冪級数と解析関数（教科書 1.9）.

一年生で習得するべき微積分学の大事なところですが，学期中に**教科書 1.9** を取り上げる時間がとれません．したがって夏季休暇中の課題とします．ここは工業数学で重要な複素関数論への準備でもあります．今回の課題は提出を求めません．解答例をリソースに置くので自己採点をお願いします．教科書の問だけでなく，後期への良い準備になると思います．

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \dots$$

の形の級数を**冪級数 (power series)** とよぶ．以下，簡単のため中心 a を $a=0$ として

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \dots$$

を考える．いかなる冪級数も確実に収束する x は $x=0$ である．したがって冪級数の最も基本的な問はいかなる $x \neq 0$ に対して収束するかどうかである．次の定理はこの問に対して最も基本的な答である：

- （定理）冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ が $x = x_0 \neq 0$ に対して収束すれば，$|x| < |x_0|$ であるすべての x に対して $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ は絶対値収束する．展開の中心が a の場合はこうなる：冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ が $x = x_0 \neq a$ に対して収束すれば，$|x-a| < |x_0 - a|$ であるすべての x に対して $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ は絶対値収束する．

以下では記述の簡単のために展開の中心を 0 にとる．このことによって失われる情報はない．証明は，**等比級数と比較**して優級数定理（第 2 回講義）に帰着させて行われる．まず $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ が収束すれば $\lim_{n\to\infty} c_n x_0^n = 0$ だから，ある $M > 0$ が在って $\forall n$ に対し

$$|c_n x_0^n| \leq M$$

となる．すると

$$|c_n x^n| = |c_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

が成り立つ．$|x| < |x_0|$ なら，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ は公比の絶対値 < 1 の無限等比級数だから収束する．したがって，$|x| < |x_0|$ のとき，優級数定理により冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ は絶対値収束する．展開の中心が 0 ではない時も同様なので各自で考えること． □

この定理から冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ の収束範囲は次のようになっていることがわかる：

- ある r $(0 \leq r \leq \infty)$ が在って，$|x| < r$ ならば $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ は絶対値収束し，$|x| > r$ ならば発散する．

（定義）この r を冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ の**収束半径 (radius of convergence)** とよぶ．

次に問題となるのは，与えられた冪級数の収束半径を求めることである．この問題に対して，**ダランベールの判定法**と**コーシーの判定法**を紹介する．この二つの判定法は，収束半径を求める方法として，単純かつ多くの場合に役立つ．

- （定理）(**ダランベールの判定法**) もし $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = r$ が存在すれば，冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ の収束半径は r である．

(**コーシーの判定法**) もし $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|c_n|^{\frac{1}{n}}} = r$ が存在すれば，冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ の収束半径は r である．

証明は等比級数と比較して優級数定理に帰着させて行われる．証明はどちらも同様なので (1) だけ示す．$|x| < r$ のとき $|x| < q < r$ となる q をとると，ある N が在って，$n > N$ ならば

$$|c_{n+1}/c_n| < 1/q$$

である．よって，$n \geq N+1$ の意味で n が十分大きければ

$$|c_n x^n| = |c_{n-1}x^{n-1}|\left|\frac{c_n}{c_{n-1}}x\right| \leq |c_{n-1}x^{n-1}|\frac{|x|}{q}$$

である．これを繰り返し用いて

$$|c_n x^n| \leq |c_{N+1}x^{N+1}|\left(\frac{|x|}{q}\right)^{n-N-1}$$

となる．したがって優級数定理により $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ は絶対値収束する．

$|x| > r$ のときは $n > N$ ならば $|x| > |\dfrac{c_n}{c_{n+1}}|$ となるような N が在る．よって $\forall n > N+1$ のとき

$$|c_n x^n| = |c_{n-1}x^{n-1}|\left|\frac{c_n}{c_{n-1}}x\right| > |c_{n-1}x^{n-1}|$$

