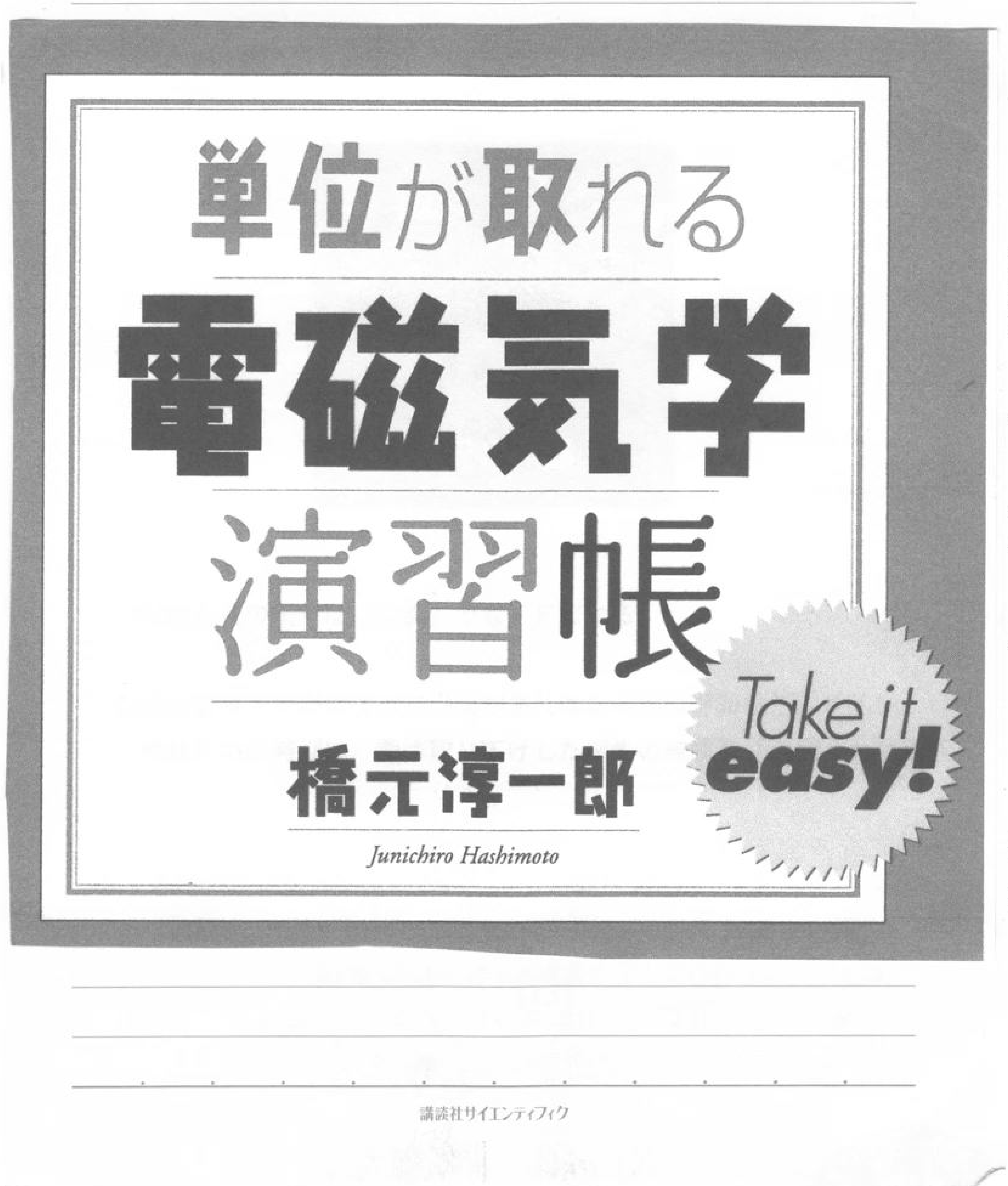


サブテキストとして

「単位が取れる電磁気学演習帳」
橋元淳一郎　著。
講談社サイエンティフィック刊

もおすすめ。

買っておくと将来きっと助かる。

Amazon等の中古本でもよい

以下はこの本から良問を抜粋
⇒　これも試験範囲です💀

本書は，『単位が取れる電磁気学ノート』(以下『ノート』)の演習書版である。

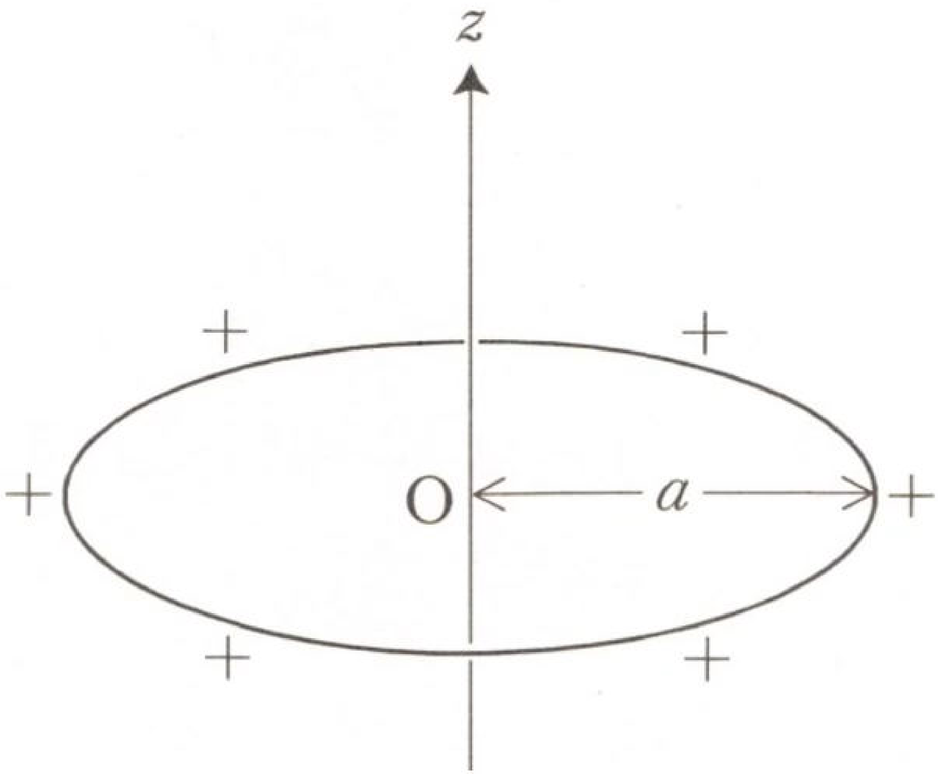
『ノート』が多くの学生さんに愛読され続けていることは，筆者望外の喜びである。

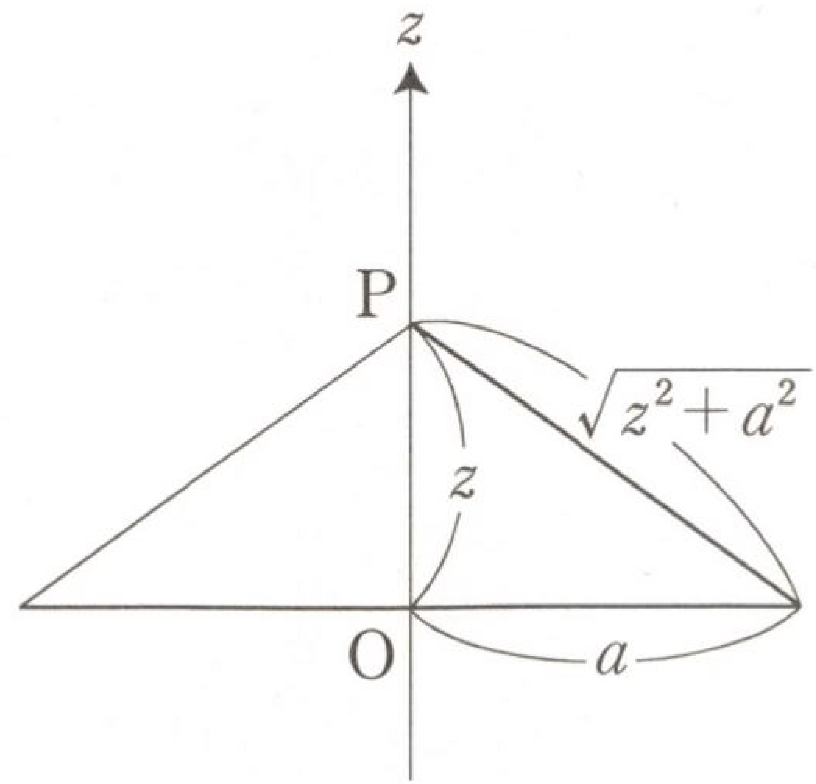
しかし，限られた紙幅の中で，何もかもを網羅することはできない。『ノート』では，橋元流の「電磁気学とはこういうものなんだ」を説くことによって，電磁気学に苦手意識をもっている学生さんに，「へー，電磁気学って面白いものなんだ」という感覚を味わって頂けることを第一の目的としている。しかし，面白いと思っても，じっさいに問題に挑戦してみると，どう解いていいのかよく分からない，ということは多々あるであろう。『ノート』では，理解を助けるために相当数の演習問題・実習問題を配置したが，より実践的な力をつけるためには，やはりもっと多くの問題を解くことが必要だと思う。

そんなわけで本書は，構成は『ノート』にほぼ従い，その演習書版として，『ノート』の問題不足を補うこととした。

演習問題 1-4 ★★★☆☆

導線で半径 a の円をつくり，この導線に電荷 $Q(>0)$ を与えると，電荷は円周に沿って一様に分布した。円の中心 O を通り，O を原点として，円に対して垂直な軸を z 軸としたとき，z 軸上の各点の電場と電位を求めよ。 2016院試

