第 4 回講義：偏微分と全微分について（その 1）（教科書 3.14,3.15）．

• 今回からの 4 回のテーマは，変数が複数ある関数の微分法がテーマである．変数の個数が有限個なら 2 変数の場合で大事なことは全て出てくるので，以下では 2 変数関数の場合だけを取り上げて解説する．

• 第一回目の今回は，1 変数関数に対する「微分可能」の定義の 2 変数版である**全微分可能**という概念を導入してその意味と基本的な演算を解説する．

• 偏微分係数と偏導関数の定義．関数 $f(x, y)$ は自由に動く変数 (x, y) の関数とする．y を止めて x だけの関数と思って x で微分する操作を $\frac{\partial f}{\partial x}$, f_x などと書き，1 点で考えるときには**偏微分係数**とよび，点に依る関数と思うときには**偏導関数**とよぶ．x を止めて y で微分する操作を，$\frac{\partial f}{\partial y}$, f_y などと書く．

• 1 点で偏微分可能であっても，その点で連続とは限らない．

例．$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} \ ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 \ ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$ は $(0, 0)$ で偏微分可能だが連続ではない．応用上こんなことを気にする必要はない．ここで述べたことは「各変数ごとに偏微分できること」を持って,「一変数の場合の微分可能の概念の二変数の場合への拡張」には**ならない**ことを納得してもらうための議論である．

• 偏導関数の計算例．2 変数関数 $f(x, y)$ の計算は，例えば f_x なら，y を定数とみなして x で微分するだけで，新しいものではない．$f(x, y)$ を以下のとおりとする．(1) x^2y^3　(2) $x^2 + xy + y^2$　(3) $\sqrt{x^2 + y^2}$ (4) $\arctan \frac{y}{x}$.

このとき，(1) $f_x = 2xy^3$, $f_y = 3x^2y^2$. (2) $f_x = 2x + y$, $f_y = x + 2y$. (3) $f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. (4) $f_x = \frac{-y/x^2}{1+(y/x)^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $f_y = \frac{1/x}{1+(y/x)^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$.

•（定義）(1) $D \subset \mathbb{R}^2$ が**開集合**であるとは，任意の $A \in D$ に対して十分小さい $\varepsilon > 0$ をとると $\{X \in \mathbb{R}^2 \,|, |X - A| < \varepsilon\} \subset D$ となっているような集合のことと定義する．たとえば周を含まない円板は開集合である．開集合は開区間の 2 次元版と考えてよい．

(2) $F \subset \mathbb{R}^2$ が**閉集合**であるとは，$\mathbb{R}^2 \setminus F$ が開集合であることと定義する．

• （定義）[1](1) $f(x, y)$ が $A = (a, b)$ で**全微分可能** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$f(X) = f(A) + f_x(A)(x - a) + f_y(A)(y - b) + |X - A|\,\varepsilon\ ,$$
$$\lim_{X \to A} \varepsilon = 0$$

ただし

$$|X - A| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

である．三平方の定理により，$X - A$ は，2 点 A と X の間の距離，つまり線分 $\overline{AX}$ の長さである．

もちろん，上の定義は

$$\lim_{X \to A} \frac{|f(X) - f(A) - f_x(A)(x - q) - f_y(A)(y - b)|}{|X - A|} = 0$$

と同値である．

(2) 関数 $f(x, y)$ の点 $X = (x, y)$ における**全微分**とは

$$(df)_X = f_x(X)dx + f_y(X)dy$$

[1] 変数が一個の場合の微分は $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ という商の極限を考えた．変数が二個以上だとこの考え方はうまくいかない．なぜなら $x - a$ はベクトルであって，ベクトルによる割り算が定義できないからである．複素数ではこのベクトルは複素数だから割り算ができるが，この意味での微分可能関数は正則関数とか解析関数と呼ばれるものになり，例えば $f(x, y) = x - iy$ はこの意味では微分できない．この意味での微分可能性から始まる数学が数理科学全分野で応用上重要な複素解析である．そこで一変数の微分可能の概念を多変数の場合に一般化した概念として**全微分**という概念を導入する．

