Topic 2 正态分布与Brown运动

蒋辉

南京航空航天大学数学系

September 29, 2018

记多维 r.v.s. 为

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \quad \vec{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}.$$

- 期望: $E\vec{X} = \begin{pmatrix} EX_1 \\ EX_2 \\ \vdots \\ EX_n \end{pmatrix}.$

- 方差:

$$\begin{aligned} Var\vec{X} &= \left(Cov(X_i, X_j)\right)_{n\times n} \\ &= \left(E(X_i - EX_i)(X_j - EX_j)\right)_{n\times n} \\ &= E(\vec{X} - E\vec{X})(\vec{X} - E\vec{X})^{\tau}. \end{aligned}$$

- 协方差:

$$
\begin{aligned}
Cov(\vec{X},\vec{Y}) &= (Cov(X_i,Y_j))_{n\times n} \\
&= (E(X_i-EX_i)(Y_j-EY_j))_{n\times n} \\
&= E(\vec{X}-E\vec{X})(\vec{Y}-E\vec{Y})^{\tau}.
\end{aligned}
$$

- 注:
  - $Var(A_{r\times n}\vec{X}) = AVar(\vec{X})A^{\tau}.$

■ 定义: 若 n 维 $r.v.X$ 的密度函数为

$$f(\vec{x}) = f(x_1, \cdots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|B|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{a})B^{-1}(\vec{x}-\vec{a})},$$

其中 B 为 n 阶对称正定矩阵, 则称 $\vec{X} \sim N(\vec{a}, B)$.

注:

- $E\vec{X} = \vec{a}, \quad Var\vec{X} = B;$
- $\vec{X} \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho).$

- 重要的证明思想:

$$\int_{\mathbb{R}} f(\vec{x})d\vec{x} = 1$$

  - 若 B 为实对称正定矩阵, 则存在非奇异阵 L, 使得 $B = LL^{\tau}$;
  - 令 $\vec{x} = L\vec{y} + \vec{a}$, 则 $J = \frac{d\vec{x}}{d\vec{y}} = |L|$.

- $\vec{X} \sim N(\vec{a}, B)$ 的特征函数为

$$\varphi_{\vec{X}}(\vec{t}) = e^{i t^{\tau}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{t}^{\tau}B\vec{t}}.$$

■ 分量性质: 若 $\vec{X} \sim N(\vec{a}, B)$, 则

$$\vec{X}^* = \begin{pmatrix} X_{k_1} \\ X_{k_2} \\ \vdots \\ X_{k_m} \end{pmatrix} \sim N(\vec{a}^*, B^*),$$

其中, B^* 为保留 B 的第 $k_1, \ldots, k_m$ 行及列所得的 $m \times m$ 矩阵, 且

$$\vec{a}^* = \begin{pmatrix} a_{k_1} \\ a_{k_2} \\ \vdots \\ a_{k_m} \end{pmatrix}.$$

注:

- 正态随机向量的部分向量仍为正态随机向量;
- $X_j \sim N(a_j, b_{jj})$.

■ 独立性: 若 $\vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \sim N(\vec{a}, B)$, 则以下陈述等价

- $X_1, \cdots, X_n$ 相互独立;
- $X_1, \cdots, X_n$ 两两独立;
- $X_1, \cdots, X_n$ 两两互不相关;
- B 为对角阵。

- 线性变换: $\vec{X}$ 为 n 维 $r.v.$, 则
  - $$\vec{X} \sim N(\vec{a}, B) \Leftrightarrow \forall \vec{\ell} \neq 0 \in \mathbb{R}^n,\ \vec{\ell}^{\tau} \vec{X} \sim N\left(\vec{\ell}^{\tau} \vec{a}, \vec{\ell}^{\tau} B \vec{\ell}\right).$$
  - 若 n 维 $r.v. X \sim N(\vec{a}, B)$, C 为 $m \times n$ 阵, 且行向量组线性无关, 则
  $$C\vec{X} \sim N(C\vec{a}, CBC^{\tau}).$$
- 注: 正态分布的线性变换仍为正态分布.