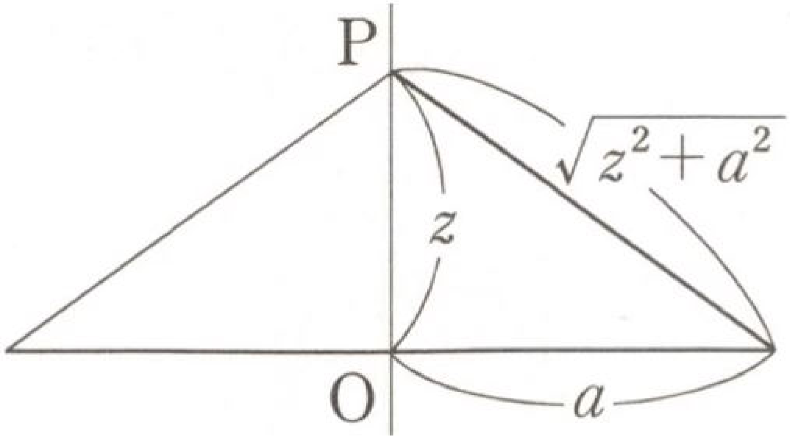




ヒント! 円周上の各点の微小電荷を積分すればよいが，円周から z 軸上までの距離は，どの微小部分からも等しいから，電位に関しては，けっきょく電気量 Q の点電荷がつくる電位と同じことになる。

解答＆解説 まず z 軸上の任意の点 $\mathrm{P}(\mathrm{OP}=z)$ の電位 $\phi(z)$ を求める。

円周上に分布した電荷の線密度を $\rho\left(=\dfrac{Q}{2\pi a}\right)$とすると，微小角 $\mathrm{d}\theta$ をなす微小円弧の長さは $a\mathrm{d}\theta$ だから，そこにある電気量は $\rho a\mathrm{d}\theta$ である。



$$a\mathrm{d}\theta \times \frac{Q}{2\pi a} = \frac{Q}{2\pi}\mathrm{d}\theta$$

よって，この微小電荷が点 P につくる電位 $\mathrm{d}\phi$ は，クーロンの比例定数を k として，

$$\mathrm{d}\phi = k\frac{\rho a\mathrm{d}\theta}{\sqrt{z^2+a^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{Q\mathrm{d}\theta}{2\pi}\right)\Big/\sqrt{z^2+a^2}$$

