秋第四回課題解答例

15.1. (1) $z = x^3 + y^3 - 3xy$. $z_x = 3x^2 - 3y$. $z_y = 3y^2 - 3x$.

(2) $z = \sin(x + y^2)$. $z_x = \cos(x + y^2)$. $z_y = 2y\cos(x + y^2)$.

(3) $z = \frac{x}{x^2+y^2}$. $z_x = \frac{1}{x^2+y^2} + x \cdot \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$. 注意：このような計算をするとき，商の微分法 $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$ より積の微分法 $(f/g)' = f'(1/g) + f(-g'/g^2)$ がおすすめ．同じことじゃないかと思うかもしれないが計算量にかなりの差が現れるケースがある（特に分母分子に同じ因数が現れる場合）． $z_y = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

(4) $z = \log(x^2 + y^2)$. $z_x = \frac{2x}{x^2+y^2}$. $z_y = \frac{2y}{x^2+y^2}$.

(5) $z = \arctan\frac{y}{x}$. $z_x = \frac{\frac{-y}{x^2}}{1+(\frac{y}{x})^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}$. $z_y = \frac{\frac{1}{x^2}}{1+(\frac{y}{x})^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$,

(6) $z = \arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. $z_x = \frac{\frac{-2xy}{2(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{1-(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})^2}} = -\frac{xy}{|x|(x^2+y^2)} = -\mathrm{sgn}(x)\cdot\frac{y}{x^2+y^2}$. $z_y = \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{-2y^2}{2(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{1-(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})^2}} = \frac{x^2}{|x|(x^2+y^2)} = \frac{|x|}{x^2+y^2}(= \mathrm{sgn}(x)\cdot\frac{x}{x^2+y^2})$. 注意：計算途中で積の微分法を使った．もう一つの注意：計算途中で $\sqrt{x^2}$ が出てくる．これは x^2 の正の平方根を表す．したがって $\sqrt{x^2} = |x| = \mathrm{sgn}(x)x$ である．ここで $|x|$ は x の絶対値，$\mathrm{sgn}(x)$ は x の符号を表す記号である．

15.2. $z = \log(x^2 + y^2)$ に対し $z_x = \frac{2x}{x^2+y^2}$, $z_y = \frac{2y}{x^2+y^2}$ だから $x = y = 1$ のとき，$z_x = z_y = 1$ である．よって $x = y = 1$ から x が $\Delta x = 0.002$, y が $\Delta y = -0.001$ 変化すると z は近似的に

$$\Delta z \fallingdotseq f_x\Delta x + f_y\Delta y = 1 \times (0.002) + 1 \times (-0.001) = 0.001$$

だけ変化する．

15.3. (1) $h(t) = f(k\cos t, k\sin t)$ に対し

$$h'(t) = f_x \cdot k(-\sin t) + f_y \cdot k\cos t$$

である．

(2) $f(x, y) = x^2y^3$ のとき $x = \cos t$, $y = \sin t$ を代入すると $h(t) = \cos^2 t\sin^3 t$ である．$f_x = 2xy^3$, $f_y = 3x^2y^2$ だから (1) の公式を使うと

$$h'(t) = 2\cos t\sin^3 t(-\sin t) + 3\cos^2 t\sin^2 t(\cos t) = -2\cos t\sin^4 t + 3\cos^3 t\sin^2 t$$

である．

二変数関数のチェインルールを使わないで，直接，一変数関数関数 $\cos^2 t\sin^3 t$ を微分すると

$$(\cos^2 t\sin^3 t)' = 2\sin t(-\cos t)\cdot\sin^3 t + \cos^2 t\cdot 3\sin^2 t(\cos t) = -2\cos t\sin^4 t + 3\cos^3 t\sin^2 t\ .$$

一致した．