力学 1

第11回目

力学１　課題７

1. x 軸上を運動する質量 m の質点があり，ばねによる復元力 $-m\omega^2 x$ 、空気による抵抗力$-2m\gamma\dot{x}$ および 外力 $mF_0\cos\omega_0 t$ が働いている.

   (1) 質点の運動方程式を x に関する微分方程式として示せ.

   (2) (1) の運動方程式の一般解を求めよ.

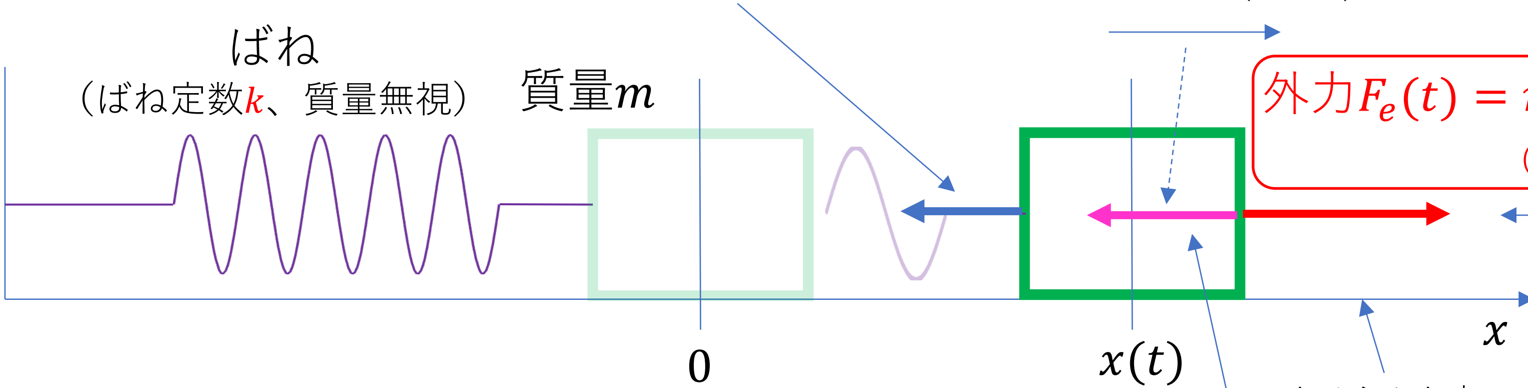
課題7

ばねの復元力＋周期的な外力＋抵抗力

1.

ばねによる復元力$F_r(t) = -kx(t)$
$= -m\omega^2 x$

運動方向（$\dot{x} > 0$）の場合



外力$F_e(t) = mF_0 \cos\omega_0 t$
（周期的な外力）

ばねが自然長の時の物体の位置

なめらかな床

空気による抵抗力 $\vec{F}_V$

（大きさは速さに比例すると仮定）

$F_V = -2m\gamma\dot{x}$

運動方程式 $F(t) = m\ddot{x} = F_r(t) + F_V(t) + F_e(t)$

$$= -m\omega^2 x - 2m\gamma\dot{x} + mF_0\cos\omega_0 t$$

ばねの復元力＋周期的な外力＋抵抗力

運動方程式　$m\ddot{x} = -m\omega^2 x - 2m\gamma\dot{x} + mF_0\cos\omega_0 t$

移項して整理

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = F_0\cos\omega_0 t \qquad ①$$

微分方程式の解法の常套手段を使うため
①の右辺（xの入っていない項）を0と置いた微分方程式を作っておく。

$$\ddot{x}_1 + 2\gamma\dot{x}_1 + \omega^2 x_1 = 0 \qquad ②$$

これは　減衰振動の運動方程式 と同じ

①の一般解は、②の一般解と①の特殊解の和である。

減衰振動の運動方程式の一般解
（第7回講義で導出した）

これを求めれば①の一般解が
求まる。

$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = F_0 \cos \omega_0 t$ の特殊解の導出方法

（第８回目講義スライドを再掲）

ばねの復元力＋周期的な外力＋抵抗力

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = F_0 \cos\omega_0 t \quad ①$$ の特殊解は？

以前の講義で、強制振動を考える際に、

$\ddot{x} + \omega^2 x = F_0 \cos\omega_0 t$ の特殊解として、

$x(t) = C\cos\omega_0 t$ と仮定してうまくいった。

今回は、①に $\dot{x}$ が入っているので、上の形を使うと、

$\cos\omega_0 t$ と $\sin\omega_0 t$ が混ざってしまう。

①に代入して計算すると、

$$\frac{C(\omega^2 - {\omega_0}^2) - F_0}{2C\gamma\omega_0} = \tan\omega_0 t$$

左辺は定数なので、どのような定数 C をとったとしても、すべての t でこの式が成立するようにはできない。

それなら、はじめから $\cos\omega_0 t$ と $\sin\omega_0 t$ の混ざった形を仮定して

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

とおいてみる。

A：定数　B：定数

ばねの復元力＋周期的な外力＋抵抗力

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

代入

$$\dot{x} = -A\omega_0\sin\omega_0 t + B\omega_0\cos\omega_0 t$$

$$\ddot{x} = -A{\omega_0}^2\cos\omega_0 t - B{\omega_0}^2\sin\omega_0 t$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = F_0\cos\omega_0 t \quad ①$$

$$-A{\omega_0}^2\cos\omega_0 t - B{\omega_0}^2\sin\omega_0 t$$

$$-2\gamma A\omega_0\sin\omega_0 t + 2\gamma B\omega_0\cos\omega_0 t$$

$$+A\omega^2\cos\omega_0 t + B\omega^2\sin\omega_0 t = F_0\cos\omega_0 t$$

整理

$$\{-A{\omega_0}^2 + 2\gamma B\omega_0 + A\omega^2 - F_0\}\cos\omega_0 t$$

$$+\{-B{\omega_0}^2 - 2\gamma A\omega_0 + B\omega^2\}\sin\omega_0 t = 0$$

これが t によらず常に成立するためには、

ばねの復元力＋周期的な外力＋抵抗力

$$\begin{cases} -A{\omega_0}^2 + 2\gamma B\omega_0 + A\omega^2 - F_0 = 0 \\ -B{\omega_0}^2 - 2\gamma A\omega_0 + B\omega^2 = 0 \end{cases}$$

