力学 1

第6回目

運動方程式

運動方程式の解き方

微分方程式に関する少し一般的な話題

微分方程式に関する少し一般的な話題

力学1で出てくる微分方程式の形　（定数係数2階（1階）線型常微分方程式）

速さに比例する大きさの力が
ある場合（空気による抵抗力など）

質点（物体）の位置に比例する
大きさの力がある場合
（単振動、単振り子など）

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + a\frac{dx(t)}{dt} + bx(t) = f(t)$$

定数

定数

（強制振動など）
$x(t)$を含まない関数
（地表面近くでの重力など定数の場合もある）

運動方程式に加速度が含まれるので、2階の微分方程式になっている。
$x(t)$を含む項が無く、速さ$v(t) = \frac{dx}{dt}$だけの微分方程式にできれば、1階の微分方程式になる。

微分方程式に関する少し一般的な話題

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + a\frac{dx(t)}{dt} + bx(t) = f(t) \qquad ①$$

①式の**一般解** $x(t)$ の形は、以下の形となることが知られている。

$$x(t) = \underbrace{C_1\psi_1(t) + C_2\psi_2(t)} + \underbrace{\eta(t)} \qquad ②$$

$$\frac{d^2x_1(t)}{dt^2} + a\frac{dx_1(t)}{dt} + bx_1(t) = 0 \qquad ③$$ の**一般解**

$f(t)$ を0に置き換えた。

① の**特殊解**

（定数でもいいので、何か①を満たすもの。）

微分方程式に関する少し一般的な話題

$$\frac{d^2x_1(t)}{dt^2} + \mathrm{a}\frac{dx_1(t)}{dt} + \mathrm{b}x_1(t) = 0 \quad ③$$ の**一般解**について

この形の微分方程式は、解法の常套手段がある。

任意定数

③の一般解 $x_1(t)$ は、 $\mathrm{C}_1\psi_1(t) + \mathrm{C}_2\psi_2(t)$ の形をしている。

$\psi_1(t)$ と $\psi_2(t)$ は③の解で、 一次独立

定数

$$\psi_1(t) \neq \mathrm{C}\,\psi_2(t)$$

③の一般解 $x_1(t)$ を求めることは、③を満たす2つの一次独立な解 $\psi_1(t)$ と $\psi_2(t)$ を求めることに帰着する。

（$\psi_1(t)$ と $\psi_2(t)$ が求まったら、それぞれに任意定数C_1、 C_2をかけて足せばよい。）

（C_1、 C_2を具体的に決めるには、初期条件を設定する。）

微分方程式に関する少し一般的な話題

$$\frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + \mathrm{a}\frac{dx_1(t)}{dt} + \mathrm{b}x_1(t) = 0 \qquad ③$$

③を満たす2つの一次独立な解 $\psi_1(t)$ と $\psi_2(t)$ を求めるには？

常套手段　$\boxed{x_1(t) = e^{\alpha t}\ \text{と置いて、③に代入してみる}}$　（αは定数）

$$\frac{d^2 e^{\alpha t}}{dt^2} + \mathrm{a}\frac{de^{\alpha t}}{dt} + \mathrm{b}e^{\alpha t} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\alpha^2 e^{\alpha t} + \mathrm{a}\alpha e^{\alpha t} + \mathrm{b}e^{\alpha t} = 0$$

$$\downarrow$$

$$e^{\alpha t}(\alpha^2 + \mathrm{a}\alpha + \mathrm{b}) = 0$$

$(\alpha^2 + \mathrm{a}\alpha + \mathrm{b}) = 0$ を満たすαを求めれば、 $x_1(t) = e^{\alpha t}$ は③の解となる

微分方程式に関する少し一般的な話題

（③の特性方程式） $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ ④ の解について

（例：重力＋空気の抵抗力など）

1. 2つの実数解

$\alpha_1 \neq \alpha_2$ なら $\psi_1(t)$ と $\psi_2(t)$ は一次独立

任意定数

α_1 と α_2 → $\begin{cases} \psi_1(t) = e^{\alpha_1 t} \\ \psi_2(t) = e^{\alpha_2 t} \end{cases}$ として、 $x_1(t) = C_1\psi_1(t) + C_2\psi_2(t)$

