力学 1

第9回目

・仕事とエネルギー

仕事とエネルギー

仕事とは

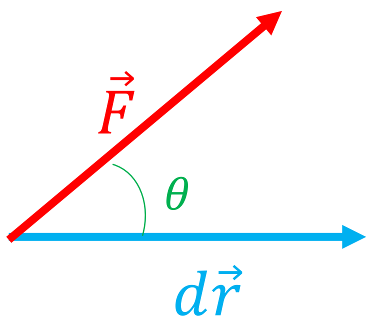
力$\vec{F}$を受けて、質点が$d\vec{r}$移動したとき、

質点に働く力 $\vec{F}$

質点の変位 $d\vec{r}$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \left|\vec{F}\right| \left|d\vec{r}\right| \cos\theta$$

力$\vec{F}$が質点になした仕事

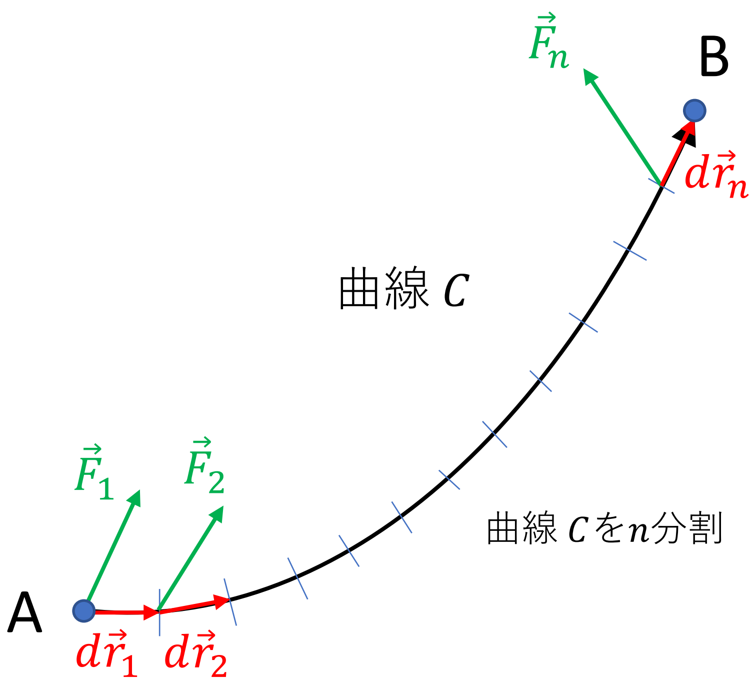


エネルギーとは

$\boxed{\text{仕事をする能力}}$

仕事とエネルギー

仕事



点Aから点Bに質点が移動するとき、
力が質点になす仕事を W とする。

$$W = \vec{F}_1 \cdot \vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \vec{r}_2 + \cdots + \vec{F}_n \cdot \vec{r}_n$$

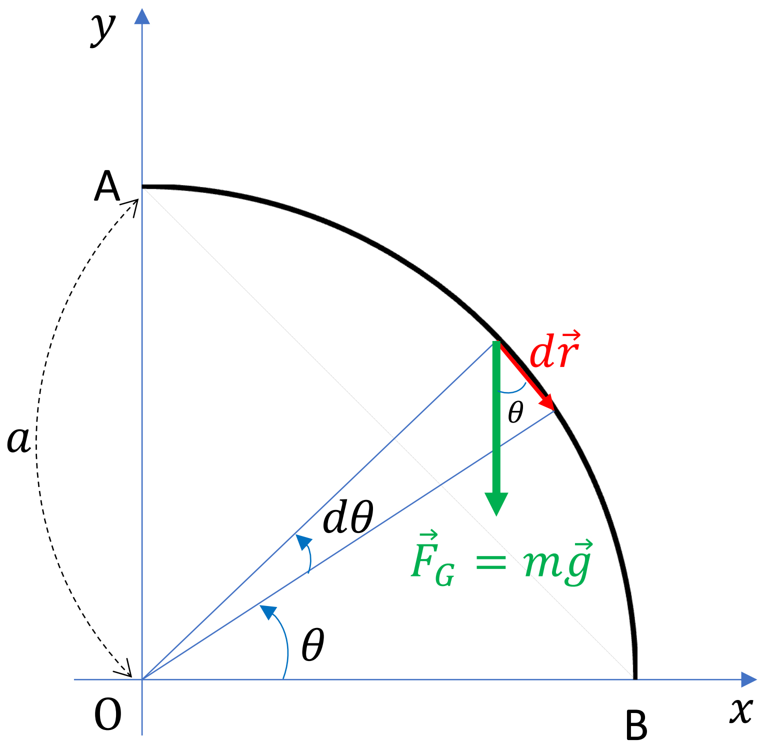
$n \to \infty$

$$\boxed{W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

曲線 C に沿ったベクトル $\vec{F}$ の線積分

仕事とエネルギー

例（教科書47ページ）



質点がAからBまで半径 a の円周上を移動するときに、

重力のする仕事Wは

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

円周上の運動なので、極座標を使うと便利

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = mg\cos\theta\,|d\vec{r}| \qquad \frac{\pi}{2} \geq \theta \geq 0$$

$$= mg\cos\theta\,(-a d\theta)$$

$d\vec{r}$ の向きは θ の負の向き

$$W = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} mga\cos\theta\, d\theta$$

