力学 1

高嶋圭史、大戸達彦
名古屋大学大学院工学研究科材料デザイン工学専攻

はじめに

講義予定日

4月：15, 22、（火）30

5月：13, 20, 27

6月：3, 10, 17, 24

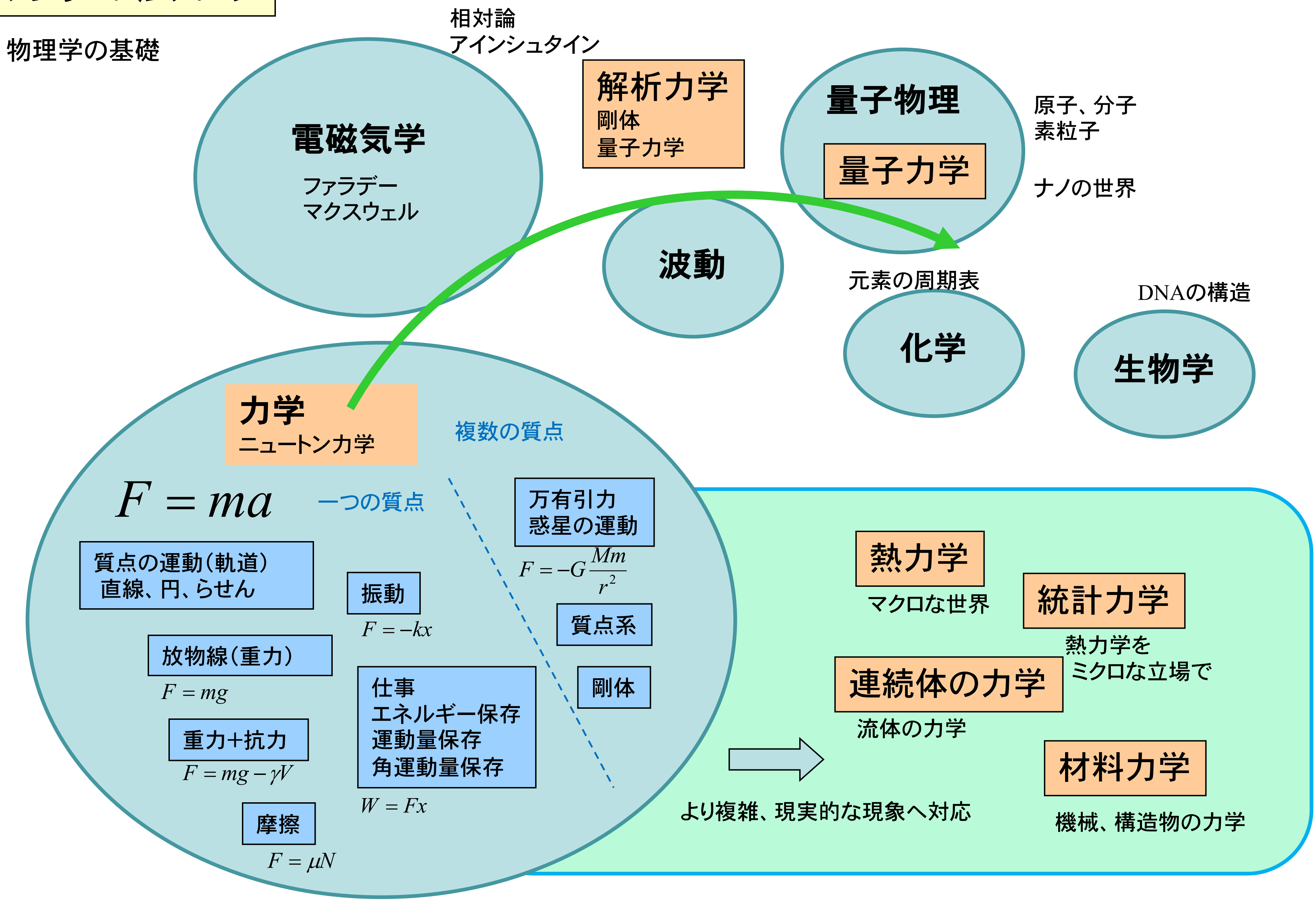
7月：1, 8, （月・祝）15, 22

7/29？

講義内容

1. ベクトル
2. 運動の表し方
3. 座標系
4. ニュートンの運動の法則
5. 運動方程式
6. 運動量と力積
7. 仕事とエネルギー

力学の広がり



物理学の基礎
相対論
アインシュタイン
電磁気学
ファラデー
マクスウェル
解析力学
剛体
量子力学
量子物理
量子力学
原子、分子
素粒子
ナノの世界
波動
元素の周期表
化学
DNAの構造
生物学
力学
ニュートン力学
$F = ma$
一つの質点
複数の質点
質点の運動(軌道)
直線、円、らせん
振動
$F = -kx$
放物線(重力)
$F = mg$
重力+抗力
$F = mg - \gamma V$
摩擦
$F = \mu N$
仕事
エネルギー保存
運動量保存
角運動量保存
$W = Fx$
万有引力
惑星の運動
$F = -G\dfrac{Mm}{r^2}$
質点系
剛体
熱力学
マクロな世界
統計力学
熱力学を
ミクロな立場で
連続体の力学
流体の力学
材料力学
機械、構造物の力学
より複雑、現実的な現象へ対応

ギリシャ文字

大文字	小文字		大文字	小文字	
A	α	アルファ	N	ν	ニュー
B	β	ベータ	Ξ	ξ	グザイ
Γ	γ	ガンマ	O	o	オミクロン
Δ	δ	デルタ	Π	π	パイ
E	ε	イプシロン	P	ρ	ロー
Z	ζ	ゼータ	Σ	σ	シグマ
H	η	イータ	T	τ	タウ
Θ	θ, ϑ	シータ	Υ	υ	ウプシロン
I	ι	イオタ	Φ	ϕ, φ	ファイ
K	κ	カッパ	X	χ	カイ
Λ	λ	ラムダ	Ψ	ψ	プサイ
M	μ	ミュー	Ω	ω	オメガ

大きさの接頭語

10^{18}	E	エクサ（exa）
10^{15}	P	ペタ（peta）
10^{12}	T	テラ（tera）
10^{9}	G	ギガ（giga）
10^{6}	M	メガ（mega）
10^{3}	k	キロ（kilo）
10^{2}	h	ヘクト（hecto）
10	da	デカ（deca）
10^{-1}	d	デシ（deci）
10^{-2}	c	センチ（centi）
10^{-3}	m	ミリ（milli）
10^{-6}	μ	マイクロ（micro）
10^{-9}	n	ナノ（nano）
10^{-12}	p	ピコ（pico）
10^{-15}	f	フェムト（femto）
10^{-18}	a	アト（atto）