ゆえに，点 P の電位 ϕ は，

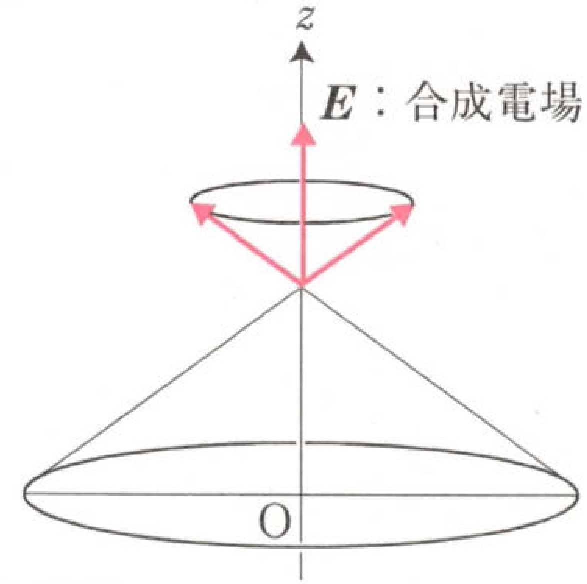
$$\phi = \int\mathrm{d}\phi = \cancel{\int_0^{2\pi}k\frac{\rho a\mathrm{d}\theta}{\sqrt{z^2+a^2}}} = 2\pi\,\mathrm{d}\phi$$

$$\cancel{= k\cdot\frac{2\pi a\rho}{\sqrt{z^2+a^2}}} \quad \times$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2+a^2}} \quad \cdots\text{(答)}$$

(注) 周回積分でない
普通の積分なので
$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = 2\pi$

次に電場を求める。電場の向きは対称性より z 軸の方向を向く($z>0$ では z 軸正方向，$z<0$ では z 軸負方向)。



よって，この場合は電場の公式を積分しなくても，電位の z 方向の傾きを求めればよい。すなわち，ϕ を z で微分すればよい。

$$E = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}z}$$

$$= \frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0(z^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \cdots\cdots(答)$$

周回積分 $\oint_c ds = 2\pi r$ は ds を1周足し合わせる意味で、普通の積分とは異なる

磁場は線積分

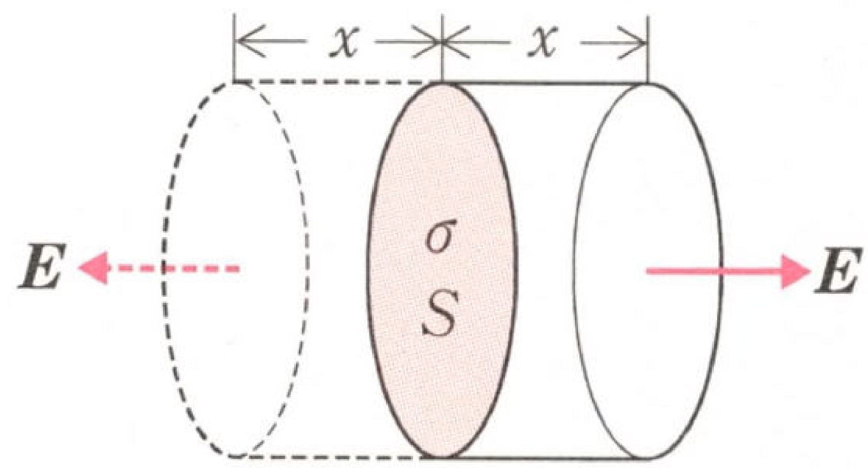
実習問題 1-4
★★★★★

無限に拡がる薄い平板に，面積密度 $\sigma(>0)$ の電荷が帯電している。平板から距離 x の点における電場と電位を求めよ。

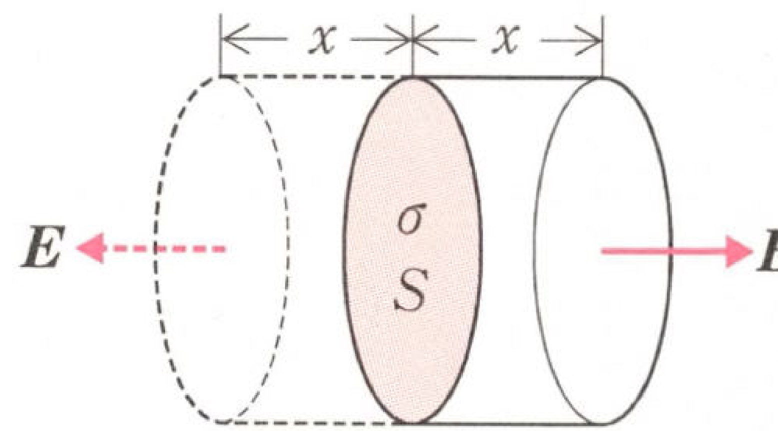
2016院試

ヒント！ 微小平面のつくる電位を積分して求めてもよいが，各点の電場がなんらかの対称性をもつときには，電場に関するガウスの法則が使えないかを検討すべきである。ガウスの法則を用いれば，面倒な積分計算を省ける。この場合は電場を先に求め，電位は電場を積分すればよい。

解答＆解説 帯電している平板を y-z 平面にとる。そうすると，直感的に電場 $\boldsymbol{E}$ は平板に垂直，すなわち x 成分だけをもち，かつ $\boldsymbol{E}$ は一様で y と z にはよらないことが分かる。



いま，図のように平板に適当な面 S をとり(分かりやすく円形にしておく)，平板に垂直で長さ $2x$，断面積 S の円筒を想定する。平板の電荷は正であるから，円筒の $+x$ 面から出る電場は一様で向きは x 軸正方向である。この電場の大きさを E とする。円筒の $-x$ 面から出る電場は対称性より，x 軸負方向で大きさはやはり E である。最初に述べたように，電場の y, z 成分はないから，この円筒から出ている電場はこれだけである。そこで，この円筒にガウスの法則を適用すると，



$$2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

よって，

$$E = \boxed{(\mathrm{a})\ \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}} \quad \cdots\cdots(答)$$

この電場の大きさは定数であり，x によらない。その理由は，電荷が無限に拡がっていることによる。

電位は電場の積分として求められるから，

$$\phi = -\int E\,\mathrm{d}x = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}x$$

この場合，電位の基準を無限遠に置くわけにはいかないので(その理由もまた，電荷が無限に拡がっているからである)，$x=0$ を基準とした。ϕ が $-x$ に比例するということは，平板から離れるに従って電位は直線的な坂道のように下がっているということである。ただし，$x<0$ でもまた電位は下がらなくてはならないから，けっきょく，

