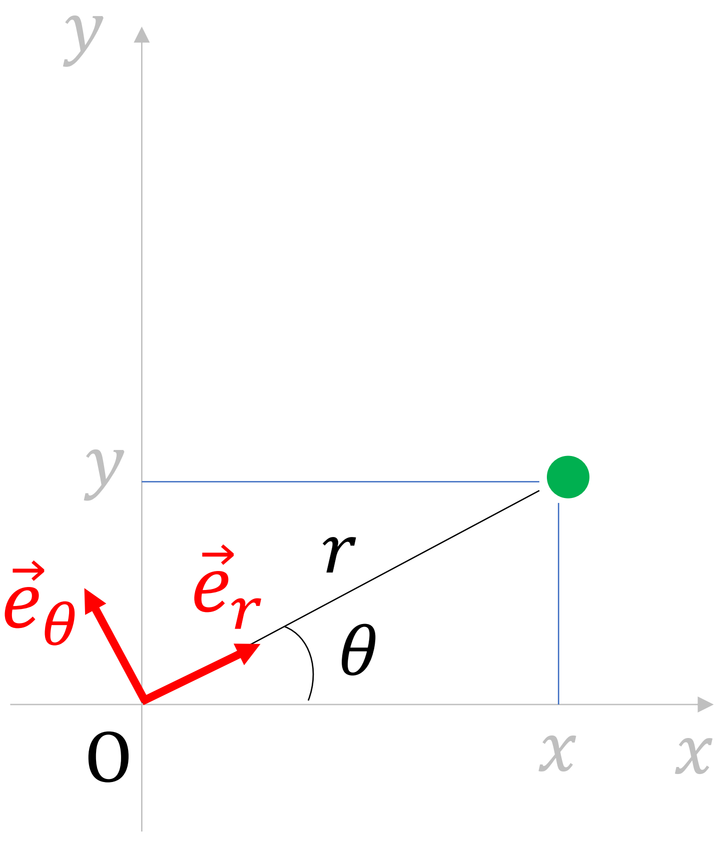
力学 1

第4回目

5．2次元極座標での速度、加速度

速度、加速度を$\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ 成分を用いて表す



$$|\vec{e}_r| = |\vec{e}_\theta| = 1$$

位置　$\vec{r} = r\vec{e}_r$

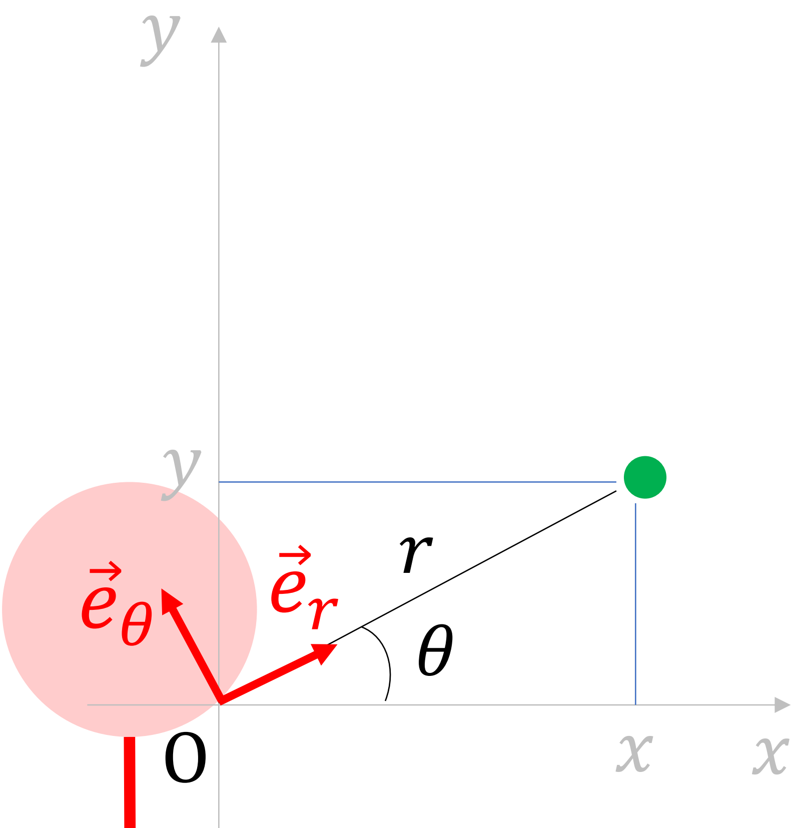
速度

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r) = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

?

5．2次元極座標での速度、加速度

速度、加速度を$\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ 成分を用いて表す



位置　$\vec{r} = r\vec{e}_r$

速度

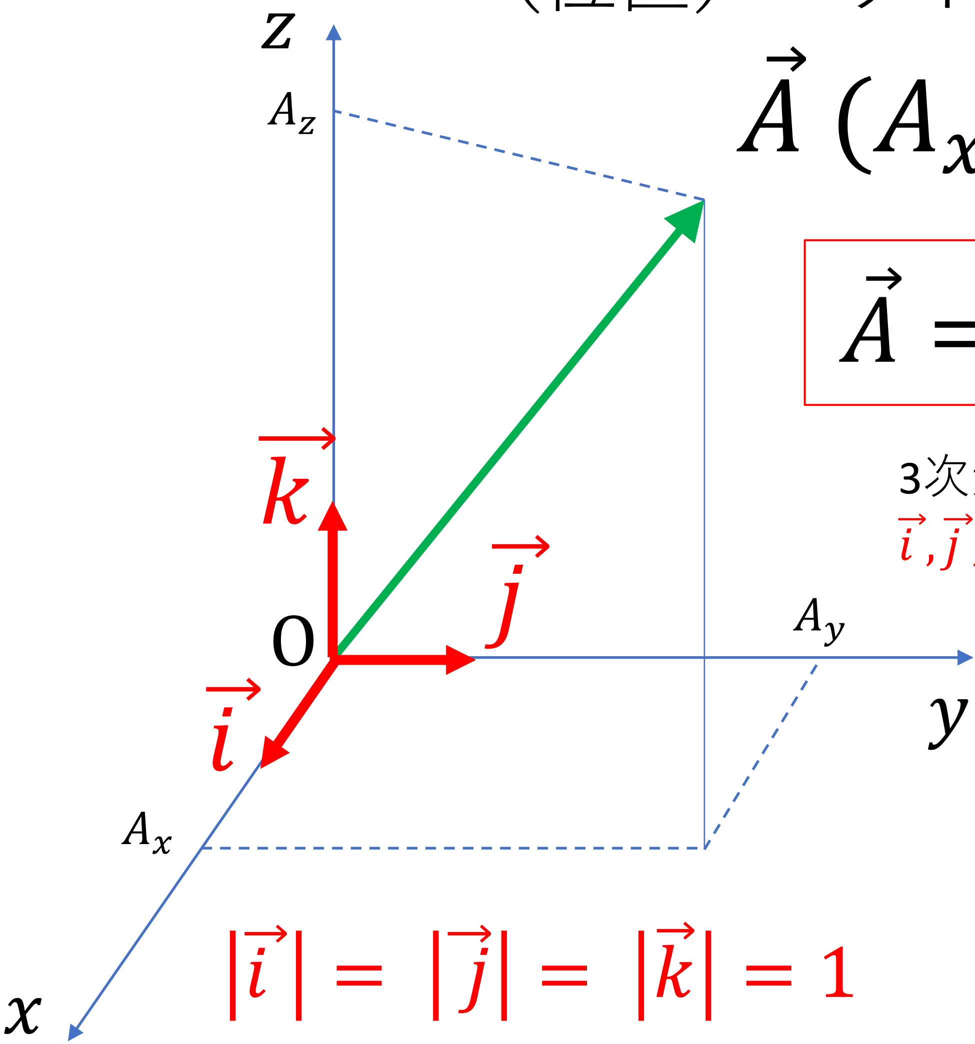
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r) = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

?

・なぜ、この方向？
・なぜ、θ が付く？

（第１回目） 3次元直交座標では？

（位置）ベクトルの表し方



$$\vec{A}\,(A_x, A_y, A_z)$$

$$\boxed{\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}}$$

3次元空間のすべてのベクトルは
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ の組み合わせで表すことができる

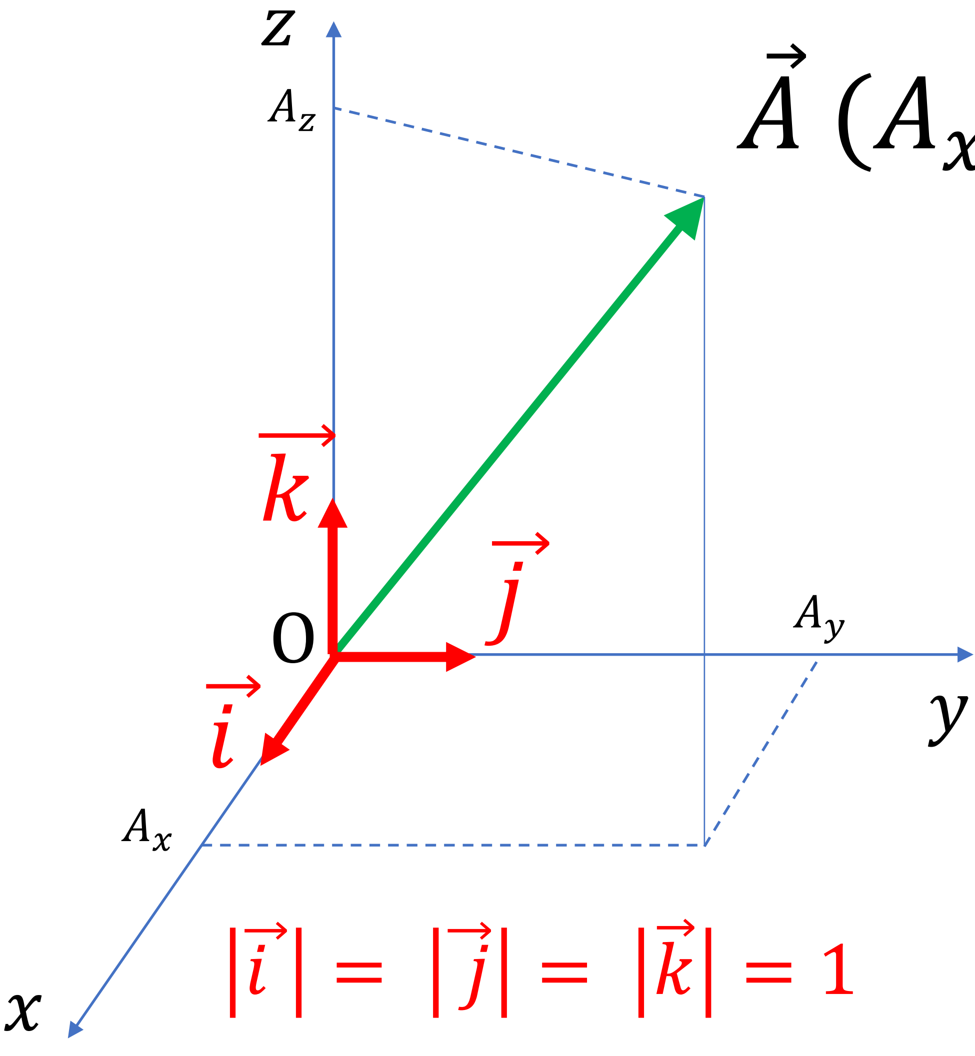
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ は互いに独立なベクトル

