秋学期第十四回課題解答例

1（教科書の問 13.3．ガンマ関数とベータ関数の計算練習）．

(1) $\displaystyle\int_0^1 x^3(1-x)^3dx = B(4,4) = \frac{\Gamma(4)\Gamma(4)}{\Gamma(4+4)} = \frac{3!3!}{7!} = \frac{1}{140}.$

(2) $x = at$ とおくと問題の積分は $\displaystyle a^7\int_0^1 t^3(1-t)^3dt = \frac{a^7}{140}.$

(3) $x = at$ とおくと問題の積分は $\displaystyle a^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+1}\int_0^1 t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt = a^3B\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$ である．$\displaystyle B\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(4)} = \frac{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{3!} = \frac{\pi}{16}$. よって問題の積分は $\displaystyle\frac{\pi a^3}{16}$ である．

(4) $\displaystyle B\left(3,\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(3)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{7}{2})} = \frac{2!\sqrt{\pi}}{\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{16}{15}.$

別法：$\displaystyle B\left(3,\frac{1}{2}\right) = B\left(1+2,\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{2+\frac{1}{2}}B\left(2,\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{2+\frac{1}{2}}\frac{1}{1+\frac{1}{2}}B\left(1,\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5}\frac{2}{3}\times 2 = \frac{16}{15}$. ここで $\displaystyle B\left(1,\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx = 2$ を用いた．

(5) 公式 $\displaystyle B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta d\theta$ を用いる．問題の積分は $\displaystyle\frac{1}{2}B\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$ である．よって

$$\frac{1}{2}B\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(5)} = \frac{1}{2}\frac{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{4!} = \frac{3\pi}{256}\ .$$

別法：

$$\frac{1}{2}B\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}B\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}}B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}B\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{3}{8}\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{2}\pi = \frac{3\pi}{256}\ .$$

(6) $x^2 = t$ とおくと $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{\frac{1}{2}}e^{-t}dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$

(7) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt[3]{x^2(1-x)}dx = B\left(\frac{5}{3},\frac{4}{3}\right) = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}}B\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right) = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}}\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}B\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}B\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$ となるが，最後の $\displaystyle B\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right) = B\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ は教科書の例題 12.10 を使って計算できて，その値は $\displaystyle\sqrt{3}\arctan\infty - \sqrt{3}\arctan(-1/\sqrt{3}) = \sqrt{3}(\pi/2+\pi/6) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ である．よって問題の積分は $\displaystyle\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$ である．そうではあるが，教科書の例題 12.10 の計算は非常に技巧的で難しい．この点について，あとで補足する．

2（ガンマ関数とベータ関数の計算練習）． $y = \sin x$ と $y = \cos x$ のグラフは直線 $x = \dfrac{\pi}{4}$ に関して対称だから

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 xdx = \frac{1}{2}B\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$$

である．そして

$$B\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\frac{1}{2}\pi = \frac{3}{8}\pi\ .$$

または

$$B\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{5}{2}+\frac{1}{2})} = \frac{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{2!} = \frac{3}{8}\pi\ .$$

したがって

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x dx = \frac{3}{16}\pi \ .$$

一方,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^2 x - \cos^2 x) dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = -\frac{1}{2}[\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2} \ .$$

この 2 本の式を辺辺加えて 2 で割れば

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x dx = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{16}\pi - \frac{1}{2}\right) \ .$$

補足その一． 問 13.3 (7) を計算するのに教科書の例題 12.10 に帰着するが，例題 12.10 は非常に難しい．もっと簡単な計算方法はないだろうかと思うのは当然だ．ここではこの問に答える．

ガンマ関数の $s = 1/2$ に関する対称性（ガンマ関数の計算では重要な公式）

$$(*) \qquad \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad (0 < s < 1)$$

を用いて解くことが可能である．実際，最後に $B(1/3, 2/3)$ が残ったが，これが次のように容易に計算できる：

$$B\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(1)} = \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \ .$$

ガンマ関数の $s = 1/2$ に関する対称性に関する公式の証明は簡単ではない（しかし教科書の例題 12.10 より応用上はるかに重要である）．二つの準備が必要．まず $0 < s < 1$ に対して，$u = vt$（t は $t > 0$ なら何でもいい）とおいて置換積分すると

$$(1) \qquad \Gamma(1-s) = \int_0^\infty e^{-u} u^{-s} du = t \int_0^\infty e^{-vt} (vt)^{-s} dv$$

