第 5 回講義：偏微分と全微分について（その 2）（教科書 3.15）．

全微分の概念を理解するため，方向微分の考え方，勾配ベクトルの考え方を学ぶ．応用例として，方向微分の考え方で幾何的に解ける 1 階偏微分方程式を取り上げる．

• パラメータ表示

$$x = a + tl \ , \ y = b + tm$$

で与えられる直線上に C^1 関数 $f(x, y)$ を制限して

$$z(t) = f(a + tl, b + tm)$$

とおくとチェインルールから

$$\frac{dz}{dt} = lf_x(a + tl, b + tm) + mf_y(a + tl, b + tm)$$

である．

• C^1 関数 $f(x, y)$ の点 A における (l, m) 方向への**方向微分**とは

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0} \frac{f(a + tl, b + tm) - f(a, b)}{t} \\
&= \left(l\frac{\partial}{\partial x} + m\frac{\partial}{\partial y}\right) f(A) \\
&= lf_x(A) + mf_y(A) \\
&= (l, m) \cdot (f_x(A), f_y(A))
\end{aligned}$$

のことと定義する．ここで，右辺は 2 つのベクトル (l, m) と $(f_x(A), f_y(A))$ の内積である．

• これは，前回導入した**全微分**

$$df = f_x dx + f_y dy$$

を点 A で考え，不定ベクトルとして $l\mathbf{e}_1 + m\mathbf{e}_2$（点 A において関数 f を微分する方向）を考えたものである．

• ベクトル $(f_x(A), f_y(A))$ を関数 f の点 A における**勾配ベクトル**とよび，$\nabla f(A)$ という記号で表す．

このように，C^1 関数 f の (l, m) 方向への方向微分は偏微分の 1 次式

$$lf_x(A) + mf_y(B)$$

で表される．

• 方向微分と勾配ベクトルの定義と Schwarz の不等式 $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$ から，勾配ベクトルの幾何的意味がわかる：勾配ベクトルは曲線 $f(x, y) = f(A)$ に A において直交するベクトルである．勾配ベクトル方向の単位ベクトル

$$\frac{\nabla f(A)}{|\nabla f(A)|}$$

は関数 f がもっとも急に変化する（もっとも勾配が急な）方向である．ここでベクトルを絶対値記号で囲んだものはベクトルの長さを表す記号である．

•（例）地形図に描かれている等高線に直角な方向が，もっとも勾配が急な方向である．

• **方向微分** $= 0$ **と解釈する**ことによって**幾何的に解ける 1 階偏微分方程式**の例．

(1)

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \ \Rightarrow \ z = g(x - y) \ .$$

(2) 原点以外で

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0 \ \Rightarrow \ z=g(\theta)\ .$$

(3)

$$-x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0 \ \Rightarrow \ z=g(xy)\ .$$

なぜ解けるのか，理由を述べる：

(1) $(1,1)$ 方向の方向微分が零だから，その方向に (x,y) を動かしても $z=f(x,y)$ は変化しない．すなわち $z=f(x,y)$ は，任意の傾き $=1$ の直線に制限すると定数関数になっている．したがって，任意の k に対して直線 $y=x+k$ 上で一定値をとる．ということは，問題の関数 z の点 (x,y) における値は直線 $y=x+k$ の y 切片 $k=y-x$ だけで決まる．したがって $z=g(y-x)$ と表される．ここで g は C^1 級の 1 変数関数なら何でもよい．

(2) (x,y) においてベクトル (x,y) は原点を通る半直線方向のベクトルである．この方向の方向微分が零だから $z=f(x,y)$ はこの半直線上で一定である．よって $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とすると z は偏角 θ だけの関数である．したがって $x=g(\theta)$ と表される．ここで $g(\theta)$ は C^1 級 1 変数関数で周期 2π をもつものなら何でもよい．

これを極座標で確認する．$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ にチェインルールを適用すると

$$\frac{\partial}{\partial r}=\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial}{\partial y}=\frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{y}{r}\frac{\partial}{\partial y}=\frac{1}{r}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

だから，極座標で表した $z=z(r,\theta)$ に対して $z_r=0$ したがって z は変数 r によらない．これは $z=g(\theta)$ の形であることを意味する．

(3) この問題は xy 座標系で $\nabla z\cdot\binom{-x}{y}=0$ と表される．したがって点 (x,y) において $(-x,y)$ 方向に z は微分が消えるような関数である．平面の各点 (x,y) において $(-x,y)$ 方向の矢印を付随させる絵を描くと，矢印の方法に常に接するような曲線族は $xy=c$ （c は定数）のように見える．そこで $z=g(xy)$ と置いてみると $z_x=g'(xy)y$, $z_y=g'(xy)x$ である．よって $-xa_x+yz_y=-xg'(xy)y+yg'(xy)x=0$ だから確かに $z=g(xy)$ の形の関数は解になっている．

