第九回課題解説.

1. 教科書の問 8.1. (1) Leibnitz 公式から

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2\sin x)=\binom{n}{0}x^2(\sin x)^{(n)}+\binom{n}{1}(2x)(\sin x)^{(n-1)}+\binom{n}{2}(2)(\sin x)^{(n-2)}$$

である．一方，$\cos x, \sin x$ は一階微分するごとに偏角が $\frac{\pi}{2}$ 足される，すなわち任意の $k=0,1,2,\dots$ に対して

$$\frac{d^k}{dx^k}\begin{pmatrix}\cos x\\ \sin x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(x+\frac{k\pi}{2})\\ \sin(x+\frac{k\pi}{2})\end{pmatrix}\quad[\text{基本公式}]$$

である．だから

$$(\cos x)^{(k)}=\cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right),\quad (\sin x)^{(k)}=\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)$$

である．したがって答は

$$(x^2\sin x)^{(n)}=x^2\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+2nx\sin\left(x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)+n(n-1)\sin\left(x+\frac{(n-2)\pi}{2}\right)$$

である．

(2) Leibnitz 公式より

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^3\log x)=x^3(\log x)^{(n)}+\binom{n}{1}(3x^2)(\log x)^{(n-1)}+\binom{n}{2}(6x)(\log x)^{(n-2)}+\binom{n}{3}6(\log x)^{(n-3)}$$

である．一方，$(\log x)'=\frac{1}{x}$ だから

$$(\log x)^{(0)}=\log x,\quad (\log x)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}\quad(n\geq 1)$$

である．よって

$$\begin{aligned}
&(x^3\log x)^{(0)}=x^3\log x\ ,\\
&(x^3\log x)'=x^2(1+3\log x)\ ,\\
&(x^3\log x)''=x(5+6\log x)\ ,\\
&(x^3\log x)'''=11+6\log x\ ,\\
&(x^3\log x)^{(4)}=\frac{6}{x}\ ,\\
&(x^3\log x)^{(n)}=\frac{6(-1)^{n-4}(n-4)!}{x^{n-3}}\quad(n\geq 4)
\end{aligned}$$

である．

(3) 複素数の演算を使うと次のように形式的に計算できる．$\sin x$ だけを扱うより単位円周上を動く複素数 $\cos x+i\sin x$ を考えるとわかりやすい．$\cos x, \sin x$ の微分を複素数を $\cos x+i\sin x$ を用いて述べると

$$\frac{d}{dx}(\cos x+i\sin x)=-\sin x+i\cos x=i(\cos x+i\sin x)$$

の形になり，i を掛ける演算と同一視できる．だから

$$\frac{d^n}{dx^n}(\cos x+i\sin x)=i^n(\cos x+i\sin x)$$

である．したがって

$$(e^x(\cos x+i\sin x))^{(n)}=i^n(\cos x+i\sin x)$$

である．一方で Leibnitz 公式から

$$(e^x(\cos x + i\sin x))^{(n)} = e^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\cos x + i\sin x)^{(k)}$$

である．この二つの公式を合わせると，二項定理より

$$(e^x(\cos x + i\sin x))^{(n)} = e^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k (\cos x + i\sin x) = e^x(1+i)^n(\cos x + i\sin x)$$

である．複素数 $1+i$ を掛けると言うことは $1+i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))$ であることから $\pi/4$ 回転して $\sqrt{2}$ 倍すると言う操作である（もし知らなかったら線形代数の教科書に書いてあるので自習してほしい）．したがって

$$e^x(\cos x + i\sin x))^{(n)} = e^x\sqrt{2}^n(\cos(x + n\pi/4) + i\sin(x + n\pi/4))$$

である．ここから $(e^x \sin x)^{(n)}$ を取り出せば

$$(e^x \sin x)^{(n)} = e^x\sqrt{2}^n \sin(x + n\pi/4)$$

である．

別解．三角関数の合成公式

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \pi/4)$$

を使うアイディアもある（こっちの方が普通かも）．実際

$$(e^x \sin x)' = e^x(\sin x + \cos x) = \sqrt{2}e^x \sin(x + \pi/4)$$

だから，これを繰り返し使えばいい．

(4) $(\arctan x)' = \frac{1}{x^2+1}$ だから例題の真似をする（複素数が現れるのを恐れない）と

$$(\arctan x)^{(0)} = \arctan x,\ (\arctan x)' = \frac{1}{x^2+1},$$

$n \geq 2$ なら

$$\begin{aligned}
&\frac{d^n}{dx^n}\arctan x \\
&= \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\frac{1}{x^2+1} \\
&= \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right) \\
&= \frac{(n-1)!(-1)^{n-1}}{2i}\left(\frac{1}{(x-i)^n} - \frac{1}{(x+i)^n}\right) \\
&= \frac{(n-1)!(-1)^{n-1}}{2i}\left(\frac{(x+i)^n - (x-i)^n}{(x^2+1)^n}\right) \\
&= \frac{(n-1)!(-1)^{n-1}}{(x^2+1)^n}\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(-1)^k\binom{n}{2k+1}x^{n-2k-1}\ .
\end{aligned}$$

である．最後の等号は $(x+i)^n$, $(x-i)^n$ に二項定理を適用したことによる．i の奇数 $(= 2k+1)$ 乗 $(k = 0, 1, \ldots, [\frac{n-1}{2}])$ の項だけが寄与することに注意．記号 $[a]$ は a を超えない最大の整数を表す記号である．

2. $f(x) = \log\cos x$ とおくと $f'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x,\ f''(x) = -(\cos x)^{-2},\ f'''(x) = 2(\cos x)^{-3}(-\sin x)$, $f^{(4)}(x) = -2(\cos x)^{-2} - 2\sin x(-3)(\cos x)^{-4}(-\sin x) = -2(\cos x)^{-4}(3\sin^2 x + \cos^2 x) = -2(\cos x)^{-4}(1+$