である．次に公式

$$(2) \qquad \int_0^\infty \frac{v^{a-1}}{1+v} dv = \frac{\pi}{\sin \pi a}$$

が必要である．この公式は複素関数論でやる留数の公式を用いた積分の計算から従う（これ自体はよく教科書に掲載されている典型的な例題だ）．証明は福素関数論を学習した時のお楽しみにとっておくことにして，ここでは公式 (2) を使うことにする．準備が整ったので公式 $(*)$ を証明するが，その鮮やかな計算は恐ろしく巧妙だと思う．$0 < s < 1$ のとき

$$\begin{aligned}
\Gamma(1-s)\Gamma(s) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} \Gamma(1-s) dt \\
&= \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} \left(t \int_0^\infty e^{-vt} (vt)^{-s} dv\right) dt \quad [\text{公式 } (1)] \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t(1+v)} v^{-s} dv dt \\
&= \int_0^\infty \frac{v^{-s}}{1+v} dv \\
&= \frac{\pi}{\sin \pi (1-s)} \quad [\text{公式 } (2)] \\
&= \frac{\pi}{\sin \pi s} \ .
\end{aligned}$$

補足その二. ガンマ関数，ベータ関数を応用できる問題例の補足.

例. $\displaystyle\iint_D \frac{xdxdy}{(1+x^2+y^2)^n}$ $(n \in \{1,2,\dots\})$, $D: 0 \le x \le \sqrt{3},\ 0 < y < \infty$.

• 普通に計算するのなら，分子に xdx があるのを利用して $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{(1+x^2+y^2)^n} \overset{x^2=t}{=} \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{dt}{(1+y^2+t)^n} = -\frac{1}{2(n-1)}\left[\frac{1}{(1+y^2+t)^{n-1}}\right]_{t=0}^{t=3} = \frac{1}{2(n-1)}\left[\frac{1}{(1+y^2)^{n-1}} - \frac{1}{(4+y^2)^{n-1}}\right]$. 最後に $\displaystyle\frac{1}{2(n-1)}\int_0^\infty\left[\frac{1}{(1+y^2)^{n-1}} - \frac{1}{(4+y^2)^{n-1}}\right]dy$ を計算すればいい．このとき，n が一般だったら，$I_n := \int dy/(1+y^2)^n$ の漸化式を使えるだろう．例えば $n=2$ だったら問題の積分は簡単で

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty\left[\frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{4+y^2}\right]dy = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi}{8}\ .$$

• ガンマ関数を使うのなら，最初から無限積分に着目する．$a := 1+x^2$ とおくと

$$\begin{aligned}\int_0^\infty (a+y^2)^{-n}dy &\overset{y^2=az}{=} \frac{a^{-n+\frac{1}{2}}}{2}\int_0^\infty z^{-\frac{n}{2}}(1+z)^{-n}dz \\ &\overset{z=\frac{t}{1-t}}{=} \frac{a^{-n+\frac{1}{2}}}{2}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}(1-t)^{-n}\frac{dt}{(1-t)^2} = \frac{a^{-n+\frac{1}{2}}}{2}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{n-\frac{3}{2}}dt \\ &= \frac{a^{-n+\frac{1}{2}}}{2}B\left(\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}\right) = \frac{a^{-n+\frac{1}{2}}}{2}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n-\frac{1}{2})}{\Gamma(n)}\ .\end{aligned}$$

もし $n=2$ なら $\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n-\frac{1}{2})}{\Gamma(n)} = \frac{\sqrt{\pi}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{1} = \frac{\pi}{2}$ だから

$$\int_0^\infty (a+y^2)^{-2}dy = \frac{a^{-\frac{3}{2}}\pi}{4}$$

である．一方

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{a^{-\frac{3}{2}}\pi}{4}xdx = \frac{\pi}{4}\int_0^{\sqrt{3}}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}xdx \overset{x^2=u}{=} \frac{\pi}{4}\frac{1}{2}\int_0^3(1+u)^{-\frac{3}{2}}du = \frac{\pi}{8}[-2(1+u)^{-\frac{1}{2}}]_0^3 = \frac{\pi}{8}\ .$$