2024 年度微分積分学 I 期末レポート問題（基本的には七題選択．七題以上解答した場合は点数が最大になる七題を選択したとみなし，場合によっては $A+$ を進呈します）

提出締切：2024 年 8 月 13 日

1. 次の関数の導関数を求めよ（途中式も書くこと）．

(1) $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$.

(2) $f(x) = \arctan(\tanh x)$.

(3) $f(x) = \arctan \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x$. ただし $-1 < x < 1$ とする．

ヒント：(2) $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ に対して $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$, $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$, $(\cosh x)^2 + (\sinh x)^2 = \cosh(2x)$. これらの公式を使うと計算が楽になるかも．

2. 次の関数の n 次導関数を求めよ（途中式も書くこと）．

(1) $f(x) = \dfrac{ax+by}{cx+dy}$. ただし，$ad - bc \neq 0$, $c \neq 0$ とする．

(2) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$.

(3) $f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x$.

ヒント：(1) 部分分数分解.

(2) 分子を $1+x$ の多項式に書き換える：$x^2 = \{(1+x) - 1\}^2 = \ldots.$

(3) $\cos^4 x + \sin^4 x = (\cos^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\cos^2 x \sin^2 x$ と $\sin(2x) = 2\cos x \sin x$ と $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$ を使うといいかも.

3. (1) 関数

$$f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$$

の $x = 0$ のまわりでのテイラー公式を

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(\theta x)}{4!}x^4$$

の形に書きくだせ．ただし，$\theta \in (0,1)$ はそのままでいい．

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^3}\left\{\sqrt{1+x} - q(x)\right\}$ が存在するような x の 2 次式 $q(x)$ を決定して，そのときの極限を求めよ．

4. 次の極限を，ロピタル計算を使わないで，例えば，関数 x^a, e^x の $x \to \infty$ の時の振舞を調べるという，より基本的な議論だけで求めよ：

(1) a を任意の正の実数とするとき

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^a}{e^x} .$$

(2) a を任意の正の実数とするとき

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x^a} .$$

5. 以下の二題のうち一題を選択して答えよ．

5-1. $s > 0$ を定数とする．次の問に答えよ．

(1) 積分

$$I(R) = \int_0^R (\sin x) e^{-sx} dx$$

の値を求めよ．ヒント：部分積分．

(2) 極限値

$$\lim_{R\to\infty} I(R)$$

を求めよ．

5.2. 広義積分

(1)
$$\int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx$$

と

(2)
$$\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx$$

の収束発散を判定して値を求めよ．

6. 次の定積分

(1)
$$\int_0^1 \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx$$

(2)
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \arccos x\,dx$$

(3)
$$\int_0^1 \arctan x\,dx$$

の値を求めよ．

7. (1) 積分

$$\int_1^\infty \left(\log\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x+1}\right)dx$$

の値を求めよ．

(2) 上の積分の値は正か負か？答だけでなく考え方も書くこと．

8. $\alpha\in\mathbb{R}$ で $x\in\mathbb{R}$ は $|x|<1$ を満たすとせよ．このとき数列 $\{c_n\}_{n=0}^\infty$ を

$$c_n=\left|\binom{\alpha}{n}x^n\right|$$

によって定義する．ここで

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$$

は一般二項係数である．

(1) $\varepsilon>0$ を $|x|\le 1-\varepsilon$ となるようにとる．ある自然数 n_0 が存在して $\forall n\ge n_0$ に対して

$$|c_{n+1}/c_n|<\frac{1-\varepsilon}{1-\frac{\varepsilon}{2}}$$

が成り立つことを証明せよ．

(2) 極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

9. 一般二項定理

$$(1+x)^a=\sum_{n=0}^\infty\binom{a}{n}x^n \quad (a\text{ が非負整数でない時は }|x|<1)$$

を用いて，$\sqrt[3]{9}=9^{\frac{1}{3}}$ の値を小数第三位まで求めよ．考え方と途中計算も書くこと．

期末テスト解説.

1. (1) $f(x) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ の導関数の計算：

$$f'(x) = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\ .$$

(2) $f(x) = \arctan(\tanh x)$ の導関数の計算：ヒントを使うと

$$f'(x) = \frac{1}{1+\tanh^2 x} \cdot \frac{1}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x + \sinh^2 x} = \frac{1}{\cosh(2x)}\ .$$

(3) $f(x) = \arctan \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x$（ただし $-1 < x < 1$）の導関数の計算：

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\right) - \frac{1}{1-x^2} \\ &= (1-x^2)\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{1-x^2} = 0\ . \end{aligned}$$

もちろん，逆三角関数の定義に戻って三角形の絵から図形的に確認してもいい.

