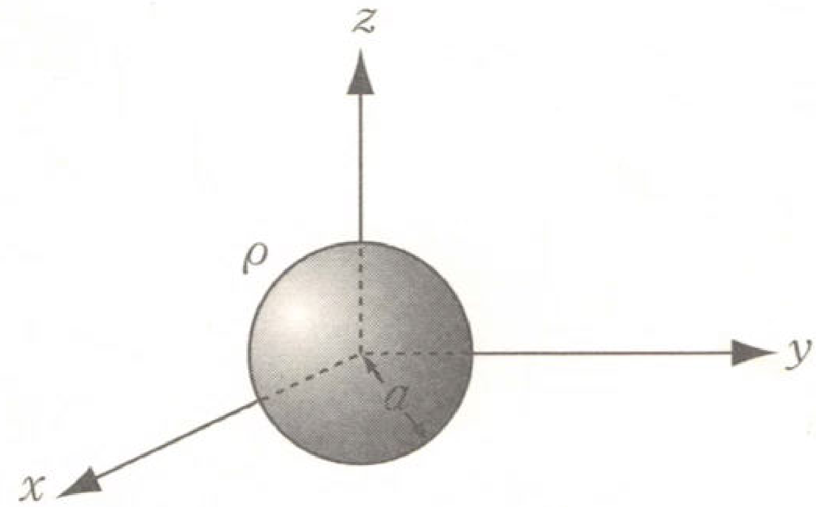
実習問題 3-1

半径 a の球がある。球の内部には密度 $\rho\,(>0)$ の電荷が一様に分布し，球の外部は真空である。このとき，球の内部および外部には，どのような電位が生じるか。ただし，真空の誘電率を ε_0 とする。

図3-9



ヒント! 電場より電位を求める方が簡単とはいえ，電場の対称性が明らかな場合には，講義 2 で見たガウスの法則を用いるのがもっとも便利である。 ええっ!!

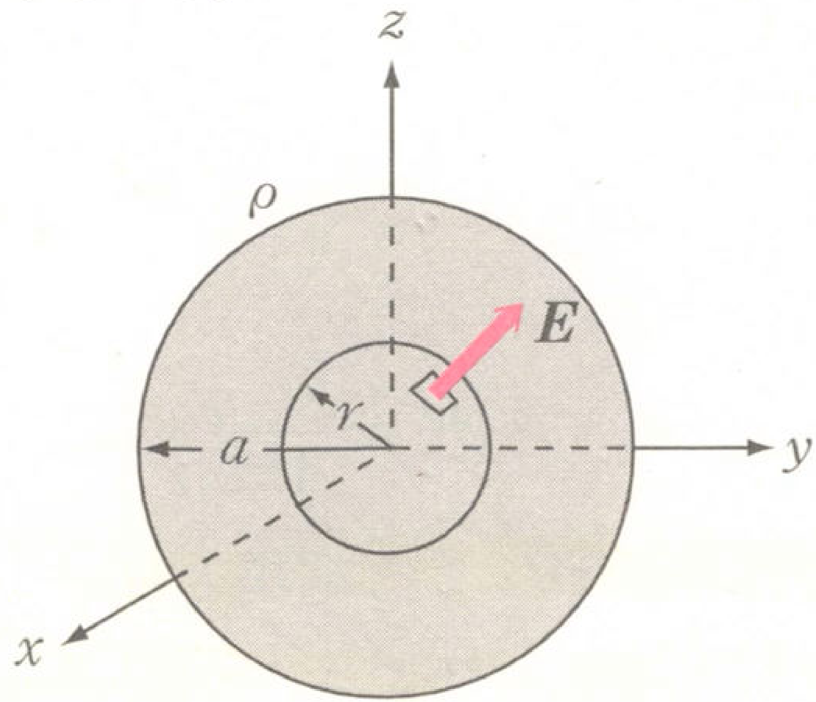
ガウス?

