力　学　II

2024年度秋学期　月曜４限　担当：伊藤孝寛
原田俊太

イントロダクション１

高校の力学

大学の力学

運動方程式

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

微分方程式

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

単振動

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega^2 x$$

$$x = a\sin\omega t + b\cos\omega t$$
$$= A\sin(\omega t + \alpha)$$

微分方程式の解

ポテンシャル

$$U = -\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

保存力

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U$$

大学の力学

微分方程式の導入
ベクトル解析の利用
偏微分への拡張

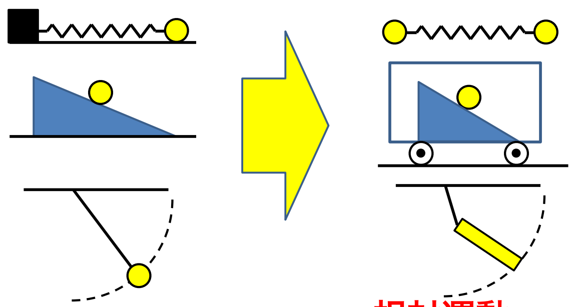
イントロダクション 2

力学 I

力学 II

力学I
1 質点系

力学II
多質点系



静止座標系

相対運動
有限な大きさの物体

力学 II で初めて習う内容の例

コリオリ力	回転座標系における みかけの力
角運動量	回転の勢いを示す量
惑星の運動 (極座標系)	ケプラーの法則の 定量的な導出
慣性モーメント	剛体の回転の理解に 必要な新しい物理量
剛体の平面運動	剛体に対する 運動方程式の導入

第１回

10/14　力学 II 講義

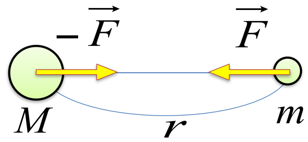
§４　万有引力

万有引力の大きさ

$$F = G\frac{mM}{r^2} \quad (1)$$

万有引力定数（重力定数）

$$G = 6.67\times10^{-11}\,\text{N m}^2/\text{kg}^2 \quad (2)$$

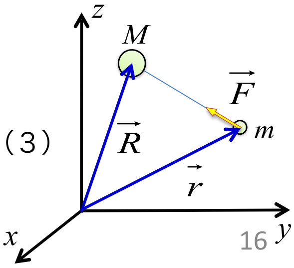


作用ー反作用の法則

質点Mが質点mへ及ぼす
万有引力ベクトル

$$\vec{F} = -\frac{GmM}{|\vec{r}-\vec{R}|^2}\ \boxed{\quad ① \quad} \quad (3)$$

単位ベクトル

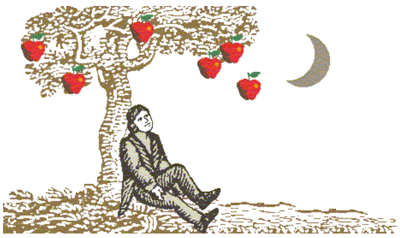


２体問題の典型例

万有引力　「質量をもつすべての物体は互いに引き合う」（ニュートン）

惑星、人工衛星の運動などを考える際の基本

§4ではポテンシャルの立場から議論
中心力の取り扱いは§6．４－５で再考



問題

**お互いに50 cm離れた
2 kgの鉄球と 5 kg鉄球の間に
はたらく万有引力をもとめよ。
地球上ではどの程度の
質量の質点にかかる力に
対応するかもとめよ。**

重力加速度　$g = 9.80665\ \text{m/s}^2$

§４．１　万有引力の法則

大きさ

$$F = G\frac{mM}{r^2}$$

ベクトル

$$\vec{F} = -\frac{GmM}{|\vec{r}-\vec{R}|^2}\frac{\vec{r}-\vec{R}}{|\vec{r}-\vec{R}|}$$

保存力の定義

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$$

Point

保存力＝ーポテンシャルの傾き

身近なスケールでの万有引力の大きさ

(1)式に以下を代入して、

$$m = 2\ \text{kg} \qquad M = 5\ \text{kg} \qquad r = 0.5\ \text{m}$$

$$F = \boxed{\quad ② \quad}$$

$$= \boxed{\quad ③ \quad}$$

極めて弱い力

地球上での質量に換算すると、

$$m^* = \boxed{\ ④\ } = \boxed{\quad ⑤ \quad}$$

証明

万有引力が生じる場における、万有引力ポテンシャルを導出せよ

ただし、万有引力は次式で与えられるものとする

$$\vec{F} = -\frac{GmM}{\left|\vec{r}-\vec{R}\right|^2}\frac{\vec{r}-\vec{R}}{\left|\vec{r}-\vec{R}\right|}$$

万有引力ポテンシャルの導出

条件：万有引力は保存力

Check!

‖ §3（8）参考

する仕事が「経路」によらない

ポテンシャル（位置エネルギー）は

$$U(x,y,z) = -W(x,y,z) + C$$

$$= \boxed{\quad ⑥ \quad}$$

＊U→0＠r →∞
より定数 C ＝ 0

で定義される。

このとき $\vec{F}\cdot d\vec{r}$ は、$\vec{r}$ 方向のみ意味をもつので、

$\vec{F_r} = -\frac{k}{r^2}\vec{e_r}$ 　とおけば、

$$U(r) = -\int_\infty^r \left(-\frac{k}{r^2}\right)\vec{e_r}\cdot d\vec{r}$$

$$= \boxed{\quad ⑦ \quad} = \boxed{\quad ⑧ \quad} = -\frac{k}{r}$$

よって、**万有引力ポテンシャル**は、

$\boxed{\quad ⑨ \quad}$ （7） 比較 $\vec{F} = -\frac{GmM}{\left|\vec{r}-\vec{R}\right|^2}\frac{\vec{r}-\vec{R}}{\left|\vec{r}-\vec{R}\right|}$

