第三章 n 维向量与线性方程组解的结构

第一节 n 维向量及其线性运算

1.$\gamma = 3\alpha - 4\beta = (30, -10, -20, -16)$

第二节 向量组的线性相关性和线性无关性

1.

1) 能，唯一种表示：$\beta = 2\alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3$

2) 不能

2.唯一表达式为：$\beta = (b_1 - b_2)\alpha_1 + (b_2 - b_3)\alpha_2 + (b_3 - b_4)\alpha_3 + b_4\alpha_4$

3.

1) 线性无关

2) 线性相关

3) 线性相关，因为 4 个向量，每个向量维数 3 维。

4) 若 a,b,c 均不相等，线性无关，否则人线性相关。

4.

1) 线性无关

2) 线性相关

5.解：设$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+K_3(\alpha_3+\alpha_4)+k_4(\partial_4+\alpha_1)=0$

整理可得$(k_1+k_4)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3+(k_3+k_4)\alpha_4=0$

因为已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是线性无关的，故有$\begin{cases}k_1+k_4=0\\k_1+k_2=0\\k_2+k_3=0\\k_3+k_4=0\end{cases}$

系数矩阵 A=$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$则 r(A)=3

故$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$是线性相关的。

6.证：因为任意 n+1 个 n 维向量必线性相关，故$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n,\beta$线性相关，不全为零的 n+1 个数$k_1,k_2,\dots,k_{n+1}$,*使得*$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n+k_{n+1}\beta=0$ 若$k_{n+1}=0$，$\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n$线性相关，矛盾。所以$k_{n+1}\neq 0$，β可由$\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n$线性表出，表达式为一

7. 证：（反证法即得）.假设k_1,k_2,k_3,k_4不全为零，其中某个为零，其他的不为零. 不妨假设$k_1=0$则$k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=0$其$k_2,k_3,k_4$均不为零，则可推出 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是线性相关的，这与已知任意三个向量都线性无关矛盾,故假设不成立.由假设的任意性可知$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=0$其中$k_1,k_2,k_3,k_4$全不为 零.

第三节 向量组的秩

1.

1) $A=\begin{pmatrix}1&1&3\\2&2&6\\0&3&0\\0&4&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 故$r(A)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$

$\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3$

故一个极大线性无关组是α_1,α_2

2) $A=\begin{pmatrix}2&1&3&5\\1&2&0&1\\-3&-1&-5&-8\\1&4&-2&-1\\4&4&5&8\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&-1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$故$r(A)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$

故一个极大线性无关组是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

2.证：由于$\alpha_1,\alpha_2,$线性相关，故一定存在有k_1,k_2,k_3不全为零，使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_4=0$，则一定有$k_3\neq 0$ 设$\alpha_4=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2$，类似的$\alpha_4=b_1\alpha_1+b_2\alpha_3$，$\alpha_4=c_1\alpha_2+c_2\alpha_3$由这几个等式可推出所有系数均为零故$\alpha_4=0$

3.证：因为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$的秩为$r_1$，则其有一个极大线性无关组，设为$c_1,c_2,\dots,c_{r_1}$向量组$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_t$的秩为$r_2$，则其有一个极大线性无关组，设为$d_1,d_{2,\dots,},d_{r_2}$则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_t$可以由$c_1,c_2,\dots,c_{r_1}$和$d_1,d_{2,\dots,},d_{r_2}$线性表出，故$r_3\leq r(c_1,c_2,\dots,c_{r_1},c_1,c_2,\dots,c_{r_1})\leq r_1+r_2$.

4.$r(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s)=r$且$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\dots,\alpha_{i_r}$为其中 r 个线性无关的向量. 设$\alpha_k$是向量组中任意一个向量，则$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\dots,\alpha_{i_r},\alpha_k$线性相关，否则向量组的秩会大于 r .所以，由定理 3.5，α_k可由$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\dots,\alpha_{i_r}$线性表出，故$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\dots,\alpha_{i_r}$为向量组的一个极大线性无关组。

第四节 齐次线性方程组

1.

1) $A=\begin{pmatrix}1&-1&5&-1\\1&1&-2&3\\3&-1&8&1\\1&3&-9&7\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&5&-1\\0&2&-1&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$于是得阶梯形方程组

$\begin{cases}x_1-x_2+5x_3-x_4=0\\2x_2-7x_3+4x_4=0\end{cases}$ 方程组的一般解为：$X=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}x_3-x_4\\\frac{7}{2}x_3-2x_4\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$

可得方程组的一个基础解系为$\eta_1=\left(-\frac{3}{2},\frac{7}{2},1,0\right)^T$，$\eta_2=(-1,-2,0,1)^T$

通解为$X=k_1\eta_1+k_2\eta_2,k_1,k_2$为常数

2) $A=\begin{pmatrix}-3&9&-3&6&3\\1&-3&1&-2&-1\\2&-6&2&-4&-2\\5&-15&5&-10&-6\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-3&1&-2&-1\\0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

于是得阶梯形方程$\begin{cases}x_1-3x_2+x_3-2x_4-x_5=0\\-x_5=0\end{cases}$

方程组的一般解为$X=\begin{pmatrix}3x_2-x_3+2x_4\\x_2\\x_3\\x_4\\0\end{pmatrix}$

可得方程组的一个基础解系为:

$\eta_1=(3,1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$ $\eta_2=(-1,0,1,0.0)^{\mathrm{T}}$ $\eta_3=(2,0,0,1,0)^T$