例: 令四维 $r.v.X \sim N(\vec{a}, B)$, 其中

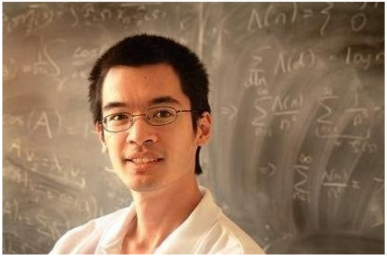
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

求

- $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ 的分布;
- $\vec{Y} = \begin{pmatrix} 2X_1 \\ X_2 - X_3 \\ X_3 + X_4 \end{pmatrix}$ 的分布;
- $\vec{Y}$ 的特征函数.

- 过程:
  - 社会发展过程;
  - 求学过程, 操作过程, 化学反映过程,...
- 过程的两个基本要素: 时间, 状态, 即: 某时刻处于何种状态

例: Terence Tao 的求学过程:



- 1975.07.17 出生于澳大利亚阿德莱德;
- 3岁半上小学, 随后退学;
- 5岁再次上小学;
- 8岁上中学;
- 12岁进入Flinders 大学;
- 16岁Finders大学本科毕业;
- 21岁Princeton大学博士毕业;
- 24岁UCLA教授;
- 31岁获Fields奖.

- 随机性: 某时刻处于何种状态并不明确, 有多种选择, 依赖于试验.
- 随机过程的定义: 一族与时间相关的随机变量 $X = \{X_t, t \in \mathbb{T}\}$:
    - $\mathbb{T}$ 为时间参数空间, 如 $\mathbb{T} = \mathbb{R}, \mathbb{R}^+, (0,1), \mathbb{Z}$ 等;
    - 给定 $t \in \mathbb{T}$, X_t 为一个 $r.v.$;
    - 给定 ω, X_t 为时间 t 的函数, 称为样本函数或者轨道;
    - 状态空间: 随机过程 X 的所有可能取值.

■ 分布函数

- 一维分布函数：对于任意 $t \in \mathbb{T}$，$F(x;t) = P(X_t \le x)$;
- n 维分布函数：对于任意的 $t_1, \cdots t_n \in \mathbb{T}$，

$$F(x_1,...,x_n;t_1,...,t_n) = P\left(X_{t_1} \le x_1,...,X_{t_n} \le x_n\right).$$

例：

- 令 $X_t = \xi + \eta t$，$t \in \mathbb{R}$，其中 ξ,η 为相互独立的标准正态分布，求 X 的一维与二维分布.
- 令 $X_t = \xi \cos t$，$t \in \mathbb{R}$，且

$$P(\xi = 1) = P(\xi = 2) = P(\xi = 3) = \frac{1}{3}.$$

求：$F(x;\frac{\pi}{4})$，$F(x;\frac{\pi}{2})$ 以及 $F(x_1,x_2;0,\frac{\pi}{3})$.

■ 数字特征

- 均值与方差函数: $\mu(t)=EX_t, \quad \sigma^2(t)=DX_t$;
- 相关函数: $R(s,t)=EX_sX_t$;
- 协方差函数: $\Gamma(s,t)=Cov(X_s,X_t)=R(s,t)-\mu(s)\mu(t)$.

例: 随机相位正弦波:

$$X_t=a\cos(\omega_0 t+\Phi),\ t\in\mathbb{R},\ a,\omega_0\in\mathbb{R}^+,$$

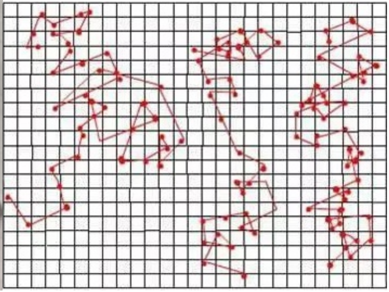
且 $\Phi\sim U(0,2\pi)$. 求

$$\mu(t),\ R(s,t),\ \sigma^2(t).$$

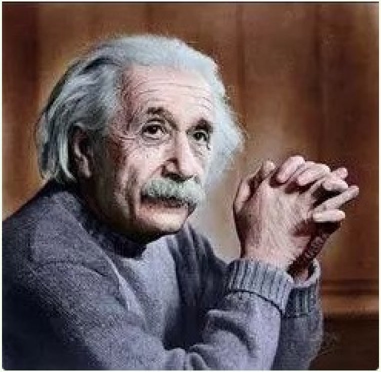
- 一些重要的随机过程: $X=\{X_t, t\in\mathbb{T}\}$ 为随机过程,
  - 独立随机过程: 若对任意的 $t_1,\ldots,t_n\in\mathbb{T}$, 都有 $X_{t_1},\ldots,X_{t_n}$ 相互独立.
  - 独立增量过程: 对于任意的 $t_0\le t_1\le\ldots\le t_n$, 有 $X_{t_1}-X_{t_0},\ldots,X_{t_n}-X_{t_{n-1}}$ 相互独立. (Brown 运动, Poisson过程)
  - 平稳独立增量过程: X 为独立增量过程, 且增量 $X_{t+\tau}-X_t$ 的分布只依赖于 τ, 与 t 无关. (Brown 运动, 时齐Poisson过程)
  - 高斯过程: 若过程 X 的有限维分布皆为正态. (Brown 运动, 分数Brown 运动)
  - 马氏过程, 平稳过程, 鞅......

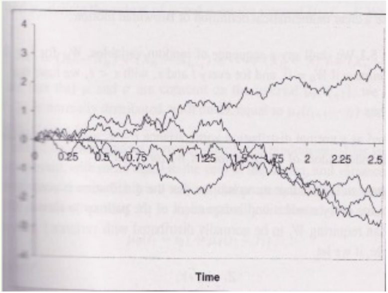
4.Brown运动 (Wiener 过程)

- Robert Brown (1773-1858), 植物学家

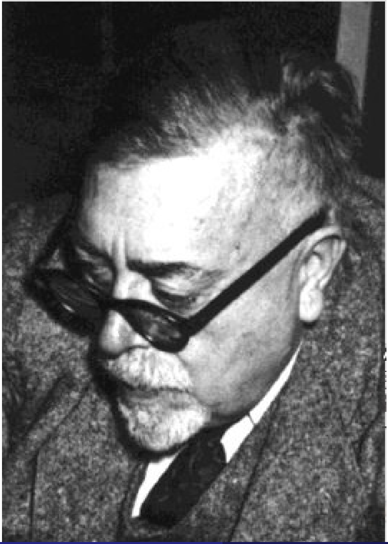


- 1900年，法国数学家巴舍利耶(L.Bachelier) 在其博士论文《投资理论》中，给出了布朗运动的数学描述，提出用几何布朗运动来模拟股票价格的变化。
- Albert Einstein (1879-1955) 详细解释了布朗发现的这种运动：微粒的无规则运动是由水分子的撞击形成. Investigation on the theory of Brownian movement. *The Annalender Physik*, 1905.





- 1918年, 布朗运动严谨的定义才被维纳给出 (Norbert Wiener (1894-1964): 美国应用数学家, 控制论的创始人, 在电子工程方面贡献良多. 他是随机过程和噪声过程的先驱, 又提出了" 控制论" 的一词), 因此布朗运动又称为维纳过程 (Wiener process).



■ 定义: 若 $W=\{W_t,\ t\geq 0\}$ 为 (标准) Brown运动 (Wiener 过程), 若

- 平稳独立增量过程, 且 $W_0=0$;
- $\forall 0\leq s<t$, 有 $W_t-W_s\sim N(0,t-s)$;
- 轨道为连续的.

注:

- $-W$ 为 Brown运动;
- $\forall c\neq 0$, $\{cW_{t/c^2}\}$ 为 Brown运动;
- $\{tW_{1/t},\ t>0\}$ 为 Brown运动.
- $B^*=\{B_t^*=B_{t+s}-B_s:t\geq 0\}$ 是 Brown运动.

- 基本性质:
  - 均值函数 $\mu(t)=0$, 方差函数 $\sigma^2(t)=t$;
  - 协方差函数 $\Gamma(s,t)=\min\{s,t\}$;

    对于 $0\le s\le t<\infty$, 有 $E(W_t|W_s)=W_s$, $E(W_s|W_t)=\frac{s}{t}W_t$.

- 等价刻画: 设 $W=\{W_t,\ t\ge 0\}$ 为 0 初值的随机过程, 则其为 Brown运动的充要条件为它是一个高斯过程, 且

$$EW_t=0,\quad EW_sW_t=\min\{s,t\}.$$

例: 求 $P(B_1\le 0, B_2\le 0)$

■ 二次变差:

- 设 $X=\{X_t, t\geq 0\}$ 是一个实值随机过程, 对任意 $t>0$, 任何 $[0,t]$ 上的划分 $\Delta: 0=t_0<\cdots<t_n<t_{n+1}=t$, 记

$$T_t^{\Delta}=\sum_{i=1}^{n+1}(X_{t_i}-X_{t_{i-1}})^2, \quad |\Delta|=\sup_i|t_i-t_{i-1}|.$$

若存在一个实值随机过程 $[X]$, 使对 $[0,t]$ 的任何一列划分 Δ_n, 有

$$\lim_{|\Delta_n|\to 0} P\left(\left|T_t^{\Delta_n}-[X]_t\right|>\delta\right)=0, \quad \forall\delta>0,$$

则称 X 具有有限的二次 (平方) 变差 $[X]$.

