更新过程

蒋辉

南京航空航天大学数学系

November 1, 2018

1.更新过程

■ 计数过程 (点过程) $N=\{N_t, t\geq 0\}$: 若存在一列有限的随机变量 $\{T_n, n\geq 1\}$, 满足

$$0 = T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \cdots ,$$

使得

$$N_t = \sum_{k=1}^{\infty} I_{\{T_k \leq t\}} = \sup\{n : T_n \leq t\} .$$

- 假定对于任意的 $t\geq 0$, $N_t < \infty$, $a.s.$, i.e. $T_n \to \infty$, a.s.
- 称 $\{T_n, n\geq 1\}$ 为发生时间列
- 若 $\Delta N_t = N_t - N_{t-} \leq 1$, 称 N 为简单点过程.

■ 更新过程 $N=\{N_t, t\geq 0\}$: 设 $\{W_n, n=1,2,...\}$ 为 i.i.d. 的非负随机变量, 分布函数为 $F(x)$ (满足 $F(0)\neq 1$, $EW_1>0$).
令 $T_n=\sum_{i=1}^n W_i$, $T_0=0$, 则

$$N_t=\sum_{k=1}^{\infty} I_{\{T_k\leq t\}}=\sup\{n: T_n\leq t\}.$$

现实服务系统中的例子:

- 在 0 时刻, 安装上一个新的零件并开始运行, 设此零件在 T_1 时刻损坏, 马上用一个新的来替代 (假定替换不需要时间), 则第二个零件在 T_1 时刻开始运行. 设其在 T_2 时刻损坏, 同样马上换第三个,... 很自然可以认为这些零件的使用寿命 W_i 是 i.i.d. 的, 则到 t 时刻为止所**更换的零件的次数**就构成了一个**更新过程**.

- 若 $W_i \sim \epsilon(\lambda)$, 则 N 是强度为 λ 的Poisson过程.
- 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为取值于可数状态空间 E 的遍历马氏链. 对 $i \in E$, 令

$$T_1 = \tau_i, \quad T_{m+1} = \{n > \tau_i(m), X_n = i\}, \quad m \geq 1$$

且

$$N_i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} I_{\{T_k \leq t\}} = \sup\{n : T_n \leq t\}.$$

则, 在 P_i 下, N_i 为更新过程.

■ 卷积: 设 $h(t)$ 为 $[0,\infty)$ 上的局部有界函数 (i.e. 在每个有限区间上有界), $K(t)$ 是 $[0,\infty)$ 上右连续单调增函数. 则称

$$(h*K)(t)=\int_0^\infty h(t-s)dK(s)$$

为 h 关于 K 的卷积.

- $G_1*G_2=G_2*G_1, \quad h*(G_1+G_2)=h*G_1+h*G_2,$
- $(h*G_1)*G_2=h*(G_1*G_2).$

■ 称

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

为更新函数.

- $U(t) = EN_t,\ t \geq 0; \quad U(t) = 0,\ t < 0.$
- $P(N_t = n) = P(N_t \geq n) - P(N_t \geq n+1) = F^{n*}(t) - F^{(n+1)*}(t)$

  $N_t \geq n \Leftrightarrow T_n \leq t$

■ 重要的结果:

- 令 N 为更新过程, $\{T_n, n \geq 1\}$ 为更新时刻, 则

$$E\sum_{n=1}^{N_t} f(T_n) = \int_0^t f(s)dM(s),$$

  其中 $M(s) = EN(s)$.

- 对于任意的随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$, 有

$$E\sum_{n=1}^{N_t} X_n = \int_0^t g(s)dM(s),$$

  其中 $g(s) = E\left(X_n | T_n = s\right)$.

