秋第七回課題解答例

19.1（陰関数の微分公式） (1) $x^4+y^4-4xy=0$ とする．y を x の関数と考えてこの式の両辺を x で微分すると

$$(*)\qquad x^3+y^3\frac{dy}{dx}-y-x\frac{dy}{dx}=0$$

である．これから dy/dx は

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^3-y}{x-y^3}$$

であることがわかる．

(2) 以下，$y'=dy/dx$, $y''=d^2y/dx^2$ と書く．$(*)$ の両辺を x で微分すると

$$3x^2+3y^2(y')^2+y^3y''-y'-y'-xy''=0$$

である．これを y'' について解いて $y'=(x^3-y)/(x-y^3)$ を代入すると

$$\begin{aligned}
y''&=\frac{3x^2+3y^2\frac{(x^3-y)^2}{(x-y^3)^2}-2\frac{x^3-y}{x-y^3}}{x-y^3}\\
&=\frac{3x^2(x-y^3)^2+3y^2(x^3-y)^2-2(x^3-y)(x-y^3)}{(x-y^3)^2}\\
&=\frac{3x^4-6x^3y^3+3x^2y^6+3y^2x^6-6x^3y^3+3y^4-2x^4+2x^3y^3+2yx-2y^4}{(x-y^3)^3}\\
&=\frac{xy(4-6x^2y^2+3xy^5+3x^5y-6x^2y^2+2x^2y^2+2)}{(x-y^3)^3}\quad[\because\ x^4+y^4=4xy]\\
&=\frac{2xy(3+x^2y^2)}{(x-y^3)^3}\quad[\because\ x^4+y^4=4xy]
\end{aligned}$$

である．

19.2 (Lagrange multiplier) (1) 制限条件 $g(x,y)=x^2+y^2-1=0$ のもとで $f(x,y)=x^3-x+y^2$ の最大値と最小値を求める．Lagrange multiplier を使う．極値をとる点の候補 (x,y) と未定乗数 λ は

$$\begin{aligned}
3x^2-1&=\lambda(2x)\\
2y&=\lambda(2y)\\
x^2+y^2-1&=0
\end{aligned}$$

を満たす．第二式から $y=0$ または $\lambda=1$ である．$y=0$ だとすると $x=\pm1$, $\lambda=\pm1$（復号同順）．第三式から $(x,y)=(\pm1,0)$．すると $f(x)=x(x^2-1)$ だから $f(\pm1,0)=0$．$\lambda=1$ だとすると第一式から $3x^2-1=2x$ だから $(3x+1)(x-1)=0$．よって $x=1$ または $x=-\frac{1}{3}$．第三式から $x=1$ なら $(x,y)=(1,0)$ ゆえ $f(1,0)=0$．$x=-\frac{1}{3}$ なら第三式から $y=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$ だから $f(-\frac{1}{3},\pm\frac{2\sqrt{2}}{3})=\frac{32}{27}$．よって，最大値は $f(-\frac{1}{3},\pm\frac{2\sqrt{2}}{3})=\frac{32}{27}$, 最小値は $f(\pm1,0)=0$.

(2) 制限条件 $g(x,y)=x^2+y^2-1=0$ のもとで $f(x,y)=x^2+xy+y^2+x+y$ の最大値と最小値を求める．Lagrange multiplier を使う．極値をとる点の候補 (x,y) と未定乗数 λ は

$$\begin{aligned}
2x+y+1&=\lambda(2x)\\
x+2y+1&=\lambda(2y)\\
x^2+y^2-1&=0
\end{aligned}$$

を満たす．第一式と第二式の差をとると $x-y=2\lambda(x-y)$ だから $x=y$ または $\lambda=1/2$．$x=y$ なら第三式から $x=y=\pm1/\sqrt{2}$ である．このとき $f(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})=(3/2)+\sqrt{2}$, $f(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})=(3/2)-\sqrt{2}$.

