# 力学 1

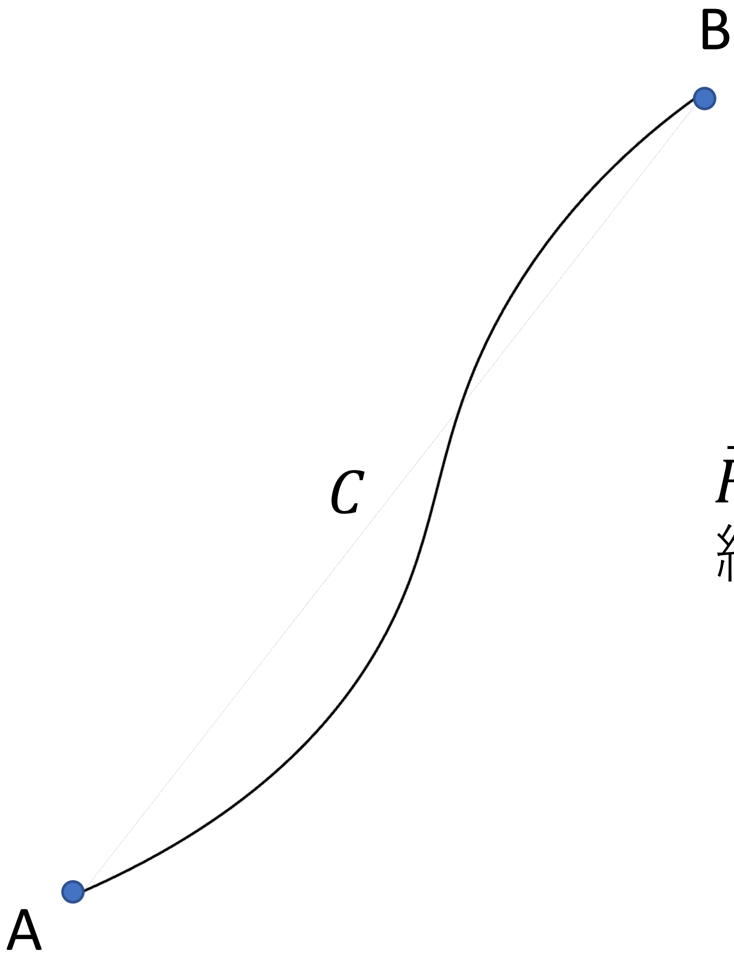
第10回目

# 力学的エネルギー保存則と応用例

- 保存則の考察
- 単振動
  - 運動方程式から運動を考察
  - 保存則から運動を考察
- 単振り子
- 力学的エネルギーの散逸

# 保存力とポテンシャル
（位置エネルギー）

## 力$\vec{F}$が**保存力**であるためには？




始点Aは固定しておくとすると、

$$\boxed{\vec{F}\ \text{が保存力}}$$

$\vec{F}$ のなす仕事$W$ が、経路 $C$ によらず、
終点B の座標のみの関数となること。

$$\underbrace{W(x,y,z)}_{\text{点Bの座標}} = \int_{C} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

点Bの座標

$C$の取り方によらない

# 保存力とポテンシャル
（位置エネルギー）

## 力$\vec{F}$が**保存力**であるためには？

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = \left(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z}\right)$$

ここで、

$$U(x, y, z) = -W(x, y, z) + 定数$$

を導入する

**ポテンシャル**
（位置エネルギー）

$W$を使うと、力$\vec{F}$は$W$の小さい方から大きい方へ向かう。
$U$を使うと、力$\vec{F}$は$U$の大きい方から小さい方へ向かう。

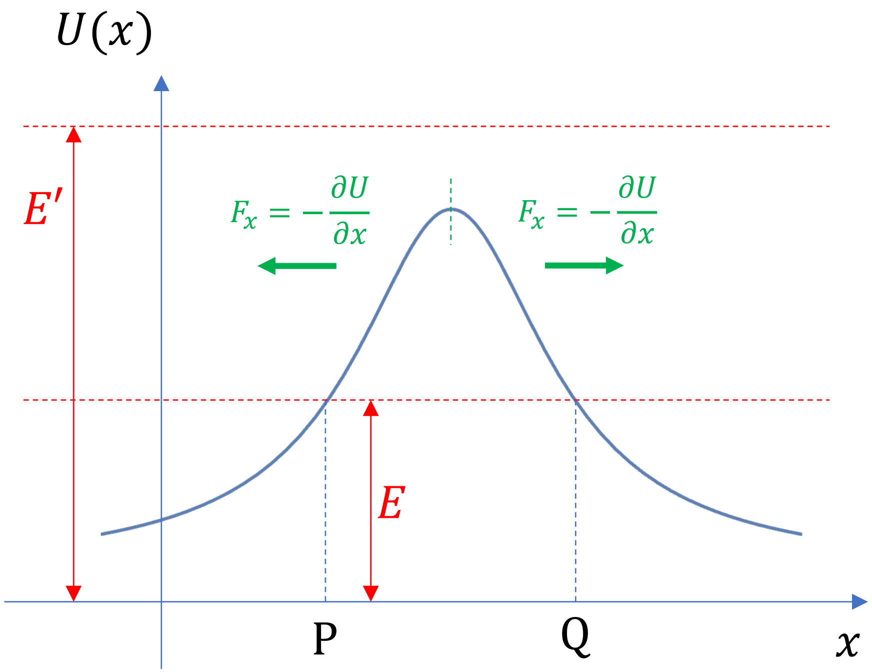
$$\vec{F} = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z}\right) = -\nabla U$$

