一、 填空题：

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{n^3+k^3}=$ ____________；

解： $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k^3}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{k^2/n^2}{1+k^3/n^3}=\int_0^1\frac{x^2}{1+x^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x^3}{1+x^3}=\frac{\ln 2}{3}$$

2. 写出级数的和：$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2}{(2n+1)!}=$ ____________；

解： $$e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!},\quad e^{-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!},\quad e^x-e^{-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{(2n+1)!}x^{2n+1},$$

将$x=1$代入得，$e-e^{-1}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{2}{(2n+1)!}$

3. 函数$f(x)$二阶连续可导，$f(0)=f'(0)=0,\ f''(0)=1$，则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\sin^2x)}{x^4}=$ ________；

解：方法1.用Maclaurin公式

$$f(\sin^2x)=f(0)+f'(0)\sin^2x+\frac{f''(0)}{2}\sin^4x+o(x^4)=\frac{1}{2}\sin^4x+o(x^4)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(\sin^2x)}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}\sin^4x+o(x^4)}{x^4}=\frac{1}{2}$$

方法2. 直接用洛必达法则，

$$\lim_{x\to0}\frac{f(\sin^2x)}{x^4}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{f'(\sin^2x)2\sin x\cos x}{4x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f'(\sin^2x)}{x^2}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f''(\sin^2x)2\sin x\cos x}{2x}=\frac{f''(0)}{2}=\frac{1}{2}$$

4. 设函数 $f(x)$ 二阶连续可导，若曲线 $y=f(x)$ 过点 $(0,0)$ 且与曲线 $y=\cos x$ 在点 $(1,\cos 1)$ 处相切，则 $\int_0^1 xf''(x)\mathrm{d}x=$ ________；

解： 由条件有，$f(0)=0, f'(0)=-\sin 1$.

$$\int_0^1 xf''(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}f'(x)=xf'(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=-\sin 1-[f(x)]_0^1=-\sin 1-\cos 1$$

5. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4x^2+4x+5}\mathrm{d}x=$ ________；

解： $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4x^2+4x+5}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(2x+1)^2+4}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}[\arctan\frac{2x+1}{2}]_{-\infty}^{+\infty}=\frac{1}{4}[\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})]=\frac{\pi}{4}$

6. 当 $\Delta x\to 0$ 时函数 $f(x)$ 满足 $f(x+\Delta x)=f(x)-2xf(x)\Delta x+o(\Delta x)$， $f(0)=2$，则 $f(x)=$ ________；

解： $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=-2xf(x)+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$， $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=-2xf(x)$

分离变量后，$\frac{\mathrm{d}f(x)}{f(x)}=-2x\mathrm{d}x$，解得 $\ln|f(x)|=-x^2, f(x)=Ce^{-x^2}$，代入 $f(0)=2$，得 $C=2$，从而有 $f(x)=2e^{-x^2}$.

7. 星形线 $\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}$ 围成的面积为 ________；

解： $A=4\int_0^1 y\mathrm{d}x=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^3 t\cdot 3\cos^2 t(-\sin t)\mathrm{d}t=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin^4 t-\sin^6 t]\mathrm{d}t$

$$=12[\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}]=12\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{8}$$

8. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(1-x)^n}{(2n+1)2^n}$ 的收敛域为 ________；

解： $a_n=\frac{(-1)^n}{(2n+1)2^n}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)2^2}{(2n+3)2^{n+1}}=\frac{1}{2}$，$R=2$，收敛区间 $(-1,3)$，

$x=-1$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(2n+1)2^n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}$，发散，

$x=3$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{(2n+1)2^n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}$，收敛.

所求幂级数的收敛域为 $(-1,3]$

二、　单项选择题

1、设 S_n 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的前 n 项和，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛的充分条件为

（　(C)　）

(A) $\{S_n\}$ 有界；　　(B) $a_n > 0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$；

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛；　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛.

2. 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x,\ N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x,\ K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$，则　（　(B)　）

(A) $M > N > K$；　　(B) $K > M > N$；

(C) $N > M > K$；　　(D) $K > N > M$.

3. 关于函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积性的论述，下列正确的是　（　(D)　）

(A) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有无穷多个间断点，则 $f(x)$ 不可积；

(B) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上只存在有限个间断点，则 $f(x)$ 可积；

(C) 若存在 $[a,b]$ 上可导函数 $F(x)$ 使得 $F'(x)=f(x)$，则 $f(x)$ 可积；

(D) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有无穷多个间断点，同时单调有界，则 $f(x)$ 可积.

4. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{n^2}$ 的收敛性为　（　(B)　）

(A) 条件收敛；　(B) 绝对收敛；　(C) 发散；　(D)不能确定.

三、　计算题（每小 6 分，共 36 分）

三、 计算题

1. $\int_0^{\ln 2} e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx$.