参考図書

1. ランダウ=リフシッツ理論物理学教程　力学

2. ファインマン物理学　力学

3. Classical MECHANICS 3rd Edition

   H. Goldstein, C. Poole, J. Safko

   ＊力学という学問に対する参考書

---

4. 物理学序論としての　力学

   藤原邦男 著、東京大学出版会

力学1では、ひとつの

質点の**運動**について考察する

質点

質量・・・・・ m

大きさ・・・・無視

運動

時刻 t における

位置・・・→　位置ベクトル

速度・・・→　速度ベクトル

によって表す

時刻 t における

位置・・・→　位置ベクトル（$\vec{r}(t)$）

速度・・・→　速度ベクトル（$\vec{v}(t)$）

ニュートンの運動の三法則

力

加速度 $\vec{a} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

運動方程式（第2法則）　$\vec{F} = m\vec{a}$

微分方程式

微分方程式を解く

$\vec{r}(t) =$ ・・・・

$\vec{v}(t) =$ ・・・・

運動方程式（微分方程式）

ある瞬間（時刻 t ）の力と加速度の関係

積分

保存力、ポテンシャル（位置エネルギー）

運動全体の大局的な様子

・仕事と力学的エネルギー

・力学的エネルギーの保存、運動量の保存

（ニュートンの第3法則）

（運動している間で一定、運動の始めと終わりで変化しない）

ベクトル

ベクトル

位置ベクトル
速度ベクトル
力

さまざまな物理量が
ベクトルで表される

ベクトル・・・大きさ と 向き
（有向線分で表現）

スカラー・・・大きさだけ（質量、エネルギー、・・）

ベクトルの演算

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ を満たす $\vec{0}$ が存在する

$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$ を満たす $-\vec{a}$ が存在する

$(\lambda\mu)\vec{a}=\lambda(\mu\vec{a})$ （λ,μ はスカラー）

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$$

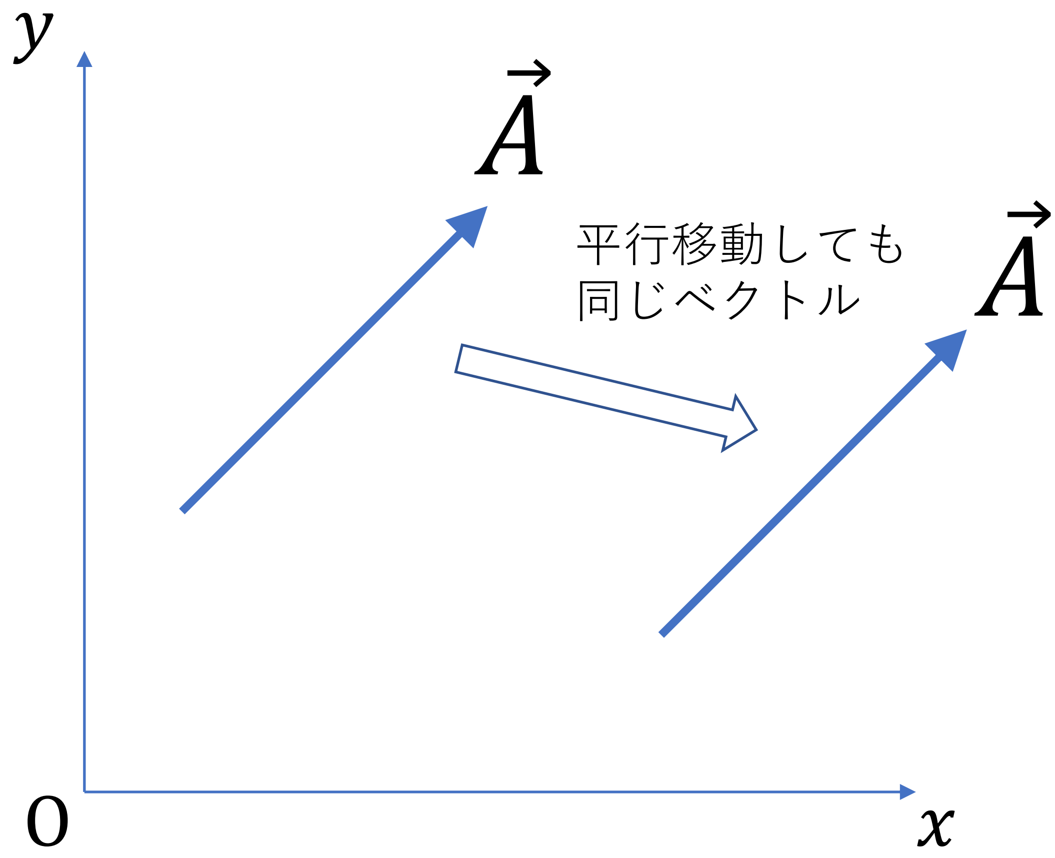
$$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$$

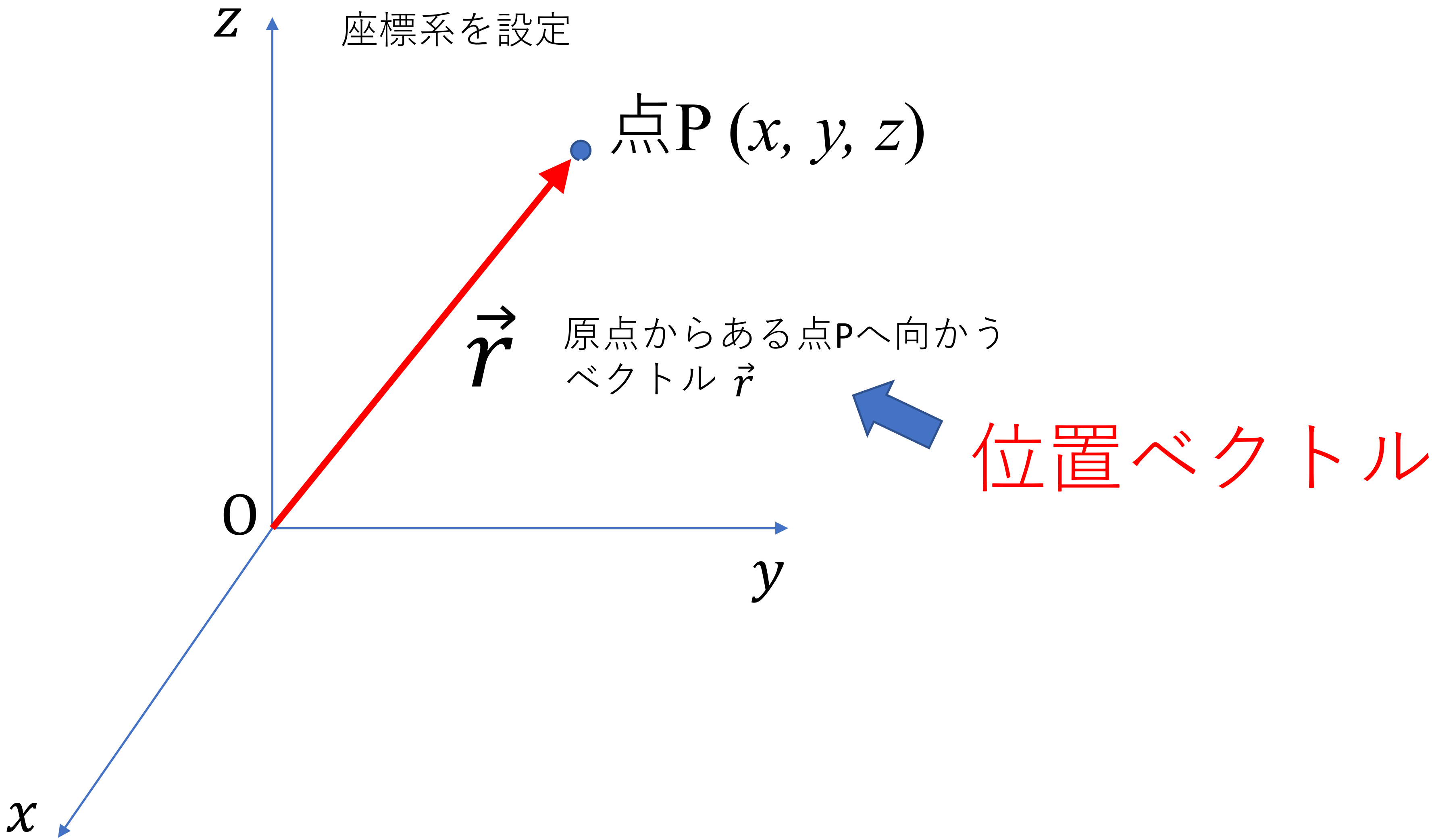
$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