のことである．ここで X は全微分を取る場所（点）を表す．

全微分可能な関数の方向微分とそのイメージ： 点 $A=(a,b)$ を通りベクトル (λ,μ) に平行な直線（点 A を通り速度ベクトルが (λ,μ) で与えられる等速直線運動する点と言えばイメージがもっとはっきり思い浮かべられるかも知れない）は

$$\gamma(t)=(a+\lambda t,\quad b+\mu t)$$

と表される．もちろん，$\gamma(t)$ の x 座標，y 座標は t の関数であり，それらの関数が $a+\lambda t,\, b+\mu t$ と表される，という意味である．関数 $f(x,y)$ をこの直線に制限すると 1 変数関数

$$f(\gamma(t))$$

を得る．関数 $f(x,y)$ の点 A における (λ,μ) 方向への方向微分は

$$\left.\frac{d}{dt}f(\gamma(t))\right|_{t=0}$$

のことである．関数 $f(x,y)$ が全微分可能なら

$$f(\gamma(t))=f(A)+f_x(A)\lambda t+f_y(A)\mu t+o(|t|)$$

が成り立つ．したがって

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{d}{dt}f(\gamma(t))\right|_{t=0}\\
&=\lim_{t\to 0}\frac{f(\gamma(t))-f(\gamma(0))}{t}\\
&=\lim_{t\to 0}\frac{\{f(A)+f_x(A)\lambda t+f_y(A)\mu t+o(|t|)\}-f(A)}{t}\\
&=\lambda f_x(A)+\mu f_y(A)
\end{aligned}$$

である．だから全微分可能な関数の方向微分は，二つの偏微分 $f_x(A),\, f_y(A)$ さえわかれば，どの方向の微分も上の公式で計算できる．

全微分と方向微分の関係：抽象的な $dx,\, dy$ に平面ベクトル $V=(\lambda,\mu)$ の x 成分，y 成分を入れると，関数 $f(x,y)$ の点 A における (λ,μ) 方向への方向微分

$$\lambda f_x(A)+\mu f_y(A)$$

を与える．したがって，$dx,\, dy$ とは，不定ベクトルの x 座標，y 座標のことであり，df は方向を定めない f の方向微分のことである．実際の微分の計算では，$dx,\, dy$ は，微分する方向を表すベクトルの x 座標，y 座標を意味する．

●（定義）2 変数関数 $f(x,y)$ が C^1 **級**であるとは，2 つの偏導関数 $f_x(x,y)$ および $f_y(x,y)$ が両方とも存在して連続であることと定義する．

C^1 級の定義が重要なのは，次の定理があるから．

以下の定理が，今回の主定理：

●（定理）C^1 級 $\Rightarrow$ 全微分可能：$f(x,y)$ は開集合 D 上で C^1 級とする．このとき $f(x,y)$ は D の各点で全微分可能である．すなわち，$A(a,b), X(a,b)\in D$ に対し

$$f(X)=f(A)+f_x(A)(x-a)+f_y(A)(y-b)+|X-A|\,\varepsilon$$

とおくと

$$\lim_{X\to A}\varepsilon=0$$

である．

$\lim_{X\to A}\varepsilon = 0$ という条件がわかりにくいかもしれない．$\varepsilon = \varepsilon(X, A)$ 自身が $|X - A|$ くらいの大きさを持つのが典型的な場合である．

（定理の意味：全微分と接平面）

(1) 1 次式
$$z = f(A) + f_x(A)(x - a) + f_y(A)(y - b)$$
は平面を表すが，定理はこの平面が $(a, b, f(a, b))$ の近傍で曲面 $z = f(x, y)$ の **1 次近似式**になっていることを示している．したがって，曲面 $z = f(x, y)$ のグラフの点 $(a, b, f(a, b)) = (A, f(A))$ における**接平面**が定義できて，それは 1 次式
$$z = f(A) + f_x(A)(x - a) + f_y(A)(y - b)$$
で与えられる．

(2) $X = A$ において x が $\Delta x = x - a$ 増加し，y が $\Delta y = y - b$ 増加するとき，z は $\Delta z = f(X) - f(A)$ だけ増加する．関数 $f(X)$ が全微分可能（例えば $f(X)$ が C^1 級）なら
$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}(A)\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}(A)\Delta y + \varepsilon|X - A|$$
である．ここで「誤差項」$\varepsilon|X - A|$ は $X = (x, y)$ の $A = (a, b)$ からの変化 $|X - A|$ よりずっと小さい．$|X - A|$ が小さい時，それよりずっと小さい（典型的にはその 2 乗程度の大きさを持つ）が複雑な「誤差項」$\varepsilon|X - A|$ を落としたものが，曲面 $z = f(X)$ の $(A, f(A))$ における接平面の方程式である．したがって，1 次近似式
$$\Delta z \fallingdotseq \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$
が成り立つ．これは応用上非常に重要な 1 次近似式である．

(3) 全微分可能ならば連続：$f(x, y)$ が点 A で全微分可能ならば $f(x, y)$ は点 A で連続である．実際
$$\begin{aligned}\lim_{X\to A}|f(X) - f(A)| = \lim_{X\to A}&|f_x(A)(x - a) + f_y(A)(y - b)\\ &+ |X - A|\,\varepsilon = 0\end{aligned}$$
なぜなら $X \to A$ のとき $|x - a| \to 0$, $|y - b| \to 0$, $|X - A| \to 0$, $\varepsilon \to 0$ だからである．

