**左手**に見る向きを入れる．このとき $D \cup C$ を含む領域で C^1 級の関数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ に対して

$$\iint_D (Q_x - P_y)dxdy = \int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

が成り立つ．

● Green の公式の証明．まず D が縦かつ横線領域の場合を考える．累次積分と微積分学の基本定理から，縦線領域では

$$-\iint_D P_y dxdy = \int_C Pdx$$

が成り立ち，横線領域では

$$\iint_D Q_x dxdy = \int_C Qdy$$

が成り立つことが判る．よって，縦かつ横線領域では

$$\iint_D (Q_x - P_y)dxdy = \int_C Pdx + Qdy$$

が成り立つことが判る．詳しく言うとこうである：D は縦線領域だから

$$D = \{(x,y) \,|\, \phi(x) \le y \le \psi(x),\ a \le x \le b\}$$

と表される．ここで $\phi(x)$, $\psi(x)$ は $[a,b]$ 上の C^1 関数である．先に y 方向に積分すると

$$\iint_D P_y dxdy = \int_a^b dx\left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} P_y dy\right) = \int_a^b (P(\psi(x)) - P(\phi(x))dx = -\int_{\partial D} P(x,y)dx$$

である．ここで，最後の積分にマイナスがついている理由は，境界 ∂D には内部を左手に見る向きを与える約束になっている一方で，

$$\int_a^b (P(\psi(x)) - P(\phi(x))dx$$

は曲線 ∂D 上に沿って内部を右手に見る方向の線積分を表すからである．D は横線領域でもあるから

$$D = \{(x,y) \,|\, \overline{\phi}(y) \leq x \leq \overline{\psi}(y),\ c \leq y \leq d\}$$

と表される．すると上の同様に計算より

$$\iint_D Q_x dxdy = \int_{\partial D} Q(x,y)dx$$

が成り立つことが判る．各自で確認すること．

次に D が一般の領域の場合を考える．このとき（例えば）有限本の水平線と垂直線によって D は縦かつ横線領域に分割できる：$D = \cup_{i=1}^k D_i$．各 D_i ごとに Green の公式を適用して総和をとれば領域内部の境界上の積分は打ち消し合う（D の内部にある境界は，この境界に沿って隣り合う二つの部分領域から反対の向きが導入されるから）．結局，一般の領域で Green の公式が成り立つ．□

• 例 1. 単位円周 $C = \{x^2 + y^2 = 1\}$ に反時計回りの向きを入れる．$D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ には $\{e_1, e_2\}$ を正の基底とする向き（通常の向き）を入れる．すると，C は D の境界 $C = \partial D$ である．線積分

$$I = \int_C (2xe^y - 3x^2y - y^3)dx + (x^2e^y + \cos y)dy$$

を Green の公式を用いて面積分に帰着させて計算してみる．

$$\begin{aligned} P(x,y) &= 2xe^y - 3x^2y - y^3\ , \\ Q(x,y) &= x^2e^y + \cos y \end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned} Q_x &= 2xe^y\ , \\ P_y &= 2xe^y - 3x^2 - 3y^2 \end{aligned}$$

だから Green の公式より

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \{2xe^y - (2xe^y - 3x^2 - 3y^2)\}dxdy \\ &= 3\iint_D (x^2 + y^2)dxdy \\ &= 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 r dr \\ &= 6\pi \int_0^1 r^3 dr = \frac{3\pi}{2}\ . \end{aligned}$$

• 例 2. $R > 0$ を定数とする．$C_R = \{x^2 + y^2 = R^2\}$．$D_R = \{x^2 + y^2 \leq R^2\}$ とすると $C = \partial D$．線積分

$$I_R = \int_{C_R} \frac{-y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy$$

の計算．C_R は $x = R\cos\theta, y = R\sin\theta$ とパラメータ表示される．$dx = x'(t)dt = -R\sin t dt$, $dy = y'(t)dt = R\cos t dt$ だから R は分母分子に R^2 の形で現れて約分されてしまうから

$$\begin{aligned} I_R &= \int_0^{2\pi} \{-\sin\theta(-\sin\theta) + \cos\theta(\cos\theta)\}d\theta \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

となる．この積分は $R>0$ が何であってもいつでも 2π なのである．$D_{\varepsilon,R}:\varepsilon^2\le x^2+y^2\le R^2$ とするとGreen の公式から

$$\begin{aligned}0=2\pi-2\pi&=\left(\int_{C_R}-\int_{C_\varepsilon}\right)\{-\sin\theta(-\sin\theta)+\cos\theta(\cos\theta)\}d\theta\\&=\iint_{D_{\varepsilon,R}}\left\{\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)_x-\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)_y\right\}dxdy\\&=0\end{aligned}$$

である．一方，関数

$$P(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}\ ,\ Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$$

は原点で特異点を持っているから，P, Q は D の内部で C^1 級であるという Green の公式の仮定が満たされない．このとき，P, Q は原点に特異点を持っている（分母 $=0$）ことを無視して**原点以外**の点では $Q_x-P_y=0$ を満たすからといって強引に Green の公式を適用すると

$$2\pi=I=\iint_{D_R}\left\{\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)_x-\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)_y\right\}dxdy=0\quad(\,?!\,)$$

