第五章 相似矩阵与矩阵的对角化

第一节 特征值与特征向量

1.（1）解：$|\lambda E-\mathrm{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ 2 & \lambda-5 & 2\\ 2 & -4 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-1)^2$，所以 A 的特征值为$\lambda_1=3$，$\lambda_2=1$（二重）对$\lambda_1=3$，解方程组

$$(3E-A)X=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 2 & -2 & 2\\ 2 & -4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

得到一个基础解系：$\zeta_1=(1,1,0)^T$,则 $\mathrm{X}=\mathrm{k}_1\zeta_1=k_1(0,1,1)^T$（$k_1\neq0$是 A 的属于$\zeta_1=3$的全部特征向量. 对于$\lambda_2=1$，解方程组

$$(E-A)X=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 2 & -4 & 2\\ 2 & -4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

得到一个基础解系：$\zeta_2=(2,1,0)^T$，$\zeta_3=(-1,0,1)^T$，则 $X=k_2\zeta_2+k_3\zeta_3=k_2[2,1,0]^T+k_3(-1,0,1)^T(k_2,k_3\neq0)$是 A 的属于$\lambda_2=1$的全部特征向量.

(2) 解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 1 & -1\\ -2 & \lambda & -1\\ -1 & 1 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$, 所以 A 的特征值为$\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$（二重）. 对$\lambda_1=1$，解方程组

$$(E-A)X=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\ -2 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

得到一个基础解系：$\zeta_1=(0,1,1)^T$，则 $\mathrm{X}=\mathrm{k}_1\zeta_1=k_1(0,1,1)^T(k_1\neq0)$是 A 的属于$\lambda_1=1$ 的全部特征向量. 对于$\lambda_2=2$，解方程组

$$(2E-A)X=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\ -2 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

得到一个基础解系：$\zeta_1=(0,1,1)^T$，则 $X=k_1\zeta_1=k_1(0,1,1)^T(k_1\neq0)$是 A 的属于$\lambda_1$=1 的全部特征向量. 对于$\lambda_2=2$，解方程组

$$(2E-A)X=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ -2 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

得到一个基础解系：$\zeta_2=(1,1,0)^T$，则
$X=k_2\zeta_2=k_2(1,1,0)^T(k_2\neq0)$是 A 的属于$\lambda_2=2$ 的全部特征向量.

(3) 解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & 5 & -2\\ -5 & \lambda+7 & -3\\ -6 & 9 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-1)\lambda^2$，所以 A 的特征为$\lambda_1=1$，$\lambda_2=0$（二重）. 对$\lambda_1=1$，解方程组

$$(E-A)X=\begin{pmatrix}-3 & 5 & -2\\ -5 & 8 & -3\\ -6 & 9 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

得到一个基础解系：$\zeta_2=(\frac{1}{3}，\frac{2}{3}，1)^T$，则X=$k_1\lambda_1=k_1(1,1,1)^T(k_1\neq 0)$是 A 属于$\lambda_1=1$的全部特征向量. 对于$\lambda_2=0$，解方程组

$$(-A)X=\begin{pmatrix}-4 & 5 & -2\\ -5 & 7 & -3\\ -6 & 9 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

得到一个基础解系：$\zeta_2=(\frac{1}{3}，\frac{2}{3}，1)$，则

X=$k_2\zeta_2=k_2(\frac{1}{3}，\frac{2}{3}，1)^T(k_2\neq 0)$是 A 的属于$\lambda_2=0$ 的全部特征向量.

2. 解：B 的特征值为-4，-6，-12.

因为 A-5E 的特征值为-4，-6，-3，则$|A-5E|$=$(-4)(-6)(-3)$=-72.

3. 解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-7 & -4 & 1\\ -4 & \lambda-7 & 1\\ 4 & 4 & \lambda-x\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\lambda-7 & -4 & 1\\ 3-\lambda & \lambda-3 & 0\\ 4 & 4 & \lambda-x\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\lambda-7 & \lambda-11 & 1\\ 3-\lambda & 0 & 0\\ 4 & 8 & \lambda-x\end{vmatrix}=(\lambda-3)[(\lambda-11)(\lambda-x)-8]$,

由于$\lambda_1=3$是 A 的一个二重特征值，则$\lambda_1=3$一定是$(\lambda-11)(\lambda-x)-8=0$的一个根，带入解的 x=4，则$(\lambda-3)[(\lambda-11)(\lambda-x)-8]=(\lambda-3)^2(\lambda-12)$，即另一个特征值为$\lambda_2=12$.对于$\lambda_1=3$，解方程组

$$(3E-A)X=\begin{pmatrix}-4 & -4 & 1\\ -4 & -4 & 1\\ 4 & 4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

解得$\zeta_1=\left(1，0，4\right)^\tau$，$\zeta_2=\left(0，1，4\right)^\tau$是$\lambda_1=3$对应的特征空间$V_{\lambda_1}$的基. 对于$\lambda_2=12$，解方程组

$$(12E-A)X=\begin{pmatrix}5 & -4 & 1\\ -4 & 5 & 1\\ 4 & 4 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

解得ζ_3=$(-1，-1，1)^\tau$是$\lambda_2=12$对应的特征子空间V_{λ_2}的基.

