力学１

第12回目

期末試験及び成績評価方法について

期末試験日時：
7月29日（月）3限

方法：
A31講義室において対面で実施。持ち込み不可。

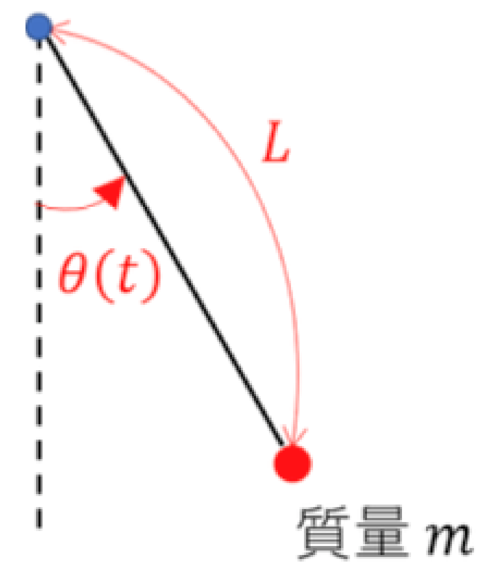
出題範囲：
講義の範囲。教科書の最初から64ページまで。

成績評価方法：
期末試験、各課題のレポート提出状況により総合的に評価します。

質問や不明な点があればメールやTACTのメッセージなどでお知らせ下さい。
連絡先メールアドレス：takasima@nusr.nagoya-u.ac.jp
ohto@nagoya-u.jp

力学１　12 回目演習

1. 質量の無視できる長さLの糸の先端に，質量mの質点が取り付けられている．重力加速度の大きさはgとする．抵抗力や摩擦力は無視できるものとし，振動の際に糸はたるまないとする．



(1) 接線方向の運動方程式をm, g, L, θのうち必要なものを用いて表せ．

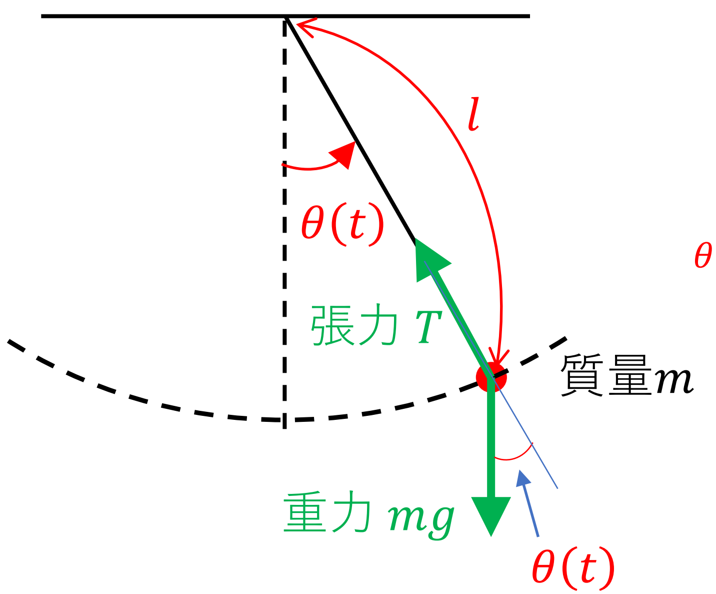
(2) 質点の力学的エネルギーが保存することを示せ．ただし、時刻$t = 0$で$\theta = \theta_m$かつ $\dot{\theta} = 0$とする．

(3) 振れ角θが小さく、$\sin\theta$や$\cos\theta$のマクローリン展開におけるθ^3以降の項をすべて無視できる場合を考える．最下点における質点の速度v_mがθ_mに比例することを示し、その比例係数を求めよ．

(4) 一般のθを考える．この糸は，質点を静かにつるす場合（$\theta = 0$ で静止している場合），3 × m の質量まで耐えられるものとする（質点の質量 $> 3\,m$ で糸が切れる）．この振り子が振動する際に，糸が切れない最大の角度θを求めよ．

(1) 接線方向の運動方程式をm, g, L, θのうち必要なものを用いて表せ.

