Markov链

蒋辉

南京航空航天大学数学系

November 27, 2018

1. Markov链及转移概率
2. 可达，互通
3. 周期
4. 常返性
5. 转移概率的渐近行为与平稳分布
6. 作业

1.Markov链及转移概率

假定随机过程 $X=\{X_n, n\in\mathbb{T}\}$ 的时间参数集 $\mathbb{T}=\{0,1,2,\ldots\}$, 且状态空间 $\mathbb{E}$ 亦为离散的, 即 $\mathbb{E}=\{i_0, i_1, \ldots\}$.

■ 定义: 称 X 为Markov (马尔科夫)链, 若对于任意的 $n\in\mathbb{R}$ 以及 $i_0,\ldots,i_n\in\mathbb{E}$, 有

$$P\Big(X_n=i_n\Big|X_{n-1}=i_n, X_{n-2}=i_{n-2},\ldots,X_0=i_0\Big)=P\Big(X_n=i_n\Big|X_{n-1}=i_{n-1}\Big). \quad (1)$$

注:

- (1) 表示马氏链无后效性 (马氏性): 已知现在及过去, 看将来等价于已知现在看将来;
- 事件 $\{X_n=i\}$ 表示过程在时刻 n 处于状态 i;
- 马氏性 (1) $\Leftrightarrow$ 对于任意的 $m_1<m_2<\ldots<m_n$ 以及 $i_0,\ldots,i_n\in\mathbb{I}$, 有

$$P\Big(X_{m_n}=i_n\Big|X_{m_{n-1}}=i_n,\ldots,X_{m_1}=i_1\Big)=P\Big(X_{m_n}=i_n\Big|X_{m_{n-1}}=i_{n-1}\Big).$$

■ 转移概率:

- 称条件概率

$$p_{ij}(n) := P\left(X_{n+1} = j \middle| X_n = i\right)$$

为马氏链 X 在时刻 n 的一步转移概率, 简称为转移概率.

- 称条件概率

$$p_{ij}^{(k)}(n) := P\left(X_{n+k} = j \middle| X_n = i\right)$$

为马氏链 X 在时刻 n 的 k 步转移概率, 且规定

$$p_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0, & \text{若 } i \neq j; \\ 1, & \text{若 } i = j. \end{cases}$$

- 若对于任意的 $i, j \in \mathbb{E}$, $p_{ij}(n)$ 与初始时间 n 无关, 则称马氏链 X 时齐次的或时齐的. 此时, 记 $p_{ij}(n) = p_{ij}$.
- $P = (p_{ij})$, $P^{(k)} = (p_{ij}^{(k)})$ 分布称为一步及 k 步转移概率矩阵.

■ Chapman-Kolmogorov方程: 对任意的 $n \geq 0$ 以及 $0 \leq \ell < n$, 有

- $p_{ij}^{(n)} = \sum_{k \in \mathbb{E}} p_{ik}^{(\ell)} p_{kj}^{(n-\ell)}$;
- $p_{ij}^{(n)} = \sum_{k_1,\dots,k_{n-1} \in \mathbb{E}} p_{ik_1} p_{k_1 k_2} \cdots p_{k_{n-1} j}$;
- $P^{(n)} = P^{(\ell)} P^{(n-\ell)}$;
- $P^{(n)} = P^n$.

注: n 步转移概率由一步转移概率决定.

■ 有限维分布:

- 称
$$p_j = P(X_0 = j), \quad p_j(n) = P(X_n = j)$$
分别为马氏链 X 的初始概率与绝对概率.
- 称 $\{p_j, j \in \mathbb{E}\}$ 与 $\{p_j(n), j \in \mathbb{E}\}$ 为马氏链 X 的初始分布与绝对分布.
- 绝对概率满足
$$p_j(n) = \sum_{i \in \mathbb{E}} p_i p_{ij}^{(n)}, \quad p_j(n) = \sum_{i \in \mathbb{E}} p_i(n-1) p_{ij}.$$
- 对于任意的 $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{E}$ 以及 $n \geq 1$, 有
$$P(X_1 = i_1, \ldots, X_n = j_n) = \sum_{i \in \mathbb{E}} p_i p_{ii_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n}.$$

注: 马氏链的有限维分布由初始分布与一步转移概率所决定.

