● **課題（微積分学の基本定理）**．関数 $f(x)$ は (1)(2) では連続，(3) では微分可能と仮定する．ただし，(3) は 2 階微分すること，つまり $\frac{d}{dx}$ を働かせ，その結果にもう一度 $\frac{d}{dx}$ を働かせることを意味する．このとき，次を求めよ．

(1) $\displaystyle \frac{d}{dx}\int_a^{x^2} f(t)dt.$

（解答例）$F'(x)=f(x)$ とすると $\displaystyle\int_a^{x^2} f(t)dt = F(x^2)-F(a)$ である．よって

$$\frac{d}{dx}\int_a^{x^2} f(t)dt = \frac{d}{dx}\{F(x^2)-F(a)\} = f(x^2)\frac{d}{dx}x^2 = 2xf(x^2)$$

である．

(2) $\displaystyle \frac{d}{dx}\int_{2x+1}^{x^3} f(t)dt.$

（解答例）$F'(x)=f(x)$ とすると $\displaystyle\int_{2x+1}^{x^3} f(t)dt = F(x^3)-F(2x+1)$ である．よって

$$\frac{d}{dx}\int_{2x+1}^{x^3} f(t)dt = \frac{d}{dx}\{F(x^3)-F(2x+1)\} = f(x^3)\frac{d}{dx}x^3 - f(2x+1)\frac{d}{dx}(2x+1) = 3x^2f(x^3)-2f(2x+1)$$

である．

(3) $\displaystyle \frac{d^2}{dx^2}\int_a^{x} (x-t)f(t)dt.$

（解答例）$\displaystyle F(x)=\int_a^x f(t)dt$ とおくと

$$\int_a^x (x-t)f(t)dt = xF(x) - \int_a^x tf(t)dt$$

である．右辺第二項を部分積分すると

$$\int_a^x tf(t)dt = [tF(t)]_a^x - \int_a^x F(t)dt = xF(x) - aF(a) - \int_a^x F(t)dt$$

である．よって

$$\int_a^x (x-t)f(t) = xF(x) - xF(x) + aF(a) + \int_a^x F(t)dt = aF(a) + \int_a^x F(t)dt$$

である．よって

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_a^x (x-t)f(t)dt = \frac{d^2}{dx^2}\int_a^x F(t)dt = \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

である．

（別解）おっと，迂闊に（未習かもしれない）部分積分を使ってしまった．以下のように考えれば，部分積分を使わないで微積分学の基本定理だけでもできる（それは当然だ，微分積分の公式は微積分学の基本定理から出てくるのだから）．微分される関数をほぐしてみる．

$$(*)\qquad \int_a^x (x-t)f(t)dt = x\int_a^x f(t)dt - \int_a^x tf(t)dt$$

となる．(∗) の右辺を x で微分するのだが，まず積の微分公式から (∗) の右辺第一項からやってみると

$$\frac{d}{dx}\left\{x\int_a^x f(t)dt\right\} = \int_a^x f(t)dt + x\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt$$

となる．この式の右辺第二項に微積分学の基本定理を適用すると

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

だから，(∗) の右辺第一項を x で微分したものは

$$\int_a^x f(t)dt + xf(t)$$

となる．次に，(∗) の右辺第二項に微積分学の基本定理を適用すると

$$-\frac{d}{dx}\int_a^x tf(t)dt = -xf(x)$$

である．結局，(∗) の右辺を x で微分すると

$$\int_a^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = \int_a^x f(t)dt$$

となる．もう一回 x で微分すると

$$f(x)$$

これが答えである．