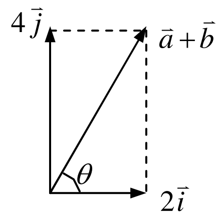
0-1 已知 $\vec{a}=12\vec{i}+4\vec{j}\ \mathrm{m}$，$\vec{b}=-10\vec{i}\ \mathrm{m}$，试分别用作图法和解析法求解：（1）$\vec{a}+\vec{b}$；（2）$\vec{a}-\vec{b}$。

解：(1) $\vec{a}+\vec{b}=(12\vec{i}+4\vec{j}-10\vec{i})\mathrm{m}=(2\vec{i}+4\vec{j})\mathrm{m}$

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}\qquad \theta=\arctan\frac{4}{2}=63.4°$$



(2) $\vec{a}-\vec{b}=(12\vec{i}+4\vec{j}+10\vec{i})\mathrm{m}=(22\vec{i}+4\vec{j})\mathrm{m}$

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{22^2+4^2}=10\sqrt{5}\qquad \theta=\arctan\frac{4}{22}=10.3°$$ (图略)

0-2 两矢量 $\vec{a}=6\vec{i}+12\vec{j}$，$\vec{b}=-8\vec{i}-6\vec{j}\ \mathrm{m}$，试求：（1）$\vec{a}\cdot\vec{b}$；（2）$\vec{a}\times\vec{b}$。

解：(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=(6\vec{i}+12\vec{j})\cdot(-8\vec{i}-6\vec{j})=-48-72=-120$

(2) $\vec{a}\times\vec{b}=(6\vec{i}+12\vec{j})\times(-8\vec{i}-6\vec{j})=-36\vec{k}+96\vec{k}=60\vec{k}$

0-3 三矢量构成一个三角形，如图 0-3 所示。已知 $|\vec{a}|=3\,\mathrm{m}$，$|\vec{b}|=4\,\mathrm{m}$，$|\vec{c}|=5\,\mathrm{m}$，求：（1）$|\vec{a}+\vec{b}|$；（2）$\vec{a}\cdot\vec{b}$；（3）$\vec{a}\times\vec{b}$。

解：(1) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|-\vec{c}\right|=\left|\vec{c}\right|=5\,\mathrm{m}$

(2) $\because \vec{a}\perp\vec{b}$，$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

(3) $\vec{a}\times\vec{b}=3\vec{j}\times4\vec{i}=-12\vec{k}$

0-4 已知 $\vec{r}=(t^3+2t)\vec{i}-3e^{-2t}\vec{j}+2\sin5t\vec{k}$，求下列各式在 $t=0$ 时的值：（1）$\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$；（2）$\left|\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|$；（3）$\vec{r}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$；（4）$\vec{r}\times\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$。

解：(1) $\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=(3t^2+2)\vec{i}+6e^{-2t}\vec{j}+10\cos5t\,\vec{k}$，$t=0$ 时，$\vec{r}=-3\vec{j}$，$\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=2\vec{i}+6\vec{j}+10\vec{k}$

(2) $\left|\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\sqrt{2^2+6^2+10^2}=\sqrt{140}$

(3) $\vec{r}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=(-3\vec{j})\cdot(2\vec{i}+6\vec{j}+10\vec{k})=-18$

(4) $\vec{r}\times\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=(-3\vec{j})\times(2\vec{i}+6\vec{j}+10\vec{k})=6\vec{k}-30\vec{i}$

运动量

1-1 质点在xOy平面内的运动方程为 $x=3t$，$y=2t^2+3$。求：（1）t=2s时质点的位矢、速度和加速度；（2）从t=1s到t=2s这段时间内，质点位移的大小和方向；（3）0 ~ 1 s和1 ~ 2 s两时间段，质点的平均速度；（4）写出轨道方程。

解：(1) $\vec{r}=3t\,\vec{i}+(2t^2+3)\,\vec{j}$，$\vec{v}=\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t}=3\vec{i}+4t\,\vec{j}$，$\vec{a}=\dfrac{\mathrm{d}^2\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t^2}=4\,\vec{j}$

$t=2\,\mathrm{s}$ 时，$\vec{r}=6\vec{i}+11\vec{j}$，$\vec{v}=3\vec{i}+8\vec{j}$，$\vec{a}=4\,\vec{j}$

(2) $\Delta\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1=(6\vec{i}+11\,\vec{j})-(3\vec{i}+5\,\vec{j})=3\vec{i}+6\,\vec{j}$，$\left|\Delta\vec{r}\right|=\sqrt{3^2+6^2}=\sqrt{45}$，

与 x 轴正向的夹角 $\theta=\arctan\dfrac{6}{3}=63.4°$

(3) $\overline{v}_1=\dfrac{\vec{r}_1-\vec{r}_0}{\Delta t_1}=\dfrac{(3\vec{i}+5\,\vec{j})-3\,\vec{j}}{1}=3\vec{i}+2\,\vec{j}$，$\overline{v}_2=\dfrac{\vec{r}_2-\vec{r}_1}{\Delta t_2}=\dfrac{3\vec{i}+6\,\vec{j}}{1}=3\vec{i}+6\,\vec{j}$

(4) $t=\dfrac{x}{3}$，$y=2\left(\dfrac{x}{3}\right)^2+3=\dfrac{2x^2}{9}+3$

1-2 一质点在xOy平面内运动，初始时刻位于x =1m，y=2m处，它的速度为v_x=10t，$v_y=t^2$。试求 2 秒时质点的位置矢量和加速度矢量。

解：$v_x=\dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}=10t$，$\int_1^x\mathrm{d}\,x=\int_0^t 10t\,\mathrm{d}\,t$，$x=5t^2+1$。$v_y=\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}=t^2$，$\int_2^y\mathrm{d}\,y=\int_0^t t^2\,\mathrm{d}\,t$，$y=\dfrac{1}{3}t^3+2$

$\vec{r}=(5t^2+1)\vec{i}+(\dfrac{1}{3}t^3+2)\,\vec{j}$，$\vec{v}=10t\,\vec{i}+t^2\,\vec{j}$，$\vec{a}=\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{v}}{\mathrm{d}\,t}=10\,\vec{i}+2t\,\vec{j}$

$t=2\,\mathrm{s}$ 时，$\vec{r}=21\vec{i}+\dfrac{14}{3}\vec{j}$，$\vec{a}=10\,\vec{i}+4\,\vec{j}$

1-3 一质点具有恒定加速度$\vec{a}=6\vec{i}+4\vec{j}$，在 t=0 时，其速度为零，位置矢量$\vec{r}_0=10\vec{i}$，求（1）任意时刻质点的速度和位置矢量；（2）质点的轨道方程。

解：质点作匀加速运动

(1) $\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{a}\,t=6t\,\vec{i}+4t\,\vec{j}$，$\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{v}_0 t+\dfrac{1}{2}\vec{a}\,t^2=10\,\vec{i}+\dfrac{1}{2}(6\,\vec{i}+4\,\vec{j})t^2=(10+3t^2)\vec{i}+2t^2\vec{j}$

(2) $y=2t^2$，$t^2=\dfrac{y}{2}$，$x=10+\dfrac{3y}{2}$，$\therefore\ y=\dfrac{2}{3}(x-10)$

1-4 路灯距地面高度为 H，行人身高为 h，若人以匀速 V 背向路灯行走，人头顶影子的移动速度 v 为多少？

解：设 x 轴方向水平向左，影子到灯杆距离为 x，人到灯杆距离为 x'，由几何关系得

$$\frac{h}{H}=\frac{x-x'}{x},\quad x=\frac{H}{H-h}x',\quad v=\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}=\frac{H}{H-h}\frac{\mathrm{d}\,x'}{\mathrm{d}\,t}=\frac{H}{H-h}V$$

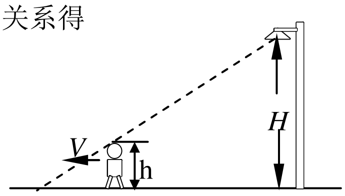


图 1-4

直线运动

1-5 一质点沿x轴运动，其加速度a与位置坐标x的关系为$a=3+6x^2$，若质点在原点处的速度为零，试求其在任意位置处的速度。

解：$a=\dfrac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t}=\dfrac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,x}\dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}=v\dfrac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,x}=3+6x^2$，$\int_0^v v\,\mathrm{d}\,v=\int_0^x(3+6x^2)\,\mathrm{d}\,x$，$\dfrac{1}{2}v^2=3x+2x^3$，$\therefore v=\sqrt{6x+4x^3}$

1-6 一小球由静止下落，由于阻力作用，其加速度 a 与速度 v 的关系为 a=A-Bv，其中 A 和 B 为常数，求 t 时刻小球的速度。

解：$a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=A-Bv$，$\int_0^v\dfrac{\mathrm{d}v}{A-Bv}=\int_0^t\mathrm{d}t$，$v=\dfrac{A}{B}(1-e^{-Bt})$

1-7 一质点沿 x 轴运动，已知速度 v=8+2t，当 t=8s 时，质点在原点左边 52m 处。求：（1）质点的加速度和运动方程；（2）初速度和初位置。

解：(1) $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=2\,\mathrm{m/s^2}$，$v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=8+2t\,\mathrm{m/s}$，$\int_{-52}^{x}\mathrm{d}x=\int_8^t(8+2t)\,\mathrm{d}t$，$x=8t+t^2-180\,\mathrm{m}$

(2) $v_0=8\,\mathrm{m/s}$，$x_0=-180\,\mathrm{m}$

曲线运动

1-8 质量m=0.1kg的小球沿半径R=1m的圆周运动，角位移$\theta=t^4-3$，求t=1s时小球所受外力的大小和方向。

解：$\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=4t^3$，$\alpha=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=12t^2$，$a_t=R\alpha=12Rt^2$，$a_n=R\omega^2=16Rt^6$

$t=1\mathrm{s}$ 时，$a_t=12\,\mathrm{m/s^2}$，$a_n=16\,\mathrm{m/s^2}$，$a=\sqrt{12^2+16^2}=20\mathrm{m/s}$

$\bar{F}=m\bar{a}$，$\left|\bar{F}\right|=ma=0.1\times20=2\,\mathrm{N}$，$\bar{F}$ 与切线方向夹角 $\beta=\arctan\dfrac{a_n}{a_t}=\arctan\dfrac{16}{12}=53.13°$

1-9 一质点沿半径为R的圆周运动，质点所经过的弧长与时间的关系为$s=bt+\dfrac{1}{2}ct^2$，其中b、c为正常数，且$Rc>b^2$，求切向加速度与法向加速度大小相等之前所经历的时间。

解：$v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=b+ct$，$a_t=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=c$，$a_n=\dfrac{v^2}{R}=\dfrac{(b+ct)^2}{R}$，$a_t=a_n$，$\dfrac{(b+ct)^2}{R}=c$，$t=\dfrac{\sqrt{Rc}-b}{c}$

1-10 一张CD光盘音轨区域的内半径R_1=2.2cm，外半径R_2=5.6cm，径向音轨密度n=650 条/mm。在CD唱机内，光盘每转一圈，激光头沿径向向外移动一条音轨，激光束相对光盘是以v=1.3m/s的恒定线速度运动的。求（1）这张光盘的全部放音时间是多少？（2）激光束到达离盘心r=5.0cm处时，光盘转动的角速度和角加速度各为多少？

解：(1) 在距离中心为r、宽度为$\mathrm{d}r$内音轨的长度为 $2\pi rn\,\mathrm{d}r$，

激光划过这些音轨所需的时间 $\mathrm{d}t=\dfrac{2\pi rn\,\mathrm{d}r}{v}$，整张 CD 的放音时间

$$t=\int\mathrm{d}t=\int_{R_1}^{R_2}\frac{2\pi rn\,\mathrm{d}r}{v}=\frac{\pi n}{v}(R_2^2-R_1^2)=\frac{\pi\times6500}{130}(5.6^2-2.2^2)=4166\,\mathrm{s}=69.4\,\mathrm{min}$$

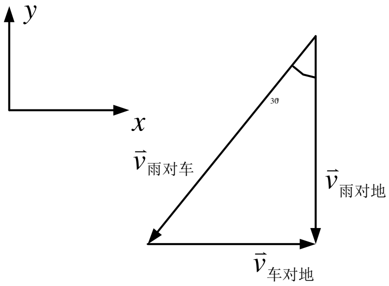
(2) $\omega=\dfrac{v}{r}$，$r=5.0\,\mathrm{cm}$ 时，$\omega=\dfrac{130}{5.0}=26\,\mathrm{rad/s}$，$\alpha=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{v}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{v}{r^2}\dfrac{v}{2\pi rn}=-\dfrac{v^2}{2\pi r^3n}$

$r=5.0\,\mathrm{cm}$ 时，$\alpha=-\dfrac{130^2}{2\pi\times5^3\times6500}=-3.31\times10^{-3}\,\mathrm{rad/s^2}$

相对运动

1-11 一列火车以 36km/h的速率向东行驶时，相对于地面匀速竖直下落的雨滴在车窗上形成的雨迹与竖直方向成 30^0角。求（1）雨滴相对于地面的水平分速度多大？相对于列车的水平分速度多大？（2）雨滴相对于地面的速率如何？相对于列车的速率如何？

解：$\bar{v}_{雨对地}=\bar{v}_{雨对车}+\bar{v}_{车对地}$



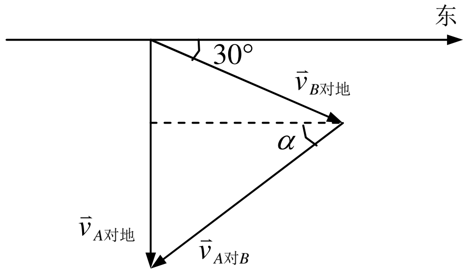
(1) 雨滴相对于地面的水平分速度 $v_{1x}=0$

雨滴相对于列车的水平分速度 $v_{2x}=-36\,\text{km/h}=-10\,\text{m/s}$

(2) $\left|\vec{v}_{雨对地}\right|=\left|\vec{v}_{车对地}\right|\tan 60°=36\tan 60°=62.4\,\text{km/h}=17.3\,\text{m/s}$

$\left|\vec{v}_{雨对车}\right|=\left|\vec{v}_{车对地}\right|/\cos 60°=36/\cos 60°=72\,\text{km/h}=20\,\text{m/s}$

1-12 飞机A以v_a=1000km/h的速率相对于地面向南飞行，同时另一架飞机B以v_b=800km/h的速率相对于地面向东偏南 30^0方向飞行。求A机相对于B机速度的大小和方向。



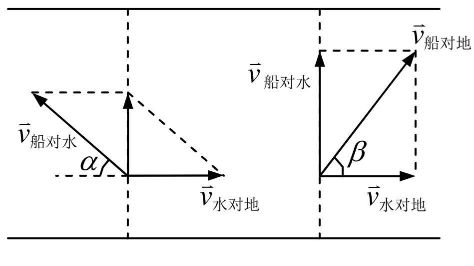
解：$\vec{v}_{A对地}=\vec{v}_{A对B}+\vec{v}_{B对地}$

$$\begin{aligned}v_{A对B}&=\sqrt{v^2{}_{A对地}+v^2{}_{B对地}-2v_{A对地}\cdot v_{B对地}\cos 60°}\\&=\sqrt{1000^2+800^2-2\times1000\times800\times\cos 60°}\\&=917\,\text{km/h}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\alpha&=\frac{v_{A对地}-v_{B对地}\sin 30°}{v_{A对B}}=\frac{1000-800\times0.5}{917}\\&=0.6543\end{aligned}$$

$\alpha=40.9°$　即 A 机相对于 B 机的速度方向为向西偏南 $40.9°$。

1-13 一人在静水中以$1.1\,\text{m/s}$的速度划船，现欲横渡一宽为1.00×10^3 m、水流速度为$0.55\,\text{m/s}$的大河。（1）若要横渡到正对岸的一点，划行方向应如何？所需时间为多少？（2）如要用最短的时间过河，划行方向应如何？到达对岸什么位置？



解：$\vec{v}_{船对地}=\vec{v}_{船对水}+\vec{v}_{水对地}$

(1) $\alpha=\arccos\dfrac{v_{水对地}}{v_{船对水}}=\arccos\dfrac{0.55}{1.10}=60°$

$$t=\frac{1000}{v_{船对地}}=\frac{1000}{v_{船对水}\sin 60°}=\frac{1000}{1.1\times\sin 60°}=1050\,\text{s}$$

(2) $\beta=\arctan\dfrac{v_{船对水}}{v_{水对地}}=\arctan\dfrac{1.10}{0.55}=63.4°$

$x=v_{水对地}\times\dfrac{1000}{v_{船对水}}=0.55\times\dfrac{1000}{1.10}=500\,\text{m}$，　船到达对岸下游$500\,\text{m}$ 处。

法拉第电磁感应定律

10-1 如图 10-1 所示，一半径a＝0.10m，电阻R＝1.0×10^{-3}Ω的圆形导体回路置于均匀磁场中，磁场方向与回路面积的法向之间的夹角为π/3，若磁场变化的规律为

$$B(t)=(3t^2+8t+5)\times10^{-4}\,\mathrm{T}$$

求：（1）t＝2s 时回路的感应电动势和感应电流；

（2）最初 2s 内通过回路截面的电量。

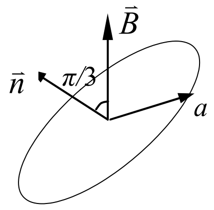


图 10-1

解：（1）$\Phi=\vec{B}\cdot\vec{S}=BS\cos\theta$

$$\varepsilon_i=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-S\cos\theta\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=-\pi a^2\cos(\frac{\pi}{3})\times(6t+8)\times10^{-4}=-1.6\times(6t+8)\times10^{-6}\ \mathrm{V}$$

$t=2\mathrm{s}$，$\varepsilon_i=-3.2\times10^{-5}$ V，$I=\dfrac{\varepsilon}{R}=\dfrac{-3.2\times10^{-5}}{1.0\times10^{-3}}=-2\times10^{-2}$ A

负号表示ε_i方向与确定$\vec{n}$的回路方向相反

（2）$q_i=\dfrac{1}{R}(\Phi_1-\Phi_2)=\dfrac{1}{R}[B(0)-B(2)]\cdot S\cdot\cos\theta=\dfrac{28\times10^{-4}\times3.14\times0.1^2}{1\times10^{-3}\times2}=4.4\times10^{-2}$ C

10-2 如图 10-2 所示，两个具有相同轴线的导线回路，其平面相互平行。大回路中有电流 I，小的回路在大的回路上面距离 x 处，$x>>R$，即 I 在小线圈所围面积上产生的磁场可视为是均匀的。若$\dfrac{dx}{dt}=v$等速率变化，（1）试确定穿过小回路的磁通量Φ和 x 之间的关系；（2）当 x＝NR（N 为一正数），求小回路内的感应电动势大小；（3）若 v＞0，确定小回路中感应电流方向。

解：（1）大回路电流 I 在轴线上 x 处的磁感应强度大小

$$B=\frac{\mu_0IR^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}，方向竖直向上。$$

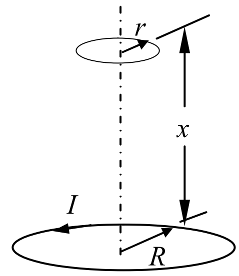


图 10-2

$x>>R$ 时，$B=\dfrac{\mu_0IR^2}{2x^3}$，$\Phi=\vec{B}\cdot\vec{S}=BS=B\cdot\pi r^2=\dfrac{\mu_0IR^2\pi r^2}{2x^3}$

（2）$\varepsilon_i=\left|-\dfrac{d\Phi}{dt}\right|=\dfrac{3}{2}\mu_0IR^2\pi r^2x^{-4}\dfrac{dx}{dt}$，$x=NR$ 时，$\varepsilon_i=\dfrac{3\mu_0\pi Ir^2}{2R^2N^4}v$

（3）由楞次定律可知，小线圈中感应电流方向与 I 相同。

动生电动势

10-3 一半径为 R 的半圆形导线置于磁感应强度为$\vec{B}$的均匀磁场中，该导线以速度 v 沿水平方向向右平动，如图 10-3 所示，分别采用（1）法拉第电磁感应定律和（2）动生电动势公式求半圆导线中的电动势大小，哪一端电势高？

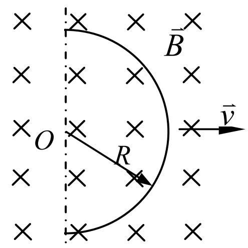


图 10-3

解：（1）假想半圆导线在宽为 2R 的 U 型导轨上滑动，设顺时针方向为回路方向，在 x 处

$$\Phi_m=(2Rx+\frac{1}{2}\pi R^2)B，\therefore\ \varepsilon=-\frac{d\Phi_m}{dt}=-2RB\frac{dx}{dt}=-2RBv$$

由于静止 U 型导轨上电动势为零，所以半圈导线上电动势为

$\varepsilon=-2RBv$ 负号表示电动势方向为逆时针，即上端电势高。

（2）任取线元 dl，$d\varepsilon=(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}=vB\sin 90°\cdot\cos\theta dl=vB\cos\theta\cdot Rd\theta$

$\varepsilon=\int d\varepsilon=vBR\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta=2vRB$，由 $(\vec{v}\times\vec{B})$ 指向知，上端电势高

10-4 长为 L 的铜棒 NM，以角速度 ω 绕支点 O 在水平面上转动，支点距棒的一端点 N 的距离为 r，设均匀磁场 $\vec{B}$ 垂直向下，如图 10-4 所示。求棒两端的电势差。

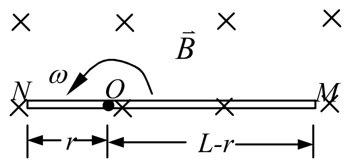


图 10-4

解：在棒上距 O 点 l 处取线元 $d\vec{l}$，方向 $N\to M$，则

$d\varepsilon=(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}=vBdl=-\omega Bldl$

$\therefore\ \varepsilon_{NM}=\int_{NM}d\varepsilon=-\omega B\int_{-r}^{L-r}ldl=-\frac{1}{2}\omega BL(L-2r)$

负号表示电动势方向为 $M\to N$，$U_{NM}=-\varepsilon_{NM}=\frac{1}{2}\omega BL(L-2R)$

10-5 两平行长直导线载有等量反向电流 I，金属棒 CD 与两导线共面且垂直，相对位置如图 10-5 所示。CD 棒以速度 $\vec{v}$ 平行于导线电流运动时，求 CD 棒中的动生电动势，哪端的电势高？

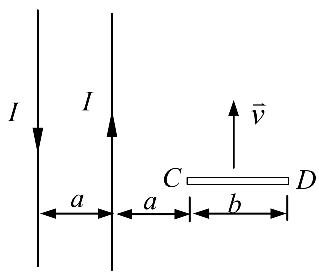


图 10-5

解：如图建立坐标系，在 x 处（棒上）取线元 $d\vec{x}$，方向 $C\to D$，该处

$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}-\frac{\mu_0 I}{2\pi(x-a)}$，方向垂直纸面向上。

$\therefore\ d\varepsilon_i=(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{x}=vBdx$

$$\varepsilon_{CD}=\int d\varepsilon_i=\frac{\mu_0 Iv}{2\pi}\int_{2a}^{2a+b}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-a})dx=\frac{\mu_0 Iv}{2\pi}[\ln\frac{2a+b}{2a}-\ln\frac{a+b}{a}]=\frac{\mu_0 Iv}{2\pi}\ln\frac{2a+b}{2(a+b)}$$

$\because\ \varepsilon_{CD}<0$，$\therefore C$ 端电势高。

10-6 如图 10-6 所示，质量为 m，长为 l，电阻为 R 的金属棒 AB 放置在一个倾斜的光滑 U 形框架上，并由静止下滑，磁场 $\vec{B}$ 垂直向上。求：（1）U 形框架为绝缘时，AB 棒内的动生电动势与时间的函数关系；（2）U 形框架为导体时（不计电阻），AB 棒下滑速度随时间的变化关系，最大速度为多少？

解：（1）$\varepsilon_i=(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\overline{BA}=vB\sin\alpha\cdot l=vBl\cos\theta$

$\because$ 在斜面上，$mg\sin\theta=ma$，$\therefore\ a=g\sin\theta$

$v=at=gt\sin\theta$，$\therefore\ \varepsilon_i=gt\sin\theta\cdot Bl\cos\theta=\frac{1}{2}Bglt\sin 2\theta$

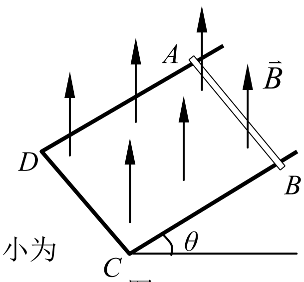


图 10-6

（2）此时，在 $BADC$ 回路中产生感应电流，所以 AB 还受安培力作用，大小为

$F_i=BIl=Bl\frac{\varepsilon_i}{R}=\frac{B^2l^2}{R}v\cos\theta$，方向水平向右。

沿斜面 ， $mg\sin\theta - F_i\cos\theta = ma = m\dfrac{dv}{dt}$，即 $mg\sin\theta - \dfrac{B^2l^2\cos^2\theta}{R}v = m\dfrac{dv}{dt}$

解得 $v_{\max} = \dfrac{mgR\sin\theta}{B^2l^2\cos^2\theta}(1 - e^{-\frac{B^2l^2\cos^2\theta}{mR}t})$，$v_{\max} = \dfrac{mgR\sin\theta}{B^2l^2\cos^2\theta}$。

感生电动势

10-7 一长直导线中通有交变电流 I＝5.0sin100πt A，在与其相距 d＝5.0cm 处放有一矩形线圈，共 100 匝，线圈长 l＝4.0cm，宽 a＝2.0cm，如图 10-7 所示。求 t 时刻：（1）线圈中的磁通链数是多少？（2）线圈中的感生电动势是多少？

解：（1）取矩形线圈的回路方向为顺时针方向，在距长直电流为 x 处取宽为 dx 的小面元

$$d\Phi = \vec{B}\cdot d\vec{S} = N\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\cdot l dx,$$

$$\therefore \Phi = \frac{\mu_0 NIl}{2\pi}\int_d^{d+a}\frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 NIl}{2\pi}\ln\frac{d+a}{d}$$

$$= 2\times10^{-7}\times100\times4\times10^{-2}\times\ln\frac{7}{5}\times\sin100\pi t = 1.35\times10^{-6}\sin100\pi t\,\text{Wb}$$

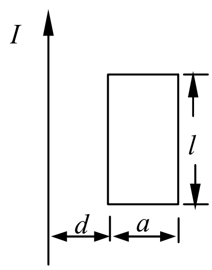


图 10-7

（2）$\varepsilon_i = \left|-\dfrac{d\Phi}{dt}\right| = 4.24\times10^{-4}\cos100\pi t\,\text{V}$

10-8 一半径为 R、单位长度上匝数为 n 的通电长直螺线管，其横截面上的磁场如图 10-8 所示。若电流的变化率为 dI/dt（＞0），求：（1）管内外的感生电场；（2）当电子分别置于 a 点、O 点和 b 点处时，电子所获得的瞬时加速度大小和方向各为何？

解：（1）取以轴线为圆心，半径为 r 的圆，回路方向为逆时针

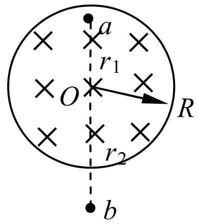


图 10-8

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_k\cdot d\vec{l} = E_k\cdot2\pi r = -\frac{d(\vec{B}\cdot\vec{S})}{dt}$$

$r<R$ 时：$E_k\cdot2\pi r = \pi r^2\dfrac{dB}{dt}$，$\therefore E_k = \dfrac{r}{2}\dfrac{dB}{dt} = \dfrac{r}{2}\mu_0 n\dfrac{dI}{dt}$，方向逆时针方向。

a 点：$E_{ka} = \dfrac{r_1}{2}\mu_0 n\dfrac{dI}{dt}$，电子受力 $\vec{F} = -e\vec{E}_{ka} = m\vec{a}_1$

$\therefore \vec{a}_1 = -\dfrac{e}{m}\vec{E}_{ka}$ 大小 $a_1 = \dfrac{\mu_0 ner_1}{2m}\dfrac{dI}{dt}$，方向水平向右。

O 点：$E_{ko} = 0$，$\therefore \vec{a}_2 = 0$

$r>R$ 时：$E_k\cdot2\pi r = \pi R^2\dfrac{dB}{dt}$，$\therefore E_k = \dfrac{R^2}{2r}\dfrac{dB}{dt} = \dfrac{\mu_0 nR^2}{2r}\dfrac{dI}{dt}$

b 点：$E_{kb} = \dfrac{\mu_0 nR^2}{2r_2}\dfrac{dI}{dt}$，$\therefore \vec{a}_3 = -\dfrac{e}{m}\vec{E}_{kb}$，大小 $a_3 = \dfrac{\mu_0 neR^2}{2r_2}\dfrac{dI}{dt}$，方向水平相左。

10-9 在半径为 R 的细长螺线管内有 $\frac{dB}{dt}>0$ 的均匀磁场，一等腰梯形金属框 $abcd$ 如图 10-9 放置。已知，ab＝$2R$，cd＝R，求：（1）各边产生的感生电动势；（2）线框的总电动势。

解：（1）径向上的电动势为零，即 $\varepsilon_{ad}=\varepsilon_{cd}=0$

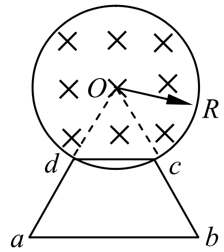


图 10-9

在 ΔOdc 中，以 dc 为底，设 h_1 为高

$$\Phi_1=\frac{1}{2}Rh_1\cdot B=\frac{1}{2}R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}R\cdot B=\frac{\sqrt{3}}{4}R^2B$$

$$\therefore\ \varepsilon_1=\varepsilon_{cd}=\left|\frac{d\Phi_1}{dt}\right|=\frac{\sqrt{3}}{4}R^2\frac{dB}{dt}\qquad \text{方向}\quad d\rightarrow c$$

在 ΔOab 中，$\Phi_2=\frac{1}{6}\pi R^2\cdot B$，$\therefore\ \varepsilon_2=\varepsilon_{ab}=\left|\frac{d\Phi_2}{dt}\right|=\frac{\pi R^2}{6}\frac{dB}{dt}$ 　　方向 $a\rightarrow b$

（2）线框总电动势 $\varepsilon_i=\varepsilon_2-\varepsilon_1=(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4})R^2\frac{dB}{dt}$

互感

10-10 一螺绕环横截面的半径为a，环中心线的半径R，$R>>a$，其上由表面绝缘导线均匀地密绕两个线圈，一个为N_1匝，另一个为N_2匝，求两线圈的互感系数。

解：设线圈 1 中通有电流I_1，则螺绕环中的磁感应强度 $B=\mu_0n_1I_1=\mu_0\frac{N_1}{2\pi R}I_1$

在线圈 2 中的全磁通 $\Psi_{12}=N_2BS=N_2\mu_0\frac{N_1}{2\pi R}I_1\pi a^2$

$$\therefore M=\frac{\Psi_{12}}{I_1}=\frac{\mu_0N_1N_2a^2}{2R}$$

10-11 如图 10-11 所示，A、C 为两同轴的圆线圈，半径分别为 R 和 r，两线圈相距为 l，若 r 很小，可认为由 A 线圈在 C 中所产生的磁感应强度是均匀的，求两线圈的互感系数。若 C 线圈匝数增加 N 倍，则互感系数又为多少？

解：设线圈 A 中通有电流 I，在线圈 C 的圆心处的磁感应强度 $B=\frac{\mu_0R_2I}{2(R^2+l^2)^{3/2}}$

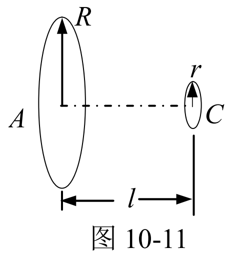


图 10-11

$$\therefore M=\frac{\Phi}{I}=\frac{BS}{I}=\frac{\mu_0R^2I}{2(R^2+l^2)^{3/2}}\cdot\frac{\pi r^2}{I}=\frac{\mu_0\pi R^2r^2}{2(R^2+l^2)^{3/2}}$$

若 C 线圈匝数增加 N 倍，则 $\therefore M=N\frac{BS}{I}=\frac{\mu_0N\pi R^2r^2}{2(R^2+l^2)^{3/2}}$

10-12 一长直导线旁，共面放置一长 20cm、宽 10cm、共 100 匝的密绕矩形线圈，长直导线与矩形线圈的长边平行且与近边相距 10cm，如图 10-12 所示。求两电路的互感系数。

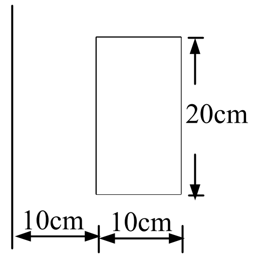


图 10-12

解：在距长直导线 r 处，取一面元 $dS = ldr$，则 $d\Phi = BdS = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} ldr$

$$\therefore \Phi = \frac{\mu_0 Il}{2\pi}\int_{0.1}^{0.2}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 Il}{2\pi}\ln 2，\quad M = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\mu_0 Nl}{2\pi}\ln 2 = 2.77\times 10^{-5}\,\mathrm{H}$$

自感

10-13 在长 60cm直径 5.0cm的纸筒上绕多少匝导线才能得到自感为 6.0×10^{-3} 亨的线圈？

解：螺线管的自感 $L = \mu_0 n^2 V$，$\therefore L = \mu_0 \dfrac{N^2}{l^2}\cdot \pi R^2 \cdot l = \dfrac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{l}$

有 $N = \sqrt{\dfrac{Ll}{\mu_0 \pi R^2}} = 1208$ （匝）

10-14 管长l，匝数N的螺线管，管心是两个套在一起的同轴圆柱体，其截面积分别为S_1和S_2，磁导率分别为μ_1和μ_2，如图 10-14 所示。求该螺线管的自感系数。

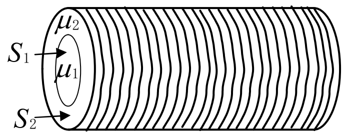


图 10-14

解：设通电流 I，则两介质中的磁场分别为 $B_1 = \mu_1 \dfrac{N}{l} I$，$B_2 = \mu_2 \dfrac{N}{l} I$

$$\therefore \Phi_1 = B_1 S_1 = \frac{\mu_1 NI}{l} S_1，\quad \Phi_2 = B_2 S_2 = \frac{\mu_2 NI}{l} S_2$$

$$\Psi = N(\Phi_1 + \Phi_2) = \frac{N^2 I}{l}(\mu_1 S_1 + \mu_2 S_2)，\quad \therefore L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N^2}{l}(\mu_1 S_1 + \mu_2 S_2)$$

10-15 两根半径均为 a 的平行长直导线，它们中心相距为 d，如图 10-15 所示。两导线中通以等值、反向的电流 I，求单位长度上的自感系数。（设导线内的磁通量忽略不计）

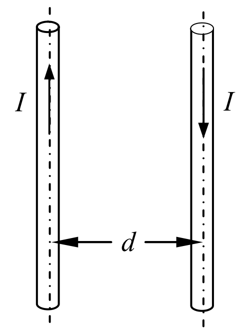


图 10-15

解：两导线间的磁感应强度 $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} + \dfrac{\mu_0 I}{2\pi (d-r)}$

则穿过图中阴影部分的磁通量为 $\Phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_a^{d-a} Bldr = \dfrac{\mu_0 Il}{\pi}\ln\dfrac{d-a}{a}$

单位长度上的自感系数 $L = \dfrac{\Phi}{I} = \dfrac{\mu_0 l}{\pi}\ln\dfrac{d-a}{a}$

磁能

10-16 一个螺线管的自感为 10 mH，通过线圈的电流为 4A，求它所储存的磁能。

解：$W = \dfrac{1}{2}LI^2 = \dfrac{1}{2}\times 10\times 10^{-3}\times 4^2 = 8\times 10^{-2}\,\mathrm{J}$

10-17 设一无限长同轴电缆为圆柱形导体（半径为R_1，磁导率为μ_1）与半径为R_2（$R_2>R_1$）的金属圆筒组成，如图 10-17 所示。在金属圆柱与圆筒间充以磁导率为μ_2的磁介质，电流I由圆筒流去，由圆柱形导体流回。求单位长度的总磁能。

解：由安培环路定律

$r<R_1$：$B_1=\dfrac{\mu_1 Ir}{2\pi R_1^2}$；$R_1<r<R_2$：$B_2=\dfrac{\mu_2 I}{2\pi r}$；$r>R_2$ 时：$B_3=0$。

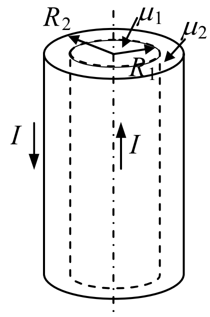


图 10-17

$$\therefore W_{m1}=\int_0^{R_1}\frac{1}{2\mu_1}(\frac{\mu 1 Ir}{2\pi R_1^2})\cdot 2\pi rldr=\frac{\mu_1 I^2 l}{16\pi}$$

$$W_{m2}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{2\mu_2}(\frac{\mu_2 I}{2\pi r})^2\cdot 2\pi rldr=\frac{\mu_2 I^2 l}{4\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

单位长度总磁能 $W_m'=\dfrac{1}{l}(W_{m1}+W_{m2})=\dfrac{I^2}{4\pi}(\dfrac{\mu_1}{4}+\mu_2\ln\dfrac{R_2}{R_1})$