■ 重要的性质: 如何求

$$P\left(X_{n_3} = i_3, X_{n_2} = i_2 \middle| X_{n_1} = i_1, X_{n_0} = i_0\right)?$$

提示: $P(AB|C) = P(A|C)P(B|AC)$.

例: 假定明天的天气只与今天的天气有关, 与以前的天气无关. 若今天有雨, 则明天有雨的概率为 0.7; 若今天无雨, 则明天有雨的概率为0.4. 求今天有雨且第四天仍然有雨的概率.

- 有雨对应状态 1, 无雨对应状态 0.

例: 设质点在数轴上移动,每次移动一格, 向右移动的概率为 p, 向左移动的概率为 $q=1-p$, 这种运动称为随机游动. 以 X_n 表示质点在时刻 n 所处的位置, 求过程 X 的一步及 n 步转移概率.

- $$p_{ij}=\begin{cases} p, & \text{若 } j=i+1; \\ q, & \text{若 } j=i-1. \end{cases}$$

- $$p_{ij}^{(n)}=\begin{cases} C_n^x p^x q^{n-x}, & \text{若 } k\pm(j-i) \text{ 为偶数}; \\ 0, & \text{否则}, \end{cases}$$

  其中 $x=\frac{k+(j-i)}{2}$.

例: 甲乙两赌徒进行一系列的赌博, 甲有 a 元, 乙有 b 元, 每赌一局输者给赢者一元, 且没有和局, 直到两个人中有一个输光为止. 设在每一局中, 甲赢的概率为 p, 求甲输光的概率.

1 Markov链及转移概率

2 可达，互通

3 周期

4 常返性

5 转移概率的渐近行为与平稳分布

6 作业

■ 可达，互通:

- 如果对于状态 i,j，存在 $n \geq 1$，使得 $p_{ij}^{(n)} > 0$，则称自状态 i 可以到达状态 j，记为 $i \to j$.
- 如果对于任意的 $n \geq 1$，有 $p_{ij}^{(n)} = 0$，则称自状态 i 不能到达状态 j，记为 $i \nrightarrow j$.
- 如果 $i \to j$ 且 $j \to i$，则称 i,j 互通，记为 $i \leftrightarrow j$.

注:

- 若 $i \to j$, $\quad j \to k$，则 $i \to k$;
- 若 $i \leftrightarrow j$, $\quad j \leftrightarrow k$，则 $i \leftrightarrow k$;
- 若 $i \leftrightarrow j$，则 $j \leftrightarrow i$。

■ 状态分类: 利用互通关系 $\leftrightarrow$, 可以把状态空间 $\mathbb{E}$ 分成若干不交的类: 对于任意的 $i \in \mathbb{E}$

$$C(i) = \{i\} \cup \{j : j \leftrightarrow i\}.$$

注:

- $\bigcup_{i \in \mathbb{E}} C(i) = E$;
- 若 $i \leftrightarrow j$, 则 $C(i) = C(j)$;
- 若 $i \not\leftrightarrow j$, 则 $C(i) \cap C(j) = \emptyset$.

■ 本质态: 称 i 为本质态, 若 $i \to j$, 必有 $j \to i$. 反之, 称为非本质态.

- 若 i 是本质态, $i \to j$, 则 j 亦为本质态;
- 若 i 是本质态, 则 $C(i)$ 中所有的状态皆为本质态, 此时称 $C(i)$ 为本质类.

■ 小结: 马氏链 X 的状态空间 $\mathbb{E}$ 可以按照互通关系分解为若干不交类的并, 且同一类中的状态或全为本质态, 或全为非本质态.

♣ 如何理解本质类与非本质类, 以及马氏链的运动?

■ 闭集: 状态空间中的一个集合 A 称为闭集, 若对于任意的 $i \in A$, $\sum_{j\in A} p_{ij} = 1$. 闭集 A 称为极小的, 若 A 的任何真子集都不是闭集.

- A 是闭集 $\Leftrightarrow$ 对于任意的 $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{j\in A} p_{ij}^{(n)} = 1$, $i \in A$.
- 若 $i \in A$ 且 A 为闭集, 则 $C(i) \subset A$ (闭集是若干个类的并).