となる．よって $\lim_{n\to\infty} c_n x^n = 0$ は成り立たないから $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ は発散する．　□

- （例）$e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ の収束半径は ∞ である．
- （例）$(1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ $(\alpha \neq 0, 1, 2 \dots)$ の収束半径は 1 である．

冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ によって定められる関数 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ の微積分については，次の定理が基本的であり，結論だけでなく，その証明も重要である．

- （定理）冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ の収束半径を $r > 0$ とする．このとき

(1) $|x| < r$ で定義された関数 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ は連続である．

(2) 形式的項別積分 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$ と形式的項別微分 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$ の収束半径はともに r である．

(3) 冪級数は収束半径内で**項別微積分**できる：すなわち，$|x| < r$ のとき，項別積分定理

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$$

と項別微分定理

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

が成り立つ．

(1) の証明．x, y がともに $|x| < r$, $|y| < r$ を満たせば $|x| \leq s < \rho < r$, $|y| \leq s < \rho < r$ となる $s < \rho < r$ がとれる．このとき $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \rho^n$ は収束するから $\forall n$ に対し $|c_n \rho^n| \leq M$ となる $M > 0$ が在る．

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= |\sum_{n=0}^{r} c_n (x^n - y^n)| \\
&= |x - y| |\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x^{n-1} + x^{n-2} y + \cdots + x y^{n-2} + y^{n-1})| \\
&\leq |x - y| \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| n s^{n-1} = |x - y| \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \rho^n \frac{1}{\rho} n \frac{s^{n-1}}{\rho^{n-1}} \\
&\leq |x - y| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{\rho} n \left(\frac{s}{\rho} \right)^{n-1}
\end{aligned}
$$

である．$0 < \frac{s}{\rho} < 1$ だから $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{s}{\rho} \right)^{n-1}$ は収束する（教科書の問 2.5）．その和を K とすると

$$
|f(x) - f(y)| \leq \frac{MK}{\rho} |x - y|
$$

である．この不等式は s 以下の任意の数 x, y に対して成り立つ．したがって $f(x)$ は $|x| \leq s$ において連続である（単に連続であるより強い意味の連続性が成り立っていることに注意）．s は r より小さい任意の正数だから，$f(x)$ は $|x| < r$ において連続である．

(2) の証明．先に形式的項別微分の収束半径が r であることを示す．$|x| < r$ のとき $|x| < \rho < r$ となる ρ をとると $\lim_{n \to \infty} c_n x_0^n = 0$ だから $\forall n$ に対し $|c_n| \rho^n \leq M$ となる M が在る．

$$
|n c_n x^{n-1}| = n |c_n| \rho^{n-1} \left| \frac{x}{\rho} \right|^{n-1} \leq \frac{M}{\rho} n \left| \frac{x}{\rho} \right|^{n-1}
$$

だから，優級数定理により $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$ は絶対値収束する（教科書の問 2.5）．$|x| > r$ のとき $|x| > |x_0| > r$ となる x_0 をとる．もし $\sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1}$ が収束すれば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x_0^{n-1}$ は絶対値収束する．優級数定理により，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n|$ は収束する．一方，$x_0 > r$ だから $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ は発散する．これは矛盾．よって $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1}$ は発散する．よって形式的項別微分の収束半径は r である．

形式的項別積分は，分母に $n + 1$ が現れれるから，優級数定理により収束半径は小さくなることはない．そこで，収束半径が真に大きくなったと仮定する．形式的項別積分を形式的項別微分すればもとの冪級数に戻るから，もとの冪級数が収束半径を超えたところで収束することになり，矛盾に陥る．

(3) の証明．先に項別積分定理を証明する．$f_k(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{k} c_n x^n$ とおくと $|x| < \rho < r$ のとき