解答&解説 題意より，球の内外を問わず，電場および電位が球対称になることは明らかである。つまり，電場の向きはつねに球の中心から外向きで，その大きさは球の中心からの距離 r の球面上で等しい。また，電位も球の中心からの距離 r の球面上で等しい。言い換えると，等電位の面は球殻状になっている。

よって，ヒントより，まずガウスの法則を用いて，電場を求めることにしよう。

(1)　球の内部の電場

図3-10●荷電球の内部に球をとる。



図のように半径 $r\,(\leq a)$ の球面をとり，その球面上の電場の大きさを E として，ガウスの法則を適用する。半径 r の球の表面積は $4\pi r^2$，また

$$\int_S \mathbb{E}\cdot\mathbb{n}\,dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

この球の内部に存在する全電気量は，$\dfrac{4}{3}\pi r^3 \rho$ だから，

ガウスの法則

$$\text{面積} \times E = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$4\pi r^2 E = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

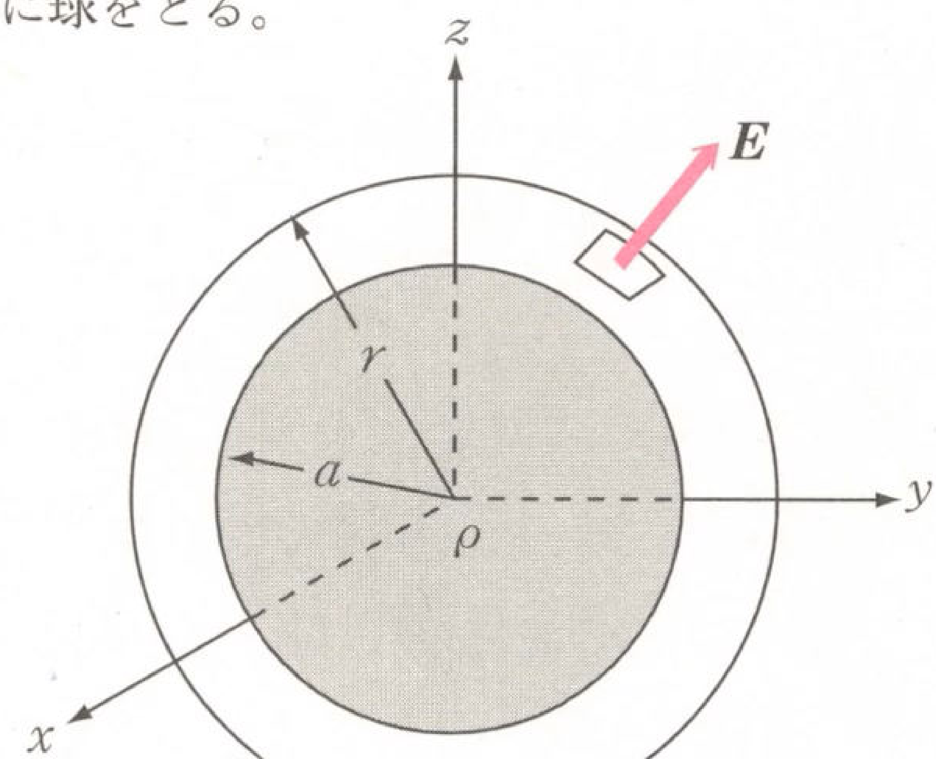
よって，

$$E = \boxed{\text{(a)}\ \frac{r\rho}{3\varepsilon_0}}$$

となり，電場の大きさは，半径 r に比例する。

(2) 球の外部の電場

図3-11●荷電球の外部に球をとる。



図のように半径 $r\ (\geqq a)$ の球面をとり，その球面上の電場の大きさを E とする。さて，この球の内部に存在する全電気量は，つねに，$\dfrac{4}{3}\pi a^3\rho$ という定数であるから，この全電気量を q とおいて，ガウスの法則を適用すれば，

$$4\pi r^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

よって，

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

となり，これは点電荷 q がつくる電場と同じである。つまり，球対称な電荷分布であれば，それが点状であるか拡がっているかにかかわりなく，その外部にできる電場(および電位)は，同じになるということである。

