计算机科学与技术学院/人工智能学院
学业与发展支持中心

二〇一八～ 二〇一九学年 第 二 学期**《离散数学 I(1)》模拟考试试题**

答案详解 编题日期： 第 7 周 试卷类型：A

学号 | | | | | | | | | 每格填写一位数字 姓名

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

本题分数	10
得 分	

一、A={3,4,5}，R 是 A 上的关系且 R={<x,y>|y-x=1},求 A^2，R^{-1}， ts(R), R^2

解:

A^2= {<3,3>,<3,4>,<3,5>,<4,3>,<4,4>,<4,5>,<5,3>,<5,4>,<5,5>}

R^{-1} = {<4,3>,<5,4>}

ts(R)={<3,4>,<4,5>,<4,3>,<5,4>,<3,5>,<4,4>,<5,5>,<5,3>,<3,3>}

R^2 = {<3,5>}

本题分数	10
得　　分	

二、R 是集合 A 上的关系，证明 tr(R)=rt(R)

证明:①先证 tr(R)⊆rt(R)

∵R ⊆t(R)

∴r(R) ⊆rt(R)

∴tr(R) ⊆trt(R)

∵t(R)(tra)

∴rt(R)(tra)

∴trt(R)=rt(R)

∴tr(R)⊆rt(R)

②再证 rt(R)⊆tr(R)

∵R⊆r(R)

∴t(R) ⊆tr(R)

∴rt(R) ⊆ rtr(R)

∵ r(R)(ref)

∴ tr(R)(ref)

∴ rtr(R)=tr(R)

∴ rt(R)⊆tr(R)

综上所述, tr(R)=rt(R) 成立

本题分数	10
得　分	

三、用外延法证明：

1) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
2) 若 $A\cup B=A\cap B$，则 $A=B$

1） 证明:

① 先证 $A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$

Let $a\in A\cap(B\cup C)$

$\therefore a\in A$ & $a\in B\cup C$

$\therefore a\in B$ or $a\in C$

Case1: $a\in B$

$\therefore a\in A\cap B$

$\therefore a\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$

Case2: $a\in C$

$\therefore a\in A\cap C$

$\therefore a\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$

By case1,case2:

$a\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$\therefore A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$成立

② 再证$(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$

Let $a\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$\therefore a\in A\cap B$ or $a\in A\cap C$

Case1: $a\in A\cap B$

$\therefore a\in A$ & $a\in B$

$\therefore a\in B\cup C$

$\therefore a\in A\cap(B\cup C)$

Case2: $a\in A\cap C$

$\therefore a\in A$ & $a\in C$

$\therefore a\in B\cup C$

$\therefore a\in A\cap(B\cup C)$

By case1,case2:

$a\in A\cap(B\cup C)$

$\therefore(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$成立

③ 综上所述, $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$成立

2） 证明：

① 先证 $A \subseteq B$

Let $a \in A$

$\therefore a \in A \cup B$

又 $\because A \cup B = A \cap B$

$\therefore a \in A \cap B$

$\therefore a \in B$

$\therefore A \subseteq B$ 成立

② 再证 $B \subseteq A$

Let $a \in B$

$\therefore a \in A \cup B$

又 $\because A \cup B = A \cap B$

$\therefore a \in A \cap B$

$\therefore a \in A$

$\therefore B \subseteq A$ 成立

③ 综上所述, $A = B$ 成立

本题分数	10
得　分	

四、f 和 g 都是集合 A 上的映射，证明: $f \cup g$ 是 A 上的映射当且仅当 $f=g$.

证明:

① 先证充分性

$\because f=g$

$\therefore f \cup g = f$ or g

又 $\because$ f 和 g 都是集合 A 上的映射

$\therefore f \cup g$ 是 A 上的映射

② 再证必要性

(反证法)

假设 $f \neq g$

则 $\exists\, a \in A$ 使得

$f(a)=b_1$ 且 $g(a)=b_2$ $(b_1 \neq b_2)$

$\therefore f \cup g(a)=b_1$ or b_2

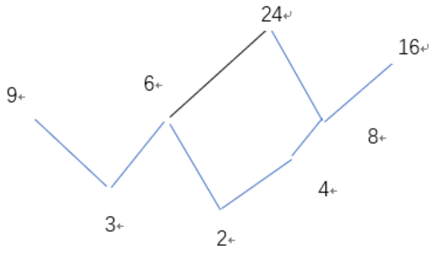
此与 $f \cup g$ 是 A 上的映射矛盾,

$\therefore f=g$

综合①②, $f \cup g$ 是 A 上的映射当且仅当 $f=g$.成立

本题分数	10
得　　分	

五、偏序<A,R>的哈斯图如下所示，求 A, R, {2,4,6}的最大元、极大元、上界、上确界(最小上界)



解:

A={2,3,4,6,8,9,16,24}

R=I_A∪{<3,6>,<3,9>,<2,4>,<2,6>,<2,8>,<2,16>,<2,24>,<4,8>,<4,16>,<4,24>,<6,24>,<8,16>,<8,24>}

最大元:无

极大元:4、6

上界:24

上确界：24

本题分数	10
得　　分	

六、R 和 S 是集合 A 上的等价关系，A/R ={{1,2},{3,4},{5}}
A/S={{1},{2,3,4,5}}
① (A/R)∩(A/S)　② ∪(A/R)　③R-S　④A/(R∩S)

解:

③　**Ø**

④　**{1,2,3,4,5}**

⑤　**R={<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>,<3,3>,<3,4>,<4,3>,<4,4>,<5,5>}**