A→Bで$d\theta$は負なので、
マイナス符号をつけて正にする

$$= -mga[\sin\theta]_{\pi/2}^{0}$$

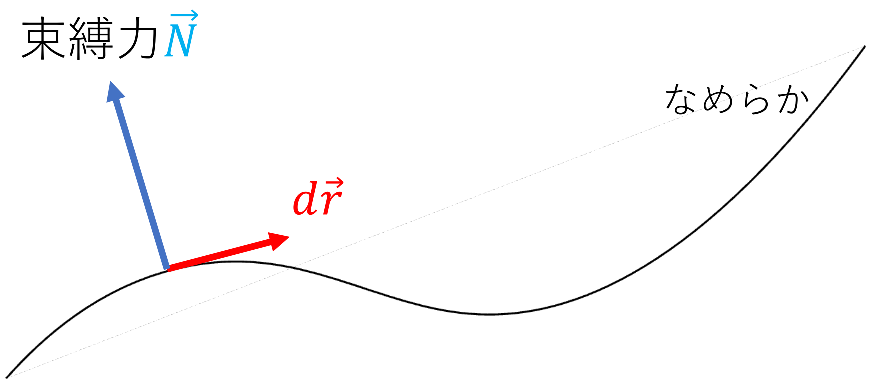
$$= \underline{mga}$$

質点をA → O へ垂直に移動したときの重力のする仕事に等しい

$$\int_a^0 (-mg)dy = mga$$

仕事とエネルギー

・束縛力のする仕事



なめらかな束縛

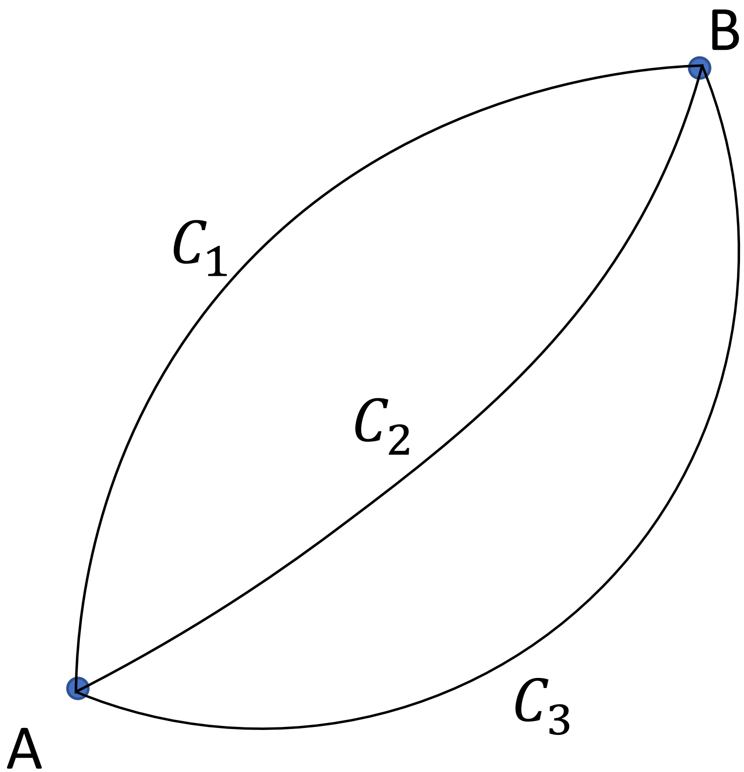
束縛力（垂直抗力）は$d\vec{r}$に垂直

束縛力のする仕事は0 （$\vec{N}\cdot d\vec{r}=0$）

（仕事をしない）

保存力とポテンシャル
（位置エネルギー）

保存力とは？



力のする仕事

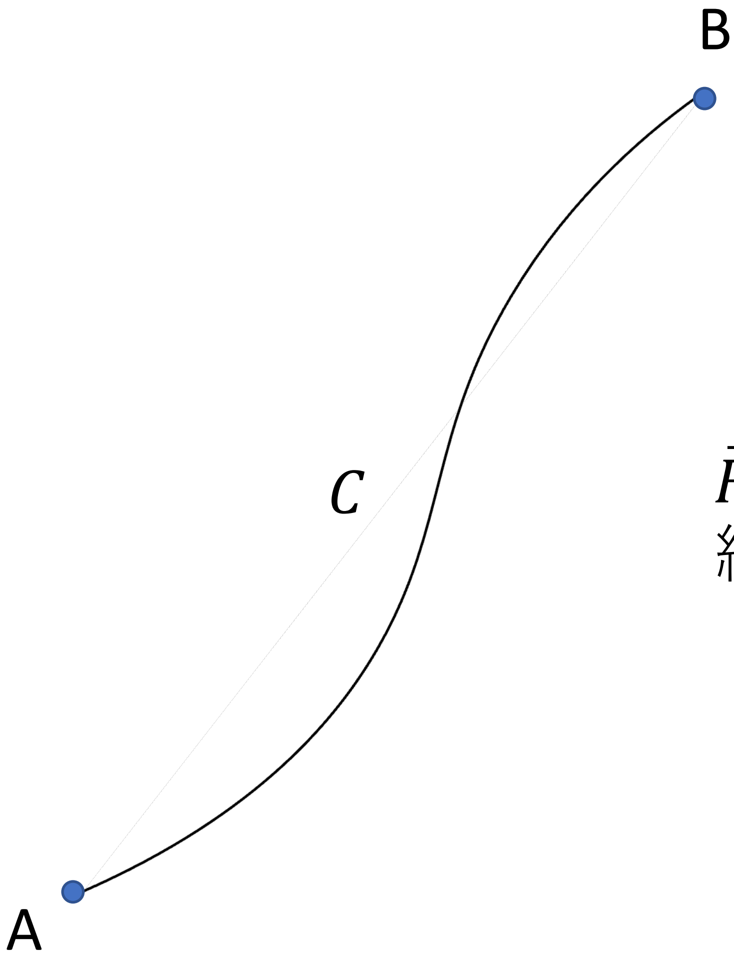