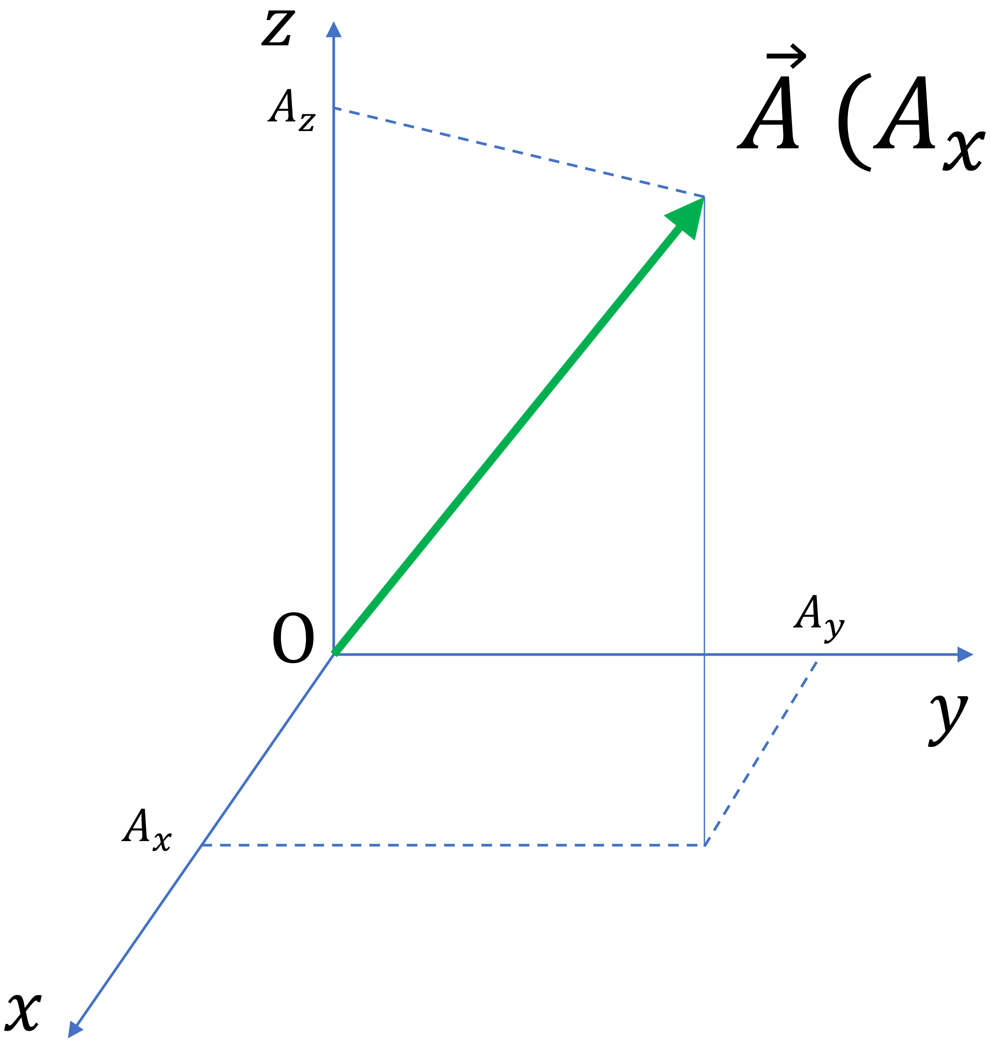
ベクトルは一般には座標から独立している



位置ベクトル（座標系（原点）に依存している）



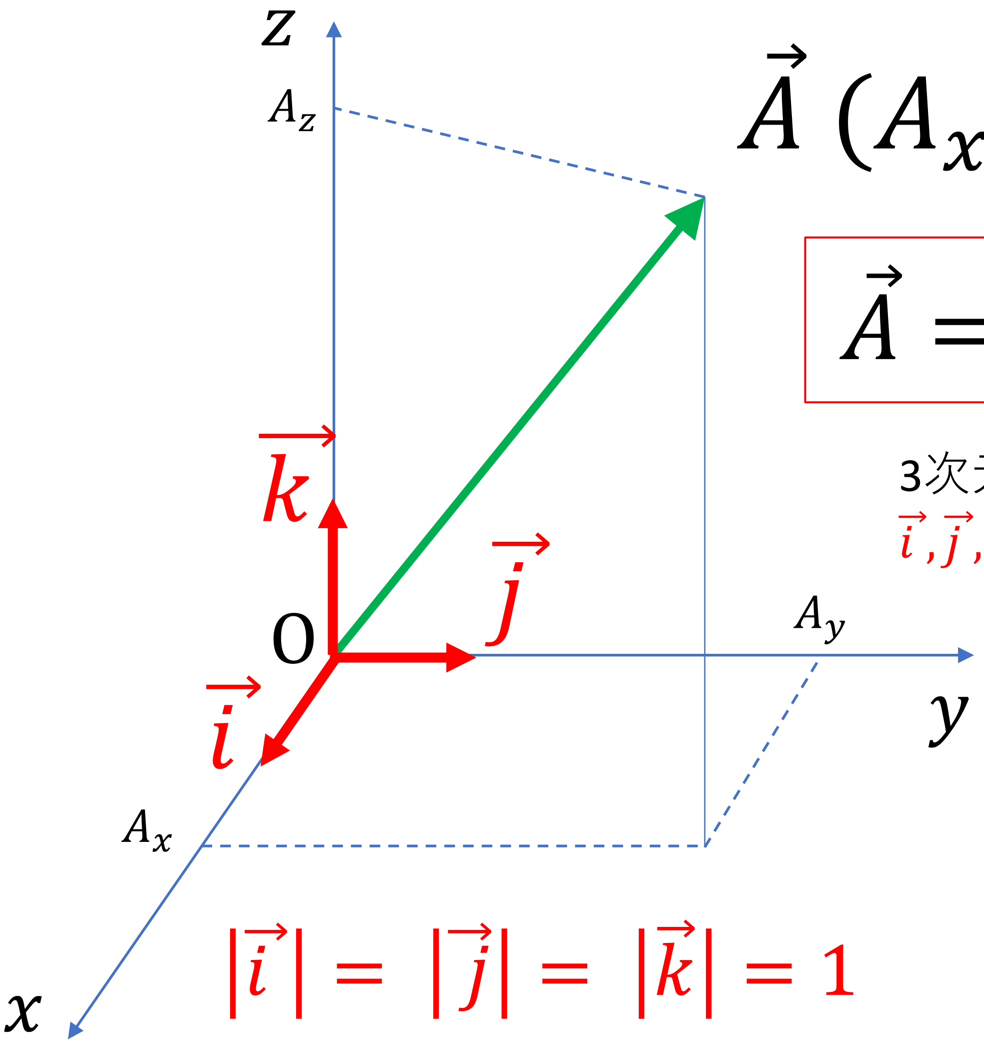
位置ベクトルの表し方



$\vec{A}\,(A_x, A_y, A_z)$

（位置）ベクトルの表し方

（単位ベクトルを用いた表し方）



$$\vec{A}\,(A_x, A_y, A_z)$$

$$\boxed{\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}}$$

3次元空間のすべてのベクトルは
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ の組み合わせで表すことができる

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ は互いに
独立なベクトル

（$\vec{i} \neq a\vec{j}$ など）

ある定数

ベクトルの（時間による）微分

成分を使って考えると

$$\frac{d}{dt}\vec{A} = \frac{d}{dt}\left(A_x\,\vec{i} + A_y\,\vec{j} + A_z\,\vec{k}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(A_x\,\vec{i}\right) + \frac{d}{dt}\left(A_y\,\vec{j}\right) + \frac{d}{dt}\left(A_z\,\vec{k}\right)$$

$$= \frac{dA_x}{dt}\,\vec{i} + A_x\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dA_y}{dt}\,\vec{j} + A_y\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dA_z}{dt}\,\vec{k} + A_z\frac{d\vec{k}}{dt}$$

$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ は定ベクトルなので、 $\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0}$

（今後は $\vec{0}$ を 0 と書く）

$$= \frac{dA_x}{dt}\,\vec{i} + \frac{dA_y}{dt}\,\vec{j} + \frac{dA_z}{dt}\,\vec{k}$$

ベクトルの内積の（時間による）微分

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right) = \frac{d}{dt}\left(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z\right)$$

$$= \frac{dA_x}{dt}B_x + A_x\frac{dB_x}{dt} + \frac{dA_y}{dt}B_y + A_y\frac{dB_y}{dt} + \frac{dA_z}{dt}B_z + A_z\frac{dB_z}{dt}$$

並べ替え

$$= \frac{dA_x}{dt}B_x + \frac{dA_y}{dt}B_y + \frac{dA_z}{dt}B_z + A_x\frac{dB_x}{dt} + A_y\frac{dB_y}{dt} + A_z\frac{dB_z}{dt}$$

$$= \left(\frac{d}{dt}\vec{A}\right)\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\left(\frac{d}{dt}\vec{B}\right)$$

$\vec{A} = \vec{B}$の場合