ナブラ $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$ （3次元直交座標系において）

# 力学的エネルギー保存則

力学的エネルギー ＝ 運動エネルギー ＋位置エネルギー

$\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$ （ポテンシャル）




力学的エネルギー

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) = E$$

$$E - U(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \geq 0$$

質点の運動は $E \geq U(x)$ の範囲で行われる

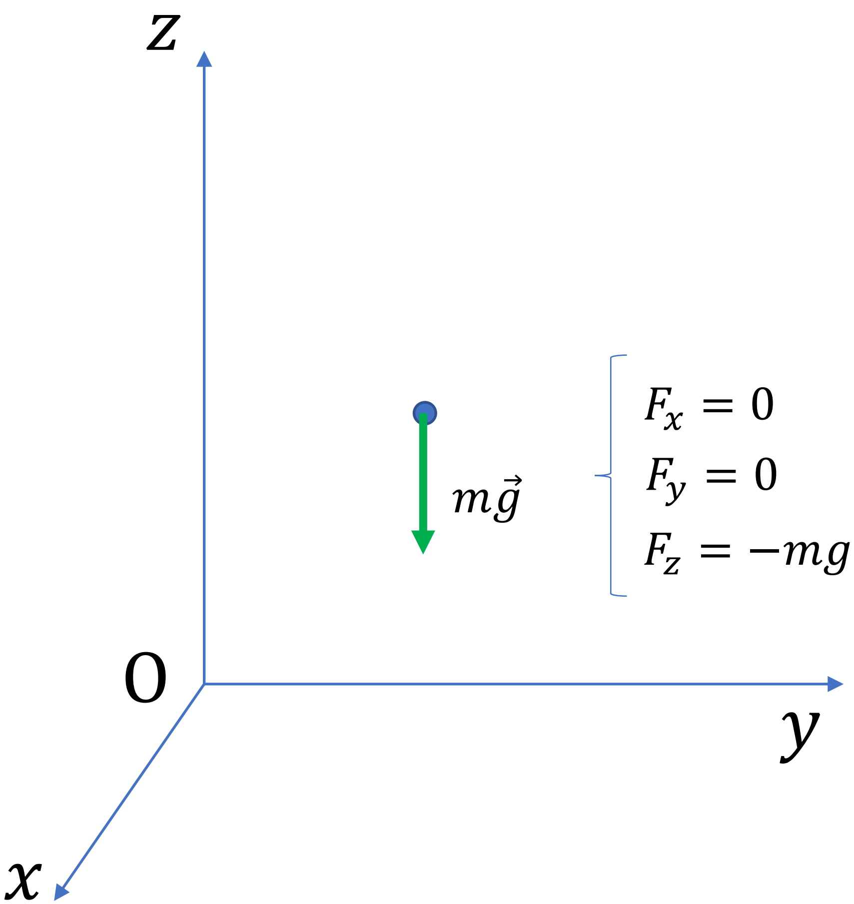
力学的エネルギーが$E$の場合、運動の範囲は、$x <$ P 、$x >$ Q

力学的エネルギーが$E'$の場合、運動の範囲は左図のすべての $x$

# 力学的エネルギー保存則

## 保存力の例（重力）

地表面近く




$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_z = -mg \end{cases}$$

## 重力のポテンシャル

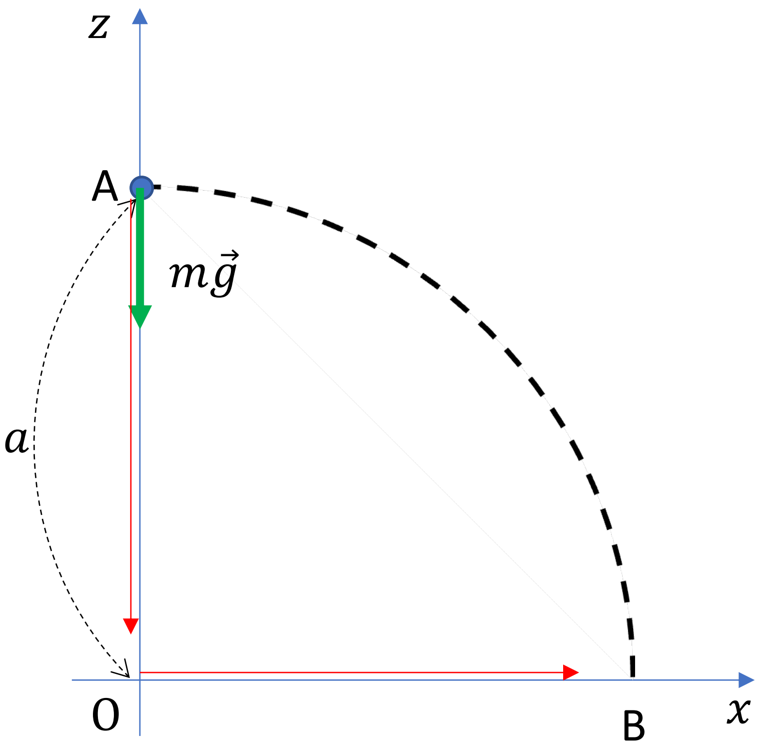
$$U = mgz + C$$

$z = 0$ で$C = 0$ とすると

$$U = mgz$$

$$\begin{cases} F_x = -\dfrac{\partial U}{\partial x} = 0 \\[2ex] F_y = -\dfrac{\partial U}{\partial y} = 0 \\[2ex] F_z = -\dfrac{\partial U}{\partial z} = -mg \end{cases}$$

# 力学的エネルギー保存則




A → B で重力のする仕事は、

$$W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = W_{\mathrm{A}\to 0\to\mathrm{B}}$$

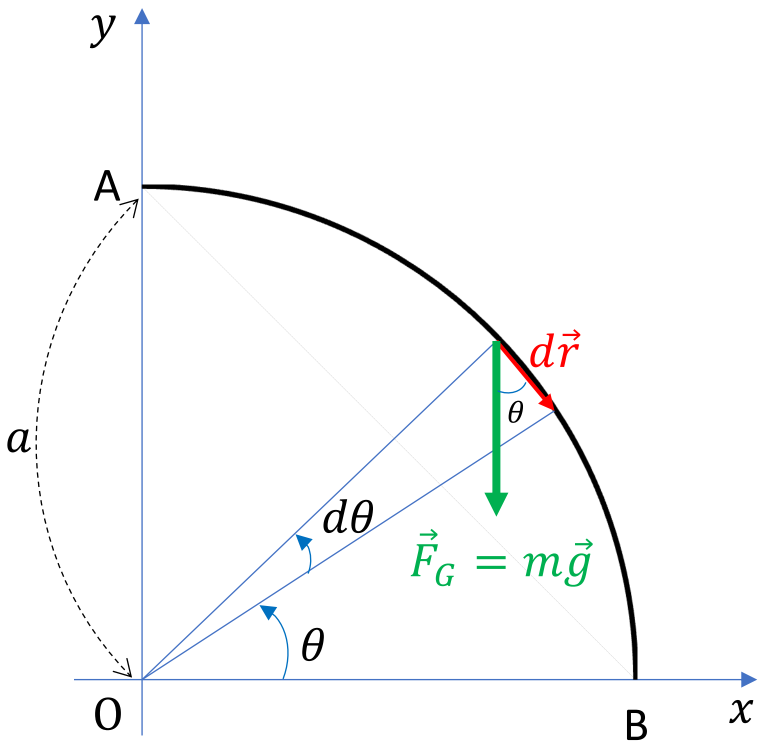
$$= W_{\mathrm{A}\to 0} + W_{0\to\mathrm{B}}$$

$$= mga + 0$$

$$= mga$$

# 仕事とエネルギー

例（教科書42ページ）




質点がAからBまで半径 $a$ の円周上を移動するときに、

重力のする仕事$W$は

$$W = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

円周上の運動なので、極座標を使うと便利

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = mg\cos\theta\,|d\vec{r}| \qquad \frac{\pi}{2} \geq \theta \geq 0$$

$$= mg\cos\theta\,(-a d\theta)$$

$d\vec{r}$ の向きは $\theta$ の負の向き

$$W = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} mga\cos\theta\, d\theta$$