位移电流

10-18 试证：平行板电容器中的位移电流可以写为$I_D=C\dfrac{dU}{dt}$。

证：$\because I_D=\dfrac{d\Phi_D}{dt}$，$\Phi_D=DS$，$D=\varepsilon_0\varepsilon_r E=\varepsilon_0\varepsilon_r\dfrac{U}{d}$

$\therefore I_D=\dfrac{d}{dt}(DS)=\dfrac{d}{dt}(\varepsilon_0\varepsilon_r\dfrac{U}{d}\cdot S)$。又 $C=\dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}$，$\therefore I_D=\dfrac{d}{dt}(CU)=C\dfrac{dU}{dt}$ 得证。

10-19 一平行板电容器的两板面积均为S的圆形金属板，接于一交流电源时，板上的电荷随时间变化，即$q_0=q_m\sin\omega t$。（1）试求电容器中的位移电流密度；（2）试证两板之间某点的磁感应强度为

$B=\dfrac{q_m r\omega\mu_0}{2S}\cos\omega t$，其中$r$为由圆板中心线到该点的距离。

解：（1）$q_0=q_m\sin\omega t$，对平板电容器 $D=\sigma=\dfrac{q_0}{S}=\dfrac{q_m}{S}\sin\omega t$。$\therefore j_D=\dfrac{\partial D}{\partial t}=\dfrac{q_m\omega}{S}\cos\omega t$

（2）$\oint\vec{H}\cdot d\vec{l}=H\cdot 2\pi r=I_D=j_D\cdot\pi r^2$

$\therefore H=\dfrac{j_D r}{2}=\dfrac{q_m\omega r}{2S}\cos\omega t$，$B=\mu_0 H=\dfrac{\mu_0 q_m\omega r}{2S}\cos\omega t$

11-1 一物体作简谐运动的曲线如图 11-1 所示，试求其运动方程。

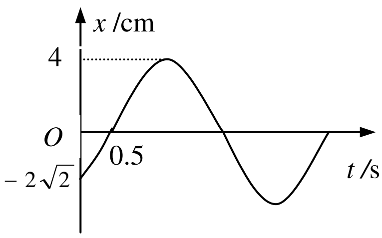


图 11-1

解：设振动方程为 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$，$A = 4\times10^{-2}\ \mathrm{m}$

由旋转矢量法知 $\varphi = -\dfrac{3}{4}\pi$，$\omega = \dfrac{\pi/4}{0.5} = \dfrac{\pi}{2}$，

$\therefore\quad x = 4\times10^{-2}\cos(\dfrac{\pi}{2}t - \dfrac{3}{4}\pi)$

11-2 一质量为 0.02kg 的弹簧振子沿 x 轴作谐振动，振幅为 0.12m，周期为 2s。当 t＝0 时，振子位于 0.06m 处，并向 x 轴正方向运动，试求：（1）试用旋转矢量法确定初位相并写出运动方程；（2）t＝0.5s 时的位置，速度和加速度；（3）从 x＝－0.06m 处向 x 轴负方向运动再回到平衡位置所需时间。

解：（1）由旋转矢量法知 $\varphi = -\dfrac{\pi}{3}$，$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$，　$\therefore\quad x = 0.12\cos(\pi t - \dfrac{\pi}{3})$

（2）$v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{dt}} = -0.12\pi\sin(\pi t - \dfrac{\pi}{3})$，$a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{dt}} = -0.12\pi^2\cos(\pi t - \dfrac{\pi}{3})$

$t = 0.5\,\mathrm{s}$，$x = 0.1039\,\mathrm{m}$，$v = -0.1885\,\mathrm{m/s}$，$a = 1.03\,\mathrm{m/s^2}$

（3）$t = \dfrac{\pi/3 + \pi/2}{\omega} = \dfrac{5\pi/6}{\pi} = \dfrac{5}{6}\mathrm{s}$

11-3 如图 11-3 所示，水平轻质弹簧一端固定，另一端所系轻绳绕过一滑轮垂挂一质量为 m 的物体。若弹簧劲度系数为 k，滑轮半径为 R，转动量为 J。（1）证明物体作简谐振动；（2）求振动周期；（3）设 t＝0 时弹簧无伸缩，物体由静止下落，写出物体的运动方程。

解：（1）取系统的静平衡位置为坐标原点，向下为正。

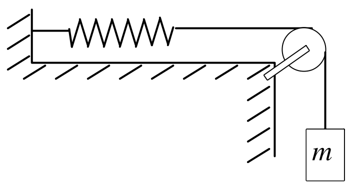


图 11-3

弹簧的初始变形量 $x_0 = \dfrac{mg}{k}$。

分别取重物、滑轮和弹簧为研究对象，则有

$$mg - T_1 = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\ (T_1 - T_2)R = J\beta,\ \beta = \frac{\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2}{R},\ T_2 = k(x - x_0)$$

由上述方程可解得：$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{k}{m + J/R^2}x = 0$　所以物体作简谐振动。

（2）$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m + J/R^2}}$，$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m + J/R^2}{k}}$

（3）$t = 0$，$v_0 = 0$，$A = x_0 = \dfrac{mg}{k}$，$\varphi = \pi$。$\therefore\quad x = \dfrac{mg}{k}\cos(\sqrt{\dfrac{k}{m + J/R^2}}\,t + \pi)$

11-4 一质量为m的小球在一个光滑的半径为R的球形碗底作微小振动，如图 11-4 所示。设t＝0 时，θ＝0，小球的速度为v_0，并向右运动。求在振幅很小的情况下，小球的运动方程。

解：在切向应用牛顿定律

$-mg\sin\theta = ma_t = mR\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$，$\sin\theta\approx\theta$，$\therefore\ \dfrac{d^2\theta}{dt^2}+\dfrac{g}{R}\theta = 0$

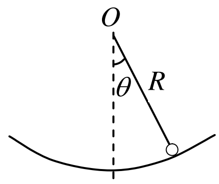


图 11-4

设运动方程为 $\theta=\theta_m\cos(\omega t+\varphi)$， $t=0$，$\theta=0$，且向右运动

$\therefore\ \varphi=-\dfrac{\pi}{2}$。$\theta_m=\sqrt{\theta_0^2+\dfrac{\theta_0'^2}{\omega^2}}=\sqrt{0+\dfrac{(v_0/R)^2}{g/R}}=\dfrac{v_0}{\sqrt{gR}}$

$\therefore\ \theta=\dfrac{v_0}{\sqrt{gR}}\cos(\sqrt{\dfrac{g}{R}}t-\dfrac{\pi}{2})$

11-5 一弹簧振子作简谐振动，振幅 A＝0.20m，如果弹簧的劲度系数 k＝2.0N/m，所系的物体质量 m＝0.50kg，求：（1）当动能和势能相等时，物体的位移是多少？（2）设 t＝0 时，物体在正最大位移处，则在一个周期内达到动能和势能相等处所需的时间是多少？

解：（1） $E_P=\dfrac{1}{2}kx^2=\dfrac{1}{2}E=\dfrac{1}{4}kA^2$，$x^2=\dfrac{1}{2}A^2$，$x=\pm\dfrac{A}{\sqrt{2}}=\pm\dfrac{0.2}{\sqrt{2}}=\pm0.14\,\mathrm{m}$

（2） $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}=\sqrt{\dfrac{2.0}{0.5}}=2\ \ 1/\mathrm{s}$。$t=\dfrac{\theta}{\omega}$

$\theta_1=\dfrac{\pi}{4}$，$t_1=0.39\,\mathrm{s}$；$\theta_2=\dfrac{3\pi}{4}$，$t_2=1.18\,\mathrm{s}$；$\theta_3=\dfrac{5\pi}{4}$，$t_3=1.96\,\mathrm{s}$；$\theta_4=\dfrac{7\pi}{4}$，$t_4=2.75\,\mathrm{s}$；

11-6 质量为 0.01kg的物体，以振幅 1.0×10^{-2}m作简谐运动，其最大加速度为 $4.0\mathrm{m\cdot s^{-2}}$。求：（1）振动的周期；（2）物体通过平衡位置时的总能量和动能；（3）当物体的位移大小为振幅的一半时，动能和势能各占总能量的多少？

解：（1） $a_m=A\omega^2$，$\omega=\sqrt{\dfrac{a_m}{A}}=\sqrt{\dfrac{4.0}{1\times10^{-2}}}=20\ \ 1/\mathrm{s}$，$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi}{20}=0.314\,\mathrm{s}$

（2）在平衡位置 $E=E_k=\dfrac{1}{2}mv_m^2=\dfrac{1}{2}m(A\omega)^2=\dfrac{1}{2}\times0.01\times(1.0\times10^{-2}\times20)^2=2.0\times10^{-4}\,\mathrm{J}$

（3） $E_P=\dfrac{1}{2}kx^2=\dfrac{1}{2}k(\dfrac{A}{2})^2=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}kA^2=\dfrac{1}{4}E$，$E_k=\dfrac{3}{4}E$

11-7 两个同方向的简谐振动，其运动方程分别为

$$x_1=0.05\cos(10t+\frac{3}{4}\pi),\quad x_2=0.06\cos(10t+\frac{1}{4}\pi)$$

（1）求它们合成振动的振幅和初相位；

（2）若另有一振动 $x_3=0.07\cos(10t+\varphi_3)$，则$\varphi_3$为多少时，$x_1+x_3$的振幅最大？又$\varphi_3$为多少时，$x_2+x_3$的振幅最小？

解：（1） $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$

$$=\sqrt{0.05^2+0.06^2+2\times0.05\times0.06\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{4})}=0.078\,\text{m}$$

$$\tan\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}=\frac{0.05\sin\frac{3\pi}{4}+0.06\sin\frac{\pi}{4}}{0.05\cos\frac{3\pi}{4}+0.06\cos\frac{\pi}{4}}=11.00\text{，}\quad\varphi=84.8^\circ=1.48\,\text{rad}$$

（2）$\Delta\varphi=\varphi_3-\varphi_1=2k\pi$，$\varphi_3=2k\pi+\frac{3}{4}\pi$，$k=0,\pm1,\pm2\cdots$；

$\Delta\varphi=\varphi_3-\varphi_2=(2k+1)\pi$，$\varphi_3=2k\pi+\frac{5}{4}\pi$，$k=0,\pm1,\pm2\cdots$。

11-8 有两个同方向同频率的简谐运动，其合成振动的振幅为 0.20m，合振动的相位与第一个振动的相位差为π/6，第一个振动的振幅为 0.173m，求第二个振动的振幅及两振动的相位差。

解：$A_2^2=A_1^2+A^2-2A_1A\cos\frac{\pi}{6}=0.173^2+0.2^2-2\times0.173\times0.2\times\cos30^\circ=0.01$，$A_2=0.1\,\text{m}$

$$A^2=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)$$

$$\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{A^2-(A_1^2+A_2^2)}{2A_1A_2}=\frac{0.2^2-(0.173^2+0.1^2)}{2\times0.173\times0.1}=0\text{，}\quad\varphi_2-\varphi_1=\frac{\pi}{2}\text{。}$$

11-9 图 11-9 表示两个同方向、同频率的简谐振动曲线，其频率为ω，分别求出（a）和（b）情形时：（1）合振动振幅；（2）合振动的振动方程。

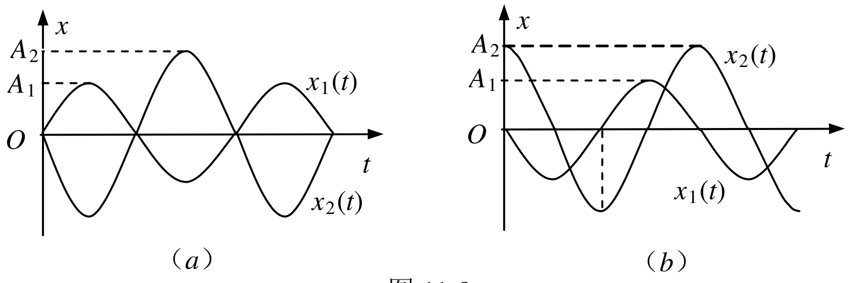


图 11-9

解：(a) $\varphi_2-\varphi_1=\pi$，$A=|A_2-A_1|$，$x=|A_2-A_1|\cos(\omega t+\frac{\pi}{2})\quad(A_2>A_1)$

(b) $\varphi_2-\varphi_1=-\frac{\pi}{2}$，$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2}$，$\varphi=\tan^{-1}\frac{A_1}{A_2}$，$x=\sqrt{A_1^2+A_2^2}\cos(\omega t+\tan^{-1}\frac{A_1}{A_2})$

11-10 质量为 0.4kg 的质点同时参与相互垂直的两个谐振动：

$$x_1=0.08\cos(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{6})\text{，}\quad x_2=0.06\cos(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{3})$$

求：（1）质点的轨迹方程；（2）质点在任一位置所受的力。

解：（1）设 $x=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$，$y=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$，消去$t$得

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

将 $A_1=0.08$，$A_2=0.06$，$\varphi_1=\dfrac{\pi}{6}$，$\varphi_2=-\dfrac{\pi}{3}$ 代入上式，则

$\dfrac{x^2}{0.08^2}+\dfrac{y^2}{0.06^2}=1$　正椭圆

（2）$F_x=ma_x=-mA_1\omega^2\cos(\omega t+\dfrac{\pi}{6})=-m\omega^2x$，$F_y=-m\omega^2y$

$$\vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}=-m\omega^2(x\vec{i}+y\vec{j})=-m\omega^2\vec{r}=-0.4\times\frac{\pi^2}{3^2}\vec{r}=-0.44\vec{r}$$

12-1 一横波沿绳子传播时的波动方程为 $y = 0.05\cos(10\pi t - 4\pi x)$ m，求：（1）此波的振幅、波速、频率和波长；（2）绳子上各质点振动的最大速度和最大加速度；（3）x＝0.2m 处的质点在 t＝1s 时的相位，它是原点处质点在哪一时刻的相位？（4）分别画出 t＝1s、1.25s、1.50s 时的波形。

解：（1） $y(x,t) = 0.05\cos(10\pi t - 4\pi x) = 0.05\cos[10\pi(t - \dfrac{x}{2.5})]$

$A = 0.05\,\mathrm{m}$，$v = 2.5\,\mathrm{m/s}$，$\nu = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{10\pi}{2\pi} = 5\,\mathrm{Hz}$，$\lambda = \dfrac{v}{\nu} = \dfrac{2.5}{5} = 0.5\,\mathrm{m}$

（2）$v = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -0.05\times 10\pi\sin(10\pi t - 4\pi x)$，$a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -0.05\times(10\pi)^2\cos(10\pi t - 4\pi x)$

$v_{\max} = 1.57\,\mathrm{m/s}$，$a_{\max} = 49.3\,\mathrm{m/s^2}$

（3）$\varphi_{x=0.2,t=1} = 10\pi\times 1 - 4\pi\times 0.2 = 9.2\pi$，$10\pi t = 9.2\pi$，$t = 0.92\,\mathrm{s}$

（4）略。

12-2 波源作简谐振动，周期为 1.0×10^{-2}s，以它经平衡位置向正方向运动时为时间起点，若此振动以u＝400 m/s的速度沿直线传播，求：（1）距波源为 8.0m处的质点P的运动方程和初相；（2）距波源为 9.0m和 10.0m处两点的相位差。

解：（1） $y_o = A\cos(\dfrac{2\pi}{0.01}t - \dfrac{\pi}{2}) = A\cos(200\pi t - \dfrac{\pi}{2})$，$y(x,t) = A\cos[200\pi(t - \dfrac{x}{400}) - \dfrac{\pi}{2}]$

$y_P = A\cos[200\pi(t - \dfrac{8}{400}) - \dfrac{\pi}{2}] = A\cos(200\pi t - \dfrac{9\pi}{2})$，$t = 0$，$\varphi_P = -\dfrac{9\pi}{2}$

（2）$\Delta\varphi = \varphi_9 - \varphi_{10} = -\dfrac{200\pi}{400}(9-10) = \dfrac{\pi}{2}$

12-3 图 12-3 为一沿 x 轴正向传播的平面余弦波在 t=1/3s 时的波形，其周期 T=2s。求：（1）O 点和 P 点的运动方程；（2）波动方程；（3）P 点离 O 点的距离。

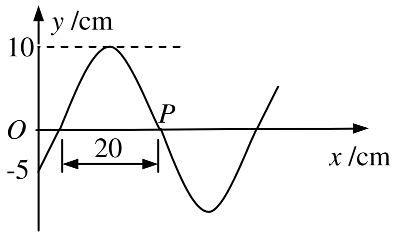


图 12-3

解：（1） $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \pi$，$t = \dfrac{1}{3}$s时，$\varphi_{t=\frac{1}{3}} = \dfrac{2}{3}\pi$

即 $\omega\times\dfrac{1}{3} + \varphi = \dfrac{2}{3}\pi$，$\varphi = \dfrac{1}{3}\pi$

同理 $\omega\times\dfrac{1}{3} + \varphi_P = -\dfrac{\pi}{2}$，$\varphi_P = -\dfrac{5\pi}{6}$

$y_o = 0.1\cos(\pi t + \dfrac{1}{3}\pi)$，$y_P = 0.1\cos(\pi t - \dfrac{5}{6}\pi)$

（2） $y_o = 0.1\cos[\pi(t - \dfrac{x}{0.2}) + \dfrac{1}{3}\pi]$

（3） $\pi(\dfrac{1}{3} - \dfrac{x}{0.2}) + \dfrac{1}{3}\pi = -\dfrac{\pi}{2}$，$x = 0.23\,\mathrm{m}$

12-4 一平面简谐波在媒质中以速度 u=30 cm/s 自左向右传播。已知波线上某点 A 的运动方程 $y = 3\cos(4\pi t - \pi)$ (SI)，D 点在 A 点的右方 9m 处，取 x 轴方向水平向右。（1）以 A 为坐标原点，试

写出波动方程，并写出 D 点振动的运动方程；（2）以 A 点左方 5m 处的 O 点为原点，写出波动方程和 D 点振动的运动方程。

解：（1） $y(x,t)=3\cos[4\pi(t-\dfrac{x}{0.3})-\pi]$， $y_D(t)=3\cos[4\pi(t-\dfrac{9}{0.3})-\pi]=3\cos(4\pi t-\pi)$

（2） $y_o=3\cos[4\pi(t+\dfrac{5}{0.3})-\pi]$

$$y(x,t)=3\cos[4\pi(t+\frac{5}{0.3}-\frac{x}{0.3})-\pi]=3\cos[4\pi(t-\frac{x-5}{0.3})-\pi]$$

$x=14\,\mathrm{m}$ 的 D 点： $y_D=3\cos[4\pi(t-\dfrac{14-5}{0.3})-\pi]=3\cos(4\pi t-\pi)$，与原点选择无关。

12-5 一正弦式声波，沿直径为 0.14m的圆柱形管行进，波的强度为 $9.0\times10^{-3}\ \mathrm{W/m^2}$，频率为 300Hz，波速为 300m/s。问：（1）波中的平均能量密度和最大能量密度为多少？（2）每两个相邻的、相位差为 2π 的同相面间有多少能量？

解：（1） $\overline{w}=\dfrac{I}{u}=\dfrac{9.0\times10^{-3}}{300}=3.0\times10^{-5}\ \mathrm{J/m^3}$

$$w=\rho A^2\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})，\ w_{\max}=\rho A^2\omega^2=2\overline{w}=6.0\times10^{-5}\ \mathrm{J/m^3}$$

（2） $u=\lambda\nu$， $\lambda=\dfrac{u}{\nu}=\dfrac{300}{300}=1\,\mathrm{m}$， $W=\overline{w}\Delta V=3.0\times10^{-5}\times\pi\times(\dfrac{0.14}{2})^2\times1=4.62\times10^{-7}\ \mathrm{J}$

12-6 一平面简谐声波的频率为 500Hz，在空气中（ ρ=1.3 kg/m^3）以速度u=340m/s传播。到达人耳时，振幅A=10^{-4}cm，试求人耳接收到声波的平均能量密度和声强。

解： $\overline{w}=\dfrac{1}{2}\rho A^2\omega^2=\dfrac{1}{2}\times1.3\times10^{-12}\times(2\pi\times500)^2=6.42\times10^{-6}\ \mathrm{J/m^3}$

$$I=\overline{w}u=6.42\times10^{-6}\times340=2.18\times10^{-3}\ \mathrm{W/m^2}$$

12-7 如图 12-7 所示，两个相干波源S_1、S_2，频率都是 100Hz，振幅均为 5cm，波速均为 10cm/s。已知波源S_1的初相位为 0，试求下列情况下，S_1、S_2连线的中垂线上P点的运动方程。（1）S_1、S_2的相位差为 0；（2）S_2相位超前S_1相位$\pi/2$；（3）S_1、S_2的相位差为π 。

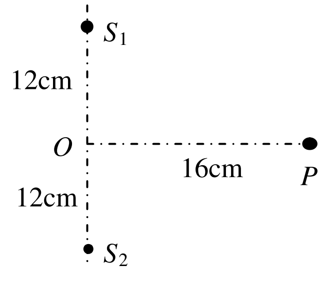


图 12-7

解：（1） $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1-2\pi\dfrac{r_2-r_1}{\lambda}=0$， $A=A_1+A_2=10\,\mathrm{cm}$

$$\varphi_P=\varphi_1-2\pi\frac{r_1}{\lambda}=-2\pi\times\frac{\sqrt{12^2+16^2}}{v/\nu}=-\frac{40\pi}{10/100}=-400\pi$$

$$y_P=A\cos(2\pi\nu t+\varphi_P)=10\cos[200\pi(t-2)]\mathrm{cm}$$

或 $\Delta t=\dfrac{r_1}{v}=\dfrac{20}{10}=2\,\mathrm{s}$， $y_P=A\cos[2\pi\nu(t-\Delta t)]=10\cos[200\pi(t-2)]\mathrm{cm}$

（2）$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1-2\pi\dfrac{r_2-r_1}{\lambda}=\dfrac{\pi}{2}$，$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2}=7.07\,\text{cm}$，由旋转矢量法 $\varphi_P=\dfrac{\pi}{4}$

$$y_P=A\cos(2\pi\nu t+\varphi_P)=7.07\cos(200\pi t+\frac{\pi}{4})\,\text{cm}$$

（3）$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1-2\pi\dfrac{r_2-r_1}{\lambda}=-\pi$，$A=0$，$y_P=0$

12-8 如图 12-8 所示，两个相距为D的相干波源S_1、S_2，它们振动的相位相同，因而探测器在S_1、S_2的垂直平分线上距波源L处的O点得相长干涉（即互相加强），若探测器往上移动，到距离O点为h的P处首次得到相消干涉。设L比D及h都大得多，求波长λ。（提示：$r_1+r_2\approx 2L$）

解：两相干波到达 P 点时的相位差

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1-2\pi\times\frac{r_2-r_1}{\lambda}=-2\pi\times\frac{r_2-r_1}{\lambda}$$

由题意知，$|\Delta\varphi|=\pi$，$2\pi\times\dfrac{r_2-r_1}{\lambda}=\pi$，$r_2-r_1=\dfrac{\lambda}{2}$

又 $r_2-r_1\approx D\tan\theta\approx\dfrac{Dh}{L}$，$\therefore\ \lambda=2(r_2-r_1)=\dfrac{2Dh}{L}$

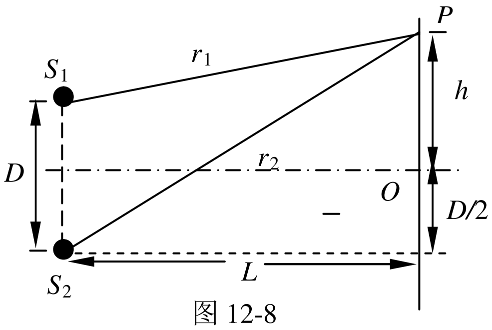


图 12-8

12-9 同一介质中的两个波源位于A、B两点，其振幅相等，频率都是 100Hz，B的相位比A超前π。若A、B两点相距为 30m，波在介质中的传播速度为 400m/s；问在AB连线上A的左侧和B的右侧能出现因干涉而静止的点吗？试求出AB连线上因干涉而静止的各点位置。

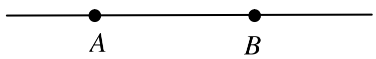


图 12-9

解：$\lambda=\dfrac{u}{\nu}=\dfrac{400}{100}=4\,\text{m}$

（1）A 的左侧距离 A 为x处

$$\Delta\varphi=(\varphi_B-2\pi\times\frac{30+x}{\lambda})-(\varphi_A-2\pi\times\frac{x}{\lambda})=\varphi_B-\varphi_A-2\pi\times\frac{30}{\lambda}=\pi-15\pi=-14\pi$$

所以 A 的左侧没有因干涉而静止的点。

（2）B 的右侧距离 B 为x处

$$\Delta\varphi=\varphi_B-\varphi_A+2\pi\times\frac{30}{\lambda}=\pi+15\pi=16\pi$$

所以 B 的右侧没有因干涉而静止的点。

（3）AB 之间距离 A 为x处

$$\Delta\varphi=\varphi_B-\varphi_A-2\pi\times\frac{30-2x}{\lambda}=\pi-15\pi+\pi x=\pi x$$

$\Delta\varphi=\pi x=(2k+1)\pi$，$x=2k+1$，$\therefore\ x=1,3,5,\cdots 29$ 处为静止点。

12-10 一弦上的驻波方程为 $y=3.0\times10^{-2}\cos(1.6\pi x)\cos(550\pi t)$（SI）。（1）如将此驻波看成是由传播方向相反，振幅及波速均相等的两列相干波叠加而成的，求它们的振幅和波速；（2）求相邻波节之间的距离；（3）求$t=3.0\times10^{-3}\,\text{s}$时位于$x=0.625\,\text{m}$处质点的振动速度。

解：（1） $y = 3.0\times10^{-2}\cos(1.6\pi x)\cos(550\pi t) = 2\times1.5\times10^{-2}\cos(\dfrac{\omega x}{u})\cos(\omega t)$

$A = 1.5\times10^{-2}$ m，$\omega = 550\pi$，$\dfrac{\omega}{u} = 1.6\pi$，$u = \dfrac{\omega}{1.6\pi} = \dfrac{550}{1.6} = 343.75$ m/s

（2）$\lambda = uT = u\dfrac{2\pi}{\omega} = 343.75\times\dfrac{2}{550} = 1.25$ m

相邻波节间的距离 $\Delta x = \dfrac{\lambda}{2} = 0.625$ m

（3）$v = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -3.0\times10^{-2}\times550\pi\cos(1.6\pi x)\sin(550\pi t)$

$x = 0.625$ m，$t = 3.0\times10^{-3}$ s 时：

$v = -3.0\times10^{-2}\times550\pi\cos(1.6\pi\times0.625)\sin(550\pi\times3\times10^{-3}) = -46.2$ m/s

12-11 设入射波方程为 $y_{入} = A\cos[2\pi(\dfrac{t}{T}+\dfrac{x}{\lambda})+\dfrac{\pi}{2}]$，在弦上传播并在 $x=0$ 处发生反射，反射点为自由端。试求（1）反射波的波动方程；（2）合成波方程；（3）波腹、波节的位置。

解：（1） $y_0 = A\cos(2\pi\dfrac{t}{T}+\dfrac{\pi}{2})$，自由端不存在半波损失，反射波为

$$y_{反} = A\cos\left[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\frac{\pi}{2}\right]$$

（2）合成波为

$$y = y_{入}+y_{反} = A\cos\left[2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda})+\frac{\pi}{2}\right]+A\cos\left[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= 2A\cos(\frac{2\pi x}{\lambda})\cos(\frac{2\pi t}{T}+\frac{\pi}{2})$$

（3）满足以下条件为波腹：$\dfrac{2\pi x}{\lambda} = k\pi$，$x = \dfrac{k}{2}\lambda$，$k = 0,1,2\cdots$。

满足以下条件为波节：$\dfrac{2\pi x}{\lambda} = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$，$x = (2k+1)\dfrac{\lambda}{4}$，$k = 0,1,2\cdots$。

12-12 如图 12-12 所示，设从 O 点发出一沿 x 轴正向传播的平面简谐波，其频率为 ν，振幅为 A，波速为 u，当 O 点运动到正方向最大位移处开始计时。（1）写出波动方程；（2）距 O 点 L 处有一反射壁，在反射处有半波损失，写出反射波方程；（3）设 L 和波长 λ 之比为 100，求 $x = \dfrac{L}{2}$ 处的振动规律。

解：（1）由旋转矢量法知 $\varphi_o = 0$，$y_0 = A\cos(2\pi\nu t)$

波动方程 $y_1(x,t) = A\cos 2\pi\nu(t-\dfrac{x}{u})$

（2）$y_2(x,t) = A\cos[2\pi\nu(t-\dfrac{2L-x}{u})+\pi]$

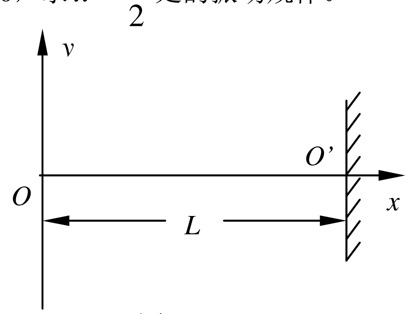


图 12-12

（3） $y = y_1 + y_2 = A\cos 2\pi(\nu t - \dfrac{x}{\lambda}) + A\cos[2\pi(\nu t - \dfrac{2L - x}{\lambda}) + \pi]$

$$= A\cos 2\pi(\nu t - \frac{x}{\lambda}) + A\cos[2\pi(\nu t + \frac{x}{\lambda} - 200) + \pi]$$

$$= A\cos 2\pi(\nu t - \frac{x}{\lambda}) - A\cos 2\pi(\nu t + \frac{x}{\lambda})$$

$x = \dfrac{L}{2}$， $y = A\cos 2\pi(\nu t - \dfrac{L}{2\lambda}) - A\cos 2\pi(\nu t + \dfrac{L}{2\lambda})$

$$= A\cos 2\pi(\nu t - 50) - A\cos 2\pi(\nu t + 50) = 0$$

12-13 用安装在火车站铁道旁的仪器，测得火车驶近车站时和离开车站时火车汽笛的频率分别为 410Hz 和 380Hz，求火车速度。（已知空气中的声速为 u=330m/s）

解：设测得火车进站时的频率为ν_1，出站时为ν_2，则 $\nu_1 = \dfrac{u}{u - v_s}\nu$， $\nu_2 = \dfrac{u}{u + v_s}\nu$

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{u + v_s}{u - v_s}，\quad v_s = \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 + \nu_2}u = \frac{400 - 380}{400 + 380} \times 330 = 12.5\,\text{m/s}$$

12-14 一静止波源向一飞行物发射频率为ν_s＝30kHz的超声波，飞行物以速度v离开波源飞出，站在波源处相对波源静止的观察者测得波源发射波与飞行物反射波两振动合成的拍频为ν_b＝100Hz，已知声速u＝340m/s，试计算飞行物的运动速度。

解：观察者接收到直接来自波源的的波的频率 $\nu_1 = \nu_s$

观察者接收到由飞行物反射的波的频率 $\nu_2 = \dfrac{u - v}{u + v}\nu_s$

注：相当于波源和观察者同时相对于媒介运动（背离）

反射物接收到的频率 $\nu' = \dfrac{u - v}{u}\nu_s$

反射物(波源)背离观察者运动时观察者接收到的频率

$$\nu'' = \frac{u}{u + v}\nu' = \frac{u - v}{u}\frac{u}{u + v}\nu_s = \frac{u - v}{u + v}\nu_s$$

合成拍的频率 $\nu_b = \left|\nu_1 - \nu_2\right| = \nu_s(1 - \dfrac{u - v}{u + v}) = \nu_s\dfrac{2v}{u + v}$

$$v = \frac{u\nu_b}{2\nu_s - \nu_b} = \frac{100 \times 340}{60000 - 100} = 0.57\,\text{m/s}$$

13-1

解：$\Delta x=\frac{D\lambda}{d}$，$\lambda=\frac{\Delta x\times d}{D}=\frac{2.27\times 0.6}{2.5\times 10^{3}}=5.45\times 10^{-4}\ \text{mm}=545\,\text{nm}$

13-2

解：（1）$\Delta x=\frac{D\lambda}{d}=\frac{2\times 5500\times 10^{-10}}{2\times 10^{-4}}=5.5\times 10^{-3}\ \text{m}$

（2）$x_{10}-x_{-10}=10\frac{D\lambda}{d}-(-10\frac{D\lambda}{d})=20\Delta x=20\times 5.5\times 10^{-3}=0.11\text{m}$

（3）零级明纹向上移动。

光程差变化量 $\Delta\delta=(n-1)e=(1.58-1)\times 6.6\times 10^{-6}=3.828\times 10^{-6}\ \text{m}$

$\frac{\Delta\delta}{\lambda}=\frac{3.828\times 10^{-6}}{5500\times 10^{-10}}=6.96\approx 7$，所以移到原来的第七级明纹处。

13-3

解：（1）光程差$\delta=(l_1+\overline{S_1P_0})-(l_2+\overline{S_2P_0})=l_1-l_2-d\frac{x}{D}=3\lambda-d\frac{x}{D}$

$\delta=0$时， $x_0=\frac{3\lambda D}{d}$

（2）$\delta=3\lambda-d\frac{x}{D}=k\lambda$，$x=(3-k)\frac{\lambda D}{d}$，$\Delta x=x_{k+1}-x_k=\frac{\lambda D}{d}$

13-4

解：应在S_2上覆盖云母片，所带来的光程变化量为3λ

$(n-1)e=3\lambda$，$e=\frac{3\lambda}{n-1}=\frac{3\times 589\times 10^{-9}}{1.58-1}=3.05\times 10^{-6}\ \text{m}$

13-5

解：（1）正面观察 $\delta=2e\sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2 i}+\frac{\lambda}{2}=2en_2+\frac{\lambda}{2}$

相干相长时 $\delta=2en_2+\frac{\lambda}{2}=k\lambda$，$\lambda=\frac{4en_2}{2k-1}=\frac{4\times 3800\times 1.33}{2k-1}=\frac{20216}{2k-1}$

$k=2$，$\lambda=6739\times 10^{-10}\ \text{m}$（红）；$k=3$，$\lambda=4043\times 10^{-10}\ \text{m}$（蓝）。

（2）背面观察 $\delta=2en_2=k\lambda$，$\lambda=\frac{2en_2}{k}=\frac{2\times 3800\times 1.33}{k}=\frac{10108}{k}$

$k=2$，$\lambda=5054\times 10^{-10}\ \text{m}$（绿）

13-6

解：（1）$\delta=2e\sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2 i}+\frac{\lambda}{2}=k\lambda$

$$e=\frac{(2k-1)\lambda}{4\sqrt{n_1^2-n_1^2\sin i}}=\frac{(2k-1)\times 5000}{4\sqrt{1.33^2-0.5^2}}=1014\times(2k-1)\text{，}\ k=1\text{，}\ e_{\min}=1014\times 10^{-10}\ \text{m}$$

（2）$\delta=2e\sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2 i}+\dfrac{\lambda}{2}=2en_2+\dfrac{\lambda}{2}=k\lambda$，$\lambda=\dfrac{4en_2}{2k-1}=\dfrac{4\times 1014\times 1.33}{2k-1}=\dfrac{5394}{2k-1}$

$k=1$，$\lambda=5394\times 10^{-10}$ m（绿）

13-7

解：当$\delta=2ne=(2k+1)\dfrac{\lambda}{2}$时，反射光干涉相消，$e=\dfrac{\lambda_1}{4n}(2k_1+1)$

同理，$e=\dfrac{\lambda_2}{4n}(2k_2+1)$，$k_2=k_1-1$，$e=\dfrac{\lambda_2}{4n}(2k_1-1)$

$\dfrac{2k_1-1}{2k_1+1}=\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}=\dfrac{5000}{7000}$，解得$k_1=3$，　$e=\dfrac{5000\times 10^{-10}}{4\times 1.3}(2\times 3+1)=6731\times 10^{-10}$ m

13-8

解：$\delta=2ne+\dfrac{\lambda}{2}=k\lambda$，$e=\dfrac{\lambda}{4n}(2k-1)$，$\delta'=2ne+\dfrac{\lambda'}{2}=(2k'+1)\dfrac{\lambda'}{2}$，$e=\dfrac{k'\lambda'}{2n}=\dfrac{2k'\lambda'}{4n}$

$k=k'$，$k=\dfrac{\lambda}{2(\lambda-\lambda')}=\dfrac{630}{2\times(630-525)}=3$，$e=\dfrac{\lambda}{4n}(2k-1)=\dfrac{630}{4\times 1.33}(2\times 3-1)=592.1\text{nm}$

13-9

解：（1）$\Delta e=\dfrac{\lambda}{2}=\dfrac{6800\times 10^{-10}}{2}=3400\times 10^{-10}$ m

$$\Delta l=\frac{\Delta e}{\sin\theta}\approx\frac{\Delta e}{\theta}=\frac{3400\times 10^{-10}}{4.760\times 10^{-5}/12\times 10^{-2}}=8.571\times 10^{-4}\ \text{m}$$

（2）$N=\dfrac{l_0}{\Delta l}+1=\dfrac{12\times 10^{-2}}{8.571\times 10^{-4}}+1=141$