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\cdot\vec{A}\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{A}^2\right) = \left(\frac{d}{dt}\vec{A}\right)\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\left(\frac{d}{dt}\vec{A}\right) = 2\,\vec{A}\cdot\left(\frac{d}{dt}\vec{A}\right)$$

補足

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \frac{d}{dt}\left(\underline{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}\right)$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \left(A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}\right)\cdot\left(B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}\right)$$

$$= A_x\vec{i}\cdot B_x\vec{i} + A_x\vec{i}\cdot B_y\vec{j} + A_x\vec{i}\cdot B_z\vec{k}$$
$$+ A_y\vec{j}\cdot B_x\vec{i} + A_y\vec{j}\cdot B_y\vec{j} + A_y\vec{j}\cdot B_z\vec{k}$$
$$+ A_z\vec{k}\cdot B_x\vec{i} + A_z\vec{k}\cdot B_y\vec{j} + A_z\vec{k}\cdot B_z\vec{k}$$

$$= (A_xB_x)\vec{i}\cdot\vec{i} + (A_xB_y)\vec{i}\cdot\vec{j} + (A_xB_z)\vec{i}\cdot\vec{k}$$
$$+ (A_yB_x)\vec{j}\cdot\vec{i} + (A_yB_y)\vec{j}\cdot\vec{j} + (A_yB_z)\vec{j}\cdot\vec{k}$$
$$+ (A_zB_x)\vec{k}\cdot\vec{i} + (A_zB_y)\vec{k}\cdot\vec{j} + (A_zB_z)\vec{k}\cdot\vec{k}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1\\ \vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = \cdot\ \cdot\ \cdot = 0\end{gathered}}$$

$$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

$$\left(\frac{d}{dt}\vec{A}\right)\cdot\vec{B} = \left(\frac{d}{dt}\left(A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}\right)\right)\cdot\left(B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}\right)$$

$$= \left(\frac{d}{dt}\left(A_x\vec{i}\right) + \frac{d}{dt}\left(A_y\vec{j}\right) + \frac{d}{dt}\left(A_z\vec{k}\right)\right)\cdot\left(B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}\right)$$

$$= \left(\frac{dA_x}{dt}\vec{i} + \frac{dA_y}{dt}\vec{j} + \frac{dA_z}{dt}\vec{k}\right)\cdot\left(B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}\right)$$

