第 13 回講義：重積分の広義積分.

• 言葉の準備．平面 $\mathbb{R}^2$ の点 P の **ε-近傍** $(\varepsilon > 0)$ とは，$U_\varepsilon(P) := \{X \in \mathbb{R}^2 \,|\, |X - P| < \varepsilon\}$，すなわち点 P を中心とする（境界を含まない）円板のことである．

平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D が与えられると，平面の任意の点 P は次のいずれかただひとつを満たしている：

P は D の**内点**：ある $\varepsilon > 0$ があって $U_\varepsilon(P) \subset D$.
P は D の**外点**：ある $\varepsilon > 0$ があって $U_\varepsilon(P) \cap D = \emptyset$.
P は D の**境界点**：P は D の内点でも外点でもない．D の境界点の集合を ∂D という記号で表す.

（例）$D = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 < 1\}$ のとき D の内点の集合は D 自身であり，D の外点の集合は $\{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 > 1\}$ であり，D の境界点の集合は円周 $\partial D = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$ である．

（定義）$\overline{D} := D \cup \partial D$ を D の**閉包**とよぶ．$D \subset \mathbb{R}^2$ が**閉集合**であるとは $\partial D \subset D$ であることと定義する．これは $\overline{D} = D$ と同値である．$D \subset \mathbb{R}^2$ が**開集合**であるとは $D \cap \partial D = \emptyset$ であることと定義する．

（定義）部分集合 $D \subset \mathbb{R}^2$ が**有界**であるとは，ある十分大きい $R > 0$ をとれば $D \subset U_R(0)$ となっていることと定義する．すなわち D が有界であるとは D が有限の広がりしかもたないことである．

• ここまでは積分領域 D は有限の広がりを持ち，被積分関数は D とその境界で連続な関数であった．このことを簡単に「積分領域 D は面積確定有界閉集合で，被積分関数は D 上の連続関数」ということができる．このとき，積分 $\iint_D f(x, y)dxdy$ は存在して，例えば累次積分によって計算できる．

• これからやりたいことは，D が有界閉集合でないときに重積分 $\iint_D f(x, y)dxdy$ を定義することである．念頭におくのは，D が無限の広がりを持つ場合と，D の境界で被積分関数が発散する場合に $\iint_D f(x, y)dxdy$ を定義することである．そこで，D を $\mathbb{R}^2$ の有界でない領域として $f(x, y)$ は D 上の連続関数，または D は有界であるが関数 $f(x, y)$ は D の境界（の一部）で発散しているとせよ．このような状況で $\iint_D f(x, y)dxdy$ を考えたい．

面積確定有界閉集合の増大列

$$D_1 \subset D_2 \subset \cdots \subset D_n \subset \cdots$$

があって

$$D = \cup_{n=1}^{\infty} D_n \qquad (*)$$

となっているとせよ．

• 被積分関数は**符号一定**，すなわち，例えば

$$f(x, y) \geq 0$$

という仮定のもとで，広義積分 $\iint_D f(x, y)dxdy$ を

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x, y)dxdy$$

により定義する．

確認．定義がうまくいっているためには，面積確定有界閉集合の増大列 $\{D_n\}$ のとりかたによらないことの確認が必要だ．以下はその確認作業．$(*)$ を満たす面積確定有界閉集合による 2 つの増大列 $\{D_n\}$, $\{D'_n\}$ をとる．$a_n = \iint_{D_n} f(x, y)dxdy$, $b_n = \iint_{D'_n} f(x, y)dxdy$ はともに単調増加数列である．a_n が有限値 A に収束したとせよ．任意の $D'_n (\neq D)$ に対しある m をとれば $D'_n \subset D_m$ だから $b_n \leq a_m \leq A$ となる．よって b_n も A 以下の有限値に収束する．a_n と b_n の役割交換をすれば a_n は b_n の極限値以下の値に収束する．よって a_n, b_n ともに同じ値に収束する．