（3）$\Delta e_P=4\times\dfrac{\lambda}{2}=2\times 6800\times 10^{-10}=1.36\times 10^{-6}$ m，$\Delta D=2\Delta e_P=2.72\times 10^{-6}$ m

13-10

解：（1）不平处是凹。　（2）$\dfrac{\lambda/2}{b}=\dfrac{H}{a}$，$H=\dfrac{a}{b}\dfrac{\lambda}{2}$

13-11

解：明环的半径为 $r_k=\sqrt{\dfrac{(2k-1)\lambda R}{2}}$，$d_k^2=2(2k-1)\lambda R$，$d_{k+5}^2=2[2(k+5)-1]\lambda R$

$$\therefore \quad \lambda = \frac{d_{k+5}^2 - d_k^2}{20R} = \frac{4.6^2 - 3.0^2}{20 \times 1.03 \times 10^3} = 590.3\,\text{nm}$$

13-12

解：$r^2 = R^2 - (R-e)^2 = 2eR - e^2$，$e << R$，$\therefore\ e \approx \frac{r^2}{2R}$，$\delta = 2(e+e_0) + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$ （暗）

$\frac{r^2}{R} + 2e_0 = k\lambda$，$r^2 = (k\lambda - 2e_0)R$，$\therefore\quad r_k = \sqrt{(k\lambda - 2e_0)R}$ 其中 $k > \frac{2e_0}{\lambda}$

13-13

解：（1）$n_0 < n_2 < n_1$，不存在半波损失

$\delta = 2n_2 e$，$e = 0$，$\delta = 0$，所以边缘为亮条纹，看到亮暗相间的同心圆环形干涉条纹。

$\delta_{\max} = 2 \times 1.2 \times 12000 = 28800$，$\delta_{\max} \neq k\lambda$，$\delta_{\max} \neq (2k+1)\frac{\lambda}{2}$，中心介于亮暗之间。

$\frac{\delta_{\max}}{\lambda} = \frac{28800}{6000} = 4.8$，可看到 0,1,2,3,4 共五条亮纹。

$e_k = \frac{k\lambda}{2n_2} = \frac{k \times 6000}{2 \times 1.2}$，$e_1 = 0$，$e_2 = 2500\,\text{A}$，$e_3 = 5000\,\text{A}$，$e_4 = 7500\,\text{A}$，$e_5 = 10000\,\text{A}$

（2）条纹变稀，级数减少，吞入。

13-14

解：$\Delta d = N\frac{\lambda}{2}$，$\lambda = \frac{2\Delta d}{N} = \frac{2 \times 0.3220}{1204} = 5.349 \times 10^{-4}\,\text{mm} = 534.9\,\text{nm}$

14-1

解：$\Delta x_0 = \dfrac{2f\lambda}{a}$，$\lambda = \dfrac{\Delta x_0 \times a}{2f} = \dfrac{2.5\times 1.0}{2\times 2.0\times 10^3} = 0.625\times 10^{-3}\ \text{mm} = 625\,\text{nm}$

14-2

解：$a\sin\theta = (2k_1+1)\dfrac{\lambda_1}{2}$，$a\sin\theta = (2k_2+1)\dfrac{\lambda_2}{2}$，$\lambda_1 = \dfrac{(2k_2+1)\lambda_2}{2k_1+1} = \dfrac{(2\times 2+1)\times 6000}{2\times 3+1} = 4286\,\text{A}$

14-3

解：$a\sin\theta - a\sin\varphi = k\lambda$ 时为暗条纹，$\sin\theta = \dfrac{k\lambda}{a} + \sin\varphi$，$\theta = \sin^{-1}(\dfrac{k\lambda}{a} + \sin\varphi)$

14-4

解：（1）$a\sin\theta = (2k+1)\dfrac{\lambda}{2}$，$\lambda = \dfrac{2a\sin\theta}{2k+1} \approx \dfrac{2\times 0.6\times 1.4}{(2k+1)\times 400} = \dfrac{4.2\times 10^{-3}}{2k+1}\text{mm}$

$k=3$，$\lambda_1 = 6000\,\text{A}$；或 $k=4$，$\lambda_2 = 4667\,\text{A}$

（2）$k=3$ 或 $k=4$

（3）半波带数为$(2k+1)$，即 7 或 9。

（4）$a\sin\theta = 2k\dfrac{\lambda}{2} = k\lambda$，$\lambda = \dfrac{a\sin\theta}{k} = \dfrac{0.6\times 1.4}{400k} = \dfrac{2.1\times 10^{-3}}{k}\text{mm}$

$k=3$，$\lambda_1 = 7000\,\text{A}$；$k=4$，$\lambda_2 = 5250\,\text{A}$；$k=5$，$\lambda_2 = 4200\,\text{A}$

14-5

解：$\theta_R = \theta_1 \approx \sin\theta_1 = 1.22\dfrac{\lambda}{d}$，$\theta_1 \approx \dfrac{D}{L}$，$\therefore L = \dfrac{Dd}{1.22\lambda} = \dfrac{1.2\times 5\times 10^{-3}}{1.22\times 550\times 10^{-9}} = 8.9\times 10^3\ \text{m}$

14-6

解：（1）双缝干涉第 k 级明纹满足 $d\sin\theta = k\lambda$

第 k 级明纹在屏上的位置 $x_k = f\tan\theta \approx f\sin\theta = f\dfrac{k\lambda}{d}$

$\therefore \Delta x = x_{k+1} - x_k = \dfrac{f\lambda}{d} = \dfrac{50\times 10^{-2}\times 4800\times 10^{-10}}{0.1\times 10^{-3}} = 2.4\times 10^{-3}\ \text{m}$

（2）$\Delta x_0 = 2f\tan\theta_1 \approx 2f\theta_1 = \dfrac{2f\lambda}{a} = \dfrac{2\times 50\times 10^{-2}\times 4800\times 10^{-10}}{0.02\times 10^{-3}} = 2.4\times 10^{-2}\ \text{m}$

（3）$d\sin\theta = k\lambda$，$a\sin\theta = k'\lambda$，$k = \dfrac{d}{a}k' = \dfrac{0.1}{0.02}k' = 5k'$，$k'=1$ 时，$k=5$ 缺级。

所以在单缝衍射中央包线内观察到 $0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4$ 共 9 条主极大条纹。

14-7

解：（1）$d\sin\theta = k\lambda$，$\sin\theta = \dfrac{k\lambda}{d} = \dfrac{k\times 589.3\times 10^{-9}}{\dfrac{1}{300}\times 10^{-3}} = 0.1768k$，$\theta = \sin^{-1}(0.1768k)$

$k=\pm 1$，$\theta_1 = \pm 10.183°$；$k=\pm 2$，$\theta_2 = \pm 20.708°$；$k=\pm 3$，$\theta_3 = \pm 32.034°$；

$k=\pm 4$，$\theta_4 = \pm 45.01°$；$k=\pm 5$，$\theta_5 = \pm 62.129°$。共出现 11 条明纹。

（2）$d(\sin\varphi \pm \sin\theta) = k\lambda$

当入射光线与衍射光线同侧时，$k_{max} = \dfrac{d(\sin\varphi + \sin\theta)}{\lambda} = \dfrac{\dfrac{1}{300}\times 10^{-3}(\sin 30° + \sin 90°)}{589.3\times 10^{-9}} = 8.5$

当入射光线与衍射光线异侧时，$k_{max} = \dfrac{d(\sin\varphi - \sin\theta)}{\lambda} = \dfrac{\dfrac{1}{300}\times 10^{-3}(\sin 30° - \sin 90°)}{589.3\times 10^{-9}} = -2.8$

所以最多能看到 8 级；看到$0,+1,+2,+3,+4,+5,+6,+7,+8,-1,-2$共 11 级。

14-8

解：（1）$d\sin\theta = k\lambda$，$\theta = \sin^{-1}(\dfrac{k\lambda}{d})$，$\theta_1 = \sin^{-1}(\dfrac{\lambda}{d}) = \sin^{-1}\dfrac{5460\times 10^{-10}}{\dfrac{1}{300}\times 10^{-3}} = 9.43°$

（2）$k_{max} = \dfrac{d}{\lambda} = \dfrac{\dfrac{1}{300}\times 10^{-3}}{5460\times 10^{-10}} \approx 6$

$k = \dfrac{d}{a}k' = 2k'$时缺级，即$k = 2,4,6$缺级，所以只能看到$0,\pm 1,\pm 3,\pm 5$共 7 条。

14-9

解：（1）$d\sin\theta = k\lambda$，$d = \dfrac{k\lambda}{\sin\theta} = \dfrac{2\times 6000}{0.2} = 60000\,\text{A}$

（2）$\dfrac{d}{a} = 4$，$a = \dfrac{d}{4} = 15000\,\text{A}$

（3）$k_{max} = \dfrac{d}{\lambda} = \dfrac{60000}{6000} = 10$，$k = \dfrac{d}{a}k' = 4k'$，即 4、8 缺级

所以只能看到$0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\pm 5,\pm 6,\pm 7,\pm 9$共 15 条。

14-10

解：$2d\sin\varphi = k\lambda$，$d = \dfrac{k\lambda}{2\sin\varphi} = \dfrac{3\times 1.2}{2\sin 25°} = 4.26\,\text{A}$

14-11

解：$2d\sin\varphi = k\lambda$，$\lambda_1 = \dfrac{k_2\lambda_2\sin\varphi_1}{k_1\sin\varphi_2} = \dfrac{3\times 0.97\times \sin 30°}{1\times \sin 60°} = 1.68\,\text{A}$

15-1

解：设入射光强为I_0，$I_1=\dfrac{1}{2}\cos^2 60°$，$I_0=\dfrac{2I_1}{\cos^2 60°}=8I_1$，$I_2=\dfrac{1}{2}I_0\cos^2 30°\cos^2 30°=2.25I_1$

15-2

解：$I_1=\dfrac{1}{2}I_{01}\cos^2 30°$，　$I_2=\dfrac{1}{2}I_{02}\cos^2 60°$，$I_1=I_2$，$\therefore\dfrac{I_{01}}{I_{02}}=\dfrac{\cos^2 60°}{\cos^2 30°}=\dfrac{1}{3}$

15-3

解：设I_0、I_1分别为自然光和线偏振光的强度，$I_{\max}=\dfrac{1}{2}I_0+I_1$，$I_{\min}=\dfrac{1}{2}I_0$，$\therefore\dfrac{I_0}{I_1}=\dfrac{1}{2}$

15-4

解：以第一、二个偏振片的偏振化方向重合时为计时零点，则

$$I_2=I_1\cos^2\omega t，I_3=I_2\cos^2(90-\omega t)=I_1\cos^2\omega t\sin^2\omega t=I_1(\cos\omega t\sin\omega t)^2$$

$$\cos\varphi\sin\varphi=\frac{1}{2}\sin 2\varphi，\sin^2\varphi=\frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)，\therefore\ I_3=\frac{1}{8}I_1(1-\cos 4\omega t)$$

15-5

解：（1）$\tan i_0=\dfrac{n_2}{n_1}$，　$n_2=n_1\tan i_0=\tan 58°=1.60$

（2）$\tan i_0=\dfrac{n_2}{n_1}=n_{21}=\dfrac{1.60}{1.33}=1.20$，$i_0=50.26°$

15-6

解：（1）$i_0+\gamma=90°$，$\gamma=90°-i_0=32°$

（2）$\tan i_0=\dfrac{n_2}{n_1}=n_2$，$n_2=\tan 58°=1.60$

15-7

解：（1）入射角为布氏角，反射光为线偏振光，振动方向垂直与入射面，所以无反射光。

（2）$\tan i_1=\cot i_0=\dfrac{n_1}{n_2}$，$i_1$也是布氏角，所以也无反射光。

（3）图略。反射光、折射光均为线偏振光，振动方向均垂直与入射面。

16-1

解：设地球为 K 系，飞船为 K' 系

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{0 - \frac{0.999c}{c^2}\times 10^6}{\sqrt{1-0.999^2}} = -\frac{0.999\times 10^6}{3.0\times 10^8\times\sqrt{1-0.999^2}} = -7.45\times 10^{-2}\ \mathrm{s}$$

16-2

解：设较快的飞船为 K 系，较慢的飞船为 K' 系，则 $u=-0.98c$

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{20 + 0.98c\times\frac{20}{c}}{\sqrt{1-0.98^2}} = 199\,\mathrm{m}$$

16-3

解：设地球为 K 系，飞船为 K' 系

（1）$\Delta t' = \dfrac{L'}{v'}$。　　　（2）$\Delta t = \dfrac{\Delta t' + \frac{u}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \dfrac{\frac{L'}{v'} + \frac{u}{c^2}L'}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = (\dfrac{1}{v'} + \dfrac{u}{c^2})\dfrac{L'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$

16-4

解：（1）设航天器为 K 系，飞船为 K' 系，则 $u=-1.2\times 10^8\ \mathrm{m/s}$，$v_x = 1.0\times 10^8\ \mathrm{m/s}$

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1-uv_x/c^2} = \frac{1.0\times 10^8 + 1.2\times 10^8}{1+1.2\times 1.0/3^2} = 1.94\times 10^8\ \mathrm{m/s}$$

（2）根据光束不变原理，激光束相对于宇宙飞船的速度仍为 c。

16-5

解：设某参考系为 K 系，尺子甲为 K' 系，且向右（x 正向）运动。尺子乙相对于甲的速度为 v'

$$v' = \frac{v_x - u}{1-uv_x/c^2} = \frac{-v-v}{1+v^2/c^2} = \frac{-2v}{1+v^2/c^2}$$

再由长度收缩原理，在甲上测得乙的长度为 l

$$l = l_0\sqrt{1-(v'/c)^2} = l_0\sqrt{1-(\frac{2v}{1+v^2/c^2})\frac{1}{c^2}} = l_0\frac{1-v^2/c^2}{1+v^2/c^2}$$

16-6

解：设地面为 K 系，火车为 K' 系

$$\Delta x = L = L_0\sqrt{1-u^2/c^2}$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{-\frac{u}{c^2}L_0\sqrt{1-u^2/c^2}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = -\frac{u}{c^2}L_0 = \frac{-100\times 10^3\times 0.3\times 10^3}{3600\times(3\times 10^8)^2} = -9.26\times 10^{-14}\ \mathrm{s}$$

16-7

解：（1）地面为 K 系，飞船为 K' 系，飞船观测到桥的长度为 L

$$L = L_0\sqrt{1-u^2/c^2} = 200\times\sqrt{1-0.6^2} = 160\,\text{m}$$

（2）$\Delta x' = \dfrac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \dfrac{200-0.6c\times 8}{\sqrt{1-0.6^2}} = \dfrac{200-0.6\times 3\times 10^8\times 8}{0.8} = -1.8\times 10^9\,\text{m}$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \dfrac{u}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{8-\dfrac{0.6c}{c^2}\times 200}{0.8} = 10\,\text{s}$$

16-8

解：不能击中火车。

地面上观察火车前端到达 B 和闪电击中 A 是同时发生的，但由于长度收缩车的尾部已进入隧道。

而在火车上观察两者不是同时发生，火车前端先到达 B，闪电后击中 A，此时车尾已进入隧道。

16-9

解：（1）$\vec{F}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\,\vec{p}$，考虑到一维情形，有 $F\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\,p$，$qE\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}(\dfrac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}})$，积分

$\int_0^t qE\,\mathrm{d}t = \int_0^v \mathrm{d}(\dfrac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}})$，$qEt = \dfrac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$，解得：$v = \dfrac{qEt}{\sqrt{m_0^2 c^2 + q^2E^2t^2}}c$

（2）$F\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\,p = \mathrm{d}(m_0 v')$，$v' = \dfrac{qEt}{m_0}$，$v = \dfrac{v'}{\sqrt{1+(v'/c)^2}}$

16-10 已知 A、B 两个粒子的静止质量均为m_0，其中 A 粒子静止，B 粒子以$6m_0c^2$的动能与 A 粒子相碰撞并合成为一粒子(无能量释放)，求：(1)B 粒子和合成粒子的总能量；(2)B 粒子的动量；(3)复合粒子的速度；(4)复合粒子的静质量。

解：(1) $E_B = m_Bc^2 = E_{BK} + m_0c^2 = 6m_0c^2 + m_0c^2 = 7m_0c^2$

碰撞前后能量守恒 $E = Mc^2 = E_B + E_A = 7m_0c^2 + m_0c^2 = 8m_0c^2$

(2) $E_B^2 = E_0^2 + p_B^2c^2$，$p_B = \dfrac{1}{c}\sqrt{E_B^2 - E_0^2} = \dfrac{1}{c}m_0c\sqrt{49-1} = \sqrt{48}m_0c$

(3) $p_B = m_Bv_B = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-v_B^2/c^2}}v_B = \sqrt{48}m_0c$，$v_B = \sqrt{\dfrac{48}{49}}c$

碰撞前后动量守恒 $m_Bv_B = MV$，$V = \dfrac{m_Bv_B}{M} = \dfrac{7m_0}{8m_0}\sqrt{\dfrac{48}{49}}c = \dfrac{\sqrt{3}}{2}c$

(4) $M = \dfrac{M_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$，$M_0 = M\sqrt{1-V^2/c^2} = 8m_0\sqrt{1-3/4} = 4m_0$

16-11

解：$E_0 = m_0 c^2$，$m_0 = \dfrac{E_0}{c^2} = \dfrac{1.7769 \times 10^9 \times 1.6 \times 10^{-19}}{(3 \times 10^8)^2} = 3.16 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$

$$mc^2 = E_0 + E_k\,,\quad m = \frac{E_0 + E_k}{c^2} = \frac{(1.7769 + 3.2) \times 10^9 \times 1.6 \times 10^{-19}}{(3 \times 10^8)^2} = 8.85 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,,\quad v = \sqrt{1 - (m_0/m)^2}\,c = \sqrt{1 - (3.16/8.85)^2} \times 3 \times 10^8 = 2.8 \times 10^8\ \mathrm{m/s}$$

$$p = mv = 8.85 \times 10^{-27} \times 2.8 \times 10^8 = 2.48 \times 10^{-18}\ \mathrm{kg \cdot m/s}$$

16-12

解：（1）$\dfrac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 2m_0 v$，$v = \dfrac{\sqrt{3}}{2}c = 0.866c$

（2）$E_k = mc^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 (\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1)$，其中 $\beta = \dfrac{v}{c}$。根据题意，有

$$m_0 c^2 (\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1) = 2 \times \frac{1}{2} m_0 v^2\,,\quad \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 = \beta^2$$，解得 $\beta = 0.786$，$v = 0.786c$

16-13

解：$E_k = mc^2 - m_0 c^2$

$$\Delta E_k = \Delta mc^2 = m_0 c^2 (\frac{1}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}})$$

$$= m_0 c^2 (\frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{2 \times 5.0 \times 10^7}{3 \times 10^8})^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{5.0 \times 10^7}{3 \times 10^8})^2}}) = 0.046 m_0 c^2$$

又 $\Delta E_k = qU$，$U = \dfrac{\Delta E_k}{q} = \dfrac{0.046 \times 9.11 \times 10^{-31} \times (3 \times 10^8)^2}{1.6 \times 10^{-19}} = 2.36 \times 10^4\ \mathrm{V}$

17-1 在加热黑体过程中，其单色辐出度的峰值波长是由$0.69\,\mu\mathrm{m}$变化到$0.50\,\mu\mathrm{m}$，求总辐出度改变为原来的多少倍？

解：由 $M_B(T)=\sigma T^4$，$\lambda_m T=b$ 得 $\dfrac{M_B(T_2)}{M_B(T_1)}=(\dfrac{\lambda_{m1}}{\lambda_{m2}})^4=(\dfrac{0.69}{0.5})^4=3.63$

17-2

解：（1）$\lambda_m=\dfrac{b}{T}=\dfrac{2.898\times10^{-3}}{10^7}=2.898\times10^{-10}\,\mathrm{m}$

（2）$E=h\nu=h\dfrac{c}{\lambda}=6.63\times10^{-34}\times\dfrac{3\times10^8}{2.898\times10^{-10}}=6.86\times10^{-16}\,\mathrm{J}$

17-3

解：（1）$M_B(T)=\sigma T^4$，$T=\sqrt[4]{\dfrac{M_B(T)}{\sigma}}=\sqrt[4]{\dfrac{473.6/0.001}{5.67\times10^{-8}}}=1700\,\mathrm{K}$

（2）$\lambda_m=\dfrac{b}{T}=\dfrac{2.898\times10^{-3}}{1700}=1.70\times10^{-6}\,\mathrm{m}$

（3）$\dfrac{M_B(T_2)}{M_B(T_1)}=(\dfrac{T_2}{T_1})^4=2^4=16$，$M_B(T_2)=16M_B(T_1)=16\times\dfrac{473.6}{0.001}=7.578\times10^6\,\mathrm{W/m^2}$

17-4 钾的光电效应红限波长为$\lambda_0=0.62\,\mu\mathrm{m}$。求：(1)钾的逸出功；(2)在波长$\lambda=330\,\mathrm{nm}$的紫外光照射下，钾的截止电压。

解：（1）$A=h\nu_0=h\dfrac{c}{\lambda_0}=6.63\times10^{-34}\times\dfrac{3\times10^8}{0.62\times10^{-6}}=3.21\times10^{-19}\,\mathrm{J}=2\,\mathrm{eV}$

（2）$eU_a=\dfrac{1}{2}mv^2=h\nu-A$

$$U_a=\frac{h\nu-A}{e}=\frac{h\dfrac{c}{\lambda}-A}{e}=\frac{6.63\times10^{-34}\times\dfrac{3\times10^8}{330\times10^{-9}}-3.21\times10^{-19}}{1.60\times10^{-19}}=1.76\,\mathrm{V}$$

17-5 铝的逸出功为$4.2\,\mathrm{eV}$。今用波长为$200\,\mathrm{nm}$的紫外光照射到铝表面上，发射的光电子的最大初动能为多少？截止电压为多大？铝的红限波长是多大？

解：（1）$\dfrac{1}{2}mv^2=h\nu-A=h\dfrac{c}{\lambda}-A=\dfrac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^8}{200\times10^{-9}}-4.2\times1.6\times10^{-19}=3.23\times10^{-19}\,\mathrm{J}\approx2\,\mathrm{eV}$

（2）$eU_a=\dfrac{1}{2}mv^2$，$U_a=\dfrac{2\,\mathrm{eV}}{e}=2\,\mathrm{V}$

（3）$\nu_0=\dfrac{A}{h}=\dfrac{4.2\times1.6\times10^{-19}}{6.63\times10^{-34}}=1.014\times10^{15}\,\mathrm{Hz}$

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = \frac{3\times10^8}{1.014\times10^{15}} = 2.96\times10^{-7}\ \mathrm{m} = 296\,\mathrm{nm}$$

17-6 在光电效应实验中，对某金属，当入射光频率为2.2×10^{15} Hz时，截止电压为$6.6\,\mathrm{V}$，入射光频率为4.6×10^{15} Hz时，截止电压为$16.5\,\mathrm{V}$。试由上述数据计算普朗克常数h。

解：$h\nu = \frac{1}{2}mv^2 + A = eU_a + A$

$$h = \frac{e(U_{a2}-U_{a1})}{\nu_2-\nu_1} = \frac{1.6\times10^{-19}\times(16.5-6.6)}{(4.6-2.2)\times10^{15}} = 6.6\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}$$

17-7 在康普顿散射中，入射 X 射线的波长为3×10^{-3} nm，反冲电子的速率为$0.6c$。求散射光子的波长和散射方向。

解：（1）由能量守恒 $h\nu_0 + m_0c^2 = h\nu + mc^2$

$$\nu = \frac{h\nu_0 + m_0c^2 - mc^2}{h} = \frac{h\dfrac{c}{\lambda_0} + m_0c^2(1-\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}})}{h}$$

$$= \frac{6.63\times10^{-34}\times\dfrac{3\times10^8}{3\times10^{-12}} + 9.11\times10^{-31}\times9\times10^{16}\times(1-\dfrac{1}{0.8})}{6.63\times10^{-34}} = 6.91\times10^{19}\ \mathrm{Hz}$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3\times10^8}{6.91\times10^{19}} = 4.34\times10^{-12}\ \mathrm{m} = 4.34\times10^{-3}\ \mathrm{nm}$$

（2）$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \dfrac{h}{m_0c}(1-\cos\varphi) = \lambda_c(1-\cos\varphi)$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda_c} = 1 - \frac{(4.34-3)\times10^{-3}}{2.43\times10^{-3}} = 0.449\text{，}\ \varphi = 63^\circ25'$$

17-8 一波长$\lambda = 2.0\,\mathring{\mathrm{A}}$的 X 光照射到碳块上，由于康普顿效应，频率改变了0.04%。求：(1)散射光子的散射角；(2)反冲电子获得的能量。

解：（1）$\dfrac{\nu_0-\nu}{\nu_0} = 0.04\%$，$\nu = (1-0.04\%)\nu_0$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{c}{(1-0.04\%)\nu_0} = \frac{\lambda_0}{1-0.04\%} = \frac{2}{0.9996} = 2.0008\,\mathring{\mathrm{A}}$$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda_c} = 1 - \frac{2.0008-2}{2.43\times10^{-2}} = 0.967\text{，}\ \varphi = 14.74^\circ$$

（2）由能量守恒 $h\nu_0 + m_0c^2 = h\nu + mc^2$

$$mc^2 - m_0c^2 = h\nu_0 - h\nu = h\Delta\nu = 6.63\times10^{-34}\times\frac{3\times10^8}{2\times10^{-10}}\times0.04\%$$

$$= 3.978\times10^{-19}\ \mathrm{J}$$

17-9 在康普顿散射实验中，入射的 X 射线波长 $\lambda = 0.1\mathring{\mathrm{A}}$，如果光的散射角是 $90°$，求：

(1)康普顿效应 $\Delta\lambda$；

(2)反冲电子的出射角多大？

(3)电子获得的能量和动量。

解：（1）$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \dfrac{h}{m_0c}(1-\cos\varphi) = 2.43\times10^{-12}\ \mathrm{m}$

（2）由动量守恒 $\dfrac{h}{\lambda_0} = \dfrac{h}{\lambda}\cos\varphi + mv\cos\theta$（$x$ 方向），$0 = \dfrac{h}{\lambda}\sin\varphi - mv\sin\theta$（$y$ 方向）

$$\therefore\quad \tan\theta = \frac{\frac{h}{\lambda}\sin\varphi}{\frac{h}{\lambda_0} - \frac{h}{\lambda}\cos\varphi} = \frac{\lambda_0}{\lambda}\sin 90° = \frac{0.1}{0.1+0.0243} = 0.8045\text{，}\quad \theta = 38.8°$$

（3）$mc^2 - m_0c^2 = h\nu_0 - h\nu = hc(\dfrac{1}{\lambda_0} - \dfrac{1}{\lambda}) = 6.63\times10^{-34}\times3\times10^8\times10^{10}(\dfrac{1}{0.1} - \dfrac{1}{0.1243})$

$$= 3.89\times10^{-15}\ \mathrm{J}$$

$$mv\sin\theta = \frac{h}{\lambda}\sin\varphi\text{，}\quad mv = \frac{h\sin\varphi}{\lambda\sin\theta} = \frac{6.63\times10^{-34}}{0.1243\times10^{-10}\times\sin 38.8°} = 8.48\times10^{-23}\ \mathrm{kg\cdot m/s}$$

17-10 处于第一激发态 $(n=2)$ 的氢原子，如果用可见光 $(380\,\mathrm{nm}\sim750\,\mathrm{nm})$ 照射能否使之电离？

解：$E_n = -\dfrac{1}{n^2}(\dfrac{me^4}{8\varepsilon_0^2h^2}) = -\dfrac{13.6}{n^2}\mathrm{eV}$，$E_2 = -\dfrac{13.6}{2^2} = -3.4\,\mathrm{eV}$

可见光光子的最大能量

$$E_{\max} = h\nu_{\max} = h\frac{c}{\lambda_{\min}} = 6.63\times10^{-34}\times\frac{3\times10^8}{380\times10^{-9}} = 5.23\times10^{-19}\ \mathrm{J} = 3.27\,\mathrm{eV}$$

$E_{\max} = 3.27\,\mathrm{eV} < |E_2|$，所以不能使其电离。

17-11 在气体放电管中，用能量为 $12.2\,\mathrm{eV}$ 的电子轰击处于基态的氢原子，试求氢原子所能发射的光谱线波长。

解：$E_n - E_1 = 13.6\times(1-\dfrac{1}{n^2})$

$n=2$，$E_2 - E_1 = 13.6\times(1-\dfrac{1}{2^2}) = 10.2\,\text{eV} < 12.2\,\text{eV}$，可以跃迁

$n=3$，$E_3 - E_1 = 13.6\times(1-\dfrac{1}{3^2}) = 12.09\,\text{eV} < 12.2\,\text{eV}$，可以跃迁

$E_3 - E_2 = 13.6\times(\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{3^2}) = 1.89\,\text{eV} < 12.2\,\text{eV}$，可以跃迁

$n=4$，$E_4 - E_1 = 13.6\times(1-\dfrac{1}{4^2}) = 12.75\,\text{eV} > 12.2\,\text{eV}$，不能跃迁

$$\lambda_1 = \frac{c}{\nu_1} = \frac{hc}{E_2 - E_1} = \frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^8}{10.2\times1.6\times10^{-19}} = 1.219\times10^{-7}\ \text{m}$$

$$\lambda_2 = \frac{c}{\nu_2} = \frac{hc}{E_3 - E_1} = \frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^8}{12.09\times1.6\times10^{-19}} = 1.028\times10^{-7}\ \text{m}$$

$$\lambda_3 = \frac{c}{\nu_3} = \frac{hc}{E_3 - E_2} = \frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^8}{1.89\times1.6\times10^{-19}} = 6.577\times10^{-7}\ \text{m}$$

17-12 用能量为$15\,\text{eV}$的光子从处于基态的氢原子中激发出光电子，求光电子在远离开原子核时以多大的速率运动？（提示：当电子$E_k << m_0c^2$时才可以不考虑相对论效应，$m_0c^2 = 0.51\text{MeV}$）

解：$E_k = \dfrac{1}{2}m_0v^2 = (15-13.6)\times1.6\times10^{-19} = 2.24\times10^{-19}\ \text{J}$

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m_0}} = \sqrt{\frac{2\times2.24\times10^{-19}}{9.11\times10^{-31}}} = 7.01\times10^5\ \text{m/s}$$

17-13 计算动能分别为$1.0\,\text{KeV}$、$1.0\,\text{MeV}$、$1.0\,\text{GeV}$的电子的德布罗意波长。

解：（1）$\because\ E_k = 1.0\,\text{keV} << m_0c^2 = 0.51\text{MeV}$，$E_k = \dfrac{1}{2}m_0v^2 = \dfrac{p^2}{2m_0}$，$p = \sqrt{2m_0E_k}$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0E_k}} = \frac{6.63\times10^{-34}}{\sqrt{2\times9.11\times10^{-31}\times1.0\times10^3\times1.6\times10^{-19}}} = 3.9\times10^{-11}\ \text{m}$$

（2）$E_k = mc^2 - m_0c^2$，$m = \dfrac{E_k + m_0c^2}{c^2} = \dfrac{(1.0+0.51)\times10^6\times1.6\times10^{-19}}{9\times10^{16}} = 2.6\times10^{-30}\ \text{kg}$

$$E_k = \frac{p^2}{m+m_0},\quad p = \sqrt{(m+m_0)E_k}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{(m+m_0)E_k}} = \frac{6.63\times10^{-34}}{\sqrt{(26+9.11)\times10^{-31}\times1.0\times10^6\times1.6\times10^{-19}}} = 8.85\times10^{-13}\ \text{m}$$

（3）$m=\dfrac{E_k+m_0c^2}{c^2}\approx\dfrac{1.0\times10^9\times1.6\times10^{-19}}{9\times10^{16}}=1.78\times10^{-27}\text{ kg}$

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{\sqrt{(m+m_0)E_k}}\approx\frac{6.63\times10^{-34}}{\sqrt{1.78\times10^{-27}\times1.0\times10^9\times1.6\times10^{-19}}}=1.24\times10^{-15}\text{ m}$$

17-14 一束带电粒子经 206V 电压加速后，测得其德布罗意波长为2.0×10^{-3} nm，已知该粒子所带的电荷量与电子电荷量相等，求这粒子的质量。

解：$E_k=qU=1.6\times10^{-19}\times206=3.296\times10^{-17}\text{ J}$

$$E_k=\frac{p^2}{2m_0}=\frac{h^2}{2m_0\lambda^2}，\ m_0=\frac{h^2}{2\lambda^2E_k}=\frac{(6.63\times10^{-34})^2}{2\times(2.0\times10^{-12})^2\times3.296\times10^{-17}}=1.67\times10^{-27}\text{ kg}$$

17-15 一个电子的动能等于它的静能，试求该电子的速率和德布罗意波长。

解：$E_k=mc^2-m_0c^2=m_0c^2$，$m=2m_0$

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}=2m_0，\ \beta=\frac{v}{c}=\frac{\sqrt{3}}{2}，\ v=\frac{\sqrt{3}}{2}c=2.6\times10^8\text{ m/s}$$

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{6.63\times10^{-34}}{2m_0v}=\frac{6.63\times10^{-34}}{2\times9.11\times10^{-31}\times2.6\times10^8}=1.4\times10^{-12}\text{ m}$$

17-16

解：（1）$\Delta x\cdot\Delta p=\dfrac{\hbar}{2}=\dfrac{h}{4\pi}$，$\Delta x=\dfrac{h}{4\pi m\Delta v}=\dfrac{6.63\times10^{-34}}{4\pi\times9.11\times10^{-31}\times10^{-2}}=5.79\times10^{-3}\text{ m}$

（2）$\Delta x=5.79\times10^{-3}\times\dfrac{9.11\times10^{-31}}{10^{-13}}=5.27\times10^{-20}\text{ m}$

（3）$\Delta x=5.79\times10^{-3}\times\dfrac{9.11\times10^{-31}}{10^{-4}}=5.27\times10^{-29}\text{ m}$

17-17

解：利用公式 $\Delta x\cdot\Delta p\geq h$ 估算，$\Delta p=m\Delta v\geq\dfrac{h}{\Delta x}$，$\Delta v\geq\dfrac{h}{m\Delta x}=\dfrac{h}{m\lambda}=\dfrac{p}{m}=\dfrac{mv}{m}=v$，$\therefore\Delta v\geq v$

17-18

解：$p=\dfrac{h}{\lambda}$，$\Delta p=\dfrac{h}{\lambda^2}\Delta\lambda$，$\Delta x\cdot\Delta p\geq\dfrac{h}{4\pi}$

$$\Delta x\geq\frac{h}{4\pi\Delta p}=\frac{\lambda^2}{4\pi\Delta\lambda}=\frac{\lambda^2}{4\pi\times\lambda\times10^{-6}}=\frac{\lambda}{4\pi\times10^{-6}}=\frac{3.0\times10^{-7}}{4\pi\times10^{-6}}=0.0239\text{ m}$$

17-19

解：$w=\int_0^{a/3}|\phi_n|^2\,\mathrm{d}x=\frac{2}{a}\int_0^{a/3}\sin^2\frac{n\pi}{a}x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int_0^{a/3}(1-\cos\frac{2n\pi}{a}x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}-\frac{1}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3}$

（1）$n=1$，$w_1=\frac{1}{3}-\frac{1}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{3}=0.196$

（2）$n=2$，$w_2=\frac{1}{3}-\frac{1}{4\pi}\sin\frac{4\pi}{3}=0.402$

17-20

解：（1）$\int_0^{\infty}|\phi(x)|^2\,\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}A^2x^2e^{-2\lambda x}\,\mathrm{d}x=A^2\int_0^{\infty}x^2e^{-2\lambda x}\,\mathrm{d}x=A^2\times\frac{2}{(2\lambda)^3}=1$

$A=\sqrt{4\lambda^3}=2\lambda^{3/2}$

（2）$|\phi(x)|^2=\begin{cases}4\lambda^3x^2e^{-2\lambda x} & (x\ge 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$

（3）$\frac{\mathrm{d}|\phi(x)|^2}{\mathrm{d}x}=8\lambda^3xe^{-2\lambda x}-8\lambda^4x^2e^{-2\lambda x}=0$，$x=\frac{1}{\lambda}$

牛顿运动定律

2-1 质量分别为m_A=100kg，m_B=60kg的A、B两物体，用绳连接组成一系统，装置如图 2-1。三角劈固定在水平地面上，两斜面的倾角分别为α=30^0，β=60^0。如物体与斜面间无摩擦，滑轮和绳的质量忽略不计，问（1）系统将向哪边运动？（2）系统的加速度多大？（3）绳中的张力多大？

解：(1) 、(2) 假设 A 下滑

$$\begin{cases} m_A g\cos 60° - T_A = m_A a \\ T_B - m_B g\cos 30° = m_B a \\ T_A = T_B \end{cases} \quad 得$$

$$a = \frac{m_A g\cos 60° - m_B g\cos 30°}{m_A + m_B} = -0.12\,\mathrm{m/s^2}$$，系统将向右边运动。

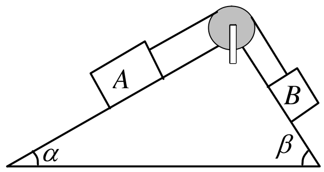


图 2-1

(3) $T = m_A g\cos 60° - m_A a = 100\times(9.8\times\cos 60° + 0.12) = 502\,\mathrm{N}$

