秋学期第十三回課題解答例

1 (教科書の問 23.1) (1) 普通に第一象限で累次積分. $\displaystyle\int_0^\infty dx\int_0^\infty \frac{dy}{(1+x+y)^3} = \int_0^\infty dx\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{(1+x+y)^2}\right]_{y=0}^{y=\infty} = \int_0^\infty \frac{dx}{2(1+x)^2} = \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}$.

(2) 極座標に変換. $\displaystyle 2\pi\int_0^\infty \frac{rdr}{(1+r^2)(2+r^2)} \overset{r^2=t}{=} \pi\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)(2+t)} = \pi\int_0^\infty\left(\frac{1}{1+t}-\frac{1}{2+t}\right)dt = \pi\left[\log\frac{1+t}{2+t}\right]_0^\infty = \pi(\log 1-\log(1/2)) = \pi\log 2$.

(3) $\displaystyle 1+x^2+xy+y^2 = 1+\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2$ と平方完成すると問題の積分は $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{dxdy}{1+(x+\frac{y}{2})^2+\frac{3}{4}y^2}$ となる．そこで $u = x+\dfrac{y}{2}$, $v = \dfrac{\sqrt{3}}{2}y$ とおく．これは $x = u-\dfrac{1}{\sqrt{3}}v$, $y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}v$ と同じことである．このとき $J = \det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v\end{pmatrix} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ だから，問題の積分は $\displaystyle\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{dudv}{(1+u^2+v^2)^2} \overset{u=r\cos\theta, v=r\sin\theta}{=} \frac{2\cdot 2\pi}{\sqrt{3}}\int_0^\infty\frac{rdr}{(1+r^2)^2} \overset{r^2=t}{=} \frac{2\pi}{\sqrt{2}}\int_0^\infty\frac{dt}{(1+t)^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^\infty = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

（別法）この問題では（一次変換を経由しないで）いきなり極座標を使うのは得策とは思えないが，もし極座標に変数変換したらどうなるかやってみる．$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおくと問題の積分は $\displaystyle\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^\infty\frac{rdr}{(1+r^2(1+\cos\theta\sin\theta))^2}$ となる．$A = 1+\cos\theta\sin\theta$ とおくと $\displaystyle\int_0^\infty\frac{rdr}{(1+r^2(1+\cos\theta\sin\theta))^2} = \int_0^\infty\frac{rdr}{(1+Ar^2))^2} = \frac{1}{2A}\left[-\frac{1}{(1+Ar^2)}\right]_0^\infty = \frac{1}{2A}$ である．問題の積分は，$y = \cos\theta\sin\theta = (1/2)\sin 2\theta$ のグラフの形状（周期と対称性）を考えると次のようになる：$\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+\cos\theta\sin\theta} = \int_0^\pi\frac{d\theta}{1+\cos\theta\sin\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1+\cos\theta\sin\theta}+\frac{1}{1-\cos\theta\sin\theta}\right)d\theta \overset{t=\tan\theta}{=} \int_0^\infty\left(\frac{1}{t^2+1+t}-\frac{1}{t^2+1-t}\right)dt$ となる．なぜなら $(1+t^2)d\theta = dt$ だから．分母を平方完成して $t\pm\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}u$ とおいて $\arctan u = \displaystyle\int du/(u^2+1)$ を使うと $\displaystyle\int_0^\infty\frac{dt}{t^2\pm t+1} = \int_0^\infty\frac{dt}{(t\pm\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{\pm1/\sqrt{3}}^\infty\frac{du}{u^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}(\pi/2\mp\pi/6)$ だから，問題の積分は $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$ である．

