**第 3 回講義**：テイラー公式の応用：ニュートン法について（教科書には載っていないが応用上非常に重要）

中間値の定理を用いることにより，根の公式のない方程式を 2 分法で解く（解の近似値つまり近似解を求める）ことができる．二分法とは次の方法である：$f(x)$ を $[a,b]$ 上の連続関数とし，$f(a) < 0 < f(b)$ と仮定する．解きたい方程式は $f(x) = 0$ である．中間値の定理より $f(x) = 0$ は $(a,b)$ に少なくとも一つ解を持つ．もし $f(\frac{a+b}{2}) > 0$ なら再び中間値の定理から $f(x) = 0$ は $(a, \frac{a+b}{2})$ に少なくとも一つ解を持つ．もし $f(\frac{a+b}{2}) = 0$ なら $x = \frac{a+b}{2}$ は解である．もし $f(\frac{a+b}{2}) < 0$ なら再び中間値の定理より $f(x) = 0$ は $(\frac{a+b}{2}, b)$ に少なくとも一つ解を持つ．この操作を繰り返すことにより解の存在範囲を一つ前のステップの半分の長さの区間に閉じ込めることができる．これが二分法による近似解の構成である．この方法は頑強な方法で任意の連続関数に適用可能である．

一方，$C^2$ 級微分可能な関数に対しては，根の公式のない方程式の解に**非常に速く収束する**数列をつくる**ニュートン法**とよばれる方法があって，広く応用される．今回は，ニュートン法についての解説である．

• 例．$x^3 - 2x - 6 = 0$ を考える．左辺は $x = 2$ で $-2$, $x = 3$ で 15 だからこの方程式には $x = 2$（2 を第 0 次近似と考える）より少し大きい根がある．$x = 2 + p$ とおくと $p^3 + 6p^2 + 10p - 2 = 0$ である．$p^3$, $p^2$ を無視して解くと $p = 0.2$ である．こうして根の第 1 次近似 $x = 2.2$ を得る．次に $x = 2.2 + q$ とおくと $q^3 + 6.6q^2 + 12.52q + 0.248 = 0$ となる．$q^3$, $p^2$ を無視して解くと $q = -0.019808\ldots$ である．こうして根の第 2 次近似 $x = 2.18019\ldots$ を得る．この操作を繰り返して根の近似値を求める計算法が**ニュートン法**である．

• 上の例ではニュートン法を式で説明した．計算すると結局は同じになることだが，図形的な説明方法もある．解きたい方程式を $f(x) = 0$ とする．$f(a) < 0 < f(b)$ とする．$b$ が 0 次近似である．1 次近似は，$y = f(x)$ のグラフを $(b, f(b))$ における $y = f(x)$ のグラフの接線 $y - f(b) = f'(b)(x - b)$ で置き換えたときの根 $b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$ である．2 次近似は $(b_1, f(b_1))$ における接線 $y - f(b_1) = f'(b_1)(x - b_1)$ で置き換えたときの根 $b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f'(b_1)}$ である．この図形的な操作を繰り返すことによって真の解に近づこうというのがニュートン法の図形的説明である．

• （定理）$f(x)$ を閉区間 $[a,b]$ で定義された $C^2$ 級の微分可能関数で，導関数 $f'(x)$ は $[a,b]$ で単調増加で $f'(x) > 0$ である（すなわち，強い意味で下に凸な狭義単調増加関数）と仮定する．$t$ を $f(a) < t < f(b)$ を満たす任意の実数とする．このとき，数列 $\{b_n\}$ であって，任意の自然数 $n \geq 0$ に対し $a \leq b_n \leq b$ を満たすものを，初期条件 $b_0 = b$ と漸化式

$$b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n) - t}{f'(b_n)}$$

によって帰納的に定義できる．このとき，$\lim_{n\to\infty} b_n = f^{-1}(t)$，すなわち，$\lim_{n\to\infty} b_n$ は方程式 $f(x) = t$ の解である．

• ニュートン法（上の定理）を使って方程式の近似解を求めるとき，漸化式をどこから始めるかが非常に重要である．

• ニュートン法の計算例 1．$\sqrt{2}$ をニュートン法で求める：解きたい方程式は $f(x) = x^2$ とおくと $f(x) = 2$ である．したがって，上の定理の漸化式において $t = 2$, $f(x) = x^2$ である．たとえば $b_0 = 2$ のとき，上の漸化式は

