

3 定数係数の2階線形微分方程式

微分方程式

$$y'' + ay' + by = f(x) \quad (a, b \text{ は定数})$$

を定数係数の2階線形微分方程式という。本章ではこの微分方程式の解法を述べる。この形の微分方程式は振動の問題、電気回路の問題でよく現われる応用上重要な方程式である。この方程式の右辺の $f(x)$ が0である場合を同次の場合という。3.1節では同次の場合の一般解を構成する。微分方程式は一般解以外の解をもちうることは前に述べたが、ここで考えている場合では一般解以外の解がないことを3.2節で示す。3.3節では同次でない場合の一般解の求め方を説明する。3.4節では応用に関連した事項について述べる。 a, b は実数とする。

3.1 同次の場合 (I)

次の微分方程式を考える：

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (1)$$

$y_1(x), y_2(x)$ が(1)の解であれば、 c_1, c_2 を定数とするとき

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

も(1)の解である。そのわけは

$$\begin{aligned} & (c_1 y_1 + c_2 y_2)'' + a(c_1 y_1 + c_2 y_2)' + b(c_1 y_1 + c_2 y_2) \\ &= c_1(y_1'' + ay_1' + by_1) + c_2(y_2'' + ay_2' + by_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるからである。

ここで、(1)の解を求めるため、 ρ を定数として

$$y = e^{\rho x} \quad (2)$$

とおいてみる。これを微分して(1)に代入すると

$y_1(x), y_2(x)$ が式(1)の解 $\Rightarrow y_1(x), y_2(x)$ は式(1)の特殊解。

一般解は、2つの特殊解がわかれば、その2つの式で $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ で表わせる。

どのような方法を用いても良いので、2つの特殊解を見つければ、一般解が得られる。

$$(\rho^2 + a\rho + b)e^{\rho x} = 0$$

となる。したがって、 ρ が2次方程式

$$\rho^2 + a\rho + b = 0 \quad (3)$$

の根であれば、(2)は(1)の解になっている。(3)を(1)の特性方程式という。

(3)の根は

$$\rho_1 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 - 4b}), \quad \rho_2 = \frac{1}{2}(-a - \sqrt{a^2 - 4b}) \quad (4)$$

である。ここで場合を三つに分けて考えよう：

- i) (3)が相異なる実根をもつ ($a^2 > 4b$)
- ii) (3)が互いに共役な複素根をもつ ($a^2 < 4b$)
- iii) (3)が実重根をもつ ($a^2 = 4b$)

i) このとき、 c_1, c_2 を定数として

$$c_1 e^{\rho_1 x} + c_2 e^{\rho_2 x}$$

が(1)の解である。

ii) この場合はi)とちがって、 ρ_1, ρ_2 が実数ではない。実数値関数の解を求めるため、(4)を

$$\begin{aligned} \rho_1 &= p + qi, & \rho_2 &= p - qi \\ (p &= -(1/2)a, & q &= (1/2)\sqrt{4b - a^2}) \end{aligned} \quad (5)$$

と書く。

$$e^{\rho_1 x} = e^{(p+qi)x} = e^{px} (\cos qx + i \sin qx)$$

$$e^{\rho_2 x} = e^{(p-qi)x} = e^{px} (\cos qx - i \sin qx)$$

であるが、 $e^{\rho_1 x}, e^{\rho_2 x}$ が(1)の解であるから

$$(1/2)(e^{\rho_1 x} + e^{\rho_2 x}) = e^{px} \cos qx, \quad (1/2i)(e^{\rho_1 x} - e^{\rho_2 x}) = e^{px} \sin qx$$

はいずれも(1)の解である。

したがって、 c_1, c_2 を定数とするとき

$$e^{px} (c_1 \cos qx + c_2 \sin qx)$$

は(1)の解である。

iii) この場合は

$$\rho_1 = \rho_2 = -(a/2)$$

であるから $e^{-(a/2)x}$ は(1)の解である。 $e^{-(a/2)x}$ の定数倍ではない解を求める

← 2つの特殊解 $e^{\rho_1 x}, e^{\rho_2 x}$ で一般解を得た。

← 2つの特殊解 $e^{px} \cos qx, e^{px} \sin qx$ で一般解を得た。

ため

$$y(x) = z(x)e^{-\frac{a}{2}x} \quad (6)$$

とおいてみる.

$$y' = z'e^{-\frac{a}{2}x} - \frac{a}{2}ze^{-\frac{a}{2}x}, \quad y'' = z''e^{-\frac{a}{2}x} - az'e^{-\frac{a}{2}x} + \frac{a^2}{4}ze^{-\frac{a}{2}x}$$

であるから

$$y'' + ay' + by = e^{-\frac{a}{2}x} \left(z'' + \left(b - \frac{a^2}{4} \right) z \right) = e^{-\frac{a}{2}x} z''$$

となる. ゆえに $z'' = 0$ のとき (6) の $y(x)$ は (1) の解である. したがって (6)

で $z = x$ とした $xe^{-\frac{a}{2}x}$ が (1) の解となる. これで c_1, c_2 を定数としたとき

$$e^{-\frac{a}{2}x}(c_1 + c_2 x)$$

が (1) の解であることがわかった.