A→Bで$d\theta$は負なので、
マイナス符号をつけて正にする

$$= -mga[\sin\theta]_{\pi/2}^{0}$$

$$= \underline{mga}$$

質点をA → O へ垂直に移動したときの重力のする仕事に等しい

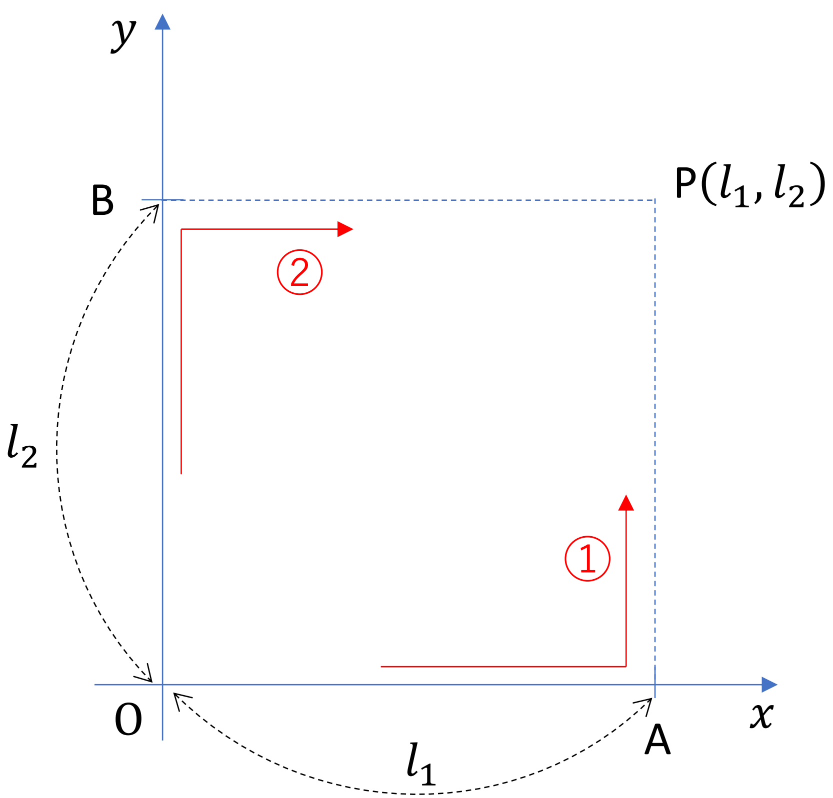
$$\int_a^0 (-mg)dy = mga$$

# 力学的エネルギー保存則

教科書p52 問２

$$\left\{\begin{aligned} F_x &= F_0 y \\ F_y &= 2F_0 x \\ F_z &= 0 \end{aligned}\right\}$$ 保存力か？

$z$軸方向には仕事をしないので、$xy$ 面内で考える。




保存力なら、力のする仕事は経路によらない。

↓

２つの異なる経路で仕事を計算してみる。

①：原点Oから点Aを通ってP点

②：原点Oから点Bを通ってP点

保存力であることを示すためにすべての経路を一つ一つ調べることは無理。教科書のように一般的な手法（数学１及び演習のベクトル解析で学習する予定）を使う必要がある。保存力でないことを示すには、ある２つの経路で力のする仕事が異なればよい。

① $$W_1 = \int_{0\ (C=①)}^{\mathrm{P}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{l_1} F_x dx\bigg|_{y=0} + \int_0^{l_2} F_y dy\bigg|_{x=l_1}$$

$$\int_{0\ (C)}^{\mathrm{P}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{0\ (C)}^{\mathrm{P}} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

$$\left\{\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z \\ d\vec{r} &= \vec{i}\,dx + \vec{j}\,dy + \vec{k}\,dz \end{aligned}\right.$$

$(\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z)$

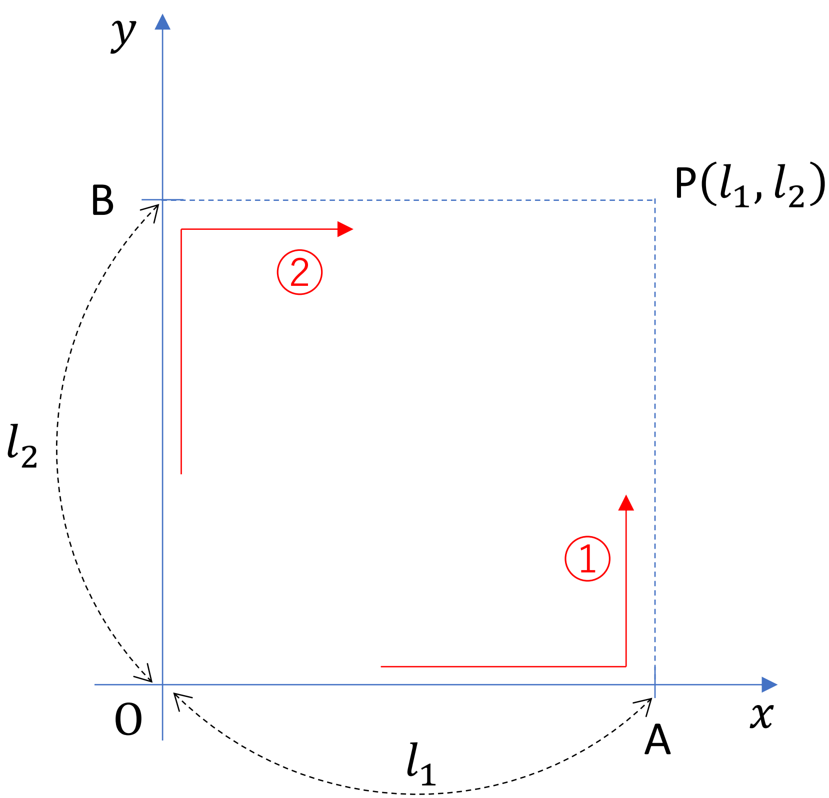
３次元直交座標の座標軸に平行な経路では

$$= \int_{0\ (C=①)}^{\mathrm{P}_x} F_x dx + \int_{0\ (C=①)}^{\mathrm{P}_y} F_y dy + \int_{0\ (C=①)}^{\mathrm{P}_z} F_z dz$$

