一、填空题

1.设$z=xy+xF\left(\frac{y}{x}\right)$,其中$F(\mu)$为可微函数，则$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$=_______

答案：**xy+z**

解析：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y+F\left(\frac{y}{x}\right)+xF'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot-\frac{y}{x^2}=y+F\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}F'\left(\frac{y}{x}\right).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x+xF'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}=x+F'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\begin{aligned}x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}&=xy+xF\left(\frac{y}{x}\right)-yF'\left(\frac{y}{x}\right)+xy+yF'\left(\frac{y}{x}\right)\\&=2xy+xF\left(\frac{y}{x}\right)\\&=2xy+z-xy\\&=xy+z.\end{aligned}$$

2.函数$z=x^2+y^2$在点（1,2）处沿从点（1,2）到点（2,2+$\sqrt{3}$）的方向的方向导数为______________

答案：**1+2$\sqrt{3}$**

解析：

$z=x^2+y^2$ 在 $C(1,2)$ 可微

方向 $\vec{l}=(1,\sqrt{3})$.

$\cos\alpha=\frac{1}{2}$, $\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又 $\frac{\partial z}{\partial x}=2x=2$

$\frac{\partial z}{\partial y}=2y=4$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1,2)}&=z_x(1,2)\cos\alpha+z_y(1,2)\cos\beta\\&=2\times\frac{1}{2}+4\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=1+2\sqrt{3}\end{aligned}$$

3. V:$\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{2-x^2-y^2}$，计算三重积分$I=\iiint_V (x+z)dv$=_______

答案：$\frac{\pi}{2}$

解析：利用奇偶性和柱面坐标可得：

$$I=\iiint_V zdv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_r^{\sqrt{z-r^2}} zdz=\pi\int_0^1(2-2r^2)rdr=\frac{\pi}{2}$$

4. 若$u=\arcsin\frac{z}{x+y}$，则$du=$________.

$$du=\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{z}{x+y})^2}}\cdot\frac{(x+y)dz-z(dx+dy)}{(x+y)^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(x+y)^2-z^2}}[\frac{-z}{x+y}(dx+dy)+dz]$$

故应填$\frac{1}{\sqrt{(x+y)^2-z^2}}[\frac{-z}{x+y}(dx+dy)+dz]$

5.L为在抛物线$2x=\pi y^2$上由点（0,0）到（$\frac{\pi}{2}$，1）的一段弧，计算曲线积分$\int_L (2xy^3-y^2cosx)dx+(1-2ysinx+3x^2y^2)dy$=_______

答案：$\frac{\pi^2}{4}$

解析:

$P=2xy^3-y^2\cos x, Q=1-2y\sin x+3x^2y^2$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=(-2y\cos x+6xy^2)-(6xy^2-2y\cos x)=0,$$

所以由格林公式

$$\int_{L^-+OA+OB}Pdx+Qdy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=0,$$

其中L、OA、OB、及D如图所示.

故 $\int_L Pdx+Qdy=\int_{OA+AB}Pdx+Qdy$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}0dx+\int_0^1(1-2y+\frac{3\pi^2}{4}y^2)dy=\frac{\pi^2}{4}.$$

6. 设 D 是第一象限由曲线 2xy=1, 4xy=1 与直线 y=x, y=$\sqrt{3}$x 围成的平面区域，函数 f(x, y)在 D 上连续，则$\iint_D$f(x, y)dxdy= ________

答案：$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$

解析：

【分析】此题考查将二重积分化成极坐标系下的累次积分

【解析】先画出D的图形，

所以$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$

7. 设平面区域 D 由曲线 y=$\sqrt{3(1-x^2)}$与直线 y=$\sqrt{3}$x 及 y 轴围成，二重积分$\iint_D x^2$ dxdy=____

