Q-过程及应用

蒋辉

南京航空航天大学数学系

November 30, 2016

假定随机过程 $X=\{X_t,t\in\mathbb{T}\}$ 的时间参数集 $\mathbb{T}=[0,\infty)$, 且状态空间 $\mathbb{E}$ 为离散的, 即 $\mathbb{E}=\{i_1,\ldots\}$.

■ 定义: 称 X 为Q-过程 (时间连续状态离散的马氏过程), 若对于任意的 $n\geq 1$ 以及 $0\leq t_1<t_2<\cdots<t_n$ 和 $i_1,\ldots,i_n\in\mathbb{E}$, 有

$$P\left(X_{t_n}=i_n\middle|X_{t_{n-1}}=i_n,X_{t_{n-2}}=i_{n-2},\ldots,X_{t_1}=i_1\right)=P\left(X_{t_n}=i_n\middle|X_{t_{n-1}}=i_{n-1}\right). \tag{1}$$

注:

- (1) 表示Q-过程无后效性 (马氏性): 已知现在及过去, 看将来等价于已知现在看将来;
- 事件 $\{X_{t_n}=i\}$ 表示过程在时刻 n 处于状态 i;

- 转移概率:
  - 称条件概率
  $$p_{ij}(s,s+t) := P\left(X_{s+t}=j \middle| X_s=i\right)$$
  为Q-过程 X 的转移概率.
  - 若对于任意的 $i,j\in\mathbb{E}$, $p_{ij}(s,s+t)$ 与初始时间 s 无关, 则称Q-过程 X 时齐次的或时齐的.
  - 规定
  $$p_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0, & 若\ i\neq j; \\ 1, & 若\ i=j. \end{cases}$$
  - 记转移概率矩阵 $P(t)=(p_{ij}(t))$.
- Chapman-Kolmogorov方程: 对任意的 $t\geq 0$ 以及 $s\geq 0$, 有
  - $p_{ij}(s+t)=\sum_{k\in\mathbb{E}} p_{ik}(s)p_{kj}(t)$;
  - $P(s+t)=P(s)P(t)$;

■ 有限维分布:

- 称
$$p_j = P(X_0 = j), \quad p_j(t) = P(X_t = j)$$
分别为马氏链 X 的初始概率与绝对概率.
- 称 $\{p_j, j \in \mathbb{E}\}$ 与 $\{p_j(t), j \in \mathbb{E}\}$ 为马氏链 X 的初始分布与绝对分布.
- 绝对概率满足
$$p_j(t) = \sum_{i \in \mathbb{E}} p_i p_{ij}(t), \quad p_j(t+s) = \sum_{i \in \mathbb{E}} p_i(t) p_{ij}(s).$$
- 对于任意的 $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{E}$ 以及 $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, 有
$$P\left(X_{t_1} = i_1, \ldots, X_{t_n} = i_n\right) = \sum_{i \in \mathbb{E}} p_i p_{ii_1}(t_1) p_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \cdots p_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}).$$

注: 马氏链的有限维分布由初始分布与转移概率所决定.

例: 证明Poisson过程为Q-过程, 并求其转移概率.

1. Q-过程及转移概率
2. 密度矩阵与Kolmogorov向前/向后方程
3. 应用

- 转移概率的进一步性质:
  - 称 Q-过程为随机连续或标准的, 若 $\forall i,j \in \mathbb{E}$,

$$\lim_{t\to 0+} p_{ij}(t) = \delta_{ij}.$$

注: 若无特别说明, 在本章中均假设过程是标准的.

一致连续性

对于任意的 $t \geq 0, h > 0$ 以及任意固定的状态 $i \in \mathbb{E}$

$$\sum_{j\in\mathbb{E}} \left| p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t) \right| \leq 2\left(1 - p_{ii}(h)\right).$$

特别地, $p_{ij}(t)$ 为 t 的一致连续函数.

正性

对于任意的 $i \in \mathbb{E}, t \geq 0$, $p_{ii}(t) > 0$.
若存在 $t_0 > 0$ 使得 $p_{ij}(t_0) > 0$, 则当 $t \geq t_0$ 时, $p_{ij}(t) > 0$.

例: 求强度为 λ 的Poisson过程在 0 点的右导数.

转移概率在 0 点的右导数

极限

$$\lim_{t \to 0+} \frac{p_{ij}(t) - \delta_{ij}}{t}$$

存在, 此时我们记上述极限为 q_{ij}. 特别地, $q_{ii} \leq 0$, $q_{ij} \geq 0, i \neq j$.

■ Q-矩阵: 称 $Q = (q_{ij})$ 为马氏过程 X 的Q-矩阵. 进一步, 若对于任意的 $i \in \mathbb{E}$, 有 $\sum_{j \in \mathbb{E}} q_{ij} = 0$, 则称马氏过程 (Q-矩阵)保守.

■ Q-矩阵的意义:

- 设Q-过程右连续, 且 $\inf_{i\in\mathbb{E}} q_{ii} > -\infty$, 称 τ 为末离时:

$$\tau = \inf\{t > 0 : X_t \neq X_0\}.$$

末离时的分布

$$\tau \sim \mathscr{E}(-q_{ii}), \quad i.e. \forall t \geq 0,\ P_i(\tau > t) = e^{q_{ii}t}.$$

特别地, $E(\tau | X_0 = i) = -\frac{1}{q_{ii}}$.