(4) $u = x+\dfrac{y+1}{2}$, $v = \dfrac{\sqrt{3}}{2}y+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ とおくと，e の肩の二次式は $\displaystyle\left(x+\frac{y+1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2-\frac{1}{3} = u^2+v^2-\frac{1}{3}$ と平方完成できる．このとき，$x = u-\dfrac{v}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{3}$, $y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}v-\dfrac{1}{3}$ であって，$J = \det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v\end{pmatrix} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ である．ここで，公式 $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2}e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \pi$ を使う．この公式の証明：$\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2}e^{-(x^2+y^2)}dxdy \overset{x=r\cos\theta, y=r\sin\theta}{=} 2\pi\int_0^\infty e^{-r^2}rdr \overset{r^2=t}{=} \pi\int_0^\infty e^{-t}dt = \pi$. この公式を使うと，問題の積分は $\displaystyle e^{\frac{1}{3}}\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_{\mathbb{R}^2}e^{-u^2-v^2}dudv = \frac{2e^{\frac{1}{3}}\pi}{\sqrt{3}}$ である．

注意. 21.3 (3)(4) の解法の基本的な考え方：二変数二次式を，まず一つの文字，例えば x についての二次式だと思って平方完成する．この時，定数項は y の二次式である．それを平方完成する．その結果，元の二次式が u^2+v^2+ 定数 の形になるような一次変換 $(x,y)\mapsto(u,v)$ を見つけられる．問題の二次式が u^2+v^2 になったら，極座標への変数変換ができて計算が進行する．

2. $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+xy+y^2)}dxdy$ の計算．まず，計算例

$$V = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+xy+y^2)}dxdy = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi$$

を復習する．e の肩にのっている 2 次式を平方完成すると $-\frac{3}{4}x^2 - \left(y+\frac{x}{2}\right)^2$ である．そこで $u = \frac{\sqrt{3}}{2}x,\ v = y+\frac{x}{2}$ と変数変換する．これは $x = \frac{2}{\sqrt{3}}u,\ y = v - \frac{1}{\sqrt{3}}u$ と同値である．よって $J(u,v) = \det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ である．したがって積分の変数変換公式より

$$V = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-u^2-v^2}\frac{2}{\sqrt{3}}dudv$$

である．最後に $u = r\cos\theta,\ v = r\sin\theta$ と極座標に変換すると $J(u,v) = r$ だから

$$V = \frac{2}{\sqrt{3}}2\pi\int_0^\infty e^{-r^2}rdr = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi$$

である．ここで $\int_0^\infty e^{-r^2}rdr = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}dt = \frac{1}{2}$ という計算を行った．

次に，問題の積分

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+xy+y^2)}dxdy$$

の計算を行う．e の肩にのっている 2 次式を平方完成して 1 次変換を考え，さらに極座標変換するところまでは上と同じである．問題の積分の積分範囲 D は第 1 象限だから，1 次変数によって対応する積分範囲 D' はもはや全空間ではない．この問題では積分範囲 D は第 1 象限 $x > 0,\ y > 0$ であり，$x = \frac{2}{\sqrt{3}}u$, $y = v - \frac{1}{\sqrt{3}}u$ だったから，対応する uv 平面の領域 D' は，$\frac{2}{\sqrt{3}}u > 0,\ v - \frac{1}{\sqrt{3}}u > 0$ という不等式で与えられる．よって

$$D' \ :\ u > 0,\ v - \frac{u}{\sqrt{3}} > 0$$

である．これは，uv 平面において，原点を頂点とする中心角が $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ で半径が無限大の扇形である．問題の積分は

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_{D'} e^{-u^2-v^2}dudv$$

である．極座標変換 $u = r\cos\theta,\ v = r\sin\theta$ によって D' は $r\theta$ 平面の領域

$$E \ :\ 0 < r < \infty\ ,\quad \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

にうつる．極座標変換の面積比は $J(r,\theta) = r$ だから，問題の積分は

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_E e^{-r^2}rdrd\theta &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\int_0^\infty e^{-r^2}rdr \quad [\text{ 先に } \theta \text{ で積分}] \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{3}\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}dt \quad [r^2 = t \text{ とおいて置換積分}] \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{3}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

である．