$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Wが経路によらず始点Aと終点Bだけで決まるとき、質点に働く力を**保存力**という。

$$W = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

保存力とポテンシャル
（位置エネルギー）

力$\vec{F}$が**保存力**であるためには？



始点Aは固定しておくとすると、

$\boxed{\vec{F} \text{ が保存力}}$

$\vec{F}$ のなす仕事W が、経路 C によらず、終点B の座標のみの関数となること。

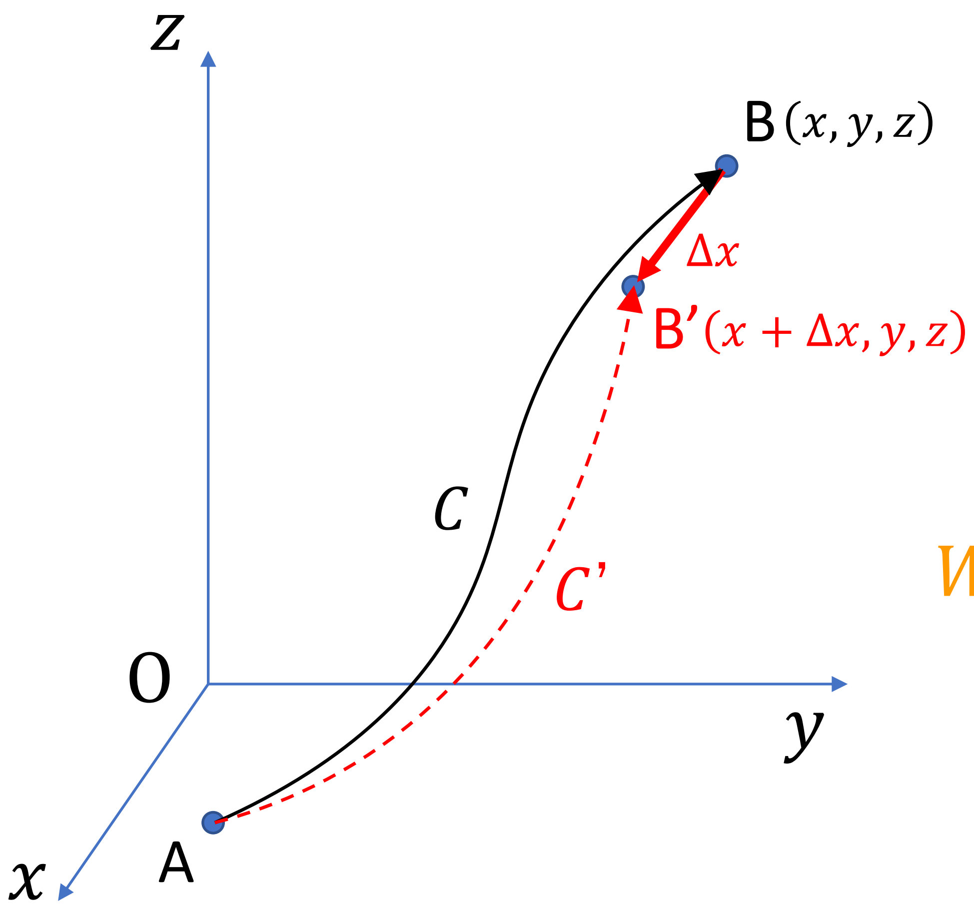
$$W(\underline{x,y,z}) = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