• 問題：符号が一定でない $f(x,y)$ に対してどうやって広義積分 $\iint_D f(x,y)dxdy$ を定義するのか？

答：そのためには是非とも $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}|f(x,y)|dxdy$ が有限という仮定をおかなければならない．この仮定が成り立てば $f_+(x,y)=\max\{0,f(x,y)\}$, $f_-(x,y)=\max\{0,-f(x,y)\}$ とおけば $f_\pm(x,y)\geq 0$ であって $f(x,y)=f_+(x,y)-f_-(x,y)$ が成り立つ．$|f_+|+|f_-|=|f|$ ゆえ，この仮定が成り立てば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} f_+(x,y)dxdy$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} f_-(x,y)dxdy$ はともに有限値に収束する．そこで，広義積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ を

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} f_+(x,y)dxdy-\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} f_-(x,y)dxdy$$

と定義すればよい．

1 変数の積分と異なり，広義積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ は

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}|f(x,y)|dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} f_+(x,y)dxdy+\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} f_-(x,y)dxdy$$

が有限のときしか定義できない（そうでないと極限が $\{D_n\}$ のとりかたによってしまう例がたくさんある．そんなことが起きる理由は，二次元だと有界でない領域を有界閉集合で近似する方法に一次元のときにはなかった大きな自由度があるからだ）．

• 広義重積分の計算例.

例 1.（重要なので再出）

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\ .$$

$$I_n=\int_0^n e^{-x^2}dx$$

とおき，$D'_n=[0,n]\times[0,n]$ とおくと

$$I_n^2=\iint_{D'_n} e^{-(x^2+y^2)}dxdy\ .$$

一方，前回やった例：$D_n: x^2+y^2\leq n^2, x\geq 0, y\geq 0$ のとき

$$\iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\frac{\pi}{4}(1-e^{-n^2})$$

であった．よって

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} I_n^2&=\lim_{n\to\infty}\iint_{D'_n} e^{-(x^2+y^2)}dxdy\\&=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)}dxdy\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4}(1-e^{-n^2})\\&=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

すなわち

$$\lim_{n\to\infty} I_n=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\ .$$

例 2.

$$V=\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2}\ .$$

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおくと $\mathbb{R}^2$ と $E : r \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$ が対応する．よって

$$V = \iint_E \frac{rdrd\theta}{(1+r^2)^2} = 2\pi \int_0^\infty \frac{r}{(1+r^2)^2} dr = \pi \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)^2} = \pi \left[-\frac{1}{1+t} \right]_0^\infty = \pi$$

である（最後に $r^2 = t$ とおいて置換積分した）．

例 3. $V = \displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+xy+y^2)} dxdy$ の計算. 指数関数の肩の 2 次式を平方完成し，$\mathbb{R}^2$ を縦線領域だと思って積分.

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\infty}^\infty \left\{ \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{3}{4}x^2 - (y+\frac{x}{2})^2} dxdy \right\} \\ &= \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{3}{4}x^2} dx \int_{-\infty}^\infty e^{-(y+\frac{x}{2})^2} dy \\ &= \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{3}{4}x^2} dx \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} dt \\ &= \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{3}{4}x^2} dx \sqrt{\pi} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\pi}\sqrt{\pi} = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi \end{aligned}$$

（ただし $y + \frac{x}{2} = t$ とおいた）．

（別法）$u = \frac{\sqrt{3}}{2}x,\ v = y + \frac{x}{2}$ と変数変換する．$x = \frac{2}{\sqrt{3}}u,\ y = v - \frac{1}{\sqrt{3}}u$ だから $J(u,v) = \frac{2}{\sqrt{3}}$．よって

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-u^2-v^2} \frac{2}{\sqrt{3}} dudv\ .$$

最後に $u = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ と極座標変換すると $J(r,\theta) = r$ だから

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{\sqrt{3}} \iint_{\mathbb{R}_+ \times [0,2\pi]} e^{-r^2} rdrd\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} 2\pi \int_0^\infty e^{-r^2} rdr \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} 2\pi \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t} dt = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

である（$r^2 = t$ とおいた）．

例 4. 広義積分の公式

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-a^2x^2} dx = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^\infty e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{a}$$

が成り立つ.（理由）$a > 0$ のとき $ax = s$ とおけば $ds = adx$ だからである.