が③の一般解

（例：減衰振動の、ある条件の場合）

2. 重解（1つの実数解）

α_1 だけ → $\psi_1(t) = e^{\alpha_1 t}$ は③解である。

なんとかして、 $\psi_1(t)$ と独立な解 $\psi_2(t)$ を見つける。

（例：単振動、単振り子、強制振動など）

3. 2つの複素数解

任意定数（複素数）

α_1 と α_2 → $\begin{bmatrix} \psi_1(t) = e^{\alpha_1 t} \\ \psi_2(t) = e^{\alpha_2 t} \end{bmatrix}$

$x_1(t) = C_1\psi_1(t) + C_2\psi_2(t)$ が③の一般解、

ではあるが、

$x_1(t)$ は **実数**（質点の位置を表すもの）なので

追加の考察が必要

微分方程式に関する少し一般的な話題

$\eta(t)$（①の**特殊解**）について

（定数でもいいので、何か①を満たすもの。）

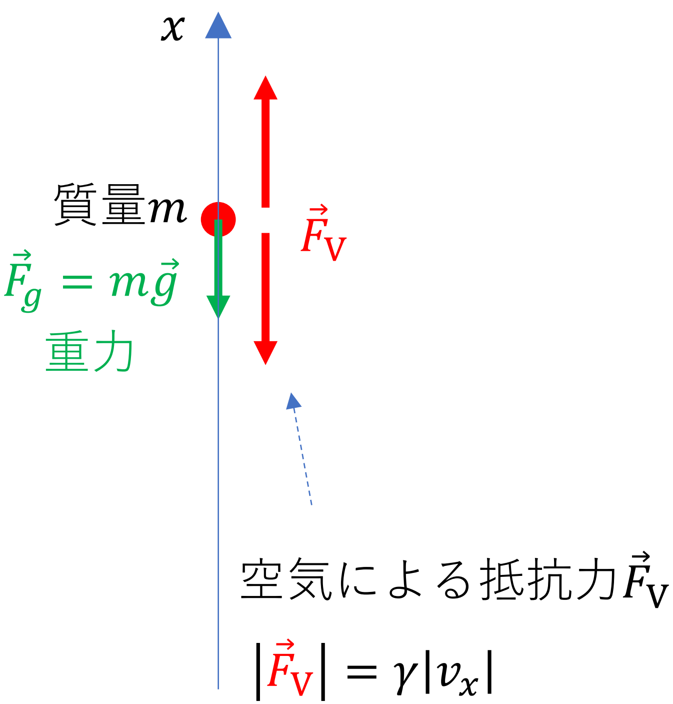
$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \mathrm{a}\frac{dx(t)}{dt} + \mathrm{b}x(t) = f(t) \quad ①$$

それぞれの問題で個別に考察してみる。

（定数と仮定、tに比例すると仮定、$f(t)$の形から推測、・・・など）

微分方程式に関する少し一般的な話題

例1：前回第5回目講義19枚目スライド



$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\gamma}{m}\frac{dx}{dt} = -g \qquad ④$$

2階の微分方程式として解いてみる。

まず、

$$\frac{d^2x_1(t)}{dt^2} + \frac{\gamma}{m}\frac{dx_1(t)}{dt} = 0 \qquad ⑤$$

の一般解 $x_1(t)$ を求める。

微分方程式に関する少し一般的な話題

$$\frac{d^2x_1(t)}{dt^2}+\frac{\gamma}{m}\frac{dx_1(t)}{dt}=0 \qquad ⑤$$

$x_1(t)=e^{\alpha t}$ と置いて、⑤に代入してみる

$$\frac{d^2e^{\alpha t}}{dt^2}+\frac{\gamma}{m}\frac{de^{\alpha t}}{dt}=0 \qquad ⑥$$

$$e^{\alpha t}\left(\alpha^2+\frac{\gamma}{m}\alpha\right)=0$$

$$\left(\alpha^2+\frac{\gamma}{m}\alpha\right)=0$$

$$\alpha\left(\alpha+\frac{\gamma}{m}\right)=0 \longrightarrow \alpha=0,-\frac{\gamma}{m}$$