2-2 在光滑水平面上固定了一个半径为R的圆环，一个质量为m的小球A以初速度v_0靠圆环内壁作圆周运动，如图 2-2 所示，小球与环壁的动摩擦系数为μ ，求小球任一时刻的速率。

解：设圆环内壁给小球的向心力为 F_n，则

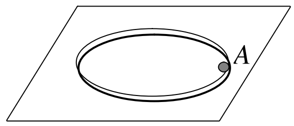


图 2-2

法向：$F_n = ma_n = m\dfrac{v^2}{R}$，　　切向：$-\mu F_n = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$

$\therefore\ -\mu\dfrac{v^2}{R} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，$\displaystyle\int_{v_0}^{v}\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v}^2} = -\int_0^t\frac{\mu}{\boldsymbol{R}}\mathbf{d}\boldsymbol{t}$，$v = \dfrac{v_0}{1+\dfrac{\mu v_0}{R}t}$

2-3 如图 2-3 所示，已知m_1>m_2，不计滑轮和绳子质量，不计摩擦。求（1）图 2-3（a）和（b）中绳子的张力和物体的加速度；（2）图 2-3（c）为一电梯加速上升的情形，求绳子的张力和物体相对于电梯的加速度。

解：(1) (a) $\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a \\ T_2 - m_2 g = m_2 a \\ T_1 = T_2 = T \end{cases}$ 得 $a = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g$

$$T = m_2(g+a) = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}g$$

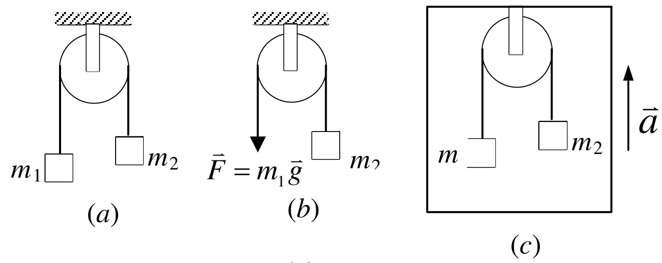


图 2-3

(b) $\begin{cases} T - m_2 g = m_2 a \\ T = F = m_1 g \end{cases}$ 得 $a = \dfrac{m_1 - m_2}{m_2}g$

(2) 设物体相对于电梯的加速度大小为a'，则 $\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1(a' - a) \\ T_2 - m_2 g = m_2(a' + a) \\ T_1 = T_2 = T \end{cases}$

得 $a' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(g+a)$　$T = m_2(g + a' + a) = \dfrac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}(g+a)$

2-4 一物体自地球表面以速率v_0 竖直上抛。假定空气对物体阻力的数值为F_r=kmv^2，其中m为物体的质量，k为常数。求（1）该物体能上升的高度；（2）物体返回地面时速度的大小。

解：(1) 以地面为原点，竖直向上为 y 轴正向，由牛顿定律

$$-mg-kmv^2=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}，\quad \int_0^y \mathrm{d}y=-\int_{v_0}^{v}\frac{v\,\mathrm{d}v}{g+kv^2}，\quad y=\frac{1}{2k}\ln\frac{g+kv_0^2}{g+kv^2}$$

物体到最高点时，$v=0$，得 $y_{\max}=\frac{1}{2k}\ln\frac{g+kv_0^2}{g}$

(2) 下落时，$-mg+kmv^2=mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$，$\int_{y_{\max}}^{y}\mathrm{d}y=-\int_0^v\frac{v\,\mathrm{d}v}{g-kv^2}$，$y-y_{\max}=\frac{1}{2k}\ln\frac{g-kv^2}{g}$，

$v=\sqrt{\frac{g(1-e^{2k(y-y_{\max})})}{k}}$， 物体到最地面时，$y=0$，得 $v_{y=0}=v_0\left(1+\frac{kv_0^2}{g}\right)^{-\frac{1}{2}}$

2-5 一总长为 l 的链条，放在光滑的桌面上，其中一端下垂，下垂长度为 a，如图所示。假定开始时链条静止，求链条刚滑离桌边时的速度。

解：设链条质量为 m，质量线密度为 $\lambda=\frac{m}{l}$，下垂长度为 y 时速度为 v，由牛顿定律

$$\lambda yg=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}，\quad \lambda g\int_a^y y\,\mathrm{d}y=m\int_0^v v\,\mathrm{d}v，$$

$$v=\sqrt{\frac{\lambda g(y^2-a^2)}{m}}=\sqrt{\frac{g(y^2-a^2)}{l}}$$

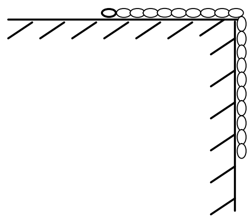


图 2-5

当 $y=l$ 时链条滑离桌边，$v_{y=l}=\sqrt{\frac{g(l^2-a^2)}{l}}$

另解：用机械能守恒定理，取桌面为重力势能的零点，则

$$-\frac{1}{2}a^2\lambda g-(-\frac{1}{2}l^2\lambda g)=\frac{1}{2}\lambda lv^2，\quad v_{y=l}=\sqrt{\frac{g(l^2-a^2)}{l}}$$

惯性力

2-6 在题 2-3（2）中，试以加速运动的电梯为参考系，利用惯性力的方法求绳子的张力和物体相对于电梯的加速度。

解：$\begin{cases} m_1g+(m_1a)-T_1=m_1a' \\ T_2-m_2g-(m_2a)=m_2a' \\ T_1=T_2=T \end{cases}$，得 $a'=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}(g+a)$ $\quad T=m_2(g+a'+a)=\frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}(g+a)$

2-7 如图 2-7 所示，三角形劈以加速度 $\vec{a}$ 沿水平面向右运动时，光滑斜面上的质量为 m 的物体恰能静止在上面，求物体对斜面的压力。

解：以三角形劈为参考系(非惯性系)，m 相对它的加速度 $a'=0$

$\begin{cases} N\sin\theta-ma=0 \\ N\cos\theta-mg=0 \end{cases}$ 得 $N=m\sqrt{a^2+g^2}$

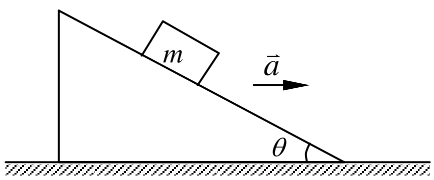


图 2-7

冲量和动量定理

3-1 质量m=10kg的物体在力F_x=30+4t N的作用下沿x轴运动，试求（1）在开始 2s内此力的冲量I;（2）如冲量I=300N·s，此力的作用时间是多少？（3）如物体的初速v_1=10m/s，在t=6.86s时，此物体的速度v_2为多少？

解：(1) $I_x = \int_0^2 F_x \,\mathrm{d}t = \int_0^2 (30+4t)\,\mathrm{d}t = 68\,\mathrm{N \cdot s}$

(2) $I_t = \int_0^t F_x \,\mathrm{d}t = \int_0^t (30+4t)\,\mathrm{d}t = 30t + 2t^2 = 300$，$t = 6.86\,\mathrm{s}$

(3) $I = p_2 - p_1 = mv_2 - mv_1$，$t = 6.86\,\mathrm{s}$，$I = 300\,\mathrm{N \cdot s}$，$v_2 = \dfrac{1}{m}(I - mv_1) = \dfrac{1}{10}(300 - 10\times 10) = 20\,\mathrm{m/s}$

3-2 质量 m=1kg 的物体沿 x 轴运动，所受的力如图 3-2 所示。t=0 时，质点静止在坐标原点，试用牛顿定律和动量定理分别求解 t=7s 时此质点的速度。

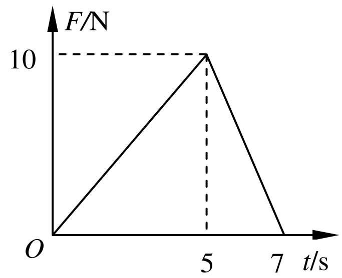


图 3-2

解：(1) $F = \begin{cases} 2t & 0 \le t \le 5 \\ -5t + 35 & 5 \le t \le 7 \end{cases}$

$0 \le t \le 5$，$m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 2t$，$m\int_0^{v_1}\mathrm{d}v = 2\int_0^5 t\,\mathrm{d}t$，$v_1 = \dfrac{25}{m} = 25(\mathrm{m/s})$

$5 \le t \le 7$，$m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -5t + 35$，$m\int_{v_1}^{v_2}\mathrm{d}v = \int_5^7 (-5t+35)\,\mathrm{d}t$，

$v_2 = 35(\mathrm{m/s})$

(2) $I = \int_0^7 F\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}(7\times 10) = 35(\mathrm{N\cdot s})$，$I = mv_2 - mv_1 = mv_2$，$v_2 = 35(\mathrm{m/s})$

动量守恒定律

3-3 两球质量分别为m_1=3.0g， m_2=5.0g，在光滑的水平桌面上运动，用直角坐标xOy描述运动，两者速度分别为$\vec{v}_1 = 8\vec{i}$ cm/s，$\vec{v}_2 = (8\vec{i} + 16\vec{j})$ cm/s，若碰撞后两球合为一体，则碰撞后两球速度$\vec{v}$的大小为多少？与x轴的夹角为多少？

解：系统动量守恒 $(m_1 + m_2)\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 64\vec{i} + 80\vec{j}$，$\vec{v} = 8\vec{i} + 10\vec{j}$

$v = |\vec{v}| = \sqrt{8^2 + 10^2} = 12.8\,\mathrm{cm/s}$，与 x 轴夹角 $\alpha = \arctan\dfrac{10}{8} = 51.3°$

3-4 如图 3-4 所示，质量为 M 的 1/4 圆弧滑槽停在光滑的水平面上，一个质量为 m 的小物体自圆弧顶点由静止下滑。求当小物体滑到底时，圆弧滑槽在水平面上移动的距离。

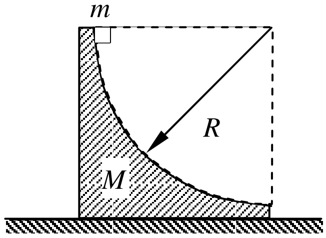


图 3.4

解：系统在水平方向动量守恒 $mv + M(-V) = 0$，$mv = MV$

两边对整个下落过程积分 $m\int_0^t v\,\mathrm{d}t = M\int_0^t V\,\mathrm{d}t$

令 s 和 S 分别为 m 和 M 在水平方向的移动距离，则

$s = \int_0^t v\,\mathrm{d}t$，$S = \int_0^t V\,\mathrm{d}t$，$ms = MS$。又 $s = R - S$，所以 $S = \dfrac{m}{m+M}R$

另解：m 相对于 M 在水平方向的速度 $v' = v + V = \dfrac{m+M}{M}v$。对整个下落过程积分

$\int_0^t v'\,\mathrm{d}t = \dfrac{m+M}{M}\int_0^t v\,\mathrm{d}t$，$R = \dfrac{m+M}{M}s$，$M$ 在水平方向的移动距离 $S = R - s = \dfrac{m}{m+M}R$

质心　质心运动定律

3-5 求半径为 R 的半圆形匀质薄板的质心（如图 3-3 所示）。

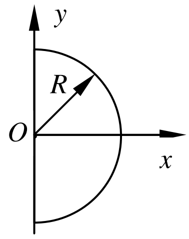


图 3-5

解：设薄板质量为 m，面密度为 $\sigma=\dfrac{2m}{\pi R^2}$。由质量分布对称性知，质心在 x 轴上。

在距 o 点为 x 的地方取一宽度为 $\mathrm{d}\,x$ 细长条，对应的质量

$\mathrm{d}\,m=2\sigma\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}\,x$，由质心定义

$$x_c=\frac{\int_0^R x\,\mathrm{d}\,m}{m}=\frac{2\sigma}{m}\int_0^R x\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}\,x=\frac{4R}{3\pi}$$

3-6 一根长为 L，质量均匀的软绳，挂在一半径很小的光滑钉子上，如图 3-6 所示。开始时，BC=b，试用质心的方法证明当 BC=2L/3 时，绳的加速度为 a=g/3，速率为 $v=\sqrt{\dfrac{2g}{L}(-\dfrac{2}{9}L^2+bL-b^2)}$。

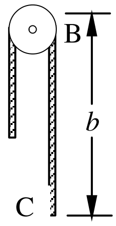


图 3-6

解：由软绳在运动方向的受力和牛顿定律

$$\lambda g[y-(L-y)]=\lambda La\,,\quad a=\frac{2y-L}{L}g\,,\quad a_{y=\frac{2}{3}L}=\frac{1}{3}g$$

$$a=\frac{2y-L}{L}g=\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t}=\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,y}\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}=v\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,y}\,,\quad \int_0^v v\,\mathrm{d}\,v=\frac{g}{L}\int_b^{\frac{2}{3}L}(2y-L)\,\mathrm{d}\,y$$

$$v=\sqrt{\frac{2g}{L}\left(-\frac{2}{9}L^2+bL-b^2\right)}$$

另解(用质心)

当 $BC=b$ 时，链系的质心为 $y_c=\dfrac{(L-b)\lambda\dfrac{L-b}{2}+b\lambda\dfrac{b}{2}}{m}=\dfrac{L^2-2Lb+2b^2}{2L}$

当 $BC=\dfrac{2}{3}L$ 时，链系的质心为 $y_c'=\dfrac{5}{18}L$

又重力的功等于物体动能的增量

$$mg(y_c'-y_c)=\frac{1}{2}mv^2\,,\quad v^2=2g(y_c'-y_c)\,,\quad v=\sqrt{\frac{2g}{L}\left(-\frac{2}{9}L^2+bL-b^2\right)}$$

角动量（动量矩）及其守恒定律

3-7 已知质量为 m 的人造卫星在半径为 r 的圆轨道上运行，其角动量大小为 L，求它的动能、势能和总能量。（引力势能 $E_p=-G\dfrac{m_1m_2}{r}$，G 为万有引力常数）

解：$L=rmv$，$v=\dfrac{L}{mr}$，$E_k=\dfrac{1}{2}mv^2=\dfrac{L^2}{2mr^2}$

设地球质量 M_e，$E_p=-G\dfrac{mM_e}{r}$，由牛顿定律 $G\dfrac{mM_e}{r^2}=m\dfrac{v^2}{r}$，$G\dfrac{mM_e}{r}=mv^2$，$E_p=-\dfrac{L^2{}_e}{mr^2}$

$$\therefore\quad E=E_k+E_p=\frac{L^2}{2mr^2}-\frac{L^2}{mr^2}=-\frac{L^2}{2mr^2}$$

3-8 质量为 m 的质点在 xOy 平面内运动，其位置矢量为 $\vec{r}=a\cos\omega t\vec{i}+b\sin\omega t\vec{j}$，其中 a、b、ω 为常量，求（1）质点动量的大小；（2）质点相对于原点的角动量。

解：(1) $\vec{v}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=-a\omega\sin\omega t\vec{i}+b\omega\cos\omega t\vec{j}$

$\vec{p}=m\vec{v}=m\omega(-a\sin\omega t\vec{i}+b\cos\omega t\vec{j})$，$p=|\vec{p}|=m\omega\sqrt{a^2\sin^2\omega t+b^2\cos\omega t}$

(2) $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=(a\cos\omega t\vec{i}+b\sin\omega t\vec{j})\times m\omega(-a\sin\omega t\vec{i}+b\cos\omega t\vec{j})=abm\omega\vec{k}$

3-9 质量均为 m 的两个小球 a 和 b 固定在长为 l 的刚性轻质细杆的两端，杆可在水平面上绕 O 点轴自由转动，杆原来静止。现有一个质量也为 m 的小球 c，垂直于杆以水平速度 $\vec{v}_0$ 与 b 球碰撞（如图 3-9 所示），并粘在一起。求（1）碰撞前 c 球相对于 O 的角动量的大小和方向；（2）碰撞后杆转动角速度。

解：(1) $\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}_0$ 方向垂直纸面向下。$L=rmv_0=\dfrac{3}{4}lmv_0$

(2) 系统对 o 点的角动量守恒。设碰撞后杆的角速度为 ω，则

$\dfrac{3}{4}lmv_0=\dfrac{3}{4}l\times(2m)\times(\dfrac{3}{4}l\omega)+\dfrac{1}{4}l\times m\times(\dfrac{1}{4}l\omega)$，$\omega=\dfrac{12v_0}{19l}$

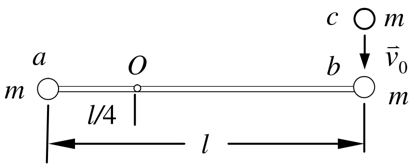


图 3.9

功和动能定理

3-10 一人从 10m深的井中提水，已知水桶与水共重 10kg，求（1）匀速上提时，人所作的功；（2）以a=0.1m/s^{2}匀加速上提时，人所作的功；（3）若水桶匀速上提过程中，水以 0.2kg/m的速率漏水，则人所作的功为多少？

解：(1) $F-mg=0$，$F=mg$，$A=\int_0^{10}F\,\mathrm{d}y=\int_0^{10}mg\,\mathrm{d}y=980\,\mathrm{J}$

(2) $F-mg=ma$，$F=m(g+a)$，$A=\int_0^{10}F\,\mathrm{d}y=\int_0^{10}m(g+a)\,\mathrm{d}y=990\,\mathrm{J}$

(3) $F-(m-0.2y)g=0$，$F=(m-0.2y)g$，$A=\int_0^{10}F\,\mathrm{d}y=\int_0^{10}g(m-0.2y)\,\mathrm{d}y=882\,\mathrm{J}$

3-11 质量m=6kg的物体，在力F_x=3+4x N的作用下，自静止开始沿x轴运动了 3m，若不计摩擦，求（1）力F_x所作的功；（2）此时物体的速度；（3）此时物体的加速度。

解：(1) $A=\int_0^3F_x\,\mathrm{d}x=\int_0^3(3+4x)\,\mathrm{d}x=27\,\mathrm{J}$

(2) 由动能定理 $A=\dfrac{1}{2}mv_2^3+\dfrac{1}{2}mv_1^2=\dfrac{1}{2}mv_2^2$，$v_2=\sqrt{\dfrac{2A}{m}}=3\,\mathrm{m/s}$

(3) 由牛顿定律 $a_x=\dfrac{F_x}{m}=\dfrac{3+4\times3}{6}=2.5\,\mathrm{m/s^2}$

3-12 质量为m的物体自静止出发沿x轴运动，设所受外力为F_x=bt，b为常量，求在T s内此力所作的功。

解：由牛顿定律 $F=bt=m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，$\int_0^t bt\,\mathrm{d}t=m\int_0^v\mathrm{d}v$，$v=\dfrac{bt^2}{2m}$，$t=T$ 时，$v=\dfrac{bT^2}{2m}$

由动能定理 $A=\dfrac{1}{2}mv^2-\dfrac{1}{2}mv_0^2=\dfrac{1}{2}mv^2=\dfrac{b^2T^4}{8m}$

另解：$\mathrm{d}x = v\,\mathrm{d}t = \dfrac{bt^2}{2m}\mathrm{d}t$，$A = \int F_x\,\mathrm{d}x = \int_0^T bt\dfrac{bt^2}{2m}\mathrm{d}t = \dfrac{b^2T^4}{8m}$

保守力的功和势能

3-13 质量为 m 的小球系在长为 l 的轻绳一端，绳的另一端固定，把小球拉至水平位置，从静止释放，如图 3-13 所示，当小球下摆 θ 角时，（1）绳中张力 $\vec{T}$ 对小球做功吗？合外力 $\vec{F} = \vec{T} + m\vec{g}$ 对小球所做的功为多少？（2）在此过程中，小球势能的增量为多少？并与（1）的结果比较；（3）利用动能定理求小球下摆 θ 角时的速率。

解：(1) $\vec{T} \perp \mathrm{d}\vec{r}$，$A_T = \int \vec{T}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = 0$，张力 $\vec{T}$ 对小球不做功。

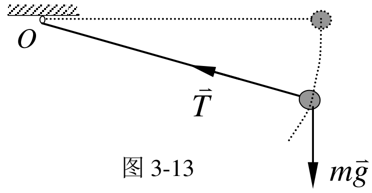


图 3-13

$$A_F = \int (\vec{T} + m\vec{g})\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int m\vec{g}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -mg\int \vec{j}\cdot(\mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}y\vec{j})$$

$$= -mg\int_{y_1}^{y_2}\mathrm{d}y = mgl\sin\theta$$

(2) $\Delta E_p = mg(y_2 - y_1) = -mgl\sin\theta$，可见重力的功等于小球势能增量的负值。

(3) 由动能定理 $mgl\sin\theta = \dfrac{1}{2}mv^2$，$v = \sqrt{2gl\sin\theta}$

3-14 质量为 m 的质点沿 x 轴正方向运动，它受到两个力的作用，一个力是指向原点、大小为 B 的常力，另一个力沿 x 轴正方向、大小为 A/x^2，A、B为常数。（1）试确定质点的平衡位置；（2）求当质点从平衡位置运动到任意位置 x 处时两力各做的功，并判断两力是否为保守力；（3）以平衡位置为势能零点，求任意位置处质点的势能。

解：(1) $F = \dfrac{A}{x^2} - B$，$F = 0$时，$x_0 = \sqrt{\dfrac{A}{B}}$

(2) $A_1 = \int_{x_0}^{x} F_1\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x}\dfrac{A}{x^2}\mathrm{d}x = A(\dfrac{1}{x_0} - \dfrac{1}{x})$，$A_2 = \int_{x_0}^{x} F_2\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x} -B\,\mathrm{d}x = B(x_0 - x)$

A_1、A_2 只与始末位置有关，即两力均为保守力。

(3) $E_p = \int_x^{x_0} F\,\mathrm{d}x = \int_x^{x_0}(\dfrac{A}{x^2} - B)\,\mathrm{d}x = A(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x_0}) + B(x - x_0) = \dfrac{A}{x} + Bx - 2\sqrt{AB}$

功能原理和机械能守恒

3-15 如图 3-15 所示，一质量为 m' 的物块放置在斜面的最底端 A 处，斜面的倾角为 α，高度为 h，物块与斜面的动摩擦因数为μ，今有一质量为 m 的子弹以速度 $\vec{v}_0$ 沿水平方向射入物块并留在其中，且使物块沿斜面向上滑动，求物块滑出顶端时的速度大小。

解：以物块和子弹为研究对象，碰撞前后系统沿平行斜面方向动量守恒

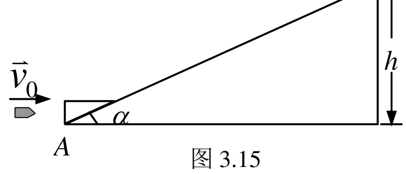


图 3.15

子弹射入物块后的速度大小为 v_1，则

$$mv_0\cos\alpha = (m + m')v_1,\quad v_1 = \frac{mv_0\cos\alpha}{m + m'}$$

取斜面底部为势能零点，物块滑出顶端时的速度大小为 v_2，由功能定理

$$\mu(m + m')g\cos\alpha\frac{h}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}(m + m')v_1^2 - \frac{1}{2}(m + m')v_2^2 - (m + m')gh$$

$$\therefore \quad v_2=\sqrt{\left(\frac{mv_0\cos\alpha}{m+m'}\right)^2-2gh(\mu\cot\alpha+1)}$$

3-16 劲度系数为 k 的轻质弹簧，一端固定在墙上，另一端系一质量为 m_A 的物体A，放在光滑水平面上，当把弹簧压缩 x_0后，再靠着 A 放一质量为 m_B 的物体B ，如图 3-16 所示。开始时，由于外力的作用系统处于静止状态，若撤去外力，试求 A 与 B 离开时B运动的速度和A能到达的最大距离。

解：(1) 弹簧到达原长时 A 开始减速，A、B 分离。

设此时速度大小为v，由机械能守恒

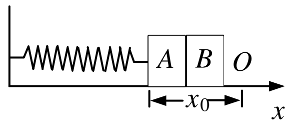


图 3-16

$$\frac{1}{2}kx_0^2=\frac{1}{2}(m_A+m_B)v^2,\quad v=x_0\sqrt{\frac{K}{m_A+m_B}}$$

(2) A、B 分离后，A 继续向右移动到最大距离 x_m 处，则

$$\frac{1}{2}m_Av^2=\frac{1}{2}kx_m^2,\quad x_m=v\sqrt{\frac{m_A}{k}}=x_0\sqrt{\frac{m_A}{m_A+m_B}}$$

3-17 如图 3-17 所示，天文观测台有一半径为 R 的半球形屋面，有一冰块从光滑屋面的最高点由静止沿屋面滑下，若摩擦力略去不计。求此冰块离开屋面的位置以及在该位置的速度。

解：由机械能守恒 $mgR(1-\sin\theta)=\dfrac{1}{2}mv^2$，$v^2=2gR(1-\sin\theta)$

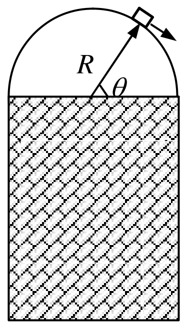


图 3.17

冰块离开屋面时，由牛顿定律

$$mg\sin\theta=m\frac{v^2}{R},\quad \therefore\quad \sin\theta=\frac{2}{3},\quad \theta=\arcsin\frac{2}{3}=41.8^\circ$$

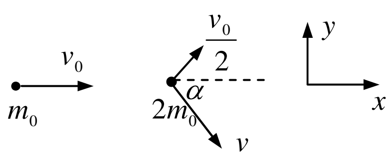
$$v=\sqrt{2gR(1-\sin\theta)}=\sqrt{\frac{2}{3}gR}$$

碰撞

3-18 一质量为m_0以速率v_0运动的粒子，碰到一质量为 2 m_0的静止粒子。结果，质量为m_0的粒子偏转了 45^0，并具有末速$v_0/2$。求质量为 2 m_0的粒子偏转后的速率和方向。

解：

碰撞前后动量守恒 $\begin{cases} m_0v_0=m_0\dfrac{v_0}{2}\cos45^\circ+2m_0v\cos\alpha \\ m_0\dfrac{v_0}{2}\sin45^\circ=2m_0v\sin\alpha \end{cases}$



$$v=\frac{v_0}{4}\sqrt{5-2\sqrt{2}}=0.368v_0,\quad \alpha=\arcsin\frac{v_0\sin45^\circ}{4v}=28.7^\circ$$

3-19 图 3-19 所示，一质量为 m 的小球 A 与一质量为 M 的斜面体 B 发生完全弹性碰撞。（1）若斜面体放置在光滑的水平面上，小球碰撞后竖直弹起，则碰撞后斜面体和小球的运动速度大小各为多少？（2）若斜面体固定在水平面上，碰撞后小球运动的速度大小为多少？运动方向与水平方向的夹角为多少？

解：(1) 以小球和斜面为研究对象，水平方向动量守恒。

设碰撞后小球和斜面速度大小为v'、V，则

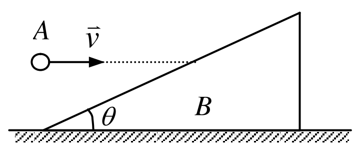


图 3-19

$mv = MV$，$V = \dfrac{m}{M}v$。

又根据能量守恒定理 $\dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}mv'^2 + \dfrac{1}{2}MV^2$，$v' = v\sqrt{\dfrac{M-m}{M}}$

(2) 由动能守恒知 $v' = v$。小球与斜面碰撞时，斜面对小球的作用力在垂直于斜面方向，碰撞前后在平行于斜面方向动量守恒

$mv\cos\theta = mv'\cos\theta'$，$\theta' = \theta$

所以碰撞后小球运动方向与水平方向的夹角为2θ。

转动惯量

4-1 有一直棒长为L，其中一半的质量为m_1（均匀分布），另一半的质量为m_2（均匀分布），如图 4-1 所示，求此棒对过端点O，并垂直于纸面的轴的转动惯量。

解：$J=\int_m x^2\,\mathrm{d}m=\int_0^{L/2}\frac{2m_1}{l}x^2\,\mathrm{d}x+\int_{L/2}^{L}\frac{2m_2}{l}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{L^2}{12}(m_1+7m_2)$

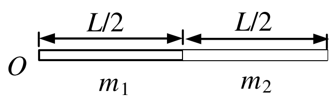


图 4-1

4-2 求半径为 R，质量为 m 的均匀球体相对于直径轴的转动惯量。如以与球体相切的线为轴，其转动惯量又为多少？

解：将球看成由许多薄圆盘组成，圆盘半径 $r=R\cos\theta$，厚度 $\mathrm{d}h=R\,\mathrm{d}\theta\cos\theta$

对应的质量 $\mathrm{d}m=\rho\pi r^2\,\mathrm{d}h=\rho\pi R^3\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta$

薄圆盘对过球心轴的转动惯量为 $\mathrm{d}J=\frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}m=\frac{1}{2}\rho\pi R^5\cos^5\theta\,\mathrm{d}\theta$

$$J=2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}m=\int_0^{\pi/2}\rho\pi R^5\cos^5\mathrm{d}\theta=\frac{8}{15}\rho\pi R^5=\frac{8}{15}\frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}\pi R^5=\frac{2}{5}mR^2$$

由平行轴定理，$J'=J+mR^2=\frac{2}{5}mR^2+mR^2=\frac{7}{5}mR^2$

4-3 两个质量为 m、半径为 R 的匀质圆薄板和一根长为 l=8R 的细杆相连，如图 4-3 所示，求以下两种情况时，此系统对于过细杆中心并与杆垂直的轴 AA'的转动惯量。（1）忽略细杆质量；（2）细杆质量为 M。

解：(1) 由平行轴定理 $J=2\left[\frac{1}{2}mR^2+m(\frac{l}{2}+R)^2\right]=51mR^2$

(2) $J'=J+\frac{1}{12}Ml^2=51mR^2+\frac{64}{6}mR^2=61.67mR^2$

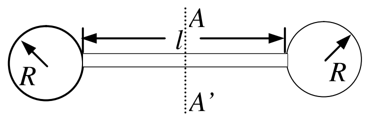


图 4-3

力矩和转动定律

4-4 如图 4-4 所示，一长为 l，质量为 m 匀质细杆竖直放置，因受到扰动而倒下（设下端不滑动）。试求当细杆转到与竖直线成 θ 角时的角加速度和角速度。

解：$\alpha=\frac{M}{J}=\frac{mg\frac{l}{2}\sin\theta}{\frac{1}{3}ml^2}=\frac{3g}{2l}\sin\theta$

$\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$，$\int_0^{\theta}\alpha\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{\omega}\omega\,\mathrm{d}\omega$，$\omega=\sqrt{\frac{3g}{l}(1-\cos\theta)}$

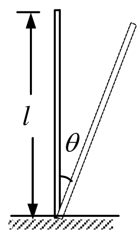


图 4-4

另解：机械能守恒，$mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}J\omega^2$，$\omega=\sqrt{\frac{3g}{l}(1-\cos\theta)}$

4-5 如图 4-5 所示，有一质量为 m，长为 l 的均匀细杆，可绕水平轴 O 无摩擦地转动，杆的一端固定一质量为 3 m 的小球 A，OA＝l/4。开始时杆在水平位置，试求细杆由静止释放后绕 O 轴转动的角加速度。（不计小球大小）

解：$M=(3m-m)g\frac{l}{4}\cos\theta=\frac{l}{2}mg\cos\theta$，$J=3m(\frac{l}{4})^2+\frac{1}{12}ml^2+m(\frac{l}{4})^2=\frac{1}{3}ml^2$

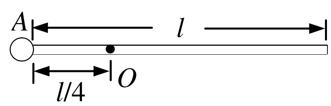


图 4-5

$$\alpha = \frac{M}{J} = \frac{\frac{l}{2}mg\cos\theta}{\frac{1}{3}ml^2} = \frac{3g}{2l}\cos\theta$$

4-6 一均匀圆盘，质量为m，半径为R，可绕通过盘中心的光滑竖直轴在水平桌面上转动，如图 4-6 所示。圆盘与桌面间的动摩擦因数为μ，若用外力推动使其角速度达到 ω_0 时，撤去外力，求（1）转动过程中，圆盘受到的摩擦力矩；（2）撤去外力后，圆盘还能转动多少时间？

解：(1) 在距中心 r 处取一宽度为 $\mathrm{d}\,r$ 的圆环，该圆环所受的摩擦力大小为 $\mathrm{d}\,f = \mu g\sigma 2\pi r\,\mathrm{d}\,r$

该摩擦力对中心轴的力矩为 $\mathrm{d}\,M = -r\,\mathrm{d}\,f = -\mu g\sigma 2\pi r^2\,\mathrm{d}\,r$

所以 $M = -\int_0^R \mu g\sigma 2\pi r^2\,\mathrm{d}\,r = -\frac{2}{3}\pi\mu g\frac{m}{\pi R^2}R^3 = -\frac{2}{3}\mu mgR$

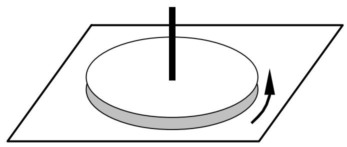


图 4-6

(2) $\alpha = \frac{M}{J} = -\frac{\frac{2}{3}\mu mgR}{\frac{1}{2}mR^2} = -\frac{4}{3R}\mu g$，$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{3R\omega_0}{4\mu g}$

角动量和角动量守恒定律

4-7 水平桌面上放有一根长l=1.0m，质量m=3.0kg的匀质细杆，可绕通过端点O的垂直轴OO'转动，开始时杆静止。现有 100N的力，以与杆成θ =30°的角打击杆的一端，打击时间 Δt=0.02s，如图 4-7 所示。求（1）杆的角动量的变化；（2）杆转动时的角速度。

解：(1) 冲量矩为 $\int_0^{0.02} M_{oo'}\,\mathrm{d}\,t = \int_0^{0.02} lF\sin 30°\,\mathrm{d}\,t = 1\times 100\times 0.5\times 0.02 = 1\,\mathrm{kg\cdot m^2/s}$

由刚体定轴转动定律 $\Delta L = J\omega - J\omega_0 = J\omega = \int_0^t M_{oo'}\,\mathrm{d}\,t = 1\,\mathrm{kg\cdot m^2/s}$

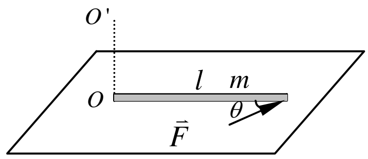


图 4-7

(2) $\omega = \frac{\Delta L}{J} = \frac{1}{\frac{1}{3}ml^2} = 3\,\mathrm{rad/s}$

4-8 上题中细杆被一颗质量 m'=20g 的子弹以$\theta = 30°$ 的角射中中点，如图 4-8 所示。已知杆与桌面的动摩擦因数 μ=0.20，子弹射入速度 v=400m/s，并以 v/2 的速度射出。求：(1) 细杆开始转动的角速度；(2) 细杆转动时受到的摩擦力矩和角加速度各为多少？（3）细杆转过多大角度后停下来。

解：(1) 子弹射入前后系统对 O 点角动量守恒

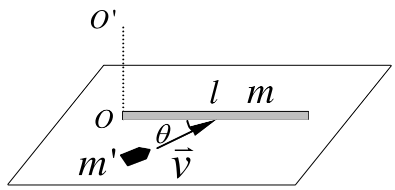


图 4-8

$$\frac{1}{2}lm'v\sin 30° = \frac{1}{2}lm'\frac{v}{2}\sin 30° + J\omega$$

$$\omega = \frac{\frac{1}{4}lm'v\sin 30°}{J} = \frac{\frac{1}{8}lm'v}{\frac{1}{3}ml^2} = \frac{3m'v}{8ml} = \frac{3\times 0.02\times 400}{8\times 1\times 1} = 3\,\mathrm{rad/s}$$

(2) $\mathrm{d}\,m = \frac{m}{l}\mathrm{d}\,r$，$\mathrm{d}\,f = \mu g\,\mathrm{d}\,m$，$\mathrm{d}\,M = -r\,\mathrm{d}\,f = -r\mu g\,\mathrm{d}\,m = -\mu g\frac{m}{l}r\,\mathrm{d}\,r$

$$M = -\int_0^l \mu g\frac{m}{l}r\,\mathrm{d}\,r = -\frac{1}{2}\mu mgl，\quad \alpha = \frac{M}{J} = -\frac{\frac{1}{2}\mu mgl}{\frac{1}{3}ml^2} = -\frac{3\mu g}{2l} = -\frac{3\times 0.2\times 9.8}{2\times 1} = -2.94\,\mathrm{rad/s^2}$$

(3) $\alpha=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\omega\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$，$\int_0^\theta \alpha\,\mathrm{d}\theta=\int_\omega^0 \omega\,\mathrm{d}\omega$，$\theta=-\dfrac{\omega^2}{2\alpha}=\dfrac{3^2}{2\times 2.94}=1.53\,\mathrm{rad}$

4-9 在半径为R_1、质量为m的静止水平圆盘上，站一质量为m的人。圆盘可无摩擦地绕通过圆盘中心的竖直轴转动。当这人开始沿着与圆盘同心、半径为R_2（$R_2<R_1$）的圆周，以相对于圆盘的速度为v匀速走动时，则圆盘将以多大的角速度旋转？

解：设圆盘以角速度ω旋转，则人相对于地面的角速度为 $\omega'=\omega-\dfrac{v}{R_2}$

系统对圆盘中心轴的角动量守恒

$$J\omega+J'\omega'=0，\ \frac{1}{2}mR_1^2\omega+mR_2^2(\omega-\frac{v}{R_2})=0，\ \omega=\frac{R_2 v}{\frac{1}{2}R_1^2+R_2^2}=\frac{2R_2 v}{R_1^2+2R_2^2}$$

