南 京 航 空 航 天 大 学

二〇一八 ～ 二〇一九 学年 第Ⅱ学期 **《工科数学分析 A(2)》考试试题**

考试日期： 2019 年 6 月 30 日 试卷类型：B 试卷代号：

班号 学号 姓名

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

一、填空题：（每题 4 分，共 24 分）

本题分数	24 分
得 分	

1. 设 f 为可微函数，已知 $F(x)=\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t$，则 $F'(x)=$________________，

2. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $f(xz,y+z)=0$ 所确定的隐函数，

f 可微，则 $\mathrm{d}z=$____________________________.

3. 设向量场 $\vec{A}=\{x^2y,y^2z,z^2x\}$，则 $\mathrm{div}\vec{A}=$____________________,

$\mathrm{rot}\vec{A}=$__________________________________.

4. 设 L 是从 $O(0,0)$ 到 $A(6,0)$ 的上半圆周，

则 $\int_L(\mathrm{e}^x\sin y+8y)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-7x)\mathrm{d}y=$____________________.

5. 交换积分次序

$\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_{-x}^{\frac{x+3}{2}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_{2x}^{\frac{x+3}{2}}f(x,y)\mathrm{d}y=$______________________.

6. 写出以函数 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$ 为通解的常系数齐次线性微分方程：

______________________________________.

二、单项选择题：（每题 4 分，共 12 分）

本题分数	12 分
得　　分	

1．二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，

则在 $(0,0)$ 点，下述正确的是：（　　）

(A) 极限不存在，因此不连续；　(B) 连续但是不可微；

(C) 可微，偏导函数不连续；　(D) 可微且偏导函数连续.

2. 微分方程 $y''-\lambda^2 y=\mathrm{e}^{\lambda x}+\mathrm{e}^{-\lambda x}(\lambda>0)$ 的特解形式为（　　）

(A) $a(\mathrm{e}^{\lambda x}+\mathrm{e}^{-\lambda x})$；　(B) $ax(\mathrm{e}^{\lambda x}+\mathrm{e}^{-\lambda x})$；

(C) $x(a\mathrm{e}^{\lambda x}+b\mathrm{e}^{-\lambda x})$；　(D) $x^2(a\mathrm{e}^{\lambda x}+b\mathrm{e}^{-\lambda x})$.

3．$\int_0^2 \mathrm{d}x\int_0^x f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}y$ 化为极坐标形式为（　　）

(A) $\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\sec\varphi} f(\rho)\rho\mathrm{d}\rho$；　(B) $\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\sec\varphi} f(\rho)\rho\mathrm{d}\rho$；

(C) $\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi} f(\rho)\rho\mathrm{d}\rho$；　(D) $\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi} f(\rho)\rho\mathrm{d}\rho$.

三、计算题（每题 7 分，共 28 分）

本题分数	28 分
得　　分	

1. 利用曲线积分计算星形线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ 所围图形的面积.

2. L 为曲线 $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z=1 \end{cases}$，从 z 轴的正方向看 L 沿顺时针方向，求

$$\oint_L (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z\ .$$

3．求微分方程 $y''-2y'=\mathrm{e}^x(x^2+x-3)$，$y|_{x=0}=2$，$y'|_{x=0}=2$满足初始条件的特解.

4．求线性微分方程组$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{dt} = -x_1 + 3x_2, \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{dt} = 2x_1 - 2x_2 \end{cases}$的通解.

本题分数	8 分
得　　分	

四、设$z = f(x,y)$具有连续偏导数，$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$

（1）求$\dfrac{\partial z}{\partial r}$；（2）若$f(x,y)$在$x^2+y^2=1$上恒为 0，求

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\varepsilon^2\le x^2+y^2\le 1}\frac{xf_x+yf_y}{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma .$$

本题分数	8 分
得　　分	

五、计算$\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, 其中$L$为一条无重点，分段光滑且不经过原点的连续闭曲线，$L$的方向为逆时针方向。

本题分数	10 分
得　　分	

六、设曲面Σ是由空间曲线$\Gamma: x=t, y=2t, z=t^2 (0 \le t \le 1)$绕$z$轴旋转一周而成的旋转曲面，求曲面$\Sigma$的方程；若曲面$\Sigma$的法向量与$z$轴正向成钝角，已知连续函数$f(x,y,z)$满足：

$$f(x,y,z)=(x+y+z)^2+\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}y\Lambda\mathrm{d}z+x^2\mathrm{d}x\Lambda\mathrm{d}y \text{ ，}$$

求$f(x,y,z)$的表达式.

本题分数	10
得　　分	

七、（1）求函数 $f(x,y,z)=x+2y-2z+5$ 在 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1$ 上的最大值和最小值；

（2）证明不等式 $\frac{3}{2}\pi<\iiint\limits_{\Omega}\sqrt[3]{x+2y-2z+5}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z<3\pi$.

一、 填空题

1. $\underline{xf(x^2)}$；2. $\underline{dz=-\dfrac{1}{xf_1+f_2}(zf_1dx+f_2dy)}$； 3. $\underline{2xy+2yz+2zx;\ \{-y^2,-z^2,-x^2\}}$；

4. $\dfrac{135}{2}\pi$； 5. $\underline{\int_0^1 dy\int_{-y}^{\frac{y}{2}} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_{2y-3}^{\frac{y}{2}} f(x,y)dx}$； 6. $\underline{y'''-y''+4y'-4y=0}$.

