力学 1

第7回目

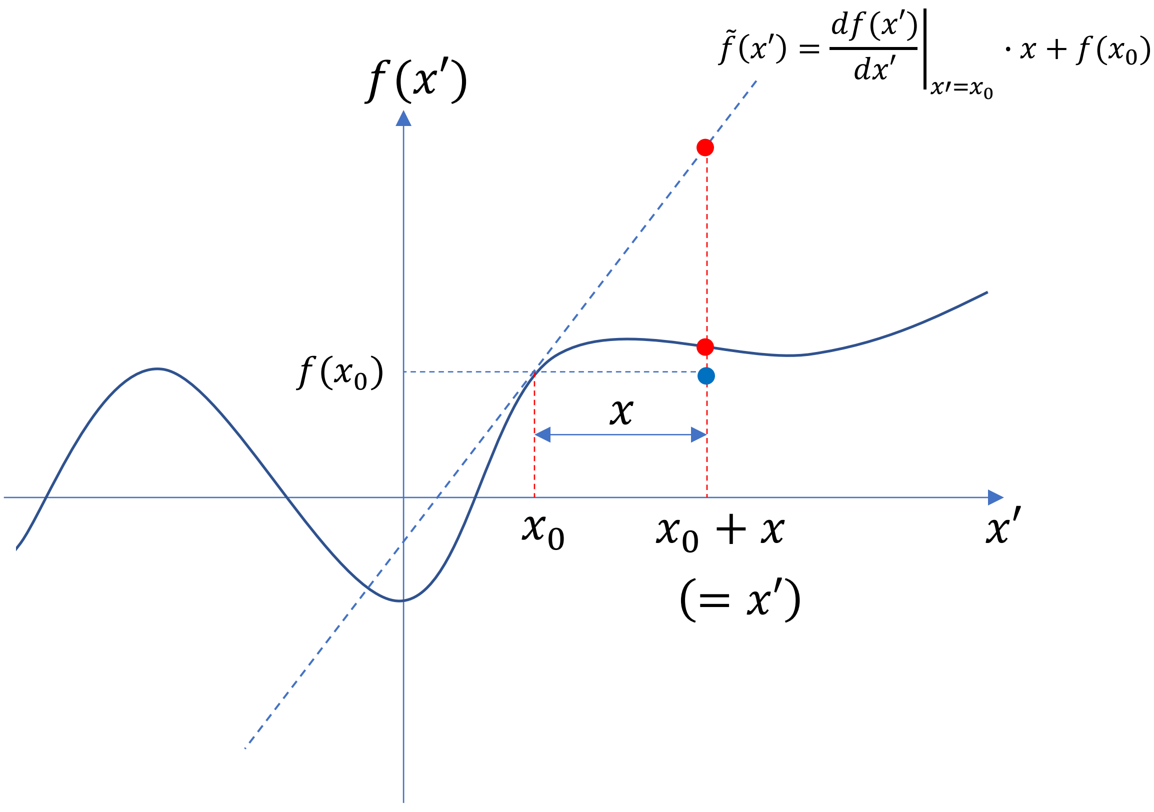
テイラー展開

（ある関数をべき級数で表す）

無限回微分可能なある関数 $f(x)$

$$f(x_0+x)=f(x_0)+\ a_1x+\ a_2x^2\ +\ a_3x^3+\ a_4x^4+\ a_5x^5+\ \cdots\ +a_nx^n+\cdots$$

と表すことができたとする



無限回微分可能なある関数　$f(x)$

$$f(x_0+x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

ベクトルからの類推

３次元空間中の任意のベクトル　$\vec{A}$

３次元空間における互いに独立な（単位）ベクトル　$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$

$$\vec{A} = k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + k_3\vec{v}_3$$

無限次元空間中の任意のベクトル　$\vec{F}$

無限次元空間における互いに独立な（単位）ベクトル　$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$，・・・，$\vec{v}_n$，・・・

$$\vec{F} = k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + k_3\vec{v}_3 + \cdots + k_n\vec{v}_n + \cdots$$

ある関数

$f(x)$

独立な関数の組

$f_0(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$

$$f(x) = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) \cdots + a_n f_n(x) \cdots$$

独立な関数の組

$f_0(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$

べき級数

$x^0, x^1, x^2, \cdots, x^n, \cdots$

フーリエ級数

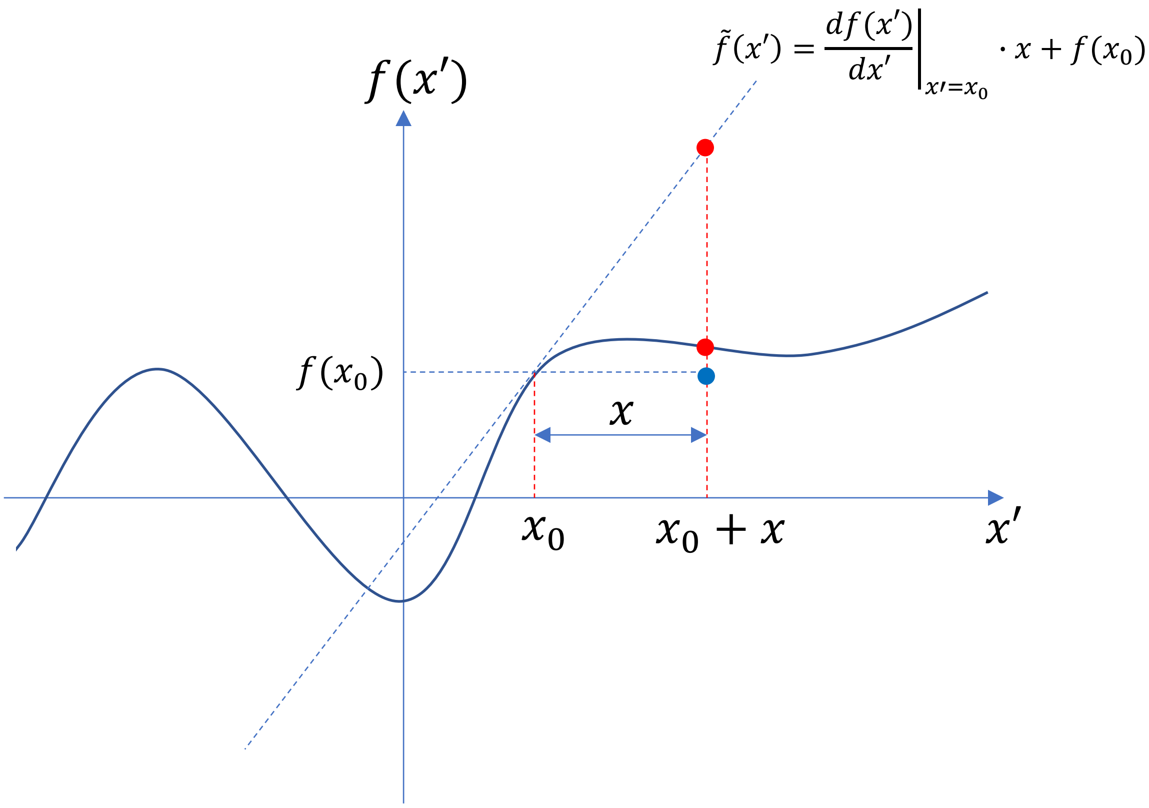
$C, \sin x, \sin 2x, \sin 3x, \cdots, \sin nx, \cdots,$
$\cos x, \cos 2x, \cos 3x, \cdots, \cos nx, \cdots$

⋮

無限回微分可能なある関数 $f(x)$

$$f(x_0 + x) = f(x_0) + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

と表すことができたとする



$$f(x_0 + x) = f(x_0) + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots$$

x で微分

定数

$$\frac{d}{dx} f(x_0 + x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \cdots$$

ここで、x に 0 を代入すると、

x'を改めてxと書き直した

$$a_1 = \left.\frac{df(x_0 + x)}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{df(x_0 + x)}{d(x_0 + x)}\right|_{x=0} = \left.\frac{df(x')}{dx'}\right|_{x'=x_0} = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$$

x で微分

$$= f'(x_0) = f^{(1)}(x_0)$$

ここに数式を入力します。

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x_0 + x) = 2\, a_2 + 3 \cdot 2\, a_3\, x + 4 \cdot 3\, a_4\, x^2 + 5 \cdot 4\, a_5\, x^3 + \cdots$$

ここで、x に 0 を代入すると、

$$a_2 = \left.\frac{1}{2}\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0} = \frac{1}{2} f''(x_0) = \frac{1}{2} f^{(2)}(x_0)$$

x で微分

$$\frac{d^3}{dx^3}f(x_0+x) = 3\cdot 2\, a_3 \ + 4\cdot 3\ \cdot 2\, a_4\, x + 5\cdot 4\cdot 3\, a_5\, x^2 + \ \cdots$$

