Poisson过程

蒋辉

南京航空航天大学数学系

October 18, 2018

■ 现实服务系统中的例子:

- 系统运行中的故障数
- 机场在一天各个时段的客流量
- 电信局总机接收电话的呼叫数
- 顾客寻求保险公司的索赔数

■ 建模:
令 $N_t := N(0,t]$ 表示 $(0,t]$ 内接受顾客寻求服务的次数, 则 $N = \{N_t, t \geq 0\}$ 的性质如何?

- Poisson 过程的定义: 称 $N=\{N_t, t\geq 0\}$ 为强度 λ 的Poisson 过程, 若
  - $N_0=0$
  - 平稳独立增量:
    (1). $\forall 0<t_1<\cdots<t_n$, $N_{t_1}, N_{t_2}-N_{t_1}, \cdots N_{t_n}-N_{t_{n-1}}$ 相互独立;
    (2). $\forall s,t\geq 0$, $N_{t+s}-N_s$ 与 N_t 同分布.
  - $N_t\sim\pi(\lambda t)$

- Poisson 过程的基本性质:
  - $\forall 0\leq s\leq t$,

$$\mu_t=\lambda t, \quad \sigma^2(t)=\lambda t, \quad R(s,t)=\lambda s+\lambda^2 st$$

  - $\forall 0\leq s\leq t$,

$$E(N_t|N_s)=N_s+\lambda(t-s), \quad E(N_s|N_t)=\frac{s}{t}N_t$$

■ 有限维分布:

- $P(N_1 = 2, N_3 = 5) = ?$
- $\forall 0 < t_1 < \cdots < t_n$,

$$P\left(N_{t_1} = k_1, \cdots, N_{t_n} = k_n\right) = ?$$

■ Poisson 过程的轨道:

- 假定第一个顾客到达时刻为 S_1, 则

$$t < S_1 \Leftrightarrow N_t = 0$$

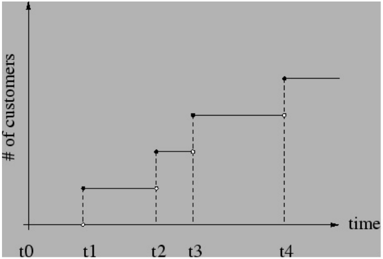
  且 $N_{S_1} = 1$.

- 假定第二个顾客到达时刻为 S_2, 则

$$S_1 \le t < S_2 \Leftrightarrow N_t = 1$$

  且 $N_{S_2} = 2$.

- 以此类推可知, $N = \{N_t, t \ge 0\}$ 是一个阶梯函数, 跳跃点为 $S_1, S_2, \cdots$, 跳的高度为 1.



从而有如下重要公式

$$N_t = \sum_{k=1}^{\infty} I_{\{S_k \leq t\}}.$$

■ 到达时间的分布:

- $S_1 \sim \mathscr{E}(\lambda)$: $\forall t \geq 0$

$$P(S_1 > t) = P(N_t = 0) = e^{-\lambda t}$$

- $S_2 \sim \Gamma(2, \lambda)$: $\forall t \geq 0$

$$\begin{aligned} P(S_2 > t) &= P(N_t \leq 1) \\ &= e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

从而 S_2 的密度函数为 $\lambda^2 t e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$.

- $S_n \sim \Gamma(n, \lambda)$: $\forall t \geq 0$

$$\begin{aligned} P(S_n > t) &= P(N_t \leq n-1) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

从而 S_n 的密度函数为 $\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$.