解:原式$==\frac{1}{2}\int_0^{\ln 2}\arctan\sqrt{e^x-1}de^{2x}=\frac{1}{2}[e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}\ \Big|_0^{\ln 2}-\frac{1}{2}\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}dx]$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}-e^x+e^x}{\sqrt{e^x-1}}dx=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\int_0^{\ln 2}(e^x\sqrt{e^x-1}+\frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}})dx$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}[\frac{2}{3}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{e^x-1}]_0^{\ln 2}=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{3}=\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}$$

另解：令 $t=\sqrt{e^x-1}$，则

$$\int_0^{\ln 2} e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx=\int_0^1(1+t^2)^2\cdot\arctan t\cdot\frac{2t}{1+t^2}dt=\int_0^1 2t\cdot(1+t^2)\cdot\arctan t dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\arctan t d(1+t^2)^2=\frac{1}{2}[(1+t^2)^2\arctan t\ \Big|_0^1-\int_0^1(1+t^2)dt]=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}[t+\frac{1}{3}t^3]_0^1=\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}$$

另解： 令 $t=e^x$，则 $\int_0^{\ln 2} e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx=\int_1^2 t\arctan\sqrt{t-1}dt$

$$=\frac{t^2}{2}\arctan\sqrt{t-1}\Big|_1^2-\int_1^2\frac{t^2}{2}\cdot\frac{1}{2t\sqrt{t-1}}dt=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\int_1^2\frac{t}{\sqrt{t-1}}dt$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\int_1^2\left(\sqrt{t-1}+\frac{1}{\sqrt{t-1}}\right)dt=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}+2\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}.$$

2．若极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x\sin(xt^2)dt}{x^a}=b\neq 0$，求 a, b.

解： 令 $u=xt^2$，则 $\int_0^x\sin(xt^2)dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}\int_0^{x^3}\frac{\sin u}{\sqrt{u}}du$

于是 原式$=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^3}\frac{\sin u}{\sqrt{u}}du}{x^{a+\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\left(a+\frac{1}{2}\right)}\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2\frac{\sin x^3}{\sqrt{x^3}}}{x^{a-\frac{1}{2}}}=\frac{3}{2\left(a+\frac{1}{2}\right)}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^3}{x^{a-1}}$

因此当 $a=4$ 时，极限 $b=\frac{1}{3}\neq 0$

5. 将函数 $f(x)=|\cos x|$ 在 $[0,\pi]$ 上展开为余弦级数.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\cos x|\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\mathrm{d}x]=\frac{2}{\pi}[\sin x\ \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\ \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}]=\frac{4}{\pi}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\cos x|\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos nx\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\cos nx\mathrm{d}x]$$

$$=\frac{1}{\pi}[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(n+1)x\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos(n-1)x\mathrm{d}x]$$

$$=\frac{1}{\pi}[\frac{\sin(n+1)x}{n+1}\ \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\sin(n-1)x}{n-1}\ \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}]=\frac{1}{\pi}[\frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{2}}{n+1}+\frac{\sin(n-1)\frac{\pi}{2}}{n-1}]$$

$$=\begin{cases}\frac{(-1)^k}{2k+1}+\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} & n=2k\\ 0 & n=2k+1\end{cases}=\begin{cases}\frac{(-1)^{k-1}}{4k^2-1}, & n=2k\\ 0 & n=2k+1\end{cases}$$

所以，$|\cos x|=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}\cos 2nx\ ,\ x\in[0,\pi]$

6. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{2^n}$ 的和.

解：考虑幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$ ，其和函数为 $S(x)$,收敛域为 $(-1,+1)$ ，

则 $S(\frac{1}{2})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{2^n}$

由于 $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ ， $-\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ ，则

$$-\frac{1}{1-x}\ln(1-x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n=S(x)$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{2^n}=2\ln 2$

四、解答与证明题

1．已知函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t=\sin x$，求 $f(x)$ 的表达式.

解： 令 $u=x-t$，$\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t=x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$，对其两边求导

$f(x)+\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=\cos x$，因此 $f'(x)+f(x)=-\sin x$，

于是 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\left(-\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x+C\right)=C\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)$

又由于 $f(0)=1$，可得 $f(x)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-x}-\sin x+\cos x\right)$.

2．函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶连续可导，$f''(x)>0$，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，证明

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0.$$

证法 1： 由于 $f''(x)>0$，将 $f(x)$ 在 $\frac{a+b}{2}$ 处展开可得

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$$
$$>f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$$

上式两边在区间 $[a,b]$ 积分可得

$$0=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot(b-a)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x=f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot(b-a)$$

因此 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$

证法 2： 令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, $F'(x)=f(x), F(\mathrm{a})=0, F(\mathrm{b})=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=0,$

将 $\mathrm{F}(x)$ 在 $\frac{a+b}{2}$ 处展开可得

$$\mathrm{F(b)}=F\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}f''(\xi_1)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^3, \xi_1\in\left(\frac{a+b}{2},b\right)$$

$$\mathrm{F(a)}=F\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(a-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}f''(\xi_2)\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^3, \xi_2\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$$

上面两式两边相减,注意到 $f''(x)>0$,有

$$0=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{1}{3!}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]\left(\frac{b-a}{2}\right)^3>f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a),$$ 因此 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$

证法 3，令 $\mathrm{G}(x)=\int_a^x f(x)\mathrm{d}x-(x-a)f\left(\frac{a+x}{2}\right)$，$\mathrm{G}(a)=0$，只须证明 $\mathrm{G}(b)>0$，

$$\mathrm{G}'(x)=f(x)-f\left(\frac{a+x}{2}\right)-(x-a)f'\left(\frac{a+x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

由 Lagrange 中值定理，有

$$f(x)-f\left(\frac{a+x}{2}\right)=f'(\xi)\frac{x-a}{2}, \xi\in\left(\frac{a+x}{2},x\right)$$

由 $f''(x)>0$，有

$$\mathrm{G}'(x)=[f'(\xi)-f'\left(\frac{a+x}{2}\right)]\frac{x-a}{2}>0,$$ $\mathrm{G}(x)$ 在 $[\mathrm{a,b}]$ 上单调递增，

所以 $\mathrm{G}(b)>\mathrm{G(a)}=0$，有 $0=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>(\mathrm{b}-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.