通解为$X=k_1\eta_1+k_2\eta_2+k_3\eta_3, k_1, k_2, k_3$为常数

2.证：先证$\eta_1+\eta_2, \eta_3+\eta_2, \eta_1+\eta_3$线性无关，设存在$k_1, k_2, k_3$使得$k_1(\eta_1+\eta_2)+k_2(\eta_2+\eta_3)+k_3(\eta_3+\eta_1)=0$，即$(k_1+k_4)\eta_1+(k_1+k_2)\eta_2+(k_2+k_3)\eta_3=0$又因为$\eta_1, \eta_2, \eta_3$线性无关，则$\begin{cases}k_1+k_3=0\\k_1+k_2=0\\k_2+k_3=0\end{cases}$可得唯一解$k_1=k_2=k_3=0$即$\eta_1+\eta_2, \eta_3+\eta_2, \eta_1+\eta_3$线性无关，由于$X=k_1(\eta_1+\eta_2)+k_2(\eta_2+\eta_3)+k_3(\eta_3+\eta_1)=(k_1+k_4)\eta_1+(k_1+k_2)\eta_2+(k_2+k_3)\eta_3=0$ 可知任意一个向量都可由$\eta_1+\eta_2, \eta_3+\eta_2, \eta_1+\eta_3$线性表出，即$\eta_1+\eta_2, \eta_3+\eta_2, \eta_1+\eta_3$也是 AX=0 的一个基础解系。

3.证：假定一个基础解系为$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s$，线性无关向量组$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$与其等价，故也含有 s 个向量。已知向量组$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$满足线性无关性，又因为每一个解向量都可以由$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s$线性表出，而$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s$和$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$是等价向量组，根据传递性，每个解向量都可以由 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ 线性表出，故$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$也是一个基础解析。

第五节 非齐次线性方程组

1.

1) $(A \quad \beta)=\begin{pmatrix}1&-5&2&-3&11\\-3&1&-4&2&-5\\-1&-9&0&-1&17\\5&3&6&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-5&2&-3&11\\0&-2&-1&1&3\\0&0&9&-14&7\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

于是得阶梯型方程组$\begin{cases}x_1-5x_2+2x_3-3x_4=11\\ \quad -2x_2-x_3+x_4=3\\ \quad\quad 9x_3-1+x_4=7\end{cases}$ 取x_4为自由变量，可得方程组的一般解为$X=\left(-\frac{3}{2}x_4, -\frac{17}{9}-\frac{5}{18}x_4, \frac{1}{9}(7+14x_4), x_4\right)^{\mathrm{T}}$可得一个特解为$\eta_0=\left(0, -\frac{17}{9}, \frac{7}{9}, 0\right)^{\mathrm{T}}$一个基础解系为$\eta_1=\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{18}, \frac{14}{9}, 1\right)^{\mathrm{T}}$则方程组的通解为$X=\eta_0+k_1\eta_1$ 其中k_1为常数。

2) $(A \quad \beta)=\begin{pmatrix}2&1&-1&3&3\\5&-1&0&-10&4\\-3&2&1&-2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&3&-2&1&2\\0&7&-5&5&7\\0&0&0&-15&0\end{pmatrix}$

于是得阶梯形方程组$\begin{cases}-x_1+3x_2-2x_3+x_4=2\\ 7x_2-5x_3+5x_4=7\\ -15x_4=0\end{cases}$ 取x_3为自由变量，可得方程组一般解为$X=\left(1+\frac{1}{7}x_3,1+\frac{5}{7}x_3,x_3,0\right)^T$可得一个特解为$\eta_0=(1,1,0,0)^T$一个基础解系为$\eta_1=\left(\frac{1}{7},\frac{5}{7},1,0\right)^T$

则方程组的通解为$X=\eta_0+k_1\eta_1$ 其中k_1为常数。

2.解：自由变量的个数为 4-r(A)=2，$\eta_1=\alpha_2-\alpha_1=(1,2,0,1)^T$，$\eta_2=\alpha_2-\alpha_3=(3,3,1,2)^T$显然$\eta_1$*和*$\eta_2$线性无关，故齐次线性方程组的一个基础解系为$\eta_1,\eta_2$.取特解$\eta_0=\alpha_1=(3,0-1,1)^T$,则非齐次线性方程组的通解为$x=\eta_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\\1\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}3\\3\\1\\2\end{pmatrix}$

3.解：$(A\beta)=\begin{pmatrix}1&1&-2&3&0\\2&3&-2&5&\lambda\\1&2&0&2&\lambda^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&5&0\\0&1&2&-1&\lambda\\0&0&0&0&\lambda^2-\lambda\end{pmatrix}$

当$\lambda^2-\lambda=0$，即$\lambda=0$或$\lambda=1$时有解；当$\lambda^2-\lambda\neq0$，即$\lambda\neq0$或$\lambda\neq1$时无解。

若有解，得阶梯形方程组：$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3+3x_4=0\\ x_2+2x_3-x_4=\lambda\end{cases}$取$x_3,x_4$为自由变量，则方程组一般解为$X=(-\lambda+4x_3-4x_4,\lambda-2x_3+x_4,x_3,x_4)^T$可得一个特解为$\eta_0=(-\lambda,\lambda,0,0)^T$一个基础解系为$\eta_1=(4,-2,1,0)^T\eta_2=(-4,1,0,1)^T$则方程组的通解为：$x=\eta_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2$其中$k_1,k_2$为常数，$\lambda=0$或$\lambda=1$.

4.记$A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{s1}&\cdots&a_{sn}\end{pmatrix}$ $x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ $\beta=0$ 所以 Ax=0 且任一个 n 维向量均是其解向量那么$\alpha_1,\ldots,\alpha_s$均为基解向量即 n 维基向量组，即有$\begin{cases}A\alpha_1=0\\ A\alpha_2=0\\ \vdots\\ A\alpha_s=0\end{cases}$故$\alpha_{ij}=0(i=1,\ldots,s;j=1,\ldots,n)$成立