ヒント：張力は登場しません！



動径と垂直方向（接線方向）の運動方程式は、

$$-mg\sin\theta = ma_\theta = m\,l\ddot{\theta}$$

（今の場合、$r = l$（一定））

θが増える方向が接線方向の正方向
（重力の接線方向成分は負の方向）

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

(2) 質点の力学的エネルギーが保存することを示せ．ただし、時刻$t=0$で$\theta=\theta_m$かつ $\dot{\theta}=0$とする．

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$$

(1)の答え

$$ml\ddot{\theta}+mg\sin\theta=0$$

後でエネルギーの形になるよう調整

$$\int_0^t ml^2\ddot{\theta}\dot{\theta}dt+mgl\int_{\theta_m}^{\theta}\sin\theta\,d\theta=0$$

両辺 $l\dot{\theta}$ を乗じ、tについて0からtまで積分

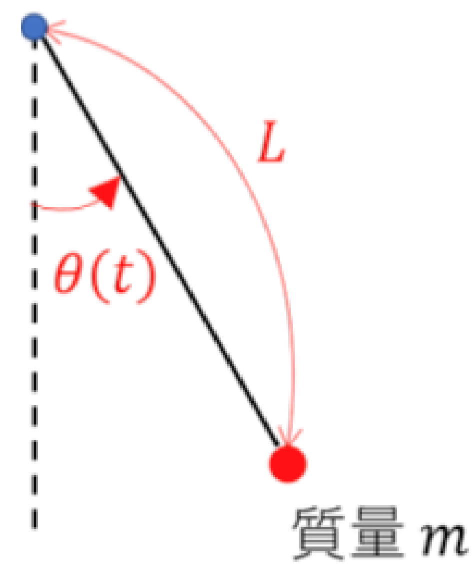
$$\underbrace{\underbrace{\frac{1}{2}m\left(l\dot{\theta}\right)^2}_{\text{運動エネルギー}}\underbrace{-mg(l\cos\theta)}_{\text{位置エネルギー}}}_{\text{力学的エネルギー}}=-mg(l\cos\theta_m)=\text{const.}$$

(3) 振れ角θが小さく、$\sin\theta$や$\cos\theta$のマクローリン展開におけるθ^3以降の項をすべて無視できる場合を考える．最下点における質点の速度v_mがθ_mに比例することを示し、その比例係数を求めよ．

ヒント：マクローリン展開の次数

$$-mgL\cos\theta_m = -mgL\cos\theta + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{1}{2}mv_m^2 = mgL(1-\cos\theta_m)$$



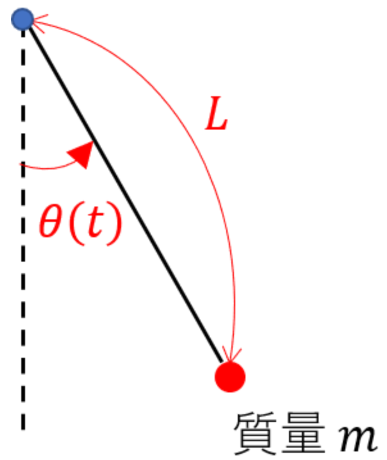
$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2$$

$$v_m^2 = gL\theta_m^2$$

$$v_m = \sqrt{gL}\theta_m$$

振り子の速度を測らなくても（大変）、
振幅から速度が求められる
→ニュートンの第３法則

演習 1 (4)　質量の無視できる長さLの糸の先端に，質量mの質点が取り付けられている．この糸は，質点を静かにつるす場合（$\theta=0$で静止している場合），$3\,m$の質量まで耐えられるものとする（質点の質量 > $3\,m$ で糸が切れる）．この振り子が振動する際に，糸が切れない（で振動しているときの）最大の角度θを求めよ．重力加速度はgとする．抵抗力や摩擦力は無視できるものとし，振動の際に糸はたるまないとする．



