【第1回その２演習解答】

(1)

1) $\dfrac{dy}{dx} - xy = x$

$\dfrac{dy}{dx} - xy = 0$ のとき

$\dfrac{dy}{dx} = xy$

$\dfrac{dy}{y} = x \cdot dx$

$\log y = \dfrac{1}{2}x^2 + C$

$y = Ce^{\frac{1}{2}x^2}$

ここで $y = C(x)e^{\frac{1}{2}x^2}$ が与式を満たすような $C(x)$ を求める。

$y' = C'(x)e^{\frac{1}{2}x^2} + C(x) \cdot xe^{\frac{1}{2}x^2}$

よって

$C'(x) = xe^{-\frac{1}{2}x^2}$

$C(x) = \int xe^{-\frac{1}{2}x^2}dx + C$

$= -e^{-\frac{1}{2}x^2} + C$

したがって一般解は

$y = Ce^{\frac{1}{2}x^2} - 1$ //

2). $x\dfrac{dy}{dx} - 2y = x^4$

$x\dfrac{dy}{dx} - 2y = 0$ のとき

$\dfrac{dy}{y} = \dfrac{2dx}{x}$

$\log y = 2\log x + c$

$y = Cx^2$.

ここで $y = C(x) \cdot x^2$ が与式を満たすような $C(x)$ を求める。

$y' = C'(x)x^2 + C(x) \cdot 2x$.

$xy' = C'(x)x^3 + C(x) \cdot 2x^2$.

よって

$C'(x) = x$

$C(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + C$.

したがって一般解は

$y = \dfrac{1}{2}x^4 + Cx^2$. //

3). $\dfrac{dy}{dx} + (\tan x)y = \sin 2x$.

$\dfrac{dy}{dx} + (\tan x)y = 0$ のとき

$\dfrac{dy}{y} = -\tan x\, dx$.

$y = C\cos x$.

ここで $y = C(x)\cos x$ が与式を満たすような $C(x)$ を求める。

$y' = C'(x)\cos x - C(x)\sin x$.

$= C'(x)\cos x - C(x)\cos x \cdot \tan x$

よって

$C'(x) = 2\sin x$.

$C(x) = -2\cos x + C$

したがって一般解は

$y = C\cos x - 2\cos^2 x$ //

4) $\dfrac{dy}{dx} + 3y = x^3$

$\dfrac{dy}{dx} + 3y = 0$ のとき

$\dfrac{dy}{y} = -3y$

$y = Ce^{-3x}$

ここで $y = C(x)e^{-3x}$ が与式を満たすような $C(x)$ を求める.

$y' = C'(x)e^{-3x} - 3C(x)e^{-3x}$

よって

$C'(x) = x^3 e^{3x}$

$C(x) = \int x^3 e^{3x} dx + C$

$= \frac{1}{3}x^3 e^{3x} - \int x^2 e^{3x} dx + C$

$= \cdots$

$= \dfrac{e^{3x}}{27}(9x^3 - 9x^2 + 6x - 2) + C$

したがって一般解は

$y = Ce^{-3x} + \left(\frac{1}{27}\right)(9x^3 - 9x^2 + 6x - 2)$

5) $\dfrac{dy}{dx} + xy = x^2$

$\dfrac{dy}{dx} + xy = 0$ のとき.

$\dfrac{dy}{y} = -x\,dx$

$y = Ce^{-\frac{1}{2}x^2}$

ここで $y = C(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}$ が与式を満たすような $C(x)$ を求める.

$y' = C'(x)e^{-\frac{1}{2}x^2} - xC(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}$

よって

$C'(x) = x^2 e^{\frac{1}{2}x^2}$

$C(x) = \int x^2 e^{\frac{1}{2}x^2} dx + C$.

したがって一般解は

$y = Ce^{-\frac{1}{2}x^2} + e^{-\frac{1}{2}x^2}\int x^2 e^{\frac{1}{2}x^2} dx$.

6). $\dfrac{dy}{dx} = (x-y)^2$

$x - y = t$ とおくと $y' = 1 - t'$ より

$1 - t' = t^2$

$\dfrac{dt}{1-t^2} = dx$.

$\int \dfrac{dt}{1-t^2} = \int dx$.

$\int \left(\dfrac{1}{1+t} + \dfrac{1}{1-t}\right) dt = 2\int dx$

$\log\left|\dfrac{1+t}{1-t}\right| = 2x + C$

$\dfrac{1+t}{1-t} = Ce^{2x}$.

$t = \dfrac{Ce^{2x}+1}{Ce^{2x}-1}$

したがって一般解は

$y = x + 1 - 2e^{2x}(C + e^{2x})^{-1}$

7) $\frac{dy}{dx}+3y=e^{x}$, $y(0)=1$

$\frac{dy}{dx}+3y=0$ のとき

$$\frac{dy}{y}=-3dx$$

$$\log y=-3x+c$$

$$y=Ce^{-3x}$$

ここで $y=C(x)e^{-3x}$ が与式を満たすような $C(x)$ を求める

$$y'=C'(x)e^{-3x}-3C(x)e^{-3x}$$

よって

$$C'(x)=e^{4x}$$

$$C(x)=\frac{1}{4}e^{4x}+C$$

したがって一般解は

$$y=\left(\frac{1}{4}e^{4x}+C\right)e^{-3x}$$

ここで $y(0)=1$ より $C=\frac{3}{4}$

$$y=\frac{1}{4}e^{x}+\frac{3}{4}e^{-3x}$$

8) $\frac{dy}{dx}+x^2y=\sin x$, $y(0)=0$

$\frac{dy}{dx}+x^2y=0$ のとき

$$\frac{dy}{y}=-x^2dx$$

$$\log y=-\frac{x^3}{3}+C$$

$$y=Ce^{-\frac{x^3}{3}}$$

ここで $y=C(x)e^{-\frac{x^3}{3}}$ が与式を満たすような $C(x)$ を求める

$$y'=C'(x)e^{-\frac{x^3}{3}}-x^2C(x)e^{-\frac{x^3}{3}}$$

よって

$$C'(x)=e^{\frac{x^3}{3}}\sin x$$

$$C(x)=\int e^{\frac{x^3}{3}}\sin x\,dx+C$$

したがって一般解は

$$y=e^{-\frac{x^3}{3}}\left\{\int e^{\frac{x^3}{3}}\sin x\,dx+C\right\}$$

ここで $y(0)=0$ より $C=0$

$$y=e^{-\frac{x^3}{3}}\int_0^x e^{\frac{s^3}{3}}\sin s\,ds$$

9) $x\frac{dy}{dx}-3y=2x$, $y(1)=0$

$x\frac{dy}{dx}-3y=0$ のとき

$$\frac{dy}{y}=\frac{3}{x}dx$$

$$\log y=3\log x+C$$

$$y=Cx^3$$

ここで $y=C(x)x^3$ が与式を満たすような $C(x)$ を求める。

$$y'=C'(x)\cdot x^3+3x^2C(x)$$

よって

$$C'(x)=\frac{2}{x^3}$$

$$C(x)=-\frac{1}{x^2}+C$$

したがって一般解は

$$y=-x+Cx^3$$

ここで $y(1)=0$ より $C=1$

$$y=-x+x^3$$