（$\vec{i} \neq a\vec{j}$ など）

ある定数

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

（第１回目）



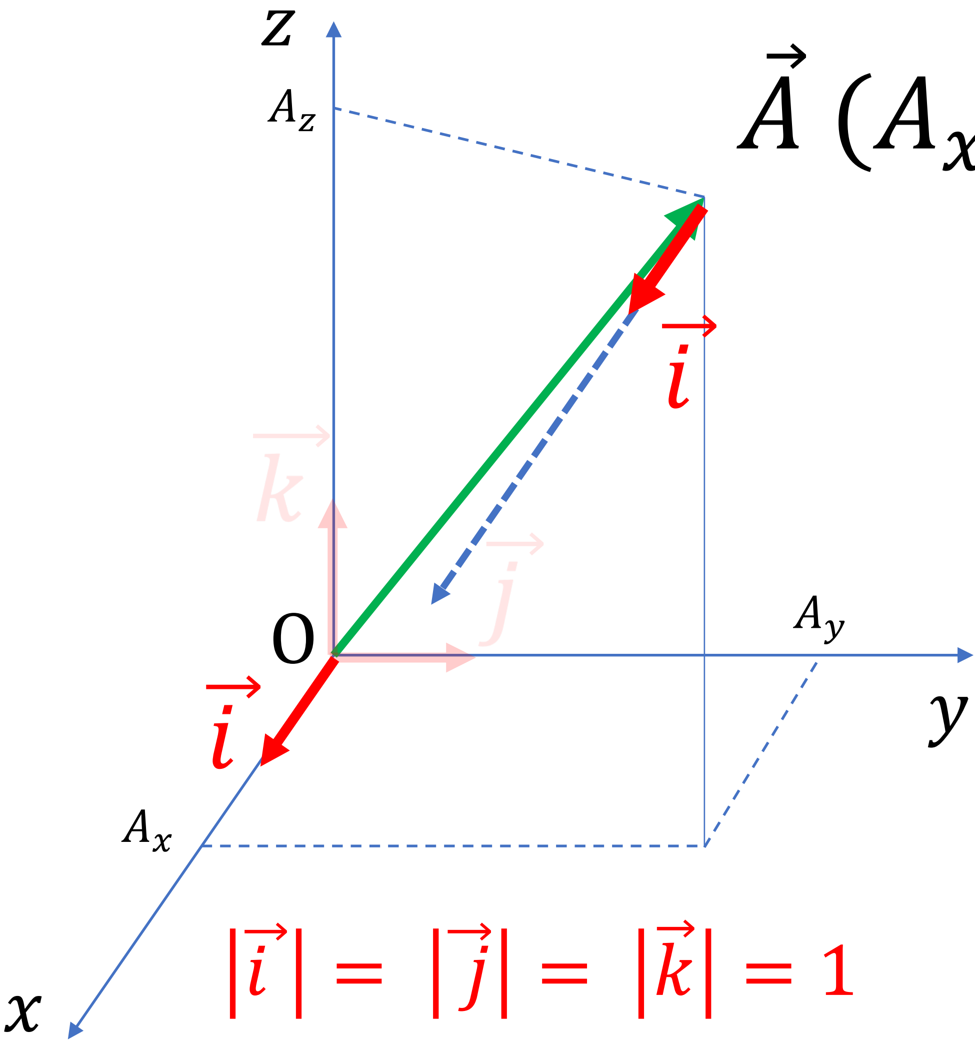
$$\vec{A}\,(A_x, A_y, A_z)$$

３次元直交座標で位置を表すパラメータ

$$(x, y, z)$$

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

$\vec{A}\,(A_x, A_y, A_z)$



$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$

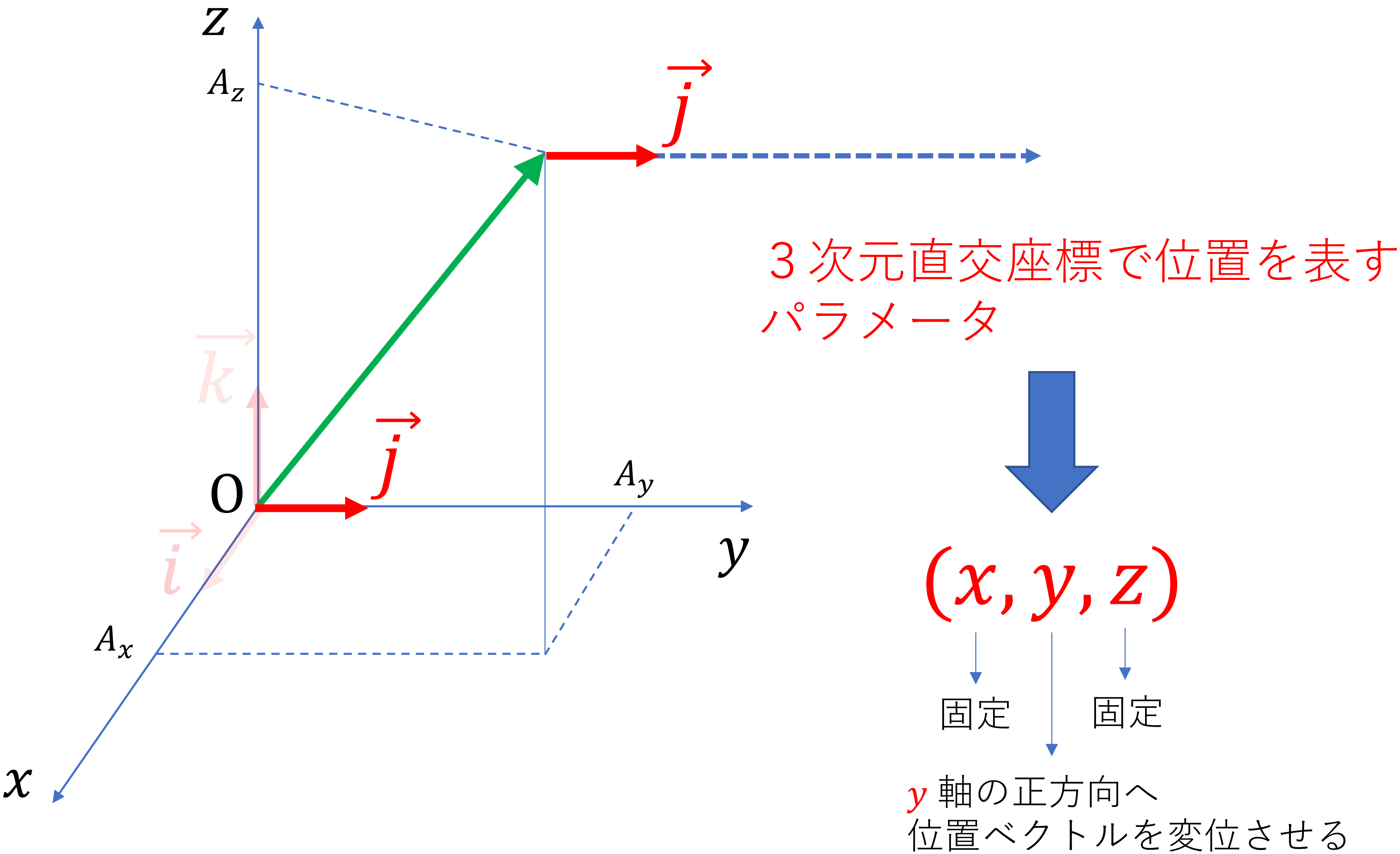
３次元直交座標で位置を表すパラメータ

(x, y, z)

固定

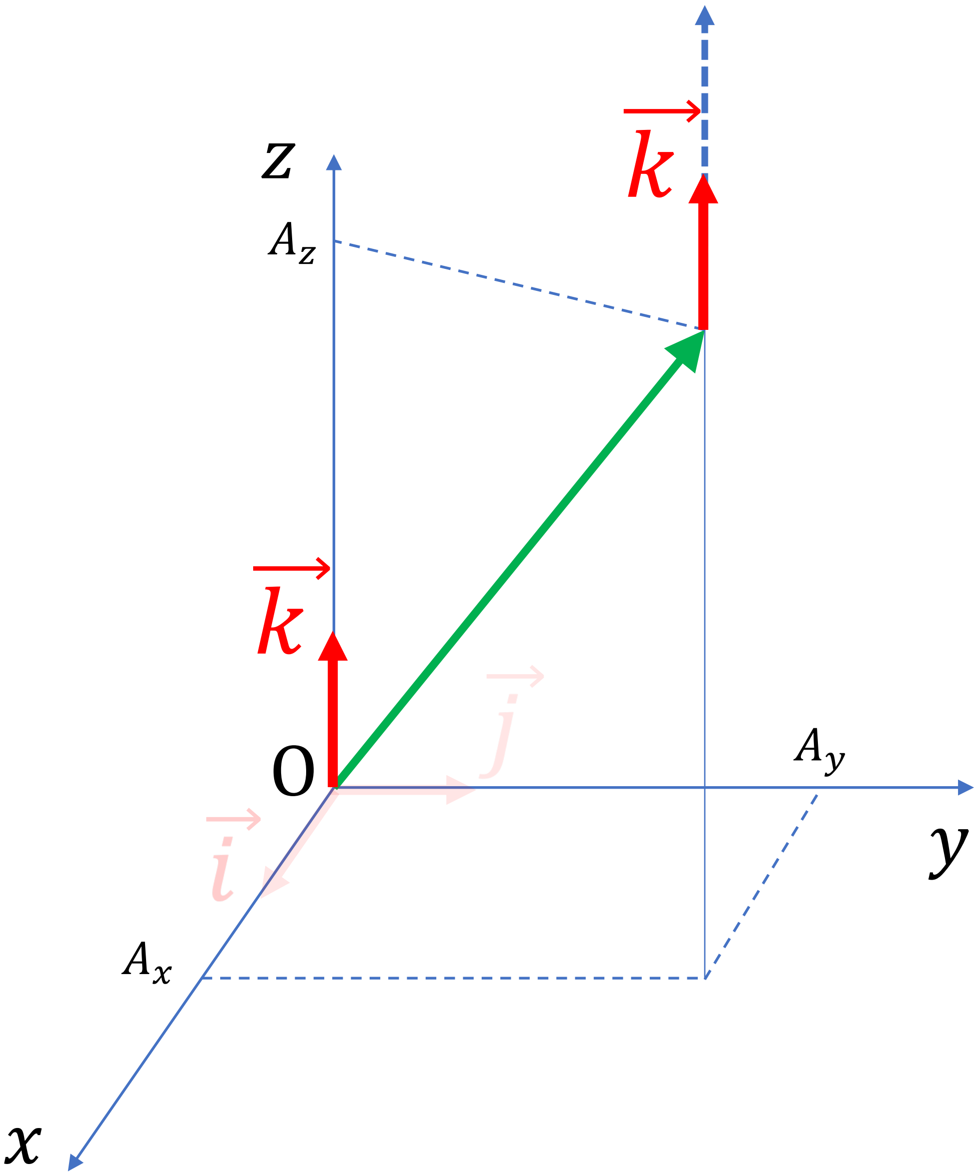
x 軸の正方向へ
位置ベクトルを変位させる

（第１回目）



z
A_z
$\vec{j}$
３次元直交座標で位置を表す
パラメータ
$\vec{k}$
O
$\vec{j}$
A_y
$\vec{i}$
y
(x, y, z)
A_x
固定
固定
x
y 軸の正方向へ
位置ベクトルを変位させる

（第１回目）



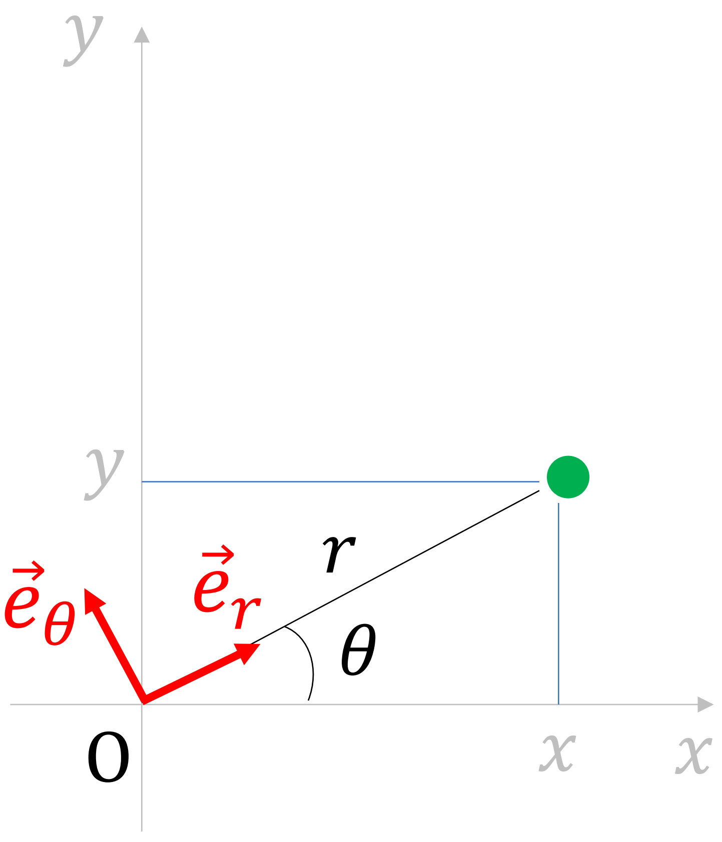
３次元直交座標で位置を表すパラメータ

$$(\underbrace{x, y}_{\text{固定}}, z)$$

z 軸の正方向へ
位置ベクトルを変位させる

5．2次元極座標での速度、加速度

速度、加速度を$\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ 成分を用いて表す



パラメータは、rとθ

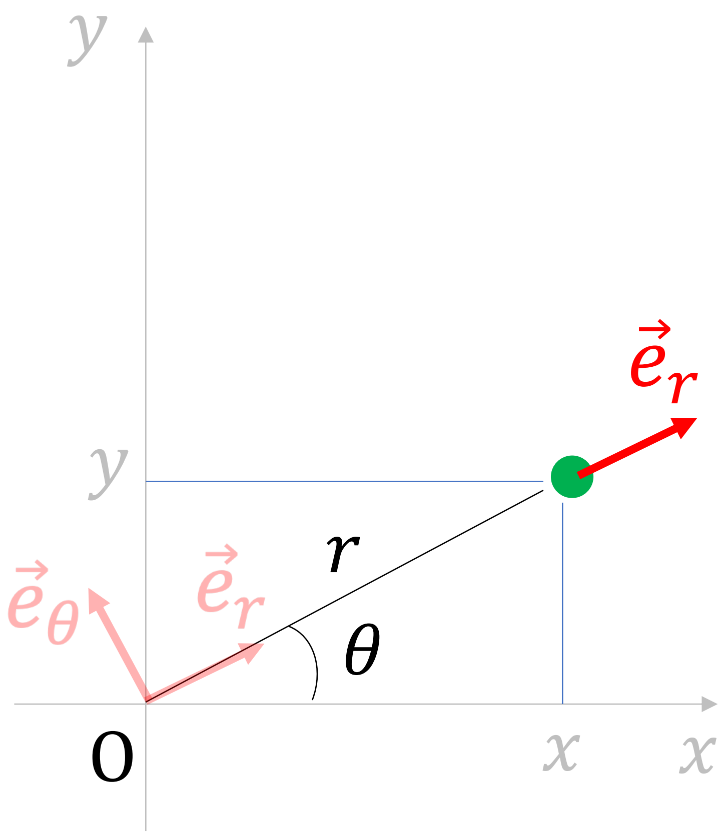
θを固定してr を変化 → $\vec{e}_r$方向の変化

rを固定してθを変化 → $\vec{e}_\theta$方向の変化

$$|\vec{e}_r| = |\vec{e}_\theta| = 1$$

5．2次元極座標での速度、加速度

速度、加速度を$\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ 成分を用いて表す



パラメータは、rとθ

質点の位置は

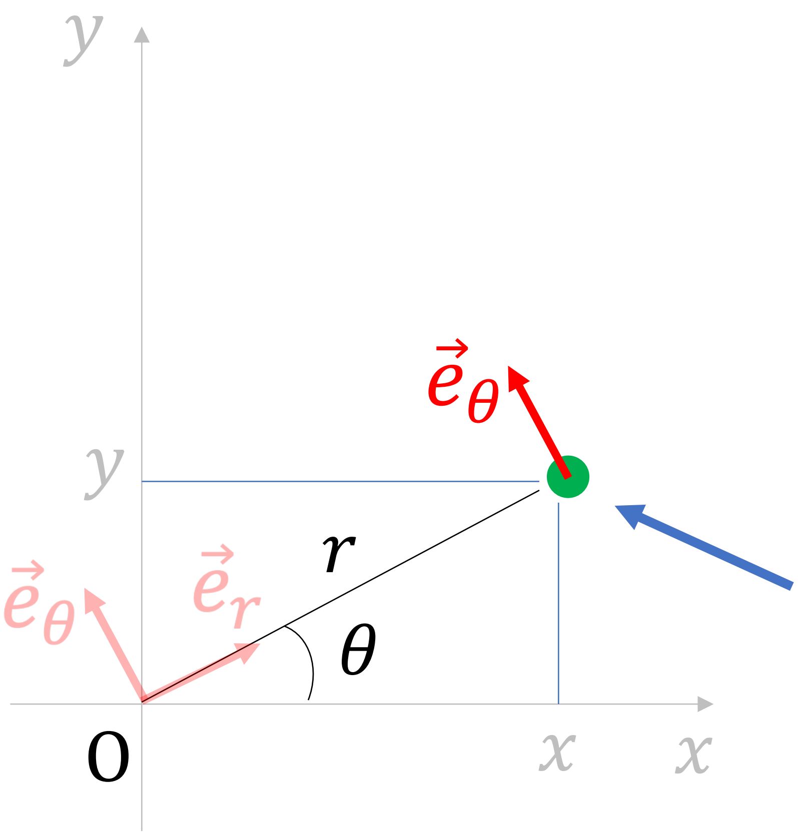
θを固定してr を変化 → $\vec{e}_r$方向の変化

rを固定してθを変化 → $\vec{e}_\theta$方向の変化

$$|\vec{e}_r| = |\vec{e}_\theta| = 1$$

5．2次元極座標での速度、加速度

速度、加速度を$\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ 成分を用いて表す



パラメータは、rとθ

質点の位置は

θを固定してrを変化 → $\vec{e}_r$方向の変化

rを固定してθを変化 → $\vec{e}_\theta$方向の変化

$$|\vec{e}_r| = |\vec{e}_\theta| = 1$$

座標系

1. 直交座標
2. 極座標
3. 円筒座標
4. 運動の自由度
5. 2次元極座標での速度、加速度

6. 接線加速度と法線加速度

---

7. 単振り子 ← 後で運動方程式の例として扱う

6.　接線加速度と法線加速度

接線加速度 → 軌道の接線方向（軌道に沿う方向）

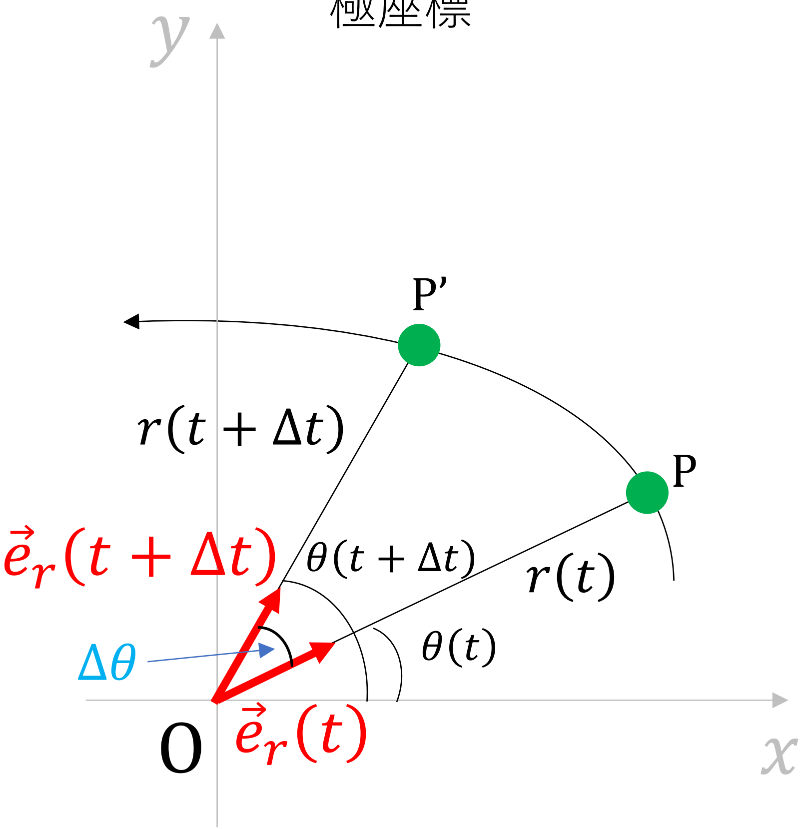
法線加速度 → 軌道の接線方向と垂直方向（法線方向）
（正と負の向きに注意、この講義では
曲率中心を向く向きを正とする）