# 力学的エネルギー保存則

教科書p52 問２

$$\left.\begin{cases} F_x = F_0 y \\ F_y = 2F_0 x \\ F_z = 0 \end{cases}\right\}$$ 保存力か？




① $$W_1 = \int_{0\,①}^{\mathrm{P}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{l_1} F_x dx \bigg|_{y=0} + \int_0^{l_2} F_y dy \bigg|_{x=l_1}$$

$$= \int_0^{l_1} F_0 y dx \bigg|_{y=0} + \int_0^{l_2} 2F_0 x dy \bigg|_{x=l_1}$$

$$= \int_0^{l_1} 0 dx + \int_0^{l_2} 2F_0 l_1 dy$$

$$= 0 + 2F_0 l_1 l_2 = 2F_0 l_1 l_2$$

② $$W_2 = \int_{0\,②}^{\mathrm{P}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{l_2} F_y dy \bigg|_{x=0} + \int_0^{l_1} F_x dx \bigg|_{y=l_2}$$

$$= \int_0^{l_2} 2F_0 x dy \bigg|_{x=0} + \int_0^{l_1} F_0 y dx \bigg|_{y=l_2}$$

$$= 0 + \int_0^{l_1} F_0 l_2 dx$$

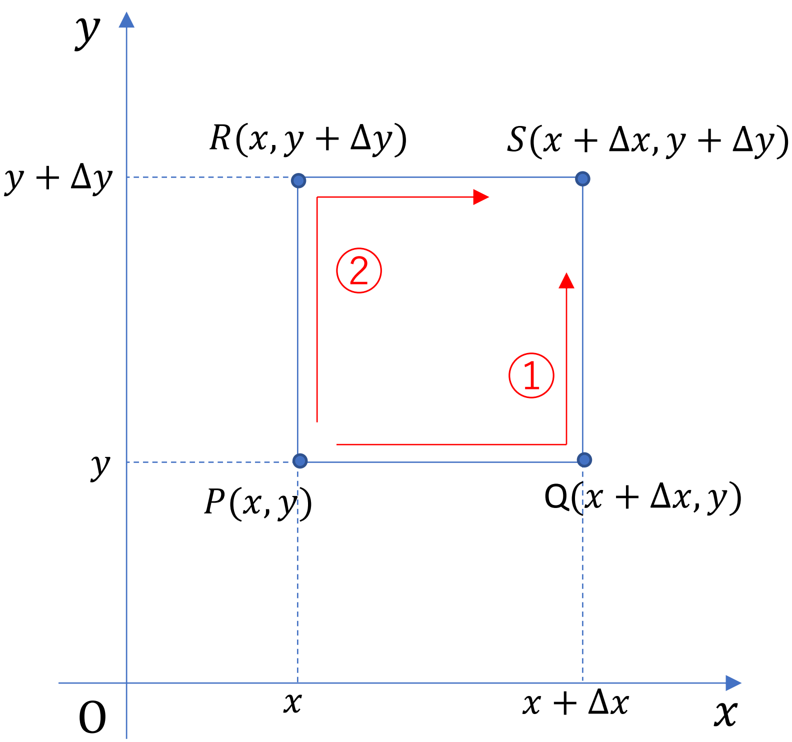
$$= F_0\, l_1 l_2$$

$W_1 \neq W_2$　保存力ではない

# 力学的エネルギー保存則

（教科書の方法について）

微小な変位について一般的には、




これ以降の項は、線積分により有限の仕事を考えるときに、$\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ で寄与しないので無視できる

① の経路で力のする仕事 $\Delta W_1$

$$\Delta W_1 = F_x(x,y)\Delta x + F_y(x+\Delta x, y)\Delta y$$

テイラー展開

$$F_y(x+\Delta x, y) = F_y(x,y) + \frac{\partial F_y(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_y(x,y)}{\partial x^2}\Delta x^2 + \cdots$$

$$\cong F_x(x,y)\Delta x + F_y(x,y)\Delta y + \frac{\partial F_y(x,y)}{\partial x}\Delta x \Delta y$$

② の経路で力のする仕事 $\Delta W_2$

$$\Delta W_2 = F_y(x,y)\Delta y + F_x(x, y+\Delta y)\Delta x$$

テイラー展開

$$F_x(x, y+\Delta y) = F_x(x,y) + \frac{\partial F_x(x,y)}{\partial y}\Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_x(x,y)}{\partial y^2}\Delta y^2 + \cdots$$

$$\cong F_y(x,y)\Delta y + F_x(x,y)\Delta x + \frac{\partial F_x(x,y)}{\partial y}\Delta y \Delta x$$

教科書p52 問 2

$$\begin{cases} F_x = F_0 y \\ F_y = 2F_0 x \\ F_z = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F_y(x,y)}{\partial x} = 2F_0 \\ \dfrac{\partial F_x(x,y)}{\partial y} = F_0 \end{cases}$$

$\dfrac{\partial F_y(x,y)}{\partial x} \neq \dfrac{\partial F_x(x,y)}{\partial y}$ なので、保存力ではない