$q = \dfrac{4}{3}\pi a^3\rho$ として，$E = \dfrac{a^3\rho}{3\varepsilon_0 r^2}$

以上で求めた電場から，電位を求めることにしよう。

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\,V$$

であり，かつ変数は r のみであるから，

$$E = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$$

すなわち，E から V を求めるには，積分をすることになる。上式から $\mathrm{d}V/\mathrm{d}r$ をたんなる分数とみなして(『力学ノート』収録「やさしい数学の手引き」参照)，

$$\mathrm{d}V = -E\,\mathrm{d}r$$

だから，

$$V = -\int E\,\mathrm{d}r$$

ただし，この積分を実行すれば必ず積分定数がついてくることを忘れないように。そこで，

$$V = -\int E\,\mathrm{d}r + C_1 \quad (\text{定数})$$

としておく。定数 C_1 がつくことの物理的意味は，ポテンシャル・エネルギーの基準点は自由に選べるということに相当する。我々は，これまで暗黙のうちに，電荷のまったく存在しない場所(あるいは電荷から無限に離れた場所)の電位を 0 としているので，ここでもそうしておこう。

まず，球の外部の電位から求めることにする(これは点電荷のつくる電位と同じであるから，積分するまでもないことだが)。分かりやすく，全電気量を q としておいて，

$V = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

より，

$$V = -\int \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\mathrm{d}r + C_1$$

(高校数学の微分の知識より，$1/r^2 = r^{-2}$ の積分は，$-r^{-1} = -1/r$ であるから)

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_1$$

ここで，$r=\infty$ のとき $V=0$ とすれば，

$$0 = 0 + C_1$$

で $C_1=0$ となるから，

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

となって，めでたく，点電荷のつくる電位と同じ答えが出てくる。

$q=\frac{4}{3}\pi a^3\rho$ として，

$$V = \boxed{\text{(b)}\ \frac{a^3\rho}{3\varepsilon_0 r}} \quad (r \geqq a\ のとき) \quad \cdots\cdots(答)$$

さて次は，球の内部の電位である。これも，同様に(1)の結果を積分すれば，

$E = \frac{r\rho}{3\varepsilon_0}$

$V = -\int E\,dr + C$

$$V = -\int \underbrace{\frac{r\rho}{3\varepsilon_0}}_{E} \mathrm{d}r + C_2$$

$$= -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[\frac{1}{2}r^2\right] + C_2$$

$$= -\frac{r^2\rho}{6\varepsilon_0} + C_2$$

これは，球の中心が頂点となるような上に凸の放物線である。

積分定数 C_2 を求めるには，$r=a$ の点で，上で求めた外部の電位と一致するようにすればよい。$r=a$ で外部と内部の電位が一致しなければならないのは直感的に自明である。なぜなら，もし外部からと内部からの電位が $r=a$ で一致しなければ，その部分で電位の傾きが無限大となる。これは電場が無限大ということであるが，現実にそのようなことは起こらないからである。