功和能

4-10 如图 4-10 所示。滑轮的转动惯量J＝0. 5kg · m^2，半径r＝30 cm，弹簧的劲度系数k＝2.0 N / m，重物的质量m=2.0 kg，开始时弹簧没有伸长。当此系统从静止开始启动，物体沿斜面滑下 1.0m时，求：（1）物体的速率多大？（2）物体滑下 1.0m过程中，作用在滑轮上的力矩所作的功。（不计斜面和转轴的摩擦）

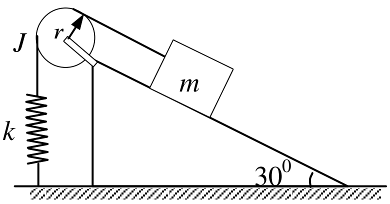


图 4-10

解：(1) 系统机械能守恒

$$\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}J\omega^2+\frac{1}{2}mv^2=mgx\sin 30°，\ \omega=\frac{v}{r}$$

$$v=\sqrt{\frac{2mgx\sin 30°-kx^2}{m+\dfrac{J}{r^2}}}=\sqrt{\frac{2\times 2\times 1\times 9.8\times 0.5-2.0\times 1^2}{2+0.5\div 0.3^2}}=1.53\,\mathrm{m/s}$$

(2) $A=\dfrac{1}{2}J\omega^2-\dfrac{1}{2}J\omega_0^2=\dfrac{1}{2}J\omega^2=\dfrac{1}{2}\times 0.5\times\dfrac{1.53^2}{0.3^2}=6.5\,\mathrm{J}$

4-11 长 l＝0. 40 m 的均匀木棒，质量 M＝1. 0kg，可绕水平轴 O 在竖直平面内转动，开始时棒自然地竖直悬垂。现有质量 m＝8g 的子弹，以 v＝200m / s 的速率从 A 点射入棒中，假定 A 点与 O 点的距离为$\dfrac{3}{4}l$，如图 4-11 所示。求：（1）棒开始运动时的角速度；（2）棒的最大偏转角。

解：(1) 子弹射入前后系统对 O 点的角动量守恒

$$mv\times\frac{3}{4}l=J\omega，\ J=\frac{1}{3}Ml^2+m\times(\frac{3}{4}l)^2=\frac{1}{3}\times 1\times 0.4^2+0.008\times\frac{9}{16}\times 0.4^2=0.054\,\mathrm{kg\cdot m^2}$$

$$\omega=\frac{\frac{3}{4}mvl}{J}=\frac{\frac{3}{4}\times 0.008\times 200\times 0.4}{0.054}=8.89\,\mathrm{rad/s}$$

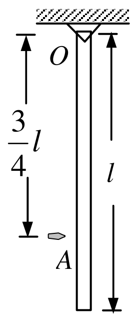


图 4-11

(2) 设棒最大偏转角为θ，由机械能守恒，$\dfrac{1}{2}J\omega^2=Mg\dfrac{l}{2}(1-\cos\theta)+mg\dfrac{3}{4}l(1-\cos\theta)$，

$$(1-\cos\theta)=\frac{\frac{1}{2}J\omega^2}{Mg\dfrac{l}{2}+mg\dfrac{3}{4}l}=\frac{0.054\times 8.89^2}{1\times 9.8\times 0.4+0.008\times 9.8\times\dfrac{3}{2}\times 0.4}=1.0758$$

$\cos\theta=-0.0758\quad\theta=94.4°$ 最大偏转角超过 90°

理想气体状态方程

5-1 一容器内储有氧气，其压强为 1.01×10^{5}Pa，温度为 27^{0}C，求：（1）气体分子的数密度；（2）氧气的质量密度；（3）氧分子的质量；（4）分子间的平均距离（设分子均匀等距分布）。

解：(1) $p=nkT$， $n=\dfrac{p}{kT}=\dfrac{1.01\times10^5}{1.38\times10^{-23}\times(273+27)}=2.44\times10^{25}\ /\mathrm{m}^3$

(2) $\because\ \dfrac{pV}{T}=\dfrac{m}{M_{\mathrm{mol}}}R$，$\therefore\ \rho=\dfrac{m}{V}=\dfrac{pM_{\mathrm{mol}}}{RT}=\dfrac{1.01\times10^5\times32\times10^{-3}}{8.31\times(273+27)}=1.30\,\mathrm{kg/m^3}$

(3) $\because \rho=m_{O_2}n$， $\therefore m_{O_2}=\dfrac{\rho}{n}=\dfrac{1.30}{2.44\times10^{25}}=5.33\times10^{-26}\,\mathrm{kg}$

(4) $\overline{d}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{n}}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2.44\times10^{25}}}=3.45\times10^{-9}\ \mathrm{m}$

5-2 在容积为V的容器中的气体，其压强为p_1，称得重量为G_1。然后放掉一部分气体，气体的压强降至p_2，再称得重量为G_2。问在压强p_3下，气体的质量密度多大？

解：设容器的质量为m，即放气前容器中气体质量为$m_1=\dfrac{G_1}{g}-m$，放气后容器中气体质量为$m_2=\dfrac{G_2}{g}-m$。

由理想气体状态方程有

$$p_1V=\frac{m_1}{M_{\mathrm{mol}}}RT=\frac{\frac{G_1}{g}-m}{M_{\mathrm{mol}}}RT,\qquad p_2V=\frac{m_2}{M_{\mathrm{mol}}}RT=\frac{\frac{G_2}{g}-m}{M_{\mathrm{mol}}}RT$$

上面两式相减得

$$\frac{RT}{M_{\mathrm{mol}}g}(G_2-G_1)=(p_2-p_1)V,\qquad M_{\mathrm{mol}}=\frac{RT}{gV}\Big(\frac{G_2-G_1}{p_2-p_1}\Big)$$

当压强为p_3时， $\rho=\dfrac{m_3}{V}=\dfrac{M_{\mathrm{mol}}p_3}{RT}=\dfrac{p_3}{gV}\cdot\dfrac{G_2-G_1}{p_2-p_1}$

压强、温度的微观意义

5-3 将 2.0×10^{-2}kg的氢气装在 4.0×10^{-3}m^{2}的容器中，压强为 3.9×10^{5}Pa，则氢分子的平均平动动能为多少？

解： $\because\ pV=\dfrac{m}{M_{\mathrm{mol}}}RT$，$\therefore T=\dfrac{M_{\mathrm{mol}}pV}{mR}$

$$\overline{\varepsilon}_t=\frac{3}{2}kT=\frac{3}{2}k\frac{M_{\mathrm{mol}}pV}{mR}=\frac{3}{2}\times1.38\times10^{-23}\times\frac{2\times10^{-3}\times3.9\times10^5\times4.0\times10^{-3}}{2\times10^{-2}\times8.31}=3.88\times10^{-22}\ \mathrm{J}$$

5-4 体积$V=10^{-3}\ \mathrm{m}^3$，压强$p=10^5\ \mathrm{Pa}$的气体分子平均平动动能的总和为多少？

解：$\sum\overline{\varepsilon}_t=N\dfrac{3}{2}kT$，其中$N$为总分子数。 $\because\ p=nkT=\dfrac{N}{V}kT$， $N=\dfrac{pV}{kT}$

$\therefore\sum\overline{\varepsilon}_t=\dfrac{pV}{kT}\dfrac{3}{2}kT=\dfrac{3}{2}pV=\dfrac{3}{2}\times10^5\times10^{-3}=150\,\mathrm{J}$

5-5 温度为 0℃和 100℃时理想气体分子的平均平动动能各为多少？欲使分子的平均平动动能等于 1eV，气体的温度需多高？（$1\text{eV}=1.6\times10^{-19}\text{J}$）

解：0°C 时，$\bar{\varepsilon}_{t=0}=\dfrac{3}{2}kT=\dfrac{3}{2}\times1.38\times10^{-23}\times273=5.65\times10^{-21}$ J

100°C 时，$\bar{\varepsilon}_{t=100}=\dfrac{3}{2}kT=\dfrac{3}{2}\times1.38\times10^{-23}\times373=7.72\times10^{-21}$ J

$\because$ $1\text{eV}=1.6\times10^{-19}$ J，$\therefore$ 分子具有 1eV 平均动能时，气体温度为

$$T=\frac{2\bar{\varepsilon}_t}{3K}=\frac{2\times1.6\times10^{-19}}{3\times1.38\times10^{-23}}=7.73\times10^{3}\text{ K}$$

能量均分、理想气体内能

5-6 容积$V=5.0\times10^{-3}\text{m}^3$的容器中装有氧气，测得其压强$p=2.0\times10^5\text{Pa}$，求氧气的内能。

解：$E=\dfrac{m}{M_{\text{mol}}}\dfrac{i}{2}RT$，又 $pV=\dfrac{m}{M_{\text{mol}}}RT$，所以 $E=\dfrac{i}{2}pV=\dfrac{5}{2}\times2.0\times10^{5}\times5.0\times10^{-3}=2.5\times10^{3}$ J

5-7 若氢气和氦气的压强、体积和温度均相等时，则它们的质量比$\dfrac{m_{\text{H}_2}}{m_{\text{H}e}}$和内能比$\dfrac{E_{\text{H}_2}}{E_{\text{H}e}}$各为多少？

解：$\because pV=\dfrac{M_{\text{H}_2}}{M_{\text{mol H}_2}}RT$　　$pV=\dfrac{M_{\text{He}}}{M_{\text{mol He}}}RT$，$\therefore$ $\dfrac{M_{\text{H}_2}}{M_{\text{He}}}=\dfrac{M_{\text{mol H}_2}}{M_{\text{mol He}}}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

又 $\because E=\dfrac{M}{M_{\text{mol}}}\dfrac{i}{2}RT=\dfrac{i}{2}\nu RT=\dfrac{i}{2}pV$，$\therefore$ $\dfrac{E_{\text{H}_2}}{E_{\text{He}}}=\dfrac{i_{\text{H}_2}}{i_{\text{He}}}=\dfrac{5}{3}$

5-8 容器内盛有理想气体，其密度为 $1.25\times10^{-2}\text{kg/m}^3$，温度为 273K，压强为 $1.0\times10^{-2}\text{atm}$。求：（1）气体的摩尔质量，并确定是什么气体；（2）气体分子的平均平动动能和平均转动动能；（3）容器单位体积内分子的总平动动能；（4）若该气体有 0.3mol，其内能是多少？

解：(1) $\because M_{\text{mol}}=\dfrac{mRT}{pV}$，$\dfrac{m}{V}=1.25\times10^{-2}\text{ kg/m}^3$，　$\therefore M_{\text{mol}}=\dfrac{1.25\times10^{-2}\times8.31\times273}{1.0\times10^{-2}\times1.013\times10^{5}}=28\times10^{-3}$ kg/mol

气体是N_2或CO

(2) $\bar{\varepsilon}_t=\dfrac{3}{2}kT=\dfrac{3}{2}\times1.38\times10^{-23}\times273=5.65\times10^{-21}$ J，$\because$转动自由度 $i'=5-3=2$

$\therefore\bar{\varepsilon}_{转}=\dfrac{i'}{2}kT=1.38\times10^{-23}\times273=3.77\times10^{-21}$ J

(3) $\because$ $p=nkT$，$\therefore n=\dfrac{p}{kT}=\dfrac{1.0\times10^{-2}\times1.01\times10^{5}}{1.38\times10^{-23}\times273}=2.69\times10^{23}\text{ /m}^3$

$E_k=n\cdot\bar{\varepsilon}_t=2.69\times10^{23}\times5.65\times10^{-21}=1.52\times10^{3}$ J

(4) $E=\dfrac{m}{M_{\text{mol}}}\dfrac{i}{2}RT=0.3\times\dfrac{5}{2}\times8.31\times273=1.70\times10^{3}$ J

速率分布定律、三种速率

5-9 计算气体分子热运动速率介于（v_p-v_p/100）和（v_p+v_p/100）之间的分子数占总分子数的百分比。（v_p 为

最概然速率）

解：速率区间较小时 $\dfrac{\Delta N}{N}=f(v)\Delta v=4\pi(\dfrac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\cdot v^2\Delta v$

令 $x=\dfrac{v}{v_p}$，$v_p=\sqrt{\dfrac{2kT}{m}}$，$\therefore\dfrac{\Delta N}{N}=\dfrac{4}{\sqrt{\pi}}x^2e^{-x^2}\Delta x$

当 $v=v_p-\dfrac{v_p}{100}=.099v_p$时，$x=0.99$；$v=v_p+\dfrac{v_p}{100}=1.01v_p$时，$x=1.01$；$\therefore\Delta x=0.02$

所以 $\dfrac{\Delta N}{N}=\dfrac{4}{\sqrt{\pi}}(0.99)^2e^{-(0.99)^2}\times0.02=1.66\%$

5-10 有 N 个粒子，其速率分布函数为

$f(v)=C$ （$0\leqslant v\leqslant v_0$）

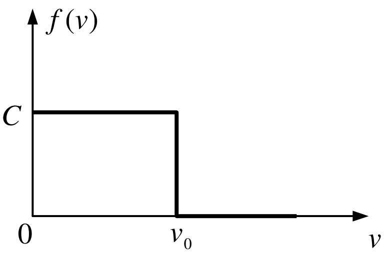
$f(v)=0$ （$v>v_0$）

其中C为常数。（1）作速率分布曲线；（2）由v_0求常数C；（3）求粒子的平均速率。

解：(1) 速率分布曲线如右图。

(2) 由归一化条件 $\int_0^\infty f(v)\,\mathrm{d}v=1$，$\int_0^{v_0}c\,\mathrm{d}v=cv_0=1$，得 $c=\dfrac{1}{v_0}$

(3) $\bar{v}=\int_0^\infty vf(v)\,\mathrm{d}v=\int_0^{v_0}v\cdot c\,\mathrm{d}v=\dfrac{c}{2}{v_0}^2=\dfrac{v_0}{2}$



5-11（1）某气体在平衡温度T_2时的最概然速率与它在平衡温度T_1时的方均根速率相等，求T_2/T_1；（2）如已知这种气体的压强p和密度ρ，试导出其方均根速率表达式。

解：(1) $\because v_p=\sqrt{\dfrac{2RT}{M_{\text{mol}}}}$，$\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\dfrac{3RT}{M_{\text{mol}}}}$，由题意 $\sqrt{\dfrac{2RT_2}{M_{\text{mol}}}}=\sqrt{\dfrac{3RT_1}{M_{\text{mol}}}}$，得 $\dfrac{T_2}{T_1}=\dfrac{3}{2}$

(2) 由理想气体状态方程 $pV=\dfrac{m}{M_{\text{mol}}}RT$，$\therefore\rho=\dfrac{m}{V}=\dfrac{M_{\text{mol}}p}{RT}$，即 $\dfrac{RT}{M_{\text{mol}}}=\dfrac{p}{\rho}$

$\therefore\ \sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\dfrac{3RT}{M_{\text{mol}}}}=\sqrt{\dfrac{3p}{\rho}}$

5-12 图 5-12 是氢气和氧气在同一温度下的麦克斯韦速率分布曲线。试由图中的数据求：（1）氢气分子和氧气分子的最概然速率；（2）两种气体的温度。

解：(1) 由 $v_p=\sqrt{\dfrac{2RT}{M_{\text{mol}}}}$ 可知，在相同温度下，M_{mol} 大的气体 v_p 小，

所以曲线 II 对应氢气的分布，即 $v_{p\,H_2}=2000\,\text{m/s}$

$v_{p\,O_2}=\sqrt{\dfrac{M_{\text{mol}\,H_2}}{M_{\text{mol}\,O_2}}}\cdot v_{p\,H_2}=\sqrt{\dfrac{2}{32}}\times2000=500\,\text{m/s}$

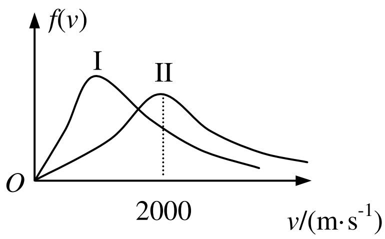


图 5-12

(2) 由 $v_p=\sqrt{\dfrac{2RT}{M_{\text{mol}}}}$ 得 $T=\dfrac{M_{\text{mol}}\cdot {v_p}^2}{2R}=\dfrac{2\times10^{-3}\times(2000)^2}{2\times8.31}=4.81\times10^2\ \text{K}$

碰撞频率与自由程

5-13 （1）如果理想气体的温度保持不变，当压强降为原值的一半时，分子的平均碰撞频率和平均自由程为原来的多少？（2）如果压强保持不变，温度降为原值的一半，则分子的平均碰撞频率和平均自由程又为原来的多少？

解：$\because \overline{Z}=\sqrt{2}\pi d^2\bar{v}n$，$\bar{\lambda}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$，$n=\dfrac{p}{kT}$，$\bar{v}=\sqrt{\dfrac{8RT}{\pi M_{\text{mol}}}}$

$$\therefore \overline{Z}=\sqrt{2}\pi d^2\sqrt{\frac{8RT}{\pi M_{\text{mol}}}}\cdot\frac{p}{kT}=\sqrt{\frac{16\pi R}{\mu}}\frac{d^2}{k}\frac{p}{\sqrt{T}}，\quad \bar{\lambda}=\frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$$

设原平均碰撞频率为$\overline{Z}_0$，平均自由程为$\bar{\lambda}_0$

(1) 当T保持不变，p降为原值一半时，$\overline{Z}_1=\dfrac{\overline{Z}_0}{2}$，$\bar{\lambda}_1=2\bar{\lambda}_0$

(2) 当P保持不变，T降为原值一半时，$\overline{Z}_1=\sqrt{2}\overline{Z}_0$，$\bar{\lambda}_2=\dfrac{1}{2}\bar{\lambda}_0$

5-14 设氮分子的有效直径为 10×10^{-10} m。（1）求氮气在标准状态下的平均碰撞次数和平均自由程；（2）如果温度不变，气压降到 1.33×10^{-4} Pa，则平均碰撞次数和平均自由程又为多少?

解：(1) $P_0=1.013\times10^5\ \text{Pa}$，$T_0=273\text{K}$，$\quad\therefore \bar{v}=\sqrt{\dfrac{8RT_0}{\pi M_{\text{mol}}}}=\sqrt{\dfrac{8\times8.31\times273}{\pi\times28\times10^{-3}}}=454\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

$$n=\frac{p}{KT_0}=\frac{1.013\times10^5}{1.38\times10^{-23}\times273}=2.69\times10^{25}\ \text{m}^{-3}$$

$$\therefore \overline{Z}=\sqrt{2}\pi d^2\bar{v}n=\sqrt{2}\pi\times(1.0\times10^{-10})^2\times454\times2.69\times10^{25}=5.42\times10^8\ \text{s}^{-1}$$

$$\bar{\lambda}=\frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}=\frac{\bar{v}}{\overline{Z}}=\frac{454}{5.42\times18^8}=8.38\times10^{-7}\ \text{m}$$

(2) $p'=1.33\times10^{-4}\ \text{Pa}$ 时，$\quad n'=\dfrac{p'}{KT_0}=\dfrac{1.33\times10^{-4}}{1.38\times10^{-23}\times273}=3.53\times10^{16}\ \text{m}^{-3}$

$$\overline{Z'}=\sqrt{2}\pi d^2\bar{v}n'=\sqrt{2}\pi\times(1.0\times10^{-10})^2\times454\times3.53\times10^{16}=0.712\text{s}^{-1}$$

$$\overline{\lambda'}=\frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n'}=\frac{\bar{v}}{\overline{Z'}}=\frac{454}{0.712}=638\text{m}$$

热一定律

6-1 如图 6-1 所示，理想气体由 a 沿 acb 过程到达 b 状态，吸收了 560 J 的热量，对外做功 356J。（1）如果它沿 adb 过程到达 b 状态时，对外做功 220 J，它将吸收多少热量？（2）当它由 b 沿曲线 ba 返回 a 状态时，外界对它做功 282 J，它将吸收或放出多少热量？

解：根据热力学第一定律 $Q_{acb} = E_b - E_A + A_{acb}$

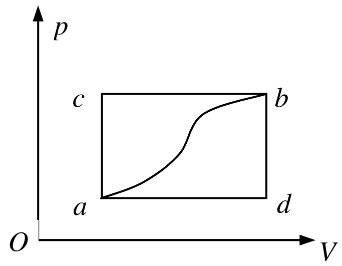


图 6-1

$$E_b - E_a = \Delta E = Q_{avb} - A_{acb} = 560 - 356 = 204\,\text{J}$$

(1) $Q_{adb} = E_b - E_a + A_{adb} = 204 + 220 = 424\,\text{J}$

(2) $Q_{ba} = E_a - E_b + A_{ba} = -204 - 282 = -486\,\text{J}$

系统对外界放热 486J

等值过程

6-2 1mol 单原子理想气体若经两个过程：(1)容积保持不变；(2)压强保持不变，其温度从 300 K 变为 350K，问在这两过程中各吸收了多少热量？增加了多少内能？对外作了多少功？

解：(1) 等体过程 $A = 0$

$$\therefore Q_v = \Delta E + A = \Delta E = \frac{m}{M_{\text{mol}}}\frac{i}{2}R(T_2 - T_1) = 1\times\frac{3}{2}\times 8.31\times(350-300) = 623\,\text{J}$$

即吸收热量和内能增量均为 623J，而做功为 0。

(2) $$Q_p = \frac{m}{M_{\text{mol}}}\frac{i+2}{2}R(T_2 - T_1) = 1\times\frac{5}{2}\times 8.31\times(350-300) = 1039\,\text{J}$$

$$\Delta E = \frac{m}{M_{mol}}\frac{i}{2}R(T_2 - T_1) = 623\,\text{J}$$

$$A = p(V_2 - V_1) = \frac{m}{M_{\text{mol}}}R(T_2 - T_1) = 1\times 8.31\times(350-300) = 416\,\text{J}$$

6-3 一理想气体由压强p_1=1.52×10^5 Pa，体积V_1=5.0×10^{-3} m^3，等温膨胀到压强p_2=1.01×10^5 Pa，，然后再经等压压缩到原来的体积。试求气体所做的功。

解：气体在等温膨胀过程中所做功为

$$A_T = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V = \int_{V_1}^{V_2}\frac{m}{M_{\text{mol}}V}RT_1\,\mathrm{d}V = \frac{m}{M_{\text{mol}}}RT_1\ln\frac{V_2}{V_1} = p_1V_1\ln\frac{p_2}{p_1}$$

$$= 1.52\times10^5\times5.0\times10^{-3}\ln\frac{1.52\times10^5}{1.01\times10^5} = 310\,\text{J}$$

气体在等压压缩过程中所做的功为 $A_p = p_2(V_1 - V_2) = p_2V_1 - p_2V_2$

而等温过程由V_1膨胀到V_2时，满足 $p_2V_2 = p_1V_1$

$$\therefore A_p = p_2V_1 - p_1V_1 = (1.01\times10^5 - 1.52\times10^5)\times5.0\times10^{-3} = -255\,\text{J}$$

气体所做功 $A = A_T + A_p = 310 - 255 = 55\,\text{J}$

6-4 将 500 J 的热量传给标准状态下 2mol 的氢。（1）若体积不变，则氢的温度变为多少？（2）若温度不变，则氢的压强和体积各变为多少？（3）若压强不变，则氢的温度及体积各变为多少？

解：标准状态下，$T_1 = 273\,\text{K}$　$V_{\text{omol}} = 22.4\times10^{-3}\,\text{m}^{-3}$

(1) 体积不变 $A = 0$，$\therefore Q_V = \Delta E = \dfrac{m}{M_{\text{mol}}}\dfrac{i}{2}R(T_2 - T_1)$，$T_2 = T_1 + \dfrac{Q_V}{\dfrac{m}{M_{\text{mol}}}\dfrac{i}{2}R} = 273 + \dfrac{500}{2\times\dfrac{5}{2}\times 8.31} = 285\,\text{K}$

(2) 温度不变 $\Delta E = 0$，$\therefore Q_T = A = \dfrac{m}{M_{\text{mol}}}RT_1\ln\dfrac{V_2}{V_1}$

$$V_2 = V_1\exp\frac{Q_T}{\dfrac{m}{M_{\text{mol}}}RT_1} = 2\times 22.4\times10^{-3}\exp\frac{500}{2\times 8.31\times 273} = 0.05\,\text{m}^3$$

$$p_2 = \frac{V_1}{V_2}p_1 = \frac{2\times 22.4\times10^{-3}}{0.05}\times 1.013\times10^5 = 9.08\times10^4\,\text{Pa}$$

(3) 压强不变 $Q_p = \dfrac{m}{M_{\text{mol}}}\dfrac{i+2}{2}R(T_2 - T_1)$，$\therefore T_2 = T_1 + \dfrac{Q_p}{\dfrac{m}{M_{\text{mol}}}\dfrac{i+2}{2}R} = 273 + \dfrac{500}{2\times\dfrac{7}{2}\times 8.31} = 282\,\text{K}$

$$V_2 = \frac{T_2}{T_1}V_1 = \frac{281.6}{273}\times 2\times 22.4\times10^{-3} = 0.046\,\text{m}^3$$

摩尔热容、绝热过程

6-5 如图 6-5 所示，一理想气体由初态a经准静态过程ab直线变至终态b。已知该理想气体的定容摩尔热容量C_V=3R，求该理想气体在ab过程中的摩尔热容量（用R表示）。

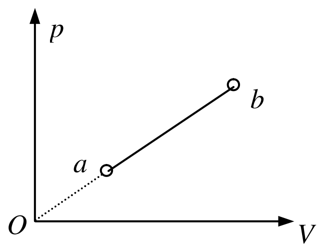


图 6-5

解：设理想气体在 ab 过程中的摩尔热容量为C_{ab}，在一微小过程中

$$\mathrm{d}Q = C_{ab}\,\mathrm{d}T \qquad （1）$$

由热力学第一定律有

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}E + \mathrm{d}A = C_V\,\mathrm{d}T + p\,\mathrm{d}V \qquad （2）$$

由(1)、(2)得　$C_{ab} = C_V + p\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}$

由理想气体状态方程，1mol 气体有 $pV = RT$。而 ab 直线方程为 $p = kV$，其中 k 为斜率

$$\therefore kV^2 = RT,\ \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T} = \frac{R}{2kV} = \frac{R}{2p},\ \therefore C_{ab} = C_V + p\frac{R}{2p} = 3R + \frac{R}{2} = \frac{7}{2}R$$

6-6 温度为 27℃，压强为 1.01×10^5 Pa的一定量氮气，经绝热压缩，使其体积变为原来的 1/5，求压缩后氮气的压强和温度。

解：由绝热过程方程 $p_1V_1^{\gamma}=p_2V_2^{\gamma}$，$\gamma=\dfrac{i+2}{i}=\dfrac{7}{5}$，$\therefore p_2=(\dfrac{V_1}{V_2})^{\gamma}p_1=5^{\frac{7}{5}}\times1.01\times10^5=9.61\times10^5\ \text{Pa}$

又绝热过程方程 $T_1V_1^{\gamma-1}=T_2V_2^{\gamma-1}$， $\therefore T_2=(\dfrac{V_1}{V_2})^{\gamma-1}T_1=5^{\frac{2}{5}}\times(273+27)=571\text{K}$

6-7 如图 6-7 所示，将 96g 氧气从 40L 绝热压缩到原体积的一半（$1\to2$），此时气体的温度为 127℃，然后等温膨胀到原体积（$2\to3$）。（1）求以上两过程中，系统吸收的热量、对外所做的功和内能的变化；（2）若通过等容过程直接将氧气由上述的初态变化到终态（$1\to3$），则系统吸收的热量、对外所做的功和内能的变化又为多少？

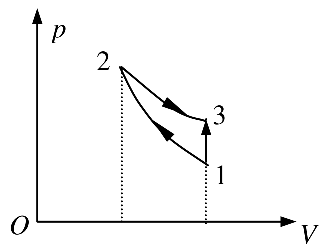


图 6-7

解：（1）1-2 为绝热压缩过程

$\therefore Q_{12}=0$，$A_{12}=-\Delta E_{12}=-\dfrac{m}{M_{\text{mol}}}\dfrac{i}{2}R(T_2-T_1)$

由绝热过程方程 $T_2V_2^{\gamma-1}=T_1V_1^{\gamma-1}$，$\gamma=\dfrac{i+2}{i}=\dfrac{7}{5}$，

$\therefore T_1=(\dfrac{V_2}{V_1})^{\frac{2}{5}}T_2=(\dfrac{1}{2})^{\frac{2}{5}}\times(273+127)=303\,\text{K}$

$$A_{12}=-\frac{m}{M_{\text{mol}}}\frac{i}{2}R(T_2-T_1)=-\frac{96}{32}\times\frac{5}{2}\times8.31\times(400-303)=-6045\,\text{J}$$

2-3 为等温膨胀过程 $\Delta E_{23}=0$，$A_{23}=Q_{23}=\dfrac{m}{M_{\text{mol}}}RT_2\ln\dfrac{V_2}{V_1}=\dfrac{96}{32}\times8.31\times400\times\ln2=6912\,\text{J}$

所以 1-2-3 过程中：$Q=Q_{12}+Q_{23}=Q_{23}=6912\,\text{J}$，$A=A_{12}+A_{23}=-6045+6912=867\,\text{J}$

$\Delta E=\Delta E_{12}+\Delta E_{23}=6045+0=6045\,\text{J}$

（2）$A_{13}=0$，$\Delta E=6045\,\text{J}$，$Q_{13}=A_{13}+\Delta E=0+6045=6045\,\text{J}$

6-8 某理想气体在p-V图上其等温线的斜率与绝热线的斜率之比约为 0.714，当此理想气体由压强$p=2\times10^5$帕、体积V=0.5 升之状态绝热膨胀到体积增大一倍时，求此过程中气体所作的功。

解：等温：$pV=\dfrac{m}{M_{\text{mol}}}RT$，$p\,\mathrm{d}V+V\,\mathrm{d}p=0$，所以等温线斜率 $(\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V})_T=-\dfrac{p}{V}$

绝热：$pV^{\gamma}=C$，$p\gamma V^{\gamma-1}\,\mathrm{d}V+V^{\gamma}\,\mathrm{d}p=0$，所以绝热线斜率 $(\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V})_Q=-\gamma\dfrac{p}{V}$

$\therefore\dfrac{(\mathrm{d}p/\mathrm{d}V)_T}{(\mathrm{d}p/\mathrm{d}V)_Q}=\dfrac{1}{\gamma}=0.714$，即 $\dfrac{i}{i+2}=0.714$ 解得 $i=5$，即该理想气体分子为双原子分子。

由绝热过程方程 $p_1V_1^{\gamma}=p_2V_2^{\gamma}$ 体积增大一倍时，压强为

$$p_2=(\frac{V_1}{V_2})^{\gamma}p_1=(0.5)^{1.4}\times 2\times 10^5=7.58\times 10^4\,\text{Pa}$$

所做的功 $A=-\Delta E=-\frac{m}{M_{\text{mol}}}\frac{i}{2}R(T_2-T_1)=\frac{i}{2}(p_1V_1-p_2V_2)$

$$=\frac{5}{2}(2\times 10^5\times 0.5\times 10^{-3}-7.58\times 10^4\times 1\times 10^{-3})=60.5\text{J}$$

循环过程

6-9 设有—以理想气体为工作物质的热机循环，如图 6-9 所示，试证明其效率为$\eta=1-\gamma\dfrac{\frac{V_1}{V_2}-1}{\frac{p_1}{p_2}-1}$。

解：由图知，ab 为等容过程，ca 为等压过程，其中 ab 为吸热过程，ca 为放热过程

$$Q_{ab}=\frac{m}{M_{\text{mol}}}C_V(T_b-T_a)\text{，}\left|Q_{ca}\right|=\frac{m}{M_{\text{mol}}}C_p(T_c-T_a)$$

$$\therefore\eta=1-\frac{Q_2}{Q_1}=1-\frac{\left|Q_{ca}\right|}{Q_{ab}}=1-\frac{C_p}{C_V}\frac{T_c-T_a}{T_b-T_a}=1-\gamma\frac{T_c/T_a-1}{T_b/T_a-1}$$

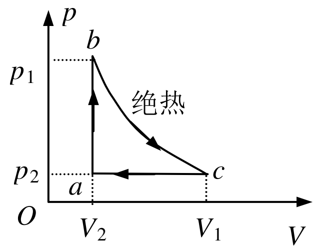


图 6-9

又等容过程中 $\frac{p_1}{p_2}=\frac{T_b}{T_a}$，等压过程中 $\frac{T_c}{T_a}=\frac{V_1}{V_2}$

得 $\eta=1-\gamma\dfrac{\frac{V_1}{V_2}-1}{\frac{p_1}{p_2}-1}$

6-10 1mol理想气体在 400 K和 300 K之间完成一卡诺循环，在 400 K的等温线上，起始体积为 0.001m^3，最后体积为 0.005m^3。试计算气体在此循环中所作的功，以及从高温热源吸收的热量和传给低温热源的热量。

解：如图$1\rightarrow 2$为400K等温过程，吸热；$3\rightarrow 4$为300K等温过程，放热。

$$Q_1=Q_{12}=\frac{m}{M_{\text{mol}}}RT_1\ln\frac{V_2}{V_1}=1\times 8.31\times 400\times\ln\frac{0.005}{0.001}=5.35\times 10^3\text{ J}$$

$$\because\eta_{\text{卡}}=1-\frac{Q_2}{Q_1}=1-\frac{T_2}{T_1}=\frac{A}{Q_1}\text{，}\ \therefore\frac{T_2}{T_1}=\frac{Q_2}{Q_1}\text{，有 }Q_2=\frac{T_2}{T_1}Q_1=\frac{300}{400}\times 5.35\times 10^3=4.01\times 10^3\text{ J}$$

$$A=Q_1-Q_2=5.35\times 10^3-4.01\times 10^3=1.34\times 10^3\text{ J}$$

6-11 一定量的理想气体，经历如图 6-11 所示循环过程，其中AB和CD为等压过程，BC和DA为绝热过程。已知B点的温度为T_B=T_1，C点的温度为T_C=T_2。（1）证明其效率为$\eta=1-\frac{T_2}{T_1}$；（2）该循环是卡诺循环吗？

解：（1）循环过程中，AB 为吸热过程，CD 为放热过程

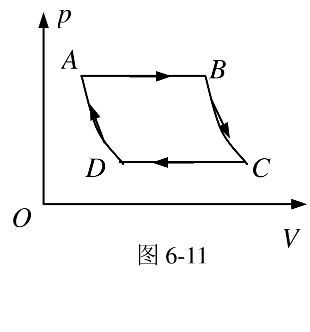


图 6-11

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{CD}|}{Q_{AB}} = 1 - \frac{\left|\frac{m}{M_{\text{mol}}} C_p (T_D - T_C)\right|}{\frac{m}{M_{\text{mol}}} C_p (T_B - T_A)} = 1 - \frac{T_C - T_D}{T_B - T_A} = 1 - \frac{T_C}{T_B} \frac{(1 - T_D / T_C)}{(1 - T_A / T_B)}$$

$\because$ A－B、C－D 等压过程有 $\frac{V_A}{V_B} = \frac{T_A}{T_B}$，$\frac{V_D}{V_C} = \frac{T_D}{T_C}$

B－C、D－A 绝热过程有 $V_B^{\gamma-1} T_B = V_C^{\gamma-1} T_C$，$V_A^{\gamma-1} T_A = V_D^{\gamma-1} T_D$

$\therefore (\frac{V_A}{V_B})^{\gamma-1} \frac{T_A}{T_B} = (\frac{V_D}{V_C})^{\gamma-1} \frac{T_D}{T_C}$ 即 $(\frac{T_A}{T_B})^{\gamma} = (\frac{T_D}{T_C})^{\gamma}$ 有 $\frac{T_A}{T_B} = \frac{T_D}{T_C}$

$\therefore \eta = 1 - \frac{T_C}{T_B} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

（2） 不是卡诺循环。卡诺循环由两等温过程和两绝热过程组成。其中的T_1、T_2是两恒定热源的温度。而这里的T_1、T_2不是过程中的恒定温度，只是两点的温度。

6-12 一台家用冰箱(设为理想卡诺致冷机)放在室温为 27℃的房间里。当制作一块-13℃的冰块时吸热 1.95×10^5 J。求(1)该冰箱的致冷系数；(2)制作该冰块时所需的功；(3)若冰箱以1.95×10^2 J/s 速率吸取热量，所要求的电功率为多少瓦？

解：(1) $w_c = \frac{T_2}{T_1 - T_2} = \frac{260}{300 - 260} = 6.5$

(2) $w_c = \frac{Q_2}{A}, A = \frac{Q_2}{w_c} = \frac{1.95 \times 10^5}{6.5} = 3 \times 10^4$ J

(3) $p = \frac{A}{t} = \frac{3 \times 10^4}{1.95 \times 10^5 / 1.95 \times 10^2} = 30\,\text{W}$

6-13 已知 1mol 理想气体的定容热容为C_V，开始温度为T_1，体积为V_1，经过下列三个可逆过程：先等温膨胀到体积为$V_2 (= 2V_1)$，再等容升压使压强恢复到初始压强，最后等压压缩到原来的体积，如图 6-13 所示。设该气体的比热比为γ，求(1)每一个过程的熵变是多少?(2)整个循环过程系统的熵变是多少?

