# 第四章 线性空间和线性交换

## 第一节 线性空间定义

1.（1）不是；（2）是，零元素是 1，a 的负元素是$\frac{1}{a}$.

2.（1）是；（2）是；（3）否；（4）否.

## 第二节 线性空间的基和维数

1． 证：设$k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3+k_4A_4=O$，则有

$$\begin{cases}k_1+k_2+k_3-k_4=0,\\k_1-k_2+k_3+k_4=0,\\k_1+k_2-k_3+k_4=0,\\k_1-k_2-k_3-k_4=0,\end{cases}$$

系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\1&-1&1&1\\1&1&-1&1\\1&-1&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\0&-1&0&1\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$，则$r(A)=4$，

故$k_1=k_2=k_3=k_4=0$，即$A_1,A_2,A_3,A_4$线性无关.

又对任意一个 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$，若$k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3+k_4A_4=A$，

则可得$\begin{cases}k_1+k_2+k_3-k_4=a_{11},\\k_1-k_2+k_3+k_4=a_{12},\\k_1+k_2-k_3+k_4=a_{21},\\k_1-k_2-k_3-k_4=a_{22},\end{cases}$

解得唯一的一组解为：$\begin{cases}k_1=\frac{1}{4}(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22}),\\k_2=\frac{1}{4}(a_{11}-a_{12}+a_{21}-a_{22}),\\k_3=\frac{1}{4}(a_{11}+a_{12}-a_{21}-a_{22}),\\k_4=\frac{1}{4}(-a_{11}+a_{12}+a_{21}-a_{22}),\end{cases}$

即任意一个 $A$ 都可以由这组矩阵线性表出，且表达式唯一，则 dim$(R^{2\times2})$=4，且$A_1,A_2,A_3,A_4$构成$R^{2\times2}$的一组基.

2．解：令 $A_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，则由 $k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3=O$ 可解得 $k_1=k_2=k_3=0$，即 $A_1,A_2,A_3$ 线性无关。又对任意一个 $A\in V$，

$A=\begin{pmatrix}a & a+b\\ c & c\end{pmatrix}$，若 $k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3=A$，可解得唯一一组解为：

$k_1=\mathrm{a}, k_2=\mathrm{b}, k_3=c$，即任意一个 $A$ 都可以由 $A_1,A_2,A_3$ 线性表出，且表达式唯一，则 $\dim(V)=3$，且 $A_1,A_2,A_3$ 构成 $V$ 的一组基。

3．解：过度矩阵为：$C=\begin{pmatrix}2 & 0 & 5\\ 1 & 3 & 3\\ -1 & -1 & -3\end{pmatrix}$，若有一个非零向量 $w=(x,y,z)^T$，满足 $w=Cw$，

则可得方程组 $\begin{cases}x=2x+5z,\\ y=x+3y+3z,\\ z=-x-y-3z,\end{cases}$ 对系数矩阵经初等行变换后得阶梯形方程组

$\begin{cases}x+5z=0,\\ y-z=0,\end{cases}$ 可解得一般解为：

$w=(-5c,c,c)$，$c$ 为任一非零常数。

# 第三节 Euclid 空间

1．解：（1）$|\alpha_1|=\sqrt{7}$，$|\alpha_2|=\sqrt{15}$，$|\alpha_3|=\sqrt{10}$.

因为 $\cos\theta=\frac{(\alpha_2,\alpha_3)}{|\alpha_2||\alpha_3|}=-\frac{3\sqrt{6}}{10}$，故 $\theta=\arccos\left(-\frac{3\sqrt{6}}{10}\right)$.

（2）设与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 都正交的向量为 $\beta=(b_1,b_2,b_3,b_4)$，则可得

$\begin{cases}b_1+2b_2-b_3+b_4=0,\\ 2b_1+3b_2+b_3-b_4=0,\\ -b_1-b_2-2b_3+3b_4=0,\end{cases}$ 经过初等行变换可得阶梯形矩阵：

$\begin{cases}b_1+2b_2-b_3+b_4=0,\\ -b_2+3b_3-3b_4=0,\end{cases}$ 解得一般解为 $\beta=(-5b_3+5b_4,3b_3-3b_4,b_3,b_4)^T$，其中 $b_3,b_4$ 为自由变量。

2．解：$\beta_1=\alpha_1=(1,0,1,1)^T$，$\gamma_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,1,1)^T$.