闭集 A 的含义: 任取 $i \in A, j \notin A$, 则从 i 出发, 不能到达 j, i.e. 闭集之内的状态不能转移到闭集之外, 只能在闭集内部转移. 但不排除闭集外部的状态转入闭集的可能.

- 极小闭集与本质类的关系: A 是极小闭集 $\Leftrightarrow$ A 是一个本质类.
  - $\Leftarrow$ 设 A 为本质类, 对于任意的 $i \in A$, 若 $p_{ij} > 0$, 则 $i \to j$, 故 $j \to i$ 且 $j \in A$. 因此对于任意的 $j \notin A$, $p_{ij} = 0$, 故 A 为闭集. 若 $B \subsetneq A$ 且 B 为闭集, 则对于任意的 $i \in B, j \in A - B$ 以及 $n \in \mathbb{N}$, 有 $p_{ij}^{(n)} = 0$, 即 $i \nrightarrow j$, 此与 i,j 在同一个互通类中矛盾.
  - $\Rightarrow$ 设 A 为极小闭集, 对于任意的 $i \in A$, 令 $D(i) = \{j : i \to j\}$. 由于 A 闭, 故 $D(i) \subset A$. 则 $D(i) = A$, 即 $D(i)$ 为闭集. (事实上, 若存在 $j \in D(i), k \notin D(i)$, s.t. $j \to k$, 则 $i \to k$, 矛盾.)
    从而, 对于任意的 $i \in A$, $i \to j$, 则 $j \in A$ 且 $D(j) = A$, 所以 $j \to i$, 即 A 中所有的状态为本质态. 又因为 $D(i) = A$, 故 A 为互通类.

■ 非本质类的性质: 有限个非本质类的并集不是闭集.

(反证法) 设 C_1, C_2 为两个非本质类, 但 $C = C_1 \cup C_2$ 为闭集. 对于任意的 $i_1 \in C_1$, 存在 $i_2 \in C$, s.t. $i_1 \to i_2$ 且 $i_2 \nrightarrow i_1$. 此时, 我们可知 $i_2 \in C_2$.

同理, 存在 $i_3 \in C$, s.t. $i_2 \to i_3$ 且 $i_3 \nrightarrow i_2$. 此时, 我们可知 $i_3 \in C_1$.

因此 $C_1 \to C_2, C_2 \to C_1$, 且 $C_2 \nrightarrow C_1, C_1 \nrightarrow C_2$, 此为矛盾.

■ 马氏链的运动(I): 一个马氏链的状态空间 E 按照互通关系可分解为下列形式

$$E = T \cup R_1 \cup R_2 \cup \cdots$$

其中 T 为全体非本质态的集合, $R_j, j \geq 1$ 是本质态集合. 当状态空间 E 按此排序时, 其转移概率矩阵有下述形式:

$$\begin{pmatrix} Q & S_1 & S_2 & \cdots \\ 0 & P_1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & P_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

■ 吸收态与不可约:

- 若状态 i 本身构成一个本质类, 即 $p_{ii} = 1$, 则称 i 为吸收态.
- 若整个状态空间是一个极小闭集, 则称马氏链不可约. (即马氏链所有状态互通)

例: 设马氏链 X 的状态空间 $\mathbb{E}=\{0,1,2\}$, 且转移概率矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

则对状态进行分类.

例: 设马氏链 X 的状态空间 $\mathbb{E}=\{0,1,2,3,4\}$, 且转移概率矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则对状态进行分类.

例: 设马氏链 X 的状态空间 $\mathbb{E}=\{0,1,2,\cdots\}$, 且转移概率矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

则对状态进行分类.

1 Markov链及转移概率

2 可达，互通

3 周期

4 常返性

5 转移概率的渐近行为与平稳分布

6 作业

- 周期: 称状态 i 的周期为 t, $(t>1)$, 若正整数集 $\left\{n: p_{ii}^{(n)}>0\right\}$ 的最大公约数为 t; 称状态 i 为非周期的, 若正整数集 $\left\{n: p_{ii}^{(n)}>0\right\}$ 的最大公约数为 1.