微分方程式に関する少し一般的な話題

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = -\dfrac{\gamma}{m} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \psi_1(t) = e^{\alpha_1 t} = e^0 = 1 \\ \psi_2(t) = e^{\alpha_2 t} = e^{-\frac{\gamma}{m}t} \end{cases}$$

それぞれ⑤の解で、 $\psi_1(t)$と $\psi_2(t)$は独立

⑤の一般解は、

$$x_1(t) = \mathrm{C}_1\psi_1(t) + \mathrm{C}_2\psi_2(t)$$

$$= \mathrm{C}_1 \times 1 + \mathrm{C}_2 e^{-\frac{\gamma}{m}t}$$

$$= \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 e^{-\frac{\gamma}{m}t}$$

任意定数を2つ含んでいる

微分方程式に関する少し一般的な話題

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\gamma}{m}\frac{dx}{dt}=-g \qquad ④$$

④の特殊解は？

とりあえず、x が定数と仮定してみると、

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{d^2x}{dt^2}=0$　なので、 $0=-g$ ← 矛盾していて成り立たない

定数

次に、 x がt に比例すると仮定してみると、$x = \mathrm{C}\,t$と置いてみて、

$\dfrac{dx}{dt}=\mathrm{C}$、 $\dfrac{d^2x}{dt^2}=0$　なので、 $\dfrac{\gamma}{m}\mathrm{C}=-g$ → $\mathrm{C}=-\dfrac{mg}{\gamma}$

従って、 $x=\mathrm{C}\,t=-\dfrac{mg}{\gamma}t$ は④の特殊解となる。

（積分定数を2つ含んでいないので一般解ではない。）

微分方程式に関する少し一般的な話題

結局、 $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{\gamma}{m}\dfrac{dx}{dt}=-g$ ④ の一般解 $x(t)$ は、

$\dfrac{d^2x_1}{dt^2}+\dfrac{\gamma}{m}\dfrac{dx_1}{dt}=0$ ⑤ の一般解 $x_1(t)=C_1+C_2e^{-\frac{\gamma}{m}t}$ と

$\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{\gamma}{m}\dfrac{dx}{dt}=-g$ ④ の特殊解 $x(t)=C\,t=-\dfrac{mg}{\gamma}\,t$ の和となり、

④の一般解 $$x(t)=C_1+C_2e^{-\frac{\gamma}{m}t}-\frac{mg}{\gamma}\,t$$

前回講義のように $v(t)$ を導出して積分すると、ここの係数 に $-\frac{m}{\gamma}$ が出てくるが、
これは定数なので、C_2 に含まれていると考えれば、どちらも同じ形になる