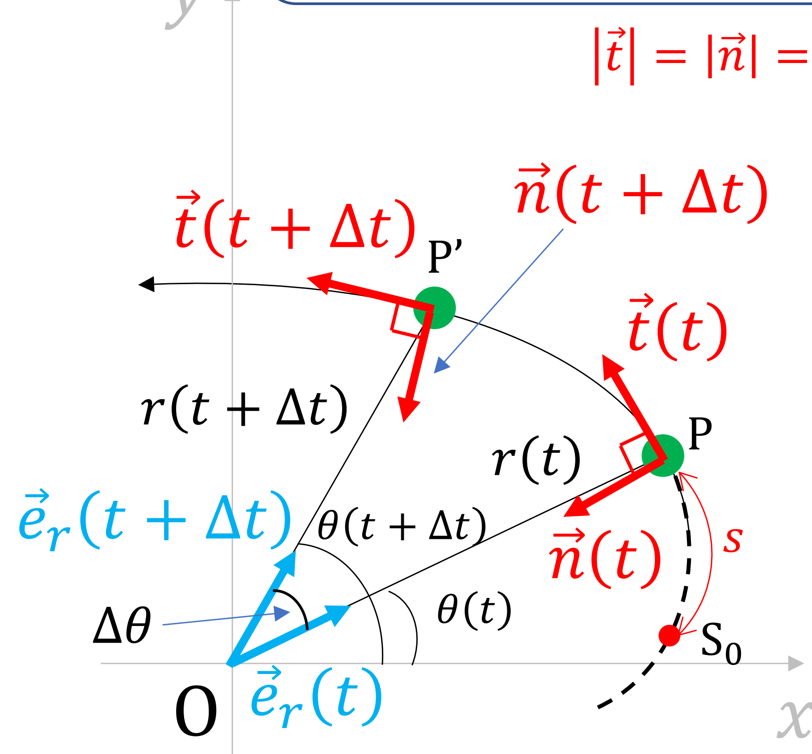
$\vec{t}(t)$　接線方向単位ベクトル

$\vec{n}(t)$　法線方向単位ベクトル

$|\vec{t}| = |\vec{n}| = 1$

極座標





sは、ある点S_0から点Pまでの距離

6. 接線加速度と法線加速度

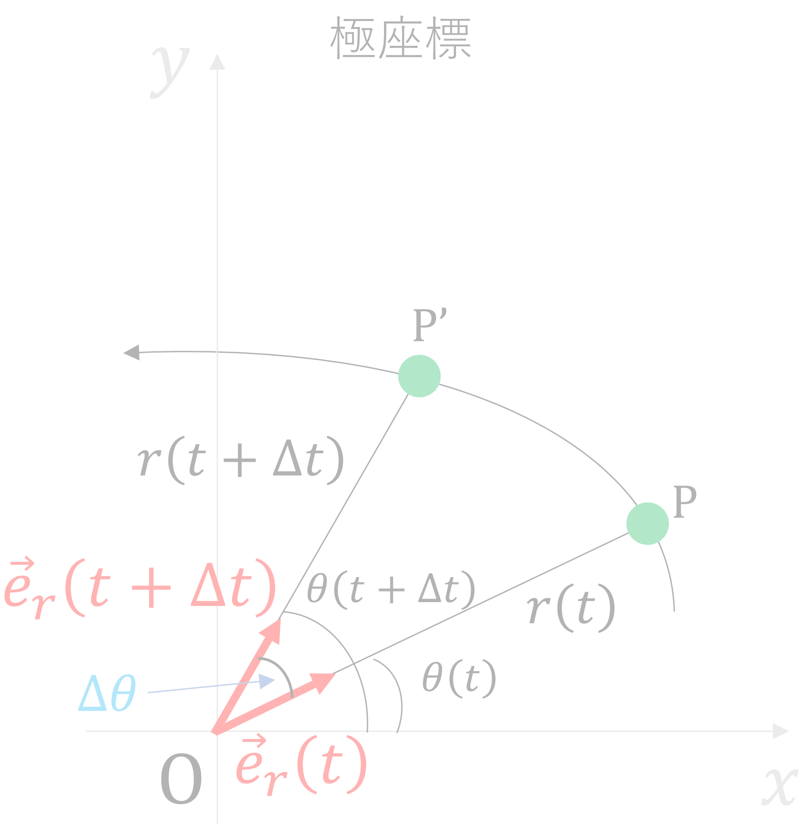
接線加速度 → 軌道の接線方向（軌道に沿う方向）

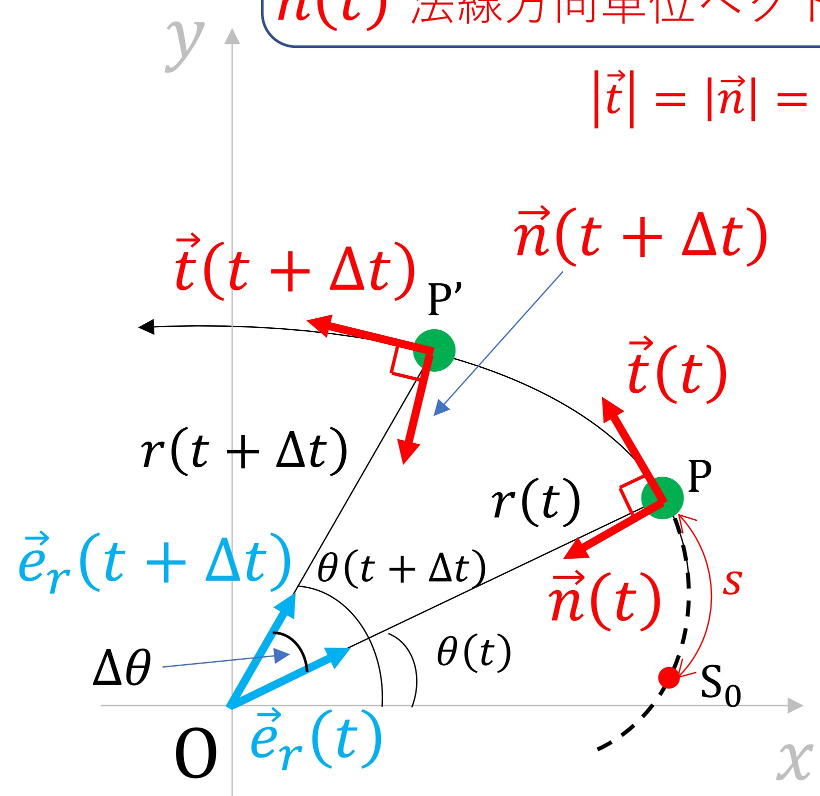
法線加速度 → 軌道の接線方向と垂直方向（法線方向）
（正と負の方向に注意、この講義では曲率中心を向く方向を正とする）

$\vec{t}(t)$ 接線方向単位ベクトル

$\vec{n}(t)$ 法線方向単位ベクトル

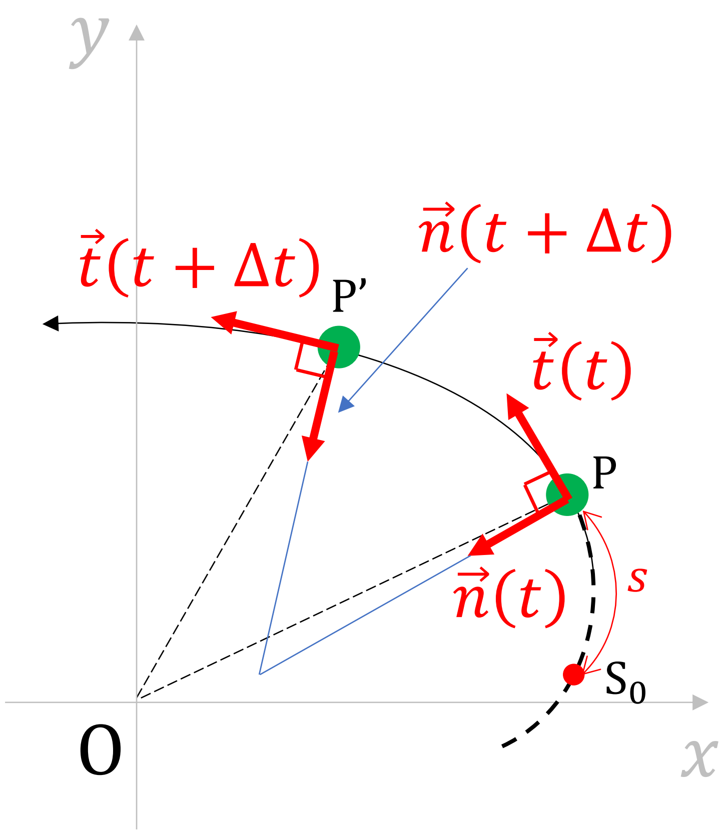
$|\vec{t}| = |\vec{n}| = 1$





sは、ある点S_0から点Pまでの距離

6. 接線加速度と法線加速度



sは、ある点S_0から点Pまでの距離

まず、速度 $\vec{v}$ について

$$\vec{v}(t) = \dot{s}(t)\vec{t}(t)$$

$\vec{v}(t)$の大きさ$|\vec{v}| = \frac{ds(t)}{dt} = \dot{s}(t)$

$\vec{v}(t)$の向きは $\vec{t}(t)$

加速度は、

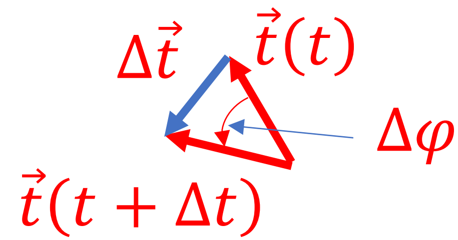
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{s}(t)\vec{t}(t)\right)$$

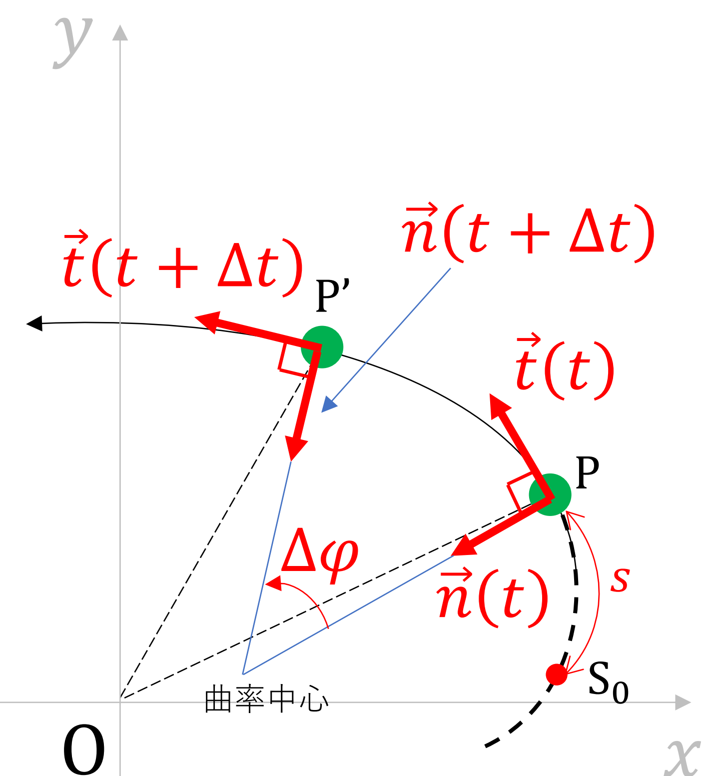
$$= \ddot{s}(t)\vec{t}(t) + \dot{s}(t)\frac{d\vec{t}(t)}{dt}$$

?