■ 应用: Wald恒等式

$$ET_{N_t+1} = E\sum_{n=0}^{N_t} W_{n+1} = \mu \cdot E(1+N_t).$$

- $T_{N_t+1} = \sum_{n=0}^{N_t} W_{n+1}$

- 大数定律: 设 $\mu < \infty$, 则

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mu}, \quad a.s.$$

  - $T_{N_t} \leq t \leq T_{N_t+1}$

- 中心极限定理: 设 $\sigma^2 = Var(W_1) < \infty$, 则

$$\frac{N_t - t/\mu}{\sigma\sqrt{t/\mu^3}} \Rightarrow N(0,1)$$

  - 对于任意的 $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{N_t - t/\mu}{\sigma\sqrt{t/\mu^3}} \leq x \Leftrightarrow N_t \leq \left[t/\mu + x\sigma\sqrt{t/\mu^3}\right]$$

$$\Leftrightarrow T_{\left[t/\mu + x\sigma\sqrt{t/\mu^3}\right]} \geq t.$$

■ 更新方程: $U(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n*}(t)=U(t)-F(t)$ 满足下面的积分方程

$$U(t)=F(t)+\int_0^t U(t-s)dF(s),$$

- $U*F(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n*}(t)=U(t)-F(t)$

■ 定义: 设 $H(t)$ 是 $[0,\infty)$ 上的局部有界函数, $F(t)$ 是 $[0,\infty)$ 上的分布函数. 称如下的积分方程为更新方程

$$K(t)=H(t)+\int_0^t K(t-s)dF(s),\quad t\geq 0.$$

■ 定理: 设更新方程中 $H(t)$ 是局部有界函数, 则更新方程存在唯一的在有限区间内有界的解

$$K(t) = H(t) + \int_0^t H(t-s)dU(s),$$

其中 $U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$ 是分布函数 $F(t)$ 的更新函数.

- $$\begin{aligned} K &= H + H*F + H*(U*F) = H + H*F + (H*U)*F \\ &= H + \big(H + H*U\big)*F = H + K*F \end{aligned}$$

- 设 K_1, K_2 是两个局部有界解, 则 $\tilde{K} = K_1 - K_2$ 满足

$$\tilde{K} = \tilde{K} * F = \cdots = \tilde{K} * F^{n*}$$

练习: Wald恒等式

$$ET_{N_t+1}\left(=E\sum_{n=0}^{N_t}W_{n+1}\right)=\mu\cdot E(1+N_t).$$

- $E\left(T_{N_t+1}|W_1=x\right)=\begin{cases} x, & \text{if } x>t; \\ x+ET_{N_{t-x}+1}, & \text{if } x\le t \end{cases}$

关键技巧 (首次更新法): 关于某次更新 (一般对第一次或 t 时刻前的最后一次) 取条件期望而得到一个更新方程.

■ Feller 初等更新定理:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{U(t)}{t}=\frac{1}{\mu}$$

- $T_{N_t+1}>t$, Wald 恒等式
- 对于 $M>0$ 固定, 令

$$\bar{W}_n=W_nI_{\{W_n\le M\}}+MI_{\{W_n>M\}},\quad \bar{T}_n=\bar{W}_1+\cdots+\bar{W}_n,$$

$$\bar{N}_t=\sup\left\{n:\bar{T}_n\le t\right\},$$

则 $\bar{T}_{\bar{N}_t+1}\le t+M$, 故

$$U(t)E\bar{W}_1=(EN_t+1)\,E\bar{W}_1\le\left(E\bar{N}_t+1\right)E\bar{W}_1\le t+M$$

■ Blackwell 更新定理:

- 若 F 不是格点分布, 则对任意的 $a > 0$

$$\lim_{t\to\infty}(U(t+a)-U(t)) = \frac{a}{\mu}.$$

- 若 F 是周期为 d 的格点分布 $(\sum_{n=0}^{\infty} P(W = nd) = 1)$, 则

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\text{在 } nd \text{ 处发生更新}\right) = \lim_{n\to\infty}(U(nd)-U((n-1)d)) = \frac{d}{\mu}.$$

■ 注:

- 在远离原点的长度为 a 的区间内, 更新次数的期望为 $\frac{a}{\mu}$, 这是因为 $\frac{1}{\mu}$ 为长时间后更新过程发生的平均速率.
- Balckwell 更新定理可以推出Feller 初等更新定理:

$$a_n \to a \Rightarrow \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \to a$$

- 注意到:

$$U(t)-U(t-a)=\int_0^t I_{[0,a)}(t-s)dU(s),$$

从而, Blackwell 更新定理可以写为

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t I_{[0,a)}(t-s)dU(s)=\frac{a}{\mu}.$$

那么, 可否将函数 $I_{[0,a)}$ 推广到一般的函数?

