

力学II（後半：原田担当分）

第11回

今回の内容 (pp. 102-110)

二体問題 (pp.102-104)

- ・エネルギー保存則

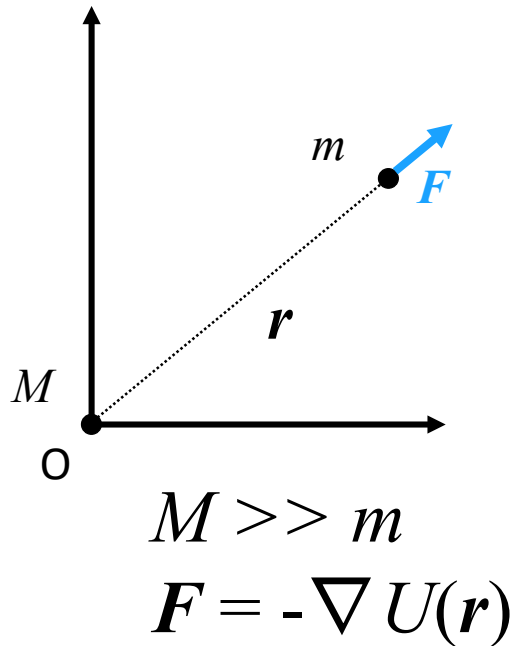
惑星の運動 (pp.104-110)

二体問題において中心力が万有引力の場合

- ・ケプラーの第一法則：楕円軌道
- ・(ケプラーの第二法則：面積速度一定)
- ・ケプラーの第三法則：公転周期

二体問題におけるエネルギー保存則

質点 M の位置を原点 O として、質点 m の相対運動を考える。ただし $M \gg m$ であり、質点 m が質点 M から受ける力は保存力であり、 $\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r})$ とする。エネルギー保存則が成り立つことを示せ。



運動方程式は、

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U(\mathbf{r})$$

である。

両辺に $\dot{\mathbf{r}}$ を内積でかけると

$$m(\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}) = -\nabla U(\mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}}$$

であり、

$$(LHS) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 \right), (RHS) = \frac{dU(\mathbf{r})}{dt}$$

したがって、

$$\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + U(\mathbf{r}) = E(\text{const.})$$

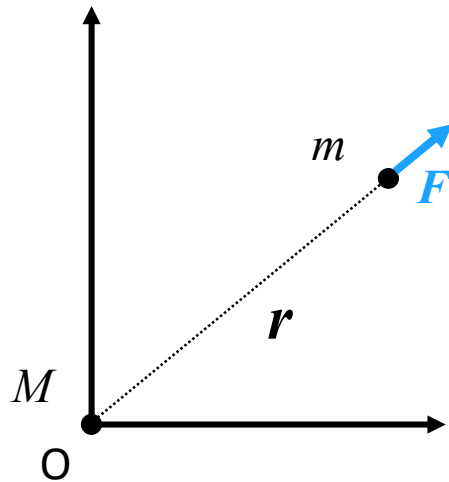
エネルギー保存則が成り立つ。

エネルギー保存則の極座標による表現

エネルギー保存則を極座標であらわし、

$$E \geq U(r) + \frac{mh^2}{2r^2}$$

が質点の運動が可能となる条件であることを示せ。ただし、面積速度を $h/2$ とする。



$$M \gg m$$

$$\mathbf{F} = -\nabla U(r)$$

$$h = r^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + U(r) = E$$

質点の x, y 座標は、

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

と書ける。これを微分すると、

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \cdot \dot{\theta}$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \cdot \dot{\theta}$$

となる。

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$$

ここで、 $\dot{\theta} = \frac{h}{r^2}$ であるので、

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = \dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}$$

したがって、エネルギー保存則は、

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) + U(r) = E$$

となる。

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E - \left[U(r) + \frac{mh^2}{2r^2}\right] \geq 0$$

であるので、

$$E \geq U(r) + \frac{2mh^2}{r^2}$$

が、運動が可能となる条件である。

惑星の運動

：二体問題において中心力が万有引力の場合

ケプラーの法則

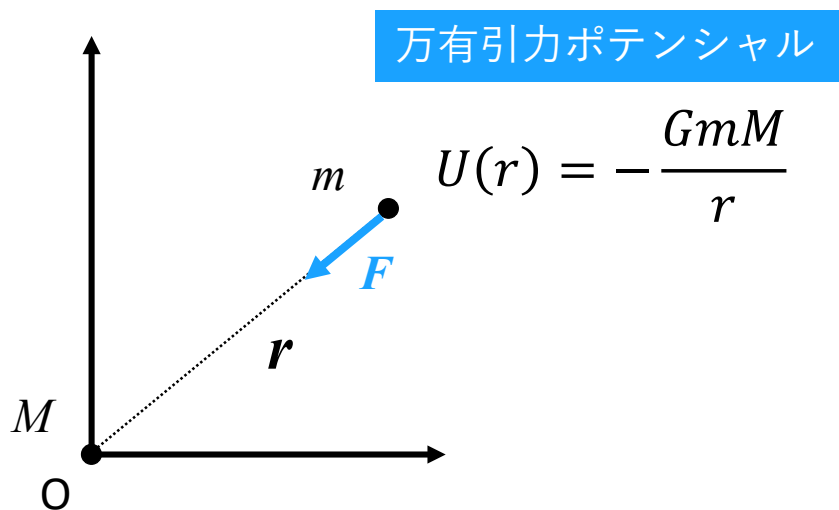
第一法則：惑星は太陽を一つの焦点とする楕円上を運動をする。

第二法則：惑星と太陽を結ぶ線分が掃く面積の速度は一定である（角運動量保存則）。

第三法則：惑星の公転周期の2乗は、惑星の楕円軌道の長径の3乗に比例する。

ケプラーの第一法則

極座標表示した力学的エネルギー保存則と角運動量保存則から、惑星の軌道 (r, θ) に関して下記の微分方程式が成り立つことを示せ。



力学的エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) + U(r) = E$$

角運動量保存則

$$h = r^2\dot{\theta}$$

力学的エネルギー保存則の時間微分より、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m\left(2\dot{r}\ddot{r} - \frac{2h^2}{r^3}\dot{r}\right) + U'(r)\dot{r} &= 0 \\ \Leftrightarrow m\left(\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3}\right) + U'(r) &= 0\end{aligned}$$