点Bの座標

Cの取り方によらない

保存力とポテンシャル

（位置エネルギー）

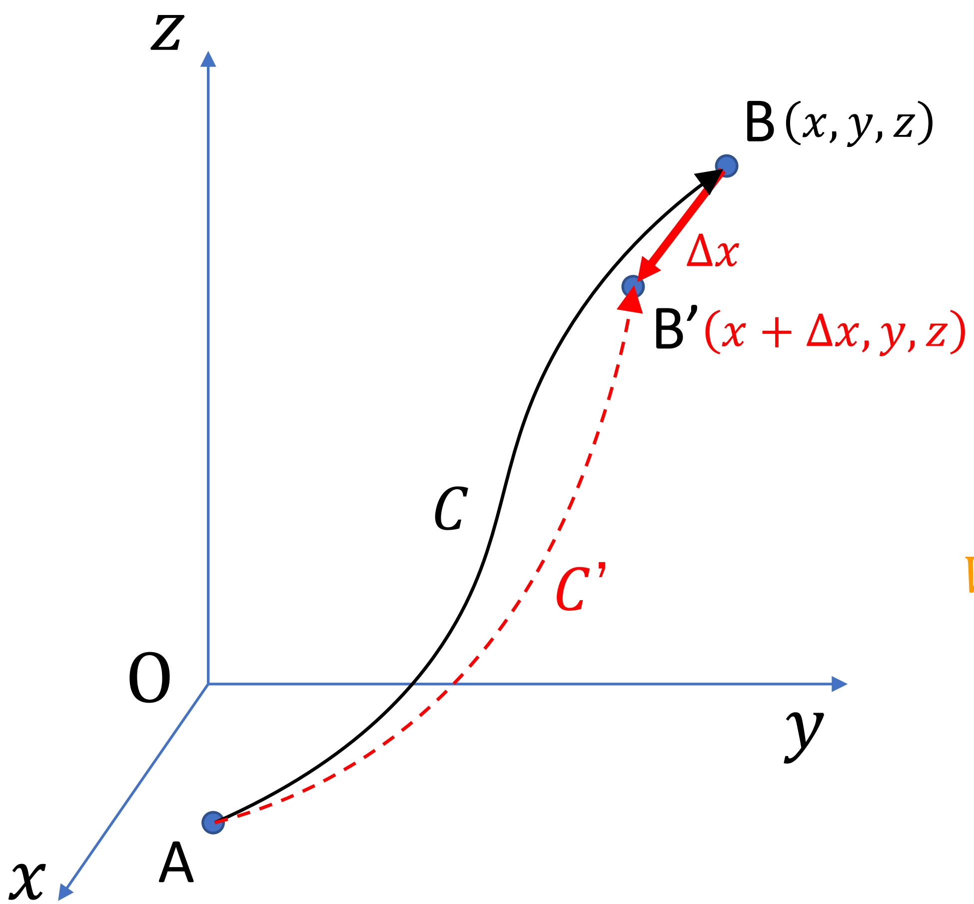


A → B’ で $\vec{F}$ のする仕事は

$$W(x + \Delta x, y, z) = \int_{C'} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

保存力とポテンシャル

（位置エネルギー）



A → B → B’ で$\vec{F}$ のする仕事は

A → B で $W(x, y, z)$

B → B’ で $F_x \Delta x$

A → B’　　　　A → (B →) B’