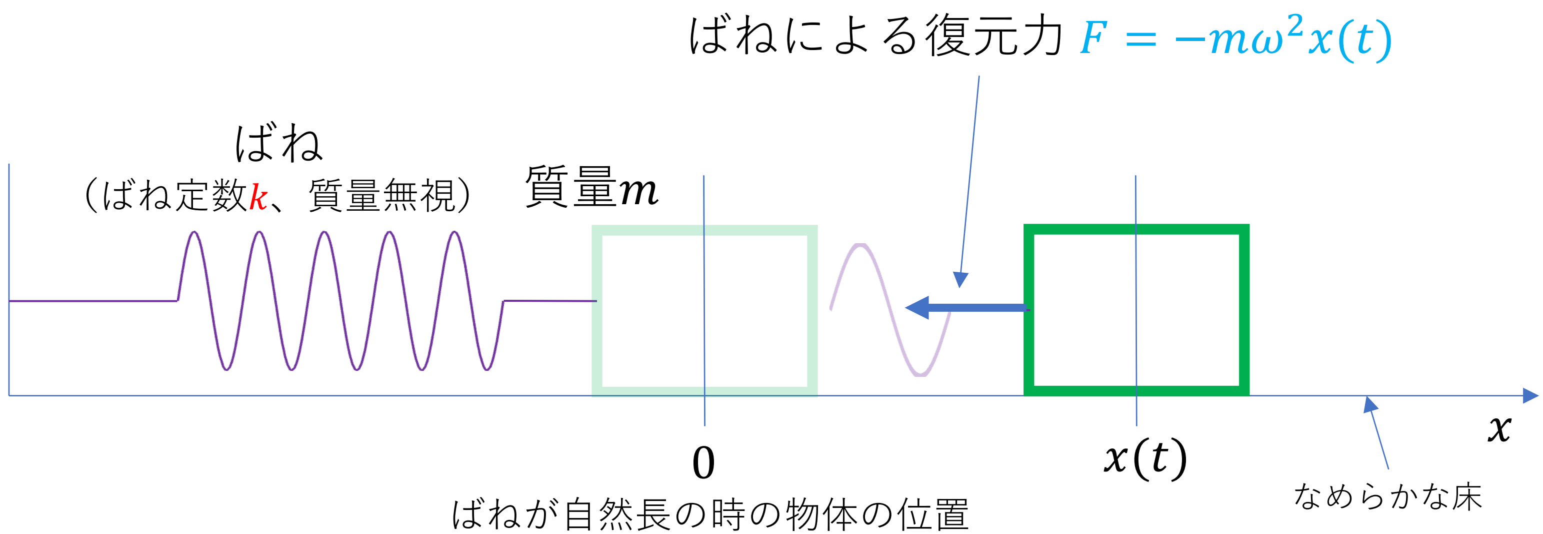
もし、$F_x = F_0 y$、$F_y = F_0 x$ なら保存力

$\Delta W_1 = \Delta W_2$ であるためには、

$$\frac{\partial F_y(x,y)}{\partial x}\Delta x \Delta y = \frac{\partial F_x(x,y)}{\partial y}\Delta y \Delta x$$

つまり $$\frac{\partial F_y(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial F_x(x,y)}{\partial y}$$

# 単振動の力学的エネルギー保存



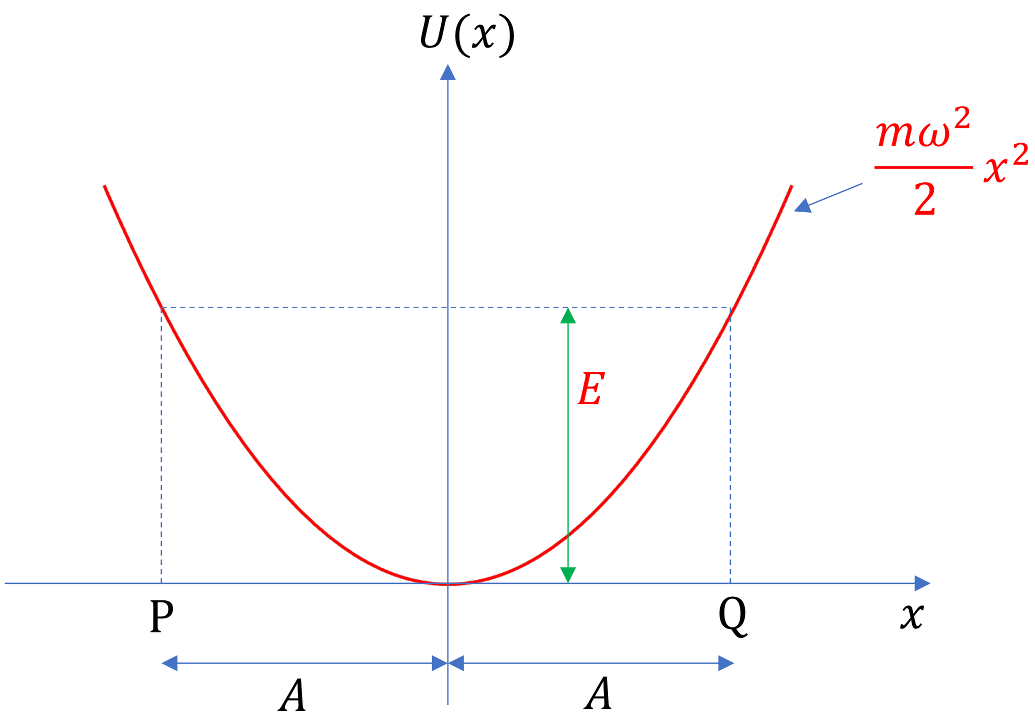

$F = -m\omega^2 x(t)$ ⟶ $F = -\dfrac{\partial U}{\partial x}$ となる$U$は？

$$\int m\omega^2 x dx = \frac{m\omega^2}{2}x^2 + C$$

$x = 0$ で$U = 0$ とすると、 $U = \dfrac{m\omega^2}{2}x^2$

力学的エネルギー保存は、 $\dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \dfrac{1}{2}m\omega^2 x^2 = E$ （１次元調和振動子）