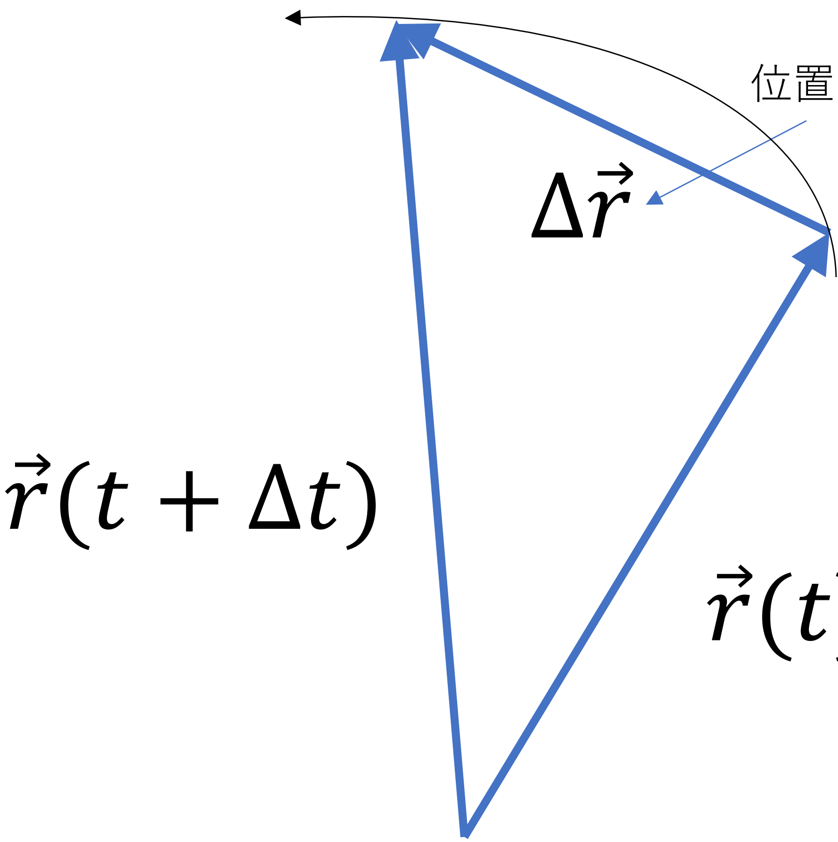
$$= \frac{dA_x}{dt}B_x + \frac{dA_y}{dt}B_y + \frac{dA_z}{dt}B_z$$

ベクトルの微分を幾何学的に考えてみる

例えば、位置ベクトル $\vec{r}(t)$ の微分

Δt はわずかな時間を想定

時刻が t から $t+\Delta t$ に進んだ場合に、ある質点の位置が $\vec{r}(t)$ から $\vec{r}(t+\Delta t)$ に移動したとき

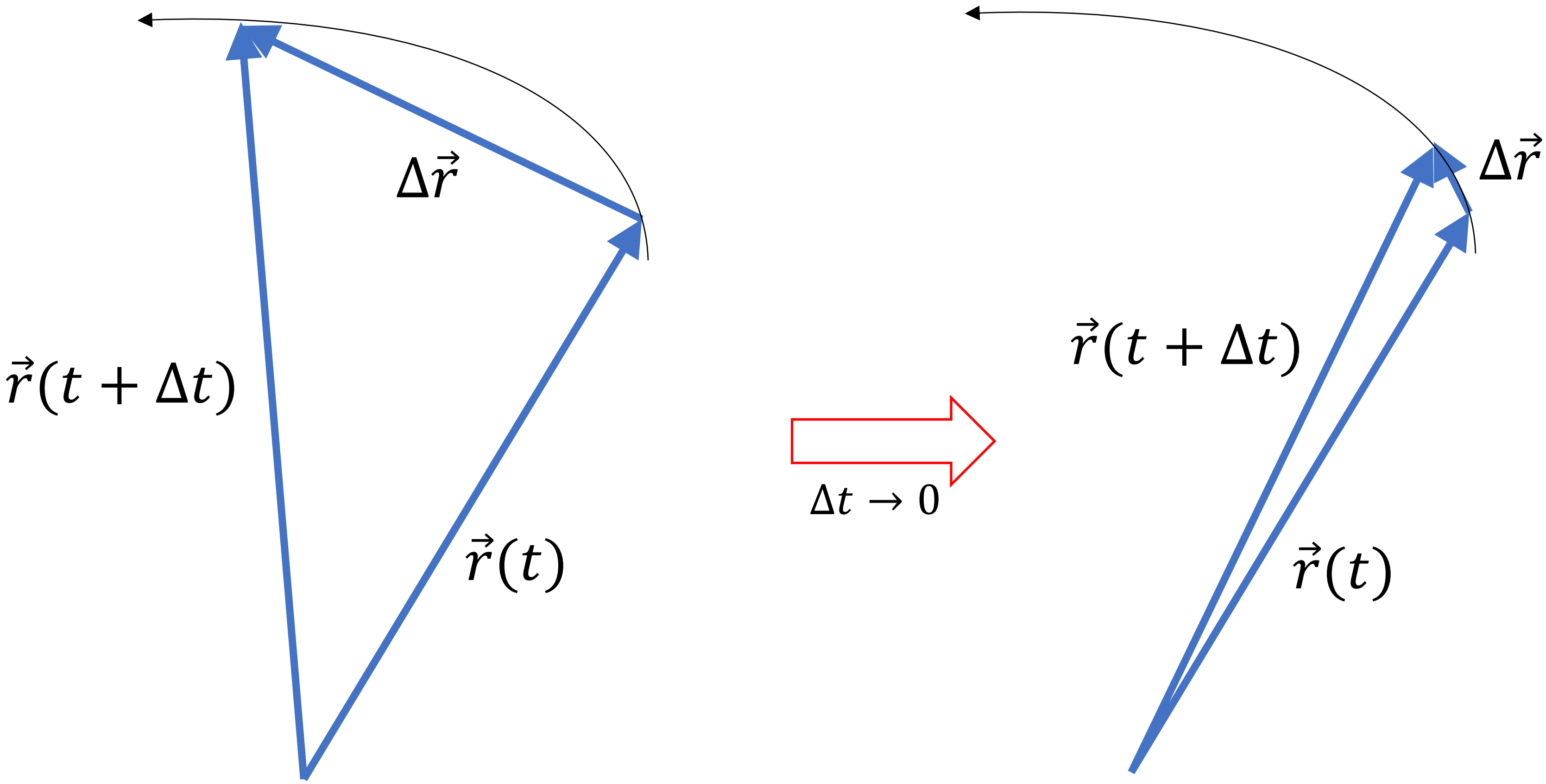


位置ベクトルの変化 = 変位ベクトル

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

ベクトルの微分を幾何学的に考えてみる

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$



ニュートンの記号について

↓

物理学（力学）で使用される、時間に関する微分の記号

時間 t による微分

$$\frac{d}{dt}x = \dot{x}$$

例えば

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}^2\right) = 2\,\vec{A}\cdot\left(\frac{d}{dt}\vec{A}\right) = 2\,\vec{A}\cdot\dot{\vec{A}}$$