二、 选择题

1.（C） 2. (C) 3.（B）

三、

1. 解：$S=\dfrac{1}{2}\oint x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=6a^2\int_0^{\pi/2}[\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t]\mathrm{d}t=\dfrac{3}{8}\pi a^2$ ……分)

2. 解：取Σ：$z=1(x^2+y^2\le 1)$下侧，$\cos\alpha=\cos\beta=0,\cos\gamma=-1,$

$$原式=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y-z & z-x & x-y\end{vmatrix}dS=2\iint_\Sigma dS=2\pi \text{ ……………………………)}$$

3 解：对应齐次方程特征根为：$r_1=0$，$r_2=2$，

故对应齐次方程的通解为：$y=C_1+C_2e^{2x}$ ….. …. …. …. …. …. …. …. …分)

自由项 $f(x)=e^x(x^2+x-3)$，$\lambda=1$不是特征根，

所以方程特解为：$y^*=e^x(Ax^2+Bx+C)$

代入方程解得 $A=-1$，$B=-1$，$C=1$，$y^*=-e^x(x^2+x-1)$，

故方程的通解为：$y=C_1+C_2e^{2x}-e^x(x^2+x-1)$ ….. …. ………………. ….)

由初始条件得：$C_1+C_2+1=2$，$C_2=1$得$C_1=0$，$C_2=1$.

故方程满足初始条件的特解为：$y=e^{2x}-e^x(x^2+x-1)$. ………………. …. …)

4 解：$A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}$，$\det\left(A-\lambda E\right)=\left(-1-\lambda\right)\left(-1-\lambda\right)-6=\lambda^2+3\lambda-4=0$ …)

特征根为$\lambda_1=-4,\ \lambda_2=1$，…分)

特征向量为$r_{-4}=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}, r_1=\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$，………………)

解得通解为 $\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix}e^{-4t} & 3e^t\\ -e^{-4t} & 2e^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=c_1e^{-4t}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}+c_2e^t\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$ ……………)

四、解：（1）$\dfrac{\partial z}{\partial r}=\cos\theta f_x+\sin\theta f_y$；…………)

（2）$\displaystyle\iint\limits_{\varepsilon^2\le x^2+y^2\le 1}\frac{xf_x+yf_y}{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_\varepsilon^1\frac{r(\cos\theta f_x+\sin\theta f_y)}{r^2}r\mathrm{d}r=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_\varepsilon^1\frac{\partial z}{\partial r}\mathrm{d}r$

$\displaystyle=\int_0^{2\pi}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\Big|_\varepsilon^1\mathrm{d}\theta=-\int_0^{2\pi}f(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)\mathrm{d}\theta$ ……………)

$=-2\pi f(\varepsilon\cos\theta_0,\varepsilon\sin\theta_0)\qquad\big(\theta_0\in(0,2\pi)\big)$

于是 $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to0+}\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\varepsilon^2\le x^2+y^2\le 1}\frac{xf_x+yf_y}{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma=-\lim_{\varepsilon\to0+}f(\varepsilon\cos\theta_0,\varepsilon\sin\theta_0)=-f(0,0)$ ……)

五、解：记 L 围成的闭区域为 D, 令 $P=\dfrac{-y}{x^2+y^2},Q=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, 则当 $x^2+y^2\ne0$ 时，有

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$. (1) 当 $(0,0)\notin D$ 时，则 $\displaystyle\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0.$……………

(2) 当 $(0,0)\in D$ 时，作位于 D 内圆周 $l:x^2+y^2=r^2$，记 D_1 由 L 和 l 围成，则有

$\displaystyle\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}-\oint_l\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0.$ 即

$\displaystyle\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\oint_l\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}{r^2}d\theta=2\pi.$................)

六、解：Γ 绕 z 轴旋转一周而成的旋转曲面为 $\Sigma:x^2+y^2=5z(0\le z\le1)$ ……)

首先 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{x^2+y^2\le5}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{25}{4}\pi$

令 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=A$，可得 $f(x,y,z)=(x+y+z)^2+A-\dfrac{25}{4}\pi$ ……

记 $S:z=1,x^2+y^2\le5$ 取上侧，Ω 为 Σ 与 S 围成的区域，根据 Gauss 公式

$\displaystyle A=\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma}\left((x+y+z)^2+A-\frac{25}{4}\pi\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$\displaystyle=\iint\limits_{\Sigma+S}\left((x+y+z)^2+A-\frac{25}{4}\pi\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{10}{3}\pi$

于是 $f(x,y,z)=(x+y+z)^2-\dfrac{35}{12}\pi$ ……………………………………)

七、（1）首先在 Ω 内部 $x^2+y^2+z^2<1$，$f(x,y,z)=x+2y-2z+5$ 没有驻点，在边界 $x^2+y^2+z^2=1$ 上，应用 Lagrange 乘数法，令 $F=x+2y-2z+5+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$，由 $\begin{cases} F_x=1+2\lambda x=0 & F_z=-2+2\lambda z=0 \\ F_y=2+2\lambda y=0 & F_\lambda=x^2+y^2+z^2-1=0 \end{cases}$ 可得条件极值点 $P_1\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right),P_2\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$，$f(P_1)=8,f(P_2)=2$ 分别为最大值和最小值. ……………………………………)

（2）证明：由于在 Ω 上，$f(x,y,z)=x+2y-2z+5$ 的最大值和最小值分别为 $8,2$，因此

$$\sqrt[3]{2}\,\frac{4}{3}\pi \le \iiint\limits_{\Omega}\sqrt[3]{x+2y-2z+5}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \le \sqrt[3]{8}\,\frac{4}{3}\pi$$

由于 $\sqrt[3]{2}\,\frac{4}{3}\pi>\frac{3}{2}\pi,\sqrt[3]{8}\,\frac{4}{3}\pi<3\pi$，因此 $\frac{3}{2}\pi<\iiint\limits_{\Omega}\sqrt[3]{x+2y-2z+5}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z<3\pi$ ……分)