4. 证：（1）设λ_i是 A 的任一特征根，则λ_i^n是A^n的特征根，因为A^n=0, 有λ_i^n=0，则一定有λ_i=0，即 A 的特征根全为 0.

(2)类似的，知λ_i^2-λ_i是A^2-A的特征根. 因为$A^2-A=0$, 由λ_i^2-λ_i=0，则一定有$\lambda_i=0$. 或者$\lambda_i=1$，即 A 的特征值为 0 或 1.

(3)类似的，知λ_i^2-1是A^2-E的特征根，因为$A^2-E=0$，有$\lambda_i^2-1=0$,，则一定有$\lambda_i=-1$. 或者$\lambda_i=1$，即 A 的特征值为-1 或 1.

第二节 相似矩阵

1. 证：若 A 可逆，则 BA=E_nBA=$(A^{-1}A)BA=A^{-1}(AB)A$, 即 AB～ BA.
2. 由条件知$A_1=C_1^{-1}B_1C_1, A_2=C_2^{-1}B_2C_2, C_1, C_2$可逆.

于是$\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix}$ 可逆，且

$$\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1^{-1} & 0 \\ 0 & C_2^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

则$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$

第三节 矩阵对角化

1.

1) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-3 & 2 & -1 \\ -1 & \lambda+1 & -1 \\ 2 & -2 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$，所以 A 的特征值为$\lambda_1=-1,\lambda_2=1,\lambda_3=2$,可对角化。

对于$\lambda_1=-1$解方程组$-(-E-A)X=\begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$得到一个基础解系：

$\xi_1=\left(-1,-\frac{3}{2},1\right)^T$

对于$\lambda_2=1$，解方程组$(E-A)X=\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$得到一个基础解系：$\xi_2=(0,1,2)^T$

对于$\lambda_3=2$解方程组$(2E-A)X=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$得到一个基础解系：$\xi_2=\left(-1，0，1\right)^T$显然$\xi_1,\xi_2,\xi_3$是线性无关的，令$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-7 & 12 & -6 \\ -10 & \lambda+19 & -10 \\ -12 & 24 & \lambda-13 \end{vmatrix}=(\lambda+1)$则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$

2) $(\lambda-1)^2$所以 A 的特征值为$\lambda_1=-1,\lambda_2=1$（二重）

对$\lambda_1=-1$,解方程组$(-E-A)X=\begin{pmatrix} -8 & 12 & -6 \\ -10 & 18 & -10 \\ -12 & 24 & -14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$得到一个基础解系：

$\xi_1=\left(\frac{1}{2},\frac{5}{6},1\right)^T$

对于$\lambda_2=1$，解方程组$(E-A)X=\begin{pmatrix} -6 & 12 & -6 \\ -10 & 20 & -10 \\ -12 & 24 & -12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$得到一个基础解系：

$\xi_2=(2,1,0)^T$，$\xi_3=(-1,0,1)^T$显然ξ_1,ξ_2,ξ_3是线性无关的，故 A 可对角化，令$P=$

$$(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 2 & -1\\ \frac{5}{6} & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$则$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$$

3) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -3 & -2\\ -1 & \lambda-4 & -2\\ -1 & 3 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)^2$则 A 的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=3$（二重），由于$r(\lambda_2E-A)=2$所有$\lambda_2=3$的几何重数为$3-r(\lambda_2E-A)=1<2$，故 A 不能对角化。

2.解：由于

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & -1\\ -2 & x-4 & 2\\ 3 & 3 & \lambda-a\end{vmatrix}\overset{c_1-c_2}{=}\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & -1\\ 2-\lambda & \lambda-4 & 2\\ 0 & 3 & \lambda-a\end{vmatrix}\overset{r_2+r_1}{=}\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & -1\\ 0 & \lambda-3 & 1\\ 0 & 3 & \lambda-a\end{vmatrix}=$$

$(\lambda-2)[(x-3)(\lambda-a)-3]$由 B 可知$\lambda_1=2$是 A 的一个二重特征值，则$\lambda_1=2$是$(\lambda-3)(\lambda-a)-3=0$的一个根，代入解得 a=5，则$(\lambda-2)[(x-3)(\lambda-a)-3]=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$又因为$\lambda_2=b$是另一个特征值，故 b=6

对$\lambda_2=6$，解方程组$(6E-A)X=\begin{pmatrix}5 & 1 & -1\\ -2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$得到一个基础解系：$\xi_1=(1,-2,3)^T$

对$\lambda_1=2$，解方程组$(2E-A)X=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -2 & -2 & 2\\ 3 & 3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$得到一个基础解系：$\xi_2=(-1,1,0)^T$ $\xi_3=(1,0,1)^T$

可令$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$则$P^{-1}AP=B$又因为$P^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$,$P^{-1}BP=A$,

则$A^n=(PBP^{-1})^n=PB^nP^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n & & \\ & 6^n & \\ & & 2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}5\cdot 2^n-6^n & 2^n-6^n & -2^n+6^n\\ -2\cdot 2^n+2\cdot 6^n & 2\cdot 2^n+2\cdot 6^n & 2\cdot 2^n-2\cdot 6^n\\ 3\cdot 2^n-3\cdot 6^n & 3\cdot 2^n-3\cdot 6^n & 2^n+3\cdot 6^n\end{pmatrix}$$