第 8 回講義：話題提供：Wallis の公式と Stirling の公式（一変数広義積分の驚異的な応用）.

今回の話題には多くの文献がありますが，私が見る限り最もわかりやすくて読んで楽しいものを選びました：
文献：The Gaussian integral, Keith Conrad（キーワード検索によりオンラインで見つけられます）

定理 (Wallis の公式). 次の極限式が成り立つ：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left\{\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right\}^2 = \frac{\pi}{2} \ .$$

（証明）証明には次の計算を使う：

補題. m を自然数とするとき

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\, dx = \begin{cases} \frac{(m-1)!!}{m!!}\frac{\pi}{2} & (m\ \text{：偶数}) \\ \frac{(m-1)!!}{m!!} & (m\ \text{：奇数}) \end{cases}$$

が成り立つ．ここで $(2n)!! = 2n(2n-2)(2n-4)\ldots 2$, $(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)\ldots 1$ である．

（証明）求める積分を

$$I_m := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\, dx$$

とおき，$\sin^m x = -\sin^{m-1} x\,(\cos x)'$ と思って部分積分すると

$$\begin{aligned} I_m &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x\,(\cos x)'\, dx \\ &= -[\sin^{m-1} x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (m-1)\sin^{m-2} x\, \cos^2 x\, dx \\ &= (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x\,(1-\sin^2 x)\, dx \\ &= (m-1)(I_{m-2} - I_m) \end{aligned}$$

から数列 $\{I_m\}_{m=0}^{\infty}$ は漸化式

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2} \quad (m \geq 2)$$

を満たすことがわかる．よって，もし m が偶数なら

$$I_m = \frac{m-1}{m}\cdot\frac{m-3}{m-2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\cdot I_0 = \frac{(m-1)!!}{m!!}\frac{\pi}{2}$$

である．m が奇数の場合も同様であるが最後に

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

を使う．補題の証明終わり．□

区間 $(0, \frac{\pi}{2})$ では $\sin^m x > \sin^{m+1} x$ だから $I_m > I_{m+1}$ は明らかである．したがって

$$1 > \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{2n+1}\left\{\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right\}^2 .$$

一方 $I_{2n} < I_{2n-1}$ だから漸化式を使うと

$$1 > \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} > \frac{I_{2n+1}}{I_{2n-1}} = \frac{2n}{2n+1} \to 1 \quad (n\to\infty) \ .$$

はさみうちの原理から求める極限公式を得る．これで Wallis の公式の証明は終わりである．□

定理 (Stirling の公式). $n!$ を近似する公式

$$1 < \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} < \exp\left(\frac{1}{12n}\right)$$

が成り立つ.

（証明）Wallis の公式に持ち込む.

$$\log n! = \log 1 + \log 2 + \cdots + \log n$$

である．$y = \log x$ $(x > 0)$ は単調増加関数だから

$$\int_{n-1}^{n} \log x\, dx < \log n < \int_{n}^{n+1} \log x\, dx \quad (\forall n \geq 1)$$

である（$n = 1$ のとき左辺は広義積分になるがちゃんと収束しているので問題はない）．この不等式を $n = 1, 2, \ldots, N$ まで和をとると

$$\int_{0}^{N} \log x\, dx < \log N! < \int_{1}^{N+1} \log x\, dx$$

となる．したがって

$$n\log n - n < \log n! < (n+1)\log(n+1) - n$$

である．そこで n と $n+1$ の間をとって $\log n!$ との差を考える（この着想が定理の証明の鍵である！）:

$$d_n := \log n! - \left(n + \frac{1}{2}\right)\log n + n$$

と定義する．すると

$$d_n - d_{n+1} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1$$

である．$d_n - d_{n+1}$ の振る舞いを調べる．そのために対数計算の工夫：「$\log a =$（$a > 1$ は 1 に近い）を計算するために $a = \frac{1+t}{1-t}$ となる t（t は小さい）をとって $\log\frac{1+t}{1-t}$ のテイラー展開を考える」を思い出す.

$$\frac{n+1}{n} = \frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}}$$

と変形して $t = \frac{1}{2n+1}$ とおく．すると

$$d_n - d_{n+1} = \frac{1}{2t}\left(\log\frac{1+t}{1-t}\right) - 1 = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{2}\log\frac{1+t}{1-t} - t\right)$$

である．そして $|t| < 1$ におけるテイラー展開

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+t}{1-t} = t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \ldots$$

を使う．すると

$$d_n - d_{n+1} = \frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots$$

である．したがって

$$0 < d_n - d_{n+1} < \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots\right).$$

よって

$$0 < d_n - d_{n+1} < \frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2 - 1} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

この不等式から非常に面白いことがわかる！

- 数列 $\{d_n\}_{n=1,2,\ldots}$ は単調減少である．
- 数列 $\{d_n - \frac{1}{12n}\}_{n=1,2,\ldots}$ は単調増加である．

したがって，極限

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty}\left(d_n - \frac{1}{12n}\right) = C$$

が存在する．よって

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}} = e^C$$

が示された．したがって

$$d_n = \log \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}} \quad \downarrow \quad C\ ,$$

$$d_n - \frac{1}{12n} = \log \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{12n}} \quad \uparrow \quad C$$

である．したがって，任意の有限の n に対し

$$1 < \frac{n!}{n^n e^{-n} e^C \sqrt{n}} < \exp\left(\frac{1}{12n}\right)$$

である（第一の不等式から左の不等号が従い，第二の不等式から右の不等号が従う）．こうして，Stirling の公式を示すには，定数 e^C が何なのかを決定すればよいことがわかった．

主張.

$$e^C = \sqrt{2\pi}\ .$$

以下，Wallis の公式を使ってこの主張を証明する．まず Wallis の公式とは

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2.2.4.4.6.6.\ldots.(2n)(2n)}{1.1.3.3.5.5.\ldots.(2n-1)(2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{2}$$

であった．両辺の平方根をとると

$$\frac{2.4.6.\ldots.(2n)}{1.3.5.\ldots.(2n-1)\sqrt{2n}} \quad \sim \quad \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

である．ここで，記号 $\sim$ は比が 1 に近づくことを表す．分母分子に $2.4.\ldots.(2n)$ を掛けると

$$\frac{(2^n n!)^2}{(2n)!}\frac{1}{\sqrt{2n}} \quad \sim \quad \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

となる．そこでよくわからない定数 C を含む $n!$ の近似式

$$n! \quad \sim \quad n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}e^C$$

を Wallis の公式の分母分子に代入すると

$$\frac{2^{2n}(n^{2n+1}e^{-2n}e^{2C})}{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}e^C}\frac{1}{\sqrt{2n}} \quad \sim \quad \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

を得る．これから

$$e^C \quad \sim \quad \sqrt{2\pi}$$

を得るが，この式には n が入っていないから結局

$$e^C = \sqrt{2\pi}$$

となって e^C の値が決定し，Stirling の公式の証明が完成する． □

課題：Stirling の公式

$$1 < \frac{n!}{(n^n e^{-n})\sqrt{2\pi n}} < e^{1/12n}\ .$$

を用いて 100! の桁数を求めよ．自然対数の数値を適当な道具を使って求めていい．

ヒント：自然数 N の桁数は $[\log_{10} N] + 1$ である（実数 x に対し $[x]$ は x を超えない最大の整数）．