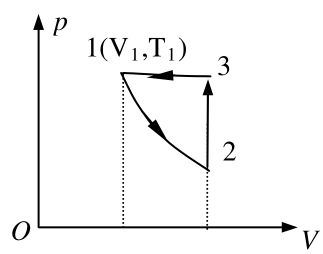


图 6-13

解：(1) $\Delta S_{12} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \frac{1}{T} \int_1^2 \mathrm{d}Q = \frac{1}{T} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = R \ln 2$

$$\Delta S_{23} = \int_2^3 \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \int_2^3 \frac{C_V \,\mathrm{d}T}{T} = C_V \ln \frac{T_3}{T_2} = C_V \ln \frac{p_3}{p_2} = C_V \ln 2$$

$$\Delta S_{31} = \int_3^1 \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \int_3^1 \frac{C_p \,\mathrm{d}T}{T} = C_p \ln \frac{T_1}{T_3} = C_p \ln \frac{V_1}{V_3} = -C_p \ln 2 = -\gamma C_V \ln 2$$

(2) $\Delta S = \Delta S_{12} + \Delta S_{23} + \Delta S_{31} = R\ln 2 + C_V \ln 2 - C_p \ln 2 = 0$

6-14 根据熵增加原理说明，为什么 0℃的冰自发融化为 0℃的水的过程是不可逆过程？（提示：环境和冰组成一个孤立系统，冰融化时，环境温度至少略高于 0℃）。

解：将冰和环境视为一孤立系统，冰在 0℃上发生相变时从环境中吸热Q，环境温度为T（高于 0℃），相变前后系统的熵变为两部分熵变之和，即

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \int \frac{\mathrm{d}Q}{T_0} + \int \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \frac{Q}{273} - \frac{Q}{T} > 0$$

根据熵增加原理：在封闭系统中发生的任何不可逆过程，都导致了整个系统的熵的增加，系统的总熵只有在可逆过程中才是不变的。所以 0℃的冰自发融化为 0℃的水的过程是不可逆过程。

库仑定律

7-1 把总电荷电量为Q的同一种电荷分成两部分，一部分均匀分布在地球上，另一部分均匀分布在月球上，使它们之间的库仑力正好抵消万有引力，已知地球的质量M＝5.98×l0^{24}kg，月球的质量m=7.34×l0^{22}kg。（1）求 Q 的最小值；（2）如果电荷分配与质量成正比，求Q的值。

解：（1）设Q分成q_1、q_2两部分，根据题意有 $k\dfrac{q_1q_2}{r^2}=G\dfrac{Mm}{r^2}$，其中$k=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

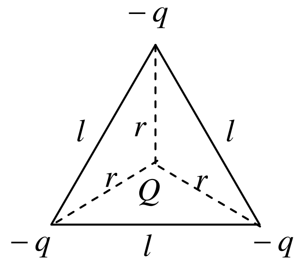
即 $Q=q_1+q_2=\dfrac{GMm}{q_2k}+q_2$。求极值，令$Q'=0$，得 $1-\dfrac{GMm}{q_2^2k}=0$

$\therefore q_2=\sqrt{\dfrac{GMm}{k}}=5.69\times10^{13}\ \text{C}$，$q_1=\dfrac{GMm}{q_2k}=5.69\times10^{13}\ \text{C}$，$Q=q_1+q_2=1.14\times10^{14}\ \text{C}$

（2）$\because \dfrac{M}{q_1}=\dfrac{m}{q_2}$，$q_1q_2=\dfrac{GMm}{k}$ $\quad \therefore Mq_2^2=mq_1q_2=m\dfrac{GMm}{k}$

解得$q_2=\sqrt{\dfrac{Gm^2}{k}}=6.32\times10^{12}\ \text{C}$， $q_1=\dfrac{Mq_2}{m}=5.15\times10^{14}\ \text{C}$，$\therefore Q=q_1+q_2=5.21\times10^{14}\ \text{C}$

7-2 三个电量为 $-q$ 的点电荷各放在边长为 l 的等边三角形的三个顶点上，电荷 Q（Q＞0）放在三角形的重心上。为使每个负电荷受力为零，Q 值应为多大？



解：Q 到顶点的距离为 $r=\dfrac{\sqrt{3}}{3}l$，Q 与-q 的相互吸引力为 $F_1=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qQ}{r^2}$，

两个-q 间的相互排斥力为 $F_2=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q^2}{l^2}$

据题意有 $2F_2\cos30^0=F_1$，即 $2\times\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q^2}{l^2}\cos300=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qQ}{r^2}$，解得：$Q=\dfrac{\sqrt{3}}{3}q$

电场强度

7-3 如图 7-3 所示，有一长l的带电细杆。（1）电荷均匀分布，线密度为+λ，则杆上距原点x处的线元dx对P点的点电荷q_0 的电场力为何？q_0受的总电场力为何？（2）若电荷线密度λ=kx，k为正常数，求P点的电场强度。

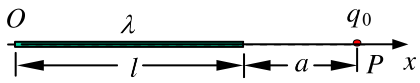


图 7-3

解：（1）线元dx所带电量为$\mathrm{d}q=\lambda\,\mathrm{d}x$，它对$q_0$的电场力为

$$\mathrm{d}F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0\,\mathrm{d}q}{(l+a-x)^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0\lambda\,\mathrm{d}x}{(l+a-x)^2}$$

q_0受的总电场力 $F=\dfrac{q_0\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_0^l\frac{\mathrm{d}x}{(l+a-x)^2}=\frac{q_0\lambda l}{4\pi\varepsilon_0a(l+a)}$

$q_0>0$时，其方向水平向右；$q_0<0$时，其方向水平向左

（2）在 x 处取线元 dx，其上的电量 $\mathrm{d}q=\lambda\,\mathrm{d}x=kx\,\mathrm{d}x$，它在 P 点的电场强度为

$$\mathrm{d}E_P=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{(l+a-x)^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{kx\,\mathrm{d}x}{(l+a-x)^2}$$

$$\therefore E_P=\frac{k}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^l\frac{x\,\mathrm{d}x}{(l+a-x)^2}=\frac{k}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{l}{a}+\ln\frac{a}{l+a})$$ 方向沿 x 轴正向。

7-4 一半径为 R 的绝缘半圆形细棒，其上半段均匀带电量+q，下半段均匀带电量-q，如图 7-4 所示，求半圆中心处电场强度。

解：建立如图所示的坐标系，由对称性可知，+q 和-q 在 O 点电场强度沿 x 轴的分量之和为零。取长为 dl 的线元，其上所带电量为

$$\mathrm{d}q=\lambda\,\mathrm{d}l=\frac{q}{\frac{1}{2}\pi R}\mathrm{d}l=\frac{2q}{\pi R}R\,\mathrm{d}\theta=\frac{2q}{\pi}\mathrm{d}\theta,\quad \therefore \mathrm{d}E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{R^2}$$ 方向如图

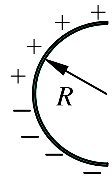


图 7-4

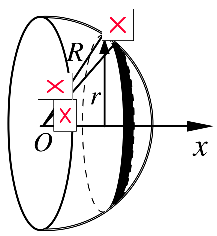
y 方向的分量 $$\mathrm{d}E_y=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{R^2}\cos\theta=-\frac{q\,\mathrm{d}\theta}{2\pi^2\varepsilon_0R^2}\cos\theta$$

$$\therefore \vec{E}=-2\times\frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0R^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\vec{j}=-\frac{q}{\pi^2\varepsilon_0R^2}\vec{j}$$

7-5 一半径为 R 的半球壳，均匀带有电荷，电荷面密度为σ，求球心处电场强度。

解：沿半球面的对称轴建立 x 轴，坐标原点为球心 O。

在球面上取半径为 r、宽为 dl 的环带，如图，其面积为



$\mathrm{d}S=2\pi r\,\mathrm{d}l=2\pi r\cdot R\,\mathrm{d}\theta$，所带电荷 $\mathrm{d}q=\sigma\,\mathrm{d}S=\sigma\cdot2\pi r\cdot R\,\mathrm{d}\theta$

dq 在 O 处产生的电场强度为，$$\mathrm{d}E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\,\mathrm{d}q}{(x^2+r^2)^{3/2}}=\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\frac{xr\,\mathrm{d}\theta}{(x^2+r^2)^{3/2}}$$

$\because r=R\sin\theta,\quad x=R\cos\theta$ $\qquad\therefore \mathrm{d}E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$

因为球面上所有环带在 O 处产生的电场强度方向相同，$\therefore \vec{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\vec{i}=\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\vec{i}$

7-6 一无限大均匀带电薄平板，面电荷密度为σ，平板中部有一半径为 R 的圆孔，如图 7-6 所示。求圆孔中心轴线上的场强分布。（提示：利用无穷大板和圆盘的电场及场强叠加原理）

解：利用补偿法，将圆孔看作由等量的正、负电荷重叠而成，即等效为一个完整的带电无穷大平板和一个电荷面密度相反的圆盘叠加而成。

无穷大平板的电场为 $\vec{E}_1=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_n$

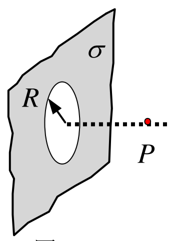


图 7-6

圆盘激发的电场为 $\vec{E}_2 = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+R^2}})\vec{e}_n$，其中 $\vec{e}_n$ 为平板外法线的单位矢量。

圆孔中心轴线上的电场强度为 $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\vec{e}_n$

电通量

7-7 电场强度为 $\vec{E}$ 的匀强电场，其方向与半径为 R 的半球面的对称轴平行，如图 7-7 所示，求通过该半球面的电场强度通量。

解：作半径为 R 的平面 S’与半球面 S 构成一个闭合曲面，由于该闭合曲面内无电荷，由高斯定理

$$\Phi = \oint_{S+S'} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{S'} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

$$\therefore \Phi_S = \int_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\int_{S'} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -E\cdot \pi R^2 \cos\pi = \pi R^2 E$$

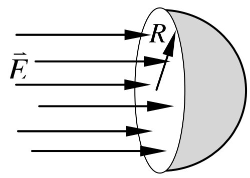


图 7-7

7-8 一边长为 a 的立方体置于直角坐标系中，如图 7-8 所示。现空间中有一非均匀电场 $\vec{E} = (E_1 + kx)\vec{i} + E_2\vec{j}$，$E_1$、$E_2$ 为常量，求电场对立方体各表面及整个立方体表面的电场强度通量。

解：$\because E_z = 0 \qquad \therefore \Phi_{OABC} = \Phi_{DEFG} = 0$

$$\Phi_{ABGF} = \int_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_S [(E_1+kx)\vec{i} + E_2\vec{j}]\cdot(\mathrm{d}S\vec{j}) = E_2 S = E_2 a^2$$

$$\Phi_{CDEO} = \int_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_S [(E_1+kx)\vec{i} + E_2\vec{j}]\cdot(-\mathrm{d}S\vec{j}) = -E_2 a^2$$

$$\Phi_{AOEF} = \int_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_S (E_1\vec{i} + E_2\vec{j})\cdot(-\mathrm{d}S\vec{i}) = -E_1 a^2$$

$$\Phi_{BCDG} = \int_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_S [(E_1+ka)\vec{i} + E_2\vec{j}]\cdot(\mathrm{d}S\vec{i}) = (E_1+ka)a^2$$

整个立方体表面的电场强度通量 $\quad \Phi = \sum_i \Phi_i = ka^3$

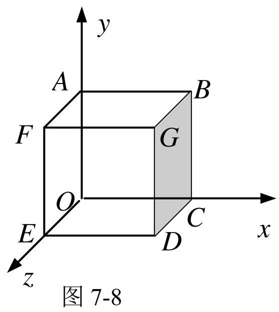


图 7-8

高斯定理

7-9 有两个同心的均匀带电球面，内外半径分别为 R_1 和 R_2，已知外球面的电荷面密度为 $+\sigma$，其外面各处的电场强度都是零。试求：（1）内球面上的电荷面密度；（2）外球面以内空间的电场分布。

解：作一半径为 r 的同心球面为高斯面。设内球面上的电荷面密度为 σ'。

（1）$r > R_2$ 处：因为外球面外的电场强度处处为零，由高斯定理有

$$\oint_S \vec{E}_3\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i = \frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma\cdot 4\pi R_2^2 + \sigma'\cdot 4\pi R_1^2) = 0\text{，得}\quad \sigma' = -(\frac{R_2}{R_1})^2\sigma$$

（2）由高斯定理

$r < R_1 \qquad \vec{E}_1 = 0$

$$R_1 < r < R_2 \qquad \oint_S \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma' \cdot 4\pi R_1^2 \qquad \text{即} \qquad E_2 \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma' \cdot 4\pi R_1^2$$

$$\therefore E_2 = \frac{\sigma' \cdot 4\pi R_1^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = -(\frac{R_2}{R_1})^2 \sigma \cdot \frac{R_1^2}{\varepsilon_0 r^2} = -\frac{R_2^2 \sigma}{\varepsilon_0 r^2} \quad \text{方向沿径向反向}$$

7-10 一对无限长的均匀带电共轴直圆筒，内外半径分别为R_1和R_2，沿轴线方向单位长度的电量分别为λ_1和λ_2。（1）求各区域内的场强分布；（2）若$\lambda_1 = -\lambda_2$，情况如何？画出此情形下的$E \sim r$的关系曲线。

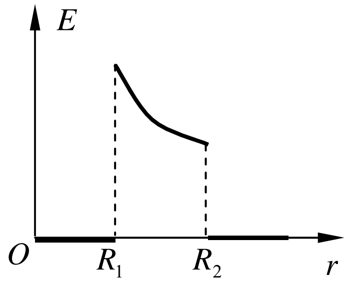
解：（1）作一半径为 r、长为 h 的共轴圆柱面为高斯面，由高斯定理有

$$r < R_1 \qquad \vec{E}_1 = 0$$

$$R_1 < r < R_2 \qquad \oint_S \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\lambda_1 h \qquad \therefore E_2 \cdot 2\pi r h = \frac{1}{\varepsilon_0}\lambda_1 h \text{，得} \quad \vec{E}_2 = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}$$

$$r > R_2 \qquad \oint_S \vec{E}_3 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\lambda_1 + \lambda_2)h \quad \text{得} \quad \vec{E}_3 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}$$

（2）$\lambda_1 = -\lambda_2$ 时，$\vec{E}_1 = 0$，$\vec{E}_2 = \dfrac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}$，$\vec{E}_3 = 0$



7-11 设半径为 R 的球体，电荷体密度 $\rho = kr$（$r \le R$），其中 k 为常量，r 为距球心的距离。求电场分布，并画出 $E \sim r$ 的关系曲线。

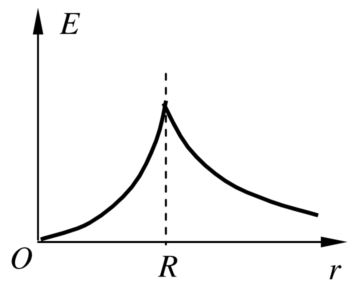
解：作一半径为 r 的同心球面为高斯面。根据高斯定理

$$r < R \qquad \oint_S \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\,\mathrm{d}V = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r kr \cdot 4\pi r^2\,\mathrm{d}r = \frac{1}{\varepsilon_0}\pi k r^4$$

$$\text{即} \qquad E_1 \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\pi k r^4 \qquad \text{得} \qquad \vec{E}_1 = \frac{kr^2}{4\varepsilon_0}\hat{r}$$

$$r > R \qquad \oint_S \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^R kr \cdot 4\pi r^2\,\mathrm{d}r = \frac{1}{\varepsilon_0}\pi k R^4$$

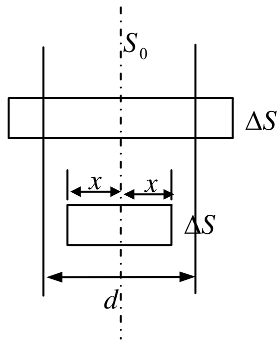
$$\text{即} \qquad E_2 \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\pi k R^4 \qquad \text{得} \qquad \vec{E}_2 = \frac{kR^4}{4\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$



7-12 一厚度为d=0.5cm的无限大平板，均匀带电，电荷体密度 $\rho = 1.0\times10^{-4}\,\mathrm{C/m^3}$，求（1）平板内外的电场分布；（2）讨论平板中央以及平板内与其表面相距 0.1cm处的电场强度。

解：（1）设中心平面为S_0。根据对称性，在距S_0处为x处对称地取两面积均为ΔS 的底面作一圆柱形高斯面，其侧面与板面垂直（如图所示），即侧面的电通量为零。

$$x < \frac{d}{2} \text{时} \quad \oint_S \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 2E_1\Delta S = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot 2\rho\, x\Delta S \text{，} \quad \therefore E_1 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}x$$



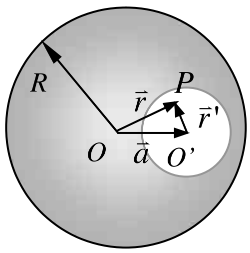
$x > \dfrac{d}{2}$ 时　$\oint_S \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 2E_2\Delta S = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\cdot 2\rho\cdot\dfrac{d}{2}\Delta S$，　$\therefore E_2 = \dfrac{\rho d}{\varepsilon_0}$

（2）平板中央　$x=0$，$\therefore E_0 = 0$

平板内与表面相距 0.1cm 处，$x = 0.15\text{cm}$

$$\therefore E = \frac{\rho x}{\varepsilon_0} = \frac{1.0\times10^{-4}\times1.5\times10^{-3}}{8.85\times10^{-12}} = 1.69\times10^{4}\ \text{V/m}$$

7-13 一个电荷体密度为 ρ（常量）的球体。（1）证明球内距球心 r 处一点的电场强度为 $\vec{E} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}$；（2）若在球内挖去一个小球，如图 7-13 所示，证明小球空腔内的电场是匀强电场 $\vec{E} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{a}$，式中 $\vec{a}$ 是球心到空腔中心的距离矢量。



证：（1）作与球体同心的球面为高斯面，根据高斯定理

$$\oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\,\mathrm{d}V \qquad 即 \qquad E\cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3$$

$\therefore E = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}r$　矢量式　$\vec{E} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}$　　得证

（2）填充法：设在空腔中填充电荷密度分别为 ρ 和-ρ 的电荷球体，形成电荷密度分别为 ρ 和-ρ 的大球体和小球体。

对腔内任一点 P（如图），由（1）的结果有

大球　$\vec{E}_{1P} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}$；　　　小球　$\vec{E}_{2P} = -\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}'$

$$\vec{E} = \vec{E}_{1P} + \vec{E}_{2P} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{a} \qquad 得证$$

静电场的环路定理

7-14 若电场中某一部分电场线的形状是以O点为中心的同心圆弧。证明该部分上各点的电场强度都应与该点离O点的距离成反比，即$E_1 r_1 = E_2 r_2$ 。

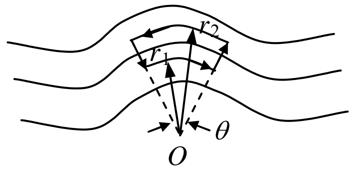


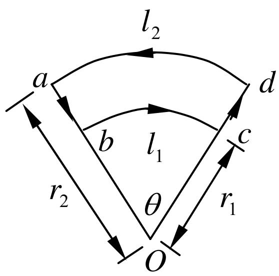
图 7-14

证：作一回路 $abcd$，如图。根据静电场环路定理

$$\oint \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_{bc}\vec{E}_1\cdot\mathrm{d}\vec{l} + \int_{da}\vec{E}_2\cdot\mathrm{d}\vec{l} = E_1 l_1 - E_2 l_2 = 0$$

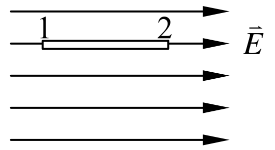
即　$E_1 l_1 = E_2 l_2$

$\because l_1 = r_1\theta \quad l_2 = r_2\theta$，$\therefore E_1 r_1 = E_2 r_2$　　得证



7-15 证明：在静电场中，凡电场线都是平行直线的地方，电场强度的大小必定处处相等。（提示：利用环路定理和高斯定理）

证：设电场方向水平向右。在一电场线上任取两点 1 和 2，作两底面足够小的圆柱面，如图。由高斯定理

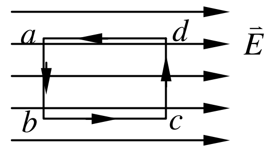


$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{\Delta S} \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{\Delta S} \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = E_2 \cdot \Delta S - E_1 \cdot \Delta S = 0$$

$\therefore E_2 = E_1$ 即同一电场线上任意两点的电场强度相等。

作一矩形回路 abcd，其中 ab、cd 与电场线垂直，bc、da 与电场线平行，即有

$E_a = E_d$，$E_b = E_c$



由静电场环路定理

$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{ab} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{bc} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{cd} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{da} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_{bc} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{da} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = E_b \Delta l - E_a \Delta l = 0$$

$\therefore E_b = E_a$ 即不同电场线上任意两点的电场强度相等。所以命题成立。

电场力的功和电势能

7-16 边长为 a 的正三角形, 三个顶点上各放置 q，$-q$ 和$-2q$ 的点电荷，求此三角形重心上的电势。将一电量为$+Q$ 的点电荷由无限远处移到重心上，外力做功多少？

解：顶点到重心的距离 $r = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$，重心的电势为 $U = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \dfrac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \dfrac{-2q}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\dfrac{\sqrt{3}q}{2\pi\varepsilon_0 a}$

外力所做的功 $A_{外} = Q(U_0 - U_\infty) = QU_0 = -\dfrac{\sqrt{3}qQ}{2\pi\varepsilon_0 a}$

7-17 如图 7-17 所示，三个点电荷Q_1、Q_2、Q_3沿一直线等距放置，且$Q_1=Q_3=Q$，其中任一点电荷所受合力均为零。求Q_1、Q_3固定情况下，（1）Q_2在O点时的电势能；（2）将Q_2从O点推到无穷远处，外力所做的功。

解：（1）Q_1和Q_3在O点产生的电势为 $U_0 = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 d} + \dfrac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 d} = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 d}$

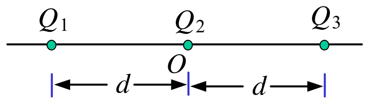


图 7-17

因为Q_1所受合力为零，即 $\dfrac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 d^2} + \dfrac{Q_1 Q_3}{4\pi\varepsilon_0 (2d)^2} = 0$，

解得 $Q_2 = -\dfrac{1}{4}Q_3 == -\dfrac{1}{4}Q$，$Q_2$在O点的电势能 $W = Q_2 U_0 = -\dfrac{1}{4}QU_0 = -\dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 d}$

（2）将Q_2从O点推到无穷远处，外力所做的功 $A_{外} = Q_2(U_\infty - U_0) = -Q_2 U_0 = \dfrac{\sqrt{3}qQ}{8\pi\varepsilon_0 a}$

7-18 一半径为R的无限长带电棒，其内部的电荷均匀分布，电荷体密度为ρ 。（1）求电场分布；（2）如图7-18 所示（沿棒轴向俯视），若点电荷q_0由a点运动到b点，则电场力做功为多少？

解：（1）取长为 l、半径为 r 且与带电棒同轴的圆柱面为高斯面。由高斯定理

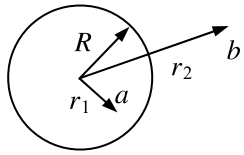


图 7-18

$$r<R \qquad \oint_S \vec{E}_1\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\,\mathrm{d}V=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho 2\pi r l\,\mathrm{d}\,r$$

即 $$E_1\cdot 2\pi r l=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho\pi r^2 l \qquad 得 \qquad \vec{E}_1=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\vec{r}$$

$$r>R \qquad E_2\cdot 2\pi r l=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho\pi R^2 l \quad 得 \quad \vec{E}_2=\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\hat{\vec{r}}$$

（2）半径相同处的电势相等

$$A_{ab}=q_0\int_a^b \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=q_0\int_a^R \vec{E}_1\cdot\mathrm{d}\vec{l}+q_0\int_R^b \vec{E}_2\cdot\mathrm{d}\vec{l}=q_0\int_{r_1}^R \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\mathrm{d}\,r+q_0\int_R^{r_2}\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\mathrm{d}\,r$$

$$=\frac{q_0\rho}{4\varepsilon_0}(R^2-r_1^2)+\frac{q_0\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{R}$$

电势

7-19 题 7-18 中，若取棒的表面为零电势，求空间的电势分布。

解：取棒表面为零电势，即$U_R=0$

$$r<R \quad 时，U_1=\int_r^R \vec{E}_1\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_r^R \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\mathrm{d}\,r=\frac{\rho}{4\varepsilon_0}(R^2-r^2)$$

$$r>R \quad 时，U_2=\int_r^R \vec{E}_2\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-\int_R^r \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\mathrm{d}\,r=\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln\frac{R}{r}$$

7-20 如图 7-20 所示，电荷面密度分别为 $+\sigma$ 和 $-\sigma$ 的两块“无限大”均匀带电平行平面，分别与x轴相交于$x_1=a$ 和$x_2=-a$两点。设坐标原点O处电势为零，求空间的电势分布。

解： $x<-a$：$\vec{E}_1=0$；$-a<x<a$：$\vec{E}_2=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{i}$；$x>a$：$\vec{E}_3=0$。

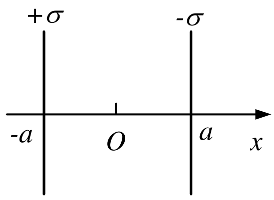


图 7-20

$$\therefore \quad x<-a：U_1=\int_x^0 \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_{-a}^0 \vec{E}_2\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}a$$

$$-a<x<a：U_2=\int_x^0 \vec{E}_2\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-\int_0^x \vec{E}_2\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}x$$

$$x>a：U_3=\int_x^0 \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_a^0 \vec{E}_2\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-\int_0^a \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\mathrm{d}\,l=-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}a$$

7-21 两根半径分别为R_1=3.0×10^{-2}m和R_2=0.10m的长直同轴圆柱面，带有等量异号的电荷，两者的电势差为450V。求圆柱面单位长度上所带电荷λ 。

解：由高斯定理可求得两柱面间的电场强度 $E=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

$$\therefore U_{12}=\int_{R_1}^{R_2}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}r}{r}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}=450\mathrm{V}$$，解得 $\lambda=2.1\times10^{-8}\,\mathrm{c\cdot m^{-1}}$

7-22 如图 7-22 所示的带电细棒，电荷线密度为λ，其中 *BCD* 为半径为 *R* 的半圆，*AB*=*DE*=*R*，求（1）半圆上的电荷在半圆中心 *O* 处产生的电势；（2）直细棒 *AB* 和 *DE* 在半圆中心 *O* 处产生的电势；（3）*O* 处的总电势。

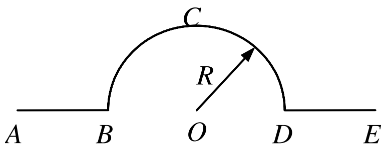


图 7-22

解：（1）取电荷元 $\mathrm{d}q=\lambda\,\mathrm{d}l$，$\therefore U_1=\int\dfrac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R}=\dfrac{\lambda\pi R}{4\pi\varepsilon_0 R}=\dfrac{\lambda}{4\varepsilon_0}$

（2）在 *AB* 上距 *O* 点为 *r* 处，取电荷元 $\mathrm{d}q=\lambda\,\mathrm{d}l$

$$\therefore U_2=\int\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\int_R^{2R}\frac{\lambda\,\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln2$$。同理 *DE* 在 *O* 点产生的电势 $U_3=\dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln2$

（3）$U_0=U_1+U_2+U_3=\dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}(\pi+2\ln2)$

7-23 半径分别为R_1和R_2的两个同心球面，分别带有电荷q_1和q_2。求：（1）各区域电势分布，并画出分布曲线；（2）两球面间电势差；（3）若R_1=10cm、R_2=30cm、q_1=10^{-8}C、q_2=1.5×10^{-8}C，离球心 20cm和 50 cm处的电势为多少？

解：（1）由高斯定理可得电场分布为

$r<R_1$：$\vec{E}_1=0$；　$R_1<r<R_2$：$\vec{E}_2=\dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$；　$r>R_2$：$\vec{E}_2=\dfrac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$。

电势分布为

$r<R_1$：
$$U_1=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_r^{\infty}\vec{E}_1\cdot\mathrm{d}\vec{l}+\int_{R_1}^{R_2}\vec{E}_2\cdot\mathrm{d}\vec{l}+\int_{R_2}^{\infty}\vec{E}_3\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$=0+\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$R_1<r<R_2$：
$$U_2=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_r^{R_2}\vec{E}_2\cdot\mathrm{d}\vec{l}+\int_{R_2}^{\infty}\vec{E}_3\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$r>R_2$：
$$U_3=\int_r^{\infty}\vec{E}_3\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

(2) $U_{12}=\int_{R_1}^{R_2}\vec{E}_2\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2})$

(3) $r=20\mathrm{cm}$ 即在两球面之间 $U_{20}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\dfrac{q_1}{r}+\dfrac{q_2}{R_2})=9\times10^9\times(\dfrac{10^{-8}}{0.2}+\dfrac{1.5\times10^{-8}}{0.3})=900\mathrm{V}$

$r=50\mathrm{cm}$ 即在两球面之外 $U_{50}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\dfrac{q_1+q_2}{r})=9\times10^9\times(\dfrac{10^{-8}+1.5\times10^{-8}}{0.5})=450\mathrm{V}$

电场强度与电势的关系

7-24 已知一电场的电势函数为$U=2x^3+y$，求电场强度$\vec{E}$。

解：$E_x=-\dfrac{\partial U}{\partial x}=-6x^2$，$E_y=-\dfrac{\partial U}{\partial y}=-1$，$\therefore\vec{E}=\vec{E}_x\vec{i}+\vec{E}_y\vec{j}=-6x^2\vec{i}-\vec{j}$

或 $\vec{E}=-(\dfrac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\dfrac{\partial U}{\partial z}\vec{k})=-(6x^2\vec{i}+\vec{j})$

7-25 试计算半径为R、电荷线密度为λ的均匀带电细圆环轴线上的电势分布，并由电势分布求出轴线上的电场强度分布。

解：在圆环上任取一线元，带电量为$\mathrm{d}Q=\lambda\,\mathrm{d}l$，$\mathrm{d}Q$在轴线上距圆环中心为$x$点产生的电势为

$$\mathrm{d}U=\frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\lambda\,\mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}，\quad\because\quad U=\int\mathrm{d}U=\frac{\lambda2\pi R}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}=\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$$

$$E_x=-\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\lambda Rx}{2\varepsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}}，\quad\vec{E}=E_x\vec{i}=\frac{\lambda Rx}{2\varepsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}}\vec{i}$$

导体

8-1 两个同心导体球壳 A 和 B，A 球壳带电+Q，现从远处移来一带+q 的带电体（见图 8-1），试问（请阐明理由）：（1）两球壳间的电场分布与无+q 时相比有无变化？（2）两球壳间的电势差是否变化？（3）两球壳的电势是否变化？（4）如将 B 球壳接地，上述（1）、（2）、（3）的情况又如何？

解：（1）由于静电屏蔽作用，+q 对两球壳间的电场没有影响。

（2）由 $U_{AB}=\int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 可知，由于 $\vec{E}$ 不变，所以 U_{AB} 不变，即两求壳间的电势差不变。

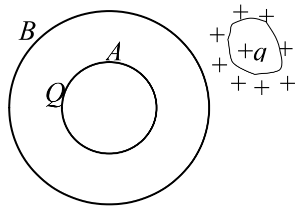


图 8-1

（3）由电势叠加原理，+q 使两球壳的电势升高。

（4）B 球壳接地，由于屏蔽作用，两球壳间的电场分布不变，从而 U_{AB} 不变。因 B 球壳接地，电势不变，所以 A 球壳电势也不变。

8-2 半径为 R_1 的导体球 A，带电 q，其外同心地套一导体球壳 B，内外半径分别为 R_2 和 R_3（见图 8-2），且 $R_2=2R_1$，$R_3=3R_1$。今在距球心 O 为 $d=4R_1$ 的 P 处放一点电荷 Q，并将球壳接地。问（1）球壳 B 所带的净电荷 Q' 为多少？（2）如用导线将导体球 A 与球壳 B 相连，球壳所带电荷 Q'' 为多少？

解：（1）根据静电平衡条件，A 球上电荷 q 分布在 A 球表面上，B 球壳内表面带电荷-q。

由高斯定理可得，$R_1<r<R_2$：$\vec{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}^{\,0}$

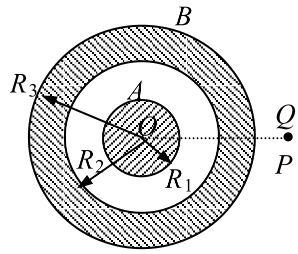


图 8-2

A 球电势 $U_A=\int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_{R_1}^{R_2}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2})=\dfrac{q}{8\pi\varepsilon_0 R_1}$

设 B 球壳外表面带电荷 q’，由电势叠加原理，A 球球心处电势

$$U_0=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R_3}+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_4}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 2R_1}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 3R_1}+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 4R_1}$$

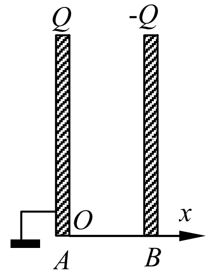
$$=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 3R_1}+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 4R_1}=U_A=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R_1},\quad \therefore q'=-\frac{3}{4}Q$$

B 球壳所带净电荷 $Q'=q'-q=-\dfrac{3}{4}Q-q$

（2）用导线将和相连，球上电荷与球壳内表面电荷相消。 $\therefore Q''=q'=-\dfrac{3}{4}Q$

8-3 两带有等量异号电荷的金属板 A 和 B，相距 5.0mm，两板面积都是 150cm^2，电量大小都是 2.66×10^{-8}C，A 板带正电并接地（电势为零），如图 8-3 所示。略去边缘故应，求（1）两板间的电场强度 $\vec{E}$；（2）B 板的电势；（3）两板间离 A 板 1.0mm 处的电势。

解：建立如图所示的坐标系，左右板的电荷面密度分别为 $+\sigma$ 和 $-\sigma$。



（1）两板间的电场强度

$$\vec{E}=\vec{E}_{左}+\vec{E}_{右}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{i}+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{i}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{i}=\frac{Q}{\varepsilon_0 S}\vec{i}$$

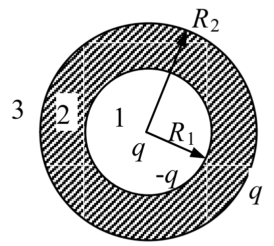
$$=\frac{2.66\times10^{-8}C}{8.85\times10^{-12}\times1.5\times10^{-2}}\vec{i}=2.0\times10^{5}\vec{i}\ \mathrm{N/C}$$

（2）$U_B=\int_B^A \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=-\int_{x_B}^{0} E\,\mathrm{d}x=-E\cdot x_B=-2.0\times 10^5\times 5.0\times 10^{-3}=-1.0\times 10^3\ \mathrm{V}$

（3）$U=-\int_{1.0\times 10^{-3}}^{0} E\,\mathrm{d}x=-200.0\ \mathrm{V}$

8-4 点电荷q处在导体球壳的中心，壳的内外半径分别为R_1和R_2（见图 8-4）。求电场强度和电势的分布，并画出E - r和U - r曲线.。

解：将空间分为三个区域，根据静电平衡时电荷分布和高斯定理可得



$r<R_1$： $\vec{E}_1=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}^{\,0}$； $R_1<r<R_2$： $\vec{E}_2=0$；

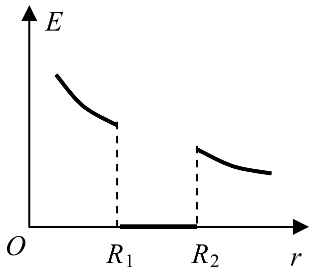
$r>R_2$： $\vec{E}_3=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}^{\,0}$

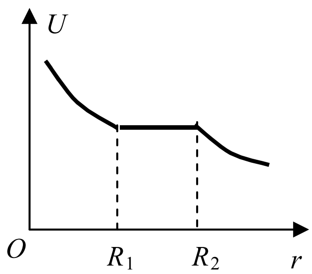
电势分布

$$r<R_1：U=\int_r^\infty \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_r^{R_1}\vec{E}_1\cdot \mathrm{d}\vec{l}+\int_{r_2}^{\infty}\vec{E}_3\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$$

$$R_1\le r\le R_2：U=\int_r^\infty \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_{r_2}^{\infty}\vec{E}_3\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$$r>R_2：U=\int_r^\infty \vec{E}_3\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

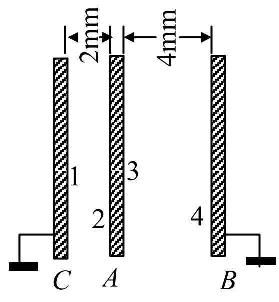




电介质

8-5 三平行金属板A、B和C，面积都是 200cm^2，A、B相距 4.0mm，A、C间相距 2.0mm，B、C两板都接地（见图 8-5）。如果使A板带正电 3.0×10^{-7}C，在忽略边缘效应时，（1）求B和C板上的感应电荷以及A板的电势；（2）若在A、B板间充满相对介电常数为ε_r=5 的均匀电介质，求B和C板上的感应电荷以及A板的电势。