$$W(x+\Delta x, y, z) = W(x, y, z) + F_x \Delta x$$

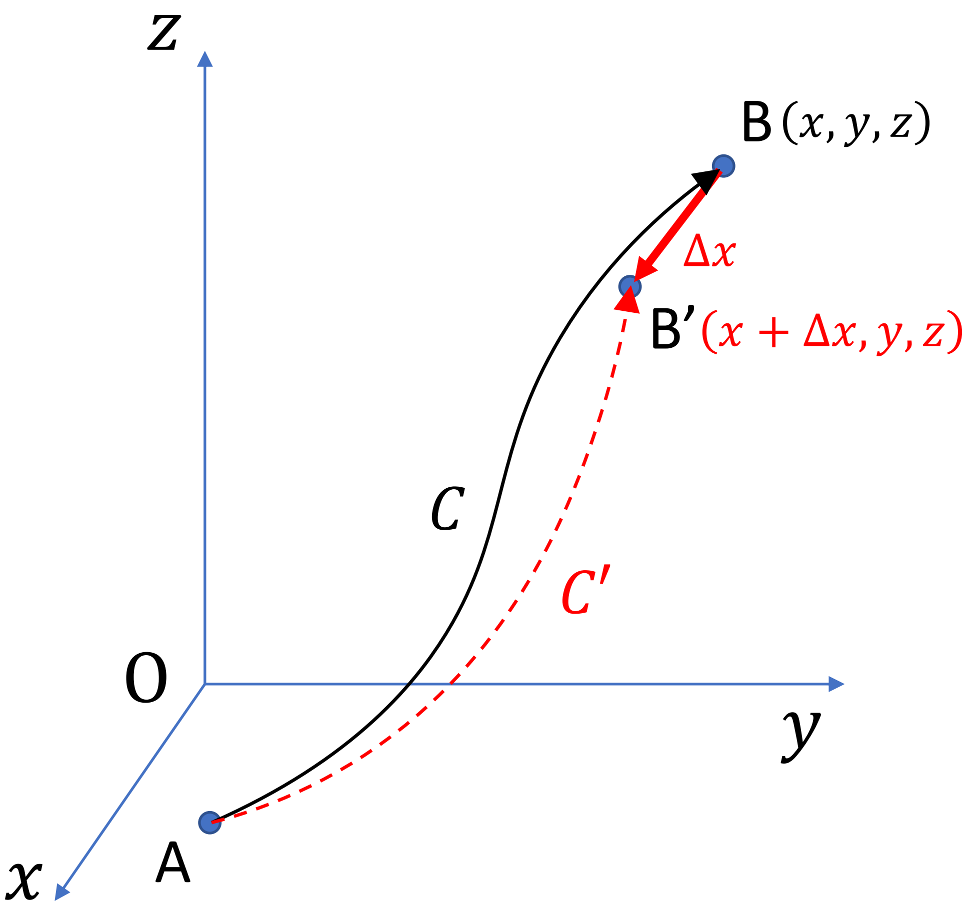
Δx で割る

$$\frac{W(x+\Delta x, y, z)}{\Delta x} = \frac{W(x, y, z)}{\Delta x} + F_x$$

$$F_x = \frac{W(x+\Delta x, y, z) - W(x, y, z)}{\Delta x}$$

保存力とポテンシャル

（位置エネルギー）



$$F_x = \frac{W(x + \Delta x, y, z) - W(x, y, z)}{\Delta x}$$

$\Delta x \to 0$

$$F_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{W(x + \Delta x, y, z) - W(x, y, z)}{\Delta x}$$