ここで、x に 0 を代入すると、

$$a_3 = \frac{1}{3\cdot 2}\left.\frac{d^3 f(x)}{dx^3}\right|_{x=x_0} = \frac{1}{3\cdot 2}f'''(x_0) = \frac{1}{3\cdot 2}f^{(3)}(x_0) = \frac{1}{3!}f^{(3)}(x_0)$$

x で微分

$$\frac{d^4}{dx^4}f(x_0+x) = 4\cdot 3\cdot 2\, a_4 \ + 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\, a_5\, x + \ \cdots$$

ここで、x に 0 を代入すると、

$$a_4 = \frac{1}{4\cdot 3\cdot 2}\left.\frac{d^4 f(x)}{dx^4}\right|_{x=x_0} = \frac{1}{4\cdot 3\cdot 2}f''''(x_0) = \frac{1}{4\cdot 3\cdot 2}f^{(4)}(x_0) = \frac{1}{4!}f^{(4)}(x_0)$$

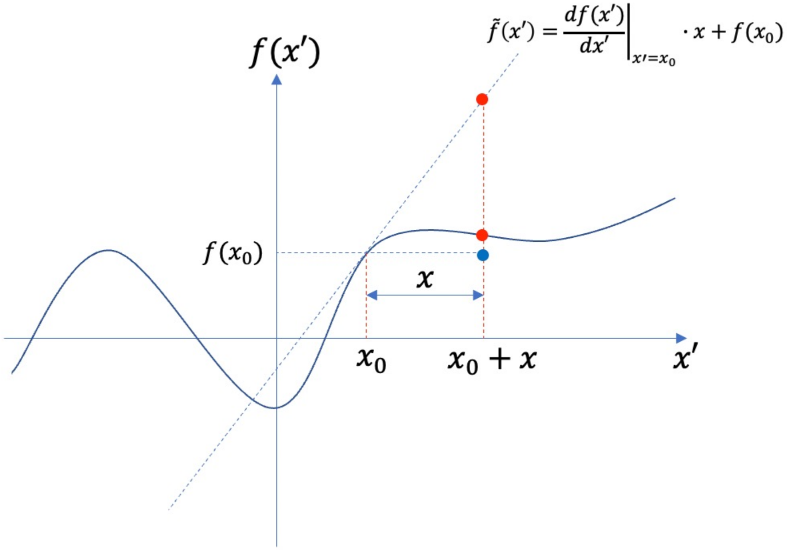
$$a_n = \frac{1}{n!}\left.\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right|_{x=x_0} = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

$$f(x_0 + x) = f(x_0) + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

テイラー展開

$$= f(x_0) + \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} \cdot x + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0} \cdot x^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3 f(x)}{dx^3}\right|_{x=x_0} \cdot x^3 + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n!}\left.\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right|_{x=x_0} \cdot x^n + \cdots$$



$$f(x_0+h)=f(x_0)+a_1h+a_2h^2+a_3h^3+a_4h^4+a_5h^5+\cdots+a_nh^n+\cdots$$

$x_0+h=x$ とすると、

$$f(x)=f(x_0)+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3+a_4(x-x_0)^4+$$

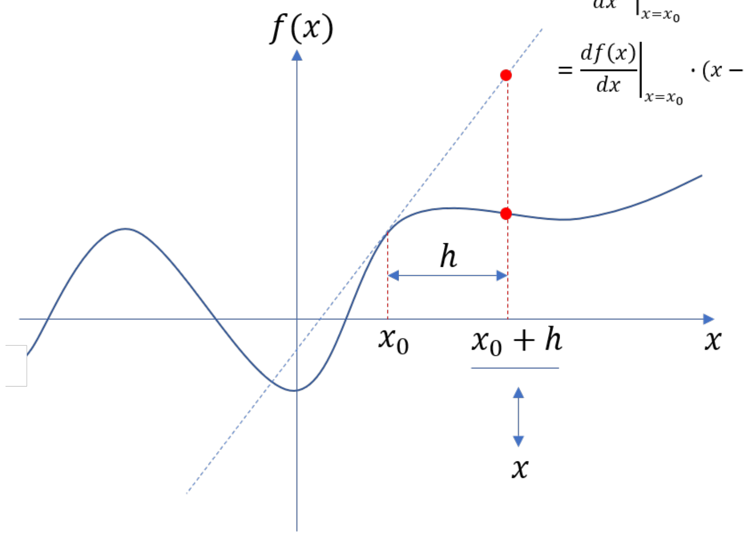
$$a_5(x-x_0)^5+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$$

$$=f(x_0)+\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}\cdot(x-x_0)+\frac{1}{2!}\left.\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0}\cdot(x-x_0)^2+\frac{1}{3!}\left.\frac{d^3f(x)}{dx^3}\right|_{x=x_0}\cdot(x-x_0)^3+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left.\frac{d^nf(x)}{dx^n}\right|_{x=x_0}\cdot(x-x_0)^n+\cdots$$

$$f(x)=\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}\cdot h+f(x_0)$$

$$=\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}\cdot(x-x_0)+f(x_0)$$



$x_0 = 0$とすると

マクローリン展開

$$f(x) = f(0) + \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=0} \cdot x + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right|_{x=0} \cdot x^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3 f(x)}{dx^3}\right|_{x=0} \cdot x^3 + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n!}\left.\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right|_{x=0} \cdot x^n + \cdots$$

$$e^{\theta} = 1 + \theta + \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{3!}\theta^3 + \cdots$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \frac{1}{7!}\theta^7 + \cdots$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \frac{1}{6!}\theta^6 + \cdots$$

$|x| \ll 1$ のとき、

$$(1 \pm \mathrm{x})^n \approx 1 \pm n\,x$$

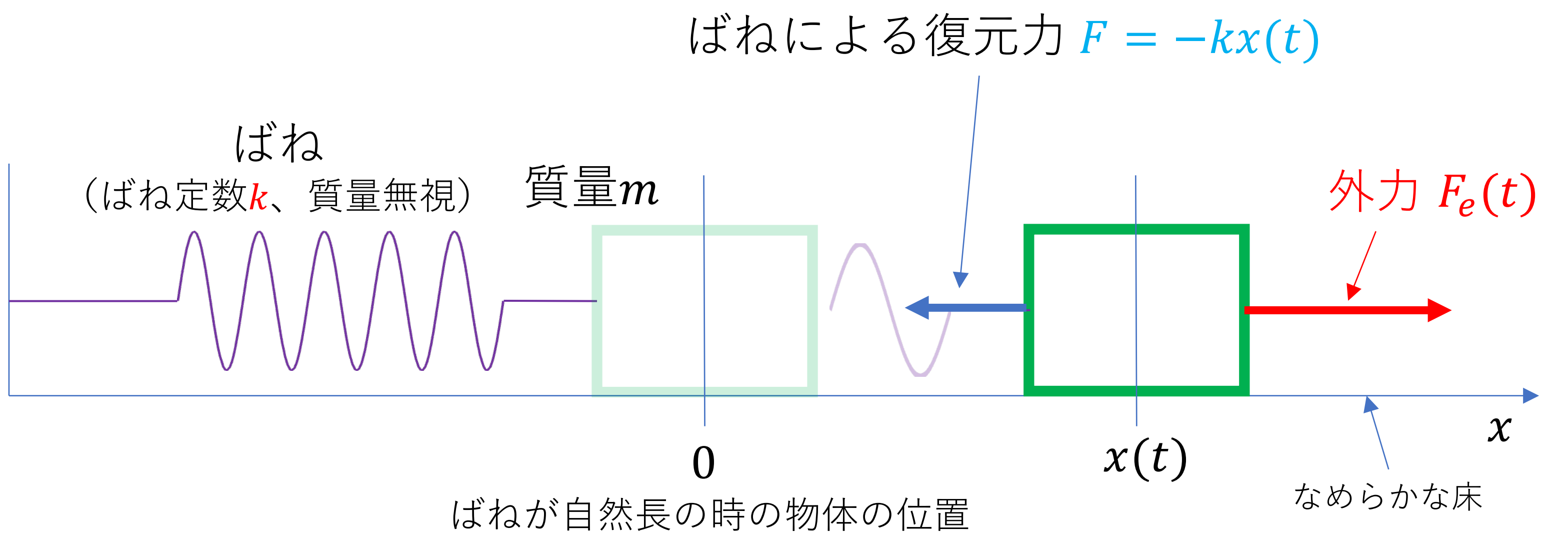
$$\Longrightarrow \left\{ \begin{aligned}
&(1+x)^2 \approx 1+2x \\
&(1-x)^2 \approx 1-2x \\
&\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \approx 1-x \\
&\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} \approx 1+x \\
&\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} \approx 1+\frac{x}{2} \\
&\sqrt{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{2}} \approx 1-\frac{x}{2} \\
&\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} \approx 1-\frac{x}{2} \\
&\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}} \approx 1+\frac{x}{2}
\end{aligned} \right.$$