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{2}{b_n}\right),\ b_0 = 2$$

となる．上で述べたことを確認しよう．第二回講義の例 2 でやったように，$\lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{2}$ であるが，その収束のスピードがどのくらいかを評価する．

$$c_n := b_n - \sqrt{2}$$

とおくと $c_n \geq 0$ であり，

$$c_{n+1} \leq \frac{c_n^2}{2\sqrt{2}}$$

である．整数列 $\{m_n\}$ を $c_n$ がおよそ $10^{-m_n}$ となるように定めると，$n$ が十分大きいとき，$m_{n+1}$ はおよそ $2m_n$ である．したがって近似の各ステップで有効な桁が 2 倍になることがわかる．一般項がどのくらい $\sqrt{2}$ を近似しているかについては

$$c_{n+1} \leq \frac{(2-\sqrt{2})^{2^n}}{(2\sqrt{2})^{1+2+\cdots+2^{n-1}}}$$

が成り立つ．

では，これらの主張が成り立つことを確認しよう．

$b_n \geq \sqrt{2}$ $(\forall n = 1, 2, \dots)$ だから

$$\begin{aligned}
c_{n+1} &= b_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{2}{b_n}\right) - \sqrt{2} \\
&= \frac{b_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}b_n}{2b_n} = \frac{(b_n - \sqrt{2})^2}{2b_n} \\
&\leq \frac{c_n^2}{2\sqrt{2}} \leq \frac{c_{n-1}^{2^2}}{(2\sqrt{2})^{1+2}} \leq \cdots \leq \frac{c_0^{2^{n+1}}}{(2\sqrt{2})^{1+2+\cdots+2^n}} \\
&= \frac{c_0^{2^{n+1}}}{(2\sqrt{2})^{2^{n+1}-1}} \ .
\end{aligned}$$

- 一般の $C^2$ 関数に対して同じ評価が成り立つことを確認する．

確認作業：区間 $[a, b]$ において $|f'(x)| \geq A$, $|f''(x)| \leq B$ として $M := \frac{B}{2A}$ とおくと，$f(x)$ が $[a, b]$ で $C^2$ 級という仮定より $M$ は有限な定数である．漸化式に**テイラー公式**を適用すると，$b_n$ と $f^{-1}(t)$ の間のある数 $b'_n$ であって次の式を成り立たせるものが在る：

$$\begin{aligned}
c_{n+1} &= b_{n+1} - f^{-1}(t) = b_n + \frac{f(f^{-1}(t)) - f(b_n)}{f'(b_n)} - f^{-1}(t) \\
&= b_n + \frac{f'(b_n)(f^{-1}(t) - b_n) + \frac{f''(b'_n)}{2}(f(f^{-1}(t)) - b_n)^2}{f'(b_n)} \\
&\quad - f^{-1}(t) \\
&= \frac{f''(b'_n)}{2f'(b_n)}(b_n - f^{-1}(t))^2 \leq M c_n^2
\end{aligned}$$

となる．したがって一般の $C^2$ 級関数に対しても，ニュートン法の収束の速さについて同じことが言える．

- 中間値の定理を用いる 2 分法は適用範囲は任意の連続関数で広いが，収束は遅い．
- ニュートン法は微分可能関数にしか適用できないが，収束は非常に速い．
- ニュートン法の計算例 2.

$p$ を 2 以上の自然数とする．上の定理で，凸関数 $f(x)$ として $f(x) = x^p$，$t = \alpha$ にニュートン法を適用して得られる漸化式は

$$x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{p}\right)x_n + \frac{\alpha}{p x_n^{p-1}}$$

である．これを使って $2^{\frac{1}{3}}$ の近似値を求めよう．たとえば $x_0 = 2$ から始めると $x_1 = 1.5, x_2 = 1.296296\cdots$, $x_3 = 1.260932\cdots$, $x_4 = 1.259921\cdots$, $x_5 = 1.259921\cdots$ である．ニュートン法は収束がはやい！

- **課題 1**:

方程式 $x^2 - 2 = 0$ を $x = 2$ を出発するニュートン法によって小数点以下第 7 位まで求めよ．

ヒント：$x = 2$ を出発するニュートン法は漸化式

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} \ , \ a_1 = 2$$

を定める．$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ を実際に計算して $\sqrt{2}$ の小数表示と比べてみよ．

結局は同じことであるが，漸化式ではなく，その導出の基本となる考え方を直接適用する（今回の講義資料の最初の例，つまり $x^3 - 2x - 6 = 0$ の解の近似計算のやり方を $x^2 = 2$ の根を 2 から始めるニュートン法の場合に実行する）のもいい解法である．

計算上の注意：帰納的な計算が分数でできる場合，途中段階で小数に直すと打ち切り誤差が累積する恐れがある．今回の問題を解くと，急速に分母が大きくなるが，分数のまま計算を続け，最後に小数に直すのがいいと思う．分母が急速に大きくなる現象は，根（無理数）への接近の速さの表れである．

- **課題 2（ニュートン法とは関係なし，この問題はテイラー展開とその収束半径の復習です）**：
  (1) $\dfrac{1}{2-x}$ の $x = 0$ を中心とするテイラー展開とその収束半径を求めよ．

  (2) $\dfrac{\sin x}{x-2}$ の $x = 0$ を中心とするテイラー展開を $x^4$ の項まで求めよ．