である。

角運動量保存則より、 $\dot{\theta} = \frac{h}{r^2}$ であることを注意すると、

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \\ \ddot{r} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) = \frac{h^2}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right)\end{aligned}$$

となる。

これを代入すると、

$$m \left(\frac{h^2}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) - \frac{h^2}{r^3} \right) + U'(r) = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) - \frac{1}{r^3} + \frac{U'(r)}{mh^2} = 0$$

となる。 $U'(r) = \frac{GmM}{r^2}$ を代入して、 $u = \frac{1}{r}$ とおくと、

$$\frac{du}{d\theta} = - \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta}$$

であるので、

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{h^2}$$

これを満たす解の形は、

$$u = \frac{GM}{h^2} + A \cos \theta + B \sin \theta$$

であり、 $\theta = 0$ において、 r が最小である（近日点） とすると、

$\frac{du}{d\theta} = 0, \frac{d^2u}{d\theta^2} < 0$ より、 $B=0, A>0$ となる。

したがって、

$$u = \frac{GM}{h^2} + A \cos \theta \quad (A > 0)$$

が解となる。

ここで、

$$\frac{h^2}{GM} = l, \quad \frac{h^2 A}{GM} = e = lA$$

とおくと、

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{l} + \frac{e}{l} \cos \theta = \frac{1 + e \cos \theta}{l}$$
$$\Leftrightarrow r = \frac{l}{1 + e \cos \theta} \quad (e > 0)$$

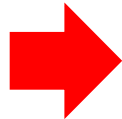
この極方程式は、

$0 < e < 1$ のとき楕円

$e = 1$ のとき放物線

$e > 1$ のとき双曲線

となる。



問 4

$$r = \frac{l}{1 + e \cos \theta} \quad (0 < e < 1)$$

が楕円の極方程式であることを示す。

$$r + ex = \frac{l}{1 + e \cos \theta} (1 + e \cos \theta) = l$$

$$\Leftrightarrow r = l - ex$$

両辺を二乗すると、

$$r^2 = x^2 + y^2 = (l - ex)^2 = l^2 - 2lex + e^2 x^2$$

$$(1 - e^2) \left(x + \frac{le}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 = \frac{l^2}{1 - e^2}$$

$0 < e < 1$ の時、

$$\frac{\left(x + \frac{le}{1 - e^2}\right)^2}{\left(\frac{l}{1 - e^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{l}{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2} = 1 \quad \dots \quad (*)$$

楕円の式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ と比較すると、

$$a = \frac{l}{1 - e^2}, b = \frac{l}{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{である。}$$

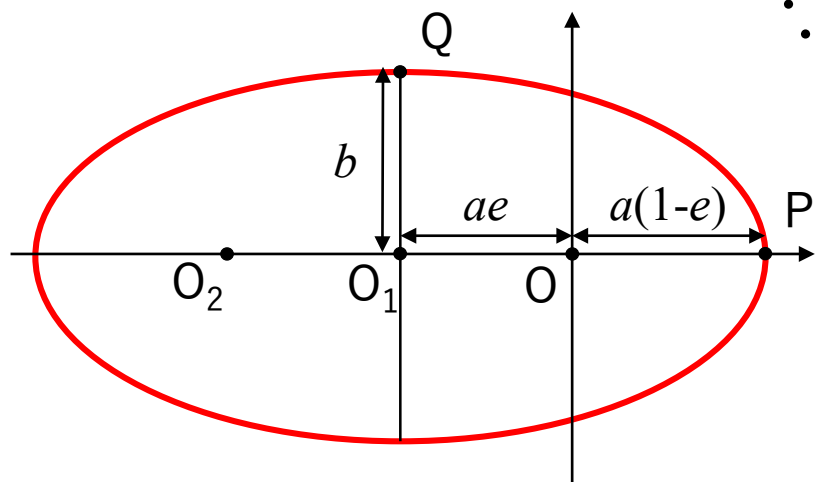
また、 $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = e$ であり、 e は離心率を表す。

(*) を変形すると、

$$\frac{(x + ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

となり、

原点が楕円の焦点の一つとなっている。



$$\because OP + O_2P = 2a$$

$$\begin{aligned} OQ + O_2Q &= 2\sqrt{b^2 - (ae)^2} \\ &= 2a = OP + O_2P \end{aligned}$$

ケプラーの第三法則：公転周期

面積速度は、 $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{h}{2}$ とあらわされる。

(\because 角運動量保存則より)

公転すると楕円の面積 πab を掃くことになるので、

公転周期 T は、 $T = \frac{\pi ab}{\frac{h}{2}} = \frac{2\pi ab}{h}$ となる。

$h = \sqrt{GMl}$, $a = \frac{l}{1 - e^2}$, $b = \frac{l}{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}$ より、

$$T = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GM}}$$