$\alpha \cos\omega_0 t + \beta \sin\omega_0 t$

$= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\sin(\omega_0 t + \delta) \qquad \tan\delta = \dfrac{\alpha}{\beta}$

なので　$\alpha = 0$,　$\beta = 0$

あるいは

$\cos\omega_0 t$ と $\sin\omega_0 t$ は独立な関数なので、それぞれの係数部分が0

これらから A と B を求めると、

$$A = \frac{\omega^2 - {\omega_0}^2}{(\omega^2 - {\omega_0}^2)^2 + 4\gamma^2{\omega_0}^2} F_0$$

$$B = \frac{2\gamma\omega_0}{(\omega^2 - {\omega_0}^2)^2 + 4\gamma^2{\omega_0}^2} F_0$$

ばねの復元力＋周期的な外力＋抵抗力

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = F_0 \cos \omega_0 t \quad ①$$ の特殊解は？

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

AとBに代入

$$= \frac{\omega^2 - \omega_0{}^2}{(\omega^2 - \omega_0{}^2)^2 + 4\gamma^2\omega_0{}^2} F_0 \cos\omega_0 t$$

$$+ \frac{2\gamma\omega_0}{(\omega^2 - \omega_0{}^2)^2 + 4\gamma^2\omega_0{}^2} F_0 \sin\omega_0 t$$

整理

$$= \frac{F_0}{(\omega^2 - \omega_0{}^2)^2 + 4\gamma^2\omega_0{}^2} \{(\omega^2 - \omega_0{}^2)\cos\omega_0 t + 2\gamma\omega_0 \sin\omega_0 t\} \quad ③$$

ばねの復元力＋周期的な外力＋抵抗力

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = F_0 \cos\omega_0 t$$ ①の一般解は、

$$\ddot{x}_1 + 2\gamma\dot{x}_1 + \omega^2 x_1 = 0$$ ②の一般解＋③

$\gamma > \omega$、$\gamma = \omega$、$\gamma < \omega$ で場合分け

1）$\gamma > \omega$

任意定数　任意定数

$$x(t) = A_1 e^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)t} + A_2 e^{\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)t} + ③$$

2）$\gamma = \omega$

任意定数　任意定数

$$x(t) = (A_1 t + A_2)\, e^{-\gamma t} + ③$$

3）$\gamma < \omega$

任意定数　任意定数

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \cos\left(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\, t + \theta\right) + ③$$

$\ddot{x}_1 + 2\gamma\dot{x}_1 + \omega^2 x_1 = 0$ の一般解の導出方法

（第8回目講義スライドを再掲）

2. 減衰振動

運動方程式　$m\ddot{x} = -m\omega^2 x - 2m\gamma\dot{x}$

移項して整理

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad ⑤$$

xに関係しない項が0

⑤の一般解は、常套手段を使って求める。

$x(t) = e^{\alpha t}$ と置いてみる　（αは定数）

⑤に代入すると、

$$\frac{d^2}{dt^2}e^{\alpha t} + 2\gamma\frac{d}{dt}e^{\alpha t} + \omega^2 e^{\alpha t} = 0$$

微分を実行

$$e^{\alpha t}(\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega^2) = 0 \qquad ⑥$$

2. 減衰振動

$$e^{\alpha t}(\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega^2) = 0 \qquad ⑥$$

⑥が常に成立するためには

（⑤の特性方程式）

$$\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega^2 = 0 \qquad ⑦$$

解と係数の関係を用いると、

$$\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \qquad ⑧$$

γ と ω の大小関係により、下の3つの場合がある。

（⑤の特性方程式⑦が）

1. 2つの実数解　　$\gamma > \omega$
2. 重解（1つの実数解）　　$\gamma = \omega$
3. 2つの複素数解　　$\gamma < \omega$

2. 減衰振動

（⑤の特性方程式が）

1. 2つの実数解 $\gamma > \omega$ （抵抗力が大きい場合）

$$\alpha = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$
$$= -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

⑤の一般解は、

任意定数　　任意定数

$$x(t) = A_1 e^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)t} + A_2 e^{\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)t}$$

$|\gamma| > \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$ なので、

$-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} < 0$

$-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} < 0$

どちらの項も減衰する（振動を表す項はない）

過減衰

（⑤の特性方程式が）

2.　重解（1つの実数解）$\gamma = \omega$

$$\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \qquad ⑧$$

$\downarrow$ $\gamma = \omega$

$$\alpha = -\gamma = -\omega$$

$\downarrow$ $x(t) = e^{\alpha t}$に代入

$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0$　⑤

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} = A\,e^{-\omega t} \qquad ⑨$$

は⑤の解になっている

A：任意定数

ところで、⑤の微分方程式の一般解は、$x(t) = C_1\psi_1(t) + C_2\psi_2(t)$の形

$\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$：互いに一次独立な関数

$\downarrow$

⑨と一次独立で⑤の解となるもう一つの関数を見つけなければいけない。

（⑤の特性方程式が）

2. 重解（1つの実数解） $\gamma = \omega$

⑨と一次独立で⑤の解となるもう一つの関数を見つけるために、

ここでも常套手段を使う。

$$x(t) = Ae^{\alpha t} = Ae^{-\gamma t} = A\, e^{-\omega t} \qquad ⑨$$

Aを定数ではなく、 t の関数と考えてみる。

$$x(t) = A(t)\, e^{\alpha t} \qquad ⑩$$

と置いてみる。
（常套手段） （定数変化法）

⑩を⑤に代入（以下を考慮すると）

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{A}e^{\alpha t} + A\alpha e^{\alpha t} \\ \ddot{x} &= \ddot{A}e^{\alpha t} + \dot{A}\alpha e^{\alpha t} + \dot{A}\alpha e^{\alpha t} + A\alpha^2 e^{\alpha t} \\ &= \ddot{A}e^{\alpha t} + 2\dot{A}\alpha e^{\alpha t} + A\alpha^2 e^{\alpha t} \end{aligned}$$