6.　接線加速度と法線加速度

$\dfrac{d\vec{t}(t)}{dt}$ の大きさと向きについて





s は、ある点S_0から点Pまでの距離

$|\vec{t}| = |\vec{n}| = 1$

$\Delta\varphi \to 0\ (\Delta t \to 0)$の極限で

$$\left|\Delta\vec{t}\right| = \left|\vec{t}(t+\Delta t) - \vec{t}(t)\right| = 1 \times |\Delta\varphi\,|$$

$|\vec{t}| = |\vec{t}(t+\Delta t)| = 1$

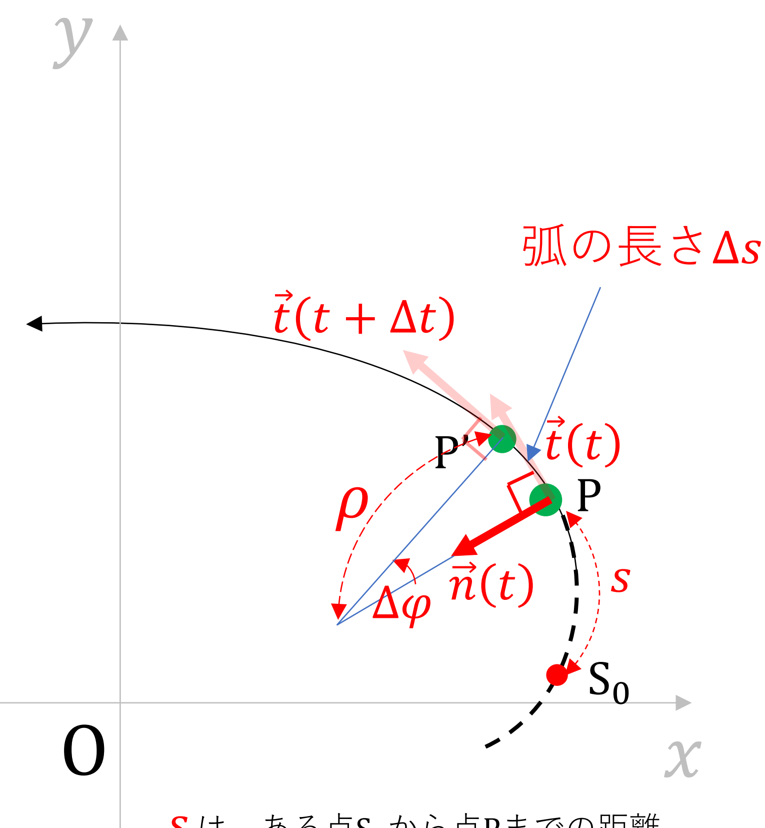
φが増える方向（時間が進む方向）を正として
絶対値を外して、$\Delta\vec{t}$ の大きさを $\Delta\varphi$ と考える。

また、$\Delta\vec{t}$ の向きは $\vec{n}(t)$ となる。

したがって、

$$\dot{\vec{t}} = \frac{d\vec{t}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\vec{n}(t) = \dot{\varphi}\vec{n}$$

6.　接線加速度と法線加速度



s は、ある点S_0から点Pまでの距離

$\Delta s = \rho\,\Delta\varphi$ の関係を用いると、

$$\dot{\varphi} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{\Delta s}{\rho}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}\frac{1}{\rho} = \frac{\dot{s}}{\rho}$$

（Δtの間にρは変化しないと仮定）

（Δsは半径ρの円弧の一部）

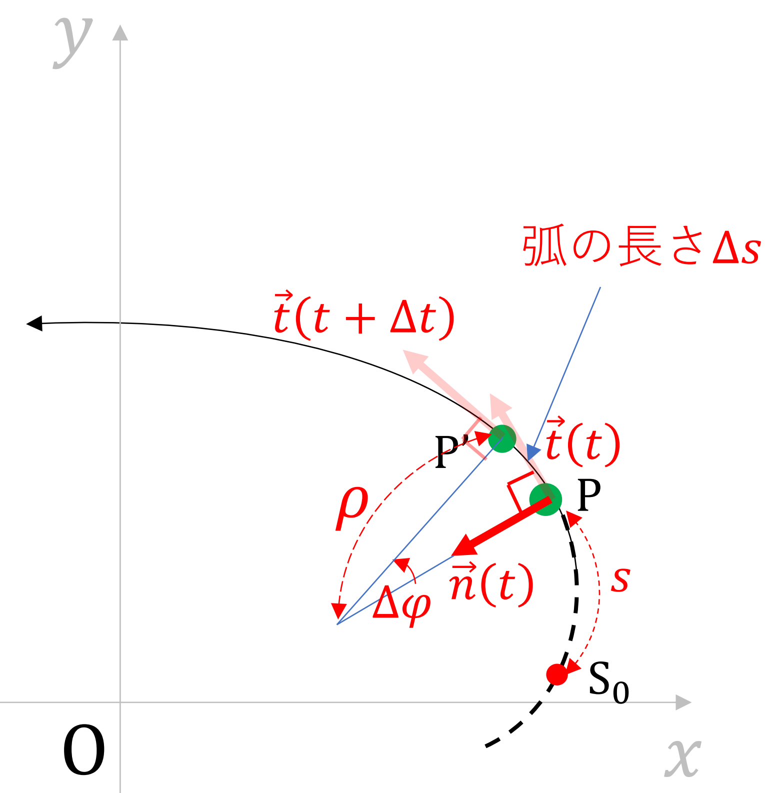
したがって、$\dot{\vec{t}} = \dot{\varphi}\,\vec{n} = \frac{\dot{s}}{\rho}\vec{n}$

加速度は、$\vec{a} = \ddot{s}(t)\vec{t}(t) + \dot{s}(t)\dfrac{d\vec{t}(t)}{dt}$

$$= \ddot{s}(t)\vec{t}(t) + \dot{s}(t)\frac{\dot{s}(t)}{\rho}\vec{n}$$

$$= \ddot{s}(t)\vec{t}(t) + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{n}$$

6. 接線加速度と法線加速度



s は、ある点S_0から点Pまでの距離

$\Delta s = \rho\,\Delta\varphi$ の関係を用いると、

$$\dot{\varphi} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{\Delta s}{\rho}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}\frac{1}{\rho} = \frac{\dot{s}}{\rho}$$

（$\Delta t \to 0$で$\rho(t) \to \rho$と仮定）

（Δsは半径ρの円弧の一部）

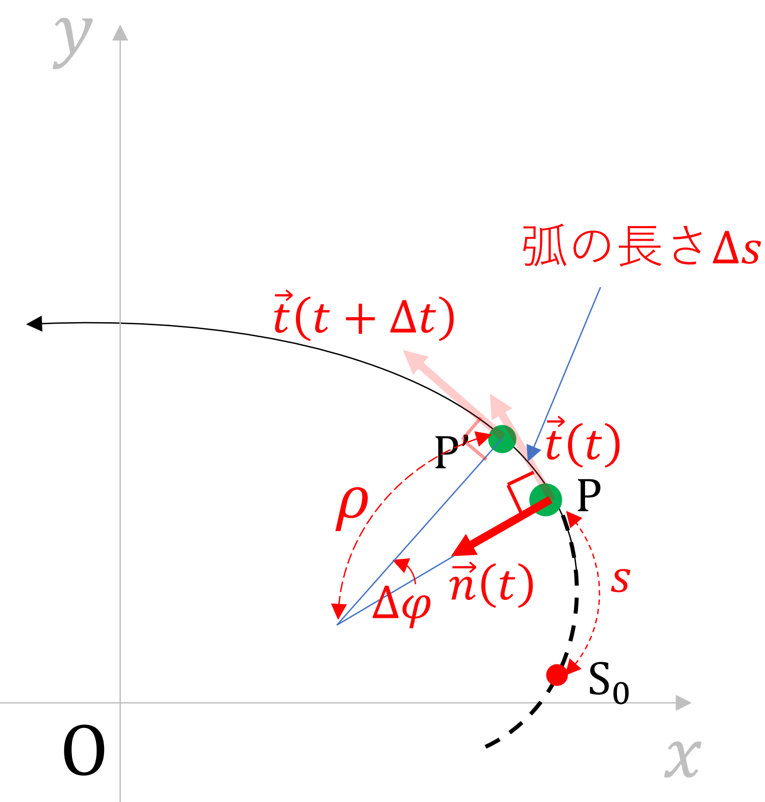
したがって、 $\dot{\vec{t}} = \dot{\varphi}\,\vec{n} = \dfrac{\dot{s}}{\rho}\vec{n}$

加速度は、 $\vec{a} = \ddot{s}(t)\vec{t}(t) + \dot{s}(t)\dfrac{d\vec{t}(t)}{dt}$

$$= \ddot{s}(t)\vec{t}(t) + \dot{s}(t)\frac{\dot{s}(t)}{\rho}\vec{n}$$

$$= \ddot{s}(t)\vec{t}(t) + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{n}$$

6.　接線加速度と法線加速度



s は、ある点S_0から点Pまでの距離

$$\vec{a} = \ddot{s}(t)\vec{t}(t) + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{n}$$

（これを）

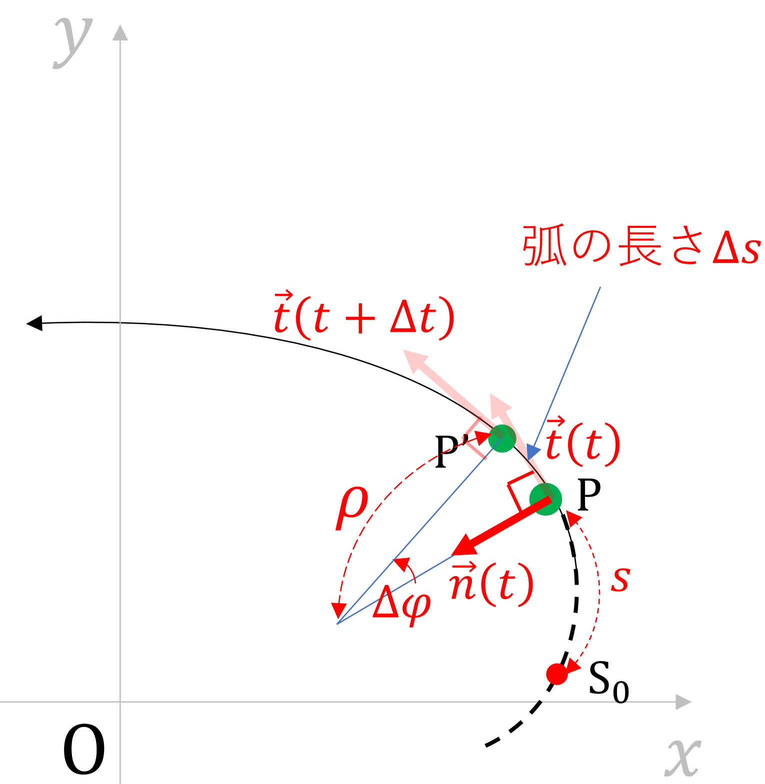
$$= \ a_t\vec{t} + a_n\vec{n}$$ と書くと、

$\vec{a}$の接線方向成分（接線加速度）　$\vec{a}$の法線方向成分（法線加速度）

$$\begin{cases} a_t = \ddot{s} = \dot{v} \\ a_n = \dfrac{\dot{s}^2}{\rho} = \dfrac{v^2}{\rho} \end{cases}$$ （向心加速度）

（$\dot{s}$は移動距離の時間微分なので$\dot{s} = v$（速さ）である）

6.　接線加速度と法線加速度



s は、ある点S_0から点Pまでの距離

質点に働く力 $\vec{F}$ の接線方向と法線方向の成分をそれぞれ F_t , F_n とすると、

$$\vec{F} = m\,\vec{a} = F_t\,\vec{t} + F_n\,\vec{n} = m\left(a_t\vec{t} + a_n\vec{n}\right)$$

$$= m\,\dot{v}\,\vec{t} + m\frac{v^2}{\rho}\,\vec{n}$$

$$\begin{cases} F_t = m\,\dot{v} \\ F_n = m\dfrac{v^2}{\rho} \end{cases}$$

5．2次元極座標での速度、加速度

位置　$\vec{r} = r\vec{e}_r$

速度　$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(r\vec{e}_r) = \dfrac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\dfrac{d\vec{e}_r}{dt}$

$$= \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

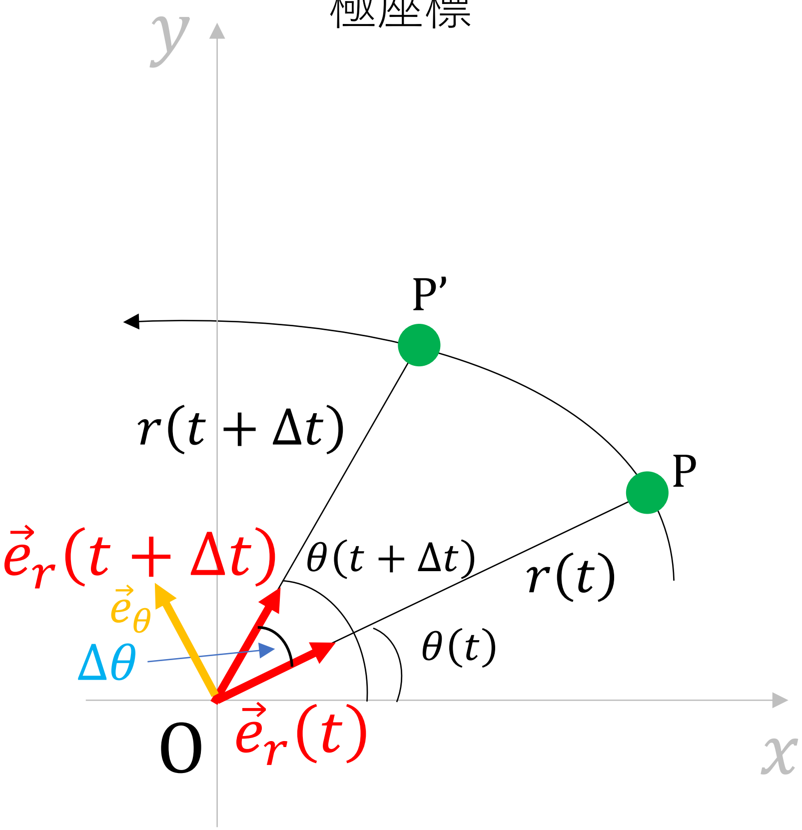
（これを）

$= v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta$　と書くと、

$\vec{v}$ の動径方向成分　　$\vec{v}$ の動径に垂直な方向の成分

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \end{cases}$$

極座標



$\boxed{\text{円運動では、}\dot{r} = 0\text{、}v = v_\theta = r\dot{\theta} = r\omega}$

5．2次元極座標での速度、加速度

加速度　$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta$

（これを）

$= a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta$ と書くと、

$\vec{a}$の動径方向成分　　$\vec{a}$の軌道接線方向成分

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{cases}$$

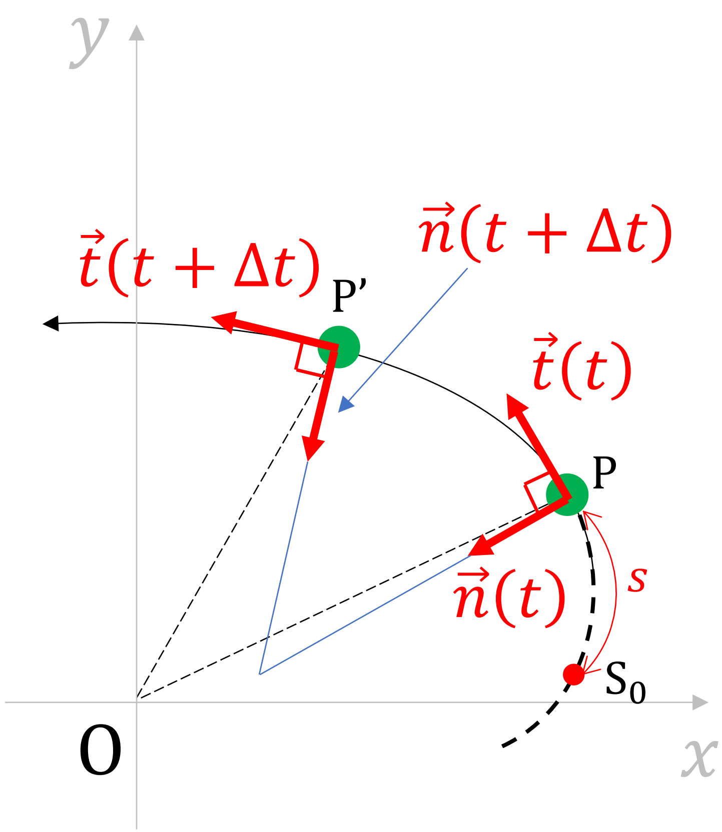
円運動では、$\dot{r} = 0$、$a_r = -r\dot{\theta}^2 = -r\omega^2$、 $a_\theta = r\ddot{\theta} = r\dot{\omega}$