● 例[2]．曲面 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ の点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ における接平面を求めよう．$x = y = 1/2$ のとき
$$z = \sqrt{1 - (1/4) - (1/4)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ ,$$
$$z_x = -\frac{2x}{2\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,$$
$$z_y = -\frac{2y}{2\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$
である．よって接平面の方程式は
$$(\dagger)\qquad z - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(y - \frac{1}{2}\right)$$
である．もちろん，これを整理して $\frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) + z - \sqrt{2} = 0$ とか $z = \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$ と書いていい．しかし，1 次近似式として使いたいときには (†) のままの方が，以下の計算の意味がわかっていいと思う．$x = y = \frac{1}{2}$ において x が 0.002 増加し y が 0.001 減少するとき z は 0.0007 減少する．実際
$$(\ddagger)\qquad \Delta z = -\frac{1}{\sqrt{2}}(0.002 - 0.001) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \times (0.001) = -0.0007$$

[2] 解説動画で接平面の方程式が間違っていると言っているが，それは間違いで，訂正の必要はない．

である．ここで Δz は $z-\frac{1}{\sqrt{2}}$, Δx は $x-1$, Δy は $y-1$ に対応している．(‡) は，点 $(1,1)$ から x が 0.002 増加し，y が 0.001 減少したときに，$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ は $f(1,1)=\sqrt{2}$ からどのくらい変化するかを接平面の方程式を使って近似計算したことになっている．

（定理の証明）：$D\subset\mathbb{R}^2$ は開集合だから，3 点 $A(a,b)$, $X(x,y)$, $P(a,y)$ を，線分 $\overline{AP}$, 線分 $\overline{PX}$ が D にすっぽり入るようにとることができる．

$$f(X)=f(A)+\{f(X)-f(P)\}+\{f(P)-f(A)\}$$

だから平均値の定理より

$$f(X)-f(A)=f_x(Q)(x-a)+f_y(R)(y-b)$$

となるような線分 PX 上の点 Q と線分 AP 上の点 R が存在する．

$$\varepsilon_1=f_x(Q)-f_x(A)\ ,\ \varepsilon_2=f_y(R)-f_y(A)$$

とおくと，ε の定義式

$$f(X)=f(A)+f_x(A)(x-a)+f_y(A)(y-b)+|X-A|\,\varepsilon$$

において

$$|X-A|\,\varepsilon=\varepsilon_1(x-a)+\varepsilon_2(y-b)$$

である．よって $r=|X-A|$ とおくと

$$\varepsilon=\left|\varepsilon_1\frac{x-a}{r}+\varepsilon_2\frac{y-b}{r}\right|\le|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|$$

である．$X\to A$ のとき $Q\to A$, $R\to A$ だから f_x, f_y の連続性により $\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0$ である． □

• （系．合成関数の微分公式，チェインルール）．$z=f(x,y)$ は C^1 級，$x=x(t)$, $y=y(t)$ ともに微分可能ならば $z=h(t)=f(x(t),y(t))$ について

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

が成り立つ．

証明：t が Δt 増加するとき x,y,z がそれぞれ $\Delta x,\Delta y,\Delta z$ 増加するとせよ．定理より

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(x(t)+\Delta x,y(t)+\Delta y)-f(x(t),y(t))\\&=f_x(x(t),y(t))\Delta x+f_y(x(t),y(t))\Delta y\\&\quad+\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\varepsilon(\Delta t)\end{aligned}$$

と表されて，$\Delta t\to 0$ のとき $\Delta x,\Delta y\to 0$ だから $\varepsilon(\Delta t)\to 0$ である．よって $\Delta t\to 0$ とすると

$$\begin{aligned}\frac{\Delta z}{\Delta t}&=f_x(x(t),y(t))\frac{\Delta x}{\Delta t}+f_y(x(t),y(t))\frac{\Delta y}{\Delta t}\\&\quad\pm\varepsilon(\Delta t)\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}\\&\quad\to f_x(x(t),y(t))\frac{dx}{dt}+f_y(x(t),y(t))\frac{dy}{dt}\end{aligned}$$

である． □

今回の要約. 一変数関数の微分可能の概念を二変数の場合に拡張した概念が全微分である．今回は全微分可能な関数がどういう性質を持つかを述べた．一言で言えばグラフ $z=f(x,y)$ が接平面を持つこと（したがって各点の近傍で一次関数で近似できる）が全微分可能性の意味である．

• **課題**：教科書の問 15.1, 15.2, 15.3.