$x=0$ を電位の基準点として，

$$x>0 \text{ では}\quad \phi = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}x$$

$$x<0 \text{ では}\quad \phi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}x$$

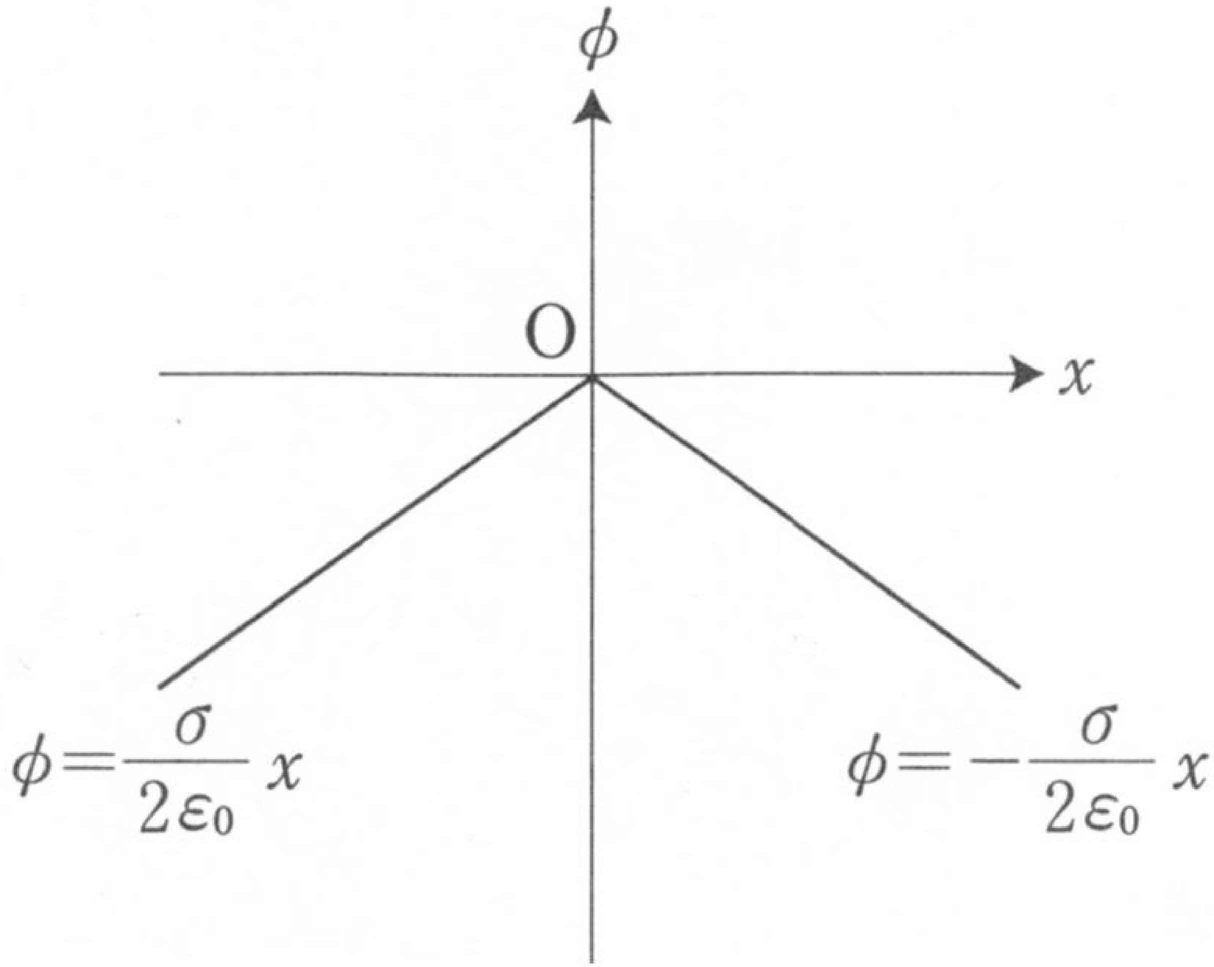
すなわち，

$$\phi = \boxed{\text{(b)}\ \frac{-\sigma|x|}{2\varepsilon_0}} \quad \cdots\cdots\text{(答)}$$

すなわち，

$$\phi = \boxed{(b)\ \frac{-\sigma|x|}{2\varepsilon_0}} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

図1-23



◆演習問題・実習問題

とくに断りのないかぎり，空間は真空であり，問題に与えられた以外に電荷はないものとする。また，真空の誘電率 ε_0（≒8.85×10^{-12} $[\mathrm{C^2/N\cdot m^2}]$）は与えられたものとして用いてよい。

演習問題 2-1 ★★☆☆☆

半径 R の孤立した導体球がある。この導体球の（無限遠に対する）電気容量はいくらか。また，このことを用いて地球の電気容量を求めよ。ただし，地球は導体でできており，その半径は 6400[km] であるとする。

図2-6● 地球の電気容量は？

ヒント! 電荷を蓄えられる導体は，すべてコンデンサーとみなすことができる。(静電気力の範囲内で) 連続した導体の電位はどこも同じであるから，それを V としたとき，その導体が蓄えている電気量 Q との間に，つねに $Q=CV$ の関係が成立する。この式を電気容量 C の定義とみなせばよい。電位 V が電荷 Q と比例するのは明らかである。電位 V とは 1 クーロンの電荷がもつ位置エネルギーであり，蓄えられている電荷が 2 クーロンになれば，位置エネルギーが 2 倍になるのは自明だからである。

