第 2 回講義：単調数列とその極限について（教科書 1.2）．

•（定理または公理）上に有界な単調増加数列は収束する．

•（系）下に有界な単調減少数列は収束する．

本講義では，この定理または公理が成り立つことを認める．上の定理または公理の応用例をあげる：

•（例 1）$a_n = \max\left\{ x = \dfrac{m}{10^n} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}, x^2 \leq 2 \right\}$，$b_n = a_n + 10^{-n}$ によって数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を定義する．

$$\begin{aligned} a_1 = 1.4,\ a_2 = 1.41,\ a_3 = 1.414,\ a_4 = 1.4142, \ldots \\ b_1 = 1.5,\ b_2 = 1.42,\ b_3 = 1.415,\ b_4 = 1.4143, \ldots \end{aligned}$$

で $\sqrt{2}$ を 10 進法で書いたものを小数点以下 n 桁で切り捨てたものが a_n で，切り上げたものが b_n である．

$\{a_n\}$ は単調増加で $a_n^2 < 2$ を満たす．$\{b_n\}$ は単調減少で $b_n^2 > 2$ を満たす．
よって $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{2}$ である．このように有理数の演算と上の定理または公理から $\sqrt{2}$ は定義される．

•（例 2）$a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{2}{a_n}\right)$, $a_1 = 2$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ を考える．

(1) 数列 $\{a_n\}$ は下に有界である．実際，常に $a_n > 0$ であることが漸化式からわかる．もっと強く $a_n \geq \sqrt{2}$ がわかる．(理由) $a_1 = 2 > \sqrt{2}$ である．$n \geq 2$ なら漸化式より $a_n = \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{1}{a_{n-1}} = (\sqrt{\frac{a_{n-1}}{2}} - \sqrt{\frac{1}{a_{n-1}}})^2 + \sqrt{2} \geq \sqrt{2}$ である．

(2) 数列 $\{a_n\}$ は単調減少である．実際，漸化式より $a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n}) = \frac{a_n}{2} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n^2-2}{2a_n}$ であるが，(1) より $a_n^2 \geq 2$ だから結局 $a_n - a_{n+1} \geq 0$ である．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の極限は $\sqrt{2}$ である．実際，数列 $\{a_n\}$ は下に有界な単調減少数列だから収束する．極限を α とすると漸化式より $\alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \frac{2}{\alpha})$ である．$\alpha > 0$ だから $\alpha = \sqrt{2}$ である．

•（例 3）$a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ とすると

$$\begin{aligned} & a_n \\ & = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \\ & = 1 + 1 + \frac{1}{2!}1\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \\ & + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

だから $a_n < a_{n+1}$（各項が大きくなり項の数が増える）であり

$$\begin{aligned} & a_n \\ & < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ & < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ & = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3 \end{aligned}$$

である．結局，$\{a_n\}$ は単調増加で $\forall a_n < 3$. よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ は存在する．そこで e をその極限

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

と定義する．e は**自然対数の底**とか **Napier 数**と呼ばれる．

これが伝統的な自然対数の底 e の定義だ．理論的には極めて重要だが収束は遅く，数値計算には不向きである．

第三回の講義で，自然対数の底 e の，理論的に有用かつ数値計算向きの定義を与える．

- **（無限級数の収束の定義）** 数列 $\{a_n\}$ から $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ として数列 $\{S_n\}$ を作る．
 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 数列 $\{S_n\}$ が収束する．

- （数列の和の計算例）定数数列・等差数列・等比数列の S_n の計算．例えば任意の n に対し $a_n = c$ (c は定数) は定数数列である．このとき $S_n = nc$ である．$a, a+d, a+2d, \ldots, a+nd, \ldots$ は初項 a, 公差 d の等差数列である．このとき $a_n = a + (n-1)d$ であり，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = na + \frac{(n-1)n}{2} d$ である．$a, ac, ac^2, \ldots, ac^n, \ldots$ は初項 a, 公比 c の等比数列である（ただし $c \neq 1$ とする）．このとき $a_n = ac^{n-1}$ であり，$S_n = a \sum_{n=0}^{n-1} c^k = \frac{a(1-c^n)}{1-c}$ である．等比数列の和の計算法を思い出す．$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k c^{k-1}$ とおくと $(1-c)S_n = 1 - c^n$ であることから S_n が計算できるのであった．

