秋第五回課題解答例

教科書の問 15.4 と例題 15.8. 次の条件を満たす C^1 関数 $z = f(x, y)$ はどのような関数か，各場合について答えよ．

(1) $z_x = 0$
(2) $z_x = x$
(3) $z_x + z_y = 0$
(4) $xz_x + yz_y = 0$
(5) $z_x = z_y$
(6) $-yz_x + xz_y = 0$
ヒント：方向微分を考える．

(1) 素朴に考える．z は x によらないから，$z = g(y)$ の形，つまり y だけに依存する関数．

(2) $w = z - \frac{x^2}{2}$ とおくと $w_x = 0$．よって (1) より $w = g(y)$．したがって $z = \frac{x^2}{2} + g(y)$ の形．

(3) $(1, 1)$ 方向への方向微分が常にゼロ．したがって，傾き 1 の各直線 $y = x + k$ に沿って $z(x, y)$ は一定の値をとる．言い換えると，傾き 1 の直線上では x が h だけ変化すると，y も同じ h だけ変化する．よって $z(x, y) = z(x - y + y, 0 + y) = z(x - y, 0)$．したがって $z = g(x - y)$ の形．

(4) 各点 $(x, y) \neq (0, 0)$ で，(x, y) 方向への方向微分がゼロ，ということは，$g(x, y)$ は原点を通る半直線に沿って一定値をとる．よって $z = g(\theta)$ の形．ただし θ は極座標の偏角を表す．もちろん，傾きを使って $z = g(y/x)$ と表すのも可である．これは $z = g(\tan\theta)$ と書けるからである．関数の一般形が問題なので $g(\theta)$ と書いても $g(\tan\theta)$ と書いても g の一般性に吸収されるので同じことである．

(5) (3) と同様．各点で $(1, -1)$ 方向への方向微分が常にゼロ，ということは，x が h, y が $-h$ 変化しても z の値は不変である．よって $z(x, y) = z(-x + x, x + y) = z(0, x + y)$．よって $z(x, y) = g(x + y)$ の形．

(6) 条件は，各点 $(x, y) \neq (0, 0)$ において，位置ベクトル (x, y) を $\pi/2$ 回転した方向 $(-y, x)$ への方向微分がゼロということである．平面の各点 (x, y) に根っこを持つベクトル $(-y, x)$ の絵を描いてみよう．そうすると原点中心に回転する点が見えてくるはずである．関数 z は原点中心の円周に沿って微分するとゼロ，したがって，そのような円周にそって値が一定である．

関数 z の勾配ベクトルを使って言い換えると，関数 z の勾配ベクトルは，点 (x, y) においていつでも $(-y, z)$ と直交している．$(-y, z) \perp (x, y)$ だから，点 (x, y) における関数 z の勾配ベクトルは (x, y) と同一直線上にある，つまり (x, y) の何とか倍である．一方，原点を出発するすべての半直線と直交する曲線は，原点中心の円周である．したがって関数 $z(x, y)$ は原点中心の任意の円周上で一定の値をとる．

これは，$z(x, y)$ は原点からの距離だけに依存する関数であることを意味する．したがって $z = g(x^2 + y^2)$ の形である．もちろん $z = g(r)$ $(r = \sqrt{x^2 + y^2})$ と書いていいのだが，ここでは計算しやすい $g(x^2 + y^2)$ の形を選んだ．

教科書の問 15.5. 次の 2 つの条件を同時に満たす C^1 関数 $z = f(x, y)$ をすべて求めよ：

(1) $z_x = z_y$, $z_x + z_y = 4(x + y)$
(2) $-yz_x + xz_y = 0$, $xz_x + yz_y = 2z$

(1) **2**(5) より $z = g(x + y)$ の形である．$t = x + y$ とおくと $z_x = g'(t)t_z = g'(t)$, $z_y = g'(t)t_y = g'(t)$．よって $z_x + z_y = 4(x + y)$ は $2g'(t) = 4t$ したがって $g'(t) = 2t$ が成り立つことを意味する．このような関数 $g(t)$ は $g(t) = t^2 + C$ の形に限る．答えは $g(x, y) = (x + y)^2 + C$ である．

(2) **2**(6) より $z = g(x^2 + y^2)$ の形である．$t = x^2 + y^2$ とおくと $z_x = g'(t)t_x = g'(t)(2x)$, $z_y = g'(t)t_y = g'(t)(2y)$．よって $xz_x + yz_y = 2z$ は $xg'(t)(2x) + yg'(t)(2y) = 2g(t)$ すなわち $tg'(t) = g(t)$ が成り立つことを意味する．$g'(t)/g(t) = 1/t$ だから $\log|g(t)| = \log|t| + C = \log(e^C|t|)$ である．したがって $|g(t)| = e^C|t|$ の形である．$t = x^2 + y^2$ だから結局 $g(x, y)$ は $g(x, y) = C(x^2 + y^2)$ の形である（$\pm e^C$ を改めて C と書いた）．

- 別解．次のようなアイディアもある．

z_x, z_y についての連立一次方程式だと思って解く．

(1) の場合．

$$z_x = 2(x + y)\ , z_y = 2(x + y)$$

となる．第一式は

$$(z - x^2 - 2xy)_x = 0$$

と同じこと，よって (1) より

$$z(x, y) = x^2 + 2xy + f(y)$$

の形である．　第二式は

$$(z - -2y - y^2)_y = 0$$

と同じこと．よって (1) より

$$z(x, y) = 2xy + y^2 + g(x)$$

の形である．これらを同時に満たす関数 $z(x, y)$ は

$$z(x, y) = (x + y)^2 + C$$

の形のものしかない．逆にこの形の関数は $z_x = z_y$, $z_x + z_y = 4(x + y)$ を満たす.

(2) の場合.

$$z_x = \frac{2x}{x^2 + y^2} \cdot z \ , \ z_y = \frac{2y}{x^2 + y^2} \cdot z$$

となる．これを書き直すと

$$\frac{z_x}{z} = \frac{(x^2 + y^2)_x}{x^2 + y^2} \ , \ \frac{z_y}{z} = \frac{(x^2 + y^2)_y}{x^2 + y^2}$$

である．さらに書き直すと

$$(\log |z)_x = (\log(x^2 + y^2))_x \ , \ (\log |z|)_y = (\log(x^2 + y^2))_y$$

である．よって (1) を第一式に適用すると

$$\log |z| = \log(x^2 + y^2) + f(y)$$

の形であり，第二式に適用すると

$$\log |z| = \log(x^2 + y^2) + g(x)$$

の形である．これら二つの条件を同時に満たす $z(x, y)$ は

$$\log |z| = \log(x^2 + y^2) + C$$

の形に限られる．よって

$$z = C'(x^2 + y^2)$$

である．ここで $C'(= \pm e^C)$ は任意の定数である．逆にこの形の $z = z(x, y)$ は $-yz_x + xz_y = 0$ と $xz_x + yz_y = 2z$ を同時に満たしている．