【解】原式$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{3(1-x^2)}} x^2 dy$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x^2 y\Big|_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{3(1-x^2)}} dx$$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x^2\left[\sqrt{3(1-x^2)}-\sqrt{3}x\right]dx$$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x^2\sqrt{3(1-x^2)}dx-\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{3}x^3dx$$

$$=I_1-I_2,$$

其中$I_1=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x^2\sqrt{3(1-x^2)}dx \overset{x=\sin t}{=} \sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 t\cos^2 t dt=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos 4t}{2}dt=\frac{\sqrt{3}\pi}{32};$

$I_2=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{3}x^3dx=\frac{\sqrt{3}}{16}.$

故原式$I=\frac{\sqrt{3}}{32}(\pi-2).$

二、选择题

1【答案】A

【解析】：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{|xy|} = 0 = f(0,0)$，$f$(x, y)在(0, 0)点连续；

$f_x(0,0)=\frac{d}{dx}f(x,0)\Big|_{x=0}=0$，同理 $f_y(0,0)$=0, f在(0, 0)点可偏导. 故选 A

2.【答案】D

【解析】：曲线积分与路径无关，则应使$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，排除 A, B. 对应 C 选项，x=0 不连续，排除. 故应选 D.

三、计算题

1.　设函数 $f(\mu, v, \omega)$ 二阶偏导数连续，$z = f(x, x + y, xy)$, 求混合偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

解析： $z_x = f_1 + f_2 + yf_3$

$$z_{xy} = f_{12} + xf_{13} + f_{22} + xf_{23} + f_3 + yf_{32} + xyf_{33}$$

$$= f_{12} + xf_{13} + f_{22} + (x + y)f_{23} + f_3 + xyf_{33}$$

2. 设二元函数 $z = f(x, y)$ 满足方程 $F(x + z, xy)0$, 且 $f(x, y), F(s, t)$ 均具有连续的一阶偏导数，且 $f_2 + F_1 + yf_2F_2 - xf_1F_2 \neq 0$, 求 $\frac{dx}{dz}$

解析：由题意得，方程组 $\begin{cases} \mathbf{z = f(x, y)} \\ \mathbf{F(x + z, xy) = 0} \end{cases}$ **确定的隐函数** $\mathbf{x = x(z)}$ **和** $\mathbf{y = y(z)}$, **由方程组两边对** $\mathbf{z}$ **求导，得**

$$\begin{cases} 1 = f_1 \frac{dx}{dz} + f_2 \frac{dy}{dz} \\ F_1 \cdot (1 + \frac{dx}{dz}) + F_2 \cdot (y \frac{dx}{dz} + x \frac{dy}{dz}) = 0 \end{cases}$$

解得 $\frac{dx}{dz} = \frac{xF_2 + f_2F_1}{f_2F_1 + yf_2F_2 - xf_1F_2}$

3.

解：在点(1,-1,-1)处 椭圆面外法线方向为 $\vec{n} = \{2x, 4y, 6z\}|_{(1,-1,-1)}$ $= \{2, -4, -6\}$. ~~n=~~ 单位法：$\vec{n} = \frac{\{1, -2, -3\}}{\sqrt{14}}$, 在点(1,-1,-1)处 $\nabla u(1,-1,-1) = \{2, 2, 1\}$ 故所求方向导数为 $\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{5}{\sqrt{14}}$

切平面方程为：$\cancel{2(x-1) - 4(y+1) - 6(z+1) = 0}$

$2(x-1) + 2(y+1) + (z+1) = 0$

~~2x~~　$2yz$

4. 设平面区域 D 由曲线 y=$\sqrt{3(1-x^2)}$与直线 y=$\sqrt{3}$x 及 y 轴围成，计算二重积分$\iint_D x^2$ dxdy.