保存力とポテンシャルの関係

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$$

§3（9）参考

スカラー量		ベクトル量
$U = -\frac{GmM}{\left\|\vec{r}-\vec{R}\right\|}$	⇒ 偏微分	$\vec{F} = -\frac{GmM}{\left\|\vec{r}-\vec{R}\right\|^2}\frac{\vec{r}-\vec{R}}{\left\|\vec{r}-\vec{R}\right\|}$
ポテンシャル		保存力

問題

万有引力ポテンシャル内にある質点がx 軸方向に受ける万有引力を求めよ。

（7）式より、

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = GmM\cdot\frac{\partial}{\partial x}\boxed{\quad ⑩ \quad}$$

$$= GmM \times \boxed{\quad ⑪ \quad}$$

$$= \boxed{\quad ⑫ \quad}$$

$= F_x$ 　（6）　　F_y、F_z についても同様

拡張

２質点系＝＞多質点系

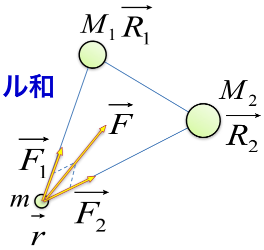
複数の質点から受ける万有引力ポテンシャル

質点mが受ける万有引力

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} \qquad \text{（８）ベクトル和}$$

質点M_iがmに及ぼすポテンシャル

$$U_i = -\frac{GmM_i}{\left|\vec{r} - \vec{R_i}\right|} \qquad \text{（９）}$$



２つの質点がmに及ぼすポテンシャル

$$U = U_1 + U_2 \qquad \text{（１０）スカラー和}$$

ポテンシャル⇔保存力

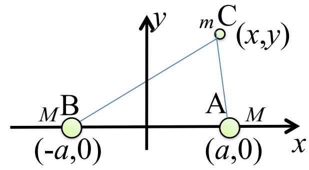
$$\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} U} \quad \because \vec{F_i} = -\vec{\nabla} U_i$$

n個の質点系

$$\boxed{U = \sum_i^n U_i = -\sum_i^n \frac{GmM_i}{\left|\vec{r} - \vec{R_i}\right|}}$$

問題

**(1)質量 M の 質点A、Bが
質量 m の 質点Cにおよぼす
万有引力ポテンシャルを求めよ。
(2) Cが $(0, b)$ にあるとき
Cにはたらく万有引力 F を求めよ。**



(1) ２つの質点がmに及ぼす万有引力ポテンシャルは、

$$U = -\sum_{i=1}^{2} \frac{GmM_i}{\left|\vec{r} - \vec{R_i}\right|}$$

＝ ⑭

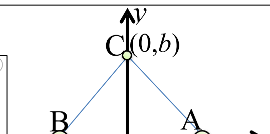
(2) ２つの質点がmに及ぼす万有引力は

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = \text{⑮}$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = \text{⑯}$$

C(0, b) のとき（y 軸上）

F_x ＝ ⑰ F_y ＝ ⑱

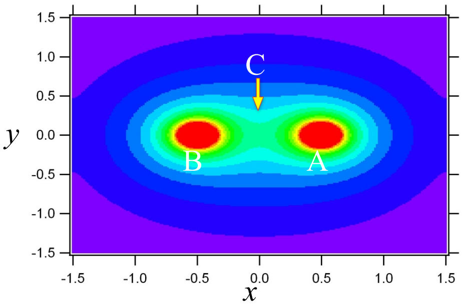


x成分は打ち消しあう

２つの質点がmに及ぼす万有引力ポテンシャル

$$U=-\frac{GmM}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}-\frac{GmM}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}$$

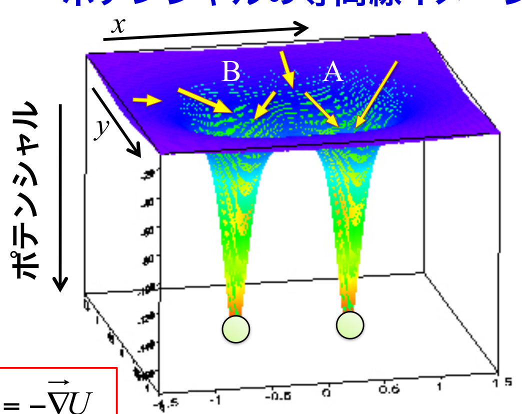
ポテンシャルの等高線イメージ



31

ポテンシャルの等高線イメージ

32



$$\boxed{\vec{F}=-\vec{\nabla}U}$$

○力は等高線に直交する
○ポテンシャルの勾配が急なとき力は大きい

33

保存力⇔ポテンシャル

$$\boxed{\vec{F}(x,y,z)\Leftrightarrow U(x,y,z)}$$

保存力を与えることとポテンシャルを与えることは数学的に等価

物理ではポテンシャルを取り扱うことが多い

利点　多数の質点を簡単に扱える
　　　イメージが容易である（等高線）

例）万有引力、ばね弾性力、電磁気力など

34

非保存力の例

$$\boxed{\vec{F}(x,y,z)\not\Leftrightarrow U(x,y,z)}$$

エネルギー保存則が成り立たない（エネルギーの散逸）

$$\vec{F}=-\vec{\nabla}U+\underline{\vec{F}'}$$

§3（48）参考

動摩擦力	$\vec{F}'=-\mu' N\hat{v}$	N:垂直抗力
粘性抵抗力	$\vec{F}'=-\gamma\vec{v}$	$\hat{v}=\vec{v}/v$
慣性抵抗力	$\vec{F}'=-\beta v^2\hat{v}$	

35

36