となって矛盾に陥ってしまう．$P(x,y)$, $Q(x,y)$ が考えている領域内で C^1 級という仮定が崩れている場合に Green の公式が成り立つかどうかは，特異点の強さによって結果が異なる．だから，問題ごとにチェックしなければならない．

- 例 3. 単純閉曲線 C が囲む面積 A を線積分で表す公式がある．A は反時計回りの線積分

$$A=\frac{1}{2}\int_C -ydx+xdy=\int_C xdy=-\int_C ydx\ .$$

に等しい．なぜなら，Green の公式から

$$A=\iint_D dxdy$$

となるからである．たとえば楕円 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（反時計回りの向き）とする．楕円 C が囲む領域の面積 A を線積分で計算してみる．楕円を

$$x=a\cos t\ ,\ y=b\sin t\quad(0\le t<2\pi)$$

とパラメータ表示する．面積は

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{2}\int_C -ydx+xdy\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\{(-b\sin t)(-a\sin t)+(a\cos t)(b\cos t)\}dt\\&=\frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}dt=\pi ab\ .\end{aligned}$$

この計算を利用した「面積計」という道具がある（写真は面積計で検索をかけると出てくる）．

- 線積分の物理的解釈.
  平面上の力の場

$$F(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$$

があり質量 m の粒子が経路 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ $(t \in [a, b])$ にそってこの力が働く中で運動しているとする．たとえば，重力場のもとでの落下運動（たとえば，太陽のまわりを回る惑星の運動も含まれる）を想像してほしい．力 $(P(x, y), Q(x, y))$ を曲線 γ の接線方向と法線方向に分解したときの接線方向の成分は

$$(P(x, y)x'(t) + Q(x, y)y'(t))\frac{1}{|\gamma'|}$$

で表される [1]．これを移動距離に関して積分したもの

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \{P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\}\frac{1}{|\gamma'(t)|}|\gamma'(t)|dt \\
=& \int_a^b \{P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\}dt \\
=& \int_\gamma P(x, y)dx + Q(x, y)dy
\end{aligned}$$

は，力の場が運動する粒子に対してした仕事 W である．したがって，線積分

$$\int_\gamma P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

は，実は仕事 W と解釈できる．これに運動方程式

$$F = m\gamma''$$

を代入して計算してみる．速度を速度らしい記号で $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) = (v_1(t), v_2(t))$ と書くと

$$\begin{aligned}
&P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) \\
=& m(v_1'(t)v_1(t) + v_2'(t)v_2(t)) \\
=& \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(v_1^2(t) + v_2^2(t))
\end{aligned}$$

である．したがって

$$\begin{aligned}
W &= \int_\gamma P(x, y)dx + Q(x, y)dy \\
&= \frac{m}{2}\int_a^b \frac{d}{dt}(v_1^2(t) + v_2^2(t))dt \\
&= \frac{m|v|^2(b)}{2} - \frac{m|v|^2(a)}{2}
\end{aligned}$$

となり，なされた仕事は運動エネルギーの差に等しいという，力学における**仕事の原理**が導かれた．とくに，働く力が運動方向につねに直交していれば運動エネルギーは不変である（たとえば太陽のまわりを円軌道で回転する惑星は等速円運動する）．

- 例 4. ある 2 変数関数 $f(x, y)$ が在って，力 $F(x, y)$ が

$$F(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \tag{†}$$

---

[1] 何とか方向の成分という言葉はいろいろな場面でよく使われる言葉なのでここで解説しておく．これは二次元ベクトルの x 成分とは何かを考えるとわかりやすい．平面ベクトル $\mathbf{v}$ の x 成分とは内積 $(\mathbf{v}, \mathbf{e}_1)$ のことである．同様に $\mathbf{v}$ の $\gamma'(t)$ 方向の成分とは内積 $(\mathbf{v}, \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|})$ のことである．要するに，$\mathbf{v}$ のある方向への成分とは，その方向の単位ベクトル（長さ 1 のベクトル）と $\mathbf{v}$ との内積のことである．

で与えられるとする．たとえば引力の場合を考えればよい．このとき閉経路 $C:\gamma(t)=(x(t),y(t))$ $(a\leq t\leq b)$ に沿って運動するときに力がなす仕事は $P(x,y)=f_x(x,y)$, $Q(x,y)=f_y(x,y)$ のときの線積分

$$W=\int_C f_x dx+f_y dy$$

で与えられる．$\dfrac{d}{dt}f(\gamma(t))=f_x(\gamma(t))x'(t)+f_y(\gamma(t))y'(t)$ だから

$$W=\int_a^b \frac{d}{dt}f(\gamma(t))dt=f(\gamma(b))-f(\gamma(a))$$

である．したがって，(†) で与えられる力の元では，仕事は端点を固定したまま経路をとりかえることで不変である．

- **課題：**

領域 $D=\{(x,y)\,|\,x+y\leq 2,\ y\geq x^2\}$ の境界 ∂D に反時計回りの向き（領域 D を左手に見る向き）を入れる．線積分

$$\int_{\partial D} y^2dx+x^2dy$$

を直接計算した結果と，グリーンの公式によって 2 重積分にして計算した結果が一致することを確認せよ．