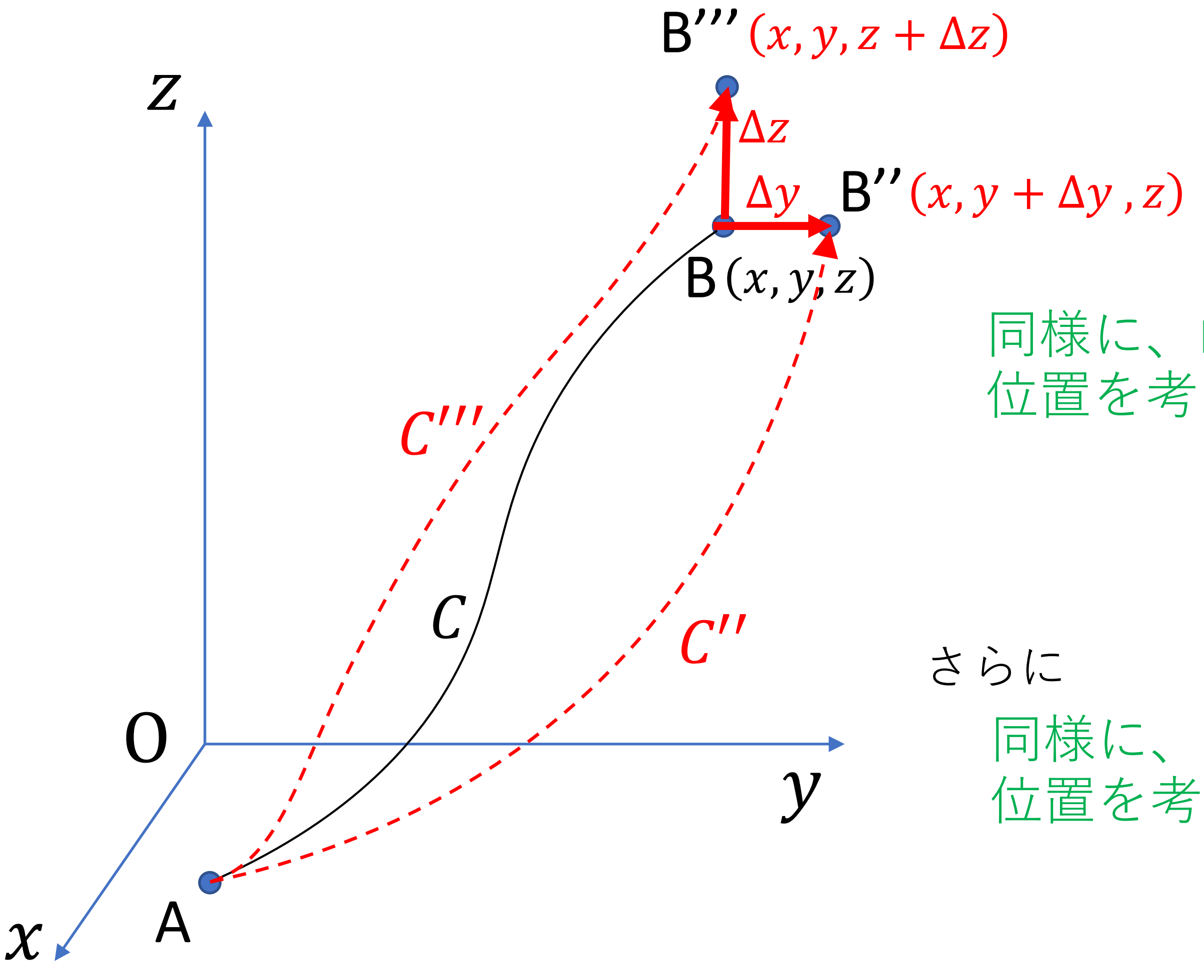
$$= \frac{\partial W}{\partial x}$$

← W のx による偏導関数

（偏微分）

保存力とポテンシャル

（位置エネルギー）



同様に、B’’としてy方向にΔyずれた位置を考えてみると、

$$F_y = \frac{\partial W}{\partial y}$$

さらに

同様に、B’’’としてz方向にΔzずれた位置を考えてみると、

$$F_z = \frac{\partial W}{\partial z}$$

保存力とポテンシャル
（位置エネルギー）

力$\vec{F}$が**保存力**であるためには？

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = \left(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z}\right)$$

ここで、

$$U(x, y, z) = -W\ (x, y, z) + 定数$$

を導入する

ポテンシャル
（位置エネルギー）

Wを使うと、力$\vec{F}$はWの小さい方から大きい方へ向かう。
U を使うと、力$\vec{F}$はU の大きい方から小さい方へ向かう。

$$\vec{F} = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z}\right) = -\nabla U$$

ナブラ $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$　（3次元直交座標系において）

保存力とポテンシャル
（位置エネルギー）

ところで、

$$W(x,y,z) = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

点Bの座標

$W(\mathrm{B})$ と書くと、

$$U(\mathrm{B}) = -W(\mathrm{B}) + \text{定数} = -W(\mathrm{B}) + C$$

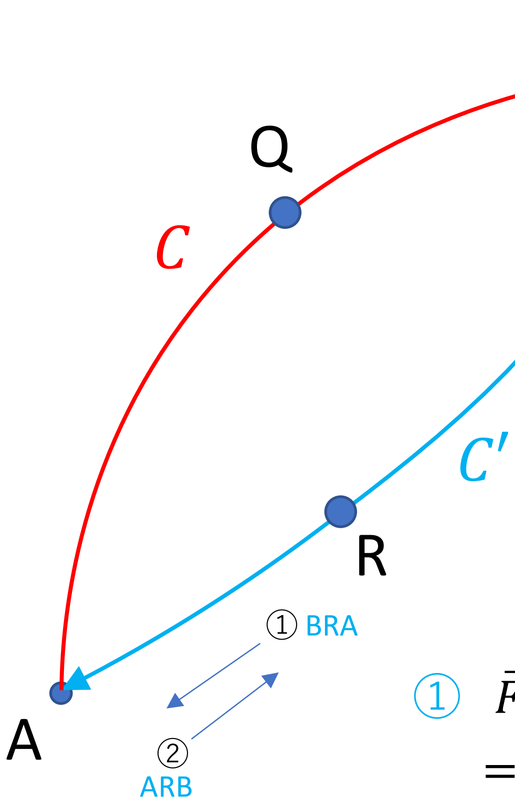
B に始点Aを入れると、

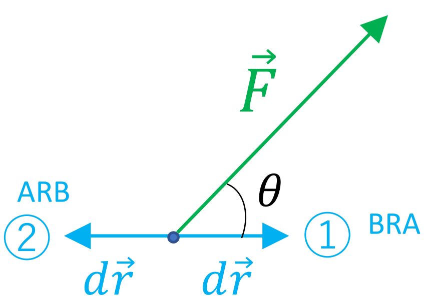
$$U(\mathrm{A}) = -W(\mathrm{A}) + C$$

始点Aから動かなければ、0 （力による仕事は0）

A → B → A ではどうなる？

保存力とポテンシャル





① $\vec{F}\cdot d\vec{r}$

$$= |\vec{F}||d\vec{r}|\cos\theta$$

② $\vec{F}\cdot d\vec{r}$

$$= |\vec{F}||d\vec{r}|\cos(\pi-\theta)$$

$$= -|\vec{F}||d\vec{r}|\cos\theta$$

$$W(A) = \int_{C} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C'} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{\mathrm{AQB}} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\mathrm{BRA}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{\mathrm{AQB}} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\mathrm{ARB}} \vec{F}\cdot (-d\vec{r})$$

$$= \int_{\mathrm{AQB}} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{\mathrm{ARB}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

保存力のする仕事は
経路によらない

$$= \int_{\mathrm{AQB}} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{\mathrm{AQB}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

