南 京 航 空 航 天 大 学

二〇一七 ～ 二〇一八 学年　第II学期《工科数学分析 A(2)》考试试题

考试日期： 2018 年 6 月 30 日　　试卷类型：A　　试卷代号：

班号　　　　学号　　　　姓名

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

一、填空题：（每题 4 分，共 24 分）

本题分数	24
得　分	

1. $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{y^2}^1 6xy\cos x^3 \mathrm{d}x =$______________.

2. 曲线$\begin{cases} x^2+3y^2=z^2 \\ x+y+2z=4 \end{cases}$在点$P(1,-1,2)$的法平面方程为______________________.

3. 微分方程$y^{(4)}+3y''-4y=0$的通解为______________________________.

4. 设函数$f(x,y)$满足$f_{yy}(x,y)=2, f_y(x,0)=x, f(x,0)=1$，则

$f(x,y)=$______________________.

5. 设曲面$\Sigma: x^2+y^2+z^2=4$，则$\iint\limits_{\Sigma}(xy+2x^2+y^2)\mathrm{d}S=$________________.

6. 非齐次二阶线性微分方程$y''+ay'+4y=x\sin 2x$的特解y^*形式分别为：

当$a=0$时，____________；当$a=4$时，____________.

A. $(Ax+B)\sin 2x$；　　　B. $(Ax+B)\sin 2x+(Cx+D)\cos 2x$；

C. $x(Ax+B)\sin 2x$；　　　D. $x\left[(Ax+B)\sin 2x+(Cx+D)\cos 2x\right]$.

二、计算与解答（每题 6 分，共 36 分）

本题分数	24
得　　分	

1. 已知函数 $f(x,y)=3x+4y-ax^2-2ay^2-2bxy$ 有唯一的驻点，且取得极小值，给出 a, b 应满足的条件.

2. 求三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ ，其中 Ω 由曲面 $z=x^2+y^2, z=4, z=1$ 围成.

3．求曲线积分 $\int\limits_{C}\left[y^2+\sin^2(x+y)\right]\mathrm{d}x-\left[x^2+\cos^2(x+y)\right]\mathrm{d}y$ ，其中 C 为从 $A(-1,0)$ 沿上半单位圆周到 $B(1,0)$.

4．求线性微分方程组$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}= & x_1-x_2,\\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}= & x_1+3x_2\end{cases}$满足条件$x_1(0)=x_2(0)=1$的特解．

5．由曲线$y^2=x$及直线$x=1$围成的平面薄片，其面密度为常数1，求它对于x轴和y轴的转动惯量．

6．求二阶微分方程$x^4y''-x^3y'+x^2y=1$的通解．

三、解答与证明（每题 10 分，共 40 分）

本题分数	40
得　　分	

1. 设 $\Gamma: x^2+2y^2=2r^2$，取逆时针，$f(r)=\int_{\Gamma}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{\lambda}}$，分别针对 $\lambda=1$ 和 $\lambda=2$ 时，求极限 $\lim\limits_{r\to+\infty}f(r)$.

2、（1）求直线 $x-1=y=z$ 绕 z 旋转一周所成的曲面方程；

（2）设Σ为上述曲面介于$z=0$和$z=1$之间的部分，取外侧，求曲面积分

$$\iint\limits_{\Sigma}(2x-4xy^3)\mathrm{d}y\Lambda\mathrm{d}z+(y^4+z^2x)\mathrm{d}z\Lambda\mathrm{d}x-z^2\mathrm{d}x\Lambda\mathrm{d}y\ .$$

2. 设Γ为平面Π上的光滑闭曲线，沿z轴向下看取逆时针，Π指向上侧的单位法向量为(a,b,c).

（1）求向量场$\vec{A}=(bz-cy,cx-az,ay-bx)$的旋度$\mathrm{rot}\vec{A}$；

（2）证明Π包围的平面图形面积为$\dfrac{1}{2}\oint\limits_{\Gamma}(bz-cy)\mathrm{d}x+(cx-az)\mathrm{d}y+(ay-bx)\mathrm{d}z$.

4、（1）求$\Omega: 0 \le z \le 2 - x^2 - y^2$（$x \ge 0, y \ge 0, x^2 + y^2 \le 1$）的体积；

（2）求上述曲顶柱体Ω的表面积.