そこで，電位の内部と外部の解において，$r=a$ とし，それらが等しいとおけば，

$$\frac{a^3\rho}{3\varepsilon_0 a} = -\frac{a^2\rho}{6\varepsilon_0} + C_2$$

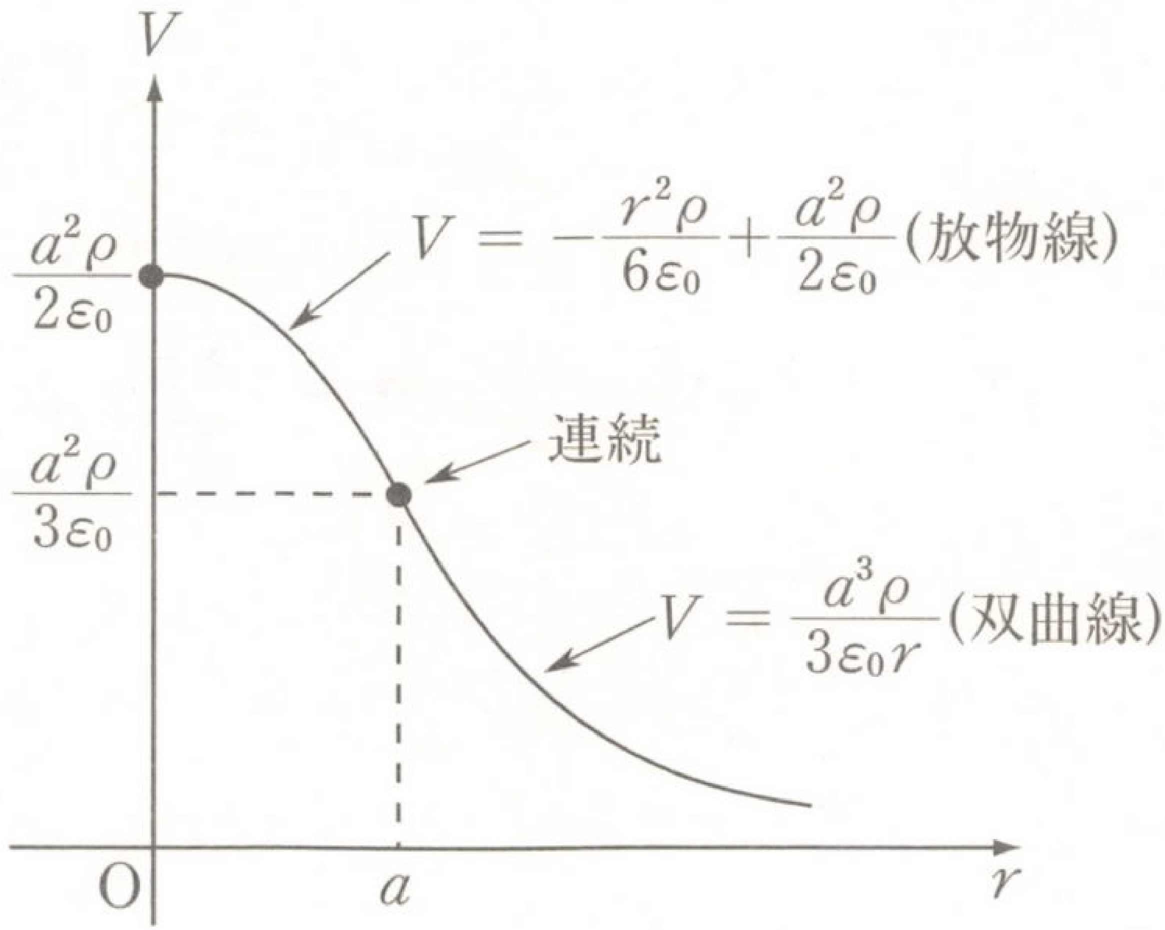
$$\therefore \quad C_2 = \frac{a^2\rho}{2\varepsilon_0}$$

よって,

$$V = \boxed{\text{(c)}\ -\frac{r^2\rho}{6\varepsilon_0}+\frac{a^2\rho}{2\varepsilon_0}}\quad (r \leqq a\text{ のとき})\quad \cdots\cdots(\text{答})$$

これらをまとめて図に描けば，次の通りである。

図3-12●球の内部の電位は，$r=a$ で外部の電位と連続的につながっているということから決まる。



電荷が点ではなく拡がっていても，外部では同じ電位や電場をつくるということは，何かと好都合である。たとえば，点電荷の電場や電位の式は，分母に距離 r があるので，$r=0$ では無限大に発散してしまうという難点をもつ。しかし，点電荷といえども，微細に見れば拡がりをもった球状なのだと解釈すれば，この無限大の発散を防ぐことができるからである(とはいえ，現代物理学では，電子は内部構造をもたない質点だとみなされているので，この無限大発散の問題は，まだ根本的に解決されたわけではない)。

ポアソンの方程式

電位のしめくくりは，少し数学的なことをやっておこう。数学的といっても，具体的に問題を解くわけではないので，話の筋道だけを追って頂ければよいのである。式をきれいにまとめてみようという，やや形式的な話である。

電場と電位の関係は，

$$-\nabla V$$

ベクトル

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\, V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) = (E_x, E_y, E_z)$$

であるが，講義２で我々はマクスウェルの方程式の１つを学んだ。すなわち，

$$\nabla \cdot E = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

スカラー量

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

である。そこで，この２つの式を結びつけてみよう。下の式に上の式の $\boldsymbol{E}$ の値を代入して，

$$\mathrm{div}(-\mathrm{grad}\, V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