$\lambda = 1/2$ なら第一式と第二式は $x+y+1=0$ となるから $(x,y)=(-1,0)$ または $(x,y)=(0,-1)$．このとき $f(-1,0)=f(0,-1)=0$ である．以上から，最大値は $f(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})=(3/2)+\sqrt{2}$, 最小値は $f(-1,0)=f(0,-1)=0$ である．

(3) 制限条件 $g(x,y)=x^2+y^2-1=0$ のもとで $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ の最大値と最小値を求める．Lagrange multiplier を使う．極値をとる点の候補 (x,y) と未定乗数 λ は

$$\begin{aligned} 3x^2-3y &= \lambda(2x) \\ 3y^2-3x &= \lambda(2y) \\ x^2+y^2-1 &= 0 \end{aligned}$$

を満たす．第一式と第二式の差をとると $3(x-y)(x+y)+3(x-y)=2\lambda(x-y)$ だから

$$x=y \tag{0}$$

または

$$3(x+y)+3=2\lambda \tag{1}$$

である．もし $x=y$ なら第三式から $x=y=\pm 1/\sqrt{2}$ である．これらのとき

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{3}{2}\ ,\quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{3}{2} \tag{$*$}$$

である．次に (1) の場合を考える．第一式と第二式の和をとって第三式を使うと

$$3-3(x+y)=2\lambda(x+y) \tag{2}$$

を得る．(1)(2) から λ を消去すると

$$3-3(x+y)=\{3(x+y)+3\}(x+y)\ .$$

よって

$$x+y=\sqrt{2}\pm 1$$

であるが，このうち，直線 $x+y=\sqrt{2}+1$ は円周 $x^2+y^2=1$ と交わらないので考えなくていい．よって

$$x+y=\sqrt{2}-1 \tag{3}$$

である．(3) を自乗して第三式を使うと

$$xy=1-\sqrt{2} \tag{4}$$

を得る．(3)(4) から

$$(x,y)=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\pm\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2},\frac{\sqrt{2}-1}{2}\mp\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}\right)$$

に絞られる．このとき，直接計算すると

$(**)$

$$f(x,y)=x^3+y^3-3xy=(x+y)^3-3xy(x+y)-3xy=(\sqrt{2}-1)^3-3(1-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)-3(1-\sqrt{2})=-1+2\sqrt{2}$$

である．$(*)$ と $(**)$ から，最大値は

$$f\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\pm\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2},\frac{\sqrt{2}-1}{2}\mp\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}\right)=-1+2\sqrt{2}$$

であり，最小値は

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{2}$$

である．同じ結論は，$x = \cos t$, $y = \sin t$ を代入して $h(t) = f(\cos t, \sin t)$ の増減を調べることによっても得られる．各自で確認すること．また，この問題の結果が教科書 129 ページの図と整合的であることも各自で確認してほしい．

19.3 (1) 単位円盤の内部に極値をとる点があるかも知れない．まずそれを調べる．$f_x = 3x^2 - 1$, $f_y = 2y$. $f_x = f_y = 0$ を満たして単位円盤の内部にあるのは $(\pm 1/\sqrt{3}, 0)$ であり，$f(\mp 1/\sqrt{3}, 0) = \pm 2/3\sqrt{3}$（復号同順）である．**19.1** (1) の結果と合わせると，$x^2+y^2 \leq 1$ における $f(x,y)$ の最大値は $f(-1/3, \pm 2\sqrt{2}/3) = \frac{32}{27}$（単位円周上でとる）, 最小値は $f(1/\sqrt{3}, 0) = -2/3\sqrt{3}$（内部でとる）である．

(2) 単位円盤の内部に極値をとる点があるかも知れない．まずそれを調べる．$f_x = 2x + y + 1$, $f_y = x+2y+1$．$f_x = f_y = 0$ を満たし単位円盤の内部にあるのは $(-1/3, -1/3)$ であり $f(-1/3, -1/3) = -1/3$ である．**19.1**(2) の結果と合わせると，$x^2+y^2 \leq 1$ における $f(x,y)$ の最大値は $f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = (3/2)+\sqrt{2}$（単位円周上でとる），最小値は $f(-1/3, -1/3) = -1/3$（内部でとる）である．

(3) 教科書の例題 18.5(1) によると $f(x,y)$ は単位円盤の内部に極値をとる点を持たない．よって $x^2+y^2 \leq 1$ における $f(x,y)$ の極値を考えることは，$x^2 + y^2 = 1$ における極値を考えることと同じである．