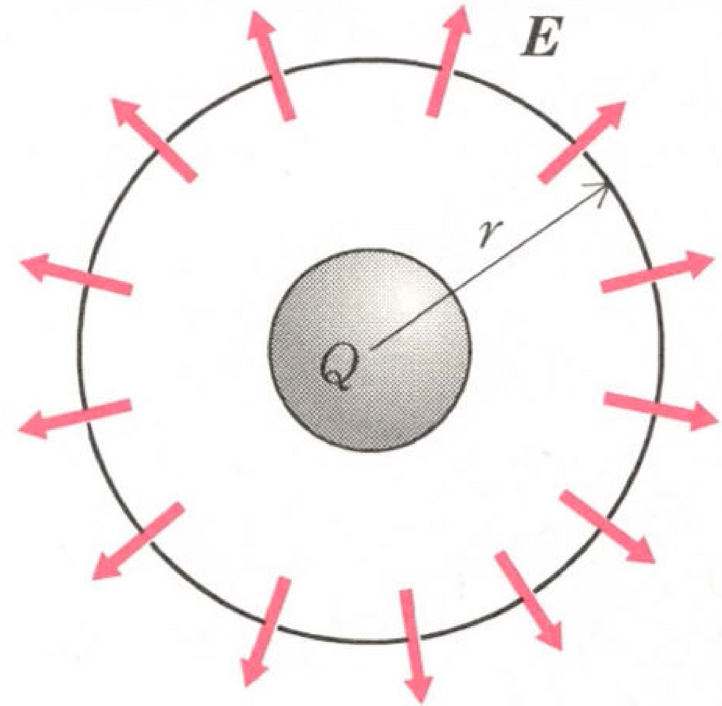
解答&解説 半径 R の導体球に電気量 $Q(>0)$ が蓄えられているとする。導体の性質によって，この電気量 Q は導体表面に分布する。また対称性により，その分布は一様である。よって，導体球の外側の空間に生じる電位 ϕ と電場 $\boldsymbol{E}$(大きさ E) は球対称となる。

いま，導体球の中心からの距離を r とする半径 r の球を想定する。$r>R$ のとき，この球面にガウスの法則を適用すれば，

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore \quad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

図2-7● 電場 $\boldsymbol{E}$ は球対称



これは，$r=0$ に電気量 Q の点電荷があるときの電場と同じである。よって，$r>R$ の空間での電位 ϕ もまた，電気量 Q の点電荷がつくる電位と同じになるであろう。すなわち，無限遠を電位の基準として，

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

よって，導体球の表面($r=R$)での電位を V とすると，

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

ところで，この導体球の電気容量を C とすれば，$Q=CV$ がつねに成立するから，

$$C=\frac{Q}{V}$$

$$=4\pi\varepsilon_0 R \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

この結果を地球に適用すれば，

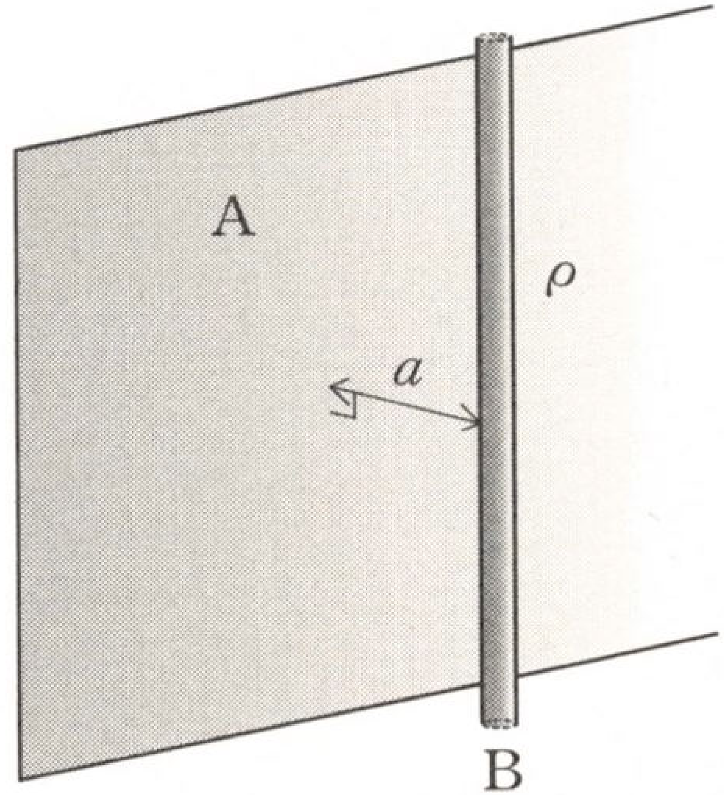
$$C_{\text{地球}}=4\times3.14\times8.85\times10^{-12}\times6400\times10^{3}$$

$$=7.11\times10^{-4}\,[\mathrm{F}] \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

ひとこと 電気容量の単位は［F］(ファラッド)であるが，これは $Q=CV$ の関係より，［C/V］(クーロン／ボルト)のことである。また真空の誘電率 ε_0 の単位は，ファラッドを用いれば，［F/m］である。

実習問題 2-2 ★★★☆☆

無限に拡がる平面導体 A から距離 a のところに，無限に長い直線導体棒 B を平面導体 A に平行に置く。この直線導体棒 B に線密度 $\rho(>0)$ の電荷を一様に分布させるとき，直線導体棒 B の単位長さが，平面導体 A から受ける静電気力の大きさを求めよ。

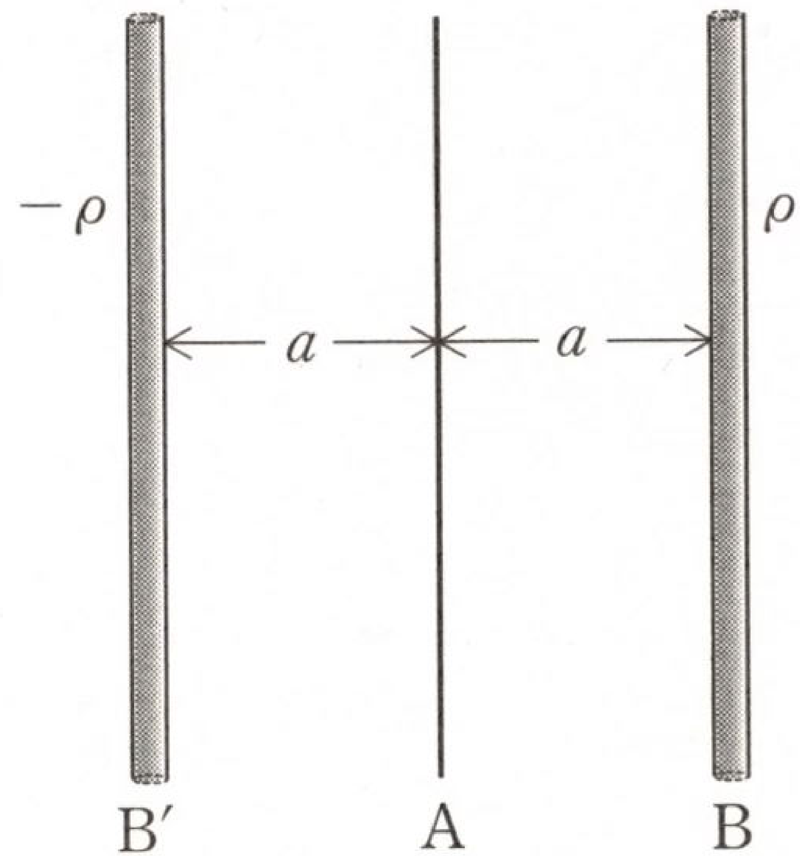


ヒント! 無限に長い直線状の電荷分布がつくる電場は，すでに見たように（実習問題1-3）ガウスの法則からすぐに求まる。さらに，電気鏡像法が使えることは直感的に分かるから，容易であろう。