例 5. これは，絶対値収束しないと広義積分が定義できない例である．余力のある人向けのコメントである．省略して差し支えない．$0 < a, b < 1$ に対して

$$D(a,b) = \{(x,y) \,|\, a \leq x \leq 1,\ b \leq y \leq 1\}$$

とする.

$$f(x,y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}$$

について [1] 普通に累次積分すると

$$\iint_{D(a,b)} f(x,y) dxdy = \frac{1}{2} - \frac{a}{1+a} - \frac{1}{1+b} + \frac{a}{a+b}$$

[1] $f(y,x) = -f(x,y)$ に注意せよ.

がわかる．

$$D_n = D\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right),$$
$$D'_n = D\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$$

はともに和集合が $(0,1] \times (0,1]$ になる．しかし，任意の n に対し

$$\iint_{D_n} f(x,y)dxdy = 0$$

である [2] 一方で

$$\iint_{D'_n} f(x,y)dxdy = \frac{5}{6} - \frac{1}{n+1} - \frac{n}{n+2} \to -\frac{1}{6}$$

である．よって $n \to \infty$ としたときの極限は等しくない．

例 5′. 例 5 の続き．問題の積分が絶対値収束していないことを確認する．一般的定理によれば，$D: x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1$ のとき

$$V = \iint_D \frac{|x-y|}{|x+y|^3}dxdy = \infty$$

となっていなければならない．これを確認する．問題は，$(x,y) \to (0,0)$ のときの被積分関数のふるまいにある．そこで，原点近傍に集中した**特異点情報を取り出す**ために，$x = u(1-v)$, $y = uv$ と変数変換すると，D は $E: 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$ と 1 対 1 対応し，$J(u,v) = u$ となる．したがって，問題の積分は

$$\begin{aligned} V &= \iint_E \frac{u|1-2v|}{u^3}ududv \\ &= \int_0^1 |1-2v|dv \int_0^1 \frac{du}{u} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{du}{u} = \infty \end{aligned}$$

となる．

- **課題 1.** 教科書の問 23.1.
- **課題 2.** 計算例

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+xy+y^2)}dxdy = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi$$

を参考にして，積分

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+xy+y^2)}dxdy$$

を求めよ．

ヒント：要するに，例 3 の積分領域を全平面から第一象限に変えたらどうなるかという問題である．もし積分 $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy$ の積分領域を第一象限だけに変えたら，1/4 倍されるだけである（x^2+y^2 は回転で変わらない関数だから．ちょうど偶関数の $[-a,a]$ での積分は $[0,a]$ での積分の 2 倍になるのと同様である）．しかし，e の肩に乗っている関数が回転不変な $-(x^2+y^2)$ ではなく回転不変性のない $-(x^2+xy+y^2)$ だから，平方完成などを使って変数変換したときに積分領域がどう変わるかをちゃんと追跡し，変数変換の面積比 $|J|$ を忘れないことが重要になる．

---

[2] $f(y,x) = -f(x,y)$ だから．

別法：例 3 と同じように

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{3}{4}x^2-(y+\frac{x}{2})^2} dxdy$$

と書き換えて $\mathbb{R}^2$ の第一象限を縦線集合と思って積分する．この時 $0 \leq y < \infty$ は $\frac{x}{2} \leq z := y + \frac{x}{2} < \infty$ となる．だから問題の積分を xz 平面で考えると第一象限ではないということである．係数が面倒なので $\frac{\sqrt{3}}{2}x = u$ と置くと，問題の積分は

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^\infty e^{-u^2} du \int_{u/\sqrt{3}}^\infty e^{-t^2} dt$$

となる．数学ではよくあるように，こういう積分を一個だけ考えると難しい．そこで，パラメータ $a > 0$ を導入して関数

$$F(a) = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^\infty e^{-u^2} du \int_{au}^\infty e^{-t^2} dt$$

を考える．すると問題は関数 $F(a)$ は何か，という問題に言い換えられる．試しに $F'(a)$ を考えてみよう．このようにして $F(a)$ が何なのかわかったら $a = 1/\sqrt{3}$ とおく．