夏季休暇課題の解説．

1. もし $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|c_n|^{\frac{1}{n}}} = r$ が存在すれば，冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ の収束半径は r である．これを冪級数の収束半径に対する **Cauchy の判定法**と呼ぶ．これを証明する．

(1) $r > 0$ のとき．$0 < q < r$ となる任意の q をとる．$|x| < q$ なら冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ は収束することを示す．このとき，ある N が在って，$\forall n > N$ に対して $\frac{1}{|c_n|^{1/n}} > q$ したがって

$$|c_n| < 1/q^n$$

となる．よって

$$|c_n x^n| < |x/q|^n$$

となる．もし $|x| < q$ なら $|x/q| < 1$ である．よって $|$ 公比 $| < 1$ の等比級数と比べることにより冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ は収束する．q は $0 < q < r$ となる任意の数だから冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ は $|x| < r$ のとき収束する．もし $|x| > r$ なら $|c_n x^n|^{1/n} \to |x/r| > 1$ $(n \to \infty)$ だから $\lim_{n\to\infty} |c_n x^n| = 0$ が成り立たない（なぜなら，十分大きい N をとれば $\forall n > N$ に対して $|c_n x^n| > 1$ となるから）．よって $|x| > r$ なら冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ は収束しない．よって収束半径は r である．

(2) $r = 0$ のとき．$|c_n| \to \infty$ だから $|c_n x^n| \to 0$ となるためには $|x| = 0$ でなければならない．よって 0 でない x に対して冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ は収束しない．

2. (1) 指数関数

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

（ただし $0! = 1$ と約束する）の収束半径．$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$ だから，ダランベールの判定法より e^x の収束半径は ∞ である．つまり e^x は任意の実数 x に対して収束する．

(2) 三角関数

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

の収束半径.

$$\sin x = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} \overset{y=x^2}{=} x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^n}{(2n+1)!}$$

と書き換えると y の冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^n}{(2n+1)!}$$

の収束半径を求めることに帰着する．$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)!}{(2n+1)!} = \lim_{n\to\infty}(2n+3)(2n+2) = \infty$ だからダランベールの判定法により，y の冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^n}{(2n+1)!}$ の収束半径は ∞，すなわち任意の y に対して収束する．よって $\sin x$ は任意の x に対して収束する．よって $\sin x$ の収束半径は ∞ である．

(3) 三角関数

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

の収束半径．$y = x^2$ とおけば (2) と同じようにダランベールの判定法から $\cos x$ の収束半径は ∞ であることがわかる．

(4) 等比級数の和の公式

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

の収束半径．係数 c_n は $|c_n| = 1$ を満たすから $\lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = 1$ である．よってダランベールの判定法により収束半径は 1 である．

(5) 対数関数

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

の収束半径．係数は $c_0 = 0$, $|c_n| = 1/n$ $(n = 1, 2, \dots)$ を満たすから $\lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ である．よってダランベールの判定法により収束半径は 1 である．

(6) 一般二項定理

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

の収束半径．α が非負整数のとき．これは通常の二項定理である．よって収束の問題はない（任意の x に対して成り立つ公式である）．α が非負整数でない実数のとき．一般二項係数

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$$

は決して 0 にならない．よってこの級数は無限級数になる．このときの収束半径を r とすると

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\binom{\alpha}{n}}{\binom{\alpha}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right| = 1$$

だからダランベールの判定法により収束半径は 1 である．

• 一般二項定理において $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$ の収束半径をダランベールの判定法で求められたが，右辺の冪級数の収束半径が 1 であると判定されるだけで，左辺と右辺が等しいこと，すなわち残項 $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ $(\forall x : |x| < 1)$ は，別立てに証明しないといけないことである．このことは，残項の積分表示を使って証明できる（秋学期の初回で証明する）．しかし：

• **複素関数論**という数学を使うと，証明するのが難しい「残項 $\to 0$ $(n \to \infty)$」を言わなくても α が非負整数でない実数のとき，$|z| < 1$ を満たす任意の**複素数**に対して