- （例）等比級数の収束発散の判定. **(定理)**[1] **収束 $\Leftrightarrow$ 公比の絶対値が 1 より小さい．**
 実際，初項 a, 公比 c の等比数列の和は $S_n = \frac{a(1-c^n)}{1-c}$ だから $c \neq 1$ のもとで $\lim_{n\to\infty} c^n$ が存在するための必要十分条件は $|c| < 1$ であり，このとき $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-c}$ である．

- **（定理）** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束すれば，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が成り立つ．とくに，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束すれば，ある正の数 M が在って，全ての n に対し $|a_n| \leq M$ が成り立つ（後で冪級数の絶対値収束を論じるが，その時に理由を説明する）．

 （理由）$a_n = S_n - S_{n-1}$ において $\lim_{n\to\infty} S_n$ が存在するから $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である．
 （注意）逆は正しくない．
 （反例）$a_n = \frac{1}{n}$ のとき $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であるが，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ である．実際，2 以上の自然数を $\{2\}$, $\{3,4\}$, $\{5,6,7,8\}$, $\{9,10,11,12,13,14,15,16\}$, $\{17,\ldots,32\}$, $\{33,\ldots,64\}$ のように，2^k 個 $(k = 0,1,2,\ldots)$ の元からなるグループに分けると，各グループでの逆数の和は，最大数 2^{k+1} の逆数の 2^k 倍，つまり $2^{-k-1} \times 2^k = \frac{1}{2}$ より大きい．グループは無限個あり，各グループの逆数の和は $\frac{1}{2}$ より大きいから，結局全ての正の整数の逆数の和は無限個の $\frac{1}{2}$ の和より大きい．したがって $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ である．

- **（優級数定理）** $0 \leq a_n \leq b_n$ かつ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 収束 $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 収束．

（証明）$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ は（$\forall a_k \geq 0$ だから）単調増加である．一方 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B < \infty$（収束）だから全ての n に対し $S_n \leq B$ すなわち S_n は上に有界である．よって $\{S_n\}$ は収束する．よって無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する．　□

- **（定義-定理）** $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束する（$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は**絶対値収束**する）$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する．

（証明）$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束するとせよ．このとき数列 b_n を，$a > 0$ のとき $b_n = a_n$，そうでないとき $b_n = 0$ で定める．数列 c_n を，$a_n < 0$ のとき $c_n = -a_n$, そうでないとき $c_n = 0$ で定める．すると $a_n = b_n - c_n$ であり，しかも $0 \leq b_n \leq |a_n|$, $0 \leq c_n \leq |a_n|$ が成り立つ．$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ は収束するから，優級数定理によって $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ はともに収束する．したがって $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - c_n)$ も収束する（4 則演算と極限の交換！）．　□

- **（定理）** 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ は絶対値収束する．
 この定理の証明を次回に行う．

- （系）任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ が成り立つ．
 （注意）この系の証明が第一回課題に出題されている．

- **（定理）**：冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が $x = c$ で収束すれば $|x| < |c|$ で絶対値収束する．

（証明）$\sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n$ は収束するから，ある $M < \infty$ で全ての $|a_n c^n| \leq M$ となるものが存在する．実際，$\lim_{n\to\infty} a_n c^n = 0$ だから，ある番号 N から先では $|a_n c^n| \leq 1$ である．そこで M として $|a_n c^n|$

[1] これは重要だ！

$(n=0,1,\dots,N)$ の最大のものと 1 の大きい方をとれば，すべての n に対し $|a_n c^n| \le M$ である．$\rho = |x/c|$ とおくと $|x| < |c|$ なら $\rho < 1$ である．したがって $|a_n x^n| = |a_n c^n||\frac{x}{c}|^n \le M\rho^n$ である．よって $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \le M \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = \frac{M}{1-\rho}$ である．よって $\sum_{k=0}^{n} |a_k x^k|$ は上に有界な単調増加数列である．よって $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対値収束する． □

もう少し考察を進めると次のようなことがわかる．まず，上の定理から，冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が収束する $x = c$ が見つかれば $|x| < c$ で絶対値収束する．そこで，このような c が一つ見つかったら，$c+\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ をとり，考えている冪級数が $|x| < c+\varepsilon$ で収束するかどうかを見て，収束すればこの操作を続ける．結局，$|x| < c$ なら冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^n$ が収束するような最大の $c \ge 0$ が見つかる．この c を考えている冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^n$ の**収束半径**と呼ぶ．