$\beta_2=\alpha_2-(\alpha_2,\gamma_1)\gamma_1=\left(-\frac{1}{3},1,\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)^T$，$\gamma_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\frac{1}{\sqrt{15}}(-1,3,2,-1)^T$.

$\beta_3=\alpha_3-(\alpha_3,\gamma_1)\gamma_1-(\alpha_3,\gamma_2)\gamma_2=\left(-\frac{3}{5},-\frac{1}{5},\frac{1}{5},-\frac{2}{5}\right)^T$，

$\gamma_3=\frac{\beta_3}{|\beta_3|}=\frac{1}{\sqrt{15}}(-3,-1,1,2)^T$.

3．解：$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 2 & 2 & -4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，

取$x_3,x_4$为自由变量，解得$\begin{pmatrix}-2x_4\\ x_3+3x_4\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}$，

一个基础解系为$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\3\\0\\1\end{pmatrix}$，将它们标准正交化，

$\beta_1=\alpha_1$，$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,,1,1,0)^T$，

$\beta_2=\begin{pmatrix}-2\\3\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$，$|\beta_2|=\sqrt{\frac{19}{2}}$,

$\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{38}}(-4,3,-3,2)^T$.

4.证：

1) $(AB)^T(AB)=B^TA^TAB=B^TEB=B^TB=E$

2) A 正交，则$|A|=\pm 1, A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\pm A^*$则$(A)^TA^*=(A^{-1})^TA^{-1}=(AA^T)^{-1}=E^{-1}=E$

5.解：$Q=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}7a & -3 & 2\\ 7b & 7c & -3\\ -3 & 2 & -6\end{pmatrix}$通过$Q^TQ=E$得$\begin{cases}-21a+49bc-6=0\\ 14a-21b+18=0\\ -6-21c-12=0\end{cases}$

解得$a=-\frac{6}{7}, b=\frac{2}{7}, c=-\frac{6}{7}$

6.证：因为$Q^TQ=E$，故对任意$X\in R^n$，有$|QX|^2=(QX,QX)=(QX)^T(QX)=x^TQ^TQX=X^TX=|X|^2$，则一定有$|QX|=|X|$

# 第四节 线性变换

1.解：

1) $\mathcal{A}\varepsilon_1=\mathcal{A}(1,0,0)^T=\varepsilon_1+\varepsilon_2$ $\mathcal{A}\varepsilon_2=\mathcal{A}(1,-1,0)^T=\varepsilon_1-\varepsilon_2$ $\mathcal{A}\varepsilon_3=\mathcal{A}(0.0.1)^T=\varepsilon_3$

所求矩阵为$\mathrm{D}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

2) $\mathcal{A}\eta_1=(1,1,0)^T=\eta_2$ $\mathcal{A}\eta_2=(2,0,0)^T=2\eta_1$ $\mathcal{A}\eta_3=(2,0,1)^T=2\eta_1-\eta_2+\eta_3$

故所求矩阵为$\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

2.解：

1) $\mathcal{A}\varepsilon_1=(2,3,5)^T=2\varepsilon_1+3\varepsilon_2+5\varepsilon_3$ $\mathcal{A}\varepsilon_2=\mathcal{A}(1,1,0)^T-\mathcal{A}\varepsilon_1=(-1,-3,-5)^T=-\varepsilon_1-3\varepsilon_2-5\varepsilon_3$ $\mathcal{A}\varepsilon_3=\mathcal{A}(1,1,1)^T-\mathcal{A}\varepsilon_2-\mathcal{A}\varepsilon_1=(-1,1,-1)^T=-\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3$

故所求的矩阵为$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & -3 & 1\\ 5 & -5 & -1\end{pmatrix}$

2) 已知$\alpha=2\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3$则$\mathrm{y}=\mathrm{AX}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & -3 & 1\\ 5 & -5 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 10\\ 14\end{pmatrix}$