P227

ε_0 P227

付録「やさしい数学の手引き」に示した計算によって，div·grad を書き直せば，

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

となる。形式的ではあるが，$\nabla\cdot\nabla=\nabla^2=\triangle=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ として，

$$\triangle V=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

と書くこともある(△記号を**ラプラシアン**と呼ぶ)。表現方法は何であれ，これは未知数 V の 2 階偏微分方程式であり，**ポアソンの方程式**と呼ばれる。また，$\rho=0$ のときの方程式，

$$\triangle V=0$$

は，**ラプラスの方程式**と呼ばれる。

V はスカラー量であるから，div$\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon_0$ の方程式と違って，これらの方程式の未知数は 1 つである。それゆえ，これらの方程式は解くことができる。これが，$\boldsymbol{E}$ の代わりに V を導入した理由の 1 つである。

●ラプラスの方程式の解

注意すべきは，**ラプラスの方程式**は，右辺が０だからといって，全空間に何もない場合を想定しているのではないということである(そのような場合の解は，$V=0$ (定数)となって，面白くも何ともない)。微分方程式だから，あくまで微小な領域の中に何もないだけで，その周囲の状況はさまざまである。つまり，ラプラスの方程式にしろ，ポアソンの方程式にしろ，周囲の状況がどうなっているか(これを**境界条件**という)によって，具体的な解は違ってくるということである。

そんなわけで，これらの方程式は，見た目はきわめて単純であるが，一般的に解くことは難しい。よって，大学初年度の物理では，ふつう，これらの方程式を具体的に解くことはしない。

P.3

これらの方程式を具体的に解くことはしない。

P.36

しかし, ρ が微小な球状に分布し, それ以外の空間は真空であるときの解を, 我々はもちろんよく知っている。それこそ点電荷のつくるクーロン場のポテンシャルに他ならないのである。

通常は空間に電荷が分布することは少なく、
多くは境界の面や線に電荷が存在し、
その電荷によって真空中に電位や電界が発生する。
このとき電位の解はラプラスの方程式を
境界条件付きで解くことで得られる。

→ P194 へ

●ラプラスの方程式を思い出そう

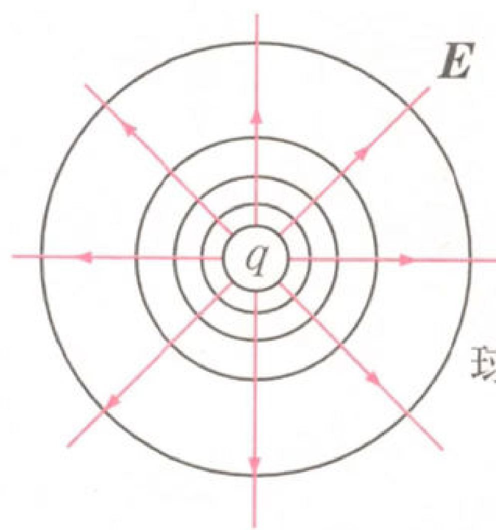
その前に，講義3 (48ページ) で登場したラプラスの方程式を思い出して頂きたい。

$\nabla^2 \mathbb{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbb{E}}{\partial t^2}$