• （例）関数 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ を考える．この関数は $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ で定義される関数である．高校で習う無限等比級数の和の公式より $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \dots$ $(|x| < 1)$ である．$|x| < 1$ が右辺が収束するための必要十分条件である．x の冪で展開したが，$(x+c)$ の冪（c は定数）で展開することも可能である．例えば $f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x+1}{2}} = \frac{1}{2}\{1 + \frac{x+1}{2} + (\frac{x+1}{2})^2 + \cdots + (\frac{x+1}{2})^n + \dots\}$ という表現も可能である．このときの収束半径は $|\frac{x+1}{2}| < 1$ だから $|x+1| < 2$ よって 2 である．なお，$(x+c)$ の冪級数の収束半径は $x + c = 0$ となる点 $-c$ を中心に考える．

• （定義）無限級数が絶対値収束しないが収束するとき，条件収束すると言う．

• （例）$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ のとき，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束するが，絶対値収束しない無限級数である．

• 課題

1. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ を求めよ．ただし，$a > 0$ に対し $\sqrt[n]{a}$ とは n 乗して a になる正の数（このような正の数がただ一つある）のことを指す．$\sqrt[n]{a}$ を $a^{\frac{1}{n}}$ とも表す．

ヒント：$a_n = \sqrt[n]{n}$ という数列を考える．数列 $\{h_n\}$ を $a_n = 1 + h_n$ $(n > 1$ なら $h_n > 0)$ によって定める．第一回講義の例題の真似をして $\lim_{n\to\infty} h_n$ を求める．つまり，$n = (1+h_n)^n$ において右辺に二項定理を適用し，$\binom{n}{2} h_n^2 < n$ を導いて $n \to \infty$ としたらどうなるかを考える．

2. 100 メートルを 10 秒で走るアキレスが 100 メートル先を「走る」亀を追いかける．アキレスは亀の A 倍の速さで走ると仮定する．アキレスが亀に追いつくのにどのくらいの時間がかかるだろうか？ これだけなら，小学校で習う旅人算である．問題は，まずアキレスが $100(=a_1)$ メートル進んだとき，亀はもうそこにはいない．亀は a_2 メートル進むからである．そこでアキレスは a_2 メートル進む．しかしまた亀は a_3 メートル進んでいるからそこにはいない．こうして，このプロセスは無限に続き，アキレスが亀に追いつくのに要する時間は無限和で表されることになる．この無限和が計算できる無限等比級数になることを示してその和を計算して，旅人算の結果と一致することを確かめよ．

3. 教科書の問 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6．問 2.5(1) はとくに重要で，後で使うことになるだろう．

補足．「上に有界な単調増加数列は収束する」という定理または公理を認めることは，次のような定理または公理を認めることと実は同じである：「上に有界な $\mathbb{R}$ の部分集合には上限がある」．上限とは，最大値が存在しないときにその代わりになる概念で，次のように定義される．集合 $A \subset \mathbb{R}$ は上に有界とする．つまり，ある実数 K が在って，全ての $x \in A$ に対し $x \le K$ が成り立つ．このような K を集合 A の上界という．もし K が A の上界なら $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \ge K\} = [K, \infty)$ は A の上界のなす集合の部分集合である（K が A の上界なら K 以上の実数はすべて A の上界である）．集合 A の上限とは，集合 A の上界のなす $\mathbb{R}$ の部分集合の最小値のことである：上限 = 最小上界．定理または公理「上に有界な $\mathbb{R}$ の部分集合の上界全体のなす集合には最小値すなわち最小上界が在る」これを上限という言葉を用いて言い直したものが「上に有界な $\mathbb{R}$ の部分集合には上限がある」である．直観的にいえば，上に有界な集合 A の上限が K であるとは，K は $A \subset (-\infty, K]$ となるギリギリの K のことである．今後，本講義で「上限」という言葉が出てきたら，これのことだと思ってほしい．また，応用上は「上限」という概念をこのように直観的に認識していれば十分だと思う．上限と同様に，下限という概念が，下に有界な $\mathbb{R}$ の部分集合に対して定義される．Cf. 教科書の付録 §1.