解答&解説 平面導体Aは無限に拡がっているから，接地されているとみなしてよい。この平面導体面Aを取り去って，その平面上の電位をすべて0にするためには，線密度$-\rho$で分布した無限に長い直線導体棒B′を，平面に対称な位置(平面から導体棒Bと反対側に距離aの位置)に置けばよい。

すなわち，この問題は，距離$2a$離れた2本の直線導体棒にρと$-\rho$の電荷が分布している場合と等価である。

図2-15 対称の位置にB′を置けばAの電位は0となる。

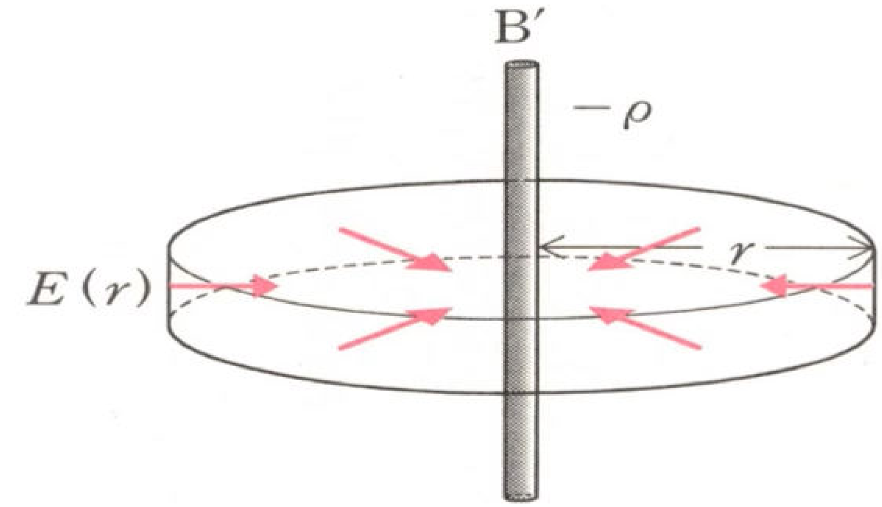


ガウスの法則より，線密度 $-\rho$ の無限に長い直線導体棒 B′ が距離 r の位置につくる電場の大きさ $E(r)$ は，

$$E(r) = \frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

で，その向きは内側，すなわち導体棒 B′ の方向である。

● 仮想的な導体棒 B′ がつくる電場



$r = 2a$

直線導体棒 B は，B′ から距離 $2a$ の位置にあるから，B の単位長さ(電気量 ρ)が受ける静電気力の大きさ F は，

$$F = \rho E(2a) = \boxed{\cancel{(a)}\ \frac{\rho^2}{4\pi\varepsilon_0 a}} \quad \cdots\cdots(答)$$

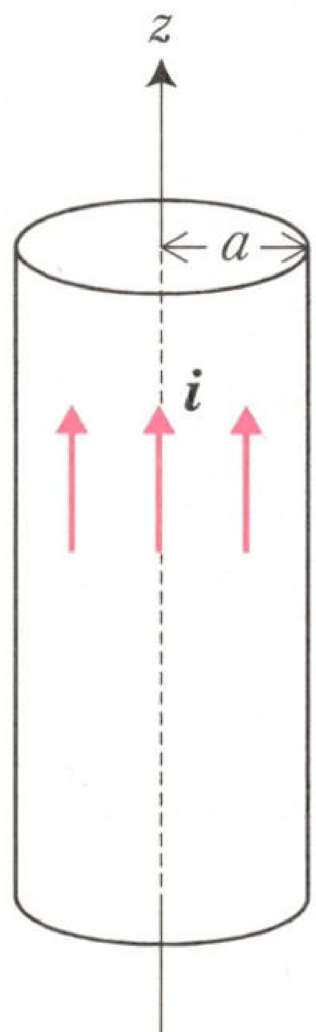
その向きは，B′ の方向。すなわち，導体棒 B は平面導体 A に引っ張られる。

実習問題 4-2
★★★★★

半径 a の円柱形をしたまっすぐで無限に長い導体棒がある。導体棒の中心軸を z 軸としたとき，導体棒の内部を z 軸の正方向に，電流密度 $\boldsymbol{i}$ の一様な定常電流が流れている。このとき，導体の内部および外部の各点における磁場を求めよ。

グラフ化せ

図4-15



$2\pi r H = I$

ヒント! 電流がつくる磁場を求める方法には，①アンペールの法則，②ビオ-サバールの法則，③ rot $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{i}$ から求める方法，④ベクトル・ポテンシャルから求める方法などがあるが，①が一番簡単である。なお，電場の場合同様，空間的な対称性をできるかぎり利用すること。