解：（1）外侧面上电荷为零，其它面由左至右分别设为 1、2、3、4 面。



$\because \sigma_2 S+\sigma_3 S=q_A$， $\Delta U_{AC}=\Delta U_{AB}$， 即 $\dfrac{\sigma_2}{\varepsilon_0}d_{AC}=\dfrac{\sigma_3}{\varepsilon_0}d_{AB}$

$\therefore \sigma_2=2\sigma_3$，得： $\sigma_3=\dfrac{q_A}{3S}$， $\sigma_2=\dfrac{2q_A}{3S}$

$\therefore \sigma_1=-\sigma_2=-\dfrac{2q_A}{3S}$， $\sigma_4=-\sigma_3=-\dfrac{q_A}{3S}$

$$\therefore q_C = \sigma_1 S = -\frac{2q_A}{3} = -2\times10^{-7}\ \text{C}，\quad q_B = \sigma_4 S = -\frac{q_A}{3} = -1\times10^{-7}\ \text{C}$$

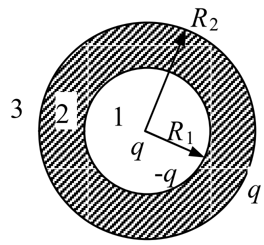
$$U_A = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} d_{AC} = \frac{2q_A}{3\varepsilon_0 S} d_{AC} = 2.26\times10^3\ \text{V}$$

（2）$\because \dfrac{\sigma_2}{\varepsilon_0} d_{AC} = \dfrac{\sigma_3}{\varepsilon_0\varepsilon_r} d_{AB} \quad \therefore \sigma_2 = \dfrac{2}{5}\sigma_3$ 可得 $\sigma_3 = \dfrac{5q_A}{7S} \quad \sigma_2 = \dfrac{2q_A}{7S}$

$$\therefore \sigma_1 = -\sigma_2 = -\frac{2q_A}{7S}，\quad \sigma_4 = -\sigma_3 = -\frac{5q_A}{7S}，\quad \therefore q_C = \sigma_1 S = -\frac{2q_A}{7} = -\frac{6}{7}\times10^{-7}\ \text{C}$$

$$q_B = \sigma_4 S = -\frac{5q_A}{7} = -\frac{15}{7}\times10^{-7}\ \text{C}，\quad U_A = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} d_{AC} = \frac{2q_A}{7\varepsilon_0 S} d_{AC} = 9.70\times10^2\ \text{V}$$

8-6 在一半径为R_1的长直导线外，套有内外半径分别为R_1和R_2、相对介电常数为ε_r的护套。设导线沿轴线单位长度上的电荷为λ，求空间的$\vec{D}$、$\vec{E}$、$\vec{P}$。



解：取同轴长为 l，半径为 r 的圆柱面为高斯面，由高斯定理

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = D\cdot 2\pi r l$$

$r<R_1$：$D\cdot 2\pi r l = 0$，$\therefore \vec{D}=0, \vec{E}=0, \vec{P}=0$

$R_1<r<R_2$：$D\cdot 2\pi r l = \lambda l$，$\therefore \vec{D} = \dfrac{\lambda}{2\pi r}\vec{r}^{\,0}$，$\vec{E} = \dfrac{\vec{D}}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}\vec{r}^{\,0}$

$$\vec{P} = \chi_e\varepsilon_0\vec{E} = (1-\frac{1}{\varepsilon_r})\frac{\lambda}{2\pi r}\vec{r}^{\,0}$$

$r>R_2$：$D\cdot 2\pi r l = \lambda l$，$\therefore \vec{D} = \dfrac{\lambda}{2\pi r}\vec{r}^{\,0}$，$\vec{E} = \dfrac{\vec{D}}{\varepsilon_0} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{r}^{\,0}$，$\vec{P} = \chi_e\varepsilon_0\vec{E} = 0$

8-7 半径为R_0的金属球，带电$+Q$，置于一内外半径分别为R_1和R_2的均匀介质球壳中，介质的相对介电常数为ε_r，如图 8-7 所示。求：（1）电场强度和电位移分布；（2）电势分布；*（3）介质中的电极化强度；*（4）介质壳内外表面上的极化电荷面密度。

解：（1）作一半径为 r 的同心球面为高斯面，由高斯定理

$r<R_0$：$\vec{E}_1 = 0$

$R_0<r<R_1$：$\oint_S \vec{D}_2\cdot d\vec{S} = D_2\cdot 4\pi r^2 = Q$，$\therefore \vec{D}_2 = \dfrac{Q}{4\pi r^2}\vec{r}^{\,0}$，$\vec{E}_2 = \dfrac{\vec{D}_2}{\varepsilon_0} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}^{\,0}$

$R_1<r<R_2$：$\oint_S \vec{D}_3\cdot d\vec{S} = D_3\cdot 4\pi r^2 = Q$，$\therefore \vec{D}_3 = \dfrac{Q}{4\pi r^2}\vec{r}^{\,0}$，$\vec{E}_3 = \dfrac{\vec{D}_3}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\vec{r}^{\,0}$

$r>R_2$：$\oint_S \vec{D}_4\cdot d\vec{S} = D_4\cdot 4\pi r^2 = Q$，$\therefore \vec{D}_4 = \dfrac{Q}{4\pi r^2}\vec{r}^{\,0}$，$\vec{E}_4 = \dfrac{\vec{D}_3}{\varepsilon_0} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}^{\,0}$

（2）$r<R_0$：$U_1=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_r^{R_0}\vec{E}_1\cdot\mathrm{d}\vec{l}+\int_{R_0}^{R_1}\vec{E}_2\cdot\mathrm{d}\vec{r}+\int_{R_1}^{R_2}\vec{E}_3\cdot\mathrm{d}\vec{r}+\int_{R_2}^{\infty}\vec{E}_4\cdot\mathrm{d}\vec{r}$

$$=\int_{R_0}^{R_1}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r+\int_{R_1}^{R_2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\mathrm{d}r+\int_{R_2}^{\infty}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}[(\frac{1}{R_0}-\frac{1}{R_1})+\frac{1}{\varepsilon_r}(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2})+\frac{1}{R_2}]$$

$R_0<r<R_1$：$U_2=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_r^{R_1}\vec{E}_2\cdot\mathrm{d}\vec{r}+\int_{R_1}^{R_2}\vec{E}_3\cdot\mathrm{d}\vec{r}+\int_{R_2}^{\infty}\vec{E}_4\cdot\mathrm{d}\vec{r}$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}[(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_1})+\frac{1}{\varepsilon_r}(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2})+\frac{1}{R_2}]$$

$R_1<r<R_2$：$U_3=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_r^{R_2}\vec{E}_3\cdot\mathrm{d}\vec{r}+\int_{R_2}^{\infty}\vec{E}_4\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{1}{\varepsilon_r}(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_2})+\frac{1}{R_2}]$

$r>R_2$：　$U_4=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_r^{\infty}\vec{E}_4\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

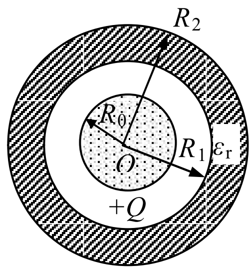


图 8-7

（3）$\vec{P}=\chi_e\varepsilon_0\vec{E}_3=(1-\frac{1}{\varepsilon_r})\frac{Q}{4\pi r^2}\vec{r}^0$

（4）R_1处介质壳内表面的法向指向球心，与$\vec{P}$反向

$$\therefore\sigma_1'=\vec{P}\cdot\vec{n}=-(1-\frac{1}{\varepsilon_r})\frac{Q}{4\pi R_1^2}$$

R_2处介质壳外表面的法向向外，与$\vec{P}$同向，$\therefore\sigma_2'=\vec{P}\cdot\vec{n}=(1-\frac{1}{\varepsilon_r})\frac{Q}{4\pi R_2^2}$

电容器

8-8 平行板电容器，极板而积为S，板间距为d。相对介电常数分别为ε_{r1}和ε_{r2}的两种电介质各充满板间的一半，如图 8-8 所示。（1）此电容器带电后，两介质所对的极板上自由电荷面密度是否相等？为什么？（2）此时两介质内的电位移大小D是否相等？（3）此电容器的电容多大？

解：（1）设左右两侧极板上的电荷面密度分别为$\pm\sigma_1$和$\pm\sigma_2$，因两侧电势差相等

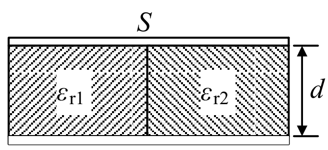


图 8-8

$\therefore E_1 d=E_2 d$　即　$E_1=E_2$，有　$\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}=\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}$

即　$\frac{\sigma_1}{\varepsilon_{r1}}=\frac{\sigma_2}{\varepsilon_{r2}}$，$\because\varepsilon_{r1}\neq\varepsilon_{r2}$　$\therefore\sigma_1\neq\sigma_2$

（2）对平行板　$D=\sigma$，由$\sigma_1\neq\sigma_2$　可知　$D_1\neq D_2$

（3）左右两侧电容分别为$C_1=\dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}S}{2d}$，$C_2=\dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}S}{2d}$，两电容并联 $C=C_1+C_2=\dfrac{\varepsilon_0 D}{2d}(\varepsilon_{r1}+\varepsilon_{r2})$

8-9 由半径为R_2的外导体球面和半径为R_1的内导体球面组成的球形电容器中间，有一层厚度为d、相对介电常数为ε_r的电介质，其中$d<R_2—R_1$，求该电容器的电容。

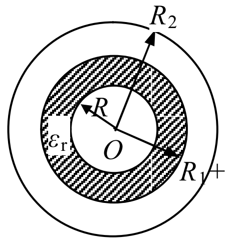


图 8-9

解：设两倒替球面分别带电荷$+Q$和$-Q$。由高斯定理

$R_1<r<R_1+d$：$\vec{E}_1=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\vec{r}^{\,0}$；$R_1+d<r<R_2$：$\vec{E}_2=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}^{\,0}$

两球壳间的电势差为

$$\Delta U=\int_{R_1}^{R_2}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{R_1}^{R_1+d}\vec{E}_1\cdot d\vec{r}+\int_{R_1+d}^{R_2}\vec{E}_2\cdot d\vec{r}=\int_{R_1}^{R_1+d}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}dr+\int_{R_1+d}^{R_2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{1}{\varepsilon_r}(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_1+d})+(\frac{1}{R_1+d}-\frac{1}{R_2})]=\frac{Q[R_2d+\varepsilon_r R_1(R_2-R_1-d)]}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1R_2(R_1+d)}$$

$$\therefore C=\frac{Q}{\Delta U}=\frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1R_2(R_1+d)}{R_2d+\varepsilon_r R_1(R_2-R_1-d)}$$

电场能量

8-10 一个电容器电容C_1＝20.0μF，用电压V=1000V的电源给该电容器充电，然后拆下电源，并用另一不带电的电容器C_2接于原来电源处，已知C_2＝5.00 μF。求：（1）两电容器各带电多少？（2）C_1两端电势差多大？（3）C_1能量损失多少？

解：（1）两电容并联后总电量不变。设C_1、C_2各带电Q_1、Q_2，有

$\dfrac{Q_1}{C_1}=\dfrac{Q_2}{C_2}$，$Q_1+Q_2=Q=C_1V$，解得 $Q_1=\dfrac{C_1^2}{C_1+C_2}V=\dfrac{20^2}{20+5}\times10^{-6}\times10^3=1.6\times10^{-2}\,\mathrm{C}$

$$Q_2=C_1V-Q_1=20\times10^{-6}\times10^3-1.6\times10^{-2}=4\times10^{-3}\,\mathrm{C}$$

（2）C_1两端的电势差 $V_1=\dfrac{Q_1}{C_1}=\dfrac{1.6\times10^{-2}}{20\times10^{-6}}=800\mathrm{V}$

（3）能量损失

$$\Delta W=\frac{1}{2}C_1V^2-\frac{1}{2}(C_1+C_2)V_1^2=\frac{1}{2}\times20\times10^{-6}\times(10^3)^2-\frac{1}{2}\times(20+5)\times10^{-6}\times800^2=2\mathrm{J}$$

8-11 两同轴圆柱面，长度均为l，半径分别为a和b，两圆柱面之间充有相对介电常数为ε_r的均匀电介质。当这两个圆柱面带有等量异号电荷+Q和−Q时，求：（1）在半径为r处（$a<r<b$），电场的能量密度是多少？ r处厚度为dr、长度为l的圆柱簿壳中的电场能量为多少？（2）电介质中的总电能是多少？能否从总电场能量推算出圆柱形电容器的电容？（不计边缘效应）

解：（1）由高斯定理可得 r 处得电场强度大小为 $E=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}=\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon rl}$

电场能量密度，$w=\dfrac{1}{2}\varepsilon E^2=\dfrac{1}{2}\varepsilon(\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon rl})^2=\dfrac{Q^2}{8\pi^2\varepsilon r^2l^2}$

r 处 dr 厚度簿壳中的电场能量为 $\mathrm{d}W = w\,\mathrm{d}V = \dfrac{Q^2}{8\pi^2\varepsilon r^2 l^2}\cdot 2\pi r l\,\mathrm{d}r = \dfrac{Q^2}{4\pi\varepsilon r l}\mathrm{d}r$

（2）电介质中总能量 $W = \int_V \mathrm{d}W = \int_a^b \dfrac{Q^2}{4\pi\varepsilon l}\dfrac{\mathrm{d}r}{r} = \dfrac{Q^2}{4\pi\varepsilon l}\ln\dfrac{b}{a}$

由电容器储能公式 $W = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}$ 可得，$C = \dfrac{Q^2}{2W} = \dfrac{2\pi\varepsilon l}{\ln\dfrac{b}{a}}$

8-12 一平板空气电容器的电容 C＝0.001 微法拉，充电到电量为 Q＝1 微库后，将输电线断开。求：（1）极板间电势差及此时的电场能；（2）将两极板拉开到原距离的两倍，计算拉开前后场能的改变，并解释其原因。

解：（1）$\Delta U = \dfrac{Q}{C} = \dfrac{1\times10^{-6}}{1\times10^{-9}} = 1\times10^{3}\,\mathrm{V}$， $W = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{(1\times10^{-6})^2}{1\times10^{-9}} = 5\times10^{-4}\,\mathrm{J}$

（2）两极板拉开时，极板上电荷保持不变，电容 $C' = \dfrac{\varepsilon_0 S}{2d} = \dfrac{1}{2}C$

$\therefore \Delta W = W' - W = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C'} - \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C} = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C} = 5\times10^{-4} J > 0$，这是由于外力克服两板间静电引力做功所致。

8-13 用输出电压为 U 的稳定电源为一电容为 C 的空气平行板电容器充电，在电源保持连接的情况下，试求将两极板间距离增大至原距离 n 倍时外力所做的功。（提示：电源要做功）

解：设原来两板距离为 d，板上电荷为 Q。由 $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$ 可知，距离由 d 增大到 nd 时

$C' = \dfrac{\varepsilon_0 S}{nd} = \dfrac{C}{n}$， $Q' = C'U = \dfrac{CU}{n} = \dfrac{Q}{n}$ 即电荷减少。

由于连着电源，除外力做功外，电源也要做功。电容器两板距离拉大后，电容器能量增量为

$\Delta W = W' - W = \dfrac{1}{2}CU^2 - \dfrac{1}{2}C'U^2 = \dfrac{1}{2}CU^2(\dfrac{1-n}{n}) = \dfrac{1-n}{n}W < 0$

由于板上电荷减少，即向电源充电，所以电源做负功

$A_{电} = \Delta Q\cdot U = (\dfrac{Q}{n} - Q)U = \dfrac{1-n}{n}QU = \dfrac{2(1-n)}{n}W < 0$

由功能原理 $A_{外} + A_{电} = \Delta W$， $A_{外} = \Delta W - A_{电} = \dfrac{n-1}{n}W = \dfrac{n-1}{2n}CU^2$

8-14 一平行板电容器极板面积为 S，间距为 d，接在电源上以维持其电压为 U。将一块厚度为 d、介电常数为 ε 的均匀电介质板插入极板间空隙。计算：（1）静电能的改变；（2）电源对电场所做的功；（3）电场对介质板所做的功。

解：（1）插入前后，电容器电容为 $C_1 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$， $C_2 = \dfrac{\varepsilon S}{d}$

$$\therefore \Delta W = W_2 - W_1 = \frac{1}{2}C_2U^2 - \frac{1}{2}C_1U^2 = \frac{SU^2}{2d}(\varepsilon - \varepsilon_0)$$

（2）$\because E_1 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 S} = \dfrac{U}{d}$， $E_2 = \dfrac{\sigma'}{\varepsilon} = \dfrac{Q'}{\varepsilon S} = \dfrac{U}{d}$， $\therefore A_{电} = \Delta Q\cdot U = (Q' - Q)U = (\varepsilon - \varepsilon_0)\dfrac{SU^2}{d}$

（3）电场对介质板所做的功等于外力克服静电力所做功的负值

$\because A_{外} + A_{电} = \Delta W$， $\therefore A_{外} = \Delta W - A_{电} = -(\varepsilon - \varepsilon_0)\dfrac{SU^2}{2d}$， $\therefore A_{场} = -A_{外} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\dfrac{SU^2}{2d}$

磁感应强度

9-1 如图 9-1 所示，一条无穷长载流 20 A的直导线在P点被折成 120^0的钝角，设d＝2cm，求P点的磁感应强度。

解：P 点在 OA 延长线上，所以 OA 上的电流在 P 的磁感应强度为零。

作 OB 的垂线 PQ ，$\angle OPQ = 30°$，OB 上电流在 P 点的磁感应强度大小

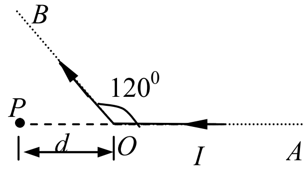


图 9-1

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi \overline{PQ}}(\sin\beta_2 - \sin\beta_1) = \frac{\mu_0 I}{4\pi d\cos 30°}(\sin\frac{\pi}{2} + \sin 30°)$$

$$= \frac{4\pi\times10^{-7}\times20}{4\pi\times0.02\times\frac{\sqrt{3}}{2}}(1+\frac{1}{2}) = 1.73\times10^{-4}\ \mathrm{Wb/m^2}$$，方向垂直于纸面向外。

9-2 半径为 R 的圆弧形导线与一直导线组成回路，回路中通有电流 I，如图 9-2 所示，求弧心 O 点的磁感应强度（图中 φ 为已知量）。

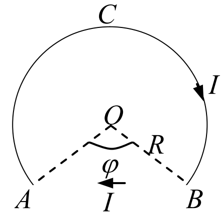


图 9-2

解：∵ 圆环电流在圆心处的磁场 $B = \dfrac{\mu_0 I}{2R}$

∴ 圆弧 ABC 在 O 处的磁场 $B_1 = \dfrac{\mu_0 I}{2R}(\dfrac{2\pi-\varphi}{2\pi})$ 方向垂直纸面向里

又直线电流的磁场 $B = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi a}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$，∴ 直线 AB 在 O 处的磁场

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}[\sin\frac{\varphi}{2} - \sin(-\frac{\varphi}{2})] = \frac{\mu_0 I}{4\pi R\cos\frac{\varphi}{2}}\cdot 2\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}tg\frac{\varphi}{2}$$ 方向垂直纸面向里

弧心 O 处的磁场 $B = B_1 + B_2 = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}(2\pi - \varphi + 2tg\dfrac{\varphi}{2})$

9-3 两根长直导线沿半径方向引到铁环上 A、B 两点，并与很远的电源相连。如图 9-3 所示，求环中心的磁感应强度。

解：设铁环被 A、B 两点分成两圆弧的弧长分别为l_1、l_2，电阻分别为R_1、R_2，电流分别为I_1、I_2。

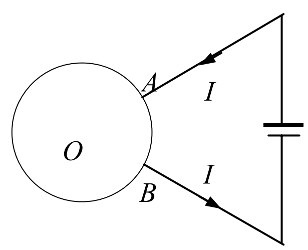


图 9-3

由图知 R_1与R_2并联，∴ $\dfrac{I_1}{I_2} = \dfrac{R_2}{R_1} = \dfrac{l_2}{l_1}$ 即 $I_1 l_1 = I_2 l_2$

∴ I_1在 O 点的磁感应强度

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2R}\cdot\frac{l_1}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I_1 l_1}{4\pi R^2}$$ 方向垂直于纸面向外

∴ I_2在 O 点的磁感应强度

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2R}\cdot\frac{l_2}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I_2 l_2}{4\pi R^2}$$ 方向垂直于纸面向内

即 $\vec{B}_1$、$\vec{B}_2$ 大小相等，方向相反。 $\therefore\ \vec{B}_0=\vec{B}_1+\vec{B}_2=0$

9-4 一半径为 R 的薄圆盘，其中半径为 r 的阴影部分均匀带正电，面电荷密度为 $+\sigma$，其余部分均匀带负电，面电荷密度为 $-\sigma$（见图 9-4）。设此盘以角速度为 ω 绕其轴线匀速转动时，圆盘中心 O 处的磁感应强度为零，问 R 和 r 有什么关系？并求该系统的磁矩。

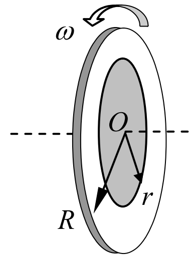


图 9-4

解：（1）取半径为 r'、宽为 $\mathrm{d}r'$ 的圆环面元，所带电量 $\mathrm{d}q=\sigma\,\mathrm{d}s=\sigma\cdot 2\pi r'\,\mathrm{d}r'$

产生的电流 $\mathrm{d}I=\dfrac{\omega}{2\pi}\mathrm{d}q$

$$\therefore\ \mathrm{d}B=\frac{\mu_0\,\mathrm{d}I}{2r'}=\frac{\mu_0\dfrac{\omega}{2\pi}\cdot\sigma\cdot 2\pi r'\,\mathrm{d}r'}{2r'}=\frac{\mu_0\omega\sigma\,\mathrm{d}r'}{2}$$

$r'<r$ 的部分产生的磁场

$$B_+=\int dB=\int_0^r\frac{\mu_0\omega\sigma}{2}dr'=\frac{\mu_0\omega\sigma r}{2}$$ 方向水平向右

$r<r'<R$ 的部分产生的磁场

$$B_-=\int\mathrm{d}B=\int_r^R\frac{\mu_0\omega\sigma}{2}\mathrm{d}r'=\frac{\mu_0\omega\sigma}{2}(R-r)$$ 方向水平向左

由题意 $B_0=B_+-B_-=0$ 即 $\dfrac{\mu_0\omega\sigma}{2}(2r-R)=0$，$\therefore\ R=2r$

（2）$\mathrm{d}I$ 的磁距大小 $dP_m=\pi r'^2\,dI=\omega\sigma\pi\,r'^3\,dr'$

$r'<r$ 部分 $P_{m+}=\omega\sigma\pi\int_0^r r'^3dr'=\dfrac{1}{4}\omega\sigma\pi r^4$ 方向水平向右

$r<r'<R$ 部分 $P_{m-}=\omega\sigma\pi\int_r^R r'^3\,dr'=\dfrac{1}{4}\omega\sigma\pi(R^4-r^4)$ 方向水平向左

$\therefore\ P_m=P_{m+}-P_{m-}=\dfrac{1}{4}\omega\sigma\pi(2\,r^4-R^4)=\dfrac{1}{4}\omega\sigma\pi(\dfrac{1}{8}R^4-R^4)=-\dfrac{7}{32}\omega\sigma\pi\,R^4$ 方向水平向左

9-5 氢原子处在正常态（基态）时，它的电子可看作是在半径为 $a=0.53\times10^{-8}$cm的轨道（称为玻尔轨道）上作匀速圆周运动，若电子在轨道中心处产生的磁感应强度大小为 12.5T，求（1）电子运动的速度大小？（2）该系统的磁矩。（电子的电荷电量 $e=1.6\times10^{-19}$C）。

解：（1）作匀速圆周运动的电子，形成电流的电流强度为 $I=\dfrac{e}{\Delta t}=e\cdot\dfrac{v}{2\pi a}$

I 在轨道中心处产生的磁感应强度 $B=\dfrac{\mu_0 I}{2a}=\dfrac{\mu_0 ev}{4\pi\,a^2}$

$$\therefore\ v=\frac{4\pi\,a^2B}{\mu_0 e}=\frac{4\times3.14\times(0.53\times10^{-10})^2\times12.5}{4\times3.14\times10^{-7}\times1.6\times10^{-19}}=2.2\times10^6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

（2） $P_m = IS = \frac{ev}{2\pi a}\cdot\pi a^2 = \frac{eva}{2} = \frac{1.6\times10^{-19}\times2.2\times10^{6}\times0.53\times10^{-10}}{2} = 9.33\times10^{-24}\,\mathrm{A\cdot m^2}$

磁通量

9-6 已知一均匀磁场的磁感应强度 B=2T，方向沿 x 轴正方向，如图 9-6 所示，已知 ab=cd=40cm，bc=ad=ef=30cm，be=cf=30cm。求：（1）通过图中 $abcd$ 面的磁通量；（2）通过图中 $befc$ 面的磁通量；(3)通过图中 $aefd$ 面的磁通量。

解：（1） $\vec{B}$ 垂直穿过平面 $abcd$

$$\therefore \Phi_{m1} = \vec{B}\cdot\vec{S}_{abcd} = -BS_{abcd} = -2\times0.4\times0.3 = -0.24\,\mathrm{Wb}$$

负号表示 $\vec{B}$ 线穿入该面

（2） $\vec{B}$ 平行于平面 $befc$，$\therefore \Phi_{m2} = \vec{B}\cdot\vec{S}_{befc} = BS\cos90° = 0$

（3）穿入平面 $abcd$ 的磁力线数与穿出 $aefd$ 平面的磁力线数相同

$$\therefore \Phi_{m2} = -\Phi_{m1} = 0.24\,\mathrm{Wb}$$

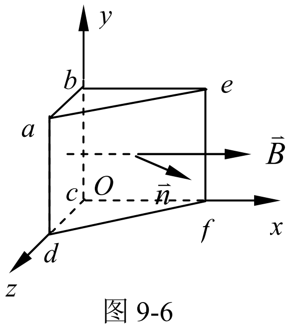


图 9-6

9-7 两平行长直导线相距d=40cm，每根导线载有等量同向电流I，如图 9-7 所示。求：（1）两导线所在平面内，与左导线相距x（x在两导线之间）的一点P处的磁感应强度。(2)若I=20A，通过图中斜线所示面积的磁通量（r_1=r_3=10cm，l=25cm)。

解：建立如图所示的坐标系

（1）左导线在 P 点的磁感应强度 $B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$，方向垂直纸面向下

右导线在 P 点的磁感应强度 $B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-x)}$，方向垂直纸面向下

$\therefore B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}(\frac{1}{x}+\frac{1}{d-x})$，方向垂直纸面向下

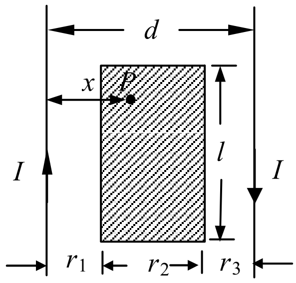


图 9-7

（2）在 x 处取宽为 dx 的面元 dS=ldx 设方向垂直纸面向下，其上磁通量

$$\mathrm{d}\Phi_m = \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}(\frac{1}{x}+\frac{1}{d-x})\cdot l\,\mathrm{d}x$$

$$\therefore \Phi_m = \int\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_{r_1}^{r_1+r_2}\frac{\mu_0 I}{2\pi}(\frac{1}{x}+\frac{1}{d-x})\cdot l\,\mathrm{d}x = 2.2\times10^{-6}\,\mathrm{Wb}$$

安培环路定律

9-8 如图 9-8 所示的导体圆管，内、外半径分别为 a 和 b，导体内载有电流 I，设电流 I 均匀分布在导体圆管的横截面上，求：（1）磁感应强度的分布；（2）通过每米导体圆管 S 平面内（阴影部分）的磁感应通量。

解：（1）作半径为 r、圆心在轴线上的圆为积分回路，由安培环路定律

$r < a$： $\oint_L \vec{B}_1\cdot d\vec{l} = B_1\cdot2\pi r = 0$， $\therefore B_1 = 0$

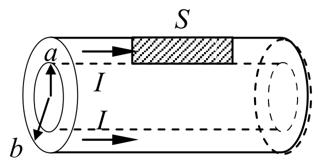


图 9-8

$a<r<b$：$B_2 \cdot 2\pi\ r=\mu_0 I'=\dfrac{\mu_0 I}{\pi(b^2-a^2)}\cdot\pi(r^2-a^2)$

$\therefore B_2=\dfrac{\mu_0 I(r^2-a^2)}{2\pi\ r(b^2-a^2)}$，方向与 I 满足右手螺旋法则

$r>b$： $B_3 \cdot 2\pi\ r=\mu_0 I$，$\therefore B_3=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi\ r}$，方向与 I 满足右手螺旋法则

（2）取面元 $\mathrm{d}S=l\,\mathrm{d}r=\mathrm{d}r$

$$\therefore \Phi_m=\frac{\mu_0 I}{2\pi(b^2-a^2)}\int_a^b\frac{r^2-a^2}{r}dr=\frac{\mu_0 I}{4\pi}-\frac{\mu_0 I a^2}{2\pi(b^2-a^2)}\ln\frac{b}{a}$$

9-9 在半径为 R 的无限长圆柱形导体内部挖去一半径为 r 的无限长圆柱体，两柱体的轴线平行，相距为 d，如图 9-9 所示。该导体中通有电流 I，且 I 均匀分布在横截面上。求：（1）圆柱导体轴线上的磁感应强度；（2）空心部分轴线上的磁感应强度。

解：填补法。设在半径为 r 的空间中通有等量而反向的电流，其电流密度与导体中相同

（1）圆柱导体轴线的磁场由半径为 r 的无限长圆柱体中电流产生

$$\therefore \oint_L \vec{B}_1\cdot\mathrm{d}\vec{l}=B_1\cdot 2\pi d=\mu_0 I_1=\mu_0\cdot\frac{I}{\pi(R^2-r^2)}\cdot\pi r^2,\quad B_1=\frac{\mu_0 I r^2}{2\pi d(R^2-r^2)}$$

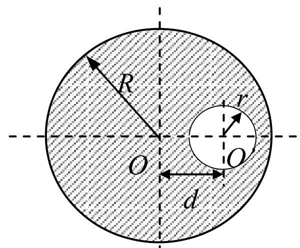


图 9-9

（2）空心部分轴线上的磁场由半径为 R 的无限长圆柱体中电流产生

$$\therefore \oint_L \vec{B}_2\cdot\mathrm{d}\vec{l}=B_2\cdot 2\pi d=\mu_0 I_2=\mu_0\cdot\frac{I}{\pi(R^2-r^2)}\cdot\pi d^2,\quad B_2=\frac{\mu_0 I d}{2\pi\ (R^2-r^2)}$$

9-10 如图 9-10 所示，两无穷大平行平面上都有均匀分布的面电流，面电流密度分别为 $\vec{i}_1$ 和 $\vec{i}_2$，两电流密度方向平行。求：（1）两面之间的磁感应强度；（2）两面之外空间的磁感应强度。

解：无穷大板的磁感应强度大小 $B=\dfrac{\mu_0 i}{2}$，建立如图所示坐标系

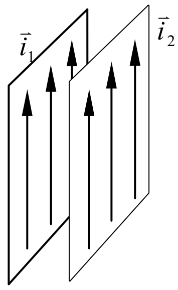


图 9-10

（1）两板之间，$\vec{B}_1=\dfrac{\mu_0 i_1}{2}\vec{e}_x$， $\vec{B}_2=-\dfrac{\mu_0 i_2}{2}\vec{e}_x$

$\therefore \vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2=\dfrac{\mu_0}{2}(i_1-i_2)\vec{e}_x$

（2）在右板之外时，$\vec{B}_1=\dfrac{\mu_0 i_1}{2}\vec{e}_x$， $\vec{B}_2=\dfrac{\mu_0 i_2}{2}\vec{e}_x$， $\therefore \vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2=\dfrac{\mu_0}{2}(i_1+i_2)\vec{e}_x$

在左板之外时，$\vec{B}_1=-\dfrac{\mu_0 i_1}{2}\vec{e}_x$， $\vec{B}_2=-\dfrac{\mu_0 i_2}{2}\vec{e}_x$，$\therefore \vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2=-\dfrac{\mu_0}{2}(i_1+i_2)\vec{e}_x$

9-11 如图 9-11 所示，一均匀密绕的环形螺线管，匝数N，通有电流I，横截面为矩形，圆环内、外半径分别为R_1和R_2。求：（1）环形螺线管内外的磁场分布；（2）环形螺线管横截面的磁通量。

解：（1）磁场分布为以环轴为圆心的一圈圈圆。取一 $\vec{B}$ 线为积分回路，方向与 $\vec{B}$ 相同。

由安培环路定律，环管内磁场满足

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = B\cdot 2\pi r = \mu_0 NI \text{，得} \quad B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

环管外有 $B\cdot 2\pi r = 0$ 即 $B = 0$

（2）在横截面上取一宽度为 $\mathrm{d}r$ 的长条面元，磁通量为

$$\mathrm{d}\,\Phi_m = \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = B\,\mathrm{d}\,S = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\cdot b\,\mathrm{d}\,r \text{，} \quad \therefore\ \Phi_m = \frac{\mu_0 NIb}{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}\,r}{r} = \frac{\mu_0 NIb}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

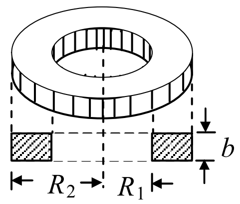


图 9-11

磁场对电流的作用（安培力）

9-12 半径为 R 的平面圆形线圈中载有自流 I， 若线圈置于一个均匀磁场 $\vec{B}$ 中，均匀磁场方向与线圈平面垂直，如图 9-12，则（1）线圈上单位长度的电流元所受磁场力为多少？（2）左半圆受力如何？（3）整个圆形线圈又如何？

解：（1）任取一电流元 $Id\vec{l}$ ，所受磁场力 $\quad d\vec{F} = Id\vec{l}\times\vec{B}$

大小 $dF = IBdl$ 　　方向指向圆心

（2）由对称性可知，左半圆受力方向水平向右

$$F_{左} = \int dF\cos\alpha = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} IB\cdot Rd\alpha\cdot\cos\alpha = \alpha IBR$$

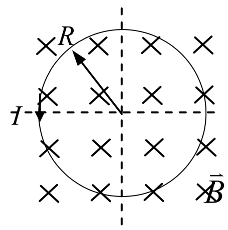


图 9-12

（3）右半圆受力水平向左，大小与左半圆相同，所以整个圆形线圈受力为零。

9-13 半径为 R 的平面圆形线圈中载有自流 I，一载流 I'的无限长直导线通过圆形线圈的圆心放置，并和圆形线圈共面（相互绝缘），如图 9-13 所示，则圆形线圈左半圆所受磁力如何？整个圆形线圈所受磁力又如何？

解：（1）如图在左半圆上任取一电流元 $Id\vec{l}$ ，受力大小

$$dF = IBdl = I\cdot\frac{\mu_0 I'}{2\pi R\cos\alpha}\cdot Rd\alpha = \frac{\mu_0 II'}{2\pi}\cdot\frac{d\alpha}{\cos\alpha}$$

由对称性可知，左半圆受磁场力方向水平向左

$$\therefore\ F_{左} = \int dF\cos\alpha = \frac{\mu_0 II'}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\alpha = \frac{1}{2}\mu_0 II'$$

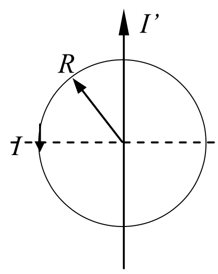


图 9-13

（2）右半圆受磁力方向水平向左，且与 $F_{左}$ 相等，$\therefore\ F=2F_{左} = \mu_0 II'$

9-14 一无限长薄金属板，宽为a，通有电流I_1，其旁有一矩形线圈$ABCD$，通有电流I_2，线圈与金属板共面，如图 9-14 所示。求：（1）I_1在AB和CD处产生的磁感应强度；（2）薄金属板对AB和CD边的作用力。

解：建立如图所示坐标系

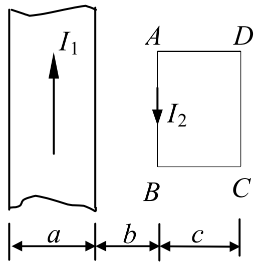


图 9-14

（1）在金属板上 x 处取一宽为 dx 的面长条，其中电流

$$dI = \frac{I_1}{a}dx$$

dI 在 AB 处的磁感应强度大小

$$dB_{AB} = \frac{\mu_0 dI}{2\pi(a+b-x)}$$ 方向垂直纸面向下

金属板上所有面长条在 AB 处产生的磁场方向相同

$$\therefore B_{AB} = \int dB_{AB} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}\int_0^a \frac{dx}{a+b-x} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}\ln\frac{a+b}{b}$$ 方向垂直纸面向下

同理可得 $B_{CD} = \dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi a}\ln\dfrac{a+b+c}{b+c}$ 方向垂直纸面向下

（2）$\vec{F}_{AB} = \int\limits_{AB} I d\vec{l} \times \vec{B}_{AB} = \dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}\ln\dfrac{a+b}{b}\int\limits_{AB} dl\vec{i} = \dfrac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi a}\ln\dfrac{a+b}{b}\vec{i}$

