力学II（後半：原田担当分）

第11回

今回の内容（pp. 102-110）

二体問題（pp.102-104）

・エネルギー保存則

惑星の運動（pp.104-110）

二体問題において中心力が万有引力の場合

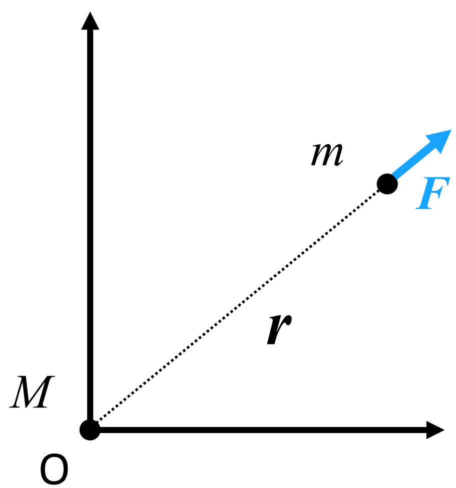
・ケプラーの第一法則：楕円軌道

・(ケプラーの第二法則：面積速度一定)

・ケプラーの第三法則：公転周期

二体問題におけるエネルギー保存則

質点Mの位置を原点Oとして、質点mの相対運動を考える。ただし $M >> m$ であり、質点mが質点Mから受ける力は保存力であり、 $\boldsymbol{F} = -\nabla U(\boldsymbol{r})$ とする。エネルギー保存則が成り立つことを示せ。



$$M >> m$$
$$\boldsymbol{F} = -\nabla U(\boldsymbol{r})$$

運動方程式は、

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -\boldsymbol{\nabla} U(\boldsymbol{r})$$

である。
両辺に$\dot{\boldsymbol{r}}$を内積でかけると

$$m(\ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}) = -\boldsymbol{\nabla} U(\boldsymbol{r}) \cdot \dot{\boldsymbol{r}}$$

であり、

$$(LHS) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2\right), (RHS) = \frac{dU(\boldsymbol{r})}{dt}$$

したがって、

$$\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 + U(\boldsymbol{r}) = E(const.)$$

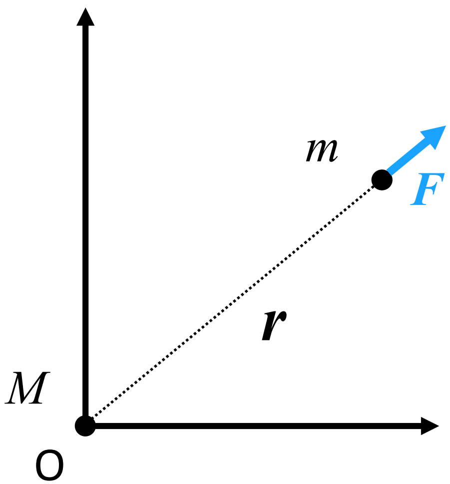
エネルギー保存則が成り立つ。

エネルギー保存則の極座標による表現

エネルギー保存則を極座標であらわし、

$$E \geq U(r) + \frac{mh^2}{2r^2}$$

が質点の運動が可能となる条件であることを示せ。ただし、面積速度を$h/2$とする。



$M >> m$

$\boldsymbol{F} = -\nabla U(\boldsymbol{r})$

$h = r^2\dot{\theta}$

$\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 + U(\boldsymbol{r}) = E$

質点のx, y座標は、

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

と書ける。これを微分すると、

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta \cdot \dot{\theta}$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta \cdot \dot{\theta}$$

となる。

$$\dot{\boldsymbol{r}}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

ここで、$\dot{\theta} = \frac{h}{r^2}$であるので、

$$\dot{\boldsymbol{r}}^2 = \dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}$$

したがって、エネルギー保存則は、

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) + U(r) = E$$

となる。

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E - \left[U(r) + \frac{mh^2}{2r^2}\right] \geq 0$$

であるので、

$$E \geq U(r) + \frac{2mh^2}{r^2}$$

が、運動が可能となる条件である。

惑星の運動

：二体問題において中心力が万有引力の場合

ケプラーの法則

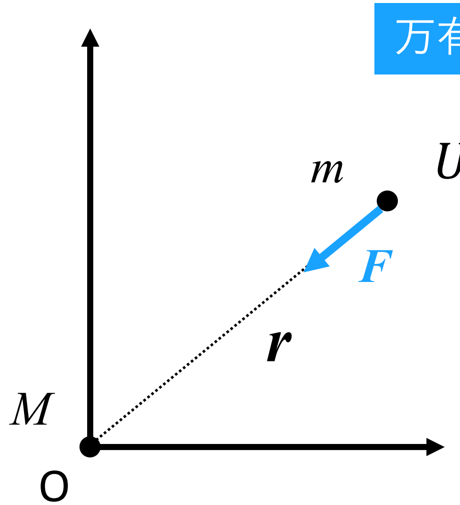
第一法則：惑星は太陽を一つの焦点とする楕円上を運動をする。

第二法則：惑星と太陽を結ぶ線分が掃く面積の速度は一定である（角運動量保存則）。

第三法則：惑星の公転周期の２乗は、惑星の楕円軌道の長径の３乗に比例する。

ケプラーの第一法則

極座標表示した力学的エネルギー保存則と角運動量保存則から、惑星の軌道(r, θ)に関して下記の微分方程式が成り立つことを示せ。



万有引力ポテンシャル

$$U(r) = -\frac{GmM}{r}$$

力学的エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) + U(r) = E$$

角運動量保存則

$$h = r^2\dot{\theta}$$

力学的エネルギー保存則の時間微分より、

$$\frac{1}{2}m\left(2\dot{r}\ddot{r} - \frac{2h^2}{r^3}\dot{r}\right) + U'(r)\dot{r} = 0$$

$$\Leftrightarrow m\left(\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3}\right) + U'(r) = 0$$