これを「擬似極座標」（ここだけの言葉）を使って確認する．作業はチェインルールのいい練習問題だ．$x=u(\cosh t+\sinh t)$, $y=u(\cosh t-\sinh t)$ によって擬似極座標 (u,t) を導入すると

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial}{\partial y}=u(\sinh t+\cosh t)\frac{\partial}{\partial x}+u(\sinh t-\cosh t)\frac{\partial}{\partial y}=x\frac{\partial}{\partial x}-y\frac{\partial}{\partial y}$$

だから，問題の関数を独立変数に u,t をとって表すと $z_t=0$ である．したがって $z=g(u^2)=g(xy)$ の形である [1]

- **課題**：教科書の問 15.4, 15.5.

この教科書で最も難しい演習問題だと思います．必要なら以下をヒントに解いてください：

ヒント

15.4 (3) $z_x-z_y=0$ ということは $z=z(x,y)$ という関数の $(1,-1)$ 方向への方向微分が常にゼロということです．従って，$z(x,y)$ は傾きが -1 の直線に沿って一定の値をとります．傾きが -1 の直線の一般形は $x+y=$ 一定 です．だから関数 z は (x,y) に依存しますが，実は $x+y$ だけに依存しています．または，$z(x,y)=z(0,x+y)=z(x+y,0)$ なので $z(x,y)$ の値は点 (x,y) を通る傾き -1 の直線の x または y 切片で決まる，と考えてもいい．このことから，関数 $z=z(x,y)$ の一般形が導けます．

[1] 偏微分という概念は独立変数が決まっていないと意味を持たない．平面上の関数 (s_1,t) と (s_2,t) を異なる独立変数の組だとと思う時，t による偏微分というものは独立変数が (s_1,t) なのか (s_2,t) なのかによって異なる．実際，(s_1,t) を独立変数と思った時の $(\frac{\partial}{\partial t})_{s_1,t}$ と (s_2,t) を独立変数と思った時の $(\frac{\partial}{\partial t})_{s_2,t}$ は同じものではない．チェインルールを用いて計算してみると $(\frac{\partial}{\partial t})_{s_2,t}=(\frac{\partial s_1}{\partial t})_{s_1,t}(\frac{\partial}{\partial s_1})_{s_1,t}+(\frac{\partial t}{\partial t})_{s_1,t}(\frac{\partial}{\partial t})_{s_1,t}=(\frac{\partial s_1}{\partial t})_{s_1,t}(\frac{\partial}{\partial s_1})_{s_1,t}+(\frac{\partial}{\partial t})_{s_1,t}\neq(\frac{\partial}{\partial t})_{s_1,t}$ である．

15.4 (4) 同様に (x, y) において $(-y, x)$ 方向への微分がゼロです．原点を中心に持つ円周 C は $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ で表されます．するとチェインルール（合成関数の微分公式）から

$$h(t) = z(a\cos t, a\sin t) \quad (a \text{ 定数})$$

に対して

$$h'(t) = z_x(-a\sin x) + z_y(a\cos t) = a(-yz_x + xz_y) = 0$$

です．これは C の点 (x, y) における $(-y, x)$ 方向への z の方向微分は常に 0 であることを意味します．したがって $z(x, y)$ は原点中心の任意の円周上で値が一定でなければいけません．このことから関数 z の一般形が導けます.

以上のように，与えられた方向微分 $= 0$ 型の一階偏微分方程式からどういう曲線（または直線）に沿って関数 $z = z(x, y)$ は一定なのかを明らかにすることによって解ける，というのが問 15.4 のパターンです.

15.5 (1) $z_x = z_y$ だから **15.4** (3) より $z = g(x + y)$ の形． $t = x + y$ とおくと $z_x + z_y = 4(x + y)$ は $2g'(t) = 4t$ となります．まず，これを示してください.

別解．与えられた二つの式を z_x, z_y の連立一次方程式だと思って解く．そこから z の形を決めていく.

15.5 (2) $-yz_x + xz_y = 0$ だから **15.4** (4) により $z = g(x^2 + y^2)$ の形．$t = x^2 + y^2$ とおくと $xz_x + yz_y = 2z$ は $xg'(t)(2x) + yg'(t)(2y) = 2g(t)$ したがって $tg'(t) = g(t)$ となります．まず，これを示してください．これが示されれば $g'(t)/g(t) = 1/t$ です．これから，関数 z の形を決められます.

別解．与えられた二つの式を z_x, z_y の連立一次方程式だと思って解く．そこから z の形を決めていく.