■ Smith 关键更新定理: 若 $h(t)$ 非负非增, 且 $\int_0^\infty h(t)dt<\infty$.

- 若 F 不是格点分布, 则

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t h(t-s)dU(s)=\frac{1}{\mu}\int_0^\infty h(s)ds.$$

- 若 F 是周期为 d 的格点分布, 则对于 $0\le c<d$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{a+nd} h(a+nd-s)dU(s)=\frac{d}{\mu}\sum_{k=0}^{\infty}h(a+kd).$$

■ 注意到，$K(t)=\int_0^t h(t-s)dU(s)$ 是如下更新方程的解:

$$K(t)=h(t)+\int_0^t K(t-s)dF(s), \quad t\geq 0.$$

故，我们可以得到上述方程解的长时间渐近行为:

$$\lim_{t\to\infty} K(t)=\frac{1}{\mu}\int_0^\infty h(s)ds.$$

■ 应用一: 剩余寿命与年龄的极限分布.

- 分别称

$$r(t) = T_{N_t+1} - t, \quad s(t) = t - T_{N_t}$$

为时间 t 的剩余寿命与年龄.

- 对于 $y > 0$, 有

$$\lim_{t\to\infty} P(r(t) > y) = \lim_{t\to\infty} P(s(t) > y) = \frac{1}{\mu}\int_y^{\infty} 1 - F(z)dz.$$

提示:

- 令 $R_y(t) = P(r(t) > y)$,

则 $P(r(t) > y | W_1 = x) = \begin{cases} 1, & x > t + y; \\ 0, & t < x \leq t + y; \\ R_y(t-x), & 0 < x \leq t \end{cases}$

故 $R_y(t) = 1 - F(t+y) + \int_0^t R_y(t-x)dF(x)$.

- 对任意的 $x \geq 0, 0 \leq y \leq t$

$$\begin{aligned}\{r(t) > x, s(t) > y\} &= \{T_{N_t} < t - y, T_{N_t+1} > t + x\} \\ &= \{(t - y, t + x] \text{ 中无更新}\} \\ &= \{r(t - y) \geq x + y\}.\end{aligned}$$

- $P(s(t) > y) = P(r(t) > 0, s(t) > y)$

关键技巧: 在应用关键更新定理时, 先关于某次更新 (一般对第一次或 t 时刻前的最后一次) 取条件期望而得到一个更新方程, 然后利用关键更新定理.

■ 应用二: 交替更新过程

在更新过程中, 我们考虑系统只有一个状态的情况, 比如机器一直是开的 (即更换零件不需要时间). 而实际中, 零件损坏之后会有一个拆卸更换的过程, 这段时间机器是关的. 这里我们来考虑有**开**与**关**两种状态的更新过程, 及交替更新过程.

假设系统最初是开的, 持续开的时间为 Z_1, 而后关闭, 时间 Y_1 之后再打开; 时间 Z_2 后又关闭, 时间 Y_2 后再打开, $\cdots$ 交替进行. 每当系统被打开称作一次更新. 令随机变量序列 $\{(Z_n, Y_n), n \geq 1\}$ 为i.i.d.

重要结果: 令 F 为 Z_n+Y_n 的分布, 记 $P(t)=P\left(t\text{ 时刻系统是开的}\right)$. 若 $E\left(Z_n+Y_n\right)<\infty$, 且 F 不是格点分布, 则

$$\lim_{t\to\infty} P(t)=\frac{EZ_n}{EZ_n+EY_n}.$$

- 对第一次更新的时刻 $W_1=Z_1+Y_1$ 取条件概率可得

$$P\left(t\text{ 时刻系统是开的}\middle| W_1=x\right)=\begin{cases} P\left(Z_1>t\middle| W_1=x\right), & \text{if } x\geq t,\\ P(t-x), & \text{if } x<t.\end{cases}$$

- $P(t)=P\left(Z_1>t\right)+\int_0^t P(t-x)dF(x)$.

