3　定数係数の2階線形微分方程式

微分方程式

$$y'' + ay' + by = f(x) \qquad (a, b \text{ は定数})$$

を定数係数の2階線形微分方程式という．本章ではこの微分方程式の解法を述べる．この形の微分方程式は振動の問題，電気回路の問題でよく現われる応用上重要な方程式である．この方程式の右辺の $f(x)$ が0である場合を同次の場合という．3.1節では同次の場合の一般解を構成する．微分方程式は一般解以外の解をもちうることは前に述べたが，ここで考えている場合では一般解以外の解がないことを3.2節で示す．3.3節では同次でない場合の一般解の求め方を説明する．3.4節では応用に関連した事項について述べる．a, b は実数とする．

3.1　同次の場合 (I)

次の微分方程式を考える：

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{1}$$

$y_1(x), y_2(x)$ が (1) の解であれば，c_1, c_2 を定数とするとき

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

も (1) の解である．そのわけは

$$\begin{aligned}
&(c_1 y_1 + c_2 y_2)'' + a(c_1 y_1 + c_2 y_2)' + b(c_1 y_1 + c_2 y_2) \\
&= c_1(y_1'' + ay_1' + by_1) + c_2(y_2'' + ay_2' + by_2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

となるからである．

ここで，(1) の解を求めるため，ρ を定数として

$$y = e^{\rho x} \tag{2}$$

とおいてみる．これを微分して (1) に代入すると

$y_1(x), y_2(x)$ が式(1)の解 $\Rightarrow$ $y_1(x), y_2(x)$ は式(1)の特殊解．

一般解は，2つの特殊解がわかれば，その2つの式で　$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ で表わせる。

どのような方法を用いても良いので，2つの特殊解を見つければ，一般解が得られる。

$$(\rho^2 + a\rho + b)e^{\rho x} = 0$$

となる．したがって，ρ が2次方程式

$$\rho^2 + a\rho + b = 0 \tag{3}$$

の根であれば，(2) は (1) の解になっている．(3) を (1) の**特性方程式**という．

(3) の根は

$$\rho_1 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 - 4b}), \quad \rho_2 = \frac{1}{2}(-a - \sqrt{a^2 - 4b}) \tag{4}$$

である．ここで場合を三つに分けて考えよう：

i) (3) が相異なる実根をもつ ($a^2 > 4b$)

ii) (3) が互いに共役な複素根をもつ ($a^2 < 4b$)

iii) (3) が実重根をもつ ($a^2 = 4b$)

i) このとき，c_1, c_2 を定数として

$$c_1 e^{\rho_1 x} + c_2 e^{\rho_2 x}$$

が (1) の解である．

← 2つの特殊解 $e^{\rho_1 x}$, $e^{\rho_2 x}$ で一般解を得た。

ii) この場合は i) とちがって，ρ_1, ρ_2 が実数ではない．実数値関数の解を求めるため，(4) を

$$\rho_1 = p + qi, \quad \rho_2 = p - qi$$
$$(p = -(1/2)a, \quad q = (1/2)\sqrt{4b - a^2}) \tag{5}$$

と書く．

$$e^{\rho_1 x} = e^{(p+qi)x} = e^{px}(\cos qx + i \sin qx)$$
$$e^{\rho_2 x} = e^{(p-qi)x} = e^{px}(\cos qx - i \sin qx)$$

であるが，$e^{\rho_1 x}$, $e^{\rho_2 x}$ が (1) の解であるから

$$(1/2)(e^{\rho_1 x} + e^{\rho_2 x}) = e^{px}\cos qx, \quad (1/2i)(e^{\rho_1 x} - e^{\rho_2 x}) = e^{px}\sin qx$$

← 2つの特殊解 $e^{px}\cos qx$, $e^{px}\sin qx$ で一般解を得た。

はいずれも (1) の解である．

したがって，c_1, c_2 を定数とするとき

$$e^{px}(c_1 \cos qx + c_2 \sin qx)$$

は (1) の解である．

iii) この場合は

$$\rho_1 = \rho_2 = -(a/2)$$

であるから $e^{-(a/2)x}$ は (1) の解である．$e^{-(a/2)x}$ の定数倍ではない解を求める

ため

$$y(x) = z(x)e^{-\frac{a}{2}x} \tag{6}$$

とおいてみる．

$$y' = z'e^{-\frac{a}{2}x} - \frac{a}{2}ze^{-\frac{a}{2}x}, \quad y'' = z''e^{-\frac{a}{2}x} - az'e^{-\frac{a}{2}x} + \frac{a^2}{4}ze^{-\frac{a}{2}x}$$

であるから

$$y'' + ay' + by = e^{-\frac{a}{2}x}\left(z'' + \left(b - \frac{a^2}{4}\right)z\right) = e^{-\frac{a}{2}x}z''$$