運動方程式

運動方程式の解き方

1. 強制振動
2. 減衰振動
3. 強制振動＋減衰振動

1. 強制振動（周期的な外力）



運動方程式

・ばね（単振動）　$F(t)=m\ddot{x}=-kx=-m\omega^2x$　①　←　角振動数 $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ なので、$k=m\omega^2$

・ばね（単振動）＋外力　$F(t)=m\ddot{x}=-kx+F_e(t)=-m\omega^2x+F_e(t)$　②

第6回目の課題では、鉛直方向につるしたばねにつながれた物体の運動で、
この外力に相当するのは重力 mg（定数）だった。

1. 強制振動（周期的な外力）

ばね（単振動）＋ 外力　$m\ddot{x} = -m\omega^2 x + F_e(t)$　②

ばねによる力　　外力

重要な場合として、

$F_e(t) = m F_0 \cos \omega_0 t$ を考える。（周期的な外力）

ある定数　　外力の角振動数

m をつけているのは、全ての項にmを入れることで、式を簡単にするため。

（ばね（だけ）による単振動の $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ とは一般には異なる）

② に代入すると

$$m\ddot{x} = -m\omega^2 x + m F_0 \cos \omega_0 t$$

整理して

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F_0 \cos \omega_0 t \quad ③$$

1. 強制振動（周期的な外力）

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F_0 \cos \omega_0 t \quad ③$$

の一般解は、

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = 0 \quad ④$$

の一般解 $x_1(t)$ と

③の右辺（$x(t)$ を含まない項）を0とおいた式

③の特殊解の和である。

④の一般解 $x_1(t)$ は、単振動と同じ形の運動方程式の解なので、

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= A\sin(\omega t + \alpha_1) \\ &= A\cos(\omega t + \alpha_2) \\ &= C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t \end{aligned}\right\}$$

互いに変形できる。
問題に適した形を使う。

1. 強制振動（周期的な外力）

$$\ddot{x}+\omega^2 x = F_0\cos\omega_0 t \quad ③$$ の特殊解は？

これまでの方法で考えて見ると、

まず、$x(t)$ が定数だとすると、左辺＝定数、右辺＝t の関数となって矛盾する。

次に、$x(t)$ がt に比例（$x(t) = C\ t$）と仮定すると、
$$\begin{cases} 左辺 = \omega^2 Ct & \leftarrow t に比例 \\ 右辺 = F_0\cos\omega_0 t & \leftarrow t に対して周期的 \end{cases}$$

何かある定数

やはり矛盾する。

（すべてのtに対してイコール（左辺=右辺）にすることはできない）

それではどうする？

右辺には、$\cos\omega_0 t$ が入っている。 $\longrightarrow$ $x(t) = C\cos\omega_0 t$ と仮定してみる。

何かある定数

1. 強制振動（周期的な外力）

$x(t) = C\cos\omega_0 t$ を $\ddot{x} + \omega^2 x = F_0 \cos\omega_0 t$ ③ に代入すると

$$\frac{d^2}{dt^2}(C\cos\omega_0 t) + \omega^2 C\cos\omega_0 t = F_0\cos\omega_0 t$$

微分を実行

$$-C{\omega_0}^2\cos\omega_0 t + \omega^2 C\cos\omega_0 t = F_0\cos\omega_0 t$$

移項して整理

$$\cos\omega_0 t\,(-C{\omega_0}^2 + C\omega^2 - F_0) = 0$$

これが常に成り立つためには、$-C{\omega_0}^2 + \omega^2 C - F_0 = 0$

したがって、$C = \dfrac{F_0}{\omega^2 - {\omega_0}^2}$ となるような C を用いて

$x(t) = C\cos\omega_0 t = \dfrac{F_0}{\omega^2 - {\omega_0}^2}\cos\omega_0 t$ が ③ の特殊解となる。

（とりあえず、$\omega^2 \neq {\omega_0}^2$ と考えておく。 $\omega^2 = {\omega_0}^2$ については次スライドで言及。）

1. 強制振動（周期的な外力）

したがって、 $\ddot{x}+\omega^2 x = F_0 \cos\omega_0 t$ ③ の一般解は、

$$x(t) = A\sin(\omega t+\alpha_1) + \frac{F_0}{\omega^2-{\omega_0}^2}\cos\omega_0 t$$

$$= A\cos(\omega t+\alpha_2) + \frac{F_0}{\omega^2-{\omega_0}^2}\cos\omega_0 t$$

$$= C_1\sin\omega t + C_2\cos\omega t + \frac{F_0}{\omega^2-{\omega_0}^2}\cos\omega_0 t$$

互いに変形できる。
問題に適した形を使う。

外力（周期的）が、ばねの固有の角振動数に近い
角振動数の場合、振動の振幅が非常に大きくなる。

ところで、 $\omega_0 \cong \omega$ ではこの項の振幅が非常に大きくなる。 → 共鳴

（$\omega_0=\omega$の場合）

（この式では、$\omega_0=\omega$ で定義できない。（無限に大きくなる））
（抵抗力がある場合には有限の振幅になる。）

1. 強制振動（周期的な外力）

$\omega = \omega_0$ で③の解はどう考える？

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F_0 \cos \omega_0 t \quad ③$$

$$\downarrow \; \omega = \omega_0$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F_0 \cos \omega t \quad ③\text{-}1$$

③-1 の一般解を求めるには、③-1 の特殊解を求める必要がある。

③-1 では、 $x(t) = C \cos \omega t$ と置くのはうまくいかない。
（$F_0 = 0$となってしまう。）

天下り的ではあるが、 $x(t) = Ct \sin(\omega t)$ と置いてみる。

ある定数

1. 強制振動（周期的な外力）

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F_0 \cos \omega t \quad \text{③-1}$$

$x(t) = Ct \sin \omega t$ を代入

$$\dot{x} = C \sin \omega t + C\omega t \cos \omega t$$

$$\ddot{x} = C\omega \cos \omega t + C\omega \cos \omega t - C\omega^2 t \sin \omega t$$

$$C\omega \cos \omega t + C\omega \cos \omega t - C\omega^2 t \sin \omega t + C\omega^2 t \sin \omega t = F_0 \cos \omega t$$

整理

$$2C\omega \cos \omega t = F_0 \cos \omega t$$

移項して整理

$$(2C\omega - F_0) \cos \omega t = 0$$

t によらず成立するためには

$$C = \frac{F_0}{2\omega} \longrightarrow x(t) = \frac{F_0}{2\omega} t \sin \omega t$$

