

## 2017 年度 7 月 25 日微分積分学 I テスト

- 以下の 6 題の問題から 4 題を選んで答えよ.
- 解答用紙に氏名, 学籍番号, 選んだ問題番号と解答を書くこと. 解答が複数枚のときには各解答用紙に氏名と学籍番号を書くこと.
- 解答を書く際には答だけでなく答に至った理由または途中式も論理的かつ簡潔に書くこと.

1. 次の漸化式で定義される数列  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  の収束発散を判定し, 収束する場合は極限値を求めよ.

$$(1) a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{2}{a_n} \right) \quad (2) a_1 > 0, a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$$

2.  $e$  を  $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$  で定義する. 次の問に答えよ.

(1)  $2.5 < e < 3$  を示せ.

(2)  $e$  は無理数であることを示せ.

ヒント:  $n!e$  は, ある整数に  $\frac{1}{n+1} \left( 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots \right)$  を加えたものである.

3. 次の問に答えよ.

(1)  $n$  を自然数とする. 関数  $f(x) = x^n e^{-x}$  ( $x \geq 0$ ) の最大値を求めよ.

(2)  $n$  を自然数とする. ロピタル計算を使わない初等的方法で極限  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x}$  を求めよ.

(3) 関数  $f(x) = x^n e^{-x}$  ( $x \geq 0$ ) のグラフの概形を描け.

(4) 積分  $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$  の値を求めよ.

4. 次の問に答えよ.

(1)  $t$  が実数全体を動くとき, 点  $\left( \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \frac{e^t - e^{-t}}{2} \right)$  が描く曲線はどのような曲線か? 曲線が満たす方程式を求め, 概形を描け.

(2)  $t$  が 0 から 1 を動くとき, 2 点  $(0, 0)$  と  $\left( \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \frac{e^t - e^{-t}}{2} \right)$  を結ぶ線分が通過する領域を図示し, その面積を求めよ.

5. テイラー公式を用いて, 次の極限の値を求めよ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{\sin x} \right) \quad (3) \lim_{x \rightarrow \infty} x \log \frac{x}{1+x}$$

6. (1) 積分  $\int_0^1 \sqrt{1 + \sqrt{x}} dx$  の値を求めよ. ヒント:  $\sqrt{x} = t$  とおいてから部分積分.

(2) 積分  $\int_1^{\infty} \left( \log \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1} \right) dx$  の値を求めよ. この値は正か負か?