秋第八回課題解答例

100! の桁数を求める．使うのは Stirling の公式

$$n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} < n! < n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}e^{\frac{1}{12n}}$$

である．この式の常用対数をとると

$$n\log_{10}(n) - n\log_{10}e + \frac{1}{2}(\log_{10}2 + \log_{10}\pi + \log_{10}n) < \log_{10}n!$$
$$< n\log_{10}(n) - n\log_{10}e + \frac{1}{2}(\log_{10}2 + \log_{10}\pi + \log_{10}n) + \frac{1}{12n}\log_{10}e$$

である．$n = 100$ として $100\log_{10}(100) = 200$, $\log_{10}e \fallingdotseq 0.4343$, $\log_{10}\pi \fallingdotseq 0.4971$, $\log_{10}2 \fallingdotseq 0.3010$ を使うと

$$200-100\times0.4343+\frac{1}{2}(0.3010+0.4971+2) < \log 100! < 200-100\times0.4343+\frac{1}{2}(0.3010+0.4971+2)+\frac{0.4343}{1200}$$

となる．第一の不等号をそのまま小数計算すると $157.97 < \log_{10}100!$ となるが，小数点以下第三位に生じる誤差を考えると

$$157 < \log_{10}100!$$

と結論するのは十分に安全である．また，$\frac{0.4343}{1200}$ は大きく見積もって 0.000362 だから，157 に加えても整数部分に影響はない．結局，上の不等式は

$$157 < \log_{10}100! < 158$$

となる．自然数 N の桁数は $[\log_{10}N]+1$（$[\log_{10}N]$ は $\log_{10}N$ を超えない最大の整数を表す）だから，100! の桁数は 158 である．