秋第九回課題解答例

20.1. (1) $\int_0^b dx \int_0^b (x^2+xy+y^2)dy = \int_0^a dx \left[x^2y+\frac{y^2}{2}x+\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=b} = \int_0^a \left(bx^2+\frac{b^2}{2}x+\frac{b^3}{3}\right) = \left[\frac{x^3}{3}b+\frac{b^2}{2}\frac{x^2}{2}+\frac{b^3}{3}x\right]_0^a = \frac{a^3b}{3}+\frac{a^2b^2}{4}+\frac{b^3a}{3}$.

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx[-\cos(x+y)]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\left(-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos x\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx(\sin x+\cos x)dx = [-\cos x+\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1-(-1) = 2$.

(3) $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{dy}{1+x+y} = \int_0^1 dx[\log(1+x+y)]_{y=0}^{y=1} = \int_0^1 dx\{\log(2+x)-\log(1+x)\} = [\{(2+x)\log(2+x)-x\}-\{(x+1)\log(x+1)-x\}]_0^1 = 3\log 3-2\log 2-(2\log 2-1\log 1) = 3\log 3-4\log 2 = \log\frac{27}{16}$.

(4) $\int_0^1 dy \int_1^3 \frac{dx}{(x+y^2)^2} = \int_0^1 dy\left[-\frac{1}{x+y^2}\right]_{x=1}^{x=3} = \int_0^1 dy\left(-\frac{1}{3+y^2}+\frac{1}{1+y^2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\arctan 1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}$. ここで $\int_0^1 \frac{dy}{3+y^2} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\sqrt{3}du}{3(1+u^2)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6}$ （$y=\sqrt{3}u$ とおいた）を使った.

20.2. (1) $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)dy = \int_0^1 dx\left[y-xy-\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1-x} = \int_0^1 dx\left((1-x)-x(1-x)-\frac{(1-x)^2}{2}\right) = \int_0^1 dx\frac{(1-x)^2}{2} = \left[-\frac{(1-x)^3}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$.

(2) 対称性から (1) の答の 4 倍である．よって答は $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ である．もちろん，四通りの積分を全部実行するのもいい.

(3) 縦線領域と思って積分すると $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^2y^2(1-x-y)^2dy$ である．$1-x=a$ と置いて $\int_0^{1-x} y^2(1-x-y)^2dy$ を計算すると $\int_0^a y^2(a-y)^2dy = \int_0^a (a^2y^2-2ay^3+y^4)dy = \left[a^2\frac{y^3}{2}-a\frac{y^4}{2}+\frac{y^5}{5}\right]_0^a = \frac{a^5}{30}$ である．a を $1-x$ に戻すと，問題の積分は $\frac{1}{30}\int_0^1 x^2(1-x)^5dx$ に帰着する．これを計算すると $\frac{1}{30}\int_0^1 (x^2-5x^3+10x^4-10x^5+5x^6-x^7)dx = \frac{1}{30}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{5x^4}{4}+2x^5-\frac{5x^6}{3}+\frac{5x^7}{7}-\frac{x^8}{8}\right]_0^1 = \frac{1}{5040}$.

(4) 積分領域を縦線領域 $x^2 \le y \le 1,\ -1 \le x \le 1$ と思って積分すると $2\int_0^1 dx \int_{x^2}^1 (y-x^2)dy = 2\int_0^1 dx\left[\frac{y^2}{2}-x^2y\right]_{y=x^2}^{y=1} = 2\int_0^1 dx\left(\frac{1}{2}-x^2-\frac{x^4}{2}+x^4\right)dx = 2\int_0^1 dx\left(\frac{1}{2}-x^2+\frac{x^4}{2}\right) = 2\left[\frac{x}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}\right]_0^1 = \frac{8}{15}$.

(5) 積分領域を横線領域 $-y \le x \le y,\ 0 \le y \le 1$ と思って積分すると $\int_0^1 dy \int_{-y}^y \sqrt{y^2-x^2}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^1 y^2dy = \frac{\pi}{6}$. ここで，$\int_{-y}^y \sqrt{y^2-x^2}dx$ は半径 y の半円の面積 $\frac{\pi}{2}y^2$ であることを使った．こちろん，これを $x=y\sin\theta$ と置いて置換積分するのもいい.

(6) 積分領域を縦線領域 $-\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}, -1 \le x \le 1$ と思って積分すると $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2}dy = 2\int_{-1}^1 dx(1-x^2) = 4\int_0^1 (1-x^2)dfx = 4\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{8}{3}$.

(7) 積分領域を縦線領域と思って先に y で積分する．$\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}$ だから問題の積分

は $\displaystyle\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}}$ となる．$x^2 = y$ とおくと $V = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}$ となる．$\sqrt{1+y^2} = t - y$ とおくと $y = \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{2t}$, $\sqrt{1+y^2} = \dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{2t} = \dfrac{1+t^2}{2t}$, $dy = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2t}\right)dt = \dfrac{1+t^2}{2t^2}dt$ だから問題の積分は $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{2t}{1+t^2}\frac{1+t^2}{2t^2}dt = \frac{1}{2}\int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2})$ である．基本的に同じことだが，$y = \sinh u$ とおく置換積分もいい ($y = \sinh u$ の逆関数は $u = \log(y + \sqrt{1+y^2})$ だから $t = e^u$ である)．先に x で積分すると計算が先に進まない（もちろん理論的に不定積分は存在するのだが初等関数で表現できないのである）．