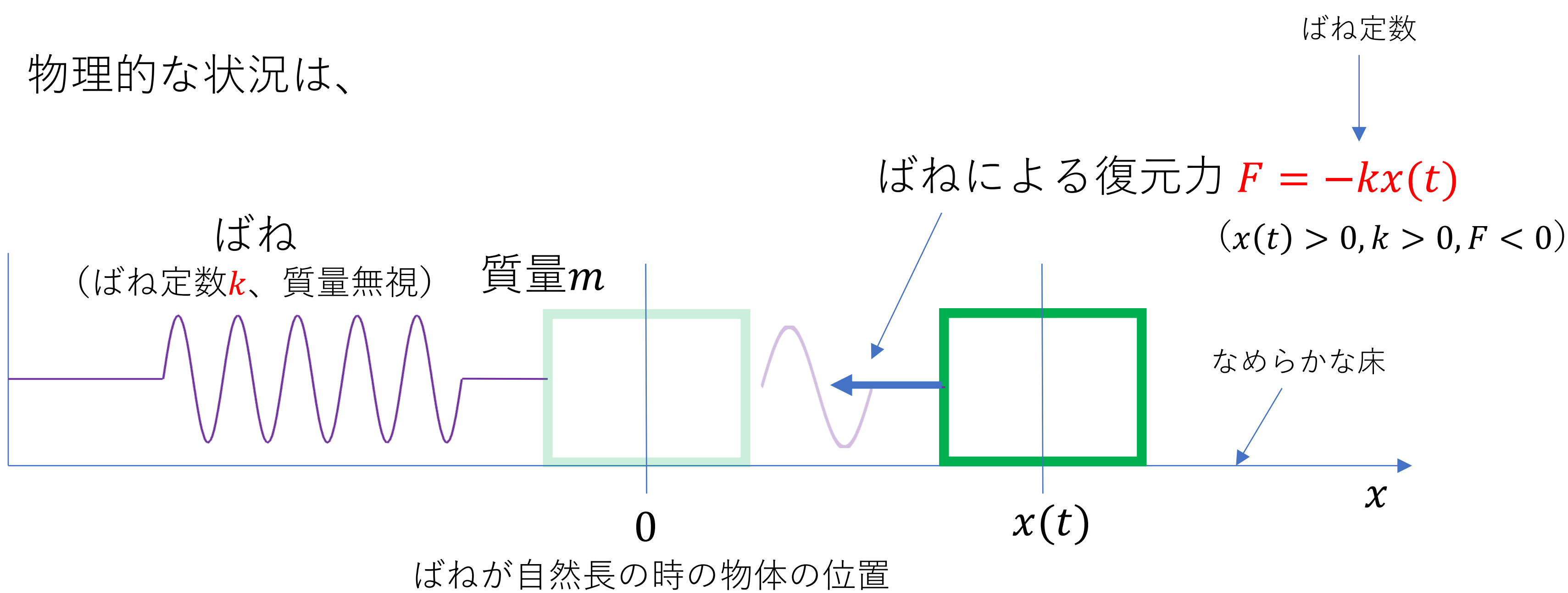
微分方程式に関する少し一般的な話題

例2：単振動　第2回目16枚目スライド

$$x(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$$

これを運動方程式から導き出す

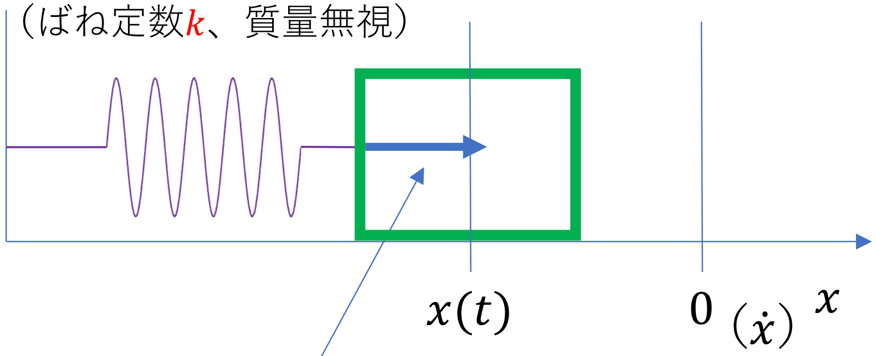
物理的な状況は、



微分方程式に関する少し一般的な話題

例2：単振動

ばね
（ばね定数k、質量無視）



ばねによる復元力 $F = -kx(t)$
（$x(t) < 0, k > 0, F > 0$）

運動方程式

$$F = m\ddot{x} = -kx \quad ⑥$$

移項して整理

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad ⑦$$

x の項があるので、$v = \dot{x}$ だけの式にできない。
（微分の階数を下げることができない）

xとその微分以外の項がゼロ

⑦の一般解を求めればよい
（特殊解を求める必要は無い）

$\ddot{x}$とxの項（2階微分と自分自身）から構成されているので、解は $\sin(\omega t)$ あるいは $\cos(\omega t)$ で構成されると予想できるが、この後のスライドでは常套手段を使って解く

$x(t) = \mathrm{A}\sin(\omega t + \alpha)$と置いて、⑦を満たすように$\omega$を求める。
（Aとα が2つの任意定数になっている）

$$x(t) = \mathrm{A}\sin(\omega t + \alpha) = \underbrace{\mathrm{A}\cos\alpha}_{\mathrm{C}_1}\underbrace{\sin\omega t}_{\psi_1(t)} + \underbrace{\mathrm{A}\sin\alpha}_{\mathrm{C}_2}\underbrace{\cos\omega t}_{\psi_2(t)}$$

スライド5枚目の
$x_1(t) = \mathrm{C}_1\psi_1(t) + \mathrm{C}_2\psi_2(t)$の形になっている。
（sin と cos は1次独立な関数）