- $[B]_t=t$.

提示: 设 $\Delta_n: 0=t_0<\cdots<t_n<t_{n+1}=t$, 利用平稳增量独立性, 证明

$$E\left(\sum_{i=1}^{n+1}(B_{t_i}-B_{t_{i-1}})^2-t\right)^2\to 0, \quad n\to\infty.$$

■ 反射原理: 令 B 为 Brown运动, τ 为随机时间 (停时). 定义

$$B_t^* = \begin{cases} B_t, & t < \tau; \\ 2B_\tau - B_t, & t \geq \tau \end{cases}$$

则 B^* 为 Brown运动

提示:

$$B_t + B_t^* = 2B_{\min\{t,\tau\}}, \quad B_t - B_t^* = 2\left(B_t - B_{\min\{t,\tau\}}\right),$$

故有

$$B_t^* = B_{\min\{t,\tau\}} - \left(B_t - B_{\min\{t,\tau\}}\right).$$

■ 反射原理的应用–首中时分布:

当 $x>0$ 时, 记 τ_x 为 B 首次击中 (到达) x 的时刻, 即

$$\tau_x = \inf\{t>0, B_t = x\}.$$

则 τ_x 的概率密度为

$$f_{\tau_x}(t) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{x^2}{2t}}, & t>0; \\ 0, & t \le 0. \end{cases}$$

提示:

- 由全概率公式

$$\begin{aligned} P(B_t \ge x) &= P\left(B_t \ge x \middle| T_x \le t\right) P(T_x \le t) + P\left(B_t \ge x \middle| T_x > t\right) P(T_x > t) \\ &= P\left(B_t \ge x \middle| T_x \le t\right) P(T_x \le t). \end{aligned}$$

- 利用反射原理，$P\left(B_t \geq x \middle| T_x \leq t\right) = \frac{1}{2}$. 从而，

$$\begin{aligned} P(\tau_x \leq t) &= 2P(B_t \geq x) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{x/\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \end{aligned}$$

注:

- 对于任意的 x, 有

$$P(\tau_x < \infty) = 1, \quad E\tau_x = \infty.$$

因此，一维 Brown运动是常返的，但不是正常返的—零常返.

- τ_x 与 τ_{-x} 同分布：当 $x < 0$ 时

$$f_{\tau_x}(t) = \begin{cases} \frac{-x}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{x^2}{2t}}, & t > 0; \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

■ 反射原理的应用–最大值分布:

对于任意的 $t>0$, 令

$$M_t = \max_{s\in[0,t]} B_s,$$

则 M_t 的密度函数为

$$f_{M_t}(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}, & x>0; \\ 0, & x\le 0. \end{cases}$$

提示: 对于 $x>0$,

$$P(M_t \ge x) = P(\tau_x \le t) = 2P(B_t \ge x).$$

- 几何 Brownian运动:

  - 称 $X = \{X_t = xe^{B_t}, t \geq 0\}$ 为从 x 出发的几何 Brown运动. (在金融市场中, 常假设股票的价格按照几何 Brown运动变化)
  - $EX_t = xe^{t/2}, \ Var(X_t) = x^2e^{2t} - xe^t$.

例 股票期权的价值: 设某人拥有某种股票的欧式看涨期权, 其中交割时刻为 T, 交割价格为 K. 即他具有在时刻 T 以固定的价格 K 购买一股这种股票的权利 (以 X_T 表示时刻 T 股票价格, 若 X_T 高于 K, 期权被实施; 否则放弃实施). 假设股票当前的价格为 x, 并按照几何 Brown运动变化, 计算拥有这种期权的价值 Y 的平均值.

- $Y = \max\{X_T - K, 0\} = \max\left\{xe^{B_T} - K, 0\right\}$.
- 求 EY.