保存力とポテンシャル

つまり、 $$U(\mathrm{A}) = \underbrace{-W(\mathrm{A})}_{0} + C = C$$

したがって、 $$U(\mathrm{B}) = -W(\mathrm{B}) + C = -W(\mathrm{B}) + U(\mathrm{A})$$

$$U(\mathrm{A}) - U(\mathrm{B}) = W(\mathrm{B})$$

力 $\vec{F}$ が**保存力**なら、 A → Bで力のする仕事は

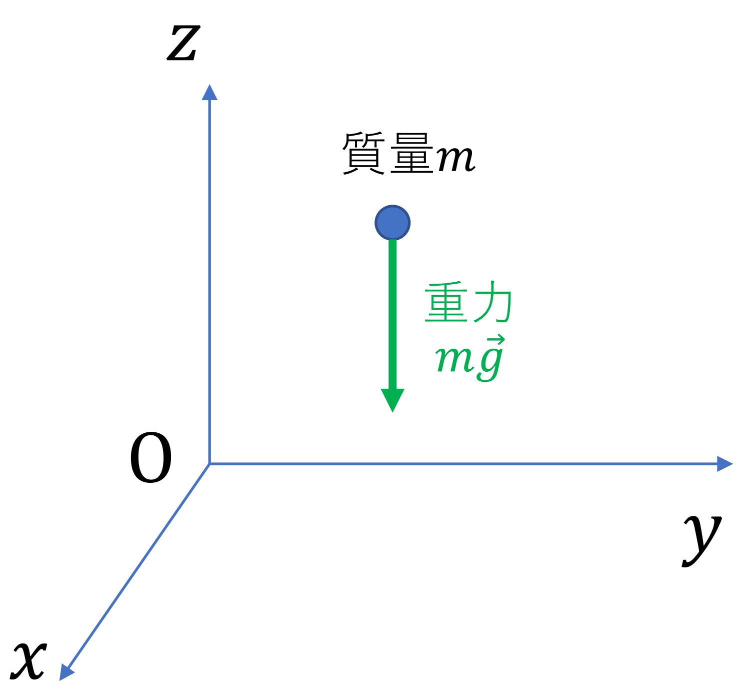
$\boldsymbol{U(\mathrm{A}) - U(\mathrm{B})}$となる。

力学的エネルギー保存則

力学的エネルギー ＝ 運動エネルギー ＋ 位置エネルギー

$\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$　　（ポテンシャル）

例



重力によるポテンシャル $U = mgz$

（地表面近く）

運動方程式

$$
\begin{cases}
m\ddot{x} = 0 \\
m\ddot{y} = 0 \\
m\ddot{z} = -\dfrac{\partial U}{\partial z} = -mg
\end{cases}
$$

力学的エネルギー保存則

z軸方向の運動方程式 $$m\ddot{z} = -mg$$

$\dot{z}$を両辺にかける

$$m\ddot{z}\dot{z} = -mg\dot{z}$$

$\dot{z}\ddot{z} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}(\dot{z}^2)$ なので →

$$\frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(\dot{z}^2) = -mg\frac{d}{dt}(z)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{z}^2 + mgz\right) = 0$$

力学的エネルギーが保存する

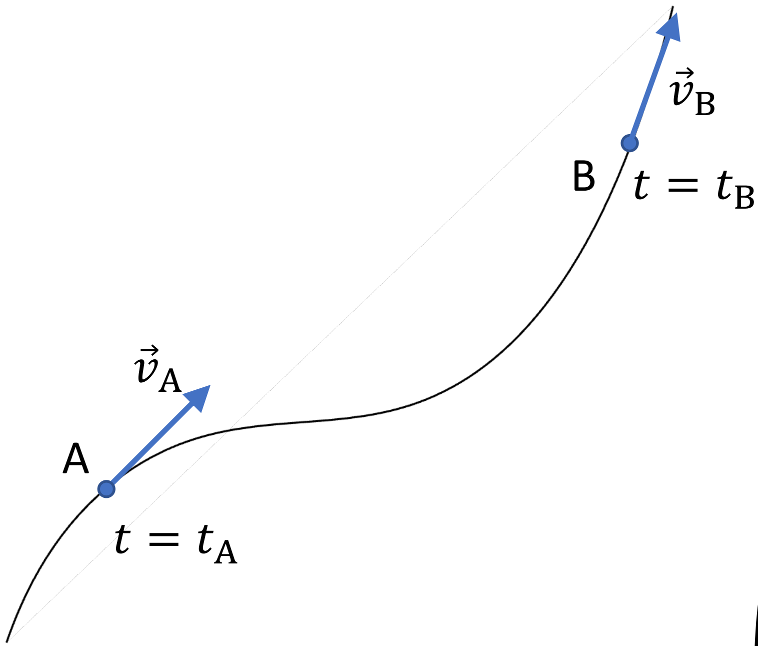
$\dfrac{1}{2}m\dot{z}^2 + mgz =$ 定数（時間によらない）