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n + \cdots$$

が $|x| < 1$ に対して収束することを，**コーシーの積分公式**というものを使って**簡単に**証明できてしまう！

• 上ではダランベールの判定法で収束半径を求めたが，コーシーの判定法によっても同じ答えが出るはずである．それを確認するのはいい練習問題である．

3. 教科書の問 9.1 (1) **2**(5) $\log(1+x)$ と同じ．(2) **2** (3) $\cos x$ と同じ．(3) 問題の冪級数は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$$

と表される．これはダランベールの判定法もコーシーの判定法も使えない形．そこで収束半径の定義に戻って考える．もし $|x| < 1$ なら $\frac{x^{n^2}}{2^n} < \frac{1}{2^n}$ であって $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$ は収束するから，優級数定理より問題の冪級数も収束する．もし $|x| > 1$ なら $|x| = 1 + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ とおける．$\lim_{n\to\infty}(1+\varepsilon)^n = \infty$ だから n が十分大きいとき（ある N があって $n > N$ となる全ての n に対して）$(1+\varepsilon)^n > 4$ である．よって

$$\frac{x^{n^2}}{2^n} = \frac{(1+\varepsilon)^{n^2}}{2^n} = \left(\frac{(1+\varepsilon)^n}{2}\right)^n > 2^n \to \infty \quad (n \to \infty)$$

である．よって $|x| > 1$ なら問題の冪級数は発散する．以上から問題の冪級数の収束半径は 1 である．

教科書の問 9.2 (1) これは，典型的な数学的帰納法の練習問題である．$f^{(n)}(x) = \{P_n(x)/x^{2n}\}e^{-1/x}$ とする．$f^{(n+1)}(x)$ を積の微分法を使って計算して $x^{-2(n+1)}e^{-1/x}$ を括り出すと，n に依存する多項式 $P_{n+1}(x)$ が（多項式の列 $\{P_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ を定める漸化式の形で）が現れる．

(2) これも数学的帰納法．$f^{(n-1)}(0) = 0$ まで正しいとすると

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{x}$$

であるが，(1) により，これは n が何であっても $\lim_{x\to\infty} x^n/e^x = 0$ が成り立つことから従う．$x \leq 0$ では $f(x) = 0$ なんだから当然 $f^{(n)}(0) = 0$ だと言いたいところだが，これは正しくない．なぜなら $f^{(n)}(x)$ が $x = 0$ で連続であるかどうかがわからないのにこういうことは主張できないからである．そこで微分の定義に戻って計算するわけである．

(3) (2) より $f(x)$ の $x = 0$ を中心とするテイラー多項式は恒等的にゼロという多項式である．よって $f(x) = f_{n-1}(x) + R_n(x)$ という分解において常に $f(x) = R_n(x)$ である．$x > 0$ なら $f(x) > 0$ だから $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ は成り立たない．よって関数 $f(x)$ は解析的ではない．

4. 極限

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x}\right)$$

をテイラー公式を使って求める．

$$\begin{aligned}
\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} &= \frac{\sin x - (e^x - 1)}{(e^x - 1)\sin x} \\
&= \frac{(x - \frac{x^3}{3!} + \dots) - (x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots)}{(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots)(x - \frac{x^3}{3!} + \dots)} \\
&= \frac{-\frac{x^2}{2} + \dots}{x^2 + \dots} \to -\frac{1}{2} \quad (x \to 0)
\end{aligned}$$

5. 極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{xe^{x^2} - \arcsin x}{x^3}$$

をテイラー公式を使って求める．$(\arcsin x)' = (1 - x^2)^{-1/2}$ と項別積分定理より

$$\arcsin x = \int_0^x (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \int_0^x \left\{1 + \frac{t^2}{2} + \frac{3t^4}{8} + \dots\right\}dt = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \dots$$

だから

$$\begin{aligned}
\frac{xe^{x^2} - \arcsin x}{x^3} &= \frac{x(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \dots) - (x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \dots)}{x^3} \\
&= \frac{\frac{5}{6}x^3 + \dots}{x^3} \to \frac{5}{6} \quad (x \to 0)
\end{aligned}$$