以上で次の事実が示された.

c_1, c_2 を任意の定数とする.

$$a^2 > 4b \quad \text{のとき} \quad y(x) = c_1 e^{\rho_1 x} + c_2 e^{\rho_2 x} \quad (7)$$

$$a^2 < 4b \quad \text{のとき} \quad y(x) = e^{px}(c_1 \cos qx + c_2 \sin qx) \quad (8)$$

$$a^2 = 4b \quad \text{のとき} \quad y(x) = e^{-\frac{a}{2}x}(c_1 + c_2 x) \quad (9)$$

と定められた $y(x)$ は (1) の一般解である. ただし, ρ_1, ρ_2 は (4) で p, q は (5) で与えられるものとする.

2つの特殊解 $e^{-\frac{a}{2}x}$ と $xe^{-\frac{a}{2}x}$ で一般解を表している。

覚えてもいいが、導き出せるようにしておくといい。

例題 1 次の方程式の一般解を求めよ.

i) $y'' + 4y' + 3y = 0$ ii) $y'' + 2y' = 0$

iii) $y'' - 2y' + y = 0$ iv) $y'' + 4y' + 5y = 0$

解 i) $y = e^{\rho x}$ とおけば $\rho^2 + 4\rho + 3 = 0$. ゆえに $\rho = -1$ または $\rho = -3$.

ゆえに一般解は

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$$

ii) $y = e^{\rho x}$ とおけば $\rho^2 + 2\rho = 0$. ゆえに $\rho = 0, -2$. 一般解は

$$y = c_1 + c_2 e^{-2x}$$

iii) $y = e^{\rho x}$ とおけば, $(\rho - 1)^2 = 0$. ゆえに $\rho = 1$ (2重解). 一般解は

$$y = (c_1 + c_2 x)e^x$$

iv) $y = e^{\rho x}$ とおけば $\rho^2 + 4\rho + 5 = 0$. ゆえに $\rho = -2 \pm i$. 一般解は

$$y = e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) \quad \square$$

例題 2 α, β を与えられた定数とする. (1) の解 $y(x)$ で

$$y(0) = \alpha, \quad y'(0) = \beta \quad (10)$$

をみたすものを求めよ.

解 (7), (8), (9) の c_1, c_2 を (10) がみたされるように定めることができる.
ればよい.

$a^2 > 4b$ のとき, (7) と (10) によって

$$c_1 + c_2 = \alpha, \quad c_1 \rho_1 + c_2 \rho_2 = \beta$$

となる. これを c_1, c_2 について解けば

$$c_1 = \frac{\alpha \rho_2 - \beta}{\rho_2 - \rho_1}, \quad c_2 = \frac{\alpha \rho_1 - \beta}{\rho_1 - \rho_2} \quad (11)$$

このように c_1, c_2 を定めれば (7) の $y(x)$ は (10) をみたす.

$a^2 < 4b$ のときは, (8) と (10) によって

$$c_1 = \alpha, \quad c_2 = (\beta - p\alpha)/q \quad (12)$$

とすればよい.

$a^2 = 4b$ のときは, (9) と (10) によって

$$c_1 = \alpha, \quad c_2 = \beta + (a/2)\alpha$$

とすればよい. \square

方程式 (1) に対して, (10) の形の条件 (一般には $y(a) = \alpha, y'(a) = \beta$ の形) を **初期条件** といい, 上の例題の形の問題を **初期値問題** という.

問 次の微分方程式の解で後記の条件をみたすものを求めよ.

i) $y'' + 3y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

ii) $y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 1$

iii) $y'' + y' - 6y = 0, \quad y(0) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$

iv) $y'' - 7y' + 10y = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$

p59~62は省略

とおけば, (5) はみたされる. このとき, (4) は

$$\begin{aligned} y(x) &= A(-\sin\sqrt{c}a\cos\sqrt{c}x + \cos\sqrt{c}a\sin\sqrt{c}x) \\ &= A\sin\sqrt{c}(x-a) = A\sin\left(m\pi\frac{x-a}{b-a}\right) \end{aligned}$$

となる. これで十分性が示されたと同時に, (3) が成り立つとき “恒等的に 0” ではない解の形が定められた. \square

問 上の例題 6 において, $y(a) = y(b) = 0$ の代わりに次のそれぞれの条件をおいた場合の c のとり得る値と, それらに対応する $y(x)$ を求めよ.