が③-1の特殊解（の一つ）

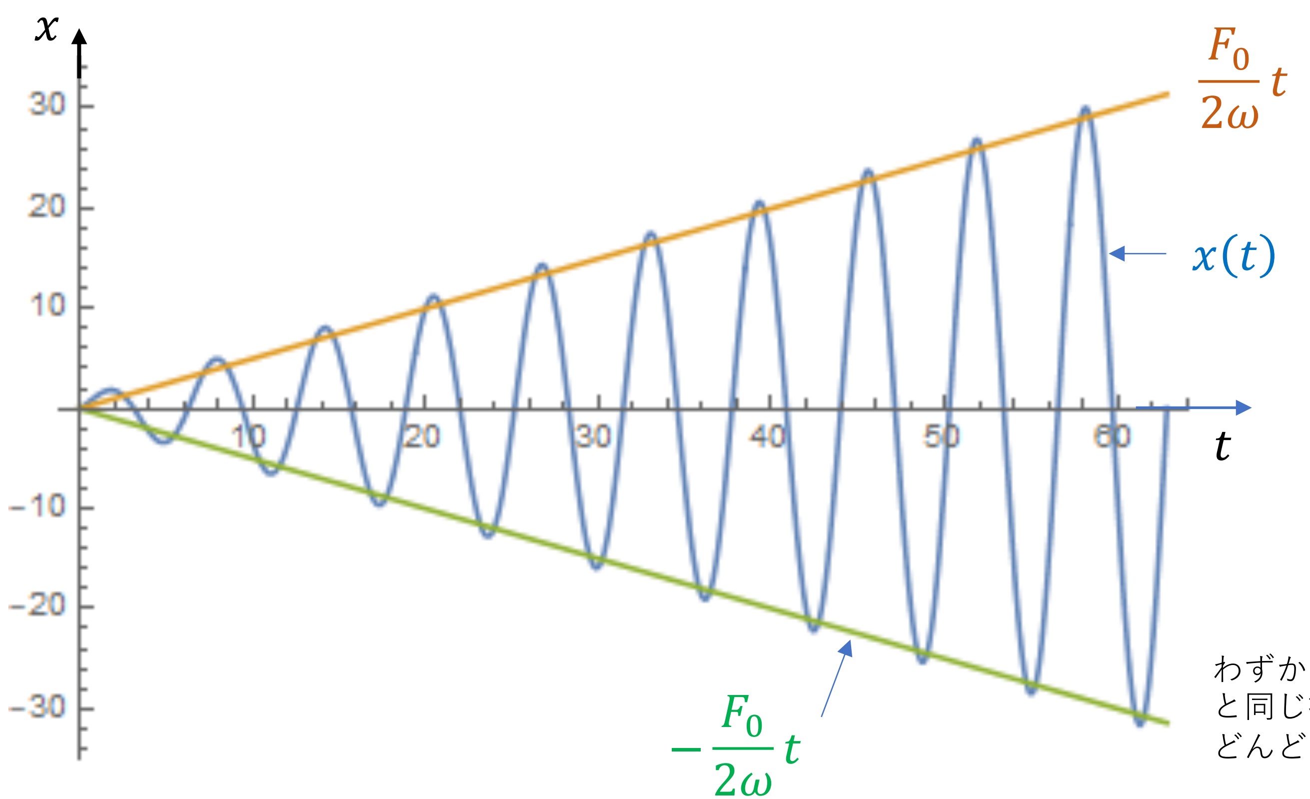
1. 強制振動（周期的な外力）

したがって、

$\ddot{x} + \omega^2 x = F_0 \cos \omega_0 t$ ③ で $\omega = \omega_0$ の場合の一般解は、

例えば、 $x(t) = A \sin(\omega t + \alpha_1) + \dfrac{F_0}{2\omega} t \sin \omega t$

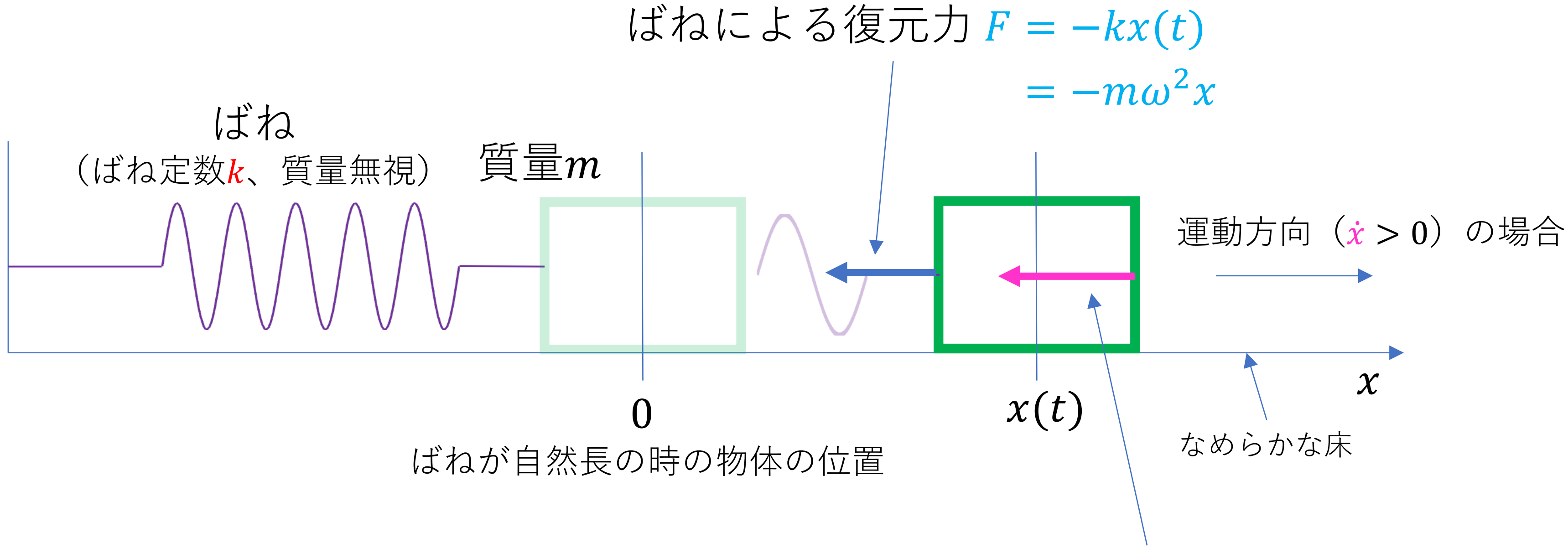
（第1項目にsin の形を用いると）



$A = 1.0$
$\omega = 1.0$
$\alpha_1 = 0.0$
$F_0 = 1.0$
の場合の図

わずかな力でも、物体のもつ固有の振動数と同じ振動数で力を加え続けると、振幅はどんどん大きくなる。

2. 減衰振動



空気による抵抗力 $\vec{F}_V$

（大きさは速さに比例すると仮定）

$$F_V = -2m\gamma\dot{x}$$

第5回目講義では、$F_V = -\gamma\dot{x}$ と置いたが、今回は後の
式変形を考えて、速さ $\dot{x}$ に対する比例係数を $2m\gamma$ と置く。（$\gamma > 0$）

運動方程式

$$F(t) = m\ddot{x} = -kx + F_V(t) = -m\omega^2 x - 2m\gamma\dot{x}$$

2. 減衰振動

運動方程式 $$m\ddot{x} = -m\omega^2 x - 2m\gamma\dot{x}$$

移項して整理

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad ⑤$$

xに関係しない項が0

⑤の一般解は、常套手段を使って求める。

$x(t) = e^{\alpha t}$ と置いてみる　（αは定数）

⑤に代入すると、

$$\frac{d^2}{dt^2}e^{\alpha t} + 2\gamma\frac{d}{dt}e^{\alpha t} + \omega^2 e^{\alpha t} = 0$$

微分を実行

$$e^{\alpha t}(\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega^2) = 0 \qquad ⑥$$

2. 減衰振動

$$e^{\alpha t}(\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega^2) = 0 \qquad ⑥$$

⑥が常に成立するためには

（⑤の特性方程式）

$$\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega^2 = 0 \qquad ⑦$$

解と係数の関係を用いると、

$$\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \qquad ⑧$$

γ と ω の大小関係により、下の3つの場合がある。

（⑤の特性方程式⑦が）

1. 2つの実数解　　$\gamma > \omega$
2. 重解（1つの実数解）　　$\gamma = \omega$
3. 2つの複素数解　　$\gamma < \omega$

2. 減衰振動

（⑤の特性方程式が）

1. 2つの実数解　$\gamma > \omega$　（抵抗力が大きい場合）

$$\alpha = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

$$= -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

⑤の一般解は、

任意定数　　任意定数

$$x(t) = A_1 e^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)t} + A_2 e^{\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)t}$$

$|\gamma| > \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$ なので、

$-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} < 0$　　　$-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} < 0$