（⑤の特性方程式が）

2. 重解（1つの実数解） $\gamma = \omega$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad ⑤$$

$$\downarrow$$

$$\ddot{A}e^{\alpha t} + 2\dot{A}\alpha e^{\alpha t} + A\alpha^2 e^{\alpha t} + 2\gamma\left(\dot{A}e^{\alpha t} + A\alpha e^{\alpha t}\right) + \omega^2 A e^{\alpha t} = 0$$

$$\downarrow \quad \begin{array}{l} \alpha = -\gamma \\ \omega = \gamma \end{array}$$

$\ddot{A} = 0$ だけが残る。

$$\downarrow \quad t \text{ で2回積分}$$

$$A(t) = A_1 t + A_2$$

任意定数（積分定数）

（⑤の特性方程式が）

2. 重解（1つの実数解） $\gamma = \omega$

$$x(t) = A(t)\, e^{\alpha t}$$ ⑩ に代入すると、

$$x(t) = (A_1 t + A_2)\, e^{\alpha t}$$

$A_1 t\, e^{\alpha t}$ と $A_2 e^{\alpha t}$ は1次独立な2つの解

最初に見つけた解の形

したがって一般解は、

$$x(t) = (A_1 t + A_2)\, e^{-\gamma t} = (A_1 t + A_2)\, e^{-\omega t}$$

臨界減衰

3. 2つの複素数解　$\gamma < \omega$　（抵抗力が小さい場合）

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad ⑤$$

$$\downarrow$$

$x(t) = e^{\alpha t}$ と置いて⑤に代入

$$\downarrow$$

$$\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \qquad ⑧$$

$$\downarrow \ \gamma < \omega$$

$$\alpha = -\gamma \pm i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$$

$x(t) = e^{\alpha t}$ に代入すると、

3. 2つの複素数解　$\gamma < \omega$　（抵抗力が小さい場合）

$$x(t) = A_1 e^{\left(-\gamma + i\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\right)t} + A_2 e^{\left(-\gamma - i\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\right)t}$$

任意定数　　　　任意定数

$$= A_1 e^{-\gamma t} e^{i\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t} + A_2 e^{-\gamma t} e^{-i\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t}$$

オイラーの公式を用いて変形

$$= A_1\, e^{-\gamma t}\left\{\cos\left(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t\right) + i\sin\left(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t\right)\right\}$$

$$+A_2\, e^{-\gamma t}\left\{\cos\left(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t\right) - i\sin\left(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t\right)\right\}$$

整理

$$= (A_1 + A_2)e^{-\gamma t}\cos\left(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t\right)$$

$$+i(A_1 - A_2)e^{-\gamma t}\sin\left(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t\right)$$

3. 2つの複素数解　$\gamma < \omega$　（抵抗力が小さい場合）

$x(t)$ は実数なので、

$$\begin{cases} (A_1 + A_2) = \mathrm{a} \\ (A_1 - A_2) = i\mathrm{b} \end{cases}$$

$(A_1 + A_2) = \mathrm{a}$ ← 実数なので

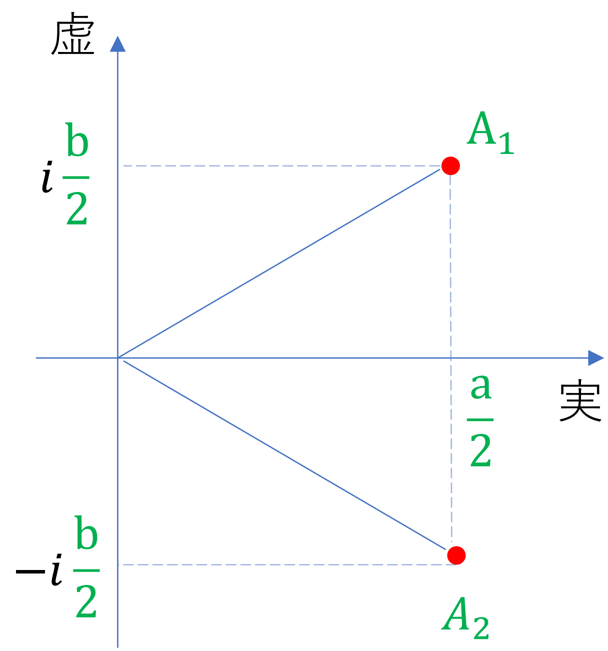
$(A_1 - A_2) = i\mathrm{b}$ ← 虚数なので

（aとb は実数）

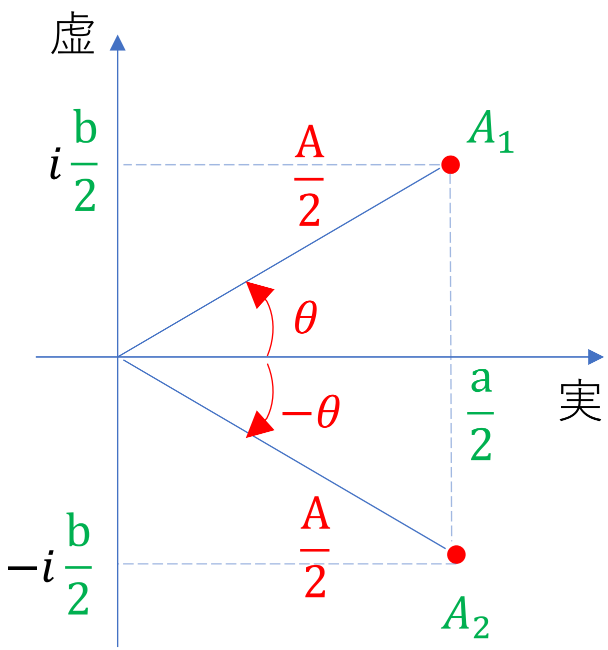
とおく。

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{1}{2}(\mathrm{a} + i\mathrm{b}) \\ A_2 = \dfrac{1}{2}(\mathrm{a} - i\mathrm{b}) \end{cases}$$