等速円運動では、 $\dot{r} = 0$、 $\dot{\theta} =$ 一定、$a_r = -r\dot{\theta}^2 = -r\omega^2$、 $a_\theta = r\ddot{\theta} = r\dot{\omega} = 0$

加速度は動径方向成分のみで、回転の中心を向く

円運動では、$\dot{r} = 0$、$v = v_\theta = r\dot{\theta} = r\omega$ だったので、 $a_r = -r\dot{\theta}^2 = -r\omega^2 = -\dfrac{{v_\theta}^2}{r} = -\dfrac{v^2}{r}$

6.　接線加速度と法線加速度



sは、ある点S_0から点Pまでの距離

まず、速度$\vec{v}$について

$$\vec{v}(t) = \dot{s}(t)\vec{t}(t)$$

$\vec{v}(t)$の大きさ$|\vec{v}| = \frac{ds(t)}{dt} = \dot{s}(t)$

$\vec{v}(t)$の向きは$\vec{t}(t)$

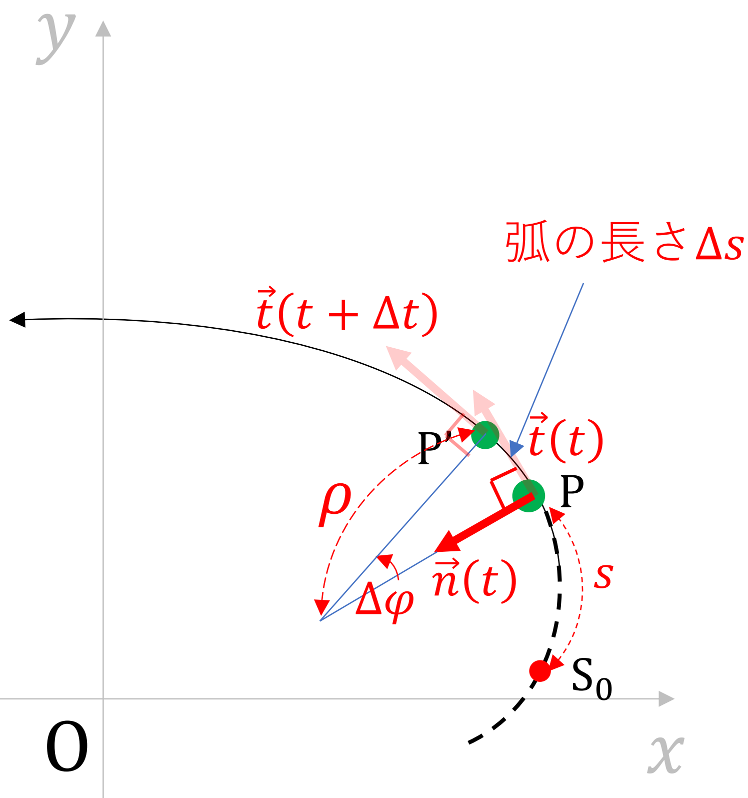
加速度は、

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{s}(t)\vec{t}(t)\right)$$

$$= \ddot{s}(t)\vec{t}(t) + \dot{s}(t)\frac{d\vec{t}(t)}{dt}$$

?

6.　接線加速度と法線加速度



s は、ある点S_0から点Pまでの距離

$$\vec{a} = \ddot{s}(t)\vec{t}(t) + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{n}$$

（これを）

$$= a_t\vec{t} + a_n\vec{n}$$

と書くと、

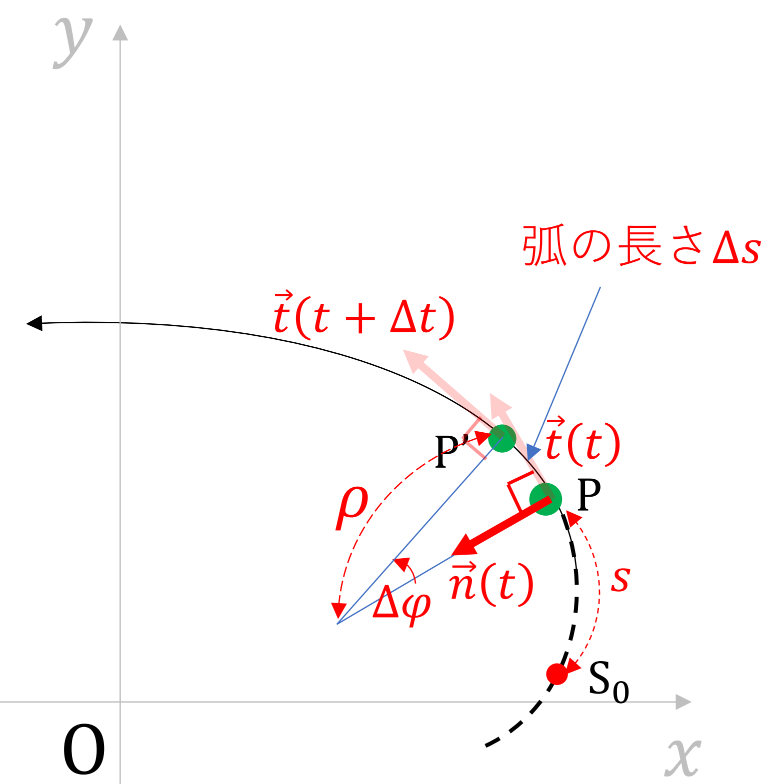
$\vec{a}$の接線方向成分（接線加速度）　　$\vec{a}$の法線方向成分（法線加速度）

$$\begin{cases} a_t = \ddot{s} = \dot{v} \\ a_n = \dfrac{\dot{s}^2}{\rho} = \dfrac{v^2}{\rho} \end{cases}$$

（向心加速度）

（$\dot{s}$は移動距離の時間微分なので$\dot{s} = v$（速さ）である）

6. 接線加速度と法線加速度



s は、ある点S_0から点Pまでの距離

質点に働く力 $\vec{F}$ の接線方向と法線方向の成分をそれぞれ F_t , F_n とすると、

$$\vec{F} = m\,\vec{a} = F_t\,\vec{t} + F_n\,\vec{n} = m\left(a_t\vec{t} + a_n\vec{n}\right)$$

