第5回演習解答

(a) $y'=y$, $x=0$のとき$y=1$

$y=\sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k$とすると

$$y'=\sum_{k=1}^{\infty} kC_k x^{k-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)C_{k+1}x^k$$

よって

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)C_{k+1}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}C_k x^k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\{(k+1)C_{k+1}-C_k\}x^k=0$$

この式が任意のxについて成立するためには

$$C_{k+1}=\frac{1}{k+1}C_k$$ となる。

初期条件より$C_0=1$であるため

$$C_n=\frac{1}{n}C_{n-1}$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}C_{n-2}$$

$$=\cdots=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}C_0$$

$$=\frac{1}{n!}$$

となる

よって求める解は

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}C_k x^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k$$

$$=e^x$$

(b) $y'-2xy=x$, $x=0$のとき$y=1$

$y=\sum_{k=0}^{\infty}C_k x^k$とすると $y'=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)C_{k+1}x^k$である。

ここで

$$2xy+x=\sum_{k=0}^{\infty}2C_k x^{k+1}+x$$

$$=(1+2C_0)x+\sum_{k=1}^{\infty}2C_k x^{k+1}$$

であるので係数比較すると

$C_1=0$, $2C_2=1+2C_0$, $3C_3=2C_1$

$C_2=\frac{1}{2}+C_0$, $C_3=\frac{2}{3}C_1=0$

$4C_4=2C_2$

$C_4=\frac{1}{2}C_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+C_0\right)$, $\cdots$, となる

よって

$$\begin{cases} C_{2(k+1)}=\frac{1}{k+1}C_{2k} \\ C_{2k-1}=0 \quad (k\geq 1) \\ C_2=\frac{1}{2}+C_0 \\ C_0=1 \ (\text{初期条件より}) \end{cases}$$

ここで

$$C_{2n}=\frac{1}{n}C_{2(n-1)}$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}C_{2(n-2)}$$

$$=\cdots=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdots\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}\cdot C_2$$

$$=\frac{1}{n!}\left(C_0+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n!}$$

したがって求める解は

$$y=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{k!}\cdot x^{c}$$

(2)

$y' = x^2 - y^2$　$x=1$ のとき $y=1$

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (x-1)^k \quad \cdots ①$$

とおく。このとき

$$y' = C_1 + C_2(x-1) + 3C_3(x-1)^2 + \cdots$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} k C_k (x-1)^{k-1}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) C_{k+1} x^k$$

$$x^2 - y^2 = x^2 - \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} C_k (x-1)^k \right\}^2$$
$$= (1 - C_0^2) + 2(1 - C_0 C_1)(x-1)$$
$$+ (1 - 2C_0C_2 - C_1^2)(x-1)^2 + \cdots$$

これを与式に代入して、係数比較より

$$C_1 = 1 - C_0^2$$
$$2C_2 = 2(1 - C_0 C_1)$$
$$3C_3 = 1 - 2C_0C_2 - C_1^2$$
$$4C_4 = -(C_0C_3 + C_1C_2 + C_2C_1 + C_3C_0)$$
$$\vdots$$

よって

$C_0 = 1$, $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, $C_3 = -\frac{1}{3}$

$C_4 = \frac{1}{6}$ …

よって求める一般解は

$$y = 1 + (x-1)^2 - \frac{1}{3}(x-1)^3 + \frac{1}{6}(x-1)^4 + \cdots + \left(-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}\right) + \cdots$$

(右上へ)

となる。

次に収束条件を考える。

①より、$|C_n| \leq 1$ $(n = 0, 1, 2 \cdots)$ …②

であると考えられるので、これを数学的帰納法で証明する。

(i) $k=0$ のとき　$C_0 = 1$ より成り立つ

(ii) $k=n$ のとき $|C_n| \leq 1$ と仮定すると、

$k = n+1$ のとき

$$|C_{n+1}| = \left| -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} \right|$$
$$= \left| -\frac{1}{n+1}(C_0C_n + C_1C_{n-1} + \cdots + C_nC_0) \right|$$
$$\leq \left| \frac{1}{n+1} \cdot n+1 \right|$$
$$\leq 1$$

したがって②は成り立つ。

よって収束条件は

$$|x-1| < 1$$

より

$$0 < x < 2$$