提示: 由过程的右连续性, 可知

$$\{X_s = i, 0 \leq s \leq t\} = \bigcap_{n\geq 1} \left\{X_{\frac{kt}{2^n}} = i,\ k = 0, 1, \cdots, 2^n\right\}.$$

注: $-q_{ii}$ 决定了过程在状态 i 停留时间的长短, 即状态 i 转移速度的快慢.

■问题: 如果通过Q-矩阵来求转移概率矩阵 $P(t)$?

Kolmogorov向前/向后方程

设 X 为保守的马氏过程, 则对于任意的 $i,j\in\mathbb{E}$

$$p'_{ij}(t)=\sum_{k\in\mathbb{E}} q_{ik}p'_{kj}(t)\ (\text{向后方程});$$

若 $\inf_{i\in\mathbb{E}} q_{ii}>-\infty$, 则

$$p'_{ij}(t)=\sum_{k\in\mathbb{E}} p'_{ik}(t)q_{kj}\ (\text{向前方程}).$$

i.e. $P'(t)=QP(t), \quad P'(t)=P(t)Q.$

注: 若状态空间 $\mathbb{E}$ 有限, 则

$$p'_j(t)=\sum_{i\in\mathbb{E}} p_i(t)q_{ij}.$$

■问题: 如果通过Q-矩阵来求转移概率矩阵 $P(t)$?(续)

由Kolmogorov向前/向后方程可知

$$P(t) = e^{tQ} = \frac{t^n Q^n}{n!}.$$

例: 考虑两状态 $\{0,1\}$ 的Q-过程, 其Q-矩阵为 $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, 求转移概率矩阵 $P(t)$.

提示: 将Q矩阵对角化:

- 求出Q的特征值 $0, -3$,及相应的特征向量: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
- 将Q矩阵对角化:

$$T^{-1}QT = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

其中 $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

■ 不变测度的定义: 称不恒为零的非负数列 $\{\mu_i : i \in \mathbb{E}\}$ 为马氏链的不变测度, 若

$$\mu = \mu P(t), i.e. \quad \mu_i = \sum_{k \in \mathbb{E}} \mu_k p_{ki}(t), \ i \in \mathbb{E}.$$

更进一步, 若 $\sum_{i \in \mathbb{E}} \mu_i = 1$, 称 $\{\mu_i : i \in \mathbb{E}\}$ 为马氏链的平稳分布.

平稳分布与Q矩阵

若状态空间 $\mathbb{E}$ 有限, 则平稳分布 μ 满足 $\mu Q = 0$, i.e. 对于任意的 $j \in \mathbb{E}$

$$\sum_{i \in \mathbb{E}} \mu_i q_{ij} = 0.$$

1. Q-过程及转移概率
2. 密度矩阵与Kolmogorov向前/向后方程
3. 应用

■ 生灭过程:

- 设Q-过程 X 的状态空间 $\mathbb{E}=\{0,1,\cdots\}$, 如果其转移概率满足

$$\begin{cases} p_{ii+1}(h)=\lambda_i h+o(h), & \lambda_i>0, i=0,1,\cdots \\ p_{ii-1}(h)=\mu_i h+o(h), & \mu_0=0, \lambda_i>0, i=1,\cdots \\ p_{ii}(h)=1-(\lambda_i+\mu_i)h+o(h), & \\ p_{ij}(h)=o(h), & |i-j|\geq 2 \end{cases}$$

则称过程 X 为生灭过程, 其中 λ_i 代表出生率, μ_i 代表死亡率.

注: 若 $\lambda_i\equiv 0$, 则称 X 为纯死过程; 若 $\mu_i\equiv 0$, 则称 X 为纯生过程.

- 生灭过程的概率解释：以 X_t 表示 t 时刻，生物群体的数量，在很短的时间 h 后，群体变化有三种可能：由 i 个变到 $i+1$ 个，即增加一个个体的概率为 $\lambda_i h, \ldots$
- 由 $\mu Q = 0$, $\sum_{i=0}^{\infty} \mu_i = 1$, 可得平稳分布为

$$\mu_0 = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \times \cdots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \times \cdots \mu_j}}, \quad \mu_i = \frac{\frac{\lambda_0 \times \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \times \cdots \mu_i}}{1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \times \cdots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \times \cdots \mu_j}}.$$

■ 机器维修:

设有 n 台机床, m 个维修工. 机床或工作, 或损坏等待维修. 机床损坏后, 空着的维修工立即来维修; 若维修工不空, 则机床按照先坏先修的原则进行排队等待.
假定在充分小的时间 Δt 内, 每台机床由工作转为损坏的概率为 $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$; 在维修的机床转为工作的概率为 $\mu\Delta t+o(\Delta t)$. 假设各机床的工作相互独立.
以 X_t 表示 t 时刻损坏的机床数, 则 X 为Q-过程, 求

- Q-矩阵以及平稳分布;
- 在平稳态时, 不工作的机床平均数以及所有维修工都忙碌的概率.

■ M/M/S 服务系统: 某货运港口有 n 个装卸货物的平台, 在 $(0,t]$ 时间内到达港口的货轮数 N_t 服从强度为 λ 的Poisson过程. 到达港口的货轮若有平台空闲, 则立刻接受服务; 否则, 排队等待, 直到有一艘货轮结束服务离开港口.
假设每艘货轮的服务时间相互独立且皆服从 $\mathscr{E}(\mu)$, 且与 N_t 相互独立. 以 X_t 表示港口的货轮数, 则 X 为Q-过程, 求

- Q-矩阵以及平稳分布;
- 在平稳态时, 港口内的平均货轮数.