第 15 回講義． 部分積分とテイラー公式の残項の積分表示．テイラー級数がもとの関数に収束する例 (1)（教科書 1.8 を部分積分の観点から再論）

微積分学の基本定理（これを 1 回目と数える）

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(x)dx$$

の右辺第二項を

$$-\int_a^b (b-x)' f'(x)dx$$

と書き換えて部分積分すると二回目は

$$f(a) - [(b-x)f'(x)]_a^b + \int_a^b (b-x)f''(x)dx$$

となる．この右辺第二項を

$$-\int_a^b \left\{\frac{(b-x)^2}{2}\right\}' f''(x)dx$$

と書き換えて部分積分すると三回目は

$$-[(b-x)f'(x)]_a^b - \left[\frac{(b-x)^2}{2}f''(x)\right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-x)^2}{2}f'''(x)dx$$

となる．このプロセスを繰り返すと n 回目は

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n-2} -\left[\frac{(b-x)^k f^{(k)}(x)}{k!}\right]_a^b \\ &+\left(-\left[\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)dx\right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)dx\right)\end{aligned}$$

になる．各 $k = 1, 2, \ldots, n-1$ に対し

$$-\left[\frac{(b-x)^k}{k!}f^{(k)}(x)dx\right]_a^b = \frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)$$

だから，結局，次の定理が成り立つ：だから，結局，次の定理が成り立つ：

- （定理）**テイラー公式** $f(x)$ は $[a,b]$ を含む開区間で n 階微分可能のとき

$$\begin{aligned}f(b) &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + R_n(b) \quad \text{（近似多項式 } f_{n-1}(b)+ \text{ 残項 } R_n(b)\text{）}, \\ R_n(b) &= \int_a^b \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(b-t)^{n-1}dt \quad \text{（残項 } R_n(b) \text{ の積分表示）}\end{aligned}$$

となる．

- $n \to \infty$ **のとき，テイラー多項式** $f_{n-1}(x)$ **はどのような** x **に対して元の関数** $f(x)$ **に収束するか？**
- $n \to \infty$ **のとき残項** $R_n(x)$ **はどのような** x **に対して零に収束するか？**

という問（これらは同じことを問うている）に答えることは重要である．残項を積分表示して嬉しいことは，この問いに答えられることである．

• テイラー多項式が収束する範囲は関数によって異なる．例えば

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} ,$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} ,$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

は $\mathbb{R}$ 全体で収束する．一方，

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \dots$$

は $|x| < 1$ で収束，$|x| \geq 1$ で発散する．$x = 1$ ではそもそも関数が定義できない．$x = -1$ では形式的には

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

と言う式になるが，これの右辺は収束しないから，通常の意味では正しい式ではない．

• たとえテイラー級数が収束しても極限が元の関数に一致するとは限らない．このときは残項 $R_n(x)$ が 0 に収束しないのである．例えば

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

は $f(0) = 0$ と定義すれば $\mathbb{R}$ 全体で何階でも微分可能な関数になり，全ての $n = 0, 1, 2, \dots$ に対し $f^{(n)}(0) = 0$ である．従って $x = 0$ を中心とするテイラー多項式は 0 である．よって明らかにテーラー多項式は収束するが，極限は 0 であって，$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ ではない．詳しくは教科書の問 9.2 を解くといい（夏季休暇の課題）．

今回と次回，テイラー多項式がもとの関数に収束する例を取り上げる．工学への応用上は，このような関数が重要である．

例 1. 等比数列の和の公式は，一つの例である．恒等式

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}$$

において，$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$ は $(n-1)$ 次のテイラー多項式であり，$\dfrac{x^n}{1-x}$ は（積分表示されていない形の）残項である．$n \to \infty$ のとき残項 $\to 0$ すなわち $\dfrac{x^n}{1-x} \to 0$ が成り立つための必要十分条件は $|x| < 1$ である．

例 2. $\log(1+x)$ のテイラー公式の残項の積分表示から $\log(1+x)$ のテイラー展開へ．テイラー公式を $f(x) = \log(1+x)$, $a = 0$, $b = x$ として適用して残項の $n \to \infty$ でのふるまいを調べる．$f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k}$ よりテイラー公式の係数は $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} = \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$ である．よって $(n-1)$ 次のテイラー多項式は

$$f_{n-1}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n-1} x^{n-1}$$

である．テイラー公式（関数 = テイラー多項式 + 残項）

$$\log(1+x) = f_{n-1}(x) + R_n(x)$$

において，残項は

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+t)^n}dt$$
$$= (-1)^{n+1}\int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^{n-1}\frac{dt}{1+t}\ (*)$$

$u = \dfrac{x-t}{1+t}$ とおくと $t = \dfrac{x-u}{1+u}$, $1+t = \dfrac{1+x}{1+u}$, $dt = -\dfrac{1+x}{(1+u)^2}du$ だから，上の続きは

$$(*) = (-1)^{n+1}\int_0^x u^{n-1}\frac{1+u}{1+x}\frac{1+x}{(1+u)^2}du$$
$$= (-1)^{n+1}\int_0^x u^{n-1}\frac{du}{1+u}$$

である．よって，$|x| < 1$ のとき

$$|R_n(x)| \le \frac{1}{1-|x|}\int_0^{|x|} u^{n-1}du = \frac{1}{1-|x|}\frac{|x|^n}{n} \to 0$$

$(n \to \infty)$ である．$x = 1$ のとき $|R_n(1)| \le \displaystyle\int_0^1 u^{n-1}du = \frac{1}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$ である．$x = -1$ のときは，そもそも $f_{n-1}(-1) = -1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n-1} - \ldots$ だから収束しないので $R_n(-1)$ がどうなるかを考える必要はない．まとめると，$-1 < x \le 1$ のとき $R_n(x) \to 0$ である．したがって $-1 < x \le 1$ のとき $\log(1+x)$ のテイラー級数（テイラー展開）を得る：

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + \cdots \quad (-1 < \forall x \le 1)\ .$$

この $\log(1+x)$ の無限級数表示自体は驚くべきものだと思う．一方，この式に $x = 1$ を代入して得られる

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

という表示を始めて見たときの驚きは，具体的なだけもっと大きいかもしれない．残念ながら，これはたまたまの収束で，収束の速さが非常に遅い（ので実用向きではない）．

• **課題 1.** e^x, $\cos x$, $\sin x$ のテイラー級数表示が任意の x において成り立っていること，すなわち任意の x に対し $n \to \infty$ のとき残項 $\to 0$ であることを，残項の積分表示を使って証明してみよ．

• **課題 2.** $f(x) = \frac{1}{1-x}$ とおく．

(1) $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \ldots \quad (|x| < 1)$$

は高校で習うのでよく知っている．では $f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x+1}{2}}$ と書くと，公式 (1) の x を $\frac{x+1}{2}$ に変えたものになる．すると

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{x+1}{2} + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x+1}{2}\right)^n + \ldots\right\}$$

となるが，この無限級数はどこで収束して上の式は正しい等式になるのだろうか？この無限級数が収束するような最大の開区間を図示せよ．