力学 II（金・1）担当：原田俊太

# 演習問題

問題1

長さ $l$、質量 $M$ の棒を垂直な壁面上の点 O に固定し、距離 $s$ だけ離れた点 S に質量 $m$ の物体をのせ、棒の他端 P を糸で引っ張り壁面上の点 Q に∠QPO = $\theta$ となるように水平に固定する。糸の張力を $T$、点 O における抗力 $\boldsymbol{R} = (R_x, R_y)$とし、下記の問に答えよ。

(1) $M = 0$ のとき、棒に加わる外力が 0 である条件を示せ。

(2) $M = 0$ のとき、点 O のまわりの力のモーメントが0である条件を示し、(1), (2)から、$T$、$\boldsymbol{R}$ を求めよ。

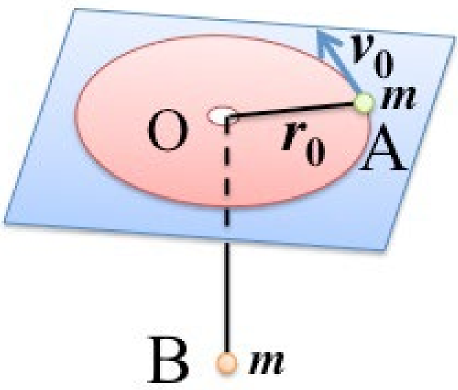
(3) $M = 0$ のとき、点 S のまわりの力のモーメントが0である条件を示し、(1), (3)から、$T$、$\boldsymbol{R}$ を求め、得られる結果が(2)と同じであることを確認せよ。

(4) $l = 1$ m, $M = 0.5$ kg, $m = 2$ kg, OQ = 0.5 m の場合を考える。$s$ を 0 から増加させたところ、s が 0.6 m に達したときに糸は切れたという。この糸に物体をつるしたとき、糸は何 kg の物体まで耐えることができるか。

問題 2

二体問題における角運動量を極座標で表現し、角運動量保存則が面積速度一定であることを示せ。

問題 3




なめらかな板の中央にあけた小さい穴に軽いひもを通し、一端に質量 $m$ [kg]の物体 A をつけ、他端に質量 $m$ [kg]を変化させることができるおもり B をつけて水平に固定した。最初の B の質量は A と同じ $m$ [kg] である。A に初速度を与えたところ、A は図のように穴を中心とした半径 $r_0$ [m]、速さ $v_0$ [m/s] の等速円運動をした。重力加速度の大きさを $g$ [m/s$_2$] として以下の問に答えよ。

（1）速さ $v_0$ を $r_0$ と $g$ を用いて表せ。

次に B の質量をゆっくり増加させることにより A の円運動の半径を小さくしていった。

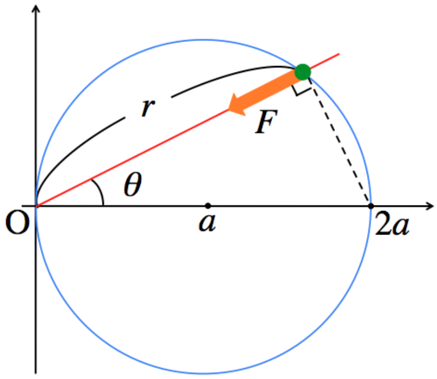
（2）円運動の半径が $r$ [m] になったときの A の速さ $v$ [m/s] を $r_0$、$v_0$、$r$ を用いて表せ。

（3）円運動の半径が $r_0$、$r$ [m] のときの A の運動エネルギーをそれぞれ $E_0$、$E$ [J] とする。$E$-$E_0$を求めよ。

（4）円運動の半径が $r_0$ 、$r$ [m] のときの角速度をそれぞれ $\omega_0$ [rad/s]、$\omega$ [rad/s] とする。$\omega_0 E - \omega E_0$ を求めよ。

（5）円運動の半径が $r_0$ から $r$ になるまでの間に、ひもの張力が A に対してした仕事 $W$ [J] を求めよ。

問題 4




質量 $m$ の質点が、右図のように半径 $a$ の円軌道を描いて運動している。このとき、質点はつねに原点 O から中心力 $F(r)$ を受けているものとする。

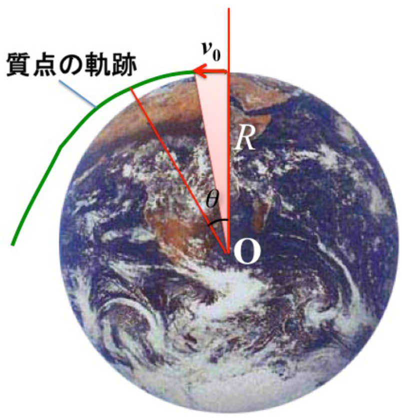
(1) $r$ を $a$ と $\theta$ を用いて表せ。

(2) 質点の角運動量の大きさを $L$ とするとき、中心力 $F(r)$ が、$r$ の 5 乗に反比例することを示せ。

問題 5 [**原点に対する質点の面積速度**] (p.111　6章演習問題6)