■ 到达时间联合分布:

- 令 (S_1, S_2) 的联合分布函数为 $f(t_1, t_2)$.
  (1). 当 $t_1 \geq t_2$ 时, $f(t_1, t_2) = 0$;
  (2). 当 $t_1 < t_2$ 时, 取充分小的 Δt_1, 使得 $t_1 + \Delta t_1 < t_2$, 故

$$f(t_1, t_2) = \lim_{\Delta t_1, \Delta t_2 \to 0} \frac{P(t_1 < S_1 \leq t_1 + \Delta t_1, t_2 < S_2 \leq t_2 + \Delta t_2)}{\Delta t_1 \Delta t_2}.$$

  利用Poisson 过程的增量性质可知:

$$\begin{aligned} & P(t_1 < S_1 \leq t_1 + \Delta t_1, t_2 < S_2 \leq t_2 + \Delta t_2) \\ & = P(N_{t_1} = 0, N_{t_1 + \Delta t_1} - N_{t_1} = 1, N_{t_2} - N_{t_1 + \Delta t_1} = 0, N_{t_2 + \Delta t_2} - N_{t_2} \geq 1) \\ & = \lambda \Delta t_1 e^{-\lambda t_2} \left(1 - e^{-\lambda \Delta t_2}\right). \end{aligned}$$

  此时, $f(t_1, t_2) = \lambda^2 e^{-\lambda x_2}$.

- $(S_1, \cdots, S_n)$ 的联合分布函数为

$$f(t_1, \cdots, t_n) = \begin{cases} \lambda^n e^{-\lambda x_n}, & 0 < t_1 < \cdots < t_n; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

注: 当 $\Delta t \to 0$ 时

$$P(N_{t+\Delta t} - N_t) = o(\Delta t).$$

即在充分小的时间内, 系统最多来到一个顾客.

■ 等待时间的分布:

令

$$\tau_k = S_k - S_{k-1}, \quad S_0 = 0, \quad k = 1, 2, \cdots$$

则 $\tau_1, \tau_2, \cdots$ 相互独立且同分布, 且服从 $\mathscr{E}(\lambda)$.

注：若 $Y_1, \cdots, Y_n$ 相互独立且同分布, 且服从 $\mathscr{E}(\lambda)$. 则

$$Z := Y_1 + \cdots + Y_n \sim \Gamma(n, \lambda)$$

且

$$F_Z(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

- 到达时间的条件分布:
  - 在 $N_t = 1$ 的条件下,
$$S_1 = \tau_1 \sim U([0,t]).$$
  - 在 $N_t = n$ 的条件下,

$S_k \sim \beta -$分布 (机器学习, 数理统计; 如空气的相对湿度等), $k \le n$

其密度函数为

$$f_{S_k|N_t=n}(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{tB(n-k+1,k)} \left(\dfrac{s}{t}\right)^{k-1} \left(1-\dfrac{s}{t}\right)^{n-k}, & 0 < s \le t; \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

- 在 $N_t=n$ 的条件下，$(S_1,\cdots,S_n)$ 与 $(U_{(1)},\cdots,U_{(n)})$ 同分布，其中 $U_{(1)},\cdots,U_{(n)}$ 为 $U_1,\cdots U_n$ 的顺序统计量，且 $U_1,\cdots U_n$ 为 n 个 $[0,t]$ 上相互独立的均匀分布. 即在 $N_t=n$ 的条件下，$(S_1,\cdots,S_n)$ 的概率密度为

$$f(t_1,\cdots,t_n)=\begin{cases}\dfrac{n!}{t^n}, 0<t_1<\cdots<t_n<t;\\ 0, \quad \text{其它}.\end{cases}$$

■ 重要公式:

对于 $[0,\infty)$ 上的任意可测函数 f, 有

$$E\sum_{n=1}^{\infty} f(S_n) = \int_0^{\infty} f(t)dt.$$

提示: S_n 的密度函数为 $\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\lambda e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$.

例: 电视台提供有偿节目服务, 从申请受理后开始收费, 每单位时间收费 a 元. 假定在 $(0,t]$ 时间内申请的客户数服从参数为 λ 的Poisson过程, 求电视台一年 (时间区间为 $[0,1]$) 内收入的平均值.