# 単振動の力学的エネルギー保存




P、Q の座標 $\begin{cases} x_{\mathrm{P}} = -A \\ x_{\mathrm{Q}} = A \end{cases}$

$$-A \leq x \leq A$$

点P、Q では、$E = U(x_{\mathrm{Q}}) = U(x_{\mathrm{P}}) = \frac{m\omega^2}{2}A^2$

振動のエネルギー

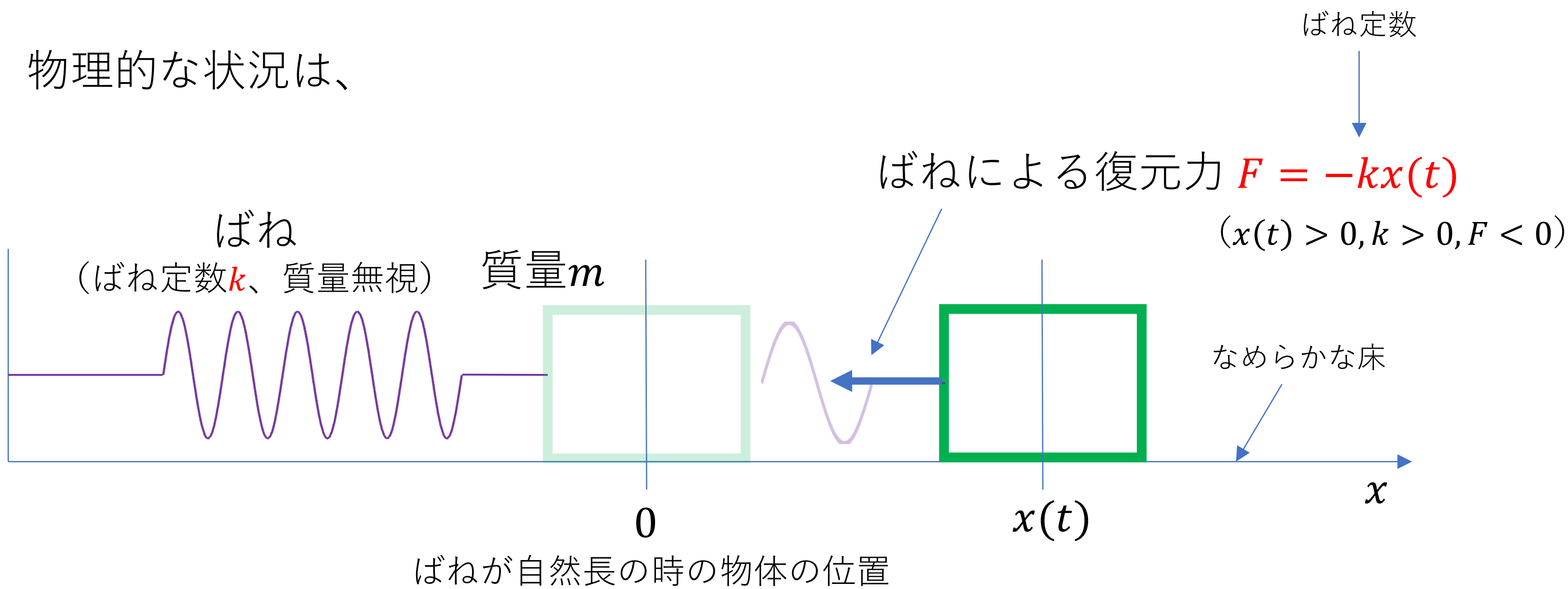
# 微分方程式に関する少し一般的な話題

例：単振動(第2回目)

$$x(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$$

これを運動方程式から導き出す

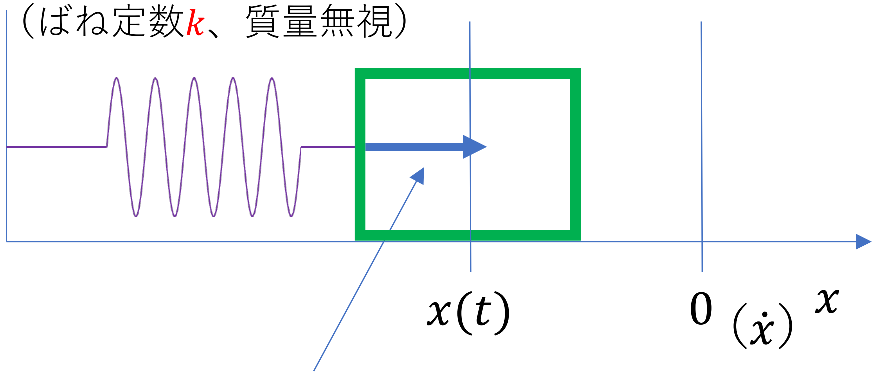
物理的な状況は、



# 微分方程式に関する少し一般的な話題

## 例：単振動

ばね
（ばね定数$k$、質量無視）




ばねによる復元力 $F = -kx(t)$
（$x(t) < 0, k > 0, F > 0$）

運動方程式

$$F = m\ddot{x} = -kx \qquad ⑥$$

移項して整理

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad ⑦$$

$x$ の項があるので、$v = \dot{x}$ だけの式にできない。
（微分の階数を下げることができない）

$x$とその微分以外の項がゼロ

⑦の一般解を求めればよい
（特殊解を求める必要は無い）

$\ddot{x}$と$x$の項（2階微分と自分自身）から構成されているので、解は $\sin(\omega t)$ あるいは $\cos(\omega t)$ で構成されると予想できるが、この後のスライドでは常套手段を使って解く

$x(t) = \mathrm{A}\sin(\omega t + \alpha)$と置いて、⑦を満たすように$\omega$を求める。
（Aと$\alpha$ が2つの任意定数になっている）

$$x(t) = \mathrm{A}\sin(\omega t + \alpha) = \underbrace{\mathrm{A}\cos\alpha}_{\mathrm{C}_1}\,\underbrace{\sin\omega t}_{\psi_1(t)} + \underbrace{\mathrm{A}\sin\alpha}_{\mathrm{C}_2}\,\underbrace{\cos\omega t}_{\psi_2(t)}$$

$x_1(t) = \mathrm{C}_1\psi_1(t) + \mathrm{C}_2\psi_2(t)$の形になっている。

（sin と cos は1次独立な関数）

# 微分方程式に関する少し一般的な話題

例：単振動

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad ⑦$$

$x(t) = e^{\alpha t}$ と置いて、⑦に代入してみる

$$\alpha^2 e^{\alpha t} + \frac{k}{m}e^{\alpha t} = e^{\alpha t}\left(\alpha^2 + \frac{k}{m}\right) = 0$$

（⑦の特性方程式）

$$\alpha^2 + \frac{k}{m} = 0$$

$$\alpha^2 = -\frac{k}{m}$$

$$\alpha = \pm\, i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

# 微分方程式に関する少し一般的な話題

例：単振動

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad ⑦$$

複素数の定数

⑦の一般解は、形式的には

$$x(t) = C_1 e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}\,t} + C_2 e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}\,t} \qquad ⑧$$

これらはどう考える？

# 微分方程式に関する少し一般的な話題

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

（$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$ ）

オイラー（Euler）の公式 （非常に重要な関係式）

---

テイラー（Taylor）展開（マクローリン（Maclaurin）展開）

$$f(x+h) = f(x) + \frac{df}{dx}h + \frac{1}{2!}\frac{d^2f}{dx^2}h^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3f}{dx^3}h^3 + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{d^nf}{dx^n}h^n + \cdots$$

$x = 0, h = \theta$と考えて、

$$e^{\theta} = 1 + \theta + \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{3!}\theta^3 + \cdots$$

$\theta \to i\theta$とすると

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{1}{2!}\theta^2 - i\frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{4!}\theta^4 + i\frac{1}{5!}\theta^5 - \cdots$$

$$= (1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \frac{1}{6!}\theta^6 + \cdots)$$

$$+i(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \frac{1}{7!}\theta^7 + \cdots)$$

$$= \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \frac{1}{7!}\theta^7 + \cdots$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \frac{1}{6!}\theta^6 + \cdots$$

# 微分方程式に関する少し一般的な話題

$$x(t) = (C_1 + C_2)\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + i(C_1 - C_2)\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t \qquad ⑨$$

$$= \underline{A\cos\theta}\ \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\ \underline{-A\sin\theta}\ \sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t \qquad ⑩$$

$$= A_1\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + A_2\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t \qquad ⑪$$