解析：

【解】原式$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{3(1-x^2)}}x^2dy$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^2y\Big|_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{3(1-x^2)}}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^2\left[\sqrt{3(1-x^2)}-\sqrt{3}x\right]dx$$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^2\sqrt{3(1-x^2)}dx-\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{3}x^3dx$$

$$=I_1-I_2,$$

其中$I_1=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^2\sqrt{3(1-x^2)}dx\overset{x=\sin t}{=}\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2t\cos^2tdt=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos 4t}{2}dt=\frac{\sqrt{3}\pi}{32}$,

$I_2=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{3}x^3dx=\frac{\sqrt{3}}{16}$.

故原式$I=\frac{\sqrt{3}}{32}(\pi-2)$.

5.

$$\iiint\limits_{\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}\le 1}\left[\frac{(x-a)^2}{a^2}-\frac{(y-\sqrt{2}b)^2}{b^2}+\frac{(z-c)^2}{c^2}\right]dxdydz$$

由奇偶性知：$\iiint\limits_{\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}\le 1}xdzdydz=\iiint\limits_{\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}\le 1}ydxdydz=\iiint\limits_{\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}\le 1}zdxdydz=0$；

解析：

原式 $=\iiint\limits_{\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}\le 1}\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz$

$=\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\le 1}\left(\frac{c^2}{a^2}u^2-v^2+\frac{a^2}{c^2}w^2\right)abcdudvdw$（u=$\frac{x}{c}$，v=$\frac{y}{b}$，w=$\frac{z}{a}$）

$=\frac{1}{3}abc\left(\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{c^2}-1\right)\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\le 1}(u^2+v^2+w^2)dudvdw$

$=\frac{1}{3}abc\left(\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{c^2}-1\right)\bullet 2\pi\bullet 2\bullet\frac{1}{5}$（用球面坐标计算）

$=\frac{4\pi}{15}abc\left(\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{c^2}-1\right)$

四、Σ 为抛物面$z = 2 - (x^2 + y^2)$在xOy面上方的部分，计算曲面积分：$\iint_\Sigma x^2 + y^2 dS$

答案：$\mathbf{\dfrac{149\pi}{30}}$

解析：

在xOy面上投影区域 $D=\{x^2+y^2\leq 2\}$

$\frac{\partial z}{\partial x}=-2x$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-2y$

(1) $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\,dS=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,dxdy$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^3\sqrt{1+4r^2}\,dr.$

(令$r^2=t$)

$=\pi\cdot\int_0^2 t\sqrt{1+4t}\,dt$

(令$\sqrt{1+4t}=k$ $(t=\frac{k^2-1}{4})$)

$=\pi\int_1^3\frac{k^2-1}{4}\cdot k\,d\frac{k^2-1}{4}$

$=\pi\int_1^3\frac{1}{8}(k^4-k^2)\,dk.$

$=\frac{149}{30}\pi$

五、设 $f(x,y)=x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$，讨论 $f(x,y)$在原点(0,0)处的：

（1）连续性　（2）偏导数存在性　（3）可微性　（4）沿方向 **n**=$\{cos\alpha, sin\alpha\}$的方向导数的存在性，对存在情形计算出结果

解析：（1）由于$f(x,y)=x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$为初等函数，且在全平面有定义，所有 $f(x,y)$在(0,0)处连续

（2）因为 $f(x,0)=0$, 所以$f_x(0,0)=0$, 同理$f_y(0,0)=0$

（3）因为 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|xy^2|^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{x^2+y^2}}=$ 极限不存在，所有 $f(x,y)$在原点不可微

（4）利用方向导数的定义得

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial \boldsymbol{n}}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{(\rho cos\alpha,\rho sin\alpha)}{\rho}=\lim_{\rho\to0^+}cos^{1/3}\alpha\cdot sin^{2/3}\alpha=cos^{1/3}\alpha\cdot sin^{2/3}\alpha$$

六、求函数 $\mu=x+3z$ 在曲线$\begin{cases}x+2y-3z=2\\ x^2+y^2=2\end{cases}$上的最大值与最小值

解析：构造 lagrange 函数：$L(x,y,z,\alpha,\beta)=x+3z+\alpha(x+2y-3z-2)+\beta(x^2+y^2-2)$

$$\begin{cases}L_x=1+\alpha+2\beta x=0\\ L_y=2\alpha+2\beta y=0\\ L_z=3-3\alpha=0\\ L_\alpha=x+2y-3z-2=0\\ L_\beta=x^2+y^2-2=0\end{cases}$$