平面上を運動する質点の位置を極座標で表したとき、原点に対する質点の面積速度を求めよ。

問題 6 [**地球表面から投げ出された物体の軌道：軌道の方程式と速度の関係**]




地球表面から水平方向に初速度 $v_0$ で質点を投げたとき、質点の軌道は $v_0$ の値によって様々に異なった軌道をとる。大気の影響、地球の自転は無視できるものとして、どのような軌道をとるか説明せよ。なお、極座標表示の軌道は、

$$u = \frac{1}{r} = A\cos\theta + \frac{GM}{4S^2}$$

と書けるものとする。($S$: 面積速度、$G$: 万有引力定数、$M$: 地球の質量、$A$: 任意の定数)
必要な場合は、地球の半径を $R$ とする。

問題 7　[**万有引力によるエネルギー保存則：エネルギーと運動可能領域の関係**]
(p.112　6章演習問題9)

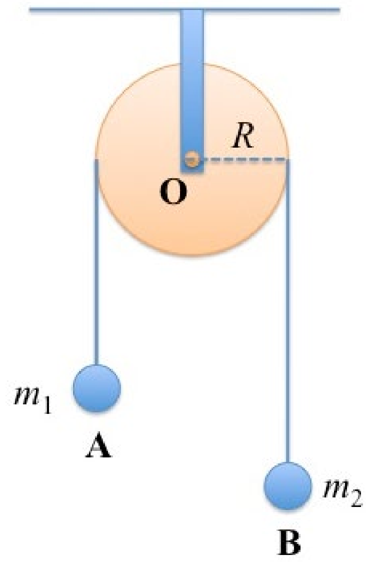
惑星の運動に対して、以下の力学的エネルギーと離心率との関係を求めよ。

$$E = -\frac{GmM}{2l}\left(1 - e^2\right)$$

問題 8

極方程式 $r = \frac{l}{1+e\cos\theta}$ $(e > 0)$ が、$0 < e < 1$ の場合には楕円軌道、e = 1 の場合には放物線、$e > 1$ の場合には双曲線となることを示せ。

問題 9［固定軸まわりの回転運動１：アトウッドの器械］




質点とみなせる質量 $m_1$ [kg]、$m_2$ [kg] ( $m_1 < m_2$ )のおもり A、B を伸び縮みしない軽いひもの両端に固定し、半径 $R$ [m]、質量 $M$ [kg]、中心軸の周りの慣性モーメント $I$ [kg m$^2$] の一様な円盤状の定滑車の両側につるした。ひもと滑車の間にすべりはない。おもり B を支えた静止状態からおもり B を静かに話した。重力加速度 $g$ [m/s$^2$] として以下の問に答えよ。

(1) A、B がひもから受ける張力の大きさをそれぞれ $T_1$ [N]、$T_2$ [N]、 A の上昇運動の加速度 (＝B の下降運動の加速度) を $a$ [m/s$^2$] として、$T_1$、 $T_2$、 $a$ を求めよ。
(2) B を放して時間 $t$ [s]経過したときの A、 B、 定滑車の運動エネルギーの総和の変化 $\Delta K$ [J] を求めよ。
(3) B を放してから時間 $t$ [s] 経過したときの A、 B の重力の位置エネルギーの総和の変化 $\Delta U$ [J] を求めよ。

問題 10［固定軸まわりの回転運動２：円運動する質点と回転する円板］
（p.135　7章演習問題3）
鉛直な固定軸のまわりに自由に回転できる半径 $r$ [m] の円板があるとし、軸の周りの慣性モーメントを $I_0$ [kg・m$^2$] とする。この円板の円周に沿って質量 $m$ [kg] の小さい虫が1周する間に、円板は逆向きにどれだけ回転するか。

問題 11 2018 年度期末試験問題（解答例なし）
幾何学的に単純な物体は計算により慣性モーメントを求めることができるが、例えば物体の密度分布が未知である場合には求めることができない。実験的に慣性モーメントを測定する原理と、具体的な方法を示せ。

問題 12 2017 年度期末試験問題（解答例なし）
任意の二次元形状をした厚さが均等である板状の剛体を考える。ただし、板厚方向では密度は均一であるものとする。
（1） この物体の重心を見出す方法を示せ。ただし、どのようなものを用いてもかまわない。
（2） （1）で示した方法により重心を見出すことができることを物理的に説明せよ。
（3） （1）で示した方法により、実際に重心を見出す実験を行う。誤差を少なくするために、どのように実験を行うかを具体的に記述せよ。