S={<1,1>,<2,2>,<2,3>,<2,4>,<2,5>,<3,2>,<3,3>,<3,4>,<3,5>,<4,2>,<4,3>,<4,4>,<4,5>,<5,2>,<5,3>,<5,4>,<5,5>}

R-S={<1,2>,<2,1>}

④　A/(R∩S)={{1}, {2}, {3, 4}, {5}}

本题分数	10
得　　分	

七、$f: A \to B$,对任意 $x \in A$ ，令 $B_x=\{y|y \in A$ 且 $f(x)=f(y)\}$, $\prod=\{B_x|x \in A\}$,证明$\prod$是 A 的划分。

证明:

① 对$\forall Bx \in \prod$， $x \in Bx$

$\therefore Bx \neq \emptyset$

② $\because \prod=\{B_x|x \in A\}$

对$\forall x \in A$,定$\exists$ Bi，

使得 $x \in Bi$

$\therefore \cup \prod = \cup B_x = A$

③ （反证法）

对$\forall B_{x1}$、$B_{x2} \in \prod$ ($B_{x1} \neq B_{x2}$),假设 $B_{x1} \cap B_{x2} \neq \emptyset$

$\therefore \forall y \in Bx1 \cap Bx2$

有 $f(x_1)=f(y), f(x_2)=f(y)$

$\therefore f(x_1)=f(x_2)$

$\therefore x_1 \in f(x_2)$

Let $a \in Bx1$

$\therefore f(a)=f(x_1)=f(x_2)$

$\therefore a \in Bx2$

$\therefore Bx1 \sqsubseteq Bx2$

同理, $Bx2 \sqsubseteq Bx1$

$\therefore Bx1 = Bx2$

此与 $Bx1 \neq Bx2$ 矛盾

$\therefore Bx1 \cap Bx2 = \emptyset$

综合①②③，$\prod$是 A 的划分。

本题分数	30
得　　分	

八、用斜形方法证明下列推理关系,第 2 题和第 3 题可用命题逻辑自然推理系统中的所有定理以及谓词逻辑自然推理系统中的以下两条定理：

$\neg\exists xA(x) \vdash\dashv \forall x\neg A(x)$ 和 $\exists x\neg A(x) \vdash\dashv \neg\forall xA(x)$ (30 分)

1) $A\vee B \vdash\dashv \neg A\rightarrow B$
2) $A\wedge\exists xB(x) \vdash\dashv \exists x(A\wedge B(x))$
3) $\forall X(A(x)\rightarrow B) \vdash\dashv \neg\exists xA(x)\vee$ **B**

① (⊢)

证明: (1) A (S)

(2) $\neg A$ (S)

(3) B ($1,2,\ A,\neg A\vdash B$)

(4) $\neg A\to B$ ($2,3,\to^{+}$)

(5) B (S)

(6) $\neg A\to B$ ($5,\ B\vdash A\to B$)

(7) $A\vee B$

(8) $\neg A\to B$

(⊣) (1) $\neg A\to B$

(2) $\neg(A\vee B)$ (S)

(3) A (S)

(4) $A\vee B$ ($3,\ \vee^{+}$)

(5) $\neg A$ ($2,3,4,\ \neg^{+}$)

(6) B ($1,5,\ \to^{-}$)

(7) $A\vee B$ ($6,\ \vee^{+}$)

(8) $A\vee B$ ($2,7,\ \neg$)

② (⊢)

(1) $A\wedge\exists xB(x)$

(2) A ($1,\ \wedge^{-}$)

(3) $\exists xB(x)$ ($1,\ \wedge^{-}$)

(4) $B(a)$ (S) ($a\underset{\triangle}{\in}1,3,6,7$)

(5) $A\wedge B(a)$ ($2,4,\ \wedge^{+}$)

(6) $\exists x(A\wedge B(x))$ ($5,\ \exists^{+}$)

(7) $\exists x(A\vee B(x))$

(⊣)

(1) $\exists x(A\wedge B(x))$

(2) $A\wedge B(a)$ (S) ($a\underset{\triangle}{\in}1,5,6,7$)

(3) A ($2,\ \wedge^{-}$)

(4) $B(a)$ ($2,\ \wedge^{-}$)

(5) $\exists xB(x)$ ($4,\ \exists^{+}$)

(6) $A\wedge\exists xB(x)$ ($3,6,\ \wedge^{+}$)

(7) $A\wedge\exists xB(x)$

③

证明: (⊢)

(1) $\forall x(A(x)\to B)$

(2) $\neg(\neg\exists xA(x)\vee B)$ (S)

(3) $\exists xA(x)\wedge\neg B$

(4) $\exists xA(x)$ ($3,\ \wedge^{-}$)

(5) $\neg B$ ($3,\ \wedge^{-}$)

(6) $A(a)$ (S) ($a\underset{\triangle}{\in}4,8,9$)

(7) $A(a)\to B$ ($1,\ \forall^{-}$)

(8) B ($6,7,\ \to^{-}$)

(9) B ($6,8,\ \exists^{-}$)

(10) $\neg\exists xA(x)\vee B$ ($2,6,9,\ \neg$)

(⊣):

(1) $\neg\exists xA(x)\vee B$

(2) $\neg\exists xA(x)$ (S)

(3) $\forall x\neg A(x)$ ($2,\ \neg\exists xA(x)\to\forall x\neg A(x)$)

(4) $\neg A(a)$ ($3,\ \forall^{-}$)

(5) $A(a)\to B$ (4, 否定前件律)

(6) B(S)

(7) $A(a)\to B$ (肯定后件律)

(8) $A(a)\to B$ ($a\underset{\triangle}{\in}1$)

(9) $\forall x(A(x)\to B)$ ($1,8,\ \forall^{+}$)