A_1とA_2は互いに複素共役



3. 2つの複素数解　$\gamma < \omega$　（抵抗力が小さい場合）



（A_1とA_2は互いに複素共役）

複素平面上の極座標表示を用いて、

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{A}{2}\cos\theta + \dfrac{A}{2}\,i\sin\theta \\[2ex] A_2 = \dfrac{A}{2}\cos\theta - \dfrac{A}{2}\,i\sin\theta \end{cases}$$

とおくと、（Aとθは実数のある定数）

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = A\cos\theta \\[2ex] A_1 - A_2 = iA\sin\theta \end{cases}$$

3. 2つの複素数解　$\gamma < \omega$　（抵抗力が小さい場合）

$$x(t) = (A_1 + A_2)e^{-\gamma t}\cos\left(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\, t\right)$$

$$+ i(A_1 - A_2)e^{-\gamma t}\sin\left(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\, t\right)$$

$$\left.\begin{aligned} A_1 + A_2 &= A\cos\theta \\ A_1 - A_2 &= iA\sin\theta \end{aligned}\right\}$$

$$= A\cos\theta\, e^{-\gamma t}\cos\left(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\, t\right)$$

$$- A\sin\theta\, e^{-\gamma t}\sin\left(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\, t\right)$$

$$= Ae^{-\gamma t}\cos\left(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\, t + \theta\right)$$

（cos の形で書くと）

任意定数　任意定数

力学１　課題８

1. 水平な台の上に質量 m の質点が置かれている．この台がある振幅 A（A は定数）で上下に単振動するとき，質点が台から離れないためには，台の振動の周期 T に条件が必要である．この条件を求めよ．重力加速度の大きさは g とする．

課題8　（第８回目17枚目スライド）

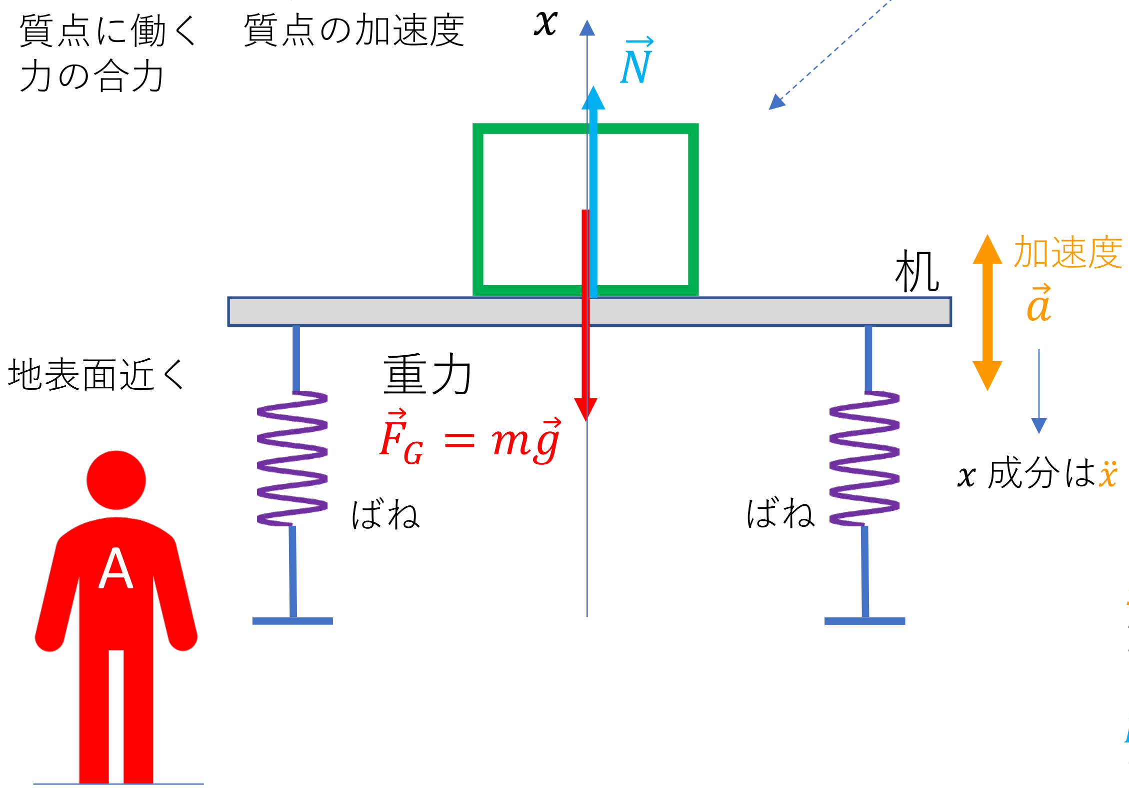
1.

ニュートンの運動の第2法則

（慣性系において）

$$\vec{F} = m\,\vec{a} = m\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

質点に働く力の合力　　質点の加速度



机上の物体は加速運動

↓

物体に働く力の合力は$\vec{0}$ではない

↓ 重力と垂直抗力はつり合わない

$$\vec{F} = m\vec{a} = \vec{F}_G + \vec{N}$$

x 成分　$m\ddot{x} = -mg + N$

↓ 整理

$$N = m(\ddot{x} + g)$$

$\ddot{x} = -g$ で$N = 0$ となり、物体に働く力は重力だけとなって物体は自由落下

$N > 0$ である限り、物体は机から力を受けている。（机からの束縛力を受けている）

課題8

1.

