第七回課題解説.

教科書の問 7.1. (3) $y=\arcsin(1-2x^2)$ $(-1\le x\le 1)$ を微分すると $\sqrt{x^2}=|x|$ だから

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-(1-2x^2)^2}}\times(1-2x^2)'=\frac{-4x}{\sqrt{4x^2(1-x^2)}}=\frac{-2x}{2|x|\sqrt{1-x^2}}=\frac{-2\,\mathrm{sgn}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

である．一方 $(\arcsin x)'=\frac{1}{1-x^2}$ であった．よって $y=\arcsin(1-2x^2)$ のグラフは $y=\pm\arcsin x$ のグラフを縦方向に二倍に引き伸ばしたものである．$y=\arcsin x$ のグラフは sine curve（$y=\sin x$ のグラフ）と合同だから，$y=\arcsin(1-2x^2)$ のグラフは，sine curve を縦にして二倍に引き伸ばして繋ぎ合わせることによって出来上がっているはずである．こういうことを，$y=\arcsin(1-2x^2)$ の増減表を書いてそこからグラフを描く前に，考えるといい．こういうことを念頭においた上で作図したものが，別紙に描いたグラフである．

解答は，例えば次のように書けばいいと思う．

$f(x)=\arcsin(1-2x^2)$ $(-1\le x\le 1)$.

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-(1-2x^2)^2}}\times(-4x)=\frac{1}{\sqrt{4x^2(1-x^2)}}\times(-4x)=\frac{1}{2|x|\sqrt{1-x^2}}\times(-4x)=-\frac{2\,\mathrm{sgn}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

である．一方 $g(x)=\arcsin x$ とおくと $g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ である．よって $y=f(x)$ のグラフは $y=\pm\arcsin x$ のグラフを縦方向に二倍に引き伸ばしたものを繋ぎ合わせできている．$f(\pm1)=\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$, $f(0)=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$, $x<0$ なら $f'(x)=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}>0$ であり，$x>0$ なら $f'(x)=-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}<0$ だから，グラフは別紙のようになる．なお，$\lim_{x\to0-}f'(x)=2$, $\lim_{x\to0+}f'(x)=-2$ だから，グラフは点 $(0,\frac{\pi}{2})$ で尖っている．

2. (1) 奇数次の方程式は実数解を少なくとも一つ持つことの証明.

問題の方程式を

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

とする．ここで n は奇数である．関数 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ のグラフが x 軸と交わる点が方程式 $f(x)=0$ の実数解である．

$$f(x)=x^n\left(1+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{x^n}\right)$$

と変形することにより，任意の $0<\varepsilon<1$ に対して十分大きい N を取れば $|x|>N$ を満たす全ての x に対して中括弧の中身は $1-\varepsilon$ より大きい（括弧の中身は $x\to\infty$ とすると 1 に収束するから）．したがって $|x|>N$ のとき，もし $x<0$ なら $x^n<0$ で括弧の中身は $1-\varepsilon$ より大きい．もし $x>0$ なら $x^n>0$ で括弧の中身は $1-\varepsilon$ より大きい．よって $|x|$ が十分大きいとき，$x<0$ なら $f(x)<0$ であり，$x>0$ なら $f(x)>0$ である．よって，ある負の数 A で $f(A)<0$, ある正の数 B で $f(B)>0$ となるものが存在する．よって中間値の定理により $f(x)=0$ は少なくとも一つの実数解を区間 (A,B) 内に持つ．

(2) $x^5+3x+3=0$ はただ一つの実数解を持つことの証明．(1) により問題の方程式は少なくとも一つの実数解を持つ．もし二つあったとして，それを A,B とする．$A<B$ と仮定していい．$f(A)=f(B)=0$ なので Rolle の定理により $A<C<B$ で $f'(C)=0$ となるものが存在する．しかし任意の $x\in\mathbb{R}$ に対し $f'(x)=5x^4+3>3$ なので，$f'(x)=0$ は実数解を持たない．これは矛盾である．よって $f(x)=0$ の実数解の個数は 1 である．