第 2 回講義：テイラー公式の応用.（教科書 1.8 再論）

● テイラー公式の応用例．ロピタル計算で形式的に答えを出すより分かった感じがあると思う.

例 1. 不定形の極限計算：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x(1-\frac{x^2}{2}+\cdots)-(x-\frac{x^3}{3!}+\cdots)}{x^3(1-\frac{x^2}{2}+\cdots)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(-\frac{1}{2}+\frac{1}{6})x^3(1+O(x)))}{x^3(1+O(x))}\\ &= -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

コメント：$\cos 0=1$ なので $\cos x$ を分母分子に掛けても難しくはならない．むしろやさしくなる．なぜなら，その効果として $\tan x$ は $\sin x$ になり，テイラー展開は簡単になるからである．前回のにある通り，$\tan x$ のテイラー展開を計算するのは大変である.

例 2. 不等式の証明：

$$\left|\cos x-1+\frac{x^2}{2}\right|\le\frac{x^4}{24}$$

の証明．$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+R_4(x)$（$\cos x$ は偶関数だから x^2 の項の係数は 0 である）だから

$$\begin{aligned}\left|\cos x-1+\frac{x^2}{2}\right| &= |R_4(x)|=\left|\int_0^x\frac{(x-t)^3}{3!}\cos t dt\right|\\ &= \left|\int_0^x\frac{u^3}{3!}\cos(x-u)du\right|\le\int_0^{|x|}\frac{u^3}{3!}=\frac{x^4}{24}\ .\end{aligned}$$

注意． 例 2 は次のように一般化できる：$\cos x$ の 0 を中心とするテイラー公式は

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-2}}{(2n-2)!}+R_{2n}(x)$$

である．例 2 の一般化はこれである：

$$\left|\cos x-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\cdots-\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-2}}{(2n-2)!}\right|\le\frac{x^{2n}}{(2n)!}\ .$$

実際，$\cos x$ は偶関数だから $|R_{2n}(x)|$ を $x\ge 0$ の時に評価することに帰着する．$x\ge 0$ のとき

$$\begin{aligned}|R_{2n}(x)| &= \left|\int_0^x\frac{(-1)^n\cos t}{(2n-1)!}(x-t)^{2n-1}dt\right|\le\int_0^x\left|\frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!}\right|dt\quad [\because\ |\cos t|\le 1\ (\forall t\in\mathbb{R})]\\ &= \int_0^x\frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!}dt=\left[-\frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\right]_0^x=\frac{x^{2n}}{(2n)!}\ .\end{aligned}$$

これから，$f(x)=\cos x$ に対して $\forall x\in\mathbb{R}$ に対して $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$ であることが分かる．$f(x)=e^x$, $f(x)=\sin x$ でも同様の方法で同じ結論，すなわち，$\forall x\in\mathbb{R}$ に対して $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$ であることを示すことができる（各自で試みること）.

注意． 例 2 を初等的な方法で解くと，テイラー多項式の威力を感じとることができる．$f(x):=\cos x-1+\frac{x^2}{2}$ とおくと $f'(x)=-\sin x+x$．$f''(x)=-\cos x+1\ge 0$ $(\forall x\in\mathbb{R})$ である．よって $f'(x)$ は単調非減少．$f(0)=0$．よって $\forall x\ge 0$ に対し $f'(x)\ge 0$ である．よって $f(x)$ は $\forall x\ge 0$ で単調非減少．$f(0)=0$．よって $\forall x\ge 0$ に対し $f(x)\ge 0$ である．これは $1-\frac{x^2}{2}\le\cos x$ であることを示している．次に $g(x)=$

$\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}$ とおく．$g'(x) = -\sin x + x - \frac{x^3}{6}$．$g''(x) = -\cos x + 1 - \frac{x^2}{2}$．$g'''(x) = \sin x - x$, $g^{(4)}(x) = \cos x - 1 \leq 0$．よって $\forall x \geq 0$ で $g'''(x)$ は単調非増加．$g'''(0) = 0$．よって $\forall x \geq 0$ に対し $g'''(x) \leq 0$．よって $\forall x \geq 0$ に対し $g''(x)$ は単調非増加．$g''(0) = 0$．よって $\forall x \geq 0$ に対し $g''(x) \leq 0$．よって $\forall x \geq 0$ に対し $g'(x)$ は単調非増加．$g'(0) = 0$．よって $\forall x \geq 0$ に対し $g'(x) \leq 0$．$g(0) = 0$．よって $\forall x \geq 0$ に対し $g(x) \leq 0$．これは $\forall x \geq 0$ に対し $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ であることを意味している．

例 3. 対数計算：

$$\begin{aligned}
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n}}{2n} \\
&\quad + R_{2n+1}(x)\ , \\
\log(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \cdots - \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n}}{2n} \\
&\quad + R_{2n+1}(-x)
\end{aligned}$$

であり，$|x|$ が 1 より十分小さいとき $|R_{2n+1}(\pm x)|$ は十分小さい．2 式の差をとると

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2\biggl(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\
+ R_{2n+1}(x) - R_{2n+1}(-x)\biggr)$$

となる．$x = \dfrac{1}{3}$ のとき $\dfrac{1+x}{1-x} = 2$ だから

$$\begin{aligned}
\log 2 &= 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7 + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^9 + \cdots\right) \\
&\fallingdotseq 0.66667 + 0.02469 + 0.00169 + 0.00013 + 0.00001 \\
&= 0.69314 \fallingdotseq 0.693\ .
\end{aligned}$$

（例 1）$\log\dfrac{3}{2}$ を計算するには $x = \dfrac{1}{5}$ にとれば $\dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{3}{2}$ である．

（例 2）$\log 3$ を計算するには $\log 3 = \log\dfrac{3}{2} + \log 2$ と分解すれば $x = \dfrac{1}{5}$ と $x = \dfrac{1}{3}$ の場合の和に帰着する．

（例 3）$\log 10$ を計算するには $\log 10 = 3\log 2 + \log\dfrac{5}{4}$ と分解すれば $x = \dfrac{1}{3}$ と $x = \dfrac{1}{9}$ の場合に帰着する．

以上のように，無限級数

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2\biggl(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\
+ R_{2n+1}(x) - R_{2n+1}(-x)\biggr)$$

を用いる対数計算では小さな x の場合に帰着させるのがポイント．

- **課題 1.** 極限値

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left\{\sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2\right)\right\}$$

が存在するように定数 α の値を定め，極限値を求めよ．

- **課題 2.** 教科書の問 8.2, 8.3, 8.4, 8.5.
- **課題 3.** 次の誘導に従って円周率の近似値を求めよ：

(1) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ が $\tan\alpha = \frac{1}{5}$ を満たすとせよ．このとき $\tan(2\alpha) = \dfrac{5}{12}$, $\tan\left(4\alpha\right) = \dfrac{120}{119}$, $\tan\left(4\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{239}$ を示せ.
ヒント：tan の加法定理.

(2)

$$4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

を示せ.

(3) $\arctan x$ のテイラー展開

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

$(|x| < 1)$ を使って π の近似値を小数第 4 位まで求めよ.