- i) $y'(a) = y'(b) = 0$ ii) $y(a) = y'(b) = 0$
 iii) $y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b).$

3.3 同次でない場合

微分方程式

$$y'' + ay' + by = f(x) \quad (1)$$

の一般解を求めよう.

$y_1(x), y_2(x)$ を次のように定める:

$$\left. \begin{aligned} &a^2 > 4b \text{ のとき} \\ &\quad y_1(x) = e^{\rho_1 x}, \quad y_2(x) = e^{\rho_2 x} \\ &a^2 < 4b \text{ のとき} \\ &\quad y_1(x) = e^{px} \cos qx, \quad y_2(x) = e^{px} \sin qx \\ &a^2 = 4b \text{ のとき} \\ &\quad y_1(x) = e^{-\frac{a}{2}x}, \quad y_2(x) = xe^{-\frac{a}{2}x} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ただし, ρ_1, ρ_2, p, q は 3.1 節の (4), (5) の通りとする. このとき 3.2 節, 例題 5 によって, 微分方程式

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (3)$$

の解は

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad (4)$$

で与えられる.

もし(1)の一つの解 $\varphi(x)$ が見いだされたならば, (1)の任意の解 $y(x)$ は, c_1, c_2 を定数として

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \varphi(x)$$

と書かれる. そのわけは, $y(x) = z(x) + \varphi(x)$ とおけば

$$\begin{aligned} z'' + az' + bz &= y'' + ay' + by - (\varphi'' + a\varphi' + b\varphi) \\ &= f(x) - f(x) = 0 \end{aligned}$$

となって $z(x)$ が (3) をみたすからである.

次に, (1)の一般解を見いだす方法を説明する. 同次形方程式 (3) の解 (4) において, c_1, c_2 を関数と考え

$$y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \quad (5)$$

が (1) の解となるように $c_1(x), c_2(x)$ を定めてみよう:

(5) を微分すると

$$y' = c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x) + c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x)$$

となるが, ここで c_1, c_2 は

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \quad (6)$$

をみたすものとする. このとき

$$y' = c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x)$$

であるが, これをもう一度微分すれば

$$y'' = c_1(x)y_1''(x) + c_2(x)y_2''(x) + c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x)$$

となる. この場合, (5) が (1) の解であることと

$$c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x) \quad (7)$$

とは同等である.

(6), (7) から

$$\left. \begin{aligned} c_1'(x)(y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)) &= -f(x)y_2(x) \\ c_2'(x)(y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)) &= f(x)y_1(x) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここで

$$\alpha = \begin{cases} \rho_2 - \rho_1 = -\sqrt{a^2 - 4b}, & a^2 > 4b \text{ のとき} \\ q = (1/2)\sqrt{4b - a^2}, & a^2 < 4b \text{ のとき} \\ 1, & a^2 = 4b \text{ のとき} \end{cases} \quad (9)$$

とおけば, $y_1(x), y_2(x)$ の定義から容易にみちびかれるように

もし, $\varphi(x)$ を見つけられたら, 同次形 $y'' + ay' + by = 0$ の解を求めて, 左の一般解に直ちにすはる.

いつも見つかるとは限らないので, 下記の方法で $\varphi(x)$ を得られることがある.

$f(x)$ の形と $\varphi(x)$ の形が類似していることが多いことに着目し, つぎの表のように $f(x)$ を仮定して, これを与式に代入することにより, 各係数を求める.

$f(x)$ の形	$\varphi(x)$ の形
$a + be^{\alpha x}$	$A + Be^{\alpha x}$
$a \cos \alpha x + b \sin \alpha x$	$A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$
$a e^{\alpha x} \sin \beta x$	$e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$
$a e^{\alpha x} \cos \beta x$	
多項式	多項式

p65~71 は省略

（テキスト該当ページ：pp.55～71）

（今回の演習のうち，5)～8) は，p.71 問題 5 と同じです．章末に解答が掲載されています）

(1) 次の常微分方程式の一般解を求めよ．

4) $y'' - 2y' + y = e^x \cos x$

5) $y'' + 3y' + 2y = 4x^3$

6) $y'' - 2y' + y = 2e^x$

7) $y'' + 2y = x + 2 \sin x$

8) $y'' + y = e^x + 3 \cos x$

9) 特殊解を類推する方法を用いて次の微分方程式の一般解を求めよ

(a) $y'' - y' - 2y = \cos x$

(b) $y'' - 3y' + 2y = (1 + 2x)e^x$

10) $y'' - y' = x^2$

11) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$

12) $y'' + 3y' + 2y = \cos x$

13) $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 3x$

— 注 意 —

演習問題の答えを pdf 形式でアップロードし，提出してください．
学生番号，氏名を記入することを忘れないで下さい