2. (1) $f(x) = \dfrac{ax+by}{cx+dy} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{(b-\frac{ad}{c})y}{cx+dy}$ の n 次導関数. $f'(x) = \dfrac{(bc-ad)y}{c}\dfrac{(-1)c}{(cx+dy)^2}$, $f''(x) = \dfrac{(bc-ad)y}{c}\dfrac{2c^2}{(cx+dy)^2}, \dots$ だから

$$f^{(n)}(x) = \frac{(bc-ad)y}{c}\frac{c^n n!(-1)^n}{(cx+dy)^n}\ .$$

(2) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x} = \dfrac{(1+x-1)^2}{1+x} = 1+x-2+\dfrac{1}{1+x}$ の n 次導関数. $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{(1+x)^2}$, $n \geq 2$ なら

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}\ .$$

(3) $f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\cos^2 x \sin^2 x = 1 - \dfrac{(2\cos x \sin x)^2}{2} = 1 - \dfrac{\sin^2(2x)}{2} = 1 - \dfrac{1-\cos(4x)}{4} = \dfrac{3}{4} + \dfrac{\cos(4x)}{4}$ の n 次導関数. $\cos x$ を 1 階微分するたびに偏角が $\dfrac{\pi}{2}$ 増えるから，合成関数の微分公式から

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}\frac{\cos(4x)}{4} = 4^{n-1}\cos\left(4x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad (n \geq 1)$$

3. テーマ：関数 $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$ の $x=0$ のまわりでのテイラー公式と，極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left\{\sqrt{1+x} - q(x)\right\}$ が存在するような 2 次式 $q(x)$ および問題の極限の計算.

(1) 関数 $f(x) = (1+x)^{1/2}$ の $x=0$ を中心とするのテイラー公式は

$$\begin{aligned} f(x) = (1+x)^{1/2} &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)x^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)x^3 \\ &\quad + \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)(1+\theta x)^{1/2-4}x^4 \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}(1+\theta x)^{-\frac{7}{2}}x^4 \quad (0 < \exists\theta < 1) \end{aligned}$$

である．

(2) $(1+x)^{1/2}-q(x)$ の $x=0$ を中心とするテイラー公式に x の冪が 2 以下の項があれば $\lim_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{1/2}-q(x)}{x^3}$ は明らかに発散する．したがって問題の極限が発散しないためには，$q(x)$ は $(1+x)^{1/2}$ の 2 次のテイラー多項式をキャンセルするものでないといけない．だから $q(x)=1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2$ でないといけない．このとき，問題の極限は

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/2}-q(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}(1+\theta x)^{-\frac{7}{2}}x^4}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{16}-\frac{5}{128}(1+\theta x)^{-\frac{7}{2}}x\right)=\frac{1}{16}$$

である．

4. (2) $y=a\log x$ とおくと $x^a=e^y$ だから (2) を y の式で表すと $\dfrac{1}{a}\lim_{y\to\infty}\dfrac{y}{e^y}$ となって (1) の特別な場合に帰着する．以下で (1) の極限が 0 であることを示す（したがって極限 (2) も 0 である）．$f(x)=e^{-x}x^{a+1}$ を考える．$f'(x)=-e^{-x}x^{a+1}+e^{-x}(a+1)x^a=e^{-x}x^a(a+1-x)$ だから，$x\geq 0$ の時，関数 $f(x)$ は $x=a+1$ で最大値 $f(a+1)=e^{-a-1}(a+1)^{a+1}$ をとる．したがって $f(x)\leq f(a+1)$ である．これは，$x>0$ のとき，$e^{-x}x^{a+1}\leq f(a+1)$ したがって $0<e^{-x}x^a\leq\frac{f(a+1)}{x}$ が成り立つことを意味する．右辺 $\frac{f(a+1)}{x}\to 0$ $(x\to\infty)$ だから，挟み撃ちの原理によって $\lim_{x\to\infty}e^{-x}x^a=0$ である．

5-1. (1) 部分積分を二回実行すると

$$\begin{aligned}I(R)&=\int_0^R(\sin x)e^{-sx}dx=[(-\cos x)e^{-sx}]_0^R-s\int_0^R(\cos x)e^{-sx}dx\\&=(-\cos R)e^{-sR}+1-s((\sin R)e^{-sR}+sI(R))\end{aligned}$$

となるから

$$I=\frac{1+(-\cos R)e^{-sR}-s(\sin R)e^{-sR}}{1+s^2}\ .$$

(2) $s>0$ だから $\lim_{R\to\infty}I(R)=\dfrac{1}{1+s^2}$ である．

5-2. 収束は $|e^{-x}\cos x|\leq e^{-x}$, $|e^{-x}\sin x|\leq e^{-x}$ と $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}dx=[-e^{-x}]_0^\infty=1$ からわかる．値を求めるには部分積分が有効である．

$$\int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx=[-e^{-x}\cos x]_0^\infty-\int_0^\infty(-e^{-x})(-\sin x)\,dx=-1-\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx=-1-\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx\ .$$

$$\int_0^\infty\sin x\,dx=[-e^{-x}\sin x]_0^\infty-\int_0^\infty(-e^{-x})\sin x\,dx=\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx\ .$$

この二本の式を $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx$ と $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx$ に関する連立一次方程式だと思って解くと

$$\int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx=\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx=\frac{1}{2}$$