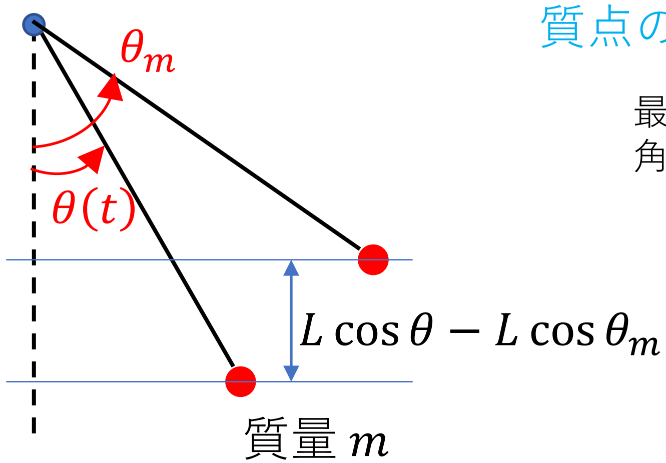
質点の動径方向の運動方程式

$$mg\cos\theta - T = ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

$r=L$（一定）なので、$a_r = -L\dot{\theta}^2 = -\dfrac{v^2}{L}$

したがって、

$$T = mg\cos\theta + \frac{mv^2}{L} \quad ①$$



質点の力学的エネルギー保存則

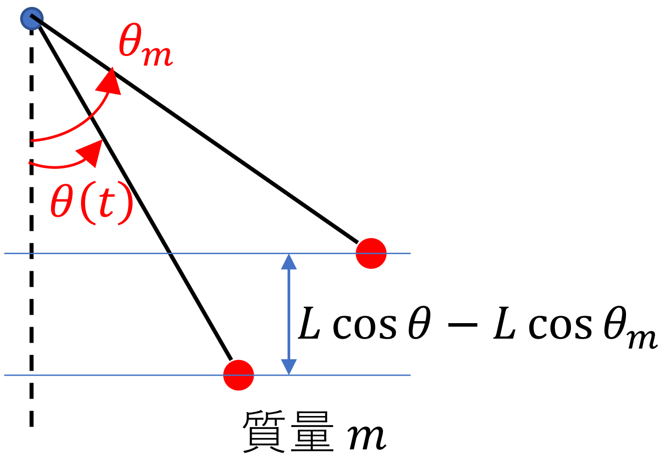
最大振幅時の角度をθ_mとすると、θ_mでの速さ$v=0$であり、
角度θでの速さがvなので、支点の位置をポテンシャルの原点とすると、

$$-mgL\cos\theta_m = -mgL\cos\theta + \frac{1}{2}mv^2$$

変形

$$2mg(\cos\theta - \cos\theta_m) = \frac{mv^2}{L} \quad ②$$

演習 1 (4)



①と②からvを消去すると、

$$T = mg\cos\theta + 2mg(\cos\theta \ - \cos\theta_m)$$

$$= 3mg\cos\theta - 2mg\cos\theta_m$$

Tが最も大きくなるときのT を T_mとすると、
Tが最も大きくなるのは$\theta = 0$ のときなので、

$$T_m = 3mg - 2mg\cos\theta_m$$

糸が切れないためには、$T_m \leq 3mg$ なので、

$$3mg - 2mg\cos\theta_m \leq 3mg$$

$$\cos\theta_m \geq 0$$

$$\theta_m \leq \frac{\pi}{2}$$ （$0 \leq \theta_m \leq \pi$ において）

従って、糸が切れない最大の角度は $\frac{\pi}{2}$

演習 2

$$\frac{dW}{dt} = P = Ct$$

ある瞬間において　$F \cdot \dot{x} = Ct$　　$F = \frac{Ct}{\dot{x}}$　　教科書 p.48 (4)

$$m\ddot{x} = \frac{Ct}{\dot{x}} \longrightarrow \text{運動方程式}$$

$$\downarrow$$

$$m\dot{x}\ddot{x} = Ct$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{x}^2) = \frac{Ct}{m}$$