$$\Delta V = 0 \quad (\nabla^2 V = 0 \text{ と同じ})$$

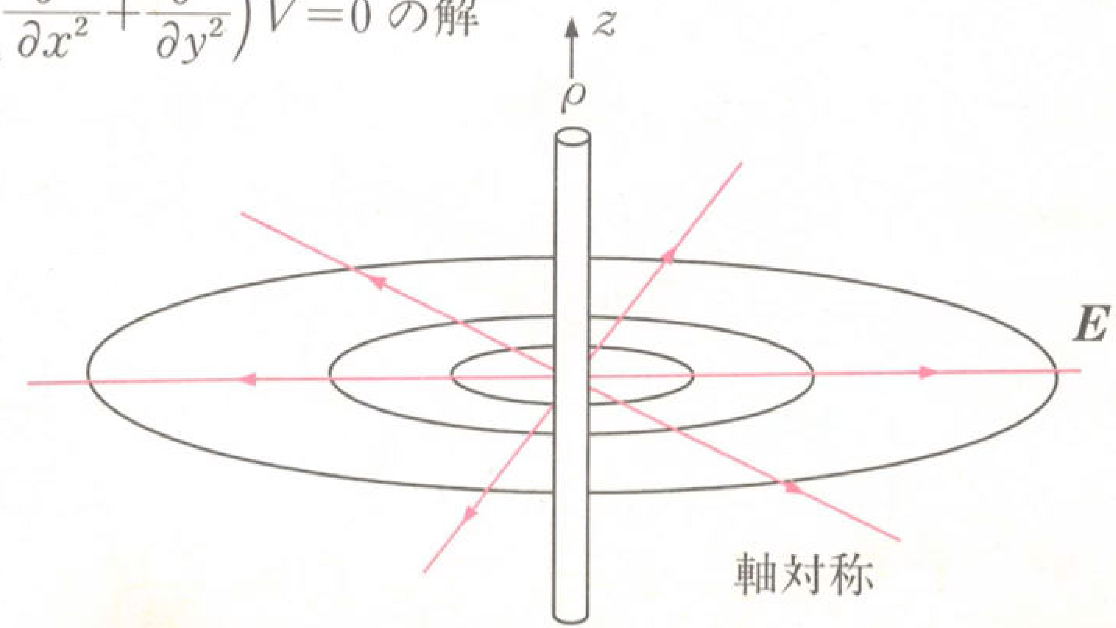
上の波動方程式は，$\boldsymbol{E}$ が時間的に変化しなければ，ラプラスの方程式と同じ形になる。違いは，V がスカラーであるのに対して，$\boldsymbol{E}$ はベクトルであるという点だけである。

図10-5●$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)V=0$ の解



(!) ところで，境界条件として，1つの点電荷だけが存在するとき，ラプラスの方程式の解は，球対称であった(クーロンの法則から導いた電位の式，$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$ そのものである)。

図10-6 $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)V=0$ の解



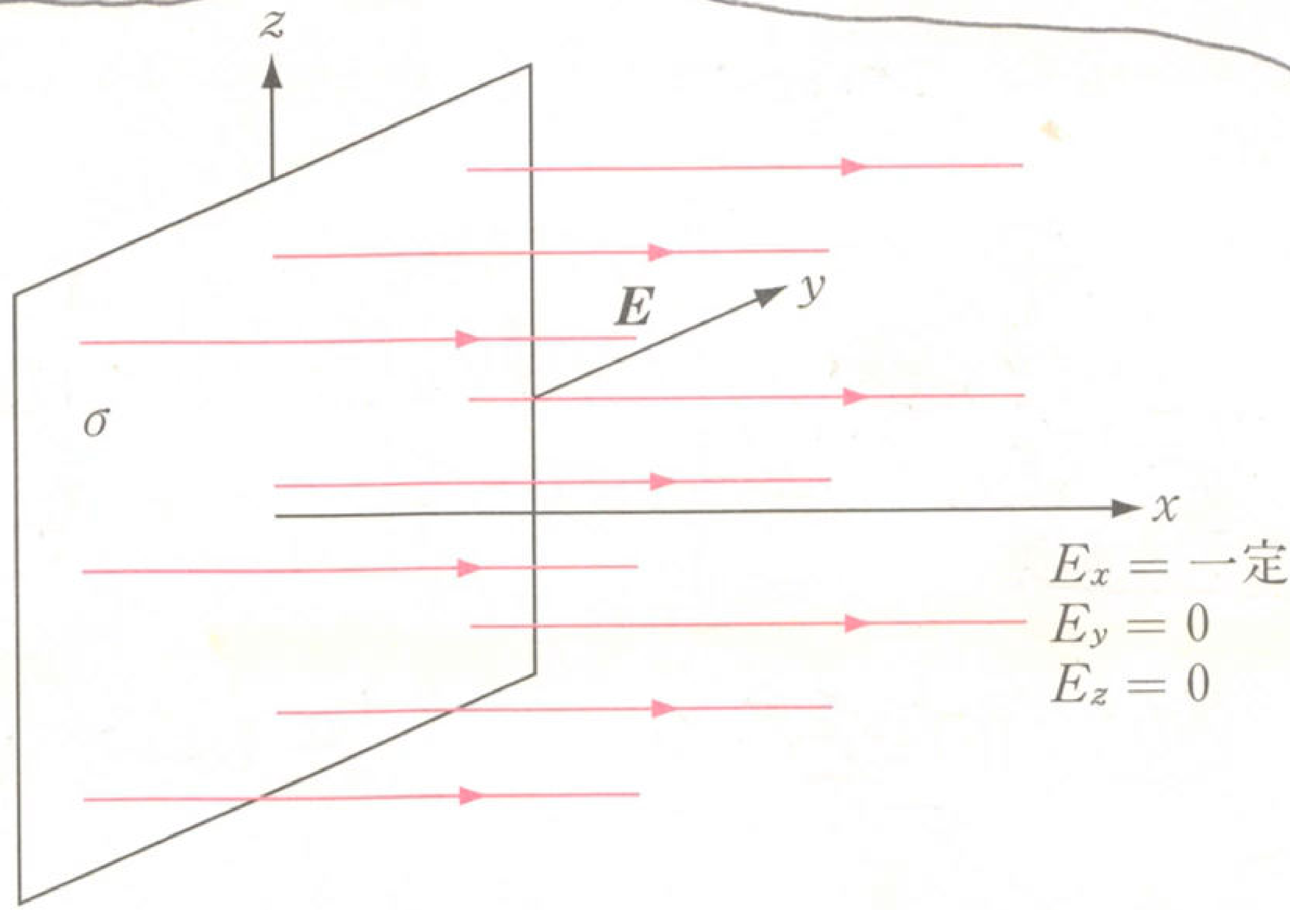
(ii) 次に，電荷が直線状に無限に分布しているときの解を考えよう。このとき，その対称性から，電気力線は直線から放射状に発散し，電位は直線電荷を中心に同心円状になるはずである。