微分方程式に関する少し一般的な話題

例2：単振動

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad ⑦$$

$x(t) = e^{\alpha t}$ と置いて、⑦に代入してみる

$$\alpha^2 e^{\alpha t} + \frac{k}{m}e^{\alpha t} = e^{\alpha t}\left(\alpha^2 + \frac{k}{m}\right) = 0$$

（⑦の特性方程式）

$$\alpha^2 + \frac{k}{m} = 0$$

$$\alpha^2 = -\frac{k}{m}$$

$$\alpha = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

微分方程式に関する少し一般的な話題

例2：単振動

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad ⑦$$

複素数の定数

⑦の一般解は、形式的には

$$x(t) = C_1 e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}\,t} + C_2 e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}\,t} \qquad ⑧$$

これらはどう考える？

微分方程式に関する少し一般的な話題

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$(e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta\ )$

オイラー（Euler）の公式 （非常に重要な関係式）

テイラー（Taylor）展開（マクローリン（Maclaurin）展開）

$$f(x+h) = f(x) + \frac{df}{dx}h + \frac{1}{2!}\frac{d^2f}{dx^2}h^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3f}{dx^3}h^3 + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{d^nf}{dx^n}h^n + \cdots$$

$x = 0, h = \theta$と考えて、

$$e^{\theta} = 1 + \theta + \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{3!}\theta^3 + \cdots$$

$\theta \rightarrow i\theta$とすると

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{1}{2!}\theta^2 - i\frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{4!}\theta^4 + i\frac{1}{5!}\theta^5 - \cdots$$

$$= (1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \frac{1}{6!}\theta^6 + \cdots)$$

$$+ i(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \frac{1}{7!}\theta^7 + \cdots)$$

$$= \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \frac{1}{7!}\theta^7 + \cdots$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \frac{1}{6!}\theta^6 + \cdots$$

微分方程式に関する少し一般的な話題

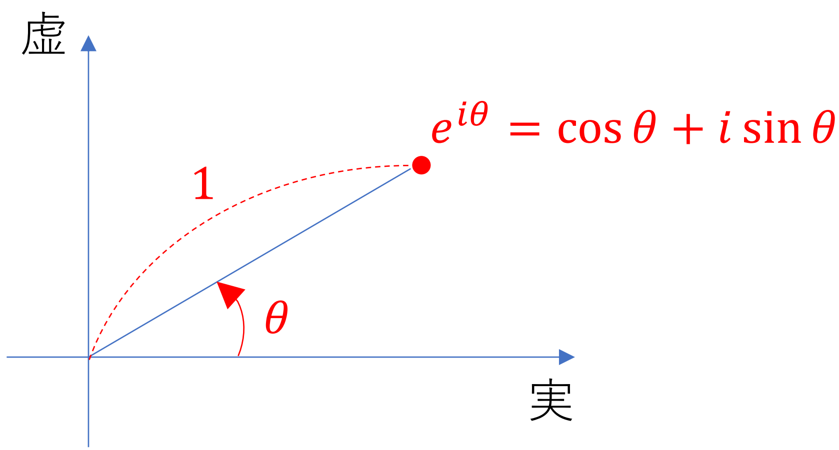
$$\frac{d}{d\theta}e^{i\theta} = i\,e^{i\theta}$$

$$\frac{d}{d\theta}e^{i\alpha\theta} = i\alpha\,e^{i\alpha\theta}$$

$$\frac{d}{d\theta}e^{i\theta} = \frac{d}{d\theta}(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= -\sin\theta + i\cos\theta = i(\cos\theta + i\sin\theta) = i\,e^{i\theta}$$

複素数を複素平面（横軸に実数、縦軸に虚数）で表すと、



微分方程式に関する少し一般的な話題

$$x(t) = C_1 e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}\,t} + C_2 e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}\,t} \qquad ⑧$$

$x(t)$は物体（質点）の位置 ⟶ 実数でなければいけない

⑧をオイラーの式を用いて変形すると、

$$x(t) = C_1\left(\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + i\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + C_2\left(\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t - i\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$$

$$= \underline{(C_1 + C_2)}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + i\underline{(C_1 - C_2)}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

