第十五回課題解説.

• **課題 1.** e^x, $\cos x$, $\sin x$ の $x=0$ を中心とするテイラー級数表示が任意の x において成り立っていること，すなわち，任意の x に対し $n\to\infty$ のとき残項 $\to 0$ であることを，残項の積分表示を使って証明してみよ．

• **課題 2.** $f(x)=\frac{1}{1-x}$ とおく．

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\ldots \quad (|x|<1) \tag{1}$$

は高校で習うのでよく知っている．では $f(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x+1}{2}}$ と書くと，公式 (1) の x を $\frac{x+1}{2}$ に変えたものになる．すると

$$\frac{1}{1-x}=\frac{1}{2}\left\{1+\frac{x+1}{2}+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x+1}{2}\right)^n+\ldots\right\}$$

となるが，この無限級数はどこで収束して上の式は正しい等式になるのだろうか？この無限級数が収束するような最大の開区間を図示せよ．

課題 1 解説. （準備 1）残項が積分表示されたテイラー公式は

$$f(x)=f(a)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+R_n(x)\ ,$$
$$R_n(x)=\int_a^x\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}dt \quad (\text{積分表示された残項})$$

である．

（準備 2）任意の正の実数 x に対し

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$$

である．理由：$2x$ を超えない最大の整数を n_0 とし，定数 M を $M:=\prod_{k=1}^{n_0}\frac{x}{k}=\frac{x^{n_0}}{n_0!}$ で定める．すると

$$\frac{x^n}{n!}=\prod_{k=1}^{n_0}\frac{x}{k}\prod_{k=n_0+1}^{n}\frac{x}{k}\le M\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}\to 0 \quad (n\to\infty)$$

である．

(i) e^x のテイラー展開について．

$$e^x=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}+R_n(x)$$

において，残項は $\forall x\in\mathbb{R}$ に対して

$$|R_n(x)|=\left|\int_0^x\frac{e^t}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}dt\right|\le e^{|x|}\frac{|x|^n}{n!}\to 0 \quad (n\to\infty)$$

となる，よって e^x のテイラー展開は任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して収束し，その極限は e^x に等しい．

(ii) $\cos x$ のテイラー展開について．

$$\cos x=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}+R_{2n-1}(x)$$

において，残項は $\forall x \in \mathbb{R}$ に対して

$$|R_{2n-1}(x)| = \left| \int_0^x \frac{(-1)^{n-1}\cos t}{(2n-2)!}(x-t)^{2n-2}dt \right| \leq \frac{|x|^{2n-1}}{(2n-1)!} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

となる，よって $\cos x$ のテイラー展開は任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して収束し，その極限は $\cos x$ に等しい．

(ii) $\sin x$ のテイラー展開について．

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + R_{2n}(x)$$

において，残項は $\forall x \in \mathbb{R}$ に対して

$$|R_{2n}(x)| = \left| \int_0^x \frac{(-1)^{n-1}\sin t}{(2n-1)!}(x-t)^{2n-1}dt \right| \leq \frac{|x|^{2n}}{(2n)!} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

となる，よって $\sin x$ のテイラー展開は任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して収束し，その極限は $\sin x$ に等しい．

課題 2 解説.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \dots$$

は $|x| < 1$ すなわち「0 を中心とする半径 1 の区間」$-1 < x < 1$ である．したがって，

$$(*) \qquad \frac{1}{1-x} = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{x+1}{2} + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x+1}{2}\right)^n + \dots\right\}$$

は $\left|\dfrac{x+1}{2}\right| < 1$ の時に収束する．これは $-1 < \dfrac{x+1}{2} < 1$ すなわち $-3 < x < 1$ を意味する．よって，無限級数 $(*)$ が収束するような x の範囲は「-1 を中心とする半径 2 の区間」

$$-3 < x < 1$$

である．

テイラー級数が元の関数に収束する範囲を残項の積分表示から知る．-1 を中心とする冪級数展開（テイラー展開）

$$\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x+1}{2}} = \frac{1}{2}\left\{1 + \left(\frac{x+1}{2}\right) + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x+1}{2}\right)^n + \dots\right\}$$

が成立する範囲が $-3 < x < 1$ であることは，-1 を中心とする $\frac{1}{1-x}$ のテイラー公式の残項 $R_n(x) \to 0$ がどこで成り立つかを明らかにすることによっても示すことができるはずである．この点を確認する．a を中心とするテイラー公式の残項 $R_n(x)$ は

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}dt$$

であった．ここで $f^{(n)}(t)$ は $f(t)$ の n 階微分を表す．今の場合 $a = -1$, $f(t) = \frac{1}{1-t}$ である．よって $f(t)$ の n 階微分は $f^{(n)}(t) = \frac{n!}{(1-t)^{n+1}}$ である．したがって残項 $R_n(x)$ は

$$\begin{aligned}
R_n(x) &= \int_{-1}^x \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}dt \\
&= \int_{-1}^x \frac{\frac{n!}{(1-t)^{n+1}}}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}dt \\
&= n\int_{-1}^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^{n-1}\frac{dt}{1-t} \\
&= n\int_{\frac{x+1}{2}}^0 u^{n-1}\frac{1-u}{1-x}\left\{\frac{-(1-x)}{(1-u)^2}\right\}du \\
&\qquad \left[\because \ u = \frac{x-t}{1-t} \text{ とおくと } t = 1 + \frac{-(1-x)}{1-t},\ 1-t = \frac{1-x}{1-u},\ dt = \frac{-(1-x)}{(1-t)^2} \text{ だから}\right] \\
&= n\int_0^{\frac{x+1}{2}} u^{n-1}\frac{du}{1-u}
\end{aligned}$$

と表される．重要な極限

$$|x| < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} nx^n = 0$$

を思い出すと，$n \to \infty$ とするときに上の $R_n(x)$ が 0 に収束するための必要十分条件は

$$\left|\frac{x+1}{2}\right| < 1$$

すなわち

$$-3 < x < 1$$

である．こうして，$R_n(x) \to 0$ が成り立つ x の範囲からも冪級数

$$\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x+1}{2}} = \frac{1}{2}\left\{1 + \left(\frac{x+1}{2}\right) + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x+1}{2}\right)^n + \dots\right\}$$

が収束する範囲を特定することができる．