$$= m\,\dot{v}\,\vec{t} + m\frac{v^2}{\rho}\,\vec{n}$$

$$\begin{cases} F_t = m\,\dot{v} \\ F_n = m\dfrac{v^2}{\rho} \end{cases}$$

ニュートンの
運動の法則

1. 第1法則（慣性の法則）
2. 第2法則（運動方程式）
3. 第3法則（作用・反作用の法則）
4. 運動方程式の例
   （落下運動、放物運動、単振り子）

1. 第1法則（慣性の法則）

力を受けない質点 ⇨ **静止**あるいは**等速直線運動**

（慣性）

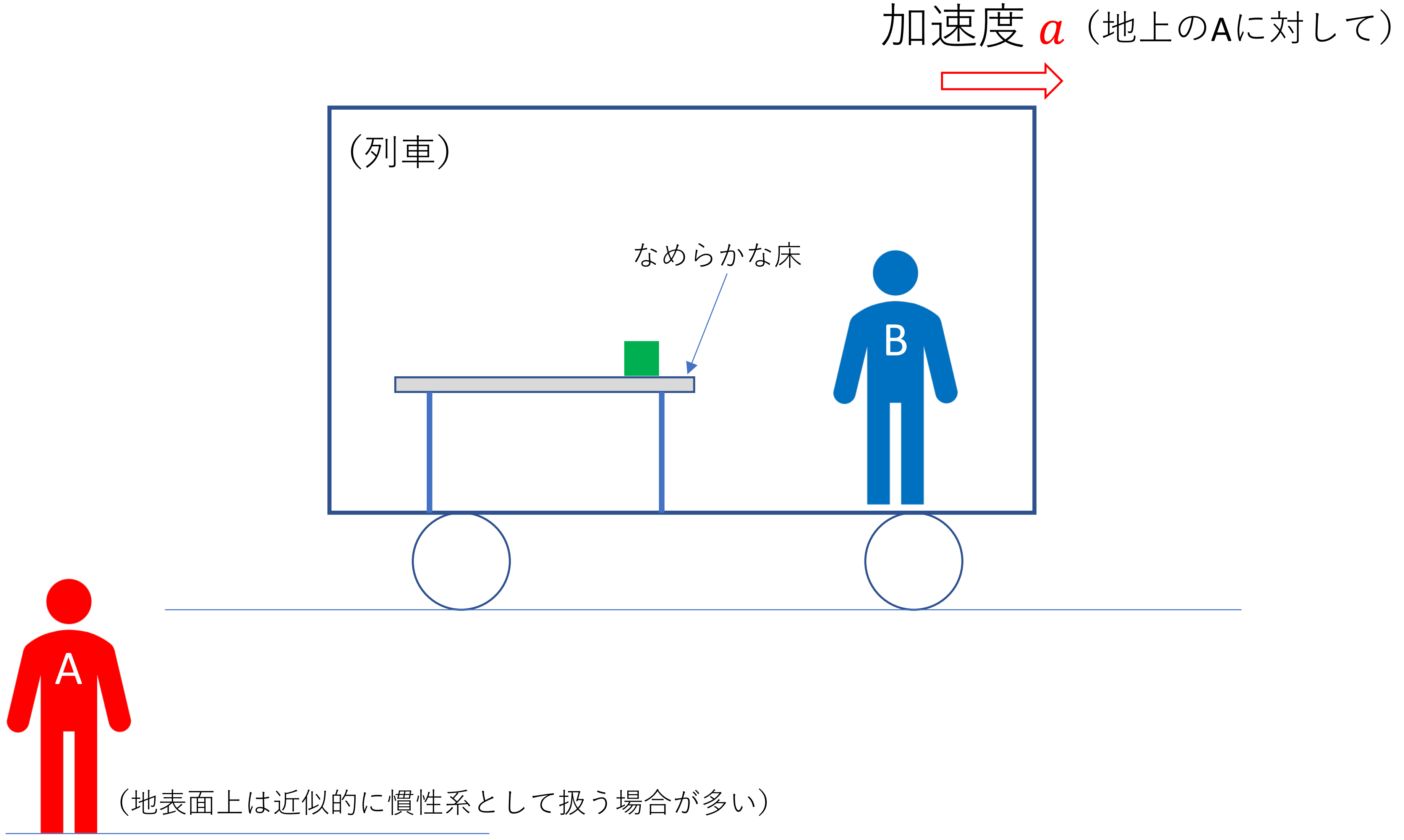
↓

これが成立する座標系を**慣性系**という

（第1法則は、慣性系を選び出す原理を示しているともいえる）

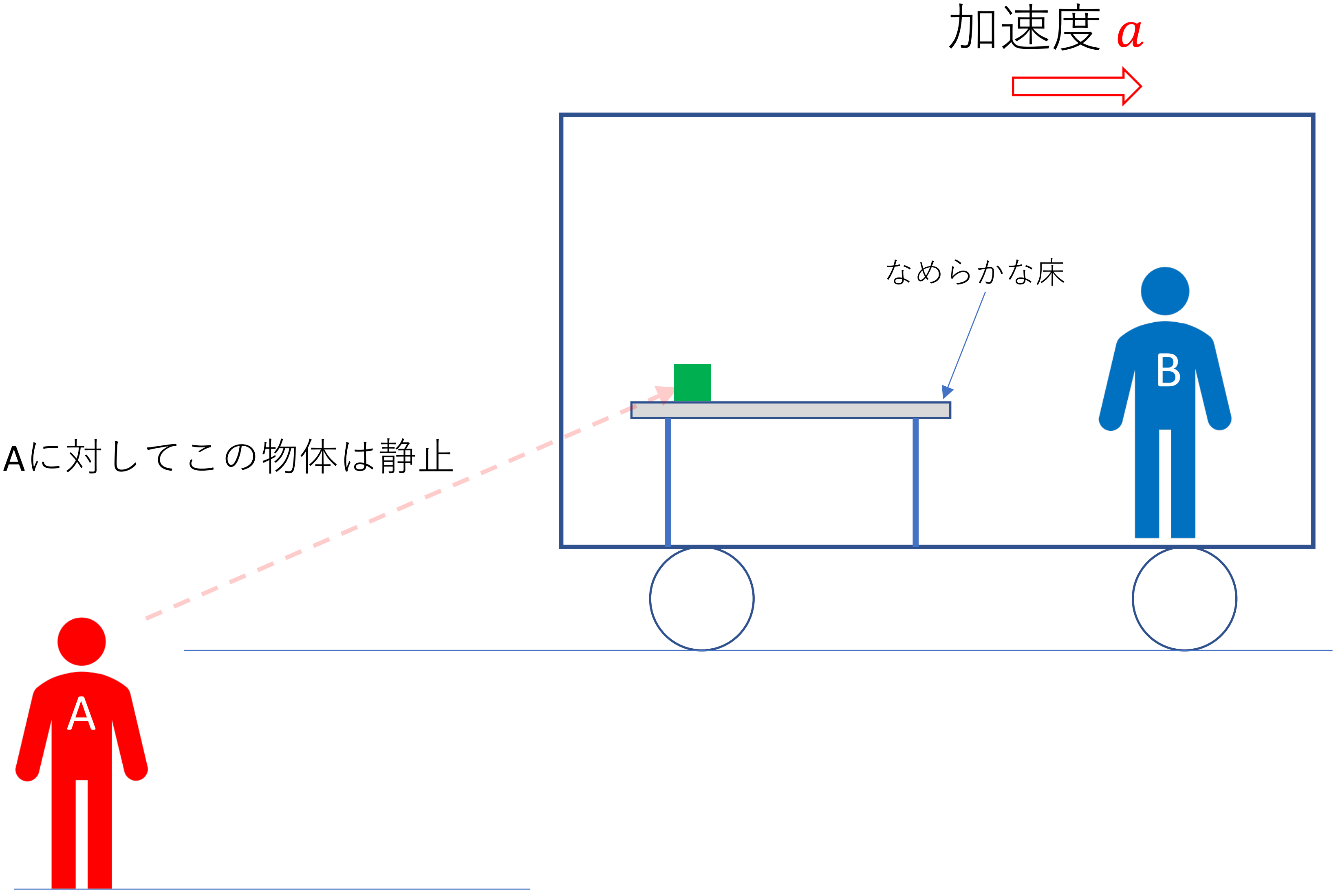
1. 第1法則（慣性の法則）

（例1）



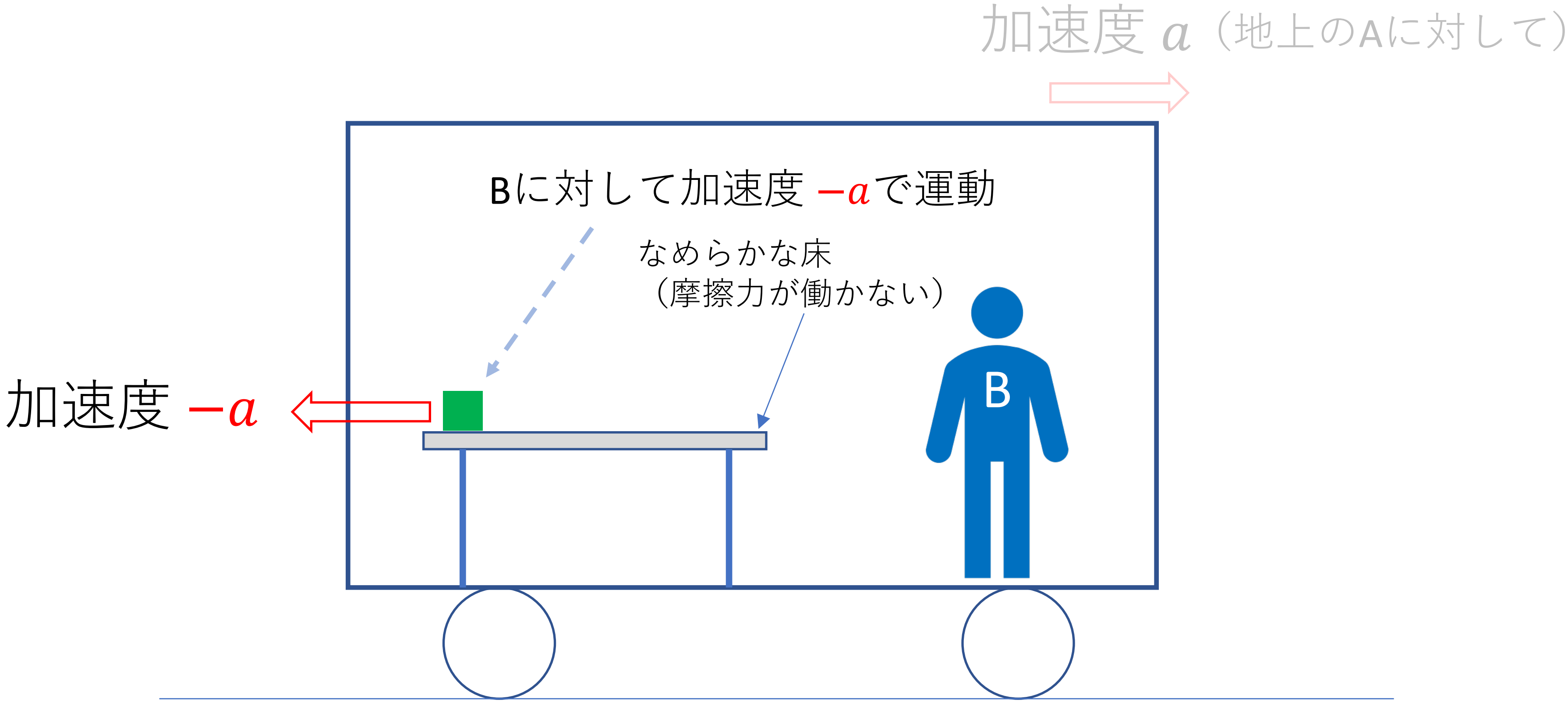
1. 第1法則（慣性の法則）

（例1）



1．第1法則（慣性の法則）

（例1）



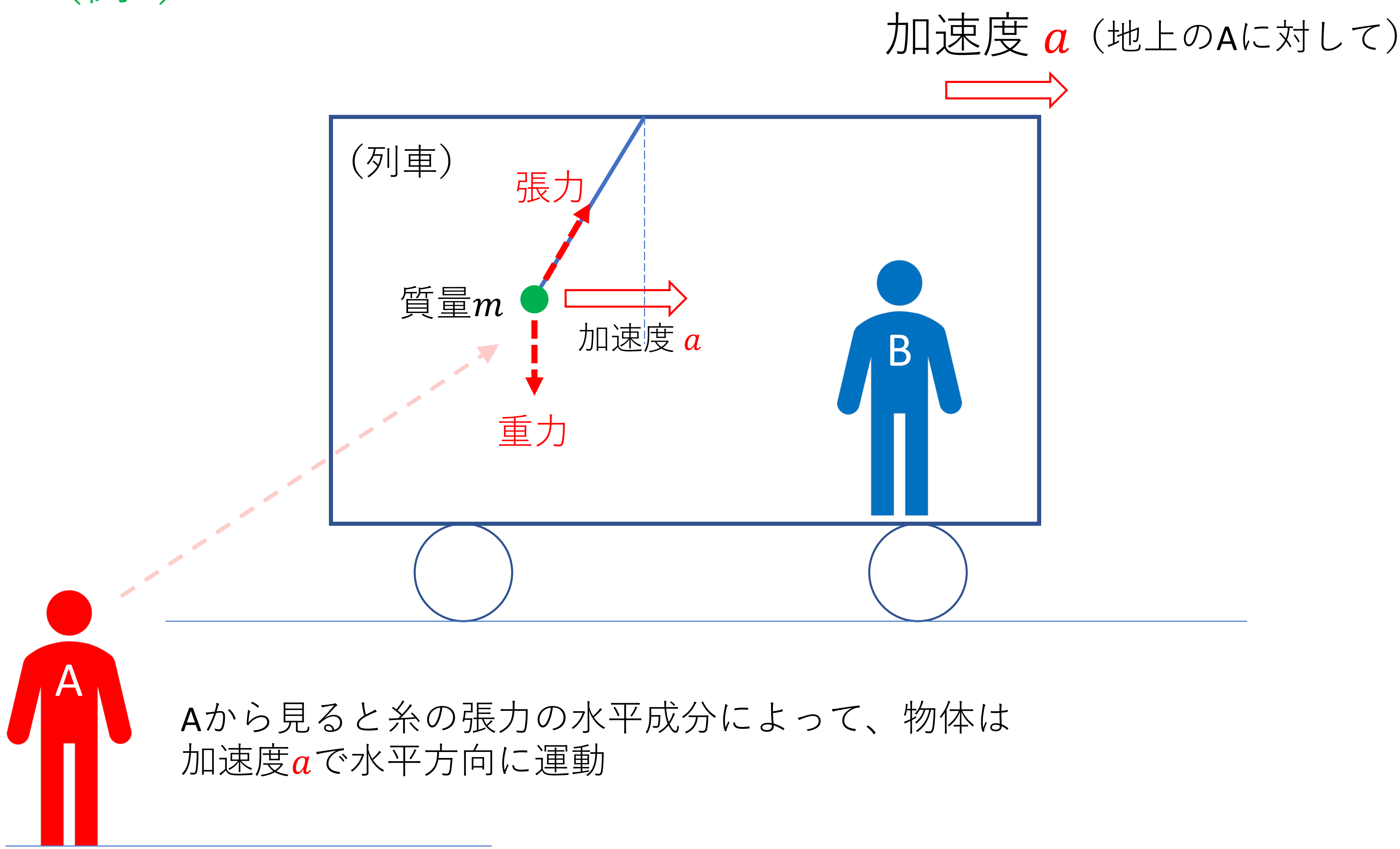
Bから見ると、水平方向に力を受けていないのに、
物体は $-a$ の加速度で運動

（今の場合）

B（列車）に固定された座標系は
慣性系ではない

1. 第1法則（慣性の法則）

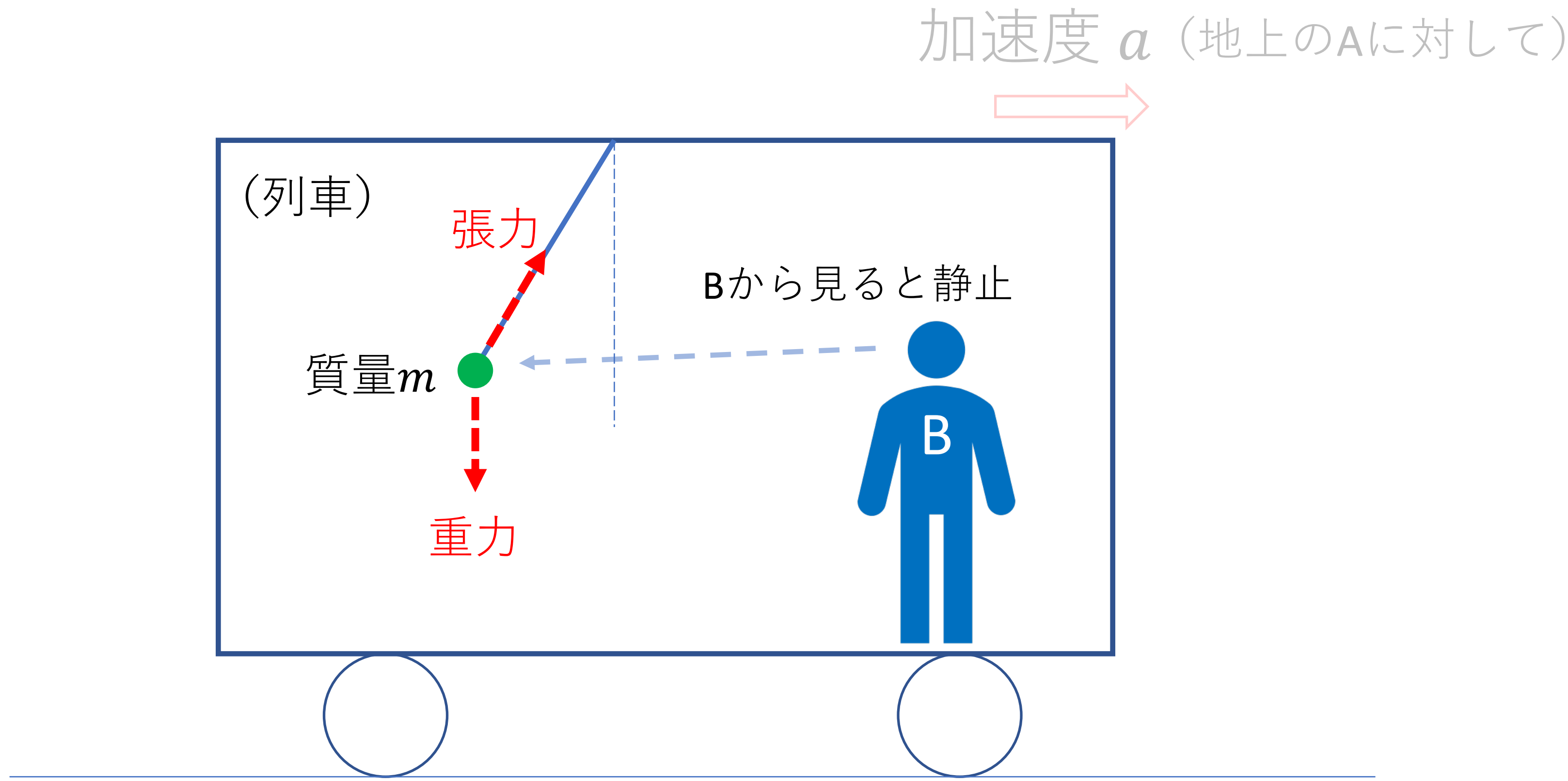
（例2）



Aから見ると糸の張力の水平成分によって、物体は
加速度aで水平方向に運動

1. 第1法則（慣性の法則）

（例2）



Bから見ると糸の張力の水平成分が働いているのに
物体は水平方向に静止

（鉛直方向は、重力と、張力の鉛直方向成分が
釣り合っている）

（今の場合）
B（列車）に固定された座標系は
慣性系ではない

2.　第2法則（運動方程式）

慣性系において、

$$\vec{F} = m\,\vec{a} = m\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

（ニュートンの運動方程式）

微分方程式

質点に働く力

質点の質量

加速度

より一般的には、

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

質点の運動量 $\vec{p} = m\vec{v}$

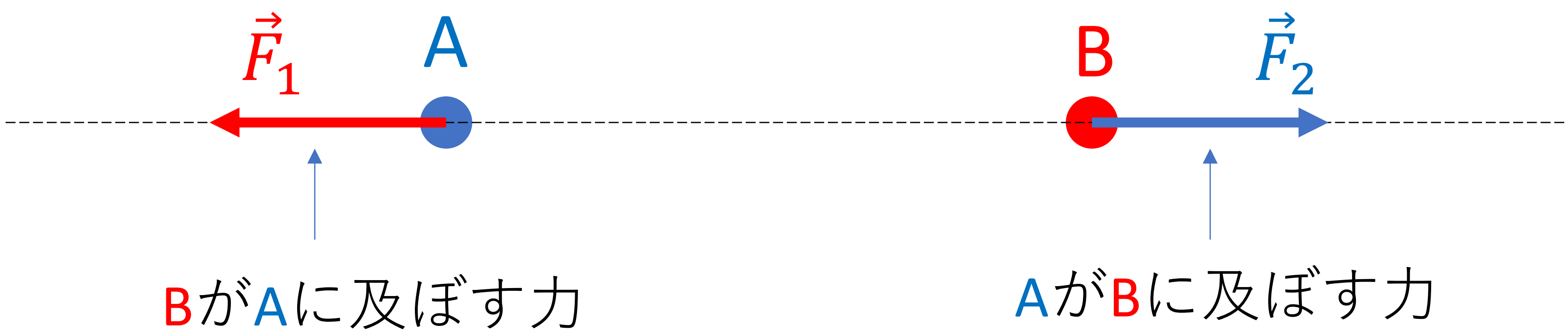
質点の質量が変化しない場合、

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

3. 第3法則（作用・反作用の法則）

2つの物体間に相互作用の力が働いている場合、
それぞれの力は同一直線上で大きさが等しく向きが反対

（物体が運動している場合にも成立）



$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

（今の場合、力は瞬間的に伝わると仮定）

3.　第3法則（作用・反作用の法則）

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$ なので、 $$\vec{F}_1 = \frac{d\vec{p}_{\mathrm{A}}}{dt}$$ 、 $$\vec{F}_2 = \frac{d\vec{p}_{\mathrm{B}}}{dt}$$

（作用・反作用の法則より、）

$$\frac{d\vec{p}_{\mathrm{A}}}{dt} = -\frac{d\vec{p}_{\mathrm{B}}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_{\mathrm{A}} + \vec{p}_{\mathrm{B}}) = 0$$

（質点系（AとB）の外から力が働いていない場合）

質点Aと質点Bの運動量の和は
時間によって変化しない

時間で定積分

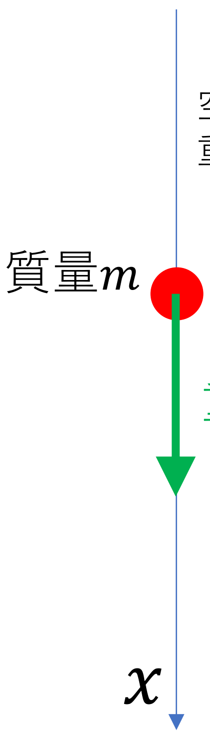
$$\int_{相互作用前}^{相互作用後} \frac{d}{dt}(\vec{p}_{\mathrm{A}} + \vec{p}_{\mathrm{B}})dt = 0$$

$$\underbrace{(\vec{p}_{\mathrm{A}} + \vec{p}_{\mathrm{B}})}_{相互作用前} = \underbrace{(\vec{p}_{\mathrm{A}} + \vec{p}_{\mathrm{B}})}_{相互作用後}$$

運動量の和は相互作用の前後で
保存する

4.　運動方程式の例（落下運動）

$$\vec{F} = m\,\vec{a} = m\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$



