余因子展開

Definition

n次正方行列$A = [a_{ij}]$に対し，第i行と第j列を取り除いて得られる$(n-1)$次の正方行列をA_{ij}と書く．

Example

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$に対して，$A_{12} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ $A_{22} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Theorem (余因子展開)

n次正方行列$A = [a_{ij}]$と任意の$1 \leq i, j \leq n$に対して，

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{j+1} a_{1j} |A_{1j}| + \cdots + (-1)^{j+n} a_{nj} |A_{nj}| \\ &= (-1)^{i+1} a_{i1} |A_{i1}| + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} |A_{in}| \end{aligned}$$

余因子展開

$$|A| = (-1)^{j+1} a_{1j}|A_{1j}| + \cdots + (-1)^{j+n} a_{nj}|A_{nj}|$$

を第 j 列に関する余因子展開という.

$$|A| = (-1)^{i+1} a_{i1}|A_{i1}| + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in}|A_{in}|$$

を第 i行に関する余因子展開という.

Example

第2列に関する余因子展開.

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -7 \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

第2行に関する余因子展開.

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 7 & 8 & 3 \end{vmatrix} = -0 \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

余因子展開

Definition

n次正方行列$A = [a_{ij}]$に対し,

$$a^*_{ij} = (-1)^{i+j} \left|A_{ji}\right|$$

とおく. さらに,

$$\tilde{A} = [a^*_{ij}]$$

とおき, Aの余因子行列(adjugate matrix)という.

Theorem ((定理3.4.1, 3.4.2))

行列$A = [a_{ij}]$の余因子行列を$\tilde{A}$とすると

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = \det(A)E.$$

さらに, $\det(A) \neq 0$ならば, Aは正則で$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}$である.

クラメールの公式

Theorem

Aをn次の正則行列とする．連立一次方程式

$$\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

の解は次のように与えられる．

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{x}_n \end{bmatrix}, \quad \mathrm{x}_i = \frac{\det\left[\mathbf{a}_1 \ldots \overset{i}{\mathbf{b}} \ldots \mathbf{a}_n\right]}{\det(\mathrm{A})}.$$

ここで，$\left[\mathbf{a}_1 \ldots \overset{i}{\mathbf{b}} \ldots \mathbf{a}_n\right]$はAの第i列を$\mathbf{b}$で置き換えた行列である．

注意：Aが正則ならば，定理3.3.5より，$\det(\mathrm{A}) \neq 0$.

特別な形の行列式

Theorem (ヴァンデルモンド行列式)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

Theorem

$$\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ a_2 & 0 & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n.$$

特別な形の行列式

Theorem

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix} = 0.$$