$$N = m(\ddot{x} + g)$$

単振動 →
$$\begin{cases} x = A\sin(\omega t + \theta) \\ \ddot{x} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \theta) \end{cases}$$

$$N = mg - mA\omega^2 \sin(\omega t + \theta)$$

$N > 0$ である限り、物体は机から力を受けている。（机からの束縛力を受けている）

→ 物体が机から力を受けず、接している場合も含め、
今の場合、 $N \geq 0$ を質点が台から離れない条件とすると、

$$N = mg - mA\omega^2 \sin(\omega t + \theta) \geq 0$$

$$\frac{g}{A\omega^2} \geq \sin(\omega t + \theta)$$

tによらず成立するには $\dfrac{g}{A\omega^2} \geq 1$

↓

$$\frac{g}{A\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} \geq 1 \quad \longrightarrow \quad T \geq 2\pi\sqrt{\frac{A}{g}}$$

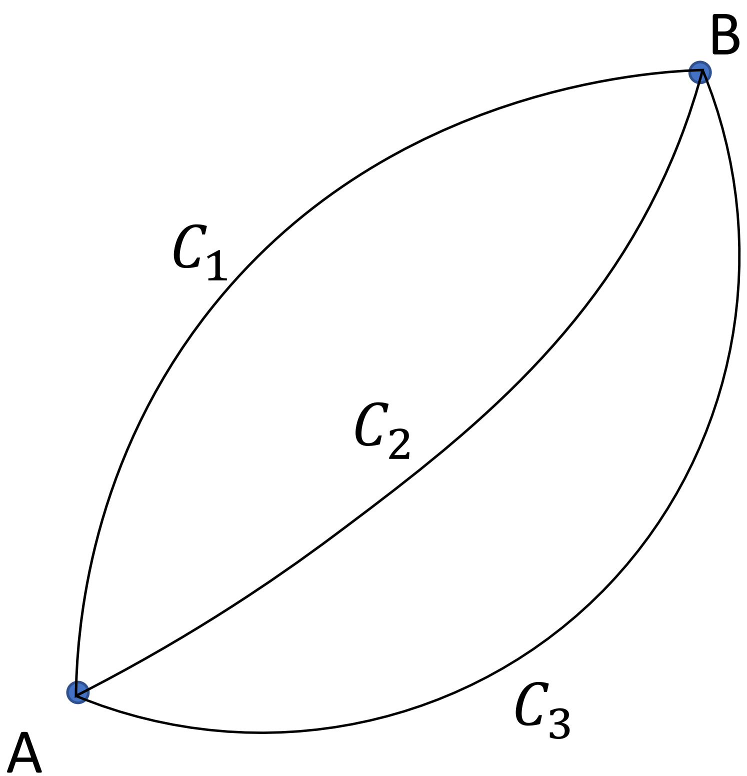
力学 1　課題 9

1. 保存力とはどのような力か簡潔に説明せよ．また、重力以外の保存力の例を挙げよ．

2. **MKS** 単位系において、仕事、運動エネルギー、重力によるポテンシャルの 3 つの物理量の単位を示せ．

保存力とポテンシャル
（位置エネルギー）

保存力とは？



力のする仕事

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Wが経路によらず始点Aと終点Bだけで決まるとき、質点に働く力を**保存力**という。

$$W = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

単位系

MKS単位系

基本単位

長さ：m （メートル）

質量：kg （キログラム）

時間：s （秒）

組立単位

力： $kg \cdot m \cdot s^{-2} = \mathrm{N}$ （ニュートン）

仕事・エネルギー： $kg \cdot m^{2} \cdot s^{-2} = \mathrm{J}$ （ジュール）

圧力： $kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2} = \mathrm{Pa}$ （パスカル）

・
・
・

課題9

1.

その力によってなされる仕事が経路によらず始点Aと終点B
だけで決まるとき、質点に働く力を保存力という。

2.

$\int \vec{F} \cdot d\vec{s}$ [仕事] = [力]・[距離] = [質量]・[加速度]・[距離] $kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$

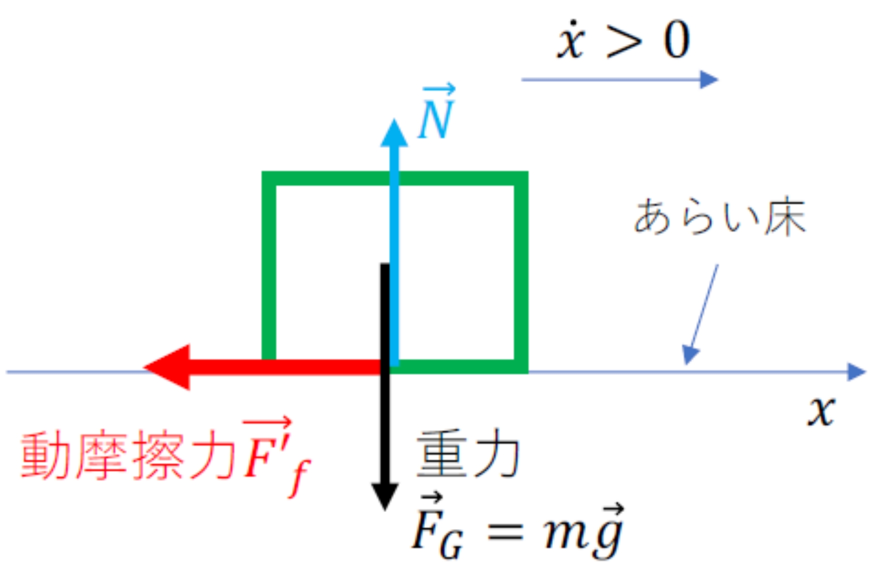
$\frac{1}{2} m\vec{v}^2$ [運動エネルギー] = [質量]・[速度]・[速度] $kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$

mgh [重力によるポテンシャル] = [質量]・[加速度]・[距離] $kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$