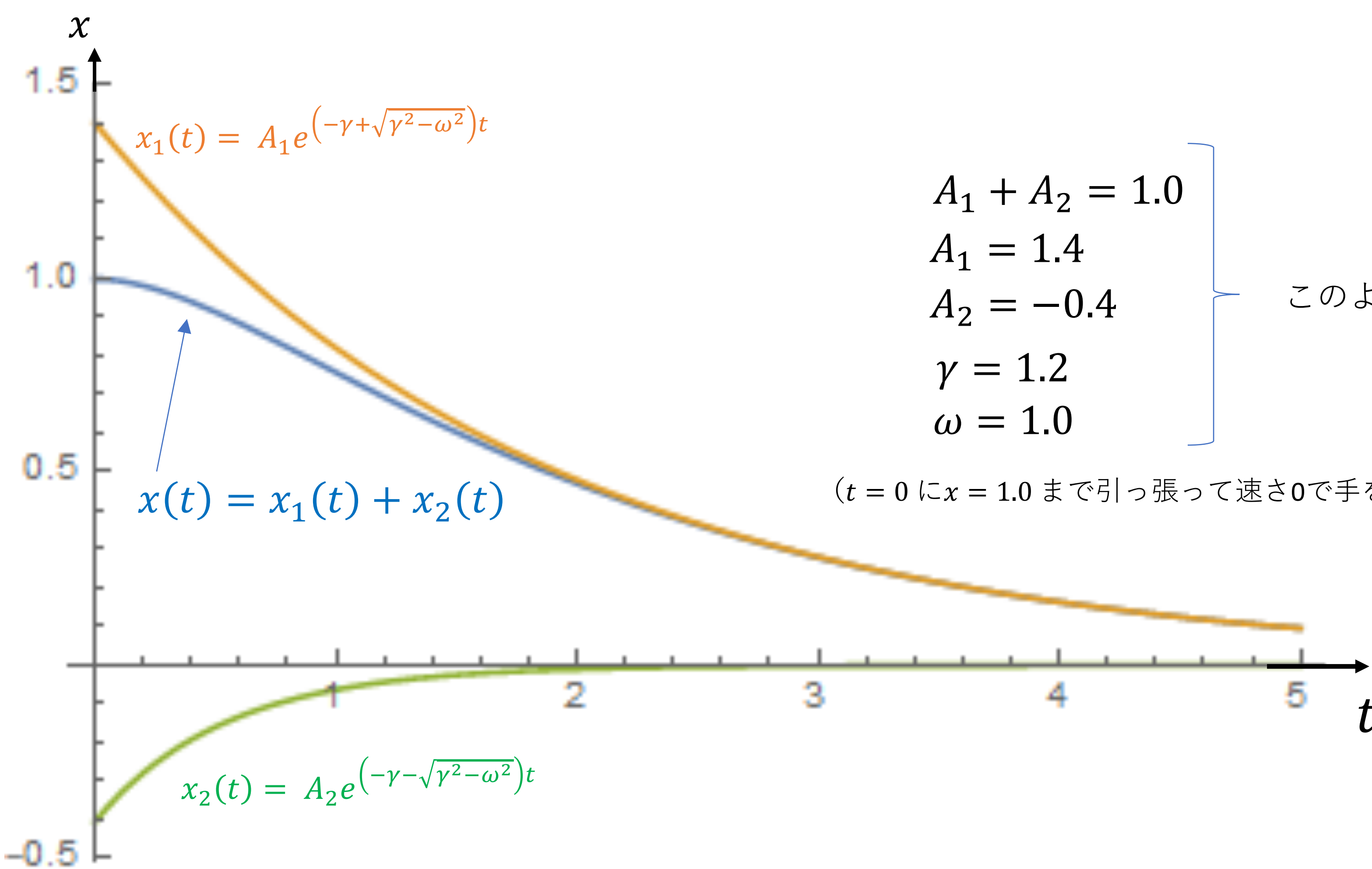
どちらの項も減衰する（振動を表す項はない）

過減衰

（⑤の特性方程式が）

1. 2つの実数解 $\gamma > \omega$ （抵抗力が大きい場合）

$$x(t) = A_1 e^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)t} + A_2 e^{\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)t}$$



$A_1 + A_2 = 1.0$
$A_1 = 1.4$
$A_2 = -0.4$
$\gamma = 1.2$
$\omega = 1.0$

このような場合の図

（$t = 0$ に$x = 1.0$ まで引っ張って速さ0で手を離した場合）

（⑤の特性方程式が）

2. 重解（1つの実数解） $\gamma = \omega$

$$\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \qquad ⑧$$

$$\Big\downarrow \; \gamma = \omega$$

$$\alpha = -\gamma = -\omega$$

$$\Big\downarrow \; x(t) = e^{\alpha t}\text{に代入}$$

$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0$ ⑤

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} = A\, e^{-\omega t} \qquad ⑨$$

は⑤の解になっている

任意定数

ところで、⑤の微分方程式の一般解は、 $x(t) = C_1\psi_1(t) + C_2\psi_2(t)$の形

互いに一次独立な関数

⑨と一次独立で⑤の解となるもう一つの関数を見つけなければいけない。

（⑤の特性方程式が）

2. 重解（1つの実数解） $\gamma = \omega$

⑨と一次独立で⑤の解となるもう一つの関数を見つけるために、

ここでも常套手段を使う。

$$x(t) = Ae^{\alpha t} = Ae^{-\gamma t} = A\, e^{-\omega t} \qquad ⑨$$

Aを定数ではなく、 t の関数と考えてみる。

$$x(t) = A(t)\, e^{\alpha t} \qquad ⑩$$

と置いてみる。

（常套手段） （定数変化法）

⑩を⑤に代入（以下を考慮すると）

$$\dot{x} = \dot{A}e^{\alpha t} + A\alpha e^{\alpha t}$$

$$\ddot{x} = \ddot{A}e^{\alpha t} + \dot{A}\alpha e^{\alpha t} + \dot{A}\alpha e^{\alpha t} + A\alpha^2 e^{\alpha t}$$

$$= \ddot{A}e^{\alpha t} + 2\dot{A}\alpha e^{\alpha t} + A\alpha^2 e^{\alpha t}$$

（⑤の特性方程式が）

2. 重解（1つの実数解） $\gamma = \omega$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad ⑤$$

$$\downarrow$$

$$\ddot{A}e^{\alpha t} + 2\dot{A}\alpha e^{\alpha t} + A\alpha^2 e^{\alpha t} + 2\gamma\left(\dot{A}e^{\alpha t} + A\alpha e^{\alpha t}\right) + \omega^2 A e^{\alpha t} = 0$$

$$\downarrow \quad \begin{array}{l} \alpha = -\gamma \\ \omega = \gamma \end{array}$$

$$\ddot{A} = 0$$ だけが残る。

$$\downarrow$$ t で2回積分

$$A(t) = A_1 t + A_2$$

任意定数（積分定数）

（⑤の特性方程式が）

2. 重解（1つの実数解）$\gamma = \omega$

$$x(t) = A(t)\, e^{\alpha t}$$ ⑩ に代入すると、

$$x(t) = (A_1 t + A_2)\, e^{\alpha t}$$

$A_1 t\, e^{\alpha t}$ と $A_2 e^{\alpha t}$ は1次独立な2つの解

最初に見つけた解の形

したがって一般解は、

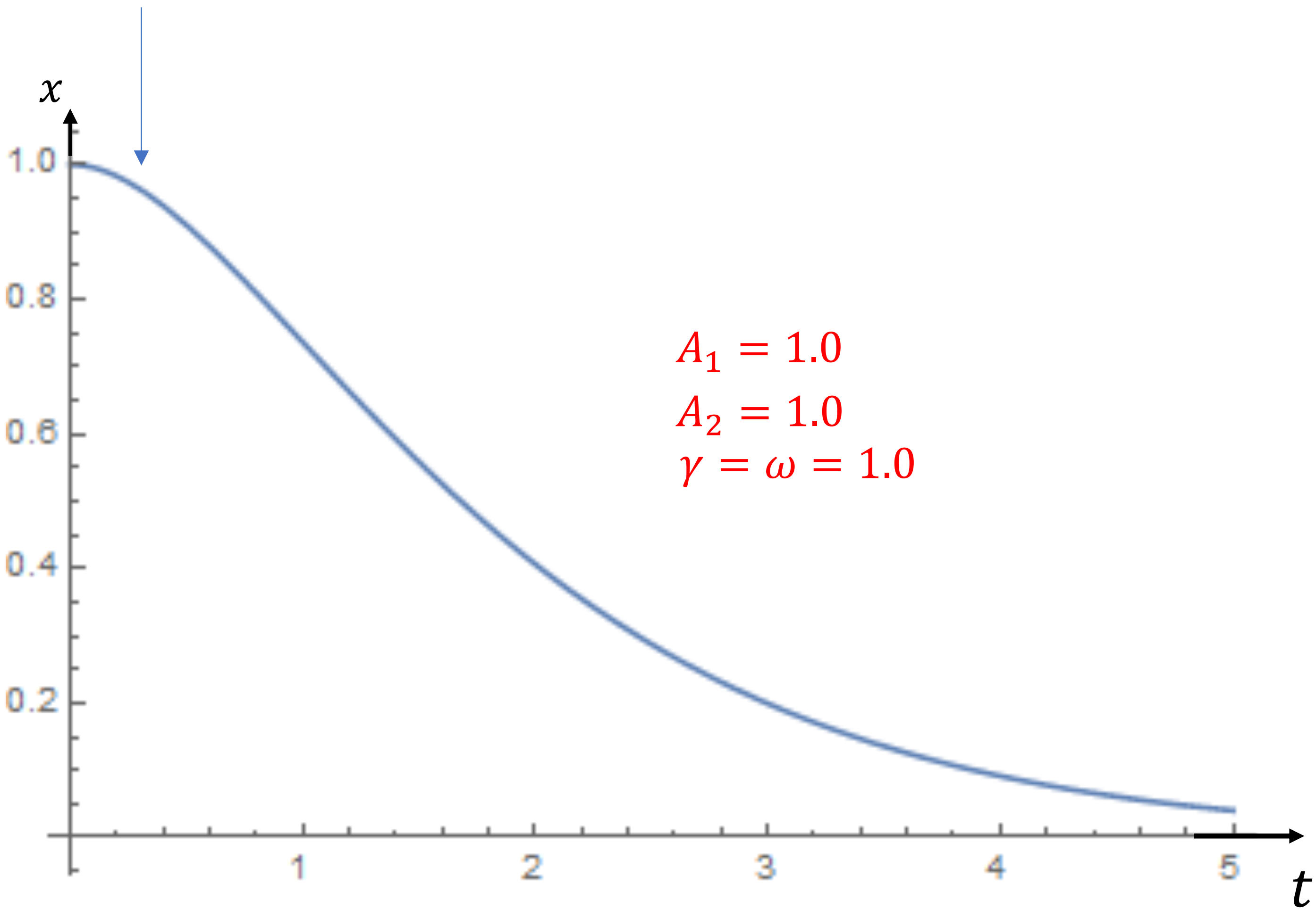
$$x(t) = (A_1 t + A_2)\, e^{-\gamma t} = (A_1 t + A_2)\, e^{-\omega t}$$