$\dfrac{1}{2}m\dot{z}^2 + U =$ 定数（時間によらない）

$U \rightarrow U' = U +$定数としても同じ形

Uの基準点の取り方によって定数は変わる。 $\dfrac{1}{2}m\dot{z}^2 + U' =$ 定数

力学的エネルギー保存則



一般的には、 運動方程式

今は保存力でないものも含む

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

両辺 $\dot{\vec{r}}$ との内積

$$m\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}$$

$$\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\vec{r}}^2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2\right) = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}$$

$t = t_{\mathrm{A}}$から$t = t_{\mathrm{B}}$まで積分すると

$$\int_{t_{\mathrm{A}}}^{t_{\mathrm{B}}} \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2\right) dt = \int_{t_{\mathrm{A}}}^{t_{\mathrm{B}}} \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F} dt$$

A → Bで$\vec{F}$のする仕事

$$\frac{m}{2}\vec{v}_{\mathrm{B}}{}^2 - \frac{m}{2}\vec{v}_{\mathrm{A}}{}^2 \qquad \int_{t_{\mathrm{A}}}^{t_{\mathrm{B}}} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = W$$

$G(x) = \int F_x(x) dx$ とおいてみると

$$\frac{dG}{dt} = \frac{dG}{dx}\frac{dx}{dt} = F_x(x(t))\frac{dx}{dt}$$

$$\int_{t_{\mathrm{A}}}^{t_{\mathrm{B}}} \frac{dG}{dt} dt = \boxed{\int_{t_{\mathrm{A}}}^{t_{\mathrm{B}}} F_x(x(t))\frac{dx}{dt} dt}$$

$$||$$

$$G(x(t_{\mathrm{B}})) - G(x(t_{\mathrm{A}})) = G(\mathrm{B}) - G(\mathrm{A}) = \boxed{\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} F_x(x) dx}$$

力学的エネルギー保存則

$K = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$として運動エネルギーを定義すると

$$K(\mathrm{B}) - K(\mathrm{A}) = W$$

運動エネルギーの増加分＝力（外力）のした仕事

力が保存力なら　$W = U(\mathrm{A}) - U(\mathrm{B})$

$$\downarrow$$

$$K(\mathrm{B}) - K(\mathrm{A}) = U(\mathrm{A}) - U(\mathrm{B})$$

$$\downarrow$$

$$K(\mathrm{B}) + U(\mathrm{B}) = K(\mathrm{A}) + U(\mathrm{A})$$

$\boxed{K + U = E \quad \text{力学的エネルギー}}$

力が保存力なら、力学的エネルギーが保存する

力学的エネルギー保存則

力が保存力として、運動方程式を変形して
力学的エネルギーの保存を導く

$$\vec{F} = -\nabla U$$

$$m\ddot{\vec{r}} = -\nabla U$$

両辺 $\dot{\vec{r}}$ との内積

$$m\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = -\nabla U \cdot \dot{\vec{r}}$$

$$\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\vec{r}}^2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2\right) = -\frac{d}{dt}U$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + U\right) = 0$$

力学的エネルギーが変化しない（保存する）

$$U(x,y,z) = U(x(t),y(t),z(t))$$

Uは座標の関数

本来、 U は質点とは関係なく空間に存在する。
今は、質点の位置におけるUを考えるので、
$U(x,y,z)$の(x,y,z)は質点の位置と考える。

$$\frac{d}{dt}U = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$= \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial z}\dot{z}$$

$$= \nabla U \cdot \dot{\vec{r}}$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) = \vec{i}\,\frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial U}{\partial z}$$

次元（物理学的次元）

力学1に出てくる任意の物理量Xは、

基本的な量

L ：長さ
M ：質量
T ：時間

$$X = \alpha\, L^a\, M^b\, T^c$$ と表される

ある係数

M に関する次元

X の次元 $[X]$ は $[L^a\, M^b\, T^c]$ である。

L に関する次元　T に関する次元

$$[速度] = \frac{[長さ]}{[時間]} = [L\,T^{-1}]$$

$$[加速度] = \frac{[速度]}{[時間]} = [L\,T^{-2}]$$

$$[力] = [質量] \times [加速度] = [L\,M\,T^{-2}]$$

単位系

MKS単位系

基本単位

長さ：m（メートル）
質量：kg（キログラム）
時間：s（秒）

組立単位

力：$kg \cdot m \cdot s^{-2}$ = N（ニュートン）

仕事・エネルギー：$kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$ = J（ジュール）

圧力：$kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$ = Pa（パスカル）

・
・
・

余談

MKS単位系

⬇

MKSA単位系
A:アンペア

⬇

SI単位系
+温度、物質量、光度

仕事とエネルギー

仕事率　単位時間当たりの仕事　$P = \dfrac{dW}{dt}$

（パワー）

$$1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{J/s}$$