$2\sin^2 x)$ である．よって $f(0)=0,\ f'(0)=0,\ f''(0)=-1,\ f'''(0)=0,\ f^{(4)}(0)=-2$ である．したがって $f(x)$ の $x=0$ におけるテイラー公式は

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+R_5(x) \\ &= -\frac{1}{2!}x^2-\frac{2}{4!}x^4+R_5(x) \\ &= -\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4+R_5(x) \end{aligned}$$

である．

別解：$\log(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\dots\ (|y|<1)$ に $y=\cos x-1=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\dots$ を代入する．

$$\begin{aligned} f(x) &= \log\{1+(\cos x-1)\}=(\cos x-1)-\frac{1}{2}(\cos x-1)^2+\dots \\ &= \left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2!}+\dots\right)^2+\dots \\ &= -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^4}{8}+\dots \\ &= -\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\dots \end{aligned}$$

という計算もいいと思います．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\cos x-(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)}{x^4}$$

が収束するためには $a_0=0,\ a_1=-\frac{1}{2},\ a_3=0$ でなければならない．このときの極限は

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\cos x-(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{a_4x^4+R_5(x)}{x^4}=a_4=-\frac{1}{12}$$

である．もしこの説明で納得できなければ，次のように考えるといいかも．

極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)-(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)}{x^4}$$

が収束するためには,（高々）3 次式 $a_0x+a_1x^2+a_3x^3$ は $\log(\cos x)$ の $x=0$ を中心とする $f(x)=\log(\cos x)$ のテイラー多項式に一致していなければならない．なぜなら，例えば $a_0\neq f(0)$ だとすると $g(x):=f(x)-(a_0+a_1x+\dots+a_3x^3)$ にテイラー公式を適用すると $g(0)\neq 0$ となって明らかに $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^4}$ は発散する．よって $a_0=f(0)=0$ である．もし $a_1\neq f'(0)$ だとすると $g(x)$ にテイラー公式を適用すると $g(x)=(f'(0)-a_1)x+R_2(x)$ の形になるから $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^4}$ は発散する．よって $a_1=f'(0)$ である．次に，もし $f''(0)/2!=a_2$ でないと $g(x)$ にテイラー公式を適用すると $g(x)=(f''(0)/2!-a_2)x^2+R_3(x)$ となって，$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^4}$ は発散する．よって $a_2=f''(0)/2!=-1/2$ である．次，もし $f'''(0)/3!=a_3$ でないと $g(x)$ にテイラー公式を適用すると $g(x)=(f'''(0)/3!-a_3)x^3+R_4(x)$ となって $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^4}$ は発散する．よって $a_3=f'''(0)/3!=0$ である．よって $a_0=0,\ a_1=0,\ a_2=-\frac{1}{2},\ a_3=0$ でなければならない．そのときの極限は $\log(\cos x)$ のテイラー展開の 4 次の項の係数に一致する．よって極限は $-2/4!=-\frac{1}{12}$ である．

問題 2 についての基本的な考え方：

- テイラー公式について：

a を中心とするテイラー公式は，$[a,b]$ を含む開区間で $k+1$ 階微分可能な関数 $f(x)$ を

$$f(x)=f_k(x)+R_{k+1}(x)$$

と，テイラー多項式

$$f_k(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+f''(a)/2!(x-a)^2+...+f^{(k)}(a)/k!(x-a)^k$$

と残項

$$R_{k+1}(x) = f^{(k+1)}(c)/(k+1)!(x-a)^{k+1}$$

(c は $a < c < b$ を満たすある点) に分割する公式です．f を a の周りで $k-1$ 次テイラー多項式 f_{k-1} で近似して，差を $(x-a)^k$ で割って $x \to a$ とすると

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to a}\{f(x)-f_{k-1}(x)\}/(x-a)^k \\
&= \lim_{x\to a}\{f^{(k)}(a)/k!(x-a)^k + f^{(k+1)}(c)/(k+1)!(x-a)^{k+1}\}/(x-a)^k \\
&= \lim_{x\to a}[f^{(k)}(a)/k! + f^{(k+1)}(c)/(k+1)!(x-a)] \\
&= f^{(k)}(a)/k!
\end{aligned}$$

が成り立ちます．したがって $f - f_{k-1}$ は $(x-a)^k$ のオーダーの大きさ，ということになります．つまり f を $k-1$ 次テイラー多項式で近似すると誤差は $(x-a)^k$ くらいの大きさです．

- 以上の考え方をロピタル計算で解釈：

例えば，$f(x) = \log(\cos x)$ (x は 0 の近くを動く）とします．

$$\{f(x) - (a_0 + a_1 x + a_2 x + a_3 x^3)\}/x^4 \quad (x \to 0)$$

が収束するように定数 a_0, a_1, a_2, a_3 を決めたいとしましょう．そのためには，0/0 の不定形でないと収束することがそもそも不可能なので

$$a_0 = 0$$

です．次の分母分子を微分して

$$\{f'(x) - (a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2)\}/4x^3 \quad (x \to 0)$$

が収束するように a_1, a_2, a_3 を決めたい．そのためには 0/0 の不定型でないと収束できませんから

$$a_1 = 0$$

です．この操作を繰り返し行うと

$$a_2 = -1/2, \ \ a_3 = 0$$

となります．最後に

$$f'''(x)/4!x \quad (x \to 0)$$

に帰着します．これはロピタル計算により

$$f^{(4)}(0)/4!$$

に収束するはずですが，それは $f(x) = \log(\cos x)$ のテイラー多項式の x^4 の係数 $-1/12$ です．