■ 定义: 假定 $N=\{N_t, t\geq 0\}$ 是强度为 λ 的 Poisson 过程. $\xi_1, \xi_2, \cdots$ 独立同分布, 且与过程 N 相互独立. 我们称

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i,$$

为复合 Poisson 过程.

例:

- 保险公司开展风险投保业务, 共有 N 人参保, 每人保费为 M 元. 假定在 $(0,t]$ 内来索赔的顾客人数 N_t 服从强度为 λ 的Poisson过程, 且假定每位来索赔的顾客的索赔额为独立同分布的. 求保险公司亏本的概率.

■ 复合 Poisson 过程 $X_t = \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i$ 的重要性质:

- $EX_t = \lambda t E\xi, \quad DX_t = \lambda t E\xi^2.$
- $Ee^{i\theta X_t} = e^{\lambda(\varphi_\xi(\theta)-1)}$, 其中

$$\varphi_\xi(\theta) = Ee^{i\theta\xi}.$$

- 分布:

$$P\left(\sum_{i=1}^{N_t} \xi_i \leq x\right) = ? \ (\text{重期望公式})$$

- 令 $(S_n, n\geq 1)$ 是强度为 λ 的Poisson 过程 N 的到达时刻. 对于任意的函数 f

$$\sum_{k=1}^{N_t} f(S_k) \text{ 与 } \sum_{k=1}^{N_t} f(U_i) \text{ 同分布},$$

其中 $U_1, U_2, \cdots$ 为相互独立的, 皆服从 $[0,t]$ 上的均匀分布, 且与Poisson 过程 N 独立.

- $$E\sum_{k=1}^{N_t} f(S_k) = \lambda\int_0^t f(x)dx, \quad Var\left(\sum_{k=1}^{N_t} f(S_k)\right) = \lambda\int_0^t f^2(x)dx.$$

- 令 $B=\{B_t\}$ 为Brown运动，求
  (1). $E\left(e^{\alpha B_t}|B_s\right)$，其中 $s\le t$;
  (2). $E(B_t^2|B_s)$，其中 $s\le t$;
  (3). $X=\int_0^1 B_t dt$ 的期望与方差.
- 令 $\vec{X}=(X_1,X_2,X_3,X_4)$ 为四维正态随机向量，$E\vec{X}=0$. 证明
  $$\begin{aligned}E(X_1X_2X_3X_4)=&E(X_1X_2)E(X_3X_4)+E(X_1X_3)E(X_2X_4)\\&+E(X_1X_4)E(X_2X_3).\end{aligned}$$
  提示：利用正态随机向量特征函数与矩的关系.
- 令 $N=\{N_t,t\ge 0\}$ 是强度为 λ 的Poisson过程，S_k 为过程的第 k 个到达时间，求
  (1). ES_k， DS_k;
  (2). 若 $M=\{M_t,t\ge 0\}$ 为强度为 μ 的Poisson过程，且与 N 相互独立，求 M_{S_k} 的分布律.

- 令四维 $r.v.\vec{X} \sim N(\vec{a}, B)$, 其中

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

求

(1). $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_3 \end{pmatrix}$ 的分布;

(2). $\vec{Y} = \begin{pmatrix} 2X_1 \\ X_2 - X_3 \\ X_3 + X_4 \end{pmatrix}$ 的分布;

(3). $\vec{Y}$ 的特征函数.

- 机床零件在工作中受到撞击而造成磨损. 在 $(0,t]$ 时间内受到撞击的次数 N_t 服从强度为 λ 的Poisson过程, 各次撞击造成的磨损量 ξ_i 相互独立, 且服从参数为 β 的指数分布. 当累计磨损超过 α 时, 零件不能正常工作, 需要更换. 求零件的平均寿命.

提示: 在 $(0,t]$ 内零件的磨损量为 $Z_t=\sum_{i=1}^{N_t}\xi_i$. 令零件的寿命为 η, 则

$$\eta > t \Leftrightarrow Z_t < \alpha.$$