となる．ゆえに $z'' = 0$ のとき (6) の $y(x)$ は (1) の解である．したがって (6) で $z = x$ とした $xe^{-\frac{a}{2}x}$ が (1) の解となる．これで c_1, c_2 を定数としたとき

$$e^{-\frac{a}{2}x}(c_1 + c_2x)$$

が (1) の解であることがわかった．

2つの特殊解 $e^{-\frac{a}{2}x}$ と $xe^{-\frac{a}{2}x}$ で一般解を表している。

以上で次の事実が示された．

c_1, c_2 を任意の定数とする．

$$a^2 > 4b \quad \text{のとき} \quad y(x) = c_1e^{\rho_1 x} + c_2e^{\rho_2 x} \tag{7}$$

$$a^2 < 4b \quad \text{のとき} \quad y(x) = e^{px}(c_1\cos qx + c_2\sin qx) \tag{8}$$

$$a^2 = 4b \quad \text{のとき} \quad y(x) = e^{-\frac{a}{2}x}(c_1 + c_2x) \tag{9}$$

覚えても良いが、導き出せるようにしておくと良い。

と定められた $y(x)$ は (1) の一般解である．ただし，ρ_1, ρ_2 は (4) で p, q は (5) で与えられるものとする．

例題 1 次の方程式の一般解を求めよ．

i) $y'' + 4y' + 3y = 0$ ii) $y'' + 2y' = 0$

iii) $y'' - 2y' + y = 0$ iv) $y'' + 4y' + 5y = 0$

解 i) $y = e^{\rho x}$ とおけば $\rho^2 + 4\rho + 3 = 0$．ゆえに $\rho = -1$ または $\rho = -3$．ゆえに一般解は

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{-3x}$$

ii) $y = e^{\rho x}$ とおけば $\rho^2 + 2\rho = 0$．ゆえに $\rho = 0, -2$．一般解は

$$y = c_1 + c_2e^{-2x}$$

iii) $y = e^{\rho x}$ とおけば，$(\rho - 1)^2 = 0$．ゆえに $\rho = 1$ （2重解）．一般解は

$$y = (c_1 + c_2 x)e^x$$

iv) $y = e^{\rho x}$ とおけば $\rho^2 + 4\rho + 5 = 0$. ゆえに $\rho = -2 \pm i$. 一般解は

$$y = e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$ □

例題2 α, β を与えられた定数とする. (1) の解 $y(x)$ で

$$y(0) = \alpha, \quad y'(0) = \beta \tag{10}$$

をみたすものを求めよ.

解 (7), (8), (9) の c_1, c_2 を (10) がみたされるように定めることができればよい.

$a^2 > 4b$ のとき, (7) と (10) によって

$$c_1 + c_2 = \alpha, \quad c_1\rho_1 + c_2\rho_2 = \beta$$

となる. これを c_1, c_2 について解けば

$$c_1 = \frac{\alpha\rho_2 - \beta}{\rho_2 - \rho_1}, \quad c_2 = \frac{\alpha\rho_1 - \beta}{\rho_1 - \rho_2} \tag{11}$$

このように c_1, c_2 を定めれば (7) の $y(x)$ は (10) をみたす.

$a^2 < 4b$ のときは, (8) と (10) によって

$$c_1 = \alpha, \quad c_2 = (\beta - p\alpha)/q \tag{12}$$

とすればよい.

$a^2 = 4b$ のときは, (9) と (10) によって

$$c_1 = \alpha, \quad c_2 = \beta + (a/2)\alpha$$

とすればよい. □

方程式 (1) に対して, (10) の形の条件 (一般には $y(a) = \alpha$, $y'(a) = \beta$ の形) を**初期条件**といい, 上の例題の形の問題を**初期値問題**という.

問 次の微分方程式の解で後記の条件をみたすものを求めよ.

i) $y'' + 3y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

ii) $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y(1) = 1$

iii) $y'' + y' - 6y = 0$, $y(0) = 1$, $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$

iv) $y'' - 7y' + 10y = 0$, $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$

p59〜62は省略

とおけば，(5) はみたされる．このとき，(4) は

$$y(x) = A(-\sin\sqrt{c}\,a\cos\sqrt{c}\,x + \cos\sqrt{c}\,a\sin\sqrt{c}\,x)$$

$$= A\sin\sqrt{c}\,(x-a) = A\sin\left(m\pi\frac{x-a}{b-a}\right)$$

となる．これで十分性が示されたと同時に，(3) が成り立つとき“恒等的に 0”ではない解の形が定められた．□

問 上の例題 6 において，$y(a) = y(b) = 0$ の代わりに次のそれぞれの条件をおいた場合の c のとり得る値と，それらに対応する $y(x)$ を求めよ．

i) $y'(a) = y'(b) = 0$ ii) $y(a) = y'(b) = 0$

iii) $y(a) = y(b)$, $y'(a) = y'(b)$.