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f_k(x)| &= |\sum_{n=k+1}^{\infty} c_n x^n| \\
&\leq \sum_{n=k+1}^{\infty} M \left(\frac{|x|}{\rho} \right)^n \\
&= M \left| \frac{x}{\rho} \right|^{k+1} \frac{1}{1 - \frac{|x|}{\rho}} \to 0 \quad (k \to \infty) \ .
\end{aligned}
$$

これが $|x| < \rho$ を満たす $\forall x$ に対して成り立つ．一方，$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x_n$ は $|x| < r$ で連続だから $|x| < \rho$ に対し $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ が在る．$g_k(x) = \int_0^x f_k(t)dt$ とおくと

$$
\begin{aligned}
|g(x) - g_k(x)| &= \left| \int_0^x (f(t) - f_k(t))dt \right| \\
&\leq \int_0^{|x|} M \left| \frac{t}{\rho} \right|^{k+1} \frac{1}{1 - \frac{|t|}{\rho}} dt \\
&\leq M \left(\frac{|x|}{\rho} \right)^{k+1} \frac{|x|}{1 - \frac{|x|}{\rho}} \to 0
\end{aligned}
$$

である．よって $g(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$ である．したがって，収束半径内では，冪級数 $f(x)$ の形式的項別積分は実際の積分 $\int_0^x f(t)dt$ に等しいことが示された．

次に，項別積分定理を用いて項別微分定理を証明する．

$$
h(x) = a_0 + \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} nc_n t^{n-1} dt
$$

とおくと，微分可能である．したがって，微積分学の基本定理より $h'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$ である．一方，収束半径内では冪級数の形式的項別積分は実際の積分に等しいから $h(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = f(x)$ である．したがって冪級数 $f(x)$ は微分可能であって，その導関数は形式的項別微分に等しい． □

- （系）**冪級数は収束半径内で何回でも微分可能である．**
- （系）冪級数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ が正の収束半径をもつとき $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ である．
- （定義）$x = c$ を含む開区間 A において関数 $f(x)$ が $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ と冪級数で表される（すなわち，テイラー公式における残項が $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ を満たす）とき，$f(x)$ は $x = c$ において**解析的 (analytic)** であるという．関数が解析的かどうかは，**複素関数論を用いて判定するのが適当な概念である．** 冪級数についてこれまで証明したすべての定理，およびこれから証明するすべての定理は複素変数に拡張される（ただし「開区間」を「複素平面の開集合」に読み替えるなどの変更が必要である）．$\forall a \in A$ において $f(x)$ が解析的であるとき，$f(x)$ は A 上の**解析関数 (analytic function)**（または $f(x)$ は A で解析的）という．先に述べた通り，**解析関数は複素変数で考える**のが自然である．よって次の基本定理は**複素関数論を用いて証明する**のが自然である（ので，ここでは省略する）．

- （定理）(1) 関数が解析的という性質は，関数の 4 則演算，合成，逆関数をとる操作で不変な性質である．ただし，分母が 0 の割り算は除く．

(2) 冪級数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ の収束半径が $r > 0$ ならば，$f(x)$ は $(x-a, x+a)$ 上の解析関数である．

- （定理）$f(x), g(x)$ が区間 A において解析的で，A に含まれる開区間 (c, d) において一致すれば，A 全体で一致する．

この驚くべき「一致の定理」だけは，証明概略を与える．$x \in A$ で $f(x) \neq g(x)$ と仮定する．$h(x) = f(x) - g(x)$ とおく．集合 $\{x \in A \,|\, h(x) \neq 0,\ x \geq d\}$ の下限を x_0 とおく [1]．このとき，x_0 にいくらでも近い

[1] 上限と下限についてのわかりやすい解説が教科書の付録 §1 にある．有界集合の上限とは最大値があるときには最大値であり，それがないときには最大値の役割をはたしてくれる数のことである．

$x > x_0$ があって $h(x) \neq 0$ である．(c, x_0) において $f(x) - g(x) \equiv 0$ だから $h^{(n)}(x_0) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ である．$h(x)$ は解析関数だから $x = x_0$ の近傍で $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ とテイラー展開される．したがって $h(x)$ は x_0 の近傍で恒等的に 0 となる．しかし，これは x_0 の取り方に矛盾する．詳しくは，教科書の付録 §1 と §6 を見よ．□

