(1) 次の線形写像 T について,(i) と (ii) を求めよ.

$$T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$$

(i) $\mathrm{null}(T)$ と $\mathrm{Ker}(T)$ の１組の基底

(ii) $\mathrm{rank}(T)$ と $\mathrm{Im}(T)$ の１組の基底

(2) 線形写像

$$T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

に対して, 次の基底に関する表現行列を求めよ.

(a) $\mathbb{R}^3$ の基底 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ と $\mathbb{R}^2$ の基底 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ に関する表現行列

(b) $\mathbb{R}^3$ の基底 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ と $\mathbb{R}^2$ の基底 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ に関する表現行列

(c) $\mathbb{R}^3$ の基底 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ と $\mathbb{R}^2$ の基底 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ に関する表現行列

(d) $\mathbb{R}^3$ の基底 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ と $\mathbb{R}^2$ の基底 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ に関する表現行列

(3) 線型写像

$$T : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2, \quad T(f(x)) = f'(12)(2x-1) + f(17)x^2$$

に対して,$\mathbb{R}[x]_2$ の基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する T の表現行列を求めよ.

以上