$$\downarrow \quad \text{tで積分}$$

$$\dot{x}^2 = \frac{C}{m}t^2 + C_1$$

演習 2

$$\dot{x}^2 = \frac{C}{m}t^2 + C_1$$

$$\downarrow$$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{C}{m}t^2 + C_1}$$

$$\downarrow \quad \dot{x}(0) = 0 \quad \text{より} \quad C_1 = 0$$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{C}{m}} \cdot t \qquad ①$$

$$\downarrow \quad \text{tで積分}$$

$$x = \sqrt{\frac{C}{m}} \cdot \frac{t^2}{2} + C_2$$

演習 2

$$x = \sqrt{\frac{C}{m}} \cdot \frac{t^2}{2} + C_2$$

$x\,(0) = 0$　より　$C_2 = 0$

$$x = \sqrt{\frac{C}{m}} \cdot \frac{t^2}{2}$$

①の２乗　$\dot{x}^2 = \frac{C}{m} t^2$

$t^2 = x\sqrt{\frac{m}{C}} \cdot 2$

$$= \frac{C}{m}\sqrt{\frac{m}{C}} \cdot 2x$$

$$= \sqrt{\frac{C}{m}} \cdot 2x$$

$$\dot{x} = \left(\frac{C}{m}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot (2x)^{\frac{1}{2}}$$

演習2 別解・力学的エネルギー保存則

$$\frac{dW}{dt} = Ct$$

tで積分

$$W = \frac{1}{2}Ct^2 + C_1 \qquad W(0) = 0 \qquad C_1 = 0 \qquad \text{時刻ゼロで静止}$$

$$W = \frac{1}{2}Ct^2$$

仕事がすべて運動エネルギーに変換される

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}Ct^2$$

$$\dot{x}^2 = \frac{C}{m}t^2$$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{C}{m}} \cdot t$$

tで積分

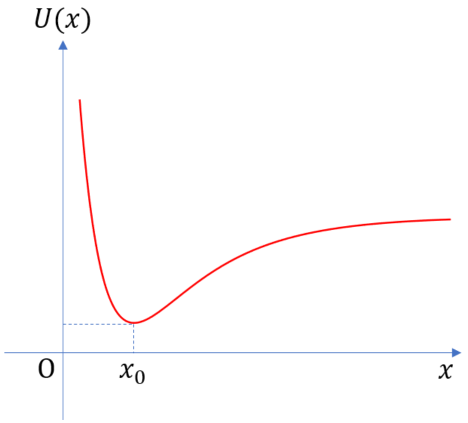
$$x = \sqrt{\frac{C}{m}} \cdot \frac{t^2}{2} + C_2$$

$x(0) = 0$ より $C_2 = 0$

$$x = \sqrt{\frac{C}{m}} \cdot \frac{t^2}{2}$$

$$\dot{x} = \left(\frac{C}{m}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot (2x)^{\frac{1}{2}}$$

演習 3



$U(x)$をx_0のまわりでテイラー展開

$$U(x) = U(x_0) + \left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=x_0} (x - x_0)^2 + \cdots$$

$(x - x_0)$の3乗以上の項を無視し、 $x = x_0$で$\frac{dU}{dx} = 0$なので

$$U(x) \cong U(x_0) + \frac{1}{2} U''(x_0)(x - x_0)^2$$

ポテンシャルから質点が受ける力は

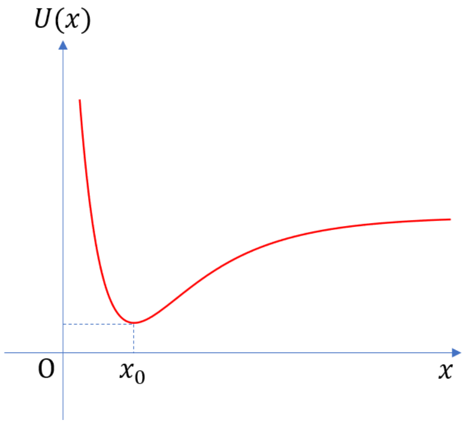
$$F = -\frac{\partial U}{\partial x} = -U''(x_0)(x - x_0)$$