実数で
あるためには

実数でなければいけない　　虚数でなければいけない

微分方程式に関する少し一般的な話題

$$x(t) = (C_1 + C_2)\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + i(C_1 - C_2)\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t \qquad ⑨$$

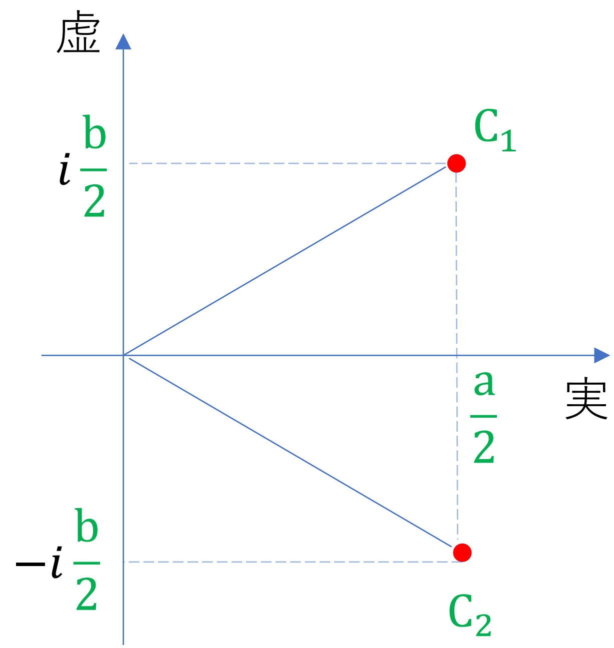
ここで、

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = a & \leftarrow \text{実数なので} \\ C_1 - C_2 = ib & \leftarrow \text{虚数なので} \end{cases}$$

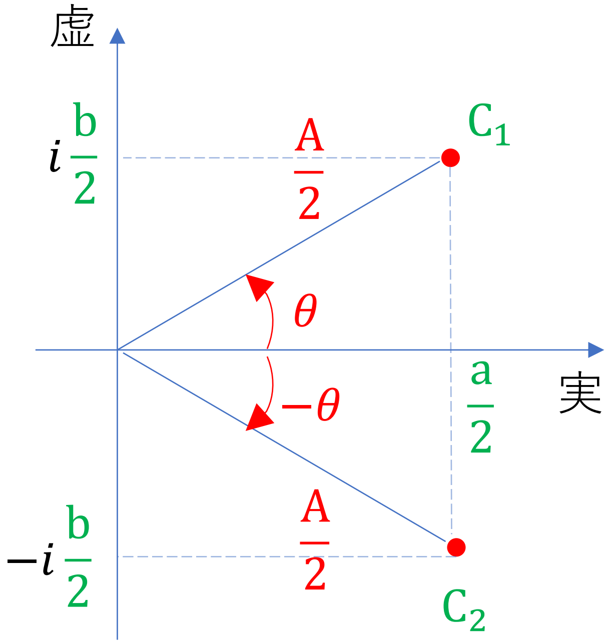
とおく。　（a と b は実数）

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{2}(a + ib) \\ C_2 = \dfrac{1}{2}(a - ib) \end{cases}$$

C_1 と C_2 は互いに複素共役



微分方程式に関する少し一般的な話題



（C_1とC_2は互いに複素共役）

複素平面上の極座標表示を用いて、

$$\begin{cases} C_1 = \frac{A}{2}\cos\theta + \frac{A}{2}\, i\sin\theta \\ C_2 = \frac{A}{2}\cos\theta - \frac{A}{2}\, i\sin\theta \end{cases}$$

とおくと、（Aとθは実数のある定数）

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = A\cos\theta \\ C_1 - C_2 = iA\sin\theta \end{cases}$$

$$x(t) = (C_1 + C_2)\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + i(C_1 - C_2)\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$ ⑨ に代入すると、

微分方程式に関する少し一般的な話題

$$x(t) = (C_1 + C_2)\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + i(C_1 - C_2)\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t \quad ⑨$$

$$= \underline{A\cos\theta}\,\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\ \underline{-A\sin\theta}\,\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t \quad ⑩$$

$$= A_1\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + A_2\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t \quad ⑪$$