3.3 同次でない場合

微分方程式

$$\boldsymbol{y'' + ay' + by = f(x)} \tag{1}$$

の一般解を求めよう．

$y_1(x)$，$y_2(x)$ を次のように定める：

$$\left.\begin{array}{ll}
a^2 > 4b \text{ のとき} & \\
\qquad y_1(x) = e^{\rho_1 x}, & y_2(x) = e^{\rho_2 x} \\
a^2 < 4b \text{ のとき} & \\
\qquad y_1(x) = e^{px}\cos qx, & y_2(x) = e^{px}\sin qx \\
a^2 = 4b \text{ のとき} & \\
\qquad y_1(x) = e^{-\frac{a}{2}x}, & y_2(x) = xe^{-\frac{a}{2}x}
\end{array}\right\} \tag{2}$$

ただし，ρ_1, ρ_2, p, q は 3.1 節の (4)，(5) の通りとする．このとき 3.2 節，例題 5 によって，微分方程式

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{3}$$

の解は

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \tag{4}$$

で与えられる．

もし (1) の一つの解 $\varphi(x)$ が見いだされたならば，(1) の任意の解 $y(x)$ は，c_1, c_2 を定数として

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \varphi(x)$$

と書かれる．そのわけは，$y(x) = z(x) + \varphi(x)$ とおけば

$$z'' + az' + bz = y'' + ay' + by - (\varphi'' + a\varphi' + b\varphi)$$
$$= f(x) - f(x) = 0$$

となって $z(x)$ が (3) をみたすからである．

次に，(1) の一般解を見いだす方法を説明する．同次形方程式 (3) の解 (4) において，c_1, c_2 を関数と考え

$$y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \tag{5}$$

が (1) の解となるように $c_1(x), c_2(x)$ を定めてみよう：

(5) を微分すると

$$y' = c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x) + c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x)$$

となるが，ここで c_1, c_2 は

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \tag{6}$$

をみたすものとする．このとき

$$y' = c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x)$$

であるが，これをもう一度微分すれば

$$y'' = c_1(x)y_1''(x) + c_2(x)y_2''(x) + c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x)$$

となる．この場合，(5) が (1) の解であることと

$$c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x) \tag{7}$$

とは同等である．

(6)，(7) から

$$\left.\begin{aligned} c_1'(x)(y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)) &= -f(x)y_2(x) \\ c_2'(x)(y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)) &= f(x)y_1(x) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

ここで

$$\alpha = \begin{cases} \rho_2 - \rho_1 = -\sqrt{a^2 - 4b}, & a^2 > 4b \quad \text{のとき} \\ q = (1/2)\sqrt{4b - a^2}, & a^2 < 4b \quad \text{のとき} \\ 1, & a^2 = 4b \quad \text{のとき} \end{cases} \tag{9}$$

とおけば，$y_1(x)$，$y_2(x)$ の定義から容易にみちびかれるように

もし，$\varphi(x)$ を見つけられたら，同次形 $y''+ay'+by=0$ の解を求めて 左の一般解が直ちに求まる。
いつも見つかるとは限らないが，下記の方法で $\varphi(x)$ を得られることがある。

$f(x)$ の形と $\varphi(x)$ の形が類似していることが多いことに着目し，つぎの表のように $f(x)$ を仮定して，これを与式に代入することにより，各係数を求める。

$f(x)$ の形	$\varphi(x)$ の形
$a + be^{\alpha x}$	$A + Be^{\alpha x}$
$a\cos\alpha x + b\sin\alpha x$	$A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$
$ae^{\alpha x}\sin\beta x$ 又は $ae^{\alpha x}\cos\beta x$	$e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$
多項式	多項式

P65～71 は省略

数学1及び演習（常微分方程式）　演習問題（4回目）

（テキスト該当ページ：pp.55〜71）

（今回の演習のうち，5)〜8) は，p.71 問題 5 と同じです．章末に解答が掲載されています）

(1) 次の常微分方程式の一般解を求めよ．

1) $y'' - 3y' - 10y = 0$

2) $y'' + 6y' + 9y = 0$

3) $y'' + 2Y' + 5y = 0$

4) $y'' - 2y' + y = e^x \cos x$

5) $y'' + 3y' + 2y = 4x^3$

6) $y'' - 2y' + y = 2e^x$

7) $y'' + 2y = x + 2\sin x$

8) $y'' + y = e^x + 3\cos x$

9) 特殊解を類推する方法を用いて次の微分方程式の一般解を求めよ
   (a) $y'' - y' - 2y = \cos x$

   (b) $y'' - 3y' + 2y = (1 + 2x)e^x$

注　意

演習問題の答案を pdf 形式でアップロードし，提出してください．
学生番号，氏名を記入することを忘れないで下さい