■ 应用三: 更新回报过程

称 $R(t)=\sum_{i=1}^{N_t} R_i$ 为更新回报过程, 其中 $\{N_t, t\geq 0\}$ 为更新过程, 随机向量列 (R_n, W_n) 独立同分布.

更新回报定理:

若更新时间间隔 $W_1, W_2, \cdots$ 满足 $EW_1<\infty$, 每次得到的回报 $R_n, n=1,2,\cdots$ 满足 $ER_1<\infty$. 则

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}R(t)=\frac{ER_1}{EW_1},\quad a.s.$$

以及

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}ER(t)=\frac{ER_1}{EW_1}.$$

- 对首次更新的时刻与首次更新回报 $(W_1, R_1\}$ 取条件概率可得

$$E\left(\sum_{i=1}^{N_t} R_i \middle| W_1 = s, R_1 = x\right) = \begin{cases} 0, & \text{if } s > t, \\ x + E\left(\sum_{i=1}^{N_{t-s}} R_i\right), & \text{if } s \le t. \end{cases}$$

- 令 $K(t) = ER(t)$, 则

$$K(t) = F_{W_1}(t)ER_1 + \int_0^t K(t-s)dF_{W_1}(s).$$

由更新方程与初等更新定理可得结论.

应用四: Lundberg-Cramér 破产概率

- 设保险公司接到索赔次数服从强度为 λ 的泊松过程 $\{N_t, t \geq 0\}$, 每次索赔金额 $X_i \geq 0$ 独立同分布, 其公共分布为 F (非格点), 期望为 μ. 每次索赔金额与发生的时刻无关. $S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$ 表示 $(0, t]$ 内保险公司需要赔付的总金额.

  设保险公司初始资本为 $u \geq 0$, 单位时间征收的保费率为 $c > 0$. 则保险公司在 t 时刻的盈余为
  $$V(t) = u + ct - S(t), \quad t \geq 0.$$
  此模型称为Lundberg-Cramér 保险模型。
- 保险公司为运作上的安全, 要求
  $$ct - ES(t) = (c - \lambda\mu)\, t > 0, \quad t \geq 0.$$
  故令 $c = (1+\theta)\lambda\mu$ (相对安全负荷), 其中 $\theta > 0$.
- 定义 $T = \inf\{t : V(t) < 0\}$, 称之为破产时. 破产概率为
  $$\Psi(u) = P\left(T < \infty \middle| V(0) = u\right), \quad u \geq 0.$$

■ 破产概率的渐近估计

若存在 $\delta > 0$, 使得

$$M(r) := Ee^{rX} < \infty, \quad |r| \le \delta,$$

且方程 $M(r) = 1 + \frac{cr}{\lambda}$, 即 $r\int_0^\infty e^{rx}(1 - F(x))\,dx = \frac{cr}{\lambda}$, 存在唯一解 $R \in (0, \infty)$. 则存在常数 $C > 0$, 有

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\Psi(t)}{e^{-Rt}} = C.$$

- 利用首次更新法 (关于 $(W_1, R_1\}$ 取条件概率), 可以得到

$$\Psi(t) = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty 1 - F(s)ds + \frac{\lambda}{c}\int_0^t \Psi(t-s)\left(1-F(s)\right)ds$$

- 令 $K(t) = e^{Rt}\Psi(t)$, 则

$$K(t) = h(t) + \int_0^t K(t-s)g(s)ds,$$

其中 $h(t) = e^{Rt}\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty 1 - F(s)ds, \quad g(t) = e^{Rt}\frac{\lambda}{c}\left(1 - F(t)\right).$

- $\int_0^\infty g(t)dt = 1, \quad \int_0^\infty h(t)dt = \frac{\theta}{R(1+\theta)}.$

关键之处在于: R (调节系数)满足

$$\int_0^\infty e^{Rx}\left(1 - F(x)\right)dx = \frac{c}{\lambda}$$