$A_1$、$A_2$は2つの任意定数

$x_1(t) = C_1\psi_1(t) + C_2\psi_2(t)$

の形

⑩より、 $$= A\cos\left(\theta + \sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$$

A と$\theta$が2つの任意定数

$$= A\sin\left(\theta_1 + \sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$$

$$\theta_1 = \theta + \frac{\pi}{2}$$

# 微分方程式に関する少し一般的な話題

$\sqrt{\dfrac{k}{m}} = \omega$　とおき、　$\theta_1 = \alpha$　と書き直すと、

角振動数

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad ⑦$$

単振動の運動方程式⑦の一般解として、

$$x(t) = \mathrm{A}\sin(\omega t + \alpha)$$

が得られる。

# 力学的エネルギーの保存から運動を考察する

質点に働く力が保存力の場合、

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} = -\nabla U$$

1次元の運動について考えてみる

$$F = m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{dU}{dx}$$

$$m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx}$$

両辺に$\dot{x}$をかける

$$m\dot{x}\ddot{x} = -\dot{x}\frac{dU}{dx} = -\frac{dx}{dt}\frac{dU}{dx} = -\frac{dU}{dt}$$

$\dot{x}\ddot{x} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{x}^2)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) = E$$

$E$は定数

力が保存力の場合、
力学的エネルギーが保存する。

運動方程式（微分方程式）

ある瞬間（時刻 $t$ ）の力と加速度の関係

積分

保存力、ポテンシャル（位置エネルギー）

運動全体の大局的な様子

・仕事と力学的エネルギー

・力学的エネルギーの保存、運動量の保存

（ニュートンの第3法則）

（運動している間で一定、運動の始めと終わりで変化しない）

今度は、この関係から出発してみる。

$x(t)$ をエネルギー保存の関係から導出

（ポテンシャル$U(x)$がある場合の運動）

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) = E$$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = E - U(x)$$

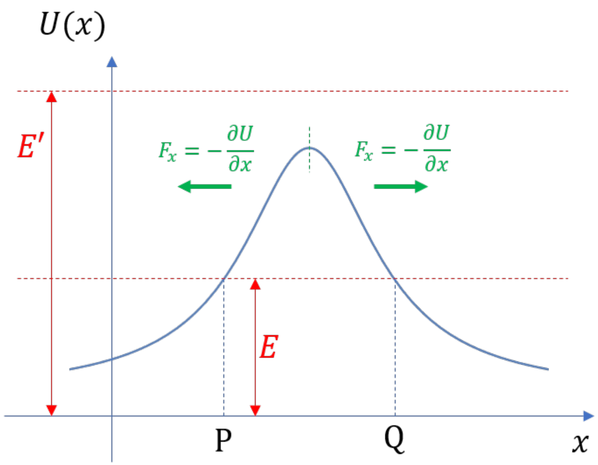
$$\dot{x}^2 = \frac{2}{m}(E - U(x))$$

運動は $E - U(x) \geq 0$ の範囲で行われる

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}$$

左辺に$x$、右辺に$t$ を集めて整理（変数分離）

第10回2枚目スライド



$$\pm\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{1}{\sqrt{(E-U(x))}}dx = dt$$

積分

積分定数

$$\pm\sqrt{\frac{m}{2}}\underline{\int\frac{1}{\sqrt{(E-U(x))}}dx} = \int dt = t + C$$

この積分が解ければ、質点の位置と時間の関係がわかる。

（$E$と$C$ は初期条件から決定）

例題：教科書p63 第3章演習問題

6. 力学的エネルギー保存則を利用して単振動の解を導け。

$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) = E$ より、

$$\pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{1}{\sqrt{(E-U(x))}}dx = t + C$$

単振動の場合、$U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ これを上式に代入。

（自然長がポテンシャルの原点）

$$\pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{1}{\sqrt{\left(E-\frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)}}dx = t + C$$

$$\downarrow$$

$$\pm\sqrt{\frac{m}{2E}}\int\frac{1}{\sqrt{1-\frac{m\omega^2x^2}{2E}}}dx = t + C$$

ここで、$\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}}\,x = y$ とおくと、$dx = \sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}}\,dy$

$$\pm\sqrt{\frac{m}{2E}}\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\int\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy = t + C$$

$$\pm\frac{1}{\omega}\int\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy = t + C$$

$\omega C$は何かある定数なので、
改めて$C$と置き換える。

$$\pm\int\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy = \omega t + \omega C = \omega t + C$$

教科書P190公式 $\dfrac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ①

$$\pm\sin^{-1}y = \omega t + C \quad ②$$

左辺の積分定数も含める

$$\sin^{-1}y = \pm(\omega t + C)$$

$$y = \sin\big(\pm(\omega t + C)\big)$$

$$\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}}\,x = \sin\left(\pm(\omega t + C)\right)$$

$$\downarrow$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\sin(\omega t + C)$$