- （例）多項式関数は解析関数である．
- （例）指数関数 e^x は解析関数である．収束半径は ∞ である．
- （例）3 角関数 $\sin x$ と $\cos x$ は解析関数である．収束半径は ∞ である．
- （例）$\frac{1}{1+x}$, $\log(1+x)$, $(1+x)^\alpha = e^{\alpha \log(1+x)}$ $(\alpha \neq 0, 1, 2, \dots)$ は $(-1, 1)$ 上の解析関数である（これは複素関数論の帰結と考えるのが最も自然なので，ここでは証明しない）．$x = 0$ を中心とする冪級数展開の収束半径は，これらの例ではいずれの場合も 1 である．
- （例）$\tan x$ は $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上の解析関数である．$x = 0$ を中心とする冪級数展開の収束半径は $\frac{\pi}{2}$ である．
- （例）$\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ は $(-1, 1)$ 上の解析関数である．$x = 0$ を中心とする冪級数展開の収束半径は 1 である．

● もし与えられた関数が解析関数であることが判っているならば，定義域に含まれる開区間の点を中心とするテイラー展開の収束半径は必ず正の数で，たとえばダランベールの公式によって求めることができ，テイラー級数はもとの関数に収束する（つまり，テイラー展開の残項は項数を無限に多くとれば 0 に収束する）．論理的には，与えられた関数が解析関数であることが判っていないときは，これが，関数が解析関数であることの定義である．一方，与えられた関数のテイラー展開の残項がどの範囲で 0 に収束するかを明らかにして，はじめて収束半径が判る．論理的には与えられた関数が解析関数であるかどうか知るにはテイラー展開の残項がある範囲で 0 に収束することを言わないとわからないわけだ．これは通常，難しい計算である．だから，与えられた関数が解析関数かどうかをテイラー展開することなしに知ることができれば大変よい．解析関数かどうかは，変数を複素数にして考えるのが最も自然である．実は，複素変数関数に対しては，解析的であることと，複素微分可能（という概念がある）であることは，同値（！）である．これは複素関数論の大定理である．

● 与えられたべき級数の収束半径を求めるにはダランベールの方法が（使える場合には）最も単純である．どんなべき級数に対しても収束半径を与える万能公式として，コーシー・アダマールの公式とよばれる公式がある（本講義で使用する教科書には掲載されていない）．しかし，初学者は万能公式に頼る前に，収束半径の概念を理解するために定義にもどって工夫をする経験をするべきだと思う．たとえば，問 9.1 (3).

● **課題 1.** この資料 1 ページに証明なしに述べた収束半径のコーシーの判定法を証明せよ．

● **課題 2.** ダランベールの判定法またはコーシーの判定法を用いて，記憶しておくべきテイラー展開（第 9 回講義）の収束半径を求めよ．

● **課題 3.** 教科書の問 9.1 および 9.2.

問 9.1 (3) のヒント：このままではダランベールの判定法もコーシーの判定法も使えない．収束半径を直接的方法で知る工夫をしなければならない．もし $|x| \leq 1$ なら収束する（なぜか？）．もし $|x| > 1$ なら，どうなるだろうか？「$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束する $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = 0$」の対偶を使えないだろうか？

● **課題 4.** 極限

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} \right)$$

をテイラー公式を使って求めよ．

● **課題 5.** 極限

$$\lim_{x \to 0} \frac{x e^{x^2} - \arcsin x}{x^3}$$

をテイラー公式を使って求めよ．

ヒント：$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$ に注目．$(1 - t^2)^{-\frac{1}{2}}$ の $t = 0$ を中心とするテイラー展開の最初の数項を計算し，テイラー級数は収束半径内では項別微分積分できることを使う．