空気の抵抗力などは無視して、
重力のみ働いている場合

重力 mg

gは重力加速度

地表面では一定（約9.8m/s²)
と仮定

鉛直方向下向きをx軸の
正の向きとする

x軸上の1次元の運動なので、

$$mg = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} = g$$

（初期条件）
時刻$t = 0$で$v_x = v_0$とすると
$\mathrm{A} = v_0$

積分定数

時間で積分

$$\dot{x} = v_x = gt + \mathrm{A} = gt + v_0$$

時間で積分

積分定数（時刻$t = 0$でのx）

$$x = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + \mathrm{B}$$

時刻$t = 0$で$x = 0$とすると$\mathrm{B} = 0$（初期条件）

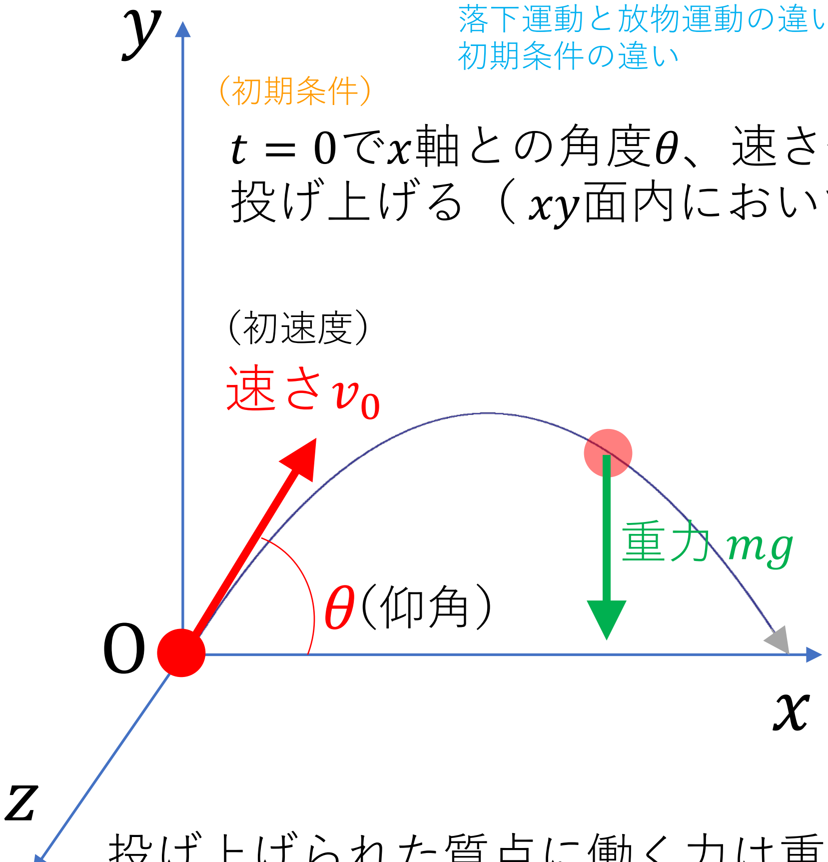
$$x = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$$

4. 運動方程式の例（放物運動）

xz 面は水平面、y軸は鉛直上向き
xy面内での運動

落下運動と放物運動の違いは
初期条件の違い

（初期条件）
$t=0$でx軸との角度θ、速さv_0で
投げ上げる（xy面内において）



投げ上げられた質点に働く力は重力のみ
（空気による抵抗力などは無視）

質点に働く力は落下運動と同じ。
運動の違いは初速度（初期条件）による。

$$\vec{F} = m\,\vec{a} = m\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

↓ x, y, z各成分に分けると

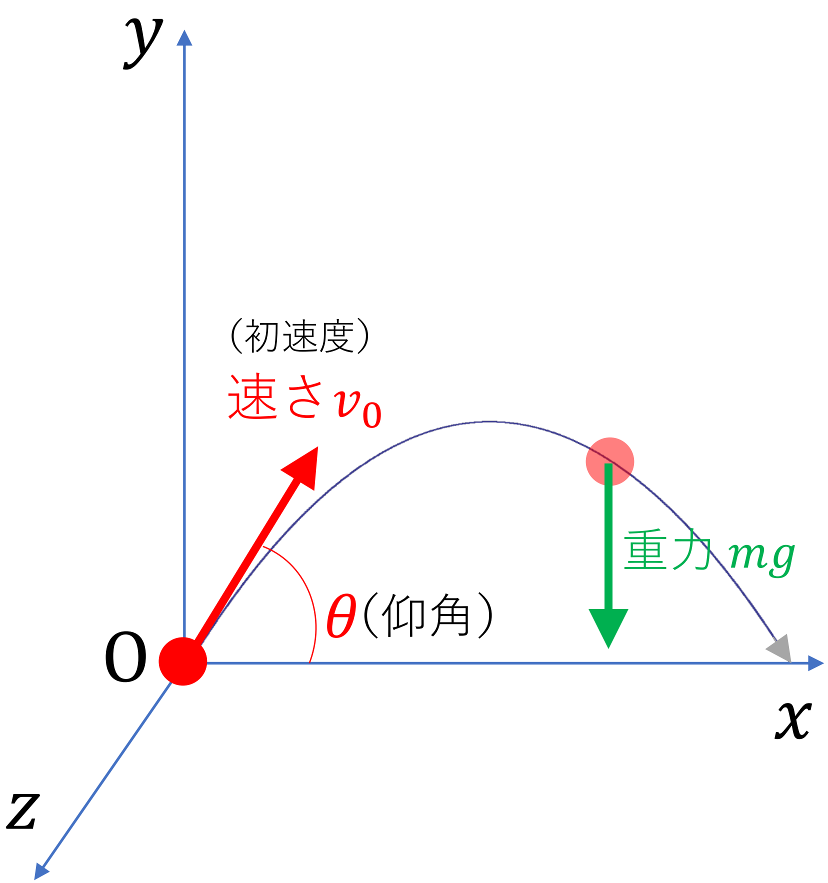
$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = -mg \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$$

（力はy成分のみ）

↓

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

4. 運動方程式の例（放物運動）



$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

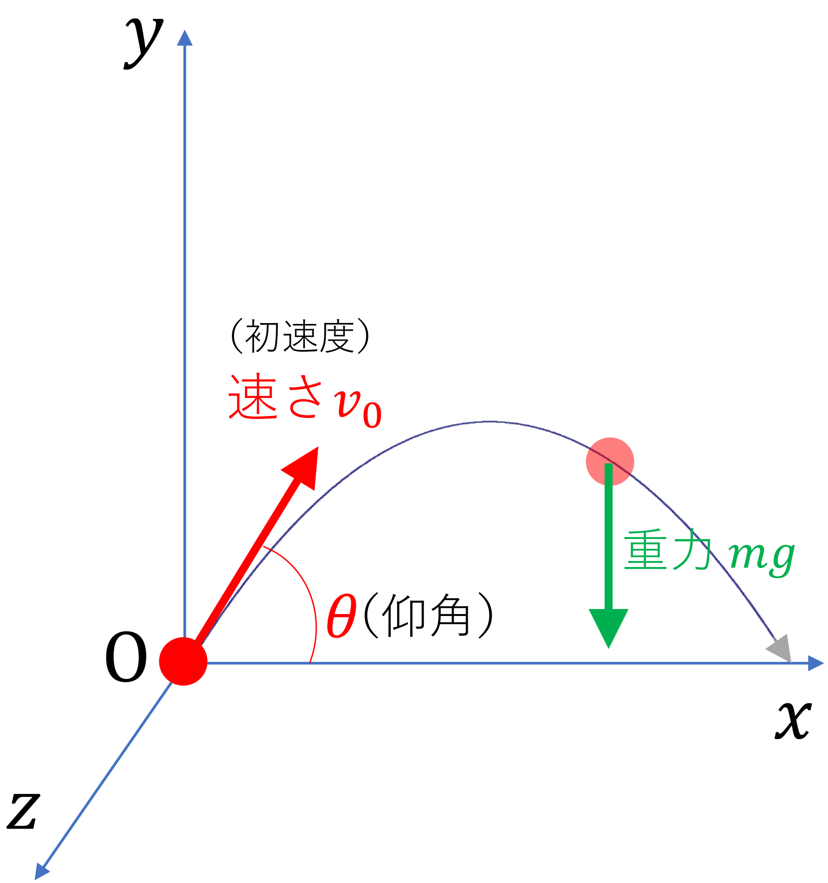
積分（A_1、 B_1、 C_1は積分定数）

$$\begin{cases} \dot{x} = \mathrm{A}_1 & \text{（時間に依存しない定数）} \\ \dot{y} = -gt + \mathrm{B}_1 \\ \dot{z} = \mathrm{C}_1 & \text{（時間に依存しない定数）} \end{cases}$$

積分（A_2、 B_2、 C_2、は積分定数）

$$\begin{cases} x = \mathrm{A}_1 t + \mathrm{A}_2 \\ y = -\dfrac{1}{2}gt^2 + \mathrm{B}_1 t + \mathrm{B}_2 \\ z = \mathrm{C}_1 t + \mathrm{C}_2 \end{cases}$$

4. 運動方程式の例（放物運動）



$$\begin{cases} x(t) = \mathrm{A}_1 t + \mathrm{A}_2 \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + \mathrm{B}_1 t + \mathrm{B}_2 \\ z(t) = \mathrm{C}_1 t + \mathrm{C}_2 \end{cases}$$

ここで、初期条件を考慮すると、

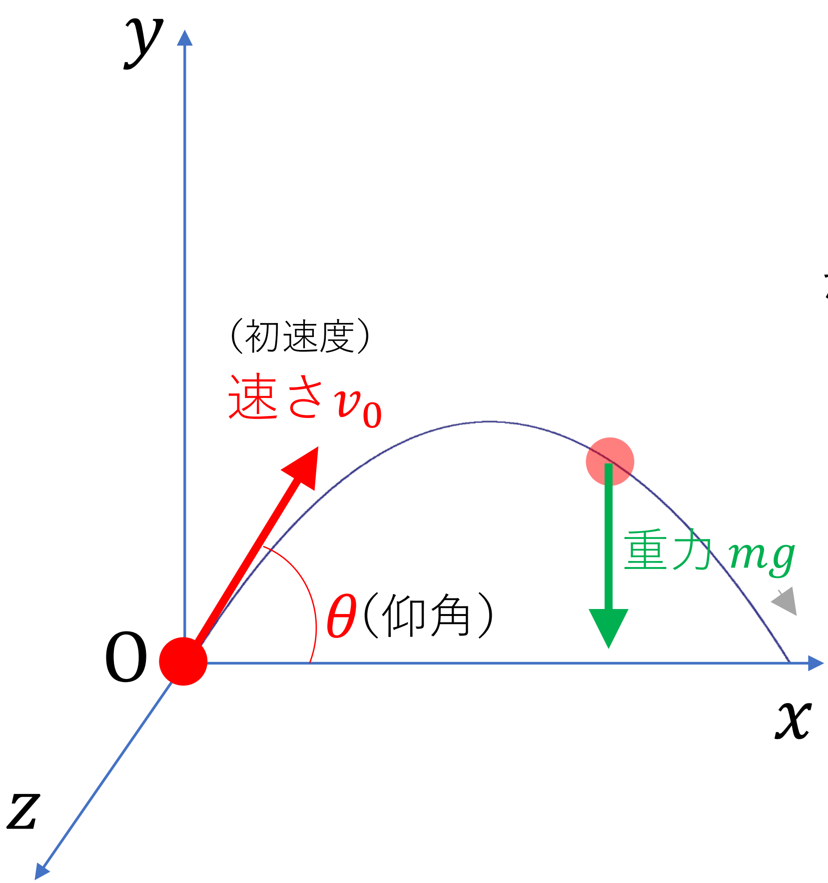
$t = 0$ で $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ より、

$$\mathrm{A}_2 = \mathrm{B}_2 = \mathrm{C}_2 = 0$$

したがって、

$$\begin{cases} x(t) = \mathrm{A}_1 t \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + \mathrm{B}_1 t \\ z(t) = \mathrm{C}_1 t \end{cases}$$

4. 運動方程式の例（放物運動）



また、

$t=0$ で $\dot{x}=v_0\cos\theta$，$\dot{y}=v_0\sin\theta$，$\dot{z}=0$より、

$$\begin{cases}\dot{x}=\mathrm{A}_1\\ \dot{y}=-gt+\mathrm{B}_1\\ \dot{z}=\mathrm{C}_1\end{cases}$$

から、

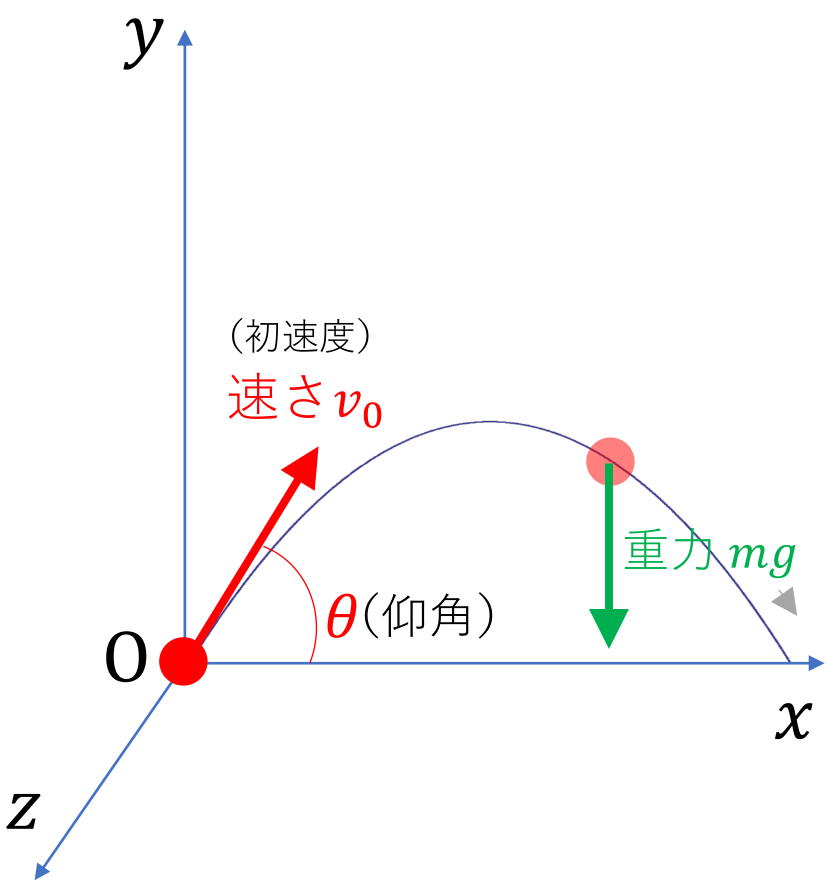
$$\begin{cases}\mathrm{A}_1=v_0\cos\theta\\ \mathrm{B}_1=v_0\sin\theta\\ \mathrm{C}_1=0\end{cases}$$

したがって、

$$\begin{cases}\dot{x}=v_0\cos\theta\\ \dot{y}=-gt+v_0\sin\theta\\ \dot{z}=0\end{cases}$$