一、 填空题

1. $\underline{\sin 1}$； 2． $\underline{x+y-z+2=0}$； 3． $\underline{C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{-x}+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x}$；

4． $\underline{xy+y^2+1}$； 5． $\underline{64\pi}$； 6． D，A.

二、

1. 解：函数的驻点满足方程组 $\begin{cases} f_x=3-2ax-2by=0 \\ f_y=4-4ay-2bx=0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} ax+by=\dfrac{3}{2} \\ bx+2ay=2 \end{cases}$，此方程组有惟一解，

即 $f(x,y)$ 有唯一驻点的充要条件是 $\begin{vmatrix} a & b \\ b & 2a \end{vmatrix}=2a^2-b^2\neq 0$ …………………………………(2 分)

又 $A=f_{xx}=-2a,\ B=f_{xy}=-2b,\ C=f_{yy}=-4a$ ， $AC-B^2=4(2a^2-b^2)$ ， 故 $2a^2-b^2>0,\ a<0$ 时 $f(x,y)$ 有唯一的驻点，且取得极小值……………………………(6 分)

2. 解：使用截面法 $\iiint\limits_{\Omega}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_1^4\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le z}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ……………(2 分)

由于 $\iint\limits_{x^2+y^2\le z}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{z}}\rho^4\mathrm{d}\rho=\dfrac{2\pi}{5}z^{\frac{5}{2}}$ ……………………………..(4 分)

故原式 $=\dfrac{2\pi}{5}\int_1^4 z^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}z=\dfrac{4\pi}{35}\left(4^{\frac{7}{2}}-1\right)=\dfrac{4\pi}{35}\left(2^7-1\right)=\dfrac{508\pi}{35}$ …………………… ……(6 分)

3. 解：记 $C_1: y=0$ 从 $B(1,0)$ 到 $A(-1,0)$，记 $P=y^2+\sin^2(x+y), Q=-x^2-\cos^2(x+y)$，

则 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=-2(x+y)$，由 Green 公式

原式 $=\int\limits_{C+C_1}-\int\limits_{C_1}=2\iint\limits_{D}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{-1}^{1}\sin^2 x\mathrm{d}x$ ……………………………………(2 分)

其中 $2\iint\limits_{D}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}y\mathrm{d}y=\dfrac{4}{3}$ …………………… ……(4 分)

$\int_{-1}^{1}\sin^2 x\mathrm{d}x=\int_0^1(1-\cos 2x)\mathrm{d}x=1-\dfrac{\sin 2}{2}$，故原式 $=\dfrac{7}{3}-\dfrac{\sin 2}{2}$ ……………… ……(6 分)

4 解：$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$，$\det\left(A-\lambda E\right)=\lambda^2-4\lambda+4=0$，特征根为 $\lambda_{1,2}=2$ ……………(2 分)

基解矩阵为 $\boldsymbol{X}(t)=\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)\mathrm{e}^{2t}=\begin{pmatrix} -t+1 & -t \\ t & t+1 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{2t}$

通解为 $\begin{cases} x_1(t)=c_1(1-t)\mathrm{e}^{2t}-c_2t\mathrm{e}^{2t} \\ x_2(t)=c_1t\mathrm{e}^{2t}+c_2(t+1)\mathrm{e}^{2t} \end{cases}$ ……………………………………………………………(4 分)

因此满足初始条件的特解为 $x_1(t)=(1-2t)\mathrm{e}^{2t}, x_2(t)=(2t+1)\mathrm{e}^{2t}$ ………………………(6 分)

5 解：$I_x=\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{1}y^2\mathrm{d}x=\dfrac{4}{15}$ ……………………………………………… (3 分)

$I_y=\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{1}x^2\mathrm{d}x=\dfrac{4}{7}$ ……………………………………………… (6 分)

6 解：方程改写为 $x^2y''-xy'+y=\dfrac{1}{x^2}$，为欧拉方程，

令 $x=\mathrm{e}^t$，则方程变为 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=\mathrm{e}^{-2t}$ ……………………………………………… (2 分)

齐次方程的通解为 $y=(c_1+c_2t)\mathrm{e}^t=(c_1+c_2\ln x)x$ ……………………………………… (4 分)

设特解形式为 $A\mathrm{e}^{-2t}$，代入可得 $A=\dfrac{1}{9}$，故原方程通解为

$y=(c_1+c_2t)\mathrm{e}^t+\dfrac{1}{9}\mathrm{e}^{-2t}=(c_1+c_2\ln x)x+\dfrac{1}{9x^2}$ ……………………………………………… (6 分)