J
（ジュール）

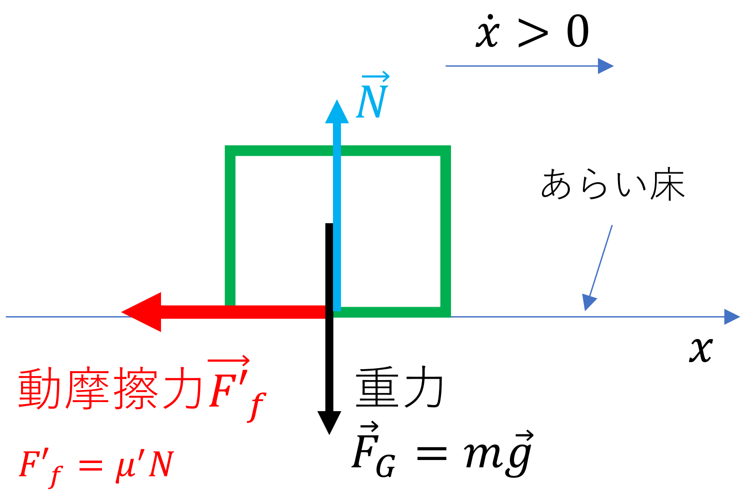
課題9

3. 下図のように、あらい床の上をx軸正の向きに運動している質量 m の物体がある．物体は $t=0$ において、$\dot{x}=v_0$ ($v_0>0$)で運動をはじめた．物体が止まるまでに動摩擦力が物体にした仕事を求めよ（正負に注意）．動摩擦力の大きさは一定とし、動摩擦係数は μ' とする．重力加速度の大きさは g とする．



課題9

3.



動摩擦力F'_fのする仕事W

$$W = \int F'_f dx \xrightarrow{F'_f\text{は一定}} = F'_f \int dx$$

移動距離を求めるために、運動方程式から考えてみる。

$$m\ddot{x} = -\mu' N = -\mu' mg$$

$$\ddot{x} = -\mu' g$$

$$\dot{x} = -\mu' gt + C_1$$

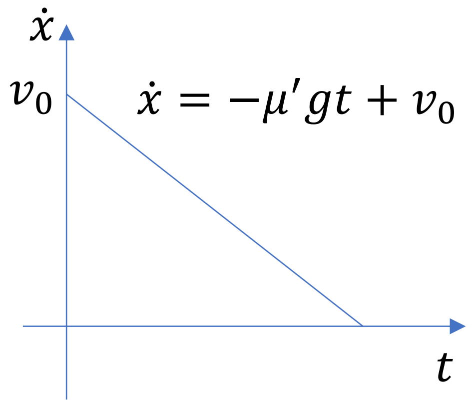
$$x = -\frac{1}{2}\mu' gt^2 + C_1 t + C_2$$

$$\begin{cases} x(0) = 0 \text{ とすると } C_2 = 0 \\ \dot{x}(0) = v_0 = C_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -\mu' gt + v_0 \\ x = -\dfrac{1}{2}\mu' gt^2 + v_0 t \end{cases}$$

課題9

3.



$\dot{x} = 0$ となる時刻は $t = \dfrac{v_0}{\mu' g}$

このときのx は、

$$x = -\frac{1}{2}\mu' g\left(\frac{v_0}{\mu' g}\right)^2 + v_0\frac{v_0}{\mu' g}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{{v_0}^2}{\mu' g}$$

動摩擦力F'_fのする仕事　$W = \int F'_f dx = F'_f \int dx = -\mu' m g \dfrac{1}{2}\dfrac{{v_0}^2}{\mu' g} = -\dfrac{1}{2} m {v_0}^2$

力学的エネルギーの散逸（第10回14枚目スライド）から考えると、

$$E(t_B) - E(t_A) = \int_A^B \vec{F}' \cdot d\vec{r}$$

$$0 - \frac{1}{2} m {v_0}^2 = W$$

力学 1　課題 10

1. 質量 m の質点が振幅 A 、角振動数 ω で単振動を行っている．質点の力学的エネルギーが保存することを示せ.

課題10

1. 単振動 $x = A\sin(\omega t + \theta)$

$$\dot{x} = A\omega\cos(\omega t + \theta)$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2\sin(\omega t + \theta) = -\omega^2 x$$

$$m\ddot{x} = -m\omega^2 x$$

これは復元力$-m\omega^2 x$が働いている場合の運動方程式

$\dot{x}$をかける

$$m\dot{x}\ddot{x} = -m\omega^2 x\dot{x}$$

ポテンシャルは $U = \dfrac{1}{2}m\omega^2 x^2$ $x = 0$ で$U = 0$ とする

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)$$

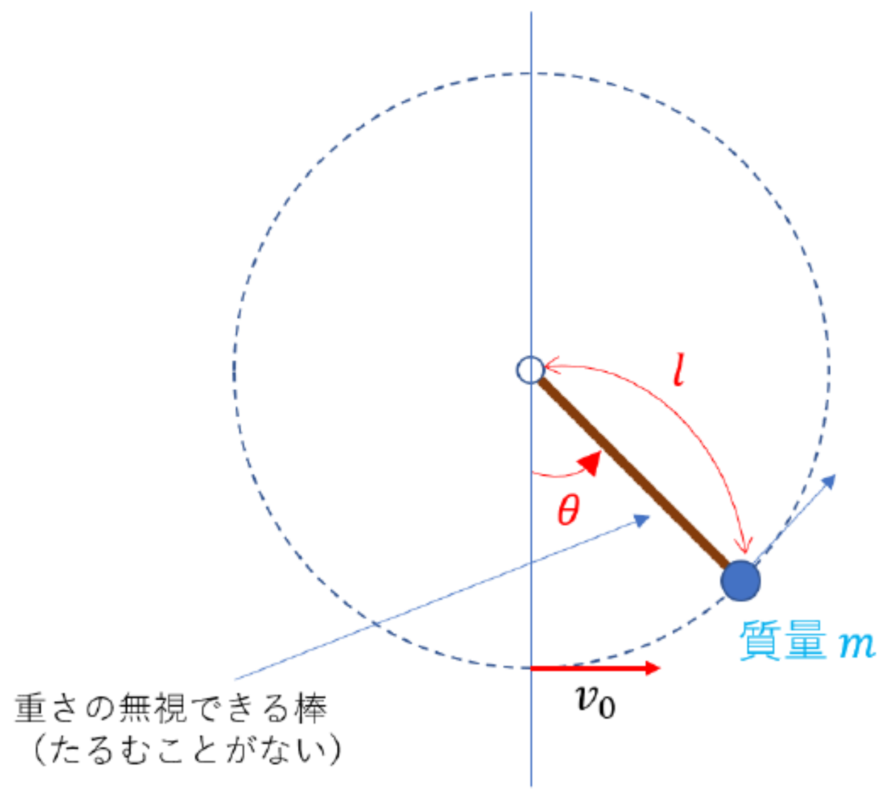
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = E \quad \text{（定数）}$$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U = E$$