速度ベクトルと加速度ベクトル

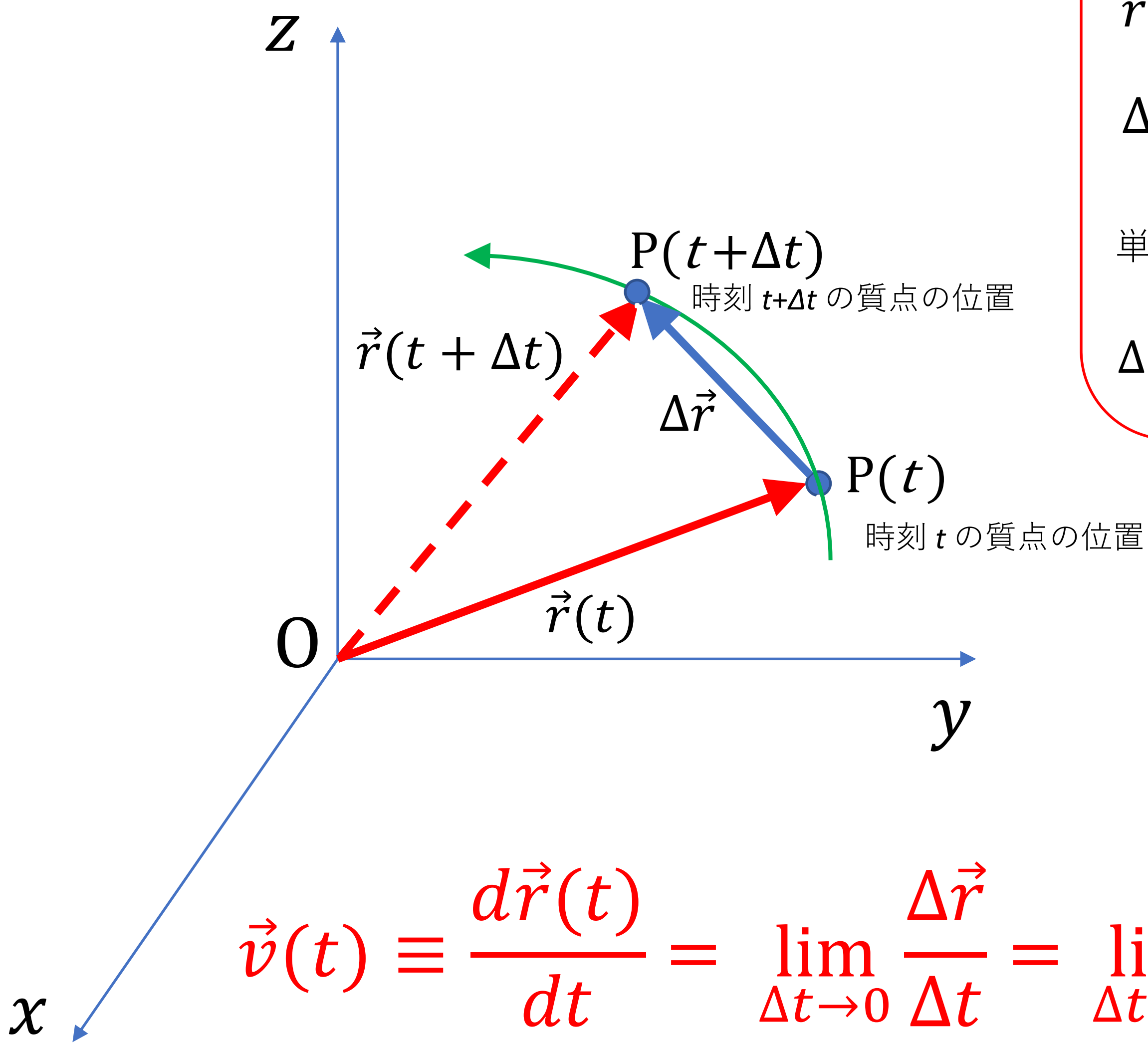
$$\boxed{\text{位置ベクトル} \quad \vec{r}(t)}$$

質点の位置

$$\boxed{\text{速度ベクトル} \quad \vec{v}(t) \equiv \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t)}$$

定義

速度ベクトル



$$\vec{r}(t+\Delta t)=\vec{r}(t)+\Delta\vec{r}$$

$$\Delta\vec{r}=\ \vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)$$

単位時間当たりの平均の変位は $\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

$\Delta t\rightarrow 0$ とした極限値が速度ベクトル $\vec{v}(t)$

$$\vec{v}(t)\equiv\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\rightarrow 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\rightarrow 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\ \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

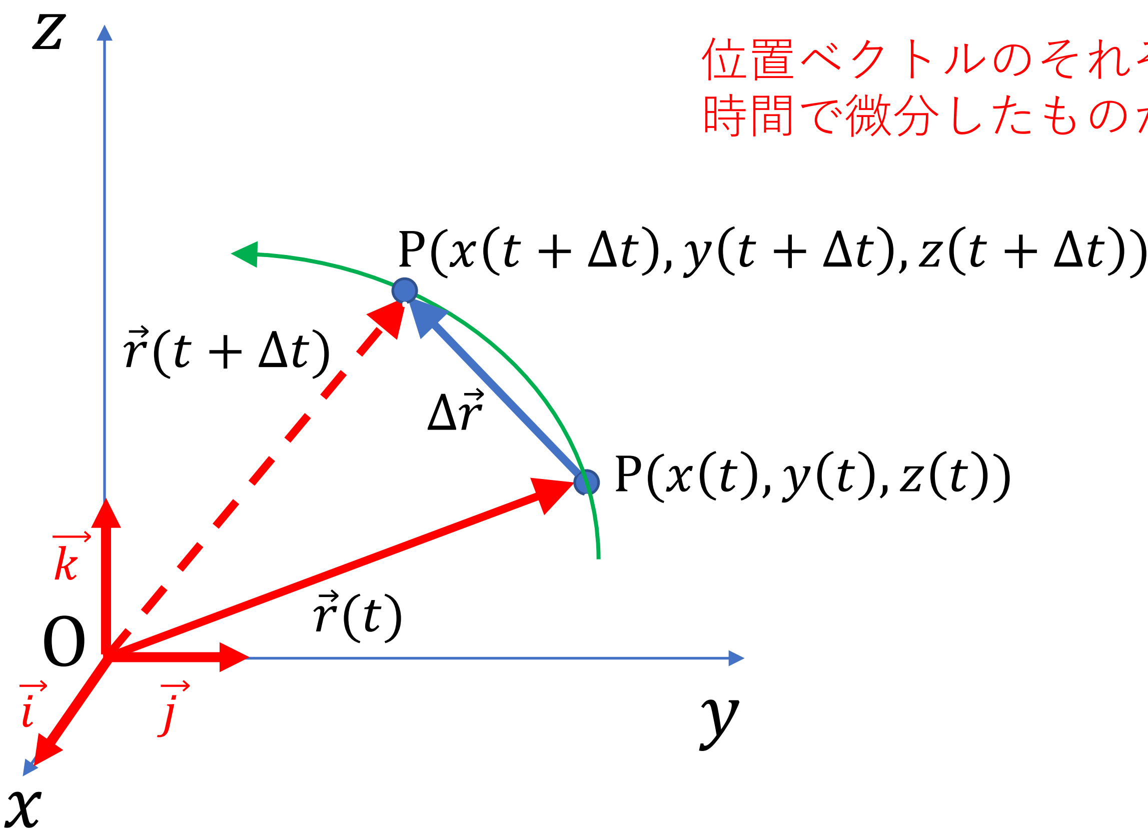
速度ベクトルの成分は？

$$\vec{r}\,(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$$

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}\,(t) = \dot{x}(t)\,\vec{i} + \dot{y}(t)\,\vec{j} + \dot{z}(t)\,\vec{k}$$