三、

1. 解（1）若 $\lambda=1$，考虑曲线 $\Gamma_\varepsilon: x^2+y^2=\varepsilon^2$，取逆时针，记 $P(x)=\dfrac{y}{x^2+y^2},Q(x)=\dfrac{-x}{x^2+y^2}$，

由于 $\dfrac{\partial P(x)}{\partial y}=\dfrac{\partial Q(x)}{\partial x}=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$，则

$$f(r)=\int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\int_{\Gamma_\varepsilon}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\Gamma_\varepsilon}y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=-2\pi \text{ ……… (5 分)}$$

（2）若 $\lambda=2$，曲线 $\Gamma: x^2+2y^2=r^2$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{2}r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$，则

$$f(r)=\int_0^{2\pi}\frac{-\sqrt{2}r^2\mathrm{d}\theta}{r^4(2\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2}=-\frac{\sqrt{2}}{r^2}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(2\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2}$$

由于 $1\le 2\cos^2\theta+\sin^2\theta\le 2$，故 $\dfrac{\pi}{2}\le\int_0^{2\pi}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{(2\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2}\le 2\pi$，

因此 $\lim\limits_{r\to+\infty}f(r)=0$ ……………………………………………………………………(10 分)

2. 解（1）直线参数方程为 $\begin{cases}x=1+t\\ y=t\\ z=t\end{cases}$；故其绕 z 轴旋转曲面为 $x^2+y^2=2z^2+2z+1$ …(4 分)

（2）取$\Sigma_0: z=0$（下侧），$\Sigma_1: z=1$（上侧），它们与Σ围成的区域记作Ω，则由 Gauss 公式：$\iint\limits_{\Sigma} = \iint\limits_{\Sigma+\Sigma_0+\Sigma_1} - \iint\limits_{\Sigma_0} - \iint\limits_{\Sigma_1} = 2\iiint\limits_{\Omega}(1-z)\mathrm{d}V + \iint\limits_{\Sigma_1}\mathrm{d}x\Lambda\mathrm{d}y$；……………………………(6 分)

$= 2\pi\int_0^1(1-z)(2z^2+2z+1)\mathrm{d}z + 5\pi = 7\pi$ ……………………………………………………(10 分)

3. 解（1）$\mathrm{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ bz-cy & cx-az & ay-bx \end{vmatrix} = 2(a,b,c)$；…………………………… (4 分)

（2）设Γ围成的平面Π上的区域为D，取上侧，由 Stokes 公式

$\dfrac{1}{2}\oint\limits_{\Gamma}(bz-cy)\mathrm{d}x+(cx-az)\mathrm{d}y+(ay-bx)\mathrm{d}z = \iint\limits_{D} a\mathrm{d}y\mathrm{d}z + b\mathrm{d}z\mathrm{d}x + c\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；………(6 分)

$= \iint\limits_{D}\left(a^2+b^2+c^2\right)\mathrm{d}S = \iint\limits_{D}\mathrm{d}S$，即为$\Gamma$围成的平面$\Pi$上的区域面积………………(10 分)

4. 解（1）记$D: x\ge 0, y\ge 0, x^2+y^2\le 1$，其边界记作$L: x=0, y=0, x^2+y^2=1$

体积$= \iint\limits_{D}\left(2-x^2-y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left(2-\rho^2\right)\rho\mathrm{d}\rho = \dfrac{3\pi}{8}$ ……………………………(4 分)

（2）表面积包括三部分：底面面积$=D$的面积$=\dfrac{\pi}{2}$，

顶面面积$= \iint\limits_{D}\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{1+4\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho = \dfrac{\pi}{24}\left(5^{\frac{3}{2}}-1\right)$…………(6 分)

侧面面积为$= \int\limits_{L}\left(2-x^2-y^2\right)\mathrm{d}s$

$= \int_0^1\left(2-y^2\right)\mathrm{d}y + \int_0^1\left(2-x^2\right)\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2-1\right)\mathrm{d}\theta = \dfrac{10}{3}+\dfrac{\pi}{2}$ ………………… (8 分)

总表面积为$\dfrac{\pi}{24}\left(5^{\frac{3}{2}}-1\right)+\dfrac{10}{3}+\pi$ ……………………………………………………… (10 分)