第十三回課題解説

1. やり方はたくさんある．最も簡単なのは逆数をとって $x \geq 1$ なら $x^2 < e^{x^2}$ を証明すること．

$$\text{右辺} = e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + ... > x^2 = \text{左辺} \ .$$

他にも $x \geq 1$ なら $f(x) = x^2 e^{-x^2} < 1$ を示すのもいい．$f(x) = x^2 e^{-x^2}$ とおくと $f'(x) = 2xe^{-x^2} + x^2(-2x)e^{-x^2} = 2xe^{-x^2}(1-x^2)$ だから $x > 1$ なら $f(x) < 0$ である．よって $x \geq 1$ なら $f(x) \leq f(1) = e^{-1} < 1$ である．

2. 問題は 1 から ∞ での積分だから，$x > 0$ で考えていい．$\log x$ の不定積分は $x\log x - x$ であることを用いて $\log \dfrac{x}{1+x} + \dfrac{1}{x+1}$ の不定積分を（積分定数を無視して）計算すると

$$(x\log x - x) - \{(x+1)\log(x+1) - x\} + \log(x+1) = x\log\frac{x}{1+x}$$

である．問題の積分は極限の問題に帰着する．その極限は $\infty \times 0$ の不定形であるが，$\frac{0}{0}$ の不定形に書き直してロピタル計算すると

$$\begin{aligned}
\left[x\log\frac{x}{1+x}\right]_0^\infty &= \lim_{x\to\infty} x\log\frac{x}{1+x} - \log\frac{1}{2} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\log\frac{x}{1+x}}{\frac{1}{x}} + \log 2 \overset{\text{ロピタル}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{x^2}} + \log 2 \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x+1} + \log 2 = -1 + \log 2 \ .
\end{aligned}$$

3. (1) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^4+1} < \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 1 < \infty$ だから問題の積分は収束する．

(2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}} > \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x^2}} = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \infty$ だから問題の積分は発散する．

4. 教科書の問 13.1.

(1) $x = at$ とおいて置換積分すると

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} = 2\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} = 2\int_0^\infty \frac{adt}{a^2(t^2+1)} = \frac{2}{a}\int_0^\infty \frac{dt}{t^2+1} = \frac{2}{a}[\arctan t]_0^\infty = \frac{\pi}{a} \ .$$

(2) 部分積分し，$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x\to\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$ を使うと

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^2 e^{-x}dx &= \int_0^\infty x^2(-e^{-x})'dx = [x^2(-e^{-x})]_0^\infty - \int_0^\infty 2x(-e^{-x})dx \\
&= 2\int_0^\infty x(-e^{-x})'dx = 2\left([x(-e^{-x})]_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-x}dx\right) = 2[-e^{-x}]_0^\infty = 2
\end{aligned} .$$

(3) 部分分数分解.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+x} = \int_1^\infty\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\right)dx = \left[\log\frac{x}{x+1}\right]_1^\infty = 0 - \log\frac{1}{2} = \log 2 \ .$$

(4) 分母は $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$ と因数分解できる．教科書の例題 12.9(4) の計算から部分分数分解

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3(x+1)} + \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}{x^2-x+1}$$

が成り立つ．$x-\dfrac{1}{2}=t$ とおくと $x+1=t+\dfrac{3}{2}$, $x^2-x+1=t^2+\dfrac{3}{4}$, $-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}=-\dfrac{1}{3}t+\dfrac{1}{2}$ だから

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{x^3+1} &= \frac{1}{3}\int_{-\frac{1}{2}}^\infty \frac{dt}{t+\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\int_{-\frac{1}{2}}^\infty \frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}dt + \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^\infty \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{6}\left[\log\frac{(t+\frac{3}{2})^2}{t^2+\frac{3}{4}}\right]_{-\frac{1}{2}}^\infty + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{2t}{\sqrt{3}}\right]_{-\frac{1}{2}}^\infty \\ &= 0+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\infty - \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\ .\end{aligned}$$

最後に公式 $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$ を使った．

(5) $x=at$ とおいて置換積分すると

$$\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = [\arcsin t]_{-1}^1 = \pi\ .$$

(6) 教科書の例題 12.10 の計算をそのまま使える．

$$\left[\frac{3}{2}\log|x^{\frac{1}{3}}+(1-x)^{\frac{1}{3}}|+\sqrt{3}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\left(2\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\frac{1}{3}}-1\right)\right]_0^1 = \sqrt{3}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}\ .$$

4. 教科書の問 13.2. $[a,\infty)$ において $f(x)$, $g(x)$ は連続で $0\le f(x)\le g(x)$ とするとき

(1) $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ が収束 $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ は収束．

(2) $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ が発散 $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ は発散．

この命題の証明：(1) 極限 $\displaystyle\lim_{b\to\infty}\int_a^\infty f(x)dx$ が実数値として存在することを言えばいい．$0\le f(x)\le g(x)$ であり $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ が収束するから $\forall b\in R_+$ に対して $\displaystyle\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx\le\int_a^\infty g(x)dx\in\mathbb{R}$ である．よって $\mathbb{R}_+$ 上の関数 $b\mapsto\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ は，上に有界（必ず $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ 以下）で，しかも，単調増加関数である．よって収束する．

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{b\to\infty}\int_a^\infty g(x)dx=\infty$ を言えばいい．$0\le f(x)\le g(x)$ したがって $\displaystyle\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$ であり $\displaystyle\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ が発散するから，関数 $b\mapsto\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ は $b\to\infty$ のときに発散する．

4. 教科書の問 13.4.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}$ は収束する．理由：積分の収束 $\displaystyle\int_1^\infty\frac{1}{x^2}=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty=1<\infty$ より．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{\sqrt{n}}$ は発散する．理由：積分の発散 $\displaystyle\int_1^\infty\frac{1}{\sqrt{x}}dx=[2\sqrt{x}]_1^\infty=\infty$ より．

(3) $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty\frac{\sqrt{n}}{n^2-1}$ は収束する．理由 1：この無限級数の収束発散は $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty n^{-\frac{3}{2}}$ と同じである．そして積分の収束 $\displaystyle\int_1^\infty x^{-\frac{3}{2}}dx=[-2x^{-\frac{1}{2}}]_1^\infty=2<\infty$ より．

理由 2：これでは感覚的すぎると思うなら，こう正当化するといい．$n\ge 2$ なら $n^2-1\ge n^2/2$ だから $\frac{\sqrt{n}}{n^2-1}<\frac{2\sqrt{n}}{n^2}=2n^{-3/2}$. 以下，同様．

(4) $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty\frac{1}{n\log n}$ は発散する．理由：積分 $\displaystyle\int_2^\infty\frac{dx}{x\log x}\overset{t=\log x}{=}\int_{\log 2}^\infty\frac{dt}{t}=[\log t]_{\log 2}^\infty=\infty$ より．