$$\vec{v}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)\,)$$

位置ベクトルのそれぞれの成分を
時間で微分したものが速度ベクトルの成分となる

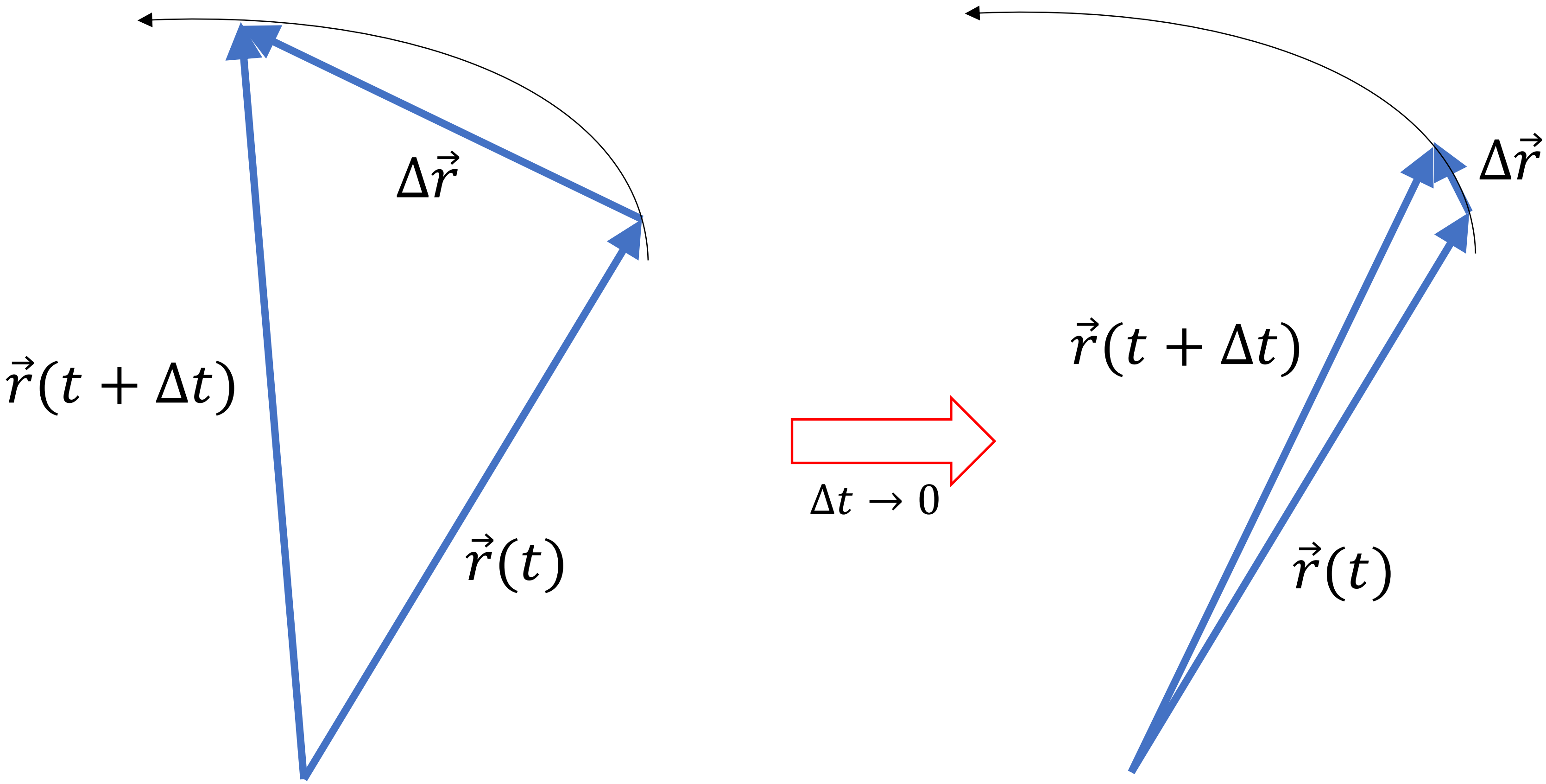


加速度ベクトル

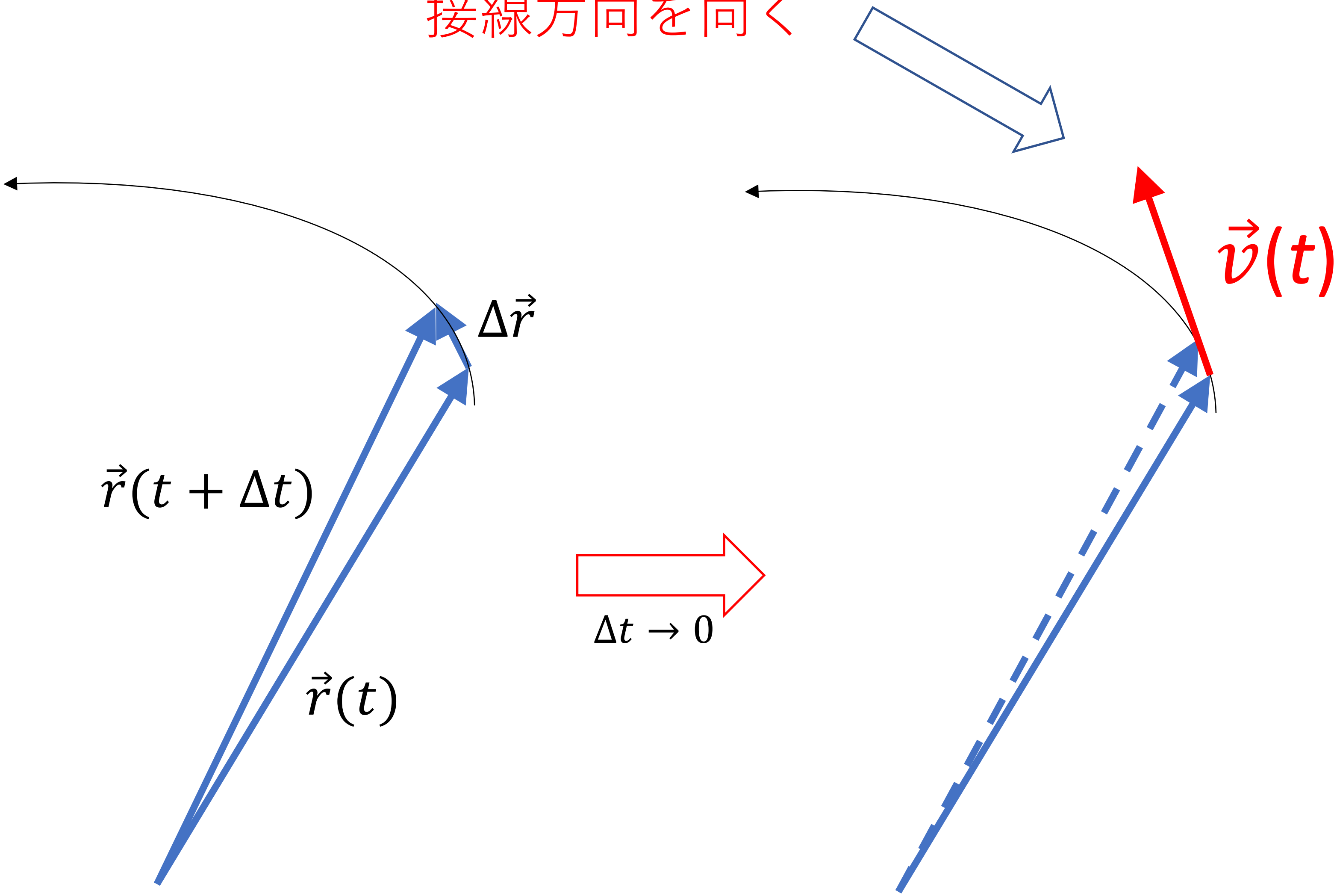
まず、

速度ベクトルは、$\Delta t \to 0$ での $\dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ だった。

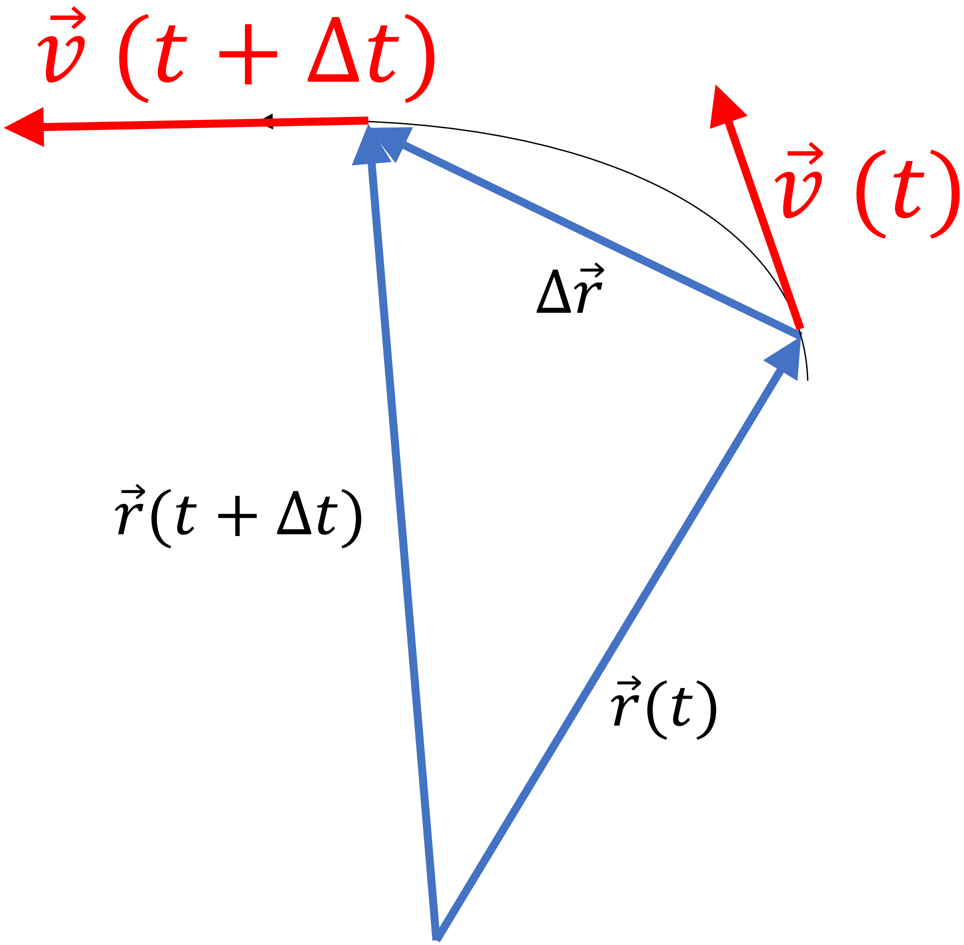
これは$\Delta \vec{r}$ と同じ向きのベクトル



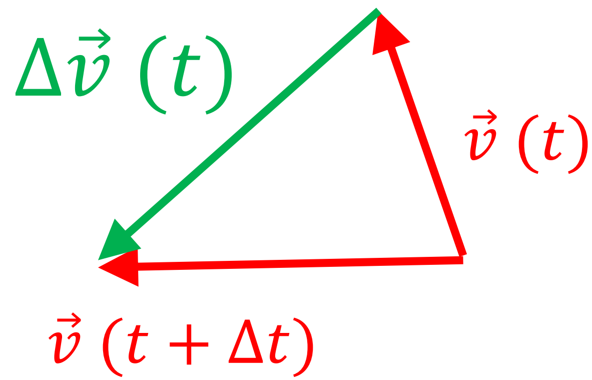
速度ベクトルは、質点が移動する軌道の
接線方向を向く



時刻 t と $t+\Delta t$ における速度ベクトルは、



速度ベクトルだけ抜き出して、
始点を合わせて書くと、



$$\vec{v}(t+\Delta t)=\vec{v}(t)+\Delta\vec{v}$$

$$\Delta\vec{v}=\ \vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)$$

単位時間当たりの平均の速度ベクトルの変化は $\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

$\Delta t \to 0$ とした極限値が加速度ベクトル $\vec{a}(t)$

$$\vec{a}(t) \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

加速度ベクトルの成分

$$\vec{v}\,(t) = v_x(t)\,\vec{i} + v_y(t)\,\vec{j} + v_z(t)\,\vec{k}$$

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}\,(t) = \dot{v}_x(t)\,\vec{i} + \dot{v}_y(t)\,\vec{j} + \dot{v}_z(t)\,\vec{k}$$

$$\vec{a}(t) = (\dot{v}_x(t), \dot{v}_y(t), \dot{v}_z(t))$$

速度ベクトルのそれぞれの成分を
時間で微分したものが加速度ベクトルの
成分となる

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \dot{v_x}(t)\,\vec{i} + \dot{v_y}(t)\,\vec{j} + \dot{v_z}(t)\,\vec{k}$$

$$= \ddot{x}(t)\,\vec{i} + \ddot{y}(t)\,\vec{j} + \ddot{z}(t)\,\vec{k}$$

ニュートンの記号

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$$