（初期条件により、$\pm$、$E$、$C$が決まる。）

---

（教科書の解答）

①のところで、$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ を使うと、$\pm$がとれる。

②は、$\mp\cos^{-1}y = \omega t + C_1$

$$\downarrow$$

$$\cos^{-1}y = \mp(\omega t + C_1)$$

$$\downarrow$$

$$y = \cos\left(\pm(\omega t + C_1)\right)$$

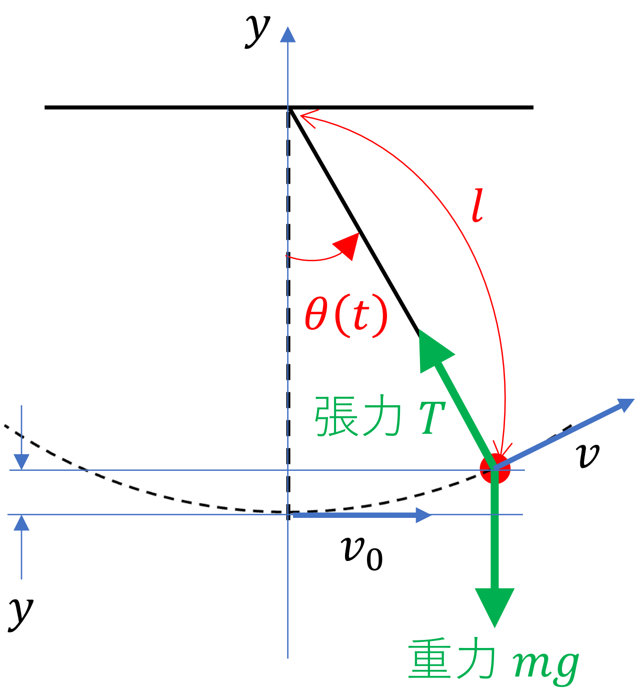
$$\downarrow$$

$$y = \cos(\omega t + C_1)$$

$$\downarrow$$

$$x = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\cos(\omega t + C_1)$$

# 単振り子の力学的エネルギー保存




$\theta = 0$ で $U = 0$ とする
（最下点がポテンシャルの基準点）

張力 $T$ は運動方向と垂直

↓

張力 $T$ は仕事をしない

↓

力学的エネルギーの増減に関係しない

重力のポテンシャル

$$U = mgy$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = E$$

↓ $\theta = 0$ で $U = 0$ より、$E = \frac{1}{2}m{v_0}^2$

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = \frac{1}{2}m{v_0}^2$$

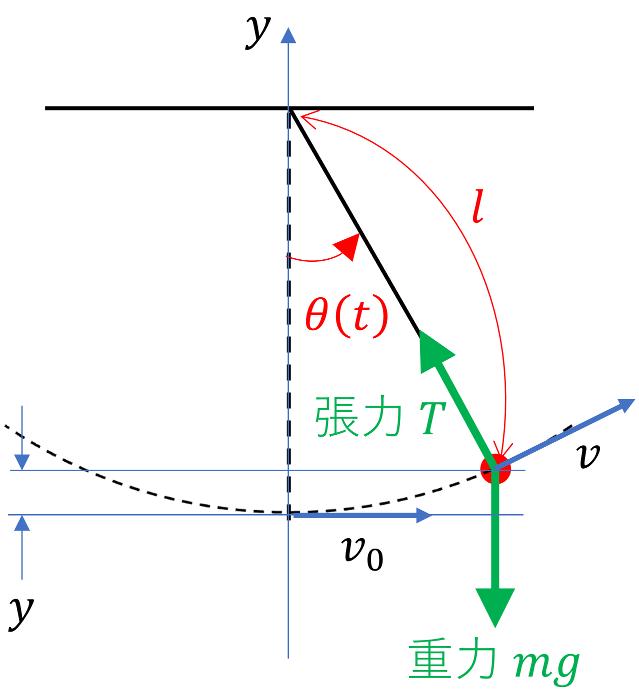
↓ $y = l - l\cos\theta = l(1 - \cos\theta)$

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgl(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2}m{v_0}^2$$

↓ 整理

$$v^2 = {v_0}^2 - 2gl(1 - \cos\theta)$$

# 単振り子の力学的エネルギー保存




$$v^2 = {v_0}^2 - 2gl(1-\cos\theta)$$

法線方向の運動方程式（第4回目26枚目）

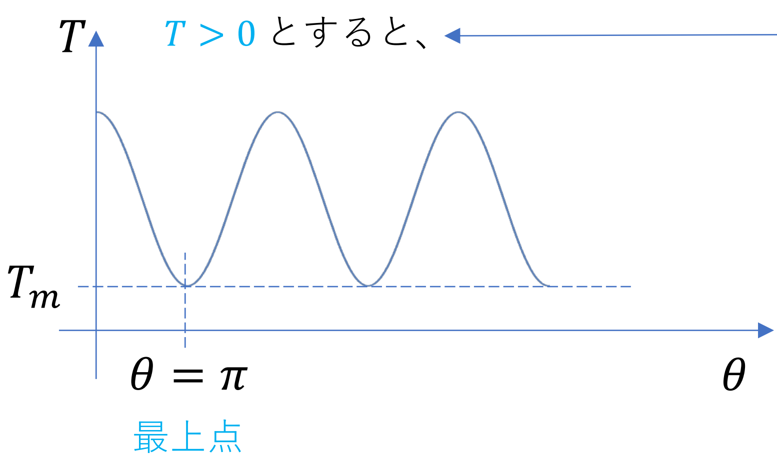
$$m\frac{v^2}{l} = T - mg\cos\theta$$ に上式を代入

$$\frac{m}{l}\left({v_0}^2 - 2gl(1-\cos\theta)\right) = T - mg\cos\theta$$

$$T = m\frac{{v_0}^2}{l} - 2mg + 3mg\cos\theta$$

（$T=0$ で糸はたるむ）

$T>0$ とすると、




$\theta = \pi$ では

$$T = T_m = m\frac{{v_0}^2}{l} - 5mg$$

$T_m > 0$ であるためには、

$$m\frac{{v_0}^2}{l} - 5mg > 0 \longrightarrow {v_0}^2 > 5lg$$

（糸が最上点でもたるまない条件）

# 力学的エネルギーの散逸

保存力　$\vec{F} = -\nabla U$

保存力でない力　$\vec{F}'$

どちらも働いている場合、運動方程式は

$$m\ddot{\vec{r}} = -\nabla U + \vec{F}'$$

$\dot{\vec{r}}$ を両辺にかける

$$m\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = -\dot{\vec{r}} \cdot \nabla U + \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}'$$

$\dot{\vec{r}} \cdot \nabla U = \frac{dU}{dt}$ より

$$m\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}^2\right) = -\frac{dU}{dt} + \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}'$$

# 力学的エネルギーの散逸

$$m\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}^{2}\right)=-\frac{dU}{dt}+\dot{\vec{r}}\cdot\vec{F}'$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{2}+U\right)=\dot{\vec{r}}\cdot\vec{F}'$$

力学的エネルギー $E$

$$\frac{dE}{dt}=\dot{\vec{r}}\cdot\vec{F}'$$

摩擦や抵抗力があると $\dot{\vec{r}}\cdot\vec{F}'\neq 0$

力学的エネルギー $E$ が保存しない

# 力学的エネルギーの散逸

$$\frac{dE}{dt} = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}'$$

時刻 $t_A \to t_B$ で積分

$$\int_{t_A}^{t_B} \frac{dE}{dt} dt = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}' \cdot \dot{\vec{r}} dt = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}' \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt$$

$$E(t_B) - E(t_A) = \int_A^B \vec{F}' \cdot d\vec{r}$$

$\vec{F}'$が$A \to B$ で行った仕事（$W'$ とすると）

$$E(t_B) - E(t_A) = W'$$

$\vec{F}'$が摩擦力や抵抗力だと、力の向きと質点の変位（$d\vec{r}$）は逆向き → $W' < 0$

力学的エネルギーは減少
（力学的エネルギーの散逸）

これらのする仕事は変位（距離）による（始点と終点だけで決まらない）ので保存力ではない