臨界減衰

（⑤の特性方程式が）

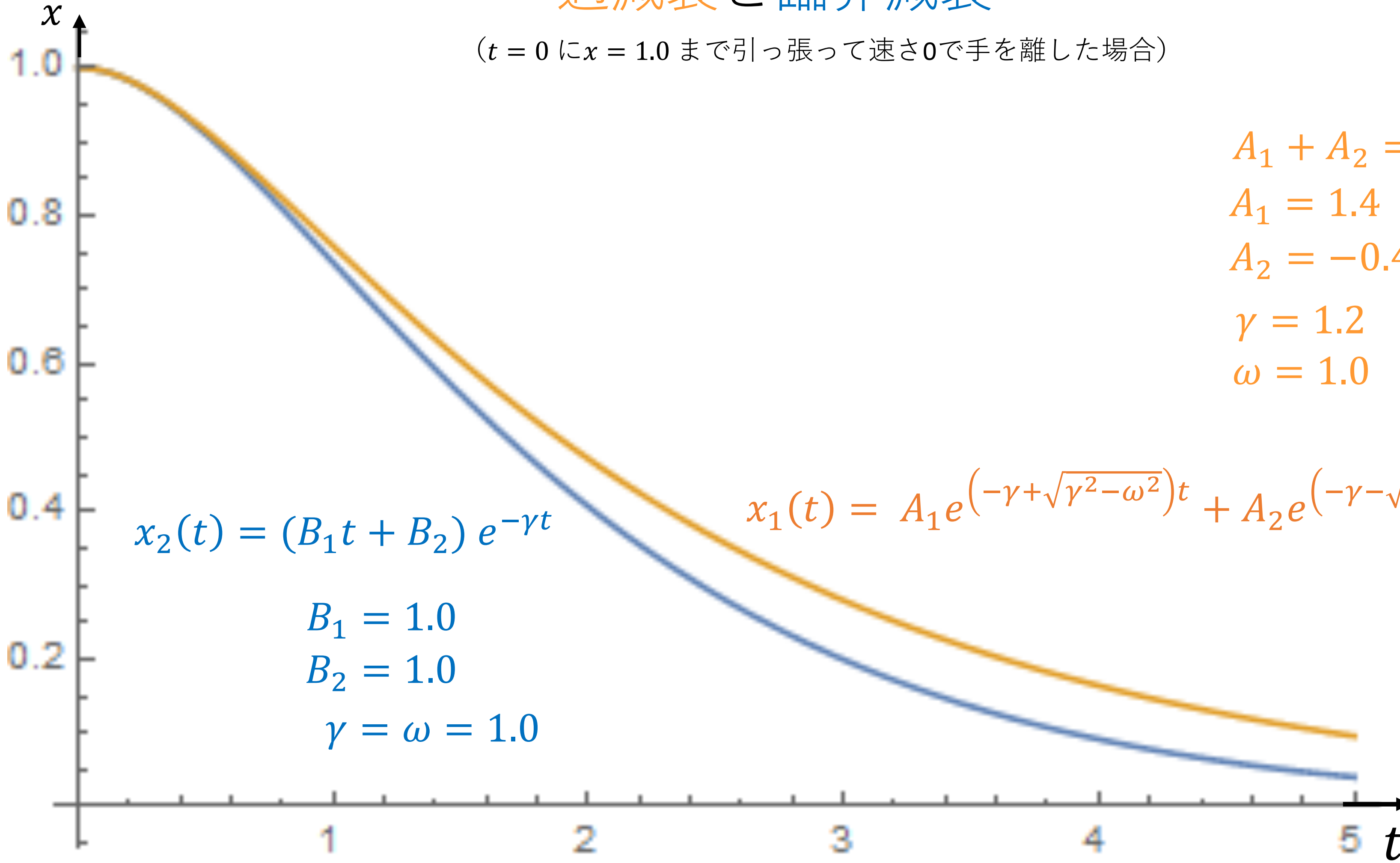
2. 重解（1つの実数解） $\gamma = \omega$

$$x(t) = (A_1 t + A_2)\, e^{-\gamma t} = (A_1 t + A_2)\, e^{-\omega t}$$



過減衰と臨界減衰

（$t = 0$ に$x = 1.0$ まで引っ張って速さ0で手を離した場合）



$$A_1 + A_2 = 1.0$$
$$A_1 = 1.4$$
$$A_2 = -0.4$$
$$\gamma = 1.2$$
$$\omega = 1.0$$

$$x_1(t) = A_1 e^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)t} + A_2 e^{\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)t}$$

$$x_2(t) = (B_1 t + B_2)\, e^{-\gamma t}$$

$$B_1 = 1.0$$
$$B_2 = 1.0$$
$$\gamma = \omega = 1.0$$

3. 2つの複素数解 $\gamma < \omega$ （抵抗力が小さい場合）

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad ⑤$$

$x(t) = e^{\alpha t}$ と置いて⑤に代入

$$\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \qquad ⑧$$

$\gamma < \omega$

$$\alpha = -\gamma \pm i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$$

$x(t) = e^{\alpha t}$ に代入すると、

2. 2つの複素数解　$\gamma < \omega$　（抵抗力が小さい場合）

$$x(t) = A_1 e^{\left(-\gamma + i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\right)t} + A_2 e^{\left(-\gamma - i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\right)t}$$

任意定数　　　　任意定数

$$= A_1 e^{-\gamma t} e^{i\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t} + A_2 e^{-\gamma t} e^{-i\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t}$$

オイラーの公式を用いて変形

$$= A_1\, e^{-\gamma t}\left\{\cos\left(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t\right) + i\sin\left(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t\right)\right\}$$

$$+A_2\, e^{-\gamma t}\left\{\cos\left(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t\right) - i\sin\left(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t\right)\right\}$$

整理

$$= (A_1 + A_2)e^{-\gamma t}\cos\left(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t\right)$$

$$+i(A_1 - A_2)e^{-\gamma t}\sin\left(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t\right)$$

2. 2つの複素数解　$\gamma < \omega$　（抵抗力が小さい場合）

$x(t)$ は実数なので、

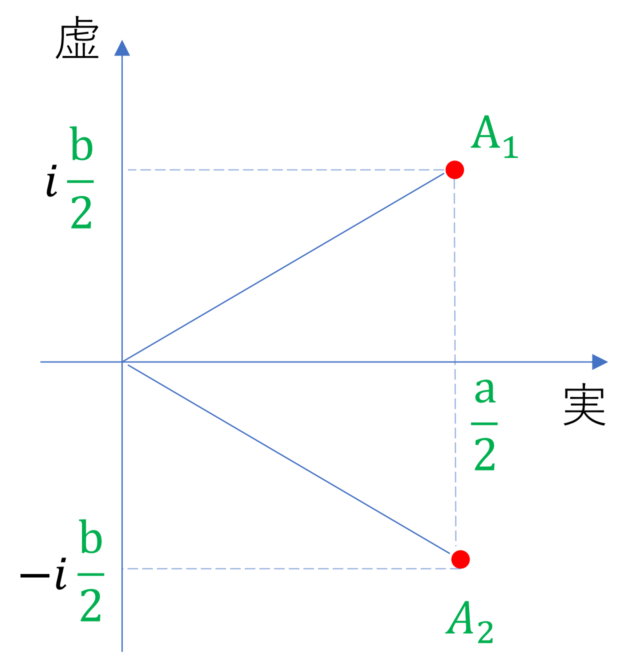
$$\begin{cases} (A_1 + A_2) = \mathrm{a} & \leftarrow \text{実数なので} \\ (A_1 - A_2) = i\mathrm{b} & \leftarrow \text{虚数なので} \end{cases}$$

（a と b は実数）

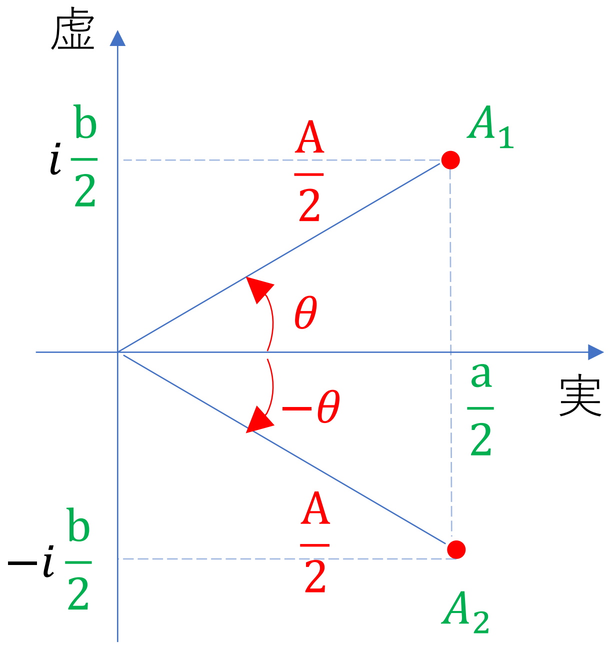
とおく。

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{1}{2}(\mathrm{a} + i\mathrm{b}) \\ A_2 = \dfrac{1}{2}(\mathrm{a} - i\mathrm{b}) \end{cases}$$