A_1、 A_2は2つの任意定数

$x_1(t) = C_1\psi_1(t) + C_2\psi_2(t)$

の形

⑩より、

$$= A\cos\left(\theta + \sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$$

A とθが2つの任意定数

$$= A\sin\left(\theta_1 + \sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$$

$\theta_1 = \theta + \frac{\pi}{2}$

微分方程式に関する少し一般的な話題

$\sqrt{\dfrac{k}{m}} = \omega$ とおき、 $\theta_1 = \alpha$ と書き直すと、

角振動数

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad ⑦$$

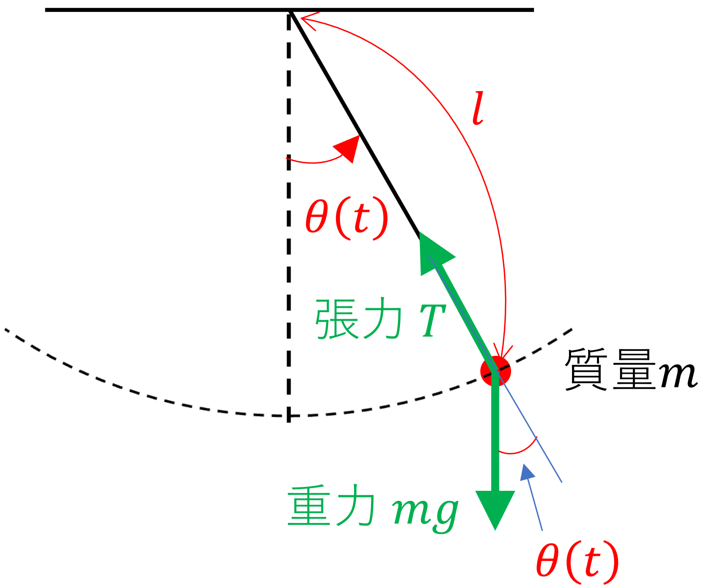
単振動の運動方程式⑦の一般解として、

$$x(t) = \mathrm{A}\sin(\omega t + \alpha)$$

が得られる。

微分方程式に関する少し一般的な話題

例3：単振り子　第4回目27枚目スライド



接線方向の運動方程式は、

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \qquad ⑪$$

$\sin\theta$が入っている非線形微分方程式で解くのが難しい

$\theta \ll 1$

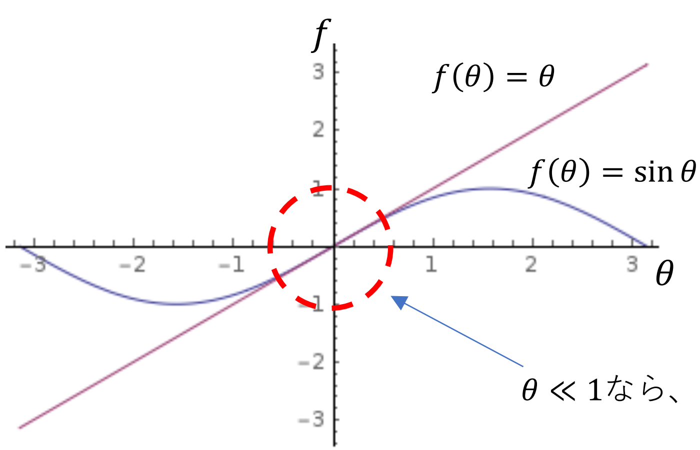
θが小さい場合を考えて見る

今日の18枚目

$$\sin\theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \frac{1}{7!}\theta^7 + \cdots$$

θ^3以降の項は無視して、

$\sin\theta \cong \theta$　と近似して考えてみる



$\theta \ll 1$なら、 $\sin\theta$をθで近似できそう

微分方程式に関する少し一般的な話題

例3：単振り子

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \quad ⑪$$

$\theta \ll 1$ として $\sin\theta \to \theta$　と置き換えると、

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \quad ⑫$$

単振動

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad ⑦$$

⑫は⑦と同じ形をしているので、

$$\theta(t) = \mathrm{A}\sin(\omega t + \alpha)$$

（cos で表すこともできる）

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

周期$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

周期 T がおもりの質量 m や振幅 A によらない → 振り子の等時性

（$\theta \ll 1$の場合）

（振り子のひもの長さlには依存する）