2024 年度微積分 II 最終課題（期末テスト）

以下の問題から五題を選択して解答せよ．

1. 次の 2 変数関数に対し $f_x = f_y = 0$ となる点をすべて求め，この点で極値をとるかどうか，極値をとるならそれが極小か極大かを判定し，極値をすべて求めよ．

(1) $f(x, y) = 3xy - x^{-1} + 9y^{-1}$.

(2) $f(x, y) = x^3 - xy + \dfrac{1}{2}y^2$.

2. (1) $f(x, y)$ を C^2 級の 2 変数関数とする． f_{xy} が恒等的に 0 のとき，$f(x, y)$ はどのような関数か？

(2) $g(u, v)$ を C^2 級の 2 変数関数とする． $g_{uu} - g_{vv}$ が恒等的に 0 のとき，$g(u, v)$ はどのような関数か？

ヒント：(1) は (2) のヒント．座標軸を $\pi/4$ 回転させると...

3. 関係式

$$F(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 3y = 0$$

によって定められる関数 $y = f(x)$ について次の問に答えよ．

(1) $y' = \dfrac{dy}{dx}$ を x, y で表せ.

(2) $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を x, y, y' で表せ.

(3) 関数 $y = f(x)$ のすべての極値を求めよ．

(4) 曲線 $x^2 - xy + y^2 - 3y = 0$ の概形を描き，(3) の結果を図形的に説明せよ．

4. 次の二題から一題選択（両方に正解したらボーナス点進呈）．

(1) 二次曲線 $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 - 2 = 0$ の概形を描け.

(2) 制約条件 $g(x, y) = x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 - 2 = 0$ のもとで $f(x, y) = x^2 + y^2$ の最大値と最小値を求めよ．

5. 積分領域 D を図示し，次の 2 重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D x\,dxdy.\ D: x^2 + y^2 \leq 2x.$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{x^2}{(x+y)^3}dxdy.\ D: x \geq 0,\ y \geq 0,\ 1 \leq x + y \leq 2.$

ヒント：$x = z(1-t),\ y = zt$ という変数変換を考える．

(3) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy.\ D: x \geq 0,\ y \geq 0,\ x \leq x^2 + y^2 \leq 1.$

ヒント：積分領域 D を図示して，それを極座標で表して (r, θ) 空間のどんな領域になるかを調べる．

6. 積分

$$\int_0^1 dy \int_{3y}^3 \frac{dx}{(1+x^2)^3}$$

はどのような領域での積分か，領域を図示して積分の値を求めよ．

7. 次の広義積分の収束，発散を判定し，収束する場合には積分の値を求めよ：

$$\iint_{0<x^2+y^2<1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}\ .$$

ただし α は実数である（実数 α の値によって答が変わることに注意！）．

8. 次の 2 重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy\ .$

(2) $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-2xy\cos\alpha-y^2}dxdy$.

ただし α は $0<\alpha\leq\frac{\pi}{2}$ を満たす定数である．

ヒント：(1) 極座標に変換してみる．(2) (1) がヒントである．

9. 2 重積分

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2-xy-y^2}dxdy$$

を求めよ．

ヒント：e の肩に乗っている 2 次式を平方完成し，適当な 1 次変換で変数変換してから極座標に変換せよ．このとき，積分の変数変換における領域の対応を考えなければならない．変数変換のヤコビアン（教科書 §22 の J）を忘れないこと．