A_1 と A_2 は互いに複素共役



2. 2つの複素数解　$\gamma < \omega$　（抵抗力が小さい場合）



（A_1 と A_2 は互いに複素共役）

複素平面上の極座標表示を用いて、

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{A}{2}\cos\theta + \dfrac{A}{2}\, i\sin\theta \\ A_2 = \dfrac{A}{2}\cos\theta - \dfrac{A}{2}\, i\sin\theta \end{cases}$$

とおくと、（Aとθは実数のある定数）

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = A\cos\theta \\ A_1 - A_2 = iA\sin\theta \end{cases}$$

2. 2つの複素数解　$\gamma < \omega$　（抵抗力が小さい場合）

$$x(t) = (A_1 + A_2)e^{-\gamma t}\cos\left(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\, t\right)$$

$$+ i(A_1 - A_2)e^{-\gamma t}\sin\left(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\, t\right)$$

$$\left.\begin{aligned} A_1 + A_2 &= A\cos\theta \\ A_1 - A_2 &= iA\sin\theta \end{aligned}\right\}$$

$$= A\cos\theta\, e^{-\gamma t}\cos\left(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\, t\right)$$

$$-A\sin\theta\, e^{-\gamma t}\sin\left(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\, t\right)$$

$$= Ae^{-\gamma t}\cos\left(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\, t + \theta\right)$$

（cos の形で書くと）

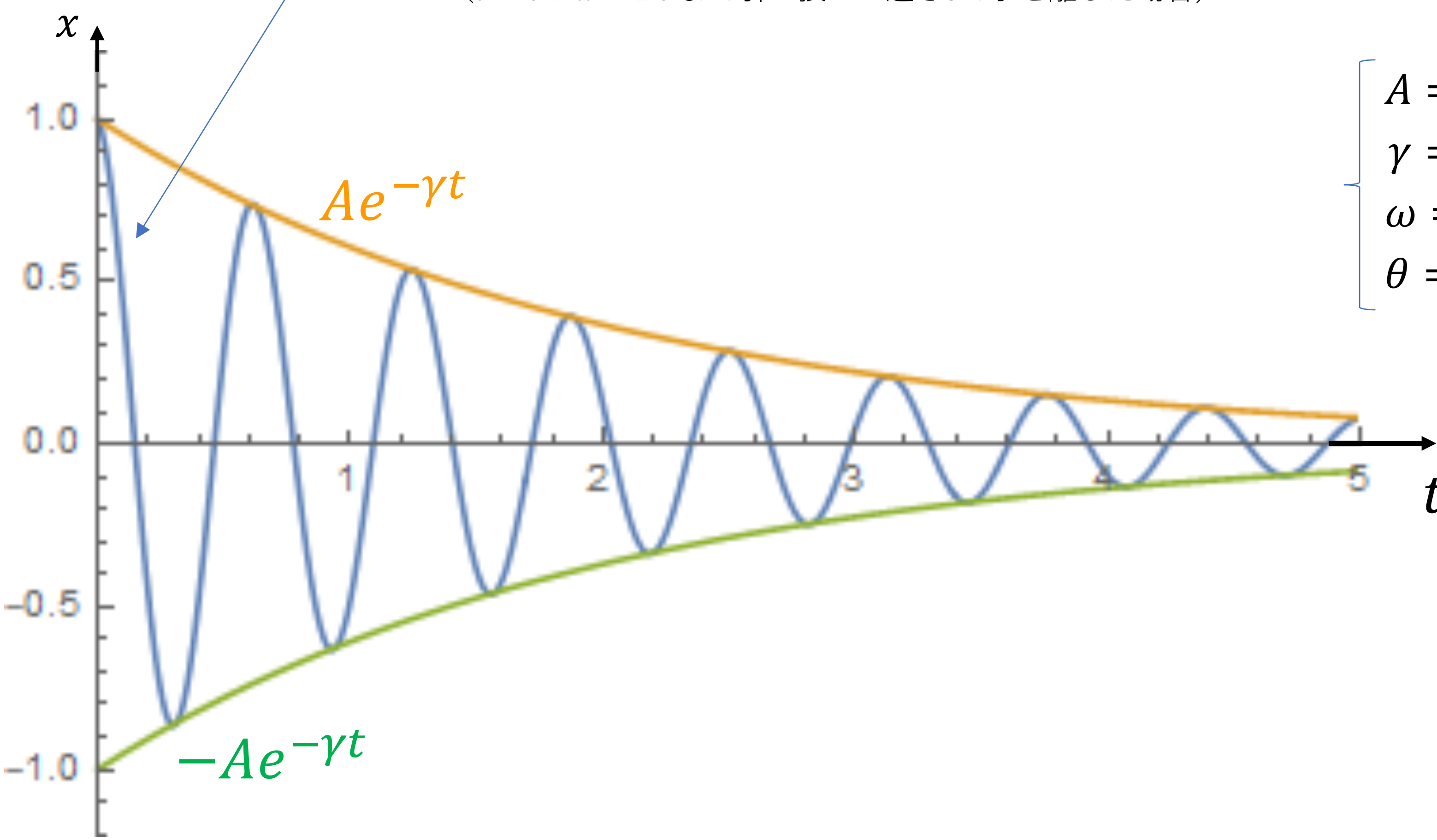
任意定数　　任意定数

2. 減衰振動

3. 2つの複素数解　$\gamma < \omega$　（抵抗力が小さい場合）

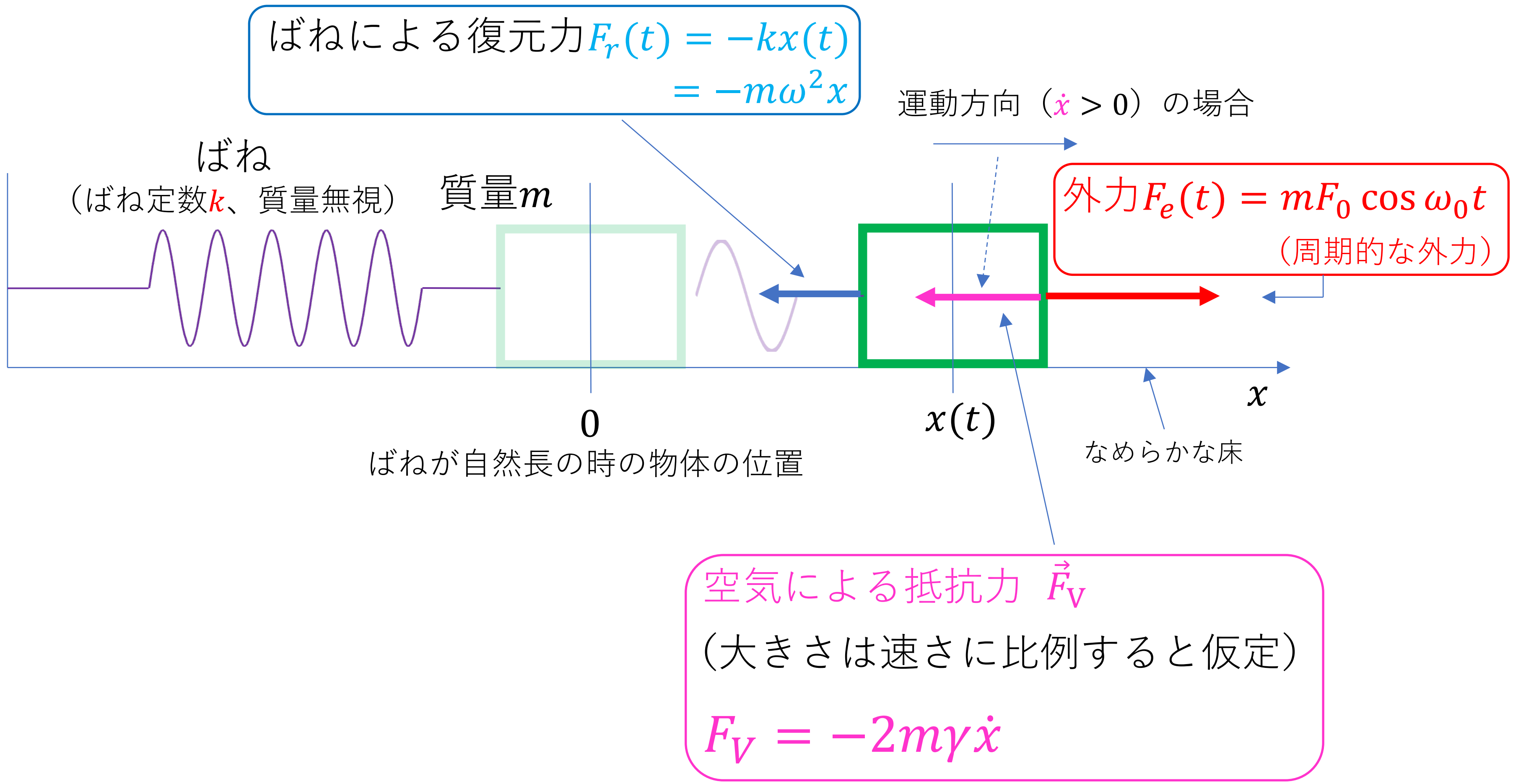
$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos\left(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\,t + \theta\right)$$