演習 3

運動方程式は

$$m\ddot{x} = -U''(x_0)(x - x_0)$$

$$m\ddot{x} + U''(x_0)x = U''(x_0)x_0 \qquad ①$$



①の一般解は、①の特殊解と

$$m\ddot{x} + U''(x_0)x = 0 \qquad ②$$ の一般解の和

①の特殊解は $\qquad x = x_0$

②の一般解は $\qquad x = A\sin(\omega t + \theta), \qquad \omega = \sqrt{\dfrac{U''(x_0)}{m}}$

①の一般解は $\qquad x = A\sin(\omega t + \theta) + x_0 \qquad$ x_0を中心とする単振動

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{U''(x_0)}}$$

力学I 課題11

1. 質量 m の質点を速さ v_0 ，迎角 θ で投げ上げた．質点には重力 $m\vec{g}$ と空気による抵抗力が働いている．空気の抵抗力 $\vec{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{V}}$ の大きさは，物体の速さに比例（ $|\vec{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{V}}| = \gamma\ |\vec{\boldsymbol{v}}|$ ）しており，向きは質点の速度 $\vec{\boldsymbol{v}}$ と逆向きとする（γ は正の定数）．質点の運動は xy 平面内行われるとし，x 軸方向を水平方向，y 軸の正の向きを鉛直上向きとする．迎角 θ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ は x 軸の正の方向から測った角度とする．

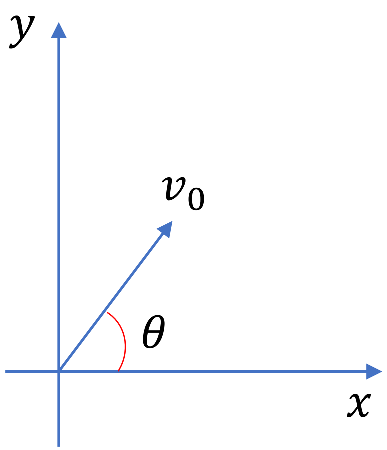
   1) 投げ上げた後の質点の x 方向および y 方向の運動方程式を示せ．

   2) $t = 0$ で質点の位置は $(x, y) = (0, 0)$ ，質点の速さは $|v| = v_0$ とする．質点が最高点に到達したときの質点の x 座標および y 座標を求めよ．

課題11

1） 運動方程式

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} \\ m\ddot{y} = -mg - \gamma\dot{y} \end{cases}$$



2） 運動方程式を解く

ここでは、$x = e^{\alpha t}$ とおく方法で解く。
$\dot{x} = v$ の微分方程式として解いてもよい。

$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} = 0$$

$x = e^{\alpha t}$ とおくと、特性方程式は $\alpha\left(\alpha + \frac{\gamma}{m}\right) = 0$ 、$\alpha = 0, -\frac{\gamma}{m}$

$$x(t) = C_1 + C_2 e^{-\frac{\gamma}{m}t}$$

$\downarrow$ 微分

$$\dot{x}(t) = -\frac{\gamma}{m} C_2 e^{-\frac{\gamma}{m}t}$$

$$\begin{cases} x(0) = 0 = C_1 + C_2 \\ \dot{x}(0) = v_0 \cos\theta = -\dfrac{\gamma}{m} C_2 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{m}{\gamma} v_0 \cos\theta \\ C_2 = -\dfrac{m}{\gamma} v_0 \cos\theta \end{cases}$$