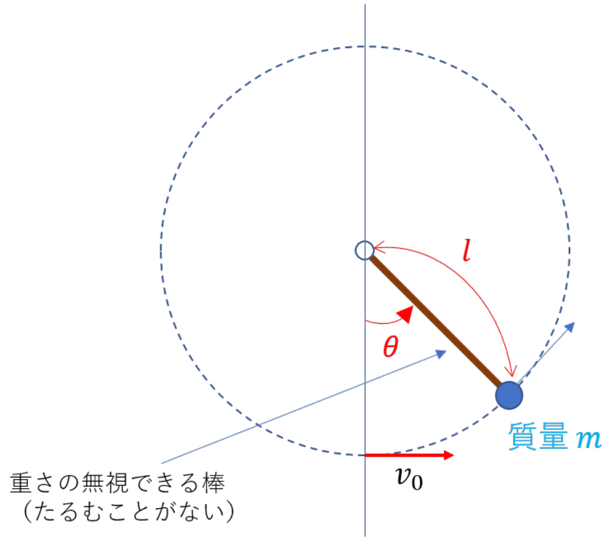
力学的エネルギー保存

2. 下図のように、質量 m の質点が、長さl の質量の無視できる棒（たるむことがない）の先端に固定されている．棒は、もう一方の先端を中心にしてある鉛直面内で回転運動を行う．質点は、最下点（$\theta = 0$）において初速 v_0 で運動をはじめた．質点が最上点（$\theta = \pi$）まで到達するための初速 v_0 の条件を求めよ．また、質点が長さl の質量の無視できる糸につるされている場合に、糸がたるむことなく質点が最上点まで到達するための初速 v_0 の条件と比較せよ．



課題10

2.



運動エネルギーと重力によるポテンシャルの
力学的エネルギー保存により、

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 \geq mg2l$$

$${v_0}^2 \geq 4gl \quad \left(v_0 \geq \sqrt{4gl}\right)$$

（等号は最上点で速さ0の場合）

糸の場合は、第10回（単振り子のエネルギー保存）スライド

${v_0}^2 > 5lg$ （糸が最上点でもたるまない条件）

最上点において、$T = 0$ ではあるが糸は伸びたままの
状態も含めて考えると、

$${v_0}^2 \geq 5lg \quad \left(v_0 \geq \sqrt{5gl}\right)$$

棒の場合は $v = 0$

糸がたるまない場合、最上点での最小の速さは$v = \sqrt{gl}$ であり、
これは重力加速度が向心加速度となる場合である。

$$g = \frac{v^2}{l}$$

力学的エネルギー保存則

一般的には、運動方程式

今は保存力でないものも含む

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

両辺 $\dot{\vec{r}}$ との内積

$$m\ddot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}} = \vec{F}\cdot\dot{\vec{r}}$$

$$\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\vec{r}}^2\right)$$

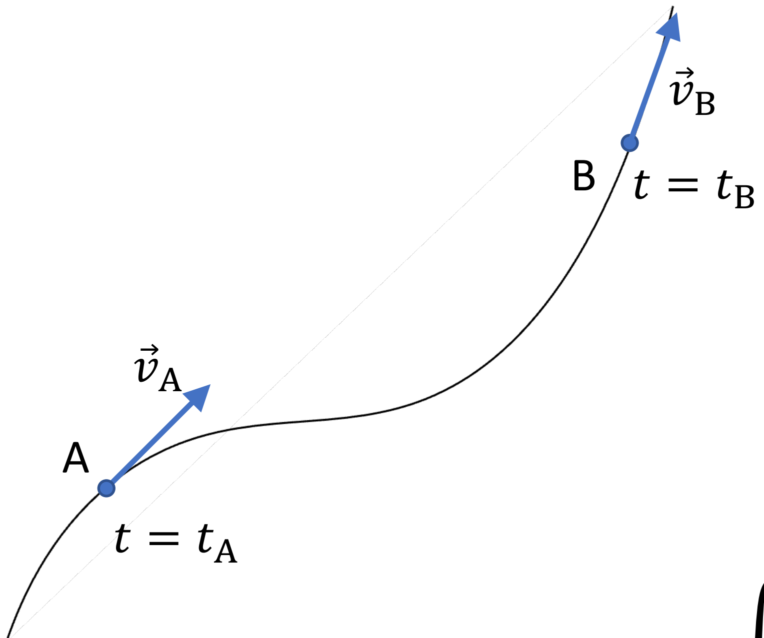
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2\right) = \dot{\vec{r}}\cdot\vec{F}$$

$t = t_\mathrm{A}$ から $t = t_\mathrm{B}$ まで積分すると

$$\int_{t_\mathrm{A}}^{t_\mathrm{B}} \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2\right)dt = \int_{t_\mathrm{A}}^{t_\mathrm{B}} \dot{\vec{r}}\cdot\vec{F}dt$$

A → B で $\vec{F}$ のする仕事

$$\frac{m}{2}{\vec{v}_\mathrm{B}}^2 - \frac{m}{2}{\vec{v}_\mathrm{A}}^2 \qquad \int_{t_\mathrm{A}}^{t_\mathrm{B}} \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}dt = \int_\mathrm{A}^\mathrm{B}\vec{F}\cdot d\vec{r} = W$$