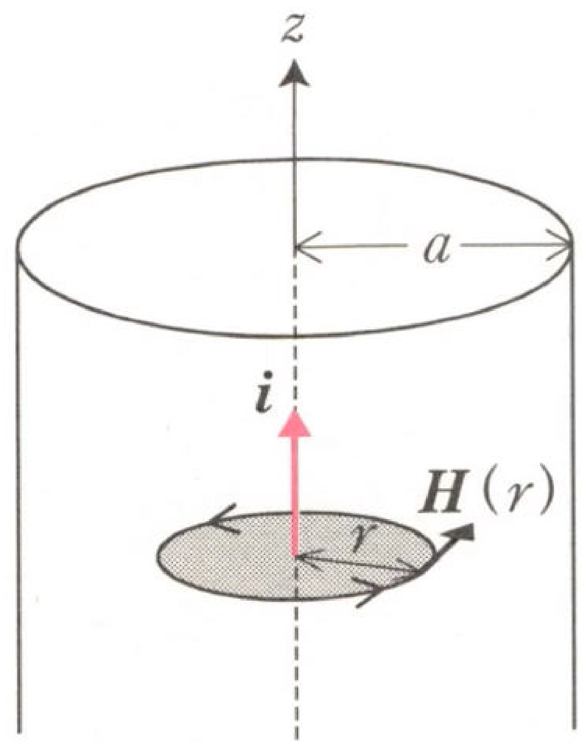
解答＆解説 円筒座標系(r,θ,z)を用いれば，対称性より，磁場は z 軸の周囲に右ねじの規則に従って渦を巻く方向(円の接線方向，すなわち θ 方向)に生じ，「$r=$一定」の円周上ではその大きさは一定である。すなわち，磁場は r のみの関数で，かつ $H_r=H_z=0$ である。

導体棒の内部$(r\leqq a)$の半径 r の円周上にアンペールの法則を適用すれば，

$$2\pi r H(r) = \pi r^2 i$$

である。

図4-16● $r \leqq a$ のとき



導体内にもHが生じる

$2\pi r H(r) = \pi r^2 i$

ゆえに,

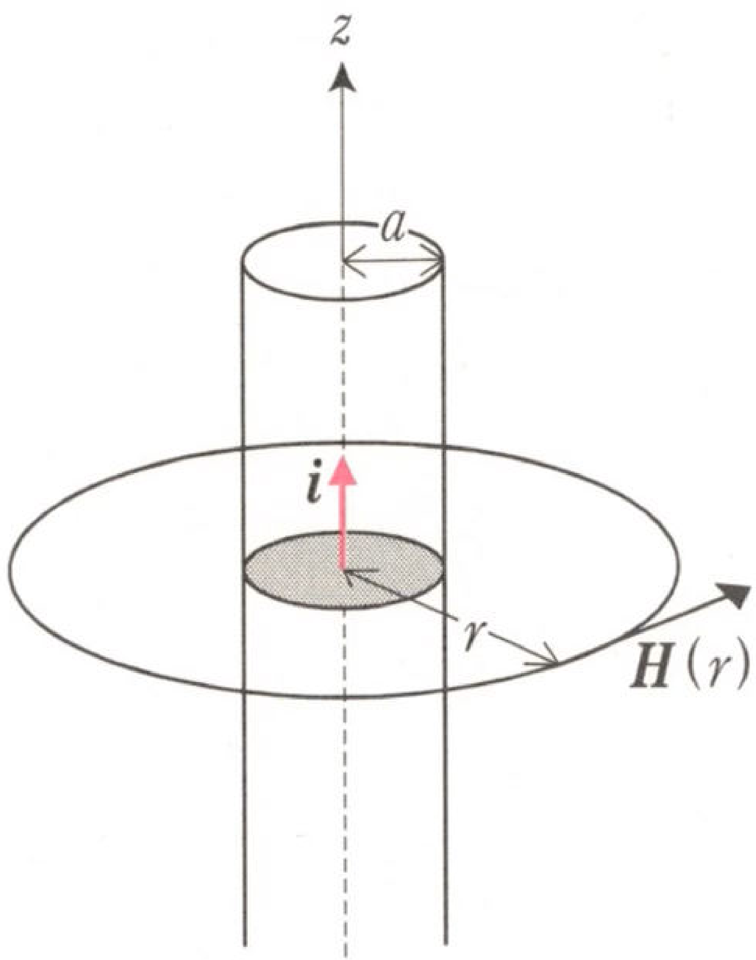
$$H(r) = \boxed{\text{(a)}\ \frac{ri}{2}} \quad (r \leqq a) \quad \cdots\cdots (\text{答})$$