$$\ddot{y} + \frac{\gamma}{m}\dot{y} = -g \qquad ①$$

$$\ddot{y} + \frac{\gamma}{m}\dot{y} = 0 \qquad ②$$

①の一般解は、①の特殊解と②の一般解の和

②の一般解は x と同様に、

$$y(t) = D_1 + D_2 e^{-\frac{\gamma}{m}t}$$

①の特殊解について

$y = Ct$ と仮定すると、（定数ではうまくいかない）

$C = -\dfrac{mg}{\gamma}$ となるので、$y = -\dfrac{mg}{\gamma}t$ が①の特殊解。

①の一般解は、

$$y(t) = D_1 + D_2 e^{-\frac{\gamma}{m}t} - \frac{mg}{\gamma}t$$

$$\Big\downarrow \text{微分}$$

$$\dot{y}(t) = -\frac{\gamma}{m}D_2 e^{-\frac{\gamma}{m}t} - \frac{mg}{\gamma}$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 = D_1 + D_2 \\ \dot{y}(0) = v_0 \sin\theta = -\dfrac{\gamma}{m} D_2 - \dfrac{mg}{\gamma} \end{cases}$$

$\downarrow$

$$\begin{cases} D_1 = \dfrac{m^2 g}{\gamma^2} + \dfrac{m}{\gamma} v_0 \sin\theta \\ D_2 = -\dfrac{m^2 g}{\gamma^2} - \dfrac{m}{\gamma} v_0 \sin\theta \end{cases}$$

最上点では$\dot{y} = 0$であるので、

$$\dot{y} = -\frac{mg}{\gamma} D_2 e^{-\frac{\gamma}{m}t} - \frac{mg}{\gamma} t = 0$$

$\downarrow$

$$e^{-\frac{\gamma}{m}t} = -\frac{m^2 g}{\gamma^2 D_2}$$

$\downarrow$

$$-\frac{\gamma}{m}t = \ln\left(-\frac{m^2 g}{\gamma^2 D_2}\right)$$

$$t = -\frac{m}{\gamma}\ln\left(-\frac{m^2 g}{\gamma^2 D_2}\right)$$

最上点に到達する時刻

$x(t) = C_1 + C_2 e^{-\frac{\gamma}{m}t}$ に代入すると、

$$x = C_1 + C_2 e^{-\frac{\gamma}{m}\left(-\frac{m}{\gamma}\ln\left(-\frac{m^2 g}{\gamma^2 D_2}\right)\right)}$$

$$= C_1 + C_2 e^{\ln\left(-\frac{m^2 g}{\gamma^2 D_2}\right)}$$

$$= C_1 + C_2\left(-\frac{m^2 g}{\gamma^2 D_2}\right)$$

$$= \frac{{v_0}^2 \sin\theta \cos\theta}{g + \frac{\gamma}{m} v_0 \sin\theta}$$

$y(t) = D_1 + D_2 e^{-\frac{\gamma}{m}t} - \frac{mg}{\gamma} t$ に $t = -\frac{m}{\gamma} \ln\left(-\frac{m^2 g}{\gamma^2 D_2}\right)$ を代入すると、

$$y = D_1 + D_2 e^{-\frac{\gamma}{m}\left(-\frac{m}{\gamma}\ln\left(-\frac{m^2 g}{\gamma^2 D_2}\right)\right)} - \frac{mg}{\gamma}\left(-\frac{m}{\gamma}\ln\left(-\frac{m^2 g}{\gamma^2 D_2}\right)\right)$$

$$= D_1 + D_2 e^{\ln\left(-\frac{m^2 g}{\gamma^2 D_2}\right)} + \frac{m^2 g}{\gamma^2}\ln\left(-\frac{m^2 g}{\gamma^2 D_2}\right)$$

$$= D_1 + D_2\left(-\frac{m^2 g}{\gamma^2 D_2}\right) + \frac{m^2 g}{\gamma^2}\ln\left(-\frac{m^2 g}{\gamma^2 D_2}\right)$$

$$= D_1 - \frac{m^2 g}{\gamma^2} + \frac{m^2 g}{\gamma^2}\ln\left(-\frac{m^2 g}{\gamma^2 D_2}\right)$$

$$= \frac{m}{\gamma} v_0 \sin\theta + \frac{m^2 g}{\gamma^2}\ln\left(\frac{mg}{mg + \gamma v_0 \sin\theta}\right)$$