- 周期的重要性质:
  - 设状态 i 的周期为 t, 若 n 不是 t 的整数倍, 则 $p_{ii}^{(n)}=0$;
  - 设状态 i 的周期为 t, 则存在依赖于 i 的正整数 $N(i)$, 使得当 $n \geq N(i)$ 时, $p_{ii}^{(nt)}>0$;

    注: 设 $\{s_1,\cdots,s_n\}$ 为正整数, t 为其最大公约数. 则存在 $N\geq 1$, 对于任意的 $n\geq N$, 存在非负整数 $c_1,\cdots,c_n$, 满足 $nt=\sum_{i=1}^n c_i s_i$.
  - 若状态 i 的周期为 d_i, 状态 j 的周期为 d_j, 且 $i\leftrightarrow j$, 则有 $d_i=d_j$.

    注: 若 $p_{ii}^{(m)}>0$, 则 $d_j|m$.

- 周期的判别:
  - 按照互通关系将状态分类后, 同一类中的选取一个状态判断其周期即可;
  - 若存在正整数 n, 使得 $p_{ii}^{(n)} \neq 0, \quad p_{ii}^{(n+1)} \neq 0$, 则状态 i 无周期;
  - 若存在正整数 n, 使得 n 步转移概率矩阵 P^n 中对应状态 i 的那一列全部为零, 则 i 无周期.

■ 马氏链的运动(II): 设马氏链 X 不可约且周期为 t. 则状态空间 E 可分成 t 个不相交的子集之并:

$$C = C_0 \cup C_1 \cup \cdots \cup C_t \ (C_t = C_0),$$

使得马氏链经一步转移后, 从 C_s 中任意一状态必然跳到 C_{s+1} 中某一状态.

- 对于任意的 $i \in E$, $C_s(i) = \left\{ j : \exists n \geq 1, p_{ij}^{(nt+s)} > 0 \right\}$, $s = 0, 1, \cdots, t-1$.
- 上述分类与 i 的选取无关: 若 $j \in C_r(i)$, $C_s(j) = C_{r+s}(i)$.

1 Markov链及转移概率

2 可达，互通

3 周期

4 常返性

5 转移概率的渐近行为与平稳分布

6 作业

■ 首达时: 对于状态 j, $T_j=\min\{n\geq 1: X_n=j\}$ 表示系统首次达到状态 j 的时刻, 称为首达时.

- 首达时的分布律: $f_{ij}^{(n)}=P\left(T_j=n \middle| X_0=i\right)$ 表示系统从 i 出发, 在时刻 n 首次到达状态 j 的概率. 则有

$$\begin{aligned} f_{ij}^{(n)} &= P\left(X_n=j, X_m\neq j, 1\leq m\leq n-1 \middle| X_0=i\right) \\ &= \sum_{i_1\neq j}\cdots\sum_{i_{n-1}\neq j} p_{ii_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{n-1}j}. \end{aligned}$$

- 令 $f_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$, 则

$$f_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty} P\left(T_j=n \middle| X_0=i\right)=P\left(T_j<\infty \middle| X_0=i\right)$$

表示从 i 出发, 迟早可以到达状态 j 的概率.

- $0\leq f_{ij}^{(n)}\leq p_{ij}^{(n)}\leq f_{ij}\leq 1$.

■ 首达时与转移概率的重要关系: 对于任意的状态 i,j以及正整数 $n \geq 1$

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}.$$

■ 常返与暂留:

- 若 $f_{ii}=1$, 称状态 i 常返;
- 若 $f_{ii}<1$, 称状态 i 非常返或暂留.

■ 常返与暂留的判别(I):

- 状态 i 常返 $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}=\infty$;

  $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}=\frac{f_{ii}}{1-f_{ii}}$
- 状态 i 非常返 $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}<\infty$.

注: 状态 i 非常返, 则 $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}=0$; 若 $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}\neq 0$, 则 i 常返.

■ 常返的直观理解: 令 $N_i = \sum_{n=1}^{\infty} I_{\{X_n=i\}}$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = E\left(N_i \middle| X_0 = i\right).$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$ 表示系统从状态 i 出发, 再返回 i 的平均次数.