解得两个驻点$\alpha_1=1$，$\beta_1=1$，$x_1=-1, y_1=-1, z_1=-\frac{5}{3}$，*以及*$\alpha_2=1$，$\beta_2=--1$，

$x_2=1, y_2=1, z_2=\frac{1}{3}$, *比较得到最大值为*2，*最小值为*$-6$

七、设函数$Q(x,y)$在 x0y 面上具有一阶偏导数，积分$\int_L 3x^2ydx+Q(x,y)dy$与路径无关，且对任意 t，恒有$\int_{(0,0)}^{(t,1)}3x^2ydx+Q(x,y)dy=\int_{(0,0)}^{(1,t)}3x^2ydx+Q(x,y)dy$，求$Q(x,y)$.

解析：

由于积分与路径无关，所以$\frac{\partial P}{\partial y}=3x^2=\frac{\partial Q}{\partial x}$于是可得$Q(x,y)=x^3+C(y)$

由积分与路径无关可得：

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}=\int_0^1[t^3+C(y)]dy=t^3+\int_0^1C(y)dy$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)}=\int_0^t[1^3+C(y)]dy=t+\int_0^tC(y)dy$$

从而可得 $t^3+\int_0^1 C(y)dy = t+\int_0^t C(y)dy$

对 t 求导可得 $3t^2 = 1+C(t)$

从而$C(y)=3y^2-1$

所以$Q(x,y)=x^3+3y^2-1$

八、假设$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，证明：

$$\int_0^1 dx\int_x^1 dy\int_x^y f(x)f(y)f(z)dz = \frac{1}{3!}\left(\int_0^1 f(t)dt\right)^3$$

解析：

分析 等式左端是三次累次定积分，对三个变量地位等同，因为 f 未知，对哪个变量也无法实现第一次积分，但因 $f(x)$在$[0,1]$连续，故它有一个原函数 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$，从而可逐次计算左端的累次积分.

解 设 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $F'(x)=f(x)$. 故

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 \mathrm{d}y\int_x^y f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}z = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y\int_x^y f(z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_x^1 f(y)F(z)\Big|_x^y\mathrm{d}y = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_x^1 [F(y)-F(x)]\mathrm{d}F(y)$$

$$=\int_0^1 f(x)\cdot\left[\frac{1}{2}F^2(y)-F(x)F(y)\right]\Big|_x^1\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 f(x)\left[\frac{1}{2}F^2(1)-F(x)F(1)-\left(\frac{1}{2}F^2(x)-F^2(x)\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 \left(\frac{1}{2}F^2(1)-F(x)F(1)+\frac{1}{2}F^2(x)\right)\mathrm{d}F(x)$$

$$=\left(\frac{1}{2}F^2(1)F(x)-\frac{1}{2}F^2(x)F(1)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}F^3(x)\right)\Big|_0^1$$

$$=\left(\frac{1}{2}F^3(1)-\frac{1}{2}F^3(1)+\frac{1}{3!}F^3(1)\right)-\left(\frac{1}{2}F^2(1)F(0)-\frac{1}{2}F^2(0)F(1)+\frac{1}{3!}F^3(0)\right)$$

$$=\frac{1}{3!}F^3(1)-\left[\frac{1}{2}F^2(1)F(0)-\frac{1}{2}F^2(0)F(1)+\frac{1}{3!}F^3(0)\right]$$

因为 $F(x)=\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$，$F(1)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，$F(0)=\int_0^0 f(x)\mathrm{d}x=0$，

故

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 \mathrm{d}y\int_x^y f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}z=\frac{1}{3!}F^3(1)=\frac{1}{3!}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^3.$$