$G(x) = \int F_x(x)dx$ とおいてみると

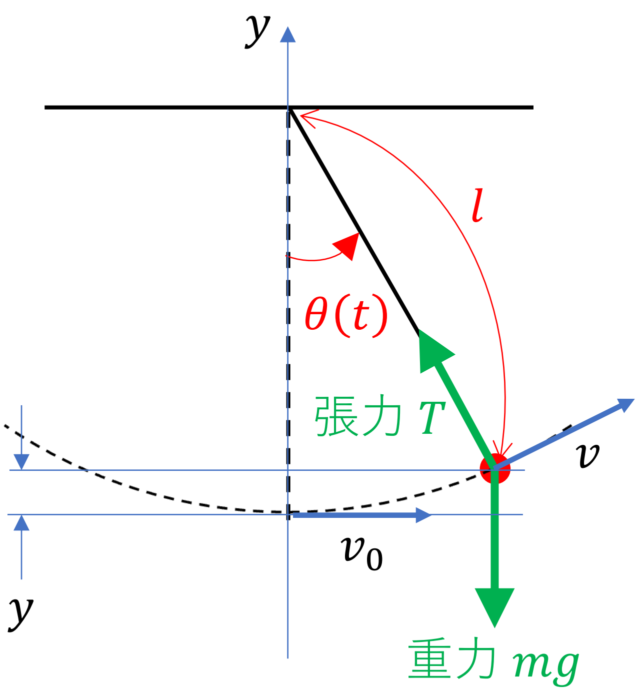
$$\frac{dG}{dt} = \frac{dG}{dx}\frac{dx}{dt} = F_x(x(t))\frac{dx}{dt}$$

$$\int_{t_\mathrm{A}}^{t_\mathrm{B}}\frac{dG}{dt}dt = \int_{t_\mathrm{A}}^{t_\mathrm{B}} F_x(x(t))\frac{dx}{dt}dt$$

||

$$G(x(t_\mathrm{B})) - G(x(t_\mathrm{A})) = G(\mathrm{B}) - G(\mathrm{A}) = \int_\mathrm{A}^\mathrm{B} F_x(x)dx$$

単振り子の力学的エネルギー保存



$\theta = 0$ で $U = 0$ とする
（最下点がポテンシャルの基準点）

張力 T は運動方向と垂直

↓

張力 T は仕事をしない

↓

力学的エネルギーの増減に関係しない

重力のポテンシャル

$$U = mgy$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = E$$

↓ $\theta = 0$ で $U = 0$ より、$E = \frac{1}{2}m{v_0}^2$

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = \frac{1}{2}m{v_0}^2$$

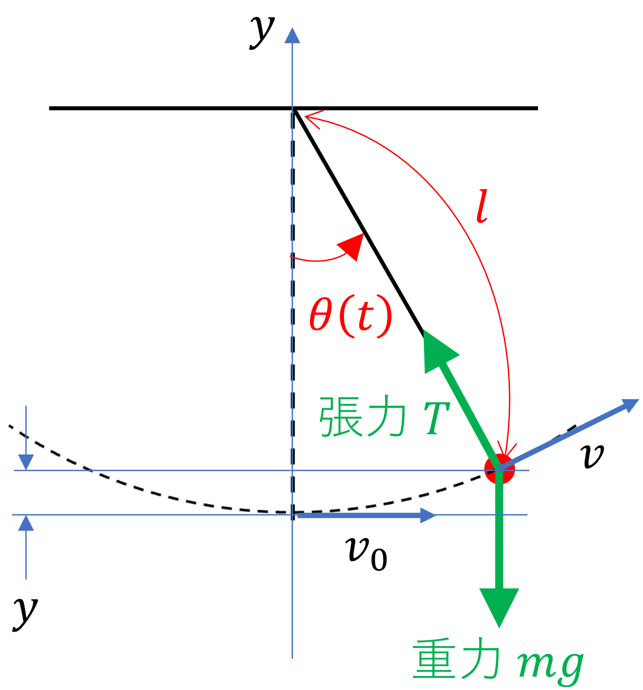
↓ $y = l - l\cos\theta = l(1-\cos\theta)$

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgl(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}m{v_0}^2$$

↓ 整理

$$v^2 = {v_0}^2 - 2gl(1-\cos\theta)$$

単振り子の力学的エネルギー保存



$$v^2 = {v_0}^2 - 2gl(1 - \cos\theta)$$

法線方向の運動方程式（第4回目26枚目）

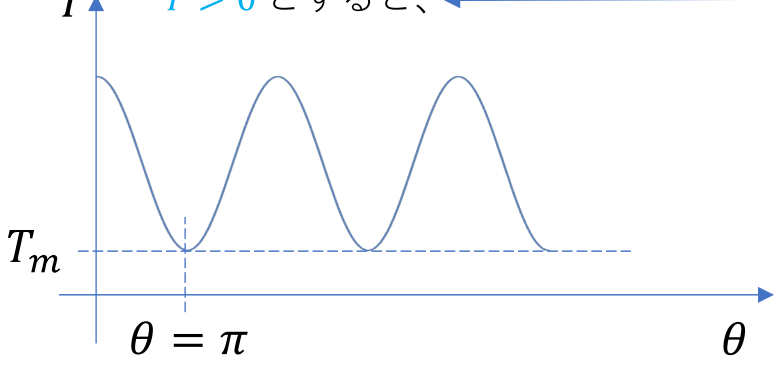
$m\dfrac{v^2}{l} = T - mg\cos\theta$ に上式を代入

$$\frac{m}{l}\left({v_0}^2 - 2gl(1 - \cos\theta)\right) = T - mg\cos\theta$$

$$T = m\frac{{v_0}^2}{l} - 2mg + 3mg\cos\theta$$

（$T = 0$ で糸はたるむ）

$T > 0$ とすると、



$\theta = \pi$ では

$$T = T_m = m\frac{{v_0}^2}{l} - 5mg$$

$T_m > 0$ であるためには、

$$m\frac{{v_0}^2}{l} - 5mg > 0 \longrightarrow {v_0}^2 > 5lg$$

（糸が最上点でもたるまない条件）