問題用紙

2024 年度 線形代数 II (イェーリッシュ) 期末テスト (１月２３日実施)

- 終了時間の前に退出を希望する場合は挙手で知らせること.
- 開始の合図があるまで開いてはいけない.

2024 年度 線形代数 II (イェーリッシュ) 期末テスト (１月２３日実施)

次の問 (1) ~ (8) に答えよ.(40 点満点).

$\mathbb{R}^n$ の内積は標準的なものとする.

(1) (６点) 次の行列は対角化できるか調べ, 対角化できれば対角化せよ, 対角化できなければその理由を説明せよ.

$$\text{(a)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \quad \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(2) (5 点) 次の $\mathbb{R}^3$ の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ に対して,

$$\langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r \rangle \quad (1 \leq r \leq 3)$$

を満たす正規直交基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ を求めよ.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(3) (4 点) $P, Q \in M(n, n)$ が直交行列ならば, 積 PQ も直交行列であることを示せ.

(4) (8 点) 次の行列 A を直交行列を用いて対角化せよ.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Hint: A の固有値は $\lambda_1 = -1$ と $\lambda_2 = 2$ である.

(5) (4 点) 線型変換

$$T:\mathbb{R}[x]_2\to\mathbb{R}[x]_2,\quad T(f(x))=7f(x)+xf'(x)+f''(x)$$

に対して,$\mathbb{R}[x]_2$ の基底 $\{1,x,x^2\}$ に関する T の表現行列 A を求めよ.

(6) (4 点) 次の線形変換 T の各固有値 λ について固有空間 $W(\lambda;T)$ を求めよ.

$$T(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0\\0&0&2&1&0\\0&0&0&2&0\\0&0&0&0&3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^5$$

(7) (5 点) 線形写像

$$T(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&1&-1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$$

に対して,$\mathbb{R}^3$ の基底 $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ と $\mathbb{R}^2$ の基底 $\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$ に関する表現行列を求めよ.

(8) (4 点) 次の行列 $A\in M(2,2)$ に対して,$A^{67}+A^3-A$ を求めよ.

$$A=\begin{bmatrix}0&-1\\1&-1\end{bmatrix}$$