（$t=0$ に$x=1.0$ まで引っ張って速さ0で手を離した場合）



$A = 1.0$
$\gamma = 0.5$
$\omega = 10.0$
$\theta = -0.05$

3. 強制振動＋減衰振動（ばねの復元力＋周期的な外力＋抵抗力）



運動方程式

$$F(t) = m\ddot{x} = F_r(t) + F_V(t) + F_e(t)$$
$$= -m\omega^2 x - 2m\gamma\dot{x} + mF_0 \cos \omega_0 t$$

3. 強制振動＋減衰振動（ばねの復元力＋周期的な外力＋抵抗力）

運動方程式 $m\ddot{x} = -m\omega^2 x - 2m\gamma\dot{x} + mF_0 \cos \omega_0 t$

移項して整理

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = F_0 \cos \omega_0 t \qquad ①$$

微分方程式の解法の常套手段を使うため
①の右辺（xの入っていない項）を0と置いた微分方程式を作っておく。

$$\ddot{x}_1 + 2\gamma\dot{x}_1 + \omega^2 x_1 = 0 \qquad ②$$

これは 減衰振動の運動方程式 と同じ

①の一般解は、②の一般解と①の特殊解の和である。

減衰振動の運動方程式の一般解
（すでに導出済み）

これを求めれば①の一般解が
求まる。

3. 強制振動＋減衰振動（ばねの復元力＋周期的な外力＋抵抗力）

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = F_0 \cos\omega_0 t \quad ①$$ の特殊解は？

強制振動を考える際に、

$\ddot{x} + \omega^2 x = F_0 \cos\omega_0 t$ の特殊解として、

$x(t) = C\cos\omega_0 t$ と仮定してうまくいった。

今回は、①に $\dot{x}$ が入っているので、上の形を使うと、

$\cos\omega_0 t$ と $\sin\omega_0 t$ が混ざってしまう。

①に代入して計算すると、

$$\frac{C(\omega^2 - {\omega_0}^2) - F_0}{2C\gamma\omega_0} = \tan\omega_0 t$$

左辺は定数なので、どのような定数Cをとったとしても、すべてのtでこの式が成立するようにはできない。

それなら、はじめから$\cos\omega_0 t$と$\sin\omega_0 t$の混ざった形を仮定して

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

定数　　定数

とおいてみる。

3. 強制振動＋減衰振動（ばねの復元力＋周期的な外力＋抵抗力）

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

代入

$$\dot{x} = -A\omega_0\sin\omega_0 t + B\omega_0\cos\omega_0 t$$

$$\ddot{x} = -A{\omega_0}^2\cos\omega_0 t - B{\omega_0}^2\sin\omega_0 t$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = F_0\cos\omega_0 t \quad ①$$

$$\begin{aligned}&-A{\omega_0}^2\cos\omega_0 t - B{\omega_0}^2\sin\omega_0 t\\ &\quad -2\gamma A\omega_0\sin\omega_0 t + 2\gamma B\omega_0\cos\omega_0 t\\ &\quad\quad +A\omega^2\cos\omega_0 t + B\omega^2\sin\omega_0 t = F_0\cos\omega_0 t\end{aligned}$$

整理

$$\begin{aligned}&\{-A{\omega_0}^2 + 2\gamma B\omega_0 + A\omega^2 - F_0\}\cos\omega_0 t\\ &\quad +\{-B{\omega_0}^2 - 2\gamma A\omega_0 + B\omega^2\}\sin\omega_0 t = 0\end{aligned}$$

これが t によらず常に成立するためには、

3. 強制振動＋減衰振動（ばねの復元力＋周期的な外力＋抵抗力）

$$\begin{cases} -A{\omega_0}^2 + 2\gamma B\omega_0 + A\omega^2 - F_0 = 0 \\ -B{\omega_0}^2 - 2\gamma A\omega_0 + B\omega^2 = 0 \end{cases}$$

$\alpha \cos \omega_0 t + \beta \sin \omega_0 t$

$= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin(\omega_0 t + \delta) \qquad \tan \delta = \dfrac{\alpha}{\beta}$

なので　$\alpha = 0$，$\beta = 0$

あるいは

$\cos \omega_0 t$ と $\sin \omega_0 t$ は独立な関数なので、それぞれの係数部分が0

これらから A とB を求めると、

$$A = \frac{\omega^2 - {\omega_0}^2}{(\omega^2 - {\omega_0}^2)^2 + 4\gamma^2{\omega_0}^2} F_0$$

$$B = \frac{2\gamma\omega_0}{(\omega^2 - {\omega_0}^2)^2 + 4\gamma^2{\omega_0}^2} F_0$$

3. 強制振動＋減衰振動（ばねの復元力＋周期的な外力＋抵抗力）

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = F_0 \cos\omega_0 t \quad ①$$

の特殊解は？

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

AとBに代入

$$= \frac{\omega^2-\omega_0{}^2}{(\omega^2-\omega_0{}^2)^2+4\gamma^2\omega_0{}^2} F_0 \cos\omega_0 t$$

整理

$$+ \frac{2\gamma\omega_0}{(\omega^2-\omega_0{}^2)^2+4\gamma^2\omega_0{}^2} F_0 \sin\omega_0 t$$

$$= \frac{F_0}{(\omega^2-\omega_0{}^2)^2+4\gamma^2\omega_0{}^2}\{(\omega^2-\omega_0{}^2)\cos\omega_0 t + 2\gamma\omega_0 \sin\omega_0 t\} \quad ③$$

3. 強制振動＋減衰振動（ばねの復元力＋周期的な外力＋抵抗力）

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = F_0 \cos\omega_0 t$$

① の一般解は、

$$\ddot{x}_1 + 2\gamma\dot{x}_1 + \omega^2 x_1 = 0$$

② の一般解＋③

$\gamma > \omega$、$\gamma = \omega$、$\gamma < \omega$ で場合分け

1） $\gamma > \omega$

任意定数　任意定数

$$x(t) = A_1 e^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)t} + A_2 e^{\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)t} + ③$$

2） $\gamma = \omega$

任意定数　任意定数

$$x(t) = (A_1 t + A_2)\, e^{-\gamma t} + ③$$

3） $\gamma < \omega$

任意定数　任意定数

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \cos\left(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\, t + \theta\right) + ③$$

3. 強制振動＋減衰振動（ばねの復元力＋周期的な外力＋抵抗力）

ここで、十分に時間が経過した後（$t \gg 1$）について考えてみる。

1）、2）、3）ともに、③の項だけが効いてくる。

②の一般解の項は、どれも$t \gg 1$で 0 に収束

$t \gg 1$ では、

$$x(t) \cong \frac{F_0}{(\omega^2-{\omega_0}^2)^2+4\gamma^2{\omega_0}^2}\{(\omega^2 - {\omega_0}^2)\cos\omega_0 t + 2\gamma\omega_0 \sin\omega_0 t\} \quad ③$$

特殊解なので、任意定数を含まない。

初期条件によらない

（抵抗力がない場合）

$\gamma = 0$ では強制振動の特殊解と同じ → $\omega = \omega_0$ で振幅は発散

（第7回目の7枚目スライド）

3. 強制振動＋減衰振動（ばねの復元力＋周期的な外力＋抵抗力）

ここで、十分に時間が経過した後（$t \gg 1$）について考えてみる。

$$x(t) \cong \frac{F_0}{(\omega^2-\omega_0{}^2)^2+4\gamma^2\omega_0{}^2}\underbrace{\{(\omega^2-\omega_0{}^2)\cos\omega_0 t + 2\gamma\omega_0\sin\omega_0 t\}}_{} \quad ③$$

三角関数の合成

$$\sqrt{(\omega^2-\omega_0{}^2)^2+(2\gamma\omega_0)^2}\sin(\omega_0 t+\delta)$$

$$\tan\delta = \frac{(\omega^2-\omega_0{}^2)}{2\gamma\omega_0}$$

$$x(t) \cong \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0{}^2)^2+(2\gamma\omega_0)^2}}\sin(\omega_0 t+\delta)$$

ある定数 $= C$ と置くと

$$x(t) \cong C\sin(\omega_0 t+\delta)$$

ばねの復元力＋周期的な外力＋抵抗力は、振動がはじまって十分に時間が経過した後には、

振幅 C 、角振動数 ω_0 の単振動

3. 強制振動＋減衰振動（ばねの復元力＋周期的な外力＋抵抗力）

ここで、十分に時間が経過した後（$t \gg 1$）について考えてみる。

$$x(t) \cong C \sin(\omega_0 t + \delta)$$

$$C = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - {\omega_0}^2)^2 + (2\gamma\omega_0)^2}}$$ について