- 状态 i 常返, 等价于从 i 出发, 系统无穷次返回 i;
- 状态 i 常返, 等价于从 i 出发, 系统有限次返回 i.

- 互通与常返:
  - 如果状态 i 常返, 且 $i \leftrightarrow j$, 则状态 j 常返.

    $p_{jj}^{(n_1+n+n_2)} \geq p_{ji}^{(n_1)} p_{ii}^{(n)} p_{ij}^{(n_2)}$
  - 同一等价类中的状态, 或者全是暂留的, 或者全是常返的.

■ 常返的分类: 正常返与零常返—令状态 i 为常返状态, $\mu_i = E\left(T_i \middle| X_0 = i\right)$, 则

- 若 $\mu_i < \infty$, 则 i 正常返;
- 若 $\mu_i = \infty$, 则 i 零常返.

注:

- μ_i 表示系统从状态 i 出发, 首次返回 i 所需的平均时间;
- $\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$;
- 称状态 i 遍历, 若其为无周期正常返的.

■ 常返与暂留的判别(II):

引理

设 i 是周期为 t 的常返状态, 则

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nt)} = \frac{t}{\mu_i}.$$

令 i 为常返状态, 则

- i 为零常返 $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$.
- i 为正常返 $\Leftrightarrow$ $\limsup_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} > 0$.
- i 为遍历的 $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\mu_i} > 0$.

小结: 对于任意的状态 i, 有如下结论

- i 非常返 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$.
- i 为零常返 $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$, $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$.
- i 为正常返 $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$, $\limsup_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} > 0$.
- i 为遍历的 $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$, $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\mu_i} > 0$.

例 (Bernoulli 随机游动): 设质点在数轴上移动,每次移动一格, 向右移动的概率为 p, 向左移动的概率为 $q=1-p$, 这种运动称为随机游动. 以 X_n 表示质点在时刻 n 所处的位置, 求各状态的常返性.

- $$p_{ij}=\begin{cases} p, & 若\ j=i+1; \\ q, & 若\ j=i-1. \end{cases}$$

- $$p_{ij}^{(n)}=\begin{cases} C_n^x p^x q^{n-x}, & 若\ k\pm(j-i)\ 为偶数; \\ 0, & 否则, \end{cases}$$

  其中 $x=\frac{k+(j-i)}{2}$.

- Stirling 公式

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

- 常返与暂留的判别(III):

不可约马氏链常返

$\Leftrightarrow$ 方程组 $z = Pz$ 无非零的有界解

$\Leftrightarrow$ 存在一个 $j \in \mathbb{E}, s.t.\ z_i = \sum_{k \in \mathbb{E}} p_{ik} z_k,\ i \neq j,$ 的有界解必为常数.

■ 例: 考虑如下带有一个反射壁的随机游动, $\mathbb{E}=\{0,1,2,\ldots\}$, 且转移概率矩阵为

$$\begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix}$$

其中 $p_0, p_i, q_i > 0$ 且 $r_0 + p_0 = 1, q_i + r_i + p_i = 1$, 试研究马氏链的常返性.

提示:

- 方程组

$$z_i = q_i z_{i-1} + r_i z_i + p_i z_{i+1}, \quad i \neq 0$$

的解为

$$z_{i+1} = z_1 + (z_1 - z_0) \sum_{k=1}^{i} \frac{q_1 \cdots q_k}{p_1 \cdots p_k}, \quad i \geq 1$$

- 马氏链常返 $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_1 \cdots q_k}{p_1 \cdots p_k} = \infty$.

■ 常返性的进一步刻画:

对于任意的状态 i,j, 定义

$$g_{ij}(m)=P\left(\text{至少有 } m\text{个 } n\geq 1, s.t. X_n=j \middle| X_0=i\right)$$

$$g_{ij}=P\left(\text{有无穷多个 } n, s.t. X_n=j \middle| X_0=i\right)$$

它们表示从状态 i 出发, 至少有 m 次到达 j 的概率(有无穷多次到达 j 的概率). 则有如下性质:

- $\forall m\geq 1,\ \ g_{ij}\leq g_{ij}(m),\quad g_{ij}\leq g_{ij}(1)=f_{ij};$
- $g_{ij}(m)=f_{ij}g_{jj}(m-1),\quad g_{ii}(m)=(f_{ii})^m,$

  i 常返 $\Leftrightarrow$ $g_{ii}=1$
- $\lim_{m\to\infty}g_{ij}(m)=g_{ij},\quad g_{ij}=f_{ij}g_{jj};$

  若 j 常返, 则对于任意的状态 i, 有 $g_{ij}=f_{ij}$
- $g_{ij}=\sum_{\ell\in\mathbb{E}}p_{i\ell}^{(m)}g_{\ell j}$

重要性质

若状态 i 常返, $i \to j$, 则

$$i \Leftrightarrow j, \quad j \text{ 常返}$$

且

$$f_{ij} = f_{ji} = g_{ij} = g_{ji} = 1.$$

提示:

- $1 = g_{ii} = \sum_{\ell \in \mathbb{E}} p_{i\ell}^{(n)} g_{\ell i}$;
- $\sum_{\ell \in \mathbb{E}} p_{i\ell}^{(n)} (1 - g_{\ell i}) = 0$.

1. Markov链及转移概率
2. 可达，互通
3. 周期
4. 常返性
5. 转移概率的渐近行为与平稳分布
6. 作业

5.转移概率的渐近行为与平稳分布

- $p_{ii}^{(n)}$ 的渐近行为: 对于任意的状态 i,
  - i 非常返 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0.$
  - i 为零常返 $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty,$ $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0.$
  - i 为正常返 $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty,$ $\limsup_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} > 0.$
  - i 为遍历的 $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty,$ $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\mu_i} > 0.$

- $p_{ij}^{(n)}$ 的渐近行为:
  - 若 j 是非常返或零常返的, 则对于任意的状态 i

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0.$$

$$\left(p_{ij}^{(n)} = \sum_{\ell=1}^{n} f_{ij}^{(\ell)} p_{jj}^{(n-\ell)} \le \sum_{\ell=1}^{n_0} f_{ij}^{(\ell)} p_{jj}^{(n-\ell)} + \sum_{\ell=n_0+1}^{n} f_{ij}^{(\ell)}\right)$$

推论

在有限齐次马氏链中, 不存在零常返状态, 也不可能所有的状态都是非常返的. 从而, 不可约有限齐次马氏链的状态都是正常返的.

- 设 j 是遍历状态, 则对于任意的状态 i, 有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{f_{ij}}{\mu_j}.$$

$$\left(p_{ij}^{(n)} = \sum_{\ell=1}^{n} f_{ij}^{(\ell)} p_{jj}^{(n-\ell)} = \sum_{\ell=1}^{n_0} f_{ij}^{(\ell)} p_{jj}^{(n-\ell)} + \sum_{\ell=n_0+1}^{n} f_{ij}^{(\ell)} p_{jj}^{(n-\ell)} \right)$$

推论

在非周期不可约常返链中, 对于任意的状态 i,j, 我们有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j}.$$

■ 不变测度的定义: 称不恒为零的非负数列 $\{\mu_i : i \in \mathbb{E}\}$ 为马氏链的不变测度, 若

$$\pi = \pi P, i.e. \quad \pi_i = \sum_{k \in \mathbb{E}} \pi_k p_{ki},\ i \in \mathbb{E}.$$

更进一步, 若 $\sum_{i \in \mathbb{E}} \pi_i = 1$, 称 $\pi = \{\pi_i : i \in \mathbb{E}\}$ 为马氏链的平稳分布.

注: $\{\pi_i : i \in \mathbb{E}\}$ 为马氏链的不变测度, 则

- $\pi = \pi P^n$;
- 若 $\sum_{i \in \mathbb{E}} \pi_i < \infty$, 则 $\{\frac{\pi_i}{\sum_{k \in \mathbb{E}} \pi_k},\ i \in \mathbb{E}\}$ 为马氏链的平稳分布.