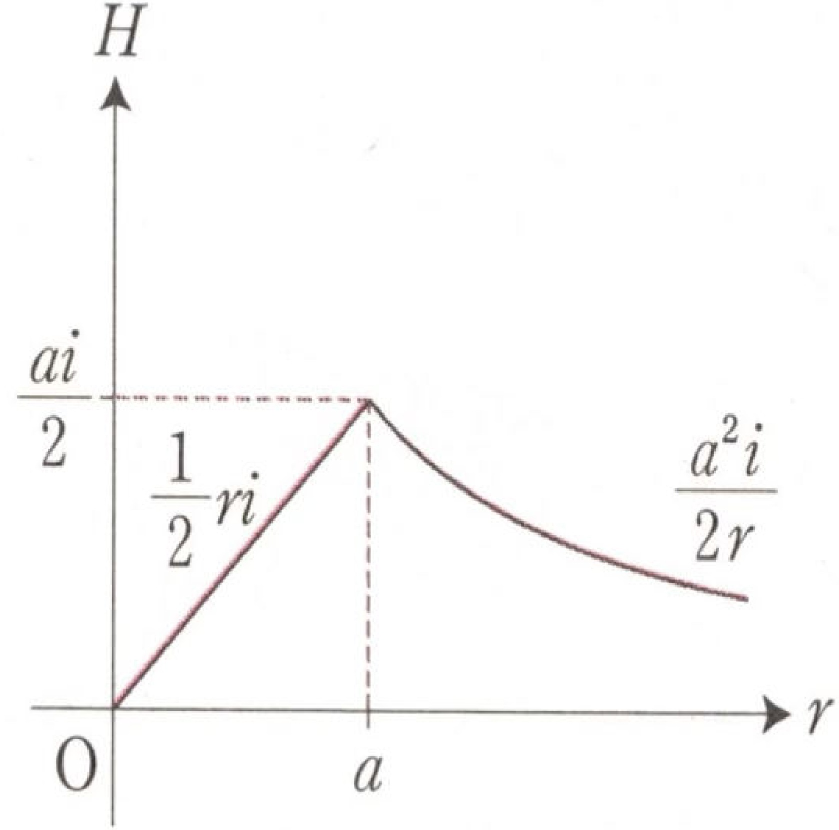
導体棒の外部 $(r > a)$ では,

$$2\pi r H(r) = \pi a^2 i$$

である。

図4-17● $r>a$ のとき





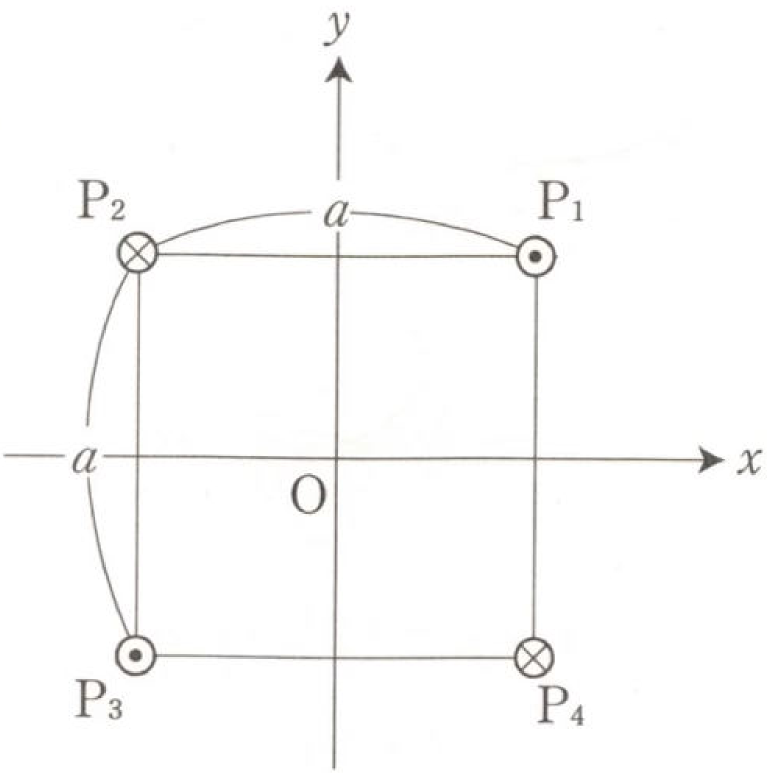
ゆえに,

$$H(r) = \boxed{\text{(b)}\ \frac{a^2 i}{2r}} \quad (r>a) \quad \cdots\cdots(答)$$

実習問題 5-1 ★★★★★

図のように，x-y 平面上に，原点 O を中心に 1 辺の長さが a の正方形 $P_1P_2P_3P_4$ を考える。これらの 4 つの頂点を通って z 軸に平行な 4 本の無限に長い平行導線があり，それぞれに大きさ I の定常電流が流れている。電流の向きは，P_1, P_3 を通る電流が z 軸正方向，P_2, P_4 を通る電流が z 軸負方向である。

このとき，P_1 を流れる電流の，単位長さあたりに働く力の大きさと向きを求めよ。



解答＆解説 2本の無限に長い平行電流に働く力の大きさ F は，電流の大きさを I_1, I_2，平行電流の距離を r，考える導線の長さを l として（122ページおよび前問），

電磁気学ノート P147

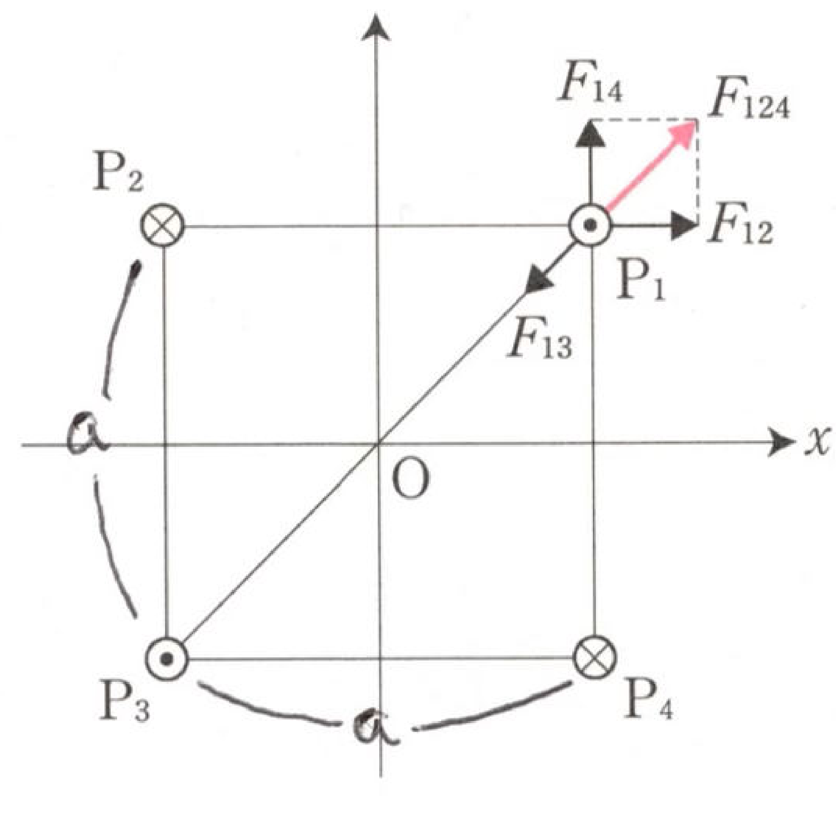
$$F = \frac{\mu_0 l I_1 I_2}{2\pi r}$$

点 P_1 を通る電流の単位長さが，点 P_2, P_3, P_4 のそれぞれから受ける電流の大きさを F_{12}, F_{13}, F_{14} とすると，$l=1$ なので

$$F = \frac{\mu_0 l I_1 I_2}{2\pi r}$$

$$F_{12} = F_{14} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a}$$

$$F_{13} = \text{(b)}\ \boxed{\frac{\mu_0 I^2}{2\sqrt{2}\pi a}}$$



それぞれの力の向きは上図のようになるから，F_{12} と F_{14} の合力は F_{13} と逆の方向を向き，その大きさ F_{124} は，

$$F_{124} = \sqrt{2}\,F_{12} = \frac{\sqrt{2}\,\mu_0 I^2}{2\pi a}$$

F_{13} は F_{124} より明らかに小さいから，3つの力の合力は原点Oと逆を向き，その大きさ F は，

$$F = F_{124} - F_{13} = \frac{\left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\mu_0 I^2}{2\pi a}$$

$$= \boxed{\text{(c)}\ \frac{\sqrt{2}\,\mu_0 I^2}{4\pi a}}$$

……