である．

noindent **6.** (1)（解答例 1）$t=\sqrt{1+\sqrt{x}}$ という置き換えを考える．このとき，$t^2=1+\sqrt{x}$ だから，x の区間 $[0,1]$ は t の区間 $[1,\sqrt{2}]$ に対応する．また，$\sqrt{x}=t^2-1$, $x=(t^2-1)^2$ だから $dx=2t(t^2-1)\cdot 2tdt$ である．したがって

$$\int_0^1\sqrt{1+\sqrt{x}}dx=\int_1^{\sqrt{2}}(t^2-1)4tdt=4\int_1^{\sqrt{2}}(t^4-t^2)dt=4\left[\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right]_1^{\sqrt{2}}=\frac{8}{15}(\sqrt{2}+1)\ .$$

（解答例 2）$\sqrt{x}=t$ とおくと $x=t^2$ だから $dx=2tdt$ であり x の区間 $[0,1]$ は t の区間 $[0,1]$ に対応する．問題の積分は $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+\sqrt{x}}dx = 2\int_0^1 \sqrt{1+t}\cdot tdt$ となる．右辺に部分積分を適用すると

$$2\left[\frac{4}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}t\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}dt = \frac{8\sqrt{2}}{3} - 2\left[\frac{2}{3}\frac{2}{5}(1+t)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{8}{15}(\sqrt{2}+1)$$

だから結局

$$\int_0^1 \sqrt{1+\sqrt{x}}dx = \frac{8}{15}(\sqrt{2}+1)$$

である．

(2) $\displaystyle\int \log x\, dx = x\log x - x$ によく似た部分積分．

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \arccos x\, dx = [x\arccos x]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} x\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3} - \left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right]_0^{1/2} = \frac{\pi}{6} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

(3) $\displaystyle\int \log x\, dx = x\log x - x$ によく似た部分積分．

$$\int_0^1 \arctan x\, dx = [x\arctan x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}[\log(1+x^2)]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2\ .$$

7. (1) 問題は 1 から ∞ での積分だから，x の動く範囲は $x>0$ で考えていい．$\log x$ の不定積分は $x\log x - x$ であることを用いて $\log\dfrac{x}{1+x} + \dfrac{1}{x+1}$ の不定積分を（積分定数を無視して）計算すると

$$(x\log x - x) - \{(x+1)\log(x+1) - x\} + \log(x+1) = x\log\frac{x}{1+x}$$

である．問題の積分は極限の問題に帰着する．その極限は $\infty\times 0$ の不定形であるが，$\frac{0}{0}$ の不定形に書き直してロピタル計算すると

$$\begin{aligned}
\left[x\log\frac{x}{1+x}\right]_0^\infty &= \lim_{x\to\infty} x\log\frac{x}{1+x} - \log\frac{1}{2} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\log\frac{x}{1+x}}{\frac{1}{x}} + \log 2 \overset{\text{ロピタル}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{x^2}} + \log 2 \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x+1} + \log 2 = -1 + \log 2\ .
\end{aligned}$$

答は $2<e$ なので $-1+\log 2<0$ であるが，実は積分する前から負であることが以下のように考えるとわかる：$|x|<1$ のとき $\log(1-x) = -x - x^2 - x^3 - \ldots$ だから $x>0$ のとき

$$\log\frac{x}{1+x} = \log\left(1-\frac{1}{1+x}\right) = -\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x}\right)^3 - \ldots$$

だから

$$\log\frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x}\right)^3 - \ldots$$

である．だから積分する前から負だったのである．もちろん $2<e$ だから (2) の答えは負，という答案は正解である．

8. 問題の数列

$$c_n := \left|\binom{\alpha}{n} x^n\right|$$

の隣接二項間の比

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = |x|\left|\binom{\alpha}{n+1}\Big/\binom{\alpha}{n}\right| = |x|\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!}\frac{n!}{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}\right| = |x|\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|$$

を考える．$|x| < 1$ だから $|x| \leq 1-\varepsilon$ となる $\varepsilon > 0$ が存在する．このような $\varepsilon > 0$ を一つとって以下の議論ではそれを固定する．一方 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| = 1$ だから，ある番号 n_0 があって，$n > n_0$ なら $\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| \leq \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{2}}$ である（ここがポイント！）．よって $n > n_0$ なら

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \leq \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon/2} < 1$$

である．したがって

$$c_n = c_1\prod_{k=1}^{n_0}\frac{c_{k+1}}{c_k}\prod_{k=n_0+1}^{n}\frac{|c_{k+1}|}{|c_k|} < c_1\left(\prod_{k=1}^{n_0}\frac{c_{k+1}}{c_k}\right)\left(\frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon/2}\right)^{n-n_0} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

である．これは $|x| < 1$ なら

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0$$

であることを意味している．

9. 一般二項定理を使って $9^{1/3}$ の近似値を小数第三位まで求める．

$$\begin{aligned}
9^{1/3} &= (2^3+1)^{1/3} = 2\left(1+\frac{1}{8}\right)^{1/3}\\
&= 2\left\{1+\frac{1}{3}\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)\frac{1}{8^2}+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\frac{1}{8^3}+\ldots\right\}\\
&= 2(1+0.04166\cdots-0.001753\cdots+\ldots) = 2.080\ldots\ .
\end{aligned}$$

この形から，打ち切りによって小数第三位に影響はないことがわかる．