4.　運動方程式の例（放物運動）

初期条件を考慮した場合の質点の位置と速度は、

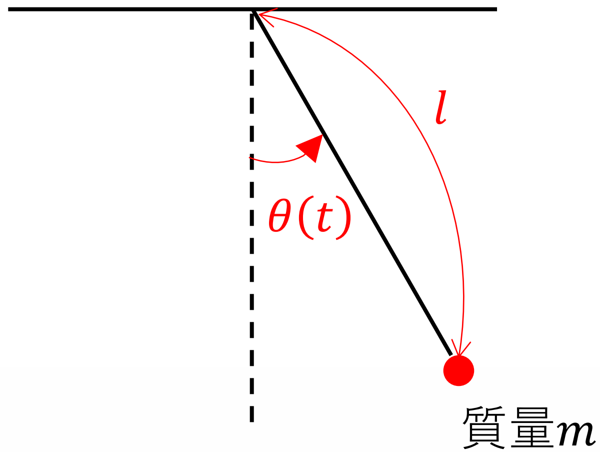


$$\begin{cases} x(t) = (v_0 \cos\theta)\, t \\ y(t) = -\dfrac{1}{2} g t^2 + (v_0 \sin\theta)\; t \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \cos\theta \\ \dot{y}(t) = -gt + v_0 \sin\theta \\ \dot{z}(t) = 0 \end{cases}$$

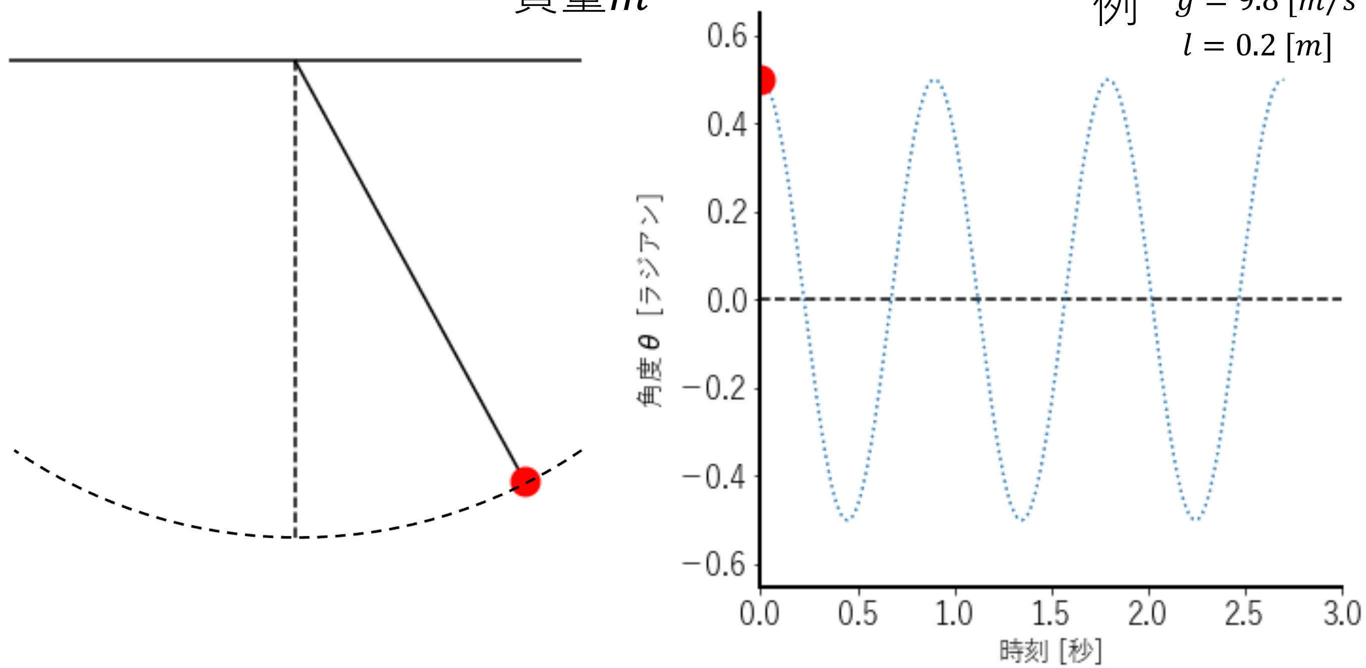
時間 t を消去してxとyの関係を出すと、放物線になる。

7. 単振り子



質量 m の質点が、長さ l で伸び縮みせず質量の無視できる糸につながれている。

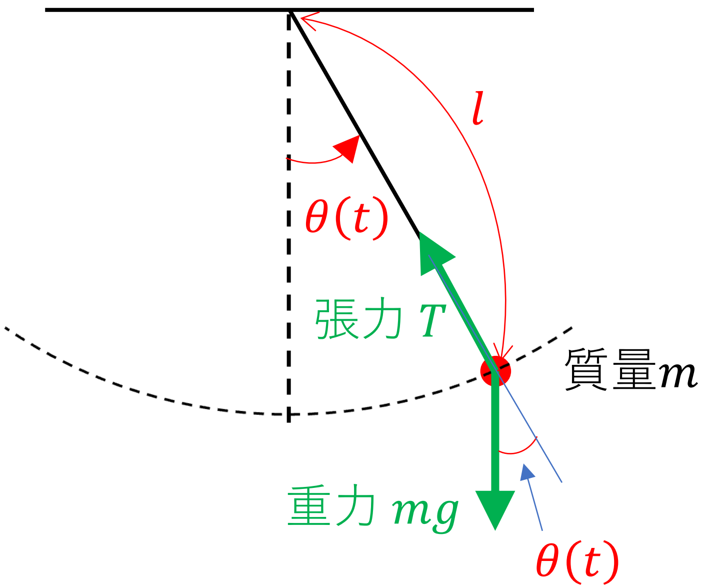
例　$g = 9.8\ [m/s^2]$
$l = 0.2\ [m]$



Gifアニメーション

7. 単振り子

2次元極座標の速度、加速度を用いて運動方程式を考える
（パラメータは l と θ）



動径方向の運動方程式は、

$$\underbrace{mg\cos\theta - T}_{\text{動径方向の力}} = \underbrace{ma_r}_{\text{動径方向の加速度}}$$

$F = ma$

第3回講義（26枚目）

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{cases}$$

今の場合、$r = l$（一定）なので、

$$a_r = -l\dot{\theta}^2 = -\frac{{v_\theta}^2}{l} \leftarrow v_\theta = r\dot{\theta}$$

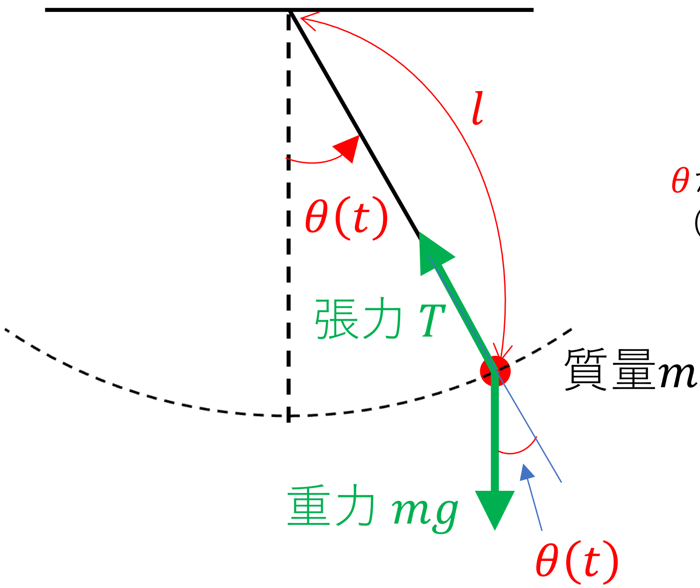
第3回講義（20枚目）

$v_\theta = r\dot{\theta}$がわかればば張力がわかる。 →

$$T = m\left(g\cos\theta + \frac{{v_\theta}^2}{l}\right)$$

（動径方向の位置は、原点からの距離 l で一定）

7. 単振り子



動径と垂直方向（接線方向）の運動方程式は、

$$-mg\sin\theta = ma_\theta = m\,l\ddot{\theta}$$

（今の場合、$r = l$（一定））

θが増える方向が接線方向の正方向
（重力の接線方向成分は負の方向）

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

単振り子は運動の自由度が1 → θ

（上のθについての微分方程式を解いて）
θが求まると、運動が求まる。

7. 単振り子

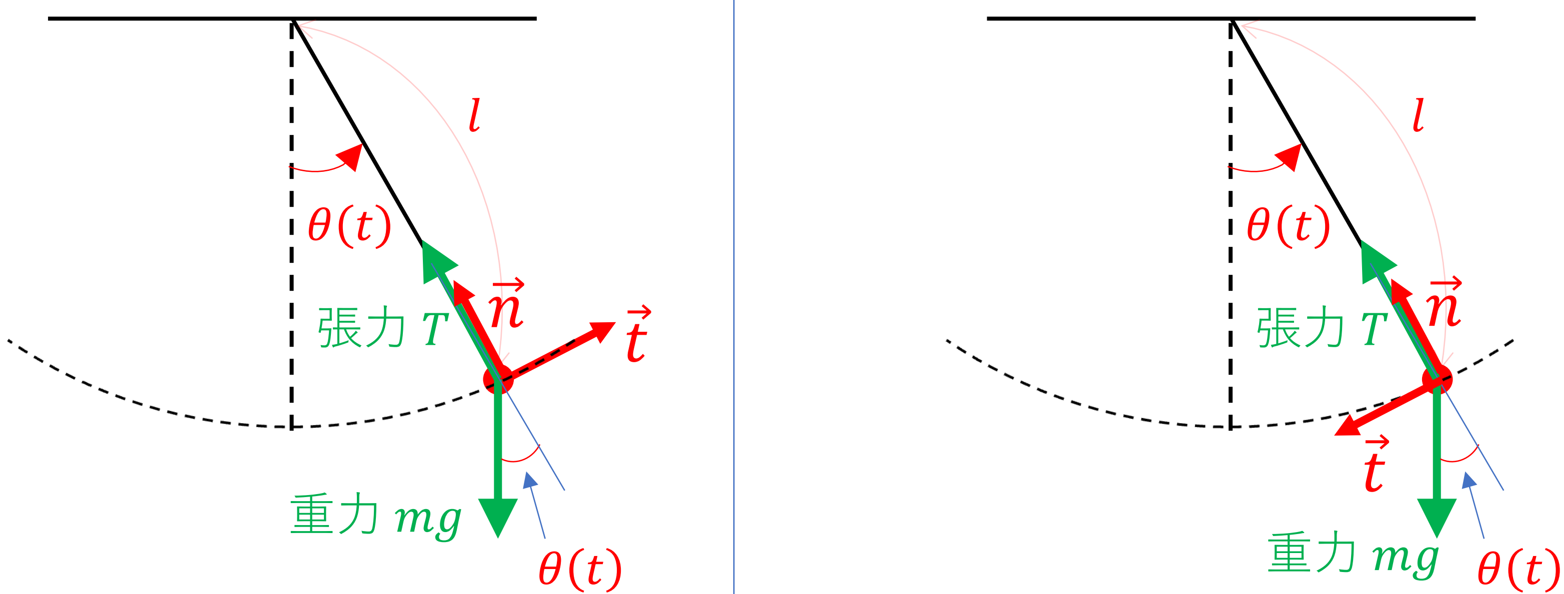
接線加速度と法線加速度を使って運動方程式を考える

1） $\dot{\theta} > 0$

質点の運動は θ が大きくなる方向

2） $\dot{\theta} < 0$

質点の運動は θ が小さくなる方向

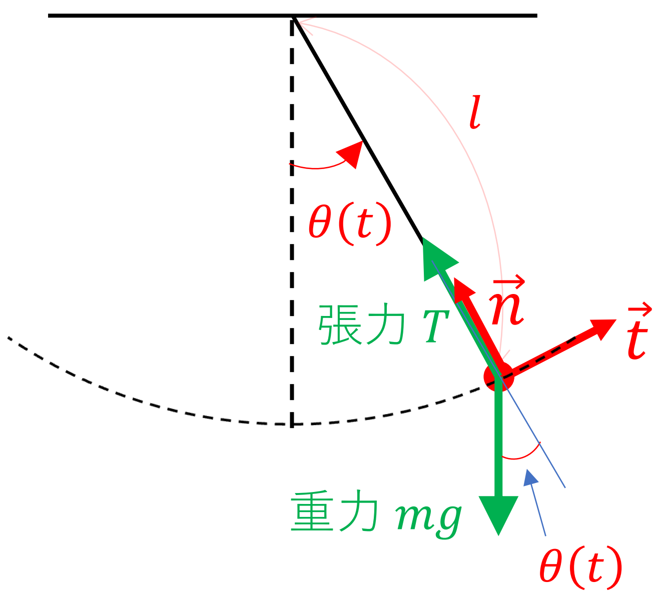


$\dot{\theta} > 0$ と $\dot{\theta} < 0$ で運動の方向が逆であり、単位ベクトル $\vec{t}$ の方向も逆になるので、場合を分けて検討する

7. 単振り子

1） $\dot{\theta} > 0$

質点の運動は θ が大きくなる方向



・接線方向の運動方程式

$$F_t = ma_t = -mg\sin\theta = m\,\dot{v} = ml\ddot{\theta}$$

（力学１_④ 20枚目 $F_t = m\,\dot{v}$ ）

第3回講義（20枚目）

$v_\theta = r\dot{\theta}$ より、 $\dot{v} = l\ddot{\theta}$

したがって

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

・法線方向の運動方程式

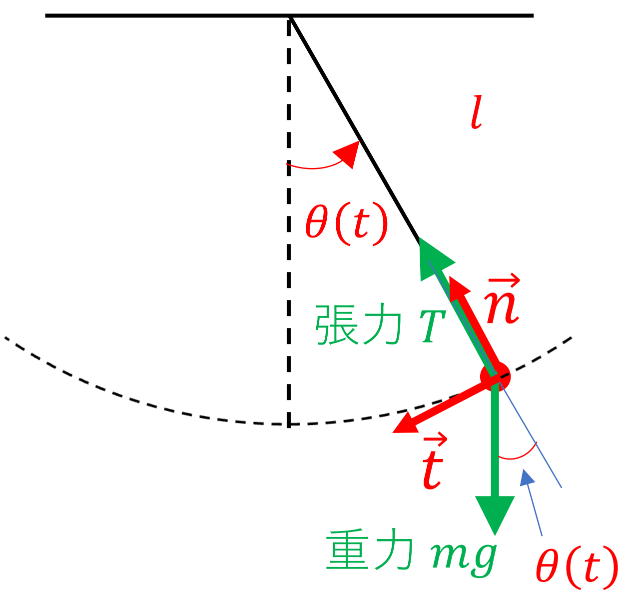
$$F_n = ma_n = T - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{l}$$

$$T = m\left(g\cos\theta + \frac{v^2}{l}\right)$$

7. 単振り子

2） $\dot{\theta} < 0$

質点の運動は θ が小さくなる方向



・接線方向の運動方程式

$$F_t = ma_t = mg\sin\theta = m\,\dot{v} = m\frac{d}{dt}\left(-l\dot{\theta}\right)$$

$\vec{t}$ は質点の進行方向を向くので、 $\vec{v}$ と $\vec{t}$ は同じ方向であり、vは正でなければいけないが、 $\dot{\theta}$ は負なので、マイナス符号が付く

したがって、

$$F_t = mg\sin\theta = m\frac{d}{dt}\left(-l\dot{\theta}\right) = -ml\ddot{\theta}$$

結局、

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

・法線方向の運動方程式

$$F_n = ma_n = T - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{l}$$

$$T = m\left(g\cos\theta + \frac{v^2}{l}\right)$$

結局、$\dot{\theta} > 0$ も、 $\dot{\theta} < 0$ も同じ形の運動方程式となる。