図のように，電荷の直線状に並んだ方向を z 軸とすると，電位は z 方向には変化しない。つまり，ラプラスの方程式は 2 次元になる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)V=0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)V=0$$

図10-7● $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}=0$ の解



(iii) 次に，電荷が無限に拡がる平面に分布している場合を考えよう。この平面を y-z 面にとると，電気力線は x 方向に平行になり，電場および電位は y, z にはよらない。つまり，ラプラスの方程式は1次元となる。

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=0$$

(この方程式の解は，a,b を定数として $V=ax+b$ という簡単なものである。すなわち，電場は y,z によらず，かつ x 方向を向き，かつ大きさ一定である。)

(iii) 次に，電荷が無限に拡がる平面に分布している場合を考えよう。この平面を y-z 面にとると，電気力線は x 方向に平行になり，電場および電位は y, z にはよらない。つまり，ラプラスの方程式は1次元となる。

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

（この方程式の解は，a, b を定数として $V = ax + b$ という簡単なものである。すなわち，電場は y, z によらず，かつ x 方向を向き，かつ大きさ一定である。）

時間変化すると

なし ↑ 時間変化
あり ↓

● 1次元の波動方程式

要するに平面波

まったく同様に，波動方程式の場合も，境界条件として y-z 平面で一様に時間変化する電荷分布をとれば，その周囲に生じる電場や磁場は，y 方向，z 方向には変化しないであろう（空間的にという意味である。つまり，y-z 平面のどこをとっても，その場所での電場や磁場の大きさ，向き，時間変化は，他の（x 座標が等しい）y-z 平面上の点とまったく同じということである）。$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)E - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$ P193 Ⓐ

イメージしにくい

そこで，波動方程式は1次元となり（x 方向の変化だけ考えればよい），

$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} = 0$ なので

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial x^2} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{—— Ⓑ}$$

ただし，$\boldsymbol{E}$ はベクトルであるから，上の方程式は具体的には E_x, E_y, E_z の3つの成分に関する方程式である（$\boldsymbol{E}$ が y, z によらないということと，

無限に拡がる電子が単振動すると平面波が生じる