■ 平稳与常返:

- 若 $\pi = \{\pi_i : i \in \mathbb{E}\}$ 为马氏链的平稳分布, 则以其为初始分布的马氏链是平稳过程, 即对任意的 $m \geq 1$

$$P_\pi(X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n) = P_\pi(X_{1+m} = i_1, \cdots, X_{n+m} = i_n);$$

- 若 $\{\pi_i : i \in \mathbb{E}\}$ 为马氏链的不变测度, 若 $\pi_i > 0$, $i \to j$, 则 $\pi_j > 0$. 特别地, 若马氏链不可约, 则对于任意的状态 j, 都有 $\pi_j > 0$;

$$\left(\pi_j = \sum_{k \in \mathbb{E}} \pi_k p_{kj}^{(n)} \geq \pi_i p_{ij}^{(n)}\right)$$

- 设 $\{\pi_i : i \in \mathbb{E}\}$ 为马氏链的平稳分布, 若 $\pi_j > 0$, 则 j 为常返状态.

$$\left(j\text{非常返, 则} p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{n-k} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = f_{ij} \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < \infty.\right)$$

■ 常返与暂留的判别(IV):

平稳分布与首达时间

设马氏链非周期不可约. 若马氏链有平稳分布, 则全部状态皆为正常返; 反之, 若有一个状态是正常返的, 则马氏链有唯一的平稳分布 π:

$$\pi_i = \frac{1}{E(T_i|X_0 = i)} = \frac{1}{\mu_i}.$$

例: 令马氏链的转移概率矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

求马氏链的平稳分布及各状态的平均首次返回时间.

■ 闭集: 设 $\mathbb{C}$ 是状态空间 $\mathbb{E}$ 的非空子集, 若对于任意的 $i \in \mathbb{C}, j \notin \mathbb{C}$, 有 $p_{ij} = 0$, 则称 $\mathbb{C}$ 为闭集. 进一步, 若闭集 $\mathbb{C}$ 中任何两个状态互通, 则称其为不可约闭集 (最小闭集).

- 状态空间 $\mathbb{E}$ 是最大的闭集, 吸收态组成的集合是最小的闭集.
- $\mathbb{C}$ 是闭集 $\Leftrightarrow$ 对于任意的 $i \in \mathbb{C}, j \notin \mathbb{C}, n \geq 1$, $p_{ij}^{(n)} = 0$.
- $\mathbb{C}$ 是闭集的含义是: 任取 $i \in \mathbb{C}, j \notin \mathbb{C}$, 则从 i 出发, 不能到达 j, i.e. 闭集之内的状态不能转移到闭集之外, 只能在闭集内部转移. 但不排除闭集外部的状态转入闭集的可能.

例: 令马氏链的转移概率矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

写出闭集.

- 状态空间分解:

常返与闭集

- 设 $\mathbb{C}$ 为马氏链中所有的常返状态的全体, 则 $\mathbb{C}$ 为闭集;
- $\mathbb{D}$ 为马氏链中的一个常返类, 则 $\mathbb{D}$ 为不可约闭集.

状态空间分解

- 令 $\mathbb{C}$ 为马氏链中所有常返状态的全体, 则 $\mathbb{C}$ 可以分解为至多可数多个子集 $\mathbb{C}_1, \cdots$ 的不交并, 且每个 $\mathbb{C}_i$ 为不可约闭集;
- $\mathbb{E} = \mathbb{C}_0 \cup \mathbb{C}_1 \cup \cdots$, 其中 $\mathbb{C}_0$ 为所有非常返状态的全体.

马氏链系统运动的描述: 如果从某个常返状态 $i \in \mathbb{C}_n$ 出发, 则系统永远在 $\mathbb{C}_n$ 内运动; 如果从某个非常返状态 $i \in \mathbb{C}_0$ 出发, 则系统可能永远在 $\mathbb{C}_0$ 内运动, 也可能在某个时刻进入常返类 $\mathbb{C}_n$, 但之后一直在 $\mathbb{C}_n$ 内运动.

■ 常返与暂留的判别(V): 马氏链可约情形

例子: 令马氏链的转移概率矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

求各状态的常返性.

例: 令马氏链的转移概率矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

求各状态的常返性及平均首次返回时间.

1. Markov链及转移概率
2. 可达，互通
3. 周期
4. 常返性
5. 转移概率的渐近行为与平稳分布
6. 作业

P232-235: 5, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 19, 20, 21, 22.