である。

角運動量保存則より、$\dot{\theta} = \frac{h}{r^2}$ であることに注意すると、

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$$

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) = \frac{h^2}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)$$

となる。

これを代入すると、

$$m\left(\frac{h^2}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)-\frac{h^2}{r^3}\right)+U'(r)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)-\frac{1}{r^3}+\frac{U'(r)}{mh^2}=0$$

となる。 $U'(r)=\frac{GmM}{r^2}$を代入して、$u=\frac{1}{r}$とおくと、

$$\frac{du}{d\theta}=-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$$

であるので、

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{GM}{h^2}$$

これを満たす解の形は、

$$u=\frac{GM}{h^2}+Acos\theta+Bsin\theta$$

であり、 $\theta=0$ において、 r が最小である（近日点）とすると、

$\frac{du}{d\theta}=0, \frac{d^2u}{d\theta^2}<0$より、B=0, A>0となる。

したがって、

$$u=\frac{GM}{h^2}+A\cos\theta\ (A>0)$$

が解となる。
ここで、

$$\frac{h^2}{GM}=l,\qquad \frac{h^2A}{GM}=e=lA$$

とおくと、

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{l}+\frac{e}{l}\cos\theta=\frac{1+e\cos\theta}{l}$$

$$\Leftrightarrow r=\frac{l}{1+e\cos\theta}\quad (e>0)$$

この極方程式は、
　$0<e<1$ のとき楕円
　$e=1$ のとき放物線
　$e>1$ のとき双曲線
となる。

問4

$$\boxed{r = \frac{l}{1 + e\cos\theta}\ (0 < e < 1)}$$ が楕円の極方程式であることを示す。

$$r + ex = \frac{l}{1 + e\cos\theta}(1 + e\cos\theta) = l$$

$$\Leftrightarrow r = l - ex$$

両辺を二乗すると、

$$r^2 = x^2 + y^2 = (l - ex)^2 = l^2 - 2lex + e^2x^2$$

$$(1 - e^2)\left(x + \frac{le}{1 - e^2}\right)^2 + y^2 = \frac{l^2}{1 - e^2}$$

$0 < e < 1$の時、

$$\frac{\left(x+\frac{le}{1-e^2}\right)^2}{\left(\frac{l}{1-e^2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{l}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2}=1 \qquad \cdots \qquad (*)$$

楕円の式　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$　と比較すると、

$$a=\frac{l}{1-e^2}, b=\frac{l}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}$$　である。

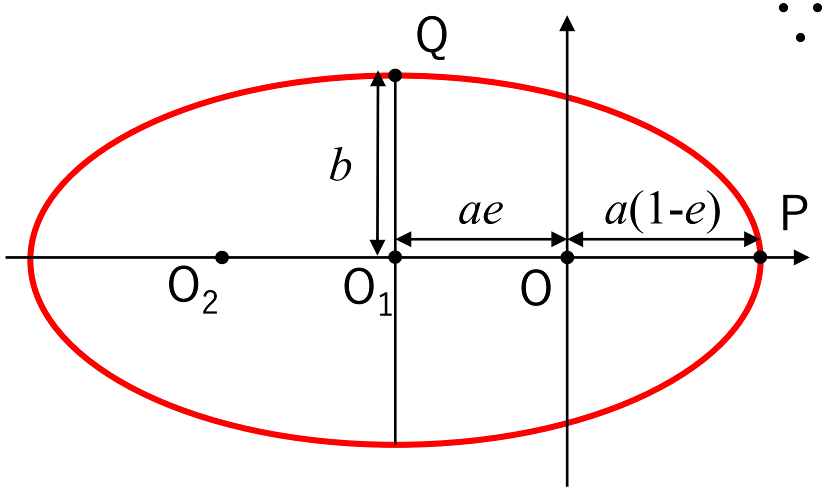
また、$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=e$ であり、eは離心率を表す。

（＊）を変形すると、

$$\frac{(x+ae)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

となり、

原点が楕円の焦点の一つとなっている。



$$\because \quad \mathrm{OP}+\mathrm{O_2P}=2a$$

$$\mathrm{OQ}+\mathrm{O_2Q}=2\sqrt{b^2-(ae)^2}$$

$$=2a=\mathrm{OP}+\mathrm{O_2P}$$

ケプラーの第三法則：公転周期

面積速度は、$\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \dfrac{h}{2}$　とあらわされる。

（∵角運動量保存則より）

公転すると楕円の面積 πab を掃くことになるので、

公転周期Tは、$T = \dfrac{\pi ab}{\frac{h}{2}} = \dfrac{2\pi ab}{h}$　となる。

$h = \sqrt{GMl}, a = \dfrac{l}{1-e^2}, b = \dfrac{l}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}$　より、$\boxed{T = \dfrac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GM}}}$