同理 $\vec{F}_{CD} = \dfrac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi a}\ln\dfrac{a+b+c}{b+c}\vec{i}$

磁力矩

9-15 在垂直于通有电流I_1的长直导线平面内有一扇形载流线圈$abcd$，半径分别为R_1和R_2，对长直导线张角为α，线圈中通有电流I_2，如图所示。求：（1）线圈各边所受的力；（2）线圈所受的力矩。

解：（1）bc 和 da 上电流元方向与 $\vec{B}$ 同向 $\therefore \vec{F}_{bc} = \vec{F}_{da} = 0$

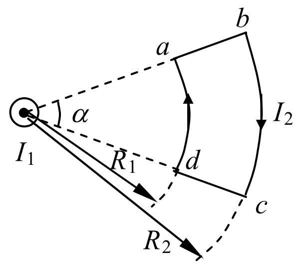


图 9-15

在ab上距I_1 为r处取电流元 $I_2 d\vec{l}$，受力 $d\vec{F} = I_2 d\vec{l} \times \vec{B}$

$\because I_2 d\vec{l} \perp \vec{B}$，$\therefore dF = I_2 dl \cdot B = \dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}dr$，方向垂直于纸面向外

$$F_{ab} = \int dF = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

同理 $F_{cd} = \dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$，方向垂直于纸面向内

（2）在距I_1 为r处取一宽为dr的面扇形，由扇形面积 $S = \dfrac{1}{2}r^2 \cdot \alpha$

$\therefore dS = \alpha r dr$

磁矩为 $dP_m = I_2 dS = I_2 \alpha r dr$ 方向垂直于纸面向下

磁力矩大小为 $dM = dP_m \cdot B = I_2 \alpha r dr \cdot \dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi r} = \dfrac{\mu_0 I_1 I_2 \alpha}{2\pi} dr$

$\therefore M = \dfrac{\mu_0 I_1 I_2 \alpha}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} dr = \dfrac{\mu_0 I_1 I_2 \alpha}{2\pi}(R_2 - R_1)$　　方向向右

9-16 如图 9-16 所示．一矩形载流线圈由 20 匝相互绝缘的细导线绕成，可绕 y 轴转动，线圈中载有电流 I ＝0.10 A，放在磁感应强度 B＝0.50 T 的均匀磁场中，$\vec{B}$ 的方向平行于 x 轴，求维持线圈在图示位置时的力矩。

解：矩形截流平面线圈的磁矩大小为 $P_m = NIS$，所受磁力矩大小为

$$M = P_m \cdot B\sin\theta = NISB\sin 60° = 20\times 0.1\times 0.1\times 0.05\times 0.5\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 4.3\times 10^{-3}(\mathrm{N\cdot m})$$

方向沿 y 负向

$\therefore$ 维持线圈在图示位置所需力矩 $\vec{M}_{外} = 4.3\times 10^{-3}\vec{j}$（N·m）

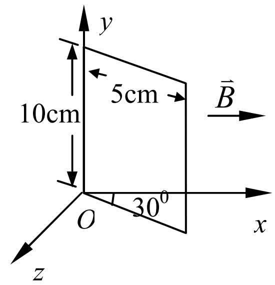


图 9-16

9-17 一半径为 R 的带电薄圆盘，电荷面密度为σ，放在均匀磁场 $\vec{B}$ 中，$\vec{B}$ 的方向与盘面平行，如图 9-17 所示。若圆盘绕其轴线以角速度 ω 转动，试求：（1）圆盘的磁矩；（2）场作用于圆盘的磁力矩。

解：（1）取半径为 r，宽为 dr 的圆环，电量 $dq = \sigma\cdot 2\pi r dr$

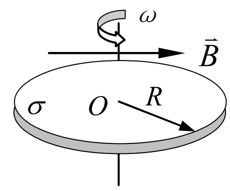


图 9-17

转动形成电流　$dI = \dfrac{\omega}{2\pi}\cdot dq = \omega\sigma r dr$

其磁距 $dP_m = \pi r^2 dI = \pi\omega\sigma r^3 dr$

$p_m = \int_0^R \mathrm{d}p_m = \dfrac{1}{4}\pi\omega\sigma R^4$，方向沿轴线向上

（2）p_m 所受磁力矩大小　$dM = \left|d\vec{P}_m \times \vec{B}\right| = dP_m \cdot B = \pi\omega\sigma B r^3 dr$　　方向垂直纸面向里

$\therefore$　$M = \int dM = \int_0^R \pi\omega\sigma B r^3 dr = \dfrac{1}{4}\pi\omega\sigma R^4 B$　　方向垂直纸面向里

磁场对运动电荷的作用

9-18 两个正的点电荷 q，相距为 d，并排平行运动，速度为 v。求它们之间的相互作用力，这个力是斥力还是吸引力？

解：如图所示，上电荷 q 在下电荷 q 处产生的磁感应强度为 $B = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\cdot\dfrac{qv}{d^2}$，方向垂直纸面向里

下电荷受磁力大小 $F_m = qvB = \dfrac{\mu_0 q^2 v^2}{4\pi d^2}$ 方向指向上电荷 q，即相互吸引

下电荷受电场力大小 $F_E = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$ 方向背向上电荷 q，即相互排斥

$\dfrac{F_E}{F_B} = \dfrac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\dfrac{1}{v^2} = \dfrac{c^2}{v^2} > 1$，相互排斥。

9-19 一电子的动能为 10eV，在垂直于均匀磁场的平面内作圆周运动。已知磁场B＝1.0G，电子电荷为 $-e$＝1.6×10^{-19}C，质量m＝9.1×10^{-31}kg。求：（1）电子的轨道半径R；（2）电子的回旋周期T；（3）沿磁场方向观察，电子是顺时针方向还是逆时针方向回旋？

解：（1）$\because E_k = \dfrac{1}{2}mv^2$，$\therefore v = (\dfrac{2E_k}{m})^{\frac{1}{2}}$

轨道半径 $R = \dfrac{mv}{eB} = \dfrac{(2E_k m)^{1/2}}{eB} = \dfrac{(2\times10\times1.6\times10^{-19}\times9.1\times10^{-31})^{1/2}}{1.6\times10^{-19}\times1\times10^{-4}} = 10.67\,\text{cm}$

（2）$T = \dfrac{2\pi R}{v} = \dfrac{2\pi m}{eB} = \dfrac{2\times3.14\times9.1\times10^{-31}}{1.6\times10^{-19}\times1\times10^{-4}} = 3.6\times10^{-7}\,\text{s}$

（3）$\because \vec{F}_L = -e\vec{v}\times\vec{B}$，$\therefore$顺时针回旋

9-20 一块样品如图 9-19 所示，已知它的横截面积为 S，宽为 w，厚为 d，载有电流 I，外磁场 $\vec{B}$ 垂直于电流（图中 $\vec{B}$ 垂直于纸面向外）。设单位体积中有 n 个载流子，每个载流子的电荷为 q，平均定向速率为 v。（1）证明：样品中存在一个大小为 E＝vB 的电场，并指出 $\vec{E}$ 的方向；（2）上、下两边 a、b 的电势差 U，哪边电势高？（3）霍耳常数定义为 $R_H = \dfrac{ES}{IB}$，证明：$R_H = \dfrac{1}{nq}$。（注意讨论 q 为正和负的情况）

解：（1）在平衡时，运动电荷受洛仑兹力和霍尔电场的作用

洛仑兹力 $\vec{F}_L = q\vec{v}\times\vec{B}$ 方向竖直向上

即 a 边积累正电荷，b 边积累负电荷

所以霍尔电场由 a 边指向 b 边

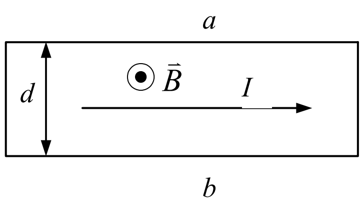


图 9-20

$\because$ $q\vec{v}\times\vec{B} + q\vec{E}_H = 0$，$\therefore \vec{E}_H = -\vec{v}\times\vec{B}$，大小 $E_H = vB$

（2）$U_{ab} = \int_a^b \vec{E}_H\cdot d\vec{l} = \int_a^b(-\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} = vBd$ a 边电势高

（3）由霍尔常数定义 $E_H = R_H\dfrac{IB}{S}$ 即 $R_H\dfrac{IB}{S} = vB$

$\therefore R_H = \dfrac{vS}{I} = \dfrac{vS}{qnSv} = \dfrac{1}{nq}$，得证。

磁力的功

9-21 题 9-15 中，若线圈在磁力作用下转到平衡位置，求磁场所做的功。

解：开始时磁通量为： $\phi_1 = BS\cos\theta = \frac{1}{2}BS$，平衡位置时： $\phi_2 = BS$

$$\therefore\ A = I\Delta\phi = I(\phi_2 - \phi_1) = \frac{1}{2}IBS = \frac{1}{2}\times 0.1\times 0.5\times 0.1\times 0.05 = 1.25\times 10^{-4}\,\text{J}$$

9-22 半径 R＝0.1m 的半圆形闭合线圈，载有电流 I＝10A，放在 B=0.5T 的均匀磁场中，磁场方向与线圈面平行，如图 9-22 所示。求：（1）线圈所受磁力矩的大小和方向（以直径为转轴）；（2）若线圈受磁力矩的作用转到线圈平面与磁场垂直的位置，则磁力矩作功

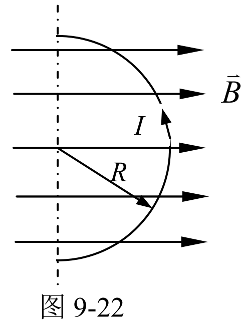


图 9-22

解：（1）$\because \vec{M} = \vec{P}_m\times\vec{B}$，$\vec{P}_m = IS\vec{n} = I\cdot\frac{1}{2}\pi R^2\vec{n}$，$\therefore \vec{M} = \frac{1}{2}I\pi R^2\vec{n}\times\vec{B}$

大小 $M = \frac{1}{2}\pi I R^2 B = \frac{1}{2}\times 3.14\times 10\times(0.1)^2\times 0.5 = 7.85\times 10^{-2}\,\text{N}\cdot\text{m}$

方向竖直向上

（2） $A = I\Delta\phi = I(\phi_2 - \phi_1) = I\,\phi_2 = I\cdot B\cdot\frac{1}{2}\pi R^2 = 7.85\times 10^{-2}\,\text{J}$

磁介质

9-23 螺绕环中心周长l＝10cm，环上均匀密绕N＝200 匝的线圈，线圈中通有电流I＝100mA。（1）求管内的磁感应强度 $\vec{B}_0$ 和磁场强度 $\vec{H}_0$；（2）若管内充满相对磁导率μ_r＝4200 的磁性物质，则管内的 $\vec{B}$ 和 $\vec{H}$ 是多少？

解：（1）在螺绕环截面积较小时，可将环内磁场视为均匀的。由安培环路定律

$$\oint_L \vec{B}_0\cdot d\vec{l} = B_0\cdot 2\pi r = B_0\cdot l = \mu_0 NI,\ \therefore B_0 = \frac{\mu_0 NI}{l} = \frac{4\pi\times 10^{-7}\times 200\times 0.1}{0.1} = 2.5\times 10^{-4}\,\text{T}$$

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{NI}{l} = \frac{200\times 0.1}{0.1} = 200\,\text{A/m}$$ 方向如图

（2）由安培环路定律 $\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = Hl = NI$，$\therefore H = \frac{NI}{l} = 200\,\text{A/m}$

$$B = \mu H = \mu_0\mu_r\frac{NI}{l} = 4200\,B_0 = 1.05\,\text{T}$$

9-24 一无限长、半径为R_1的直圆柱形铜导线（$\mu\approx\mu_0$）外包一层相对磁导率为μ_r的圆筒形磁介质，其内外半径分别为R_1和R_2，铜导线内有电流强度I通过，电流在横截面上均匀分布。求磁场强度和磁感应强度的分布，并画出H—r曲线和B—r曲线。

解：以铜导线轴线为圆心作半径为 r 的圆为积分回路，方向与电流满足右手螺旋定律。由安培环路定律

$$\int_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = H\cdot 2\pi r$$

$r < R_1$： $H_1\cdot 2\pi r = I' = \frac{I}{\pi R_1^2}\pi r^2$，$\therefore H_1 = \frac{Ir}{2\pi R_1^2}$，$B_1 = \mu_0 H_1 = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi R_1^2}$

$R_1 < r < R_2$： $H_2\cdot 2\pi r = I$，$\therefore H_2 = \frac{I}{2\pi r}$，$B_2 = \mu_0\mu_r H_2 = \frac{\mu_0\mu_r I}{2\pi r}$

$r > R_2$： $H_3\cdot 2\pi r = I$，$\therefore H_3 = \frac{I}{2\pi r}$，$B_3 = \mu_0 H_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

课 程 教 学 计 划

周　　数 _ 18_

讲　　课 __68_ ___学时

课堂练习 ________学时

讨 论 课 ___4___ 学时

实 验 课 _______ 学时

上机练习 _______ 学时

总　　共 _ _72___ 学时

课程名称 大学物理　　总学时 120　　教材名称 普通物理学（程守洙第五版）

2007-20008 学年第 2 学期　专业：**0507101、0507102、0507103、0507104** 教学班级：大学物理I11

周次	每周时数	讲　课　内　容（教学大纲分章和题目的名称）	学时数 讲课	课堂练习	讨论课	实验课	上机练习	备　注
第1周	4	绪论，质点、参考系、运动方程 位移、速度、加速度	4					本学期学生利用业余时间选“大学物理演示实验”4 学时

第 2 周	4	圆周运动及其描述，曲线运动方程的矢量形式，运动描述的相对性、伽利略变换 牛顿运动定律及其应用	4					
第 3 周	4	（非惯性系、惯性力）功、动能定理 保守力、成对力的功、势能、功能原理	4					括号内为选讲内容
第 4 周	4	机械能守恒定律，质心、质心运动定理、动量定理、动量守恒定律、火箭飞行、质点与质点系的动量定理和动量守恒定律，刚体的自由度	4					
第 5 周	4	刚体的平动、转动和定轴转动、角动量、转动动能、转动惯量、力矩，刚体定轴转动定律，定轴转动的动能定理	4					

第 6 周	4	（刚体的平面运动）、定轴转动刚体的角动量定理和角动量守恒定律，进动 状态、过程、理想气体，分子热运动和统计规律，气动理论的压强公式，	4					
第 7 周	4	理想气体的压强公式，温度公式，能量均分定理、理想气体的内能、麦克斯韦速率分布率，(玻尔兹曼分布率、重力场中粒子按高度的分布)、气体分子的平均碰撞频率和平均自由程	4					
第 8 周	4	气体内的迁移现象、(真实气体，范德瓦耳斯方程，物态和相变)、热力学第一定律及对理想气体等值过程的应用、绝热过程，(多方过程，焦耳-汤姆逊实验，真实气体的内能)、循环过程	4					

第 9 周	4	卡诺循环，热力学第二定律、可逆过程与不可逆过程，（卡诺定理，）熵，熵增加原理，热力学第二定律的统计意义。	4					
第 10 周	4	电荷、库仑定律，电场、电场强度、高斯定理，静电场的环路定理、电势	4					
第 11 周	4	等势面、电场强度与电势梯度的关系，（带电粒子在静电场中的运动，）静电场中的导体，空腔导体内外的静电场	4					
第 12 周	4	电容器的电容，电介质及其极化，电介质中的静电场，有电介质时的高斯定理、电位移，静电场的能量。	4					

第13周	4	恒定电流、电流密度、电动势，磁感应强度、磁场的高斯定理，毕奥-萨伐尔定律、磁感应强度叠加原理、毕奥-萨伐尔定律的应用，安培环路定理及应用	4					
第14周	4	带电粒子在磁场中所受作用及其运动—重点讲洛仑兹力，带电粒子在电场和磁场中运动的应用—重点霍耳效应、磁场对载流导线的作用，平行载流导线间的作用力	4					
第15周	4	（磁力的功）物质的磁性、顺磁质、抗磁质、铁磁质，有磁介质存在时的磁场、法拉第电磁感应定律	4					
第16周	4	动生电动势和感生电动势、有旋电场，(涡电流）自感和互感，(电感和电容电路的暂态过程，) 磁场的能量，	4					

第 17 周	4	位移电流、全电流环路定律，麦克斯韦方程组的积分形式，电磁波的产生及基本性质	4					
第 18 周	4	机动，复习	4					

任课教师_____刘 小 廷______　　　　教学院长____________________

辅导教师___________________

系 主 任___________________

08 年 2 月 25 日

《大学物理》综合练习(一)参考答案

一、选择题

1．D；2．D；3．C；4．C；5．C；6．C；7．B；8．A；9．D；10．D。

二、填充题

1．$-2\,\mathrm{m/s}$；$2\,\mathrm{s}$；$3\,\mathrm{m}$；$5\,\mathrm{m}$。

2．$(1+t^2)\vec{i}+(2+\dfrac{1}{3}t^3)\vec{j}$；$2\vec{i}+2t\vec{j}$。

3．$\dfrac{h}{\sqrt{l^2-h^2}}v$。

4．$4.8\,\mathrm{m/s^2}$；$230.4\,\mathrm{m/s^2}$。

5．$v(t)=\dfrac{mv_0}{kv_0t+m}$；$v(x)=v_0e^{-\frac{k}{m}x}$。

6．$-18\,\mathrm{J}$。

7．$\dfrac{3v_0^2}{16\pi rg}$；$\dfrac{4}{3}$。

8．$-\dfrac{GMm}{6R}$。

9．$\sqrt{2gl\sin\theta}$；$3mg\sin\theta$；

$2g\sin\theta$；$g\cos\theta$。

10．$-2mv\,\vec{j}$；$-\dfrac{2mv^2}{\pi R}\vec{j}$。

11．$V-\dfrac{m}{m+M}v$。

12．$0.3\,\mathrm{m}$。

13．$v_0\dfrac{r_0}{r_1}$；$\dfrac{1}{2}mv_1^2-\dfrac{1}{2}mv_0^2$。

三、计算题

1．(1) $\vec{r}=3t^2\vec{i}+(t^4+1)\vec{j}$；$\vec{v}=6t\vec{i}+4t^3\vec{j}$；$\vec{a}=6\vec{i}+12t^2\vec{j}$。

(2) $\Delta\vec{r}=\vec{r}_1-\vec{r}_0=3t^2\vec{i}+t^4\vec{j}$。

(3) $y=\dfrac{x^2}{9}+1$。

2．(1) $v=v_0+\int_0^t a\,\mathrm{d}t=1-t^2$，$x=x_0+\int_0^t v\,\mathrm{d}t=3+t-\dfrac{1}{3}t^3$。

(2) $v=0$ 时 $t=1\mathrm{s}$，该时刻 $a=-2\,\mathrm{m/s^2}$，$x=3\dfrac{2}{3}\mathrm{m}$。

(3) $t=0$ 时 $x_0=3\,\mathrm{m}$，$v=0$ 时(相应 $t=1\mathrm{s}$) $x_1=3\dfrac{2}{3}\mathrm{m}$，$\Delta x=x_1-x_0=\dfrac{2}{3}\mathrm{m}$。

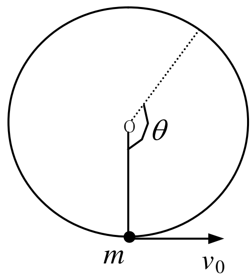
3．(1) $\begin{cases} m_1g-T=m_1a \\ T-\mu m_2g=m_2a \\ \mu m_2g=m_3a_3 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=\dfrac{m_1-\mu m_2}{m_1+m_2}g=0.6g=5.88\,\mathrm{m/s^2} \\ a_3=\dfrac{\mu m_2}{m_3}g=0.2g=1.96\,\mathrm{m/s^2} \end{cases}$

(2) m_2 相对于 m_3 的加速度 $a' = a - a_3 = 0.4g$，且 $s = \dfrac{1}{2}a't^2$，m_3 移动距离 $s_3 = \dfrac{1}{2}a_3t^2$，因而 $s_3 = \dfrac{a_3}{a'}s = \dfrac{0.2g}{0.4g}\times 0.4 = 0.20\,\mathrm{m}$。

4．切向：$-kv = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，两边积分 $\displaystyle\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{k}{m}\int_0^t \mathrm{d}t$，得 $v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$。

法向：$T = m\dfrac{v^2}{l} = m\dfrac{v_0^2}{l}e^{-\frac{2k}{m}t} = T_0 e^{-\frac{2k}{m}t}$，其中 $T_0 = m\dfrac{v_0^2}{l}$ 为初始时刻绳中张力。

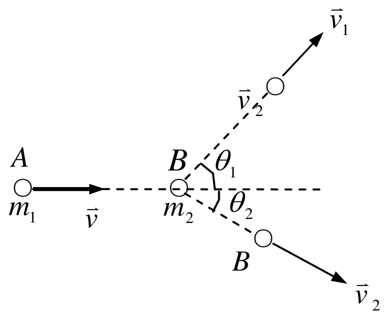
5．利用机械能守恒和牛顿定律



$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}mv_0^2 = \dfrac{1}{2}mv^2 + mgl[1+\cos(\pi-\theta)] \\ T + mg\cos(\pi-\theta) = m\dfrac{v^2}{l} \end{cases}$$

从以上两式中消去 v，得 $T = mg(2+3\cos\theta)$

$T = 0$ 时，$\theta = \cos^{-1}\left(-\dfrac{2}{3}\right) = 131°49'$。



6．$\begin{cases} m_1v = m_1v_1\cos\theta_1 + m_2v_2\cos\theta_2 \\ m_1v_1\sin\theta_1 - m_2v_2\sin\theta_2 = 0 \\ m_1 = m_2 \end{cases}$

解得 $\theta_2 = \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{3} = 30°$

$v_2 = 10\sqrt{3} = 17.32\,\mathrm{m/s}$

由于 $\dfrac{1}{2}m_1v^2 = \dfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \dfrac{1}{2}m_2v_2^2$，即 $v^2 = v_1^2 + v_2^2$，系统机械能守恒，所以是弹性碰撞。

7．(1) $\begin{cases} m_A g - T_{AB} = m_A a \\ T_{AB} = m_B a \end{cases}$，消去 T_{AB} 得 $a = \dfrac{m_A}{m_A + m_B}g = \dfrac{1}{2}g$

又 $l = \dfrac{1}{2}at^2$，得 $t = \sqrt{\dfrac{2l}{a}} = \sqrt{\dfrac{2\times 0.4}{5}} = 0.4\,\mathrm{m}$

(2) 系统动量不守恒，因为在拉紧过程中滑轮对绳有冲击力。

(3) 绳拉紧时 A、B 的速率 $v = \sqrt{2al} = \sqrt{2\times 0.5g\times 0.4} = 2\,\mathrm{m/s}$

设绳拉紧时间为 τ，忽略重力的作用，由动量定理得

综合练习 1.2.3 参考解答

$$\begin{cases} m_A V - m_A v = -T_{AB}\tau \\ m_B V - m_B v = T_{AB}\tau - T_{BC}\tau \\ m_C V = T_{BC}\tau \end{cases} \quad \text{解得} \quad V = \frac{m_A + m_B}{m_A + m_B + m_C} v = \frac{2}{3} \times 2 = 1.33\,\text{m/s}$$

8．设两球碰撞后共同速率为v_1，由动量守恒定律得

$$(m_1 + m_2)v_1 = m_2 v_0 \qquad (1)$$

碰撞后系统机械能守恒

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_1^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 \qquad (2)$$

系统对 O 点的角动量守恒

$$(m_1 + m_2)l_0 v_1 = (m_1 + m_2) l v \sin\alpha \qquad (3)$$

由以上三个方程解得

$$v = \frac{m_2\sqrt{v_0^2 - \dfrac{m_1 + m_2}{m_2^2}k(l - l_0)^2}}{m_1 + m_2}, \qquad \alpha = \sin^{-1}\frac{l_0 v_0}{l\sqrt{v_0^2 - \dfrac{m_1 + m_2}{m_2^2}k(l - l_0)^2}}$$

9．设卫星质量为m，地球质量为M，由角动量守恒定律和机械能守恒定律，得

$$m v_1 r_1 = m v_2 r_2, \quad \frac{1}{2}m v_1^2 - G\frac{mM}{r_1} = \frac{1}{2}m v_2^2 - G\frac{mM}{r_2}$$

从以上两式解得

$$v_1 = \sqrt{\frac{2GMr_2}{r_1(r_1 + r_2)}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{2GMr_1}{r_2(r_1 + r_2)}}$$

又$mg = G\dfrac{mM}{R^2}$，$GM = gR^2$，代入上式，得

$$v_1 = R\sqrt{\frac{2gr_2}{r_1(r_1 + r_2)}}, \quad v_2 = R\sqrt{\frac{2gr_1}{r_2(r_1 + r_2)}}$$

综合练习 1.2.3 参考解答

《大学物理》综合练习(二)参考答案

一、选择题

1．C；2．C；3．B；4．C；5．B；6．C；7．D；8．①E，②C。

二、填充题

1． $3.98\times10^{2}\ \mathrm{N\cdot m}$ 。　2． $4.95\times10^{2}\ \mathrm{rad/s}$ 。　3． $5.42\ \mathrm{m/s}$ 。

4． $mR^2\left(\dfrac{gt^2}{2h}-1\right)$ 。　5． $\dfrac{\sqrt{3}}{3}L$ ； $\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}g}{L}}$ 。　6． $\dfrac{3g\cos\theta}{2L}$ ； $\sqrt{\dfrac{3g\sin\theta}{L}}$ ；

$\sqrt{3Lg\sin\theta}$ ； $a_t=\dfrac{3g\cos\theta}{2}$ ； $a_n=3g\sin\theta$ ； $F_t=\dfrac{1}{4}mg\cos\theta$ ； $F_n=\dfrac{5}{2}mg\sin\theta$ ；

$F=\sqrt{F_t^2+F_n^2}=\dfrac{1}{4}mg\sqrt{99\sin^2\theta+1}$ ； $\beta=\arctan\dfrac{F_t}{F_n}=\arctan\dfrac{\cos\theta}{10\sin\theta}$ 。

三、计算题

1． 设 T_1 、 T_2 分别为物体 m 与滑轮间、球壳与滑轮间绳的张力， J 为球壳绕竖直轴的转动惯量， a 为物体 m 的加速度大小，方向竖直向下。由转动定律和牛顿第二定律，得

球壳：
$$T_2R=J\alpha=J\frac{a}{R}=\frac{2}{3}MR^2\frac{a}{R} \qquad (1)$$

滑轮：
$$(T_1-T_2)r=J_0\alpha_0=J_0\frac{a}{r} \qquad (2)$$

物体：
$$mg-T_1=ma \qquad (3)$$

由（1）~（3）式解得： $a=\dfrac{mg}{m+\dfrac{2}{3}M+\dfrac{J_0}{r^2}}$ ， $v=\sqrt{2ah}=\sqrt{\dfrac{2mgh}{m+\dfrac{2}{3}M+\dfrac{J_0}{r^2}}}$

2． 钢棒绕其转轴的转动惯量

$$J=J_1+2J_2=\frac{1}{12}Ml^2+2m\times\left(\frac{l}{2}\right)^2$$
$$=\frac{1}{12}\times6.4\times1.2^2+2\times1.06\times\left(\frac{1.2}{2}\right)^2=1.53\ \mathrm{Kg\cdot m^2}$$

(1) 由动能定理得轴摩擦力所做的总功 A

$$A=\Delta E_k=-\frac{1}{2}J\omega_0^2=-4.60\times10^4\ \mathrm{J}$$

(2) 恒定力矩的功 $A = M\theta = M2\pi n$，故在 32 s 内转过的转数

$$n = \frac{A}{2\pi M} = \frac{A}{2\pi J\alpha} = \frac{4.60\times10^4\times32.0}{2\pi\times1.53\times2\pi\times39} = 624.9(\text{rev})$$

(3) 当摩擦力矩不恒定时，只有力矩作功可以计算，无需任何附加条件，且

$$A = -4.60\times10^4\ \text{J}$$

3．(1) 由转动定律 $J\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -K\omega$，积分 $\displaystyle\int_{\omega_0}^{\omega_0/2}\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega} = -\frac{K}{J}\int_0^t \mathrm{d}t$，得 $t = \dfrac{J}{K}\ln 2$

(2) 由动能定理 $A = E_{k_2} - E_{k_1} = \dfrac{1}{2}J\left(\dfrac{\omega_0}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2}J\omega_0^2 = -\dfrac{3}{8}J\omega_0^2$

4．取杆自由悬挂时的质心所在位置为势能零点，杆对离其一端 $l/4$ 的水平轴的转动惯量为

$$J = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{7}{48}ml^2$$

系统在整个运动过程中机械能守恒，故有

$$\frac{1}{2}J\omega_0^2 = mg\frac{l}{2},\quad \omega_0 = 4\sqrt{\frac{3g}{7l}},\quad \omega > \omega_0$$

5．(1) 碰撞过程不计摩擦力的影响，系统对 O 点的角动量守恒

$$\frac{l}{2}m_2 v\sin30^\circ = J\omega_0 = \left(\frac{m_1l^2}{3} + \frac{m_2l^2}{4}\right)\omega \approx \frac{m_1l^2}{3}\omega_0$$

$$\omega_0 = \frac{lm_2v\sin30^\circ}{2\times\dfrac{m_1l^2}{3}} = \frac{0.02\times400\times0.5}{2\times\dfrac{3}{3}} = 2\ \text{rad/s}$$

(2) 在距 O 点 r 处取一长为 $\mathrm{d}r$ 质元，摩擦力大小为 $\mathrm{d}f = \mu\,\mathrm{d}mg = \mu\dfrac{m_1g}{l}\mathrm{d}r$，$\mathrm{d}f$ 对 O 点的力矩 $\mathrm{d}M = -r\,\mathrm{d}f = -\mu\dfrac{m_1g}{l}r\,\mathrm{d}r$，则整个细杆所受的摩擦力对 O 点的力矩为

$$M = \int_0^l \mathrm{d}M = \int_0^l -\mu\frac{m_1g}{l}r\,\mathrm{d}r = -\frac{\mu m_1gl}{2}$$

由动能定理 $$M\theta = \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J\omega_0^2$$

$$\theta = \frac{-\dfrac{1}{2}J\omega_0^2}{M} = \frac{-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{m_1l^2}{3}\omega_0^2}{-\dfrac{\mu m_1gl}{2}} = \frac{l\omega_0^2}{3\mu g} = \frac{2^2}{3\times0.2\times9.8} = 0.68\,\text{rad}$$

6．系统对通过其中心的水平轴的角动量守恒

$$m'ul = J\omega - m'vl$$

即
$$m'(u+v)l = J\omega = \frac{1}{3}ml^2\omega \qquad (1)$$

因小球和细杆作弹性碰撞，系统机械能守恒

$$\frac{1}{2}m'u^2 = \frac{1}{2}m'v^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 \qquad (2)$$

由（1）和（2）式解得

$$v = \frac{u(m-3m')}{m+3m'}，\quad \omega = \frac{6m'u}{(m+3m')l}$$

7．(1) 在距圆心 r 处取一宽度为 $\mathrm{d}\,r$ 的圆环，其上所受的阻力大小为 $\mathrm{d}\,f$ ，则

$$\mathrm{d}\,f = kv\,\mathrm{d}\,s = kr\omega 4\pi r\,\mathrm{d}\,r = 4\pi\omega k r^2\,\mathrm{d}\,r$$

圆盘所受的空气阻力矩为

$$M = \int \mathrm{d}\,M = -\int_0^R r\,\mathrm{d}\,f = -\int_0^R 4\pi\omega k r^3\,\mathrm{d}\,r = -\pi\omega k R^4$$

(2) 由转动定律

$$M = -\pi\omega k R^4 = J\frac{\mathrm{d}\,\omega}{\mathrm{d}\,t} = J\frac{\mathrm{d}\,\omega}{\mathrm{d}\,\theta}\frac{\mathrm{d}\,\theta}{\mathrm{d}\,t} = J\omega\frac{\mathrm{d}\,\omega}{\mathrm{d}\,\theta}$$

积分
$$\int_0^\theta \mathrm{d}\,\theta = -\frac{J}{\pi k R^4}\int_{\omega_0}^0 \mathrm{d}\,\omega$$

得
$$\theta = \frac{J\omega_0}{\pi k R^4} = \frac{\frac{1}{2}mR^2\omega_0}{\pi k R^4} = \frac{m\omega_0}{2\pi k R^2}$$

$$n = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{m\omega_0}{4\pi^2 k R^2}$$

《大学物理》综合练习(三)参考答案

一、选择题

1．D；2．A；3．B；4．A；5．B；6．B；7．C；8．A；9．C；10．B；11．E；12．D；13．A；14．A、B、D；15．B、C。

二、填充题

1．v_p、$\bar{v}$、$\sqrt{\overline{v^2}}$；　2．1:1、5:3；　3．$\dfrac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$、正比、$\sqrt{\dfrac{16\pi}{km}}\dfrac{d^2 p}{\sqrt{T}}$、平方根成反比；　4．4、4；　5．Ⅱ、$v_0$、$N(1-A)$；　6．(1)单位体积中速率在 $v \to v+\mathrm{d}\,v$

区间内的分子数，(2)速率小于v_1的分子数，(3)速率大于v_0的所有分子的平均速率；

7．(1)等压，(2)等容，(3)等温，(4)等容；　8．29%、71%；　9．绝热过程、等压过程；　10．$RT\ln\dfrac{V_2-b}{V_1-b}+a\left(\dfrac{1}{V_2}-\dfrac{1}{V_1}\right)$；　11．$\Delta S=\dfrac{p_1V_1}{T}\ln\dfrac{1}{2}$、$\Delta S=0$。

三、计算题

1．(1) $v=v_0$时有$Nf(v_0)=kv_0=a$，$\therefore k=\dfrac{a}{v_0}$。由归一化条件

$$\frac{1}{2}av_0+av_0=N \quad 得 \quad a=\frac{2N}{3v_0}。$$

(2) $\Delta N=\int_{1.5v_0}^{2v_0}Nf(v)\,\mathrm{d}v=\dfrac{a}{2}v_0$，$\Delta N=\dfrac{N}{3}$。

(3) $\bar{v}=\int_0^{\infty}vf(v)\,\mathrm{d}v=\int_0^{v_0}v\left(\dfrac{a}{Nv_0}v\right)\mathrm{d}v+\int_{v_0}^{2v_0}v\dfrac{a}{N}\,\mathrm{d}v=\dfrac{11v_0^2a}{6N}$，$\therefore\bar{v}=\dfrac{11}{9}v_0$。

2． 证明：$f(v)=4\pi\left(\dfrac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\cdot v^2=\dfrac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{v}{v_p}\right)^2e^{-\left(\frac{v}{v_p}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{v_p}$

$f(v_p)=\dfrac{4}{\sqrt{\pi}v_pe}$，其中　$v_p=\sqrt{\dfrac{2kT}{m}}$。在$v_p\sim v_p+\Delta v$区间内的分子数为

$$\Delta N=Nf(v_p)\Delta v=\frac{4N\cdot\Delta v}{\sqrt{\pi}v_pe}=\frac{4N\cdot\Delta v}{\sqrt{\pi}e}\sqrt{\frac{m}{2kT}}，\quad\therefore\Delta N\propto\frac{1}{\sqrt{T}}。$$

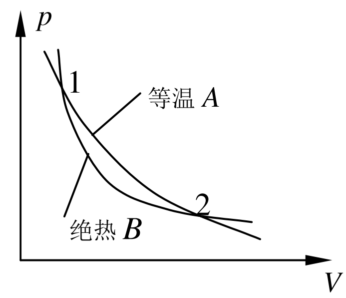
3．(1) $\Delta E=E_2-E_1=\dfrac{i}{2}R(T_2-T_1)=\dfrac{i}{2}(p_2V_2-p_1V_1)$

(2) $A=\dfrac{1}{2}(V_2-V_1)(p_1+p_2)$

(3)
$$\begin{aligned}Q=\Delta E+A&=\frac{i}{2}(p_2V_2-p_1V_1)+\frac{1}{2}(V_2-V_1)(p_1+p_2)\\&=\frac{i}{2}(p_2V_2-p_1V_1)+\frac{1}{2}(p_2V_2-p_1V_1)+\frac{1}{2}(p_1V_2-p_2V_1)\\&=\frac{i+1}{2}(p_2V_2-p_1V_1)+\frac{1}{2}p_1V_1\left(\frac{V_2}{V_1}-\frac{p_2}{p_1}\right)\end{aligned}$$

$\because \dfrac{V_2}{V_1}=\dfrac{p_2}{p_1}$，$\therefore Q=\dfrac{i+1}{2}(p_2V_2-p_1V_1)=\dfrac{i+1}{2}R(T_2-T_1)$

$C=\dfrac{Q}{T_2-T_1}=\dfrac{i+1}{2}R$，$i=5$，$\therefore C=3R$



4. (1)用热力学第一定律证明

反证法：如图，设等温线 A 与绝热线 B 相交于1、2两点，由于1、2在等温线上，内能相等 $E_1=E_2$。又1、2在绝热线上，$Q=0$。根据 $Q=A+\Delta E$，而 $1\to 2$ 过程中系统对外做功不为零，所以 $E_1\neq E_2$，即 $\Delta E\neq 0$，因此绝热线和等温线不能相交于两点。

(2)用热力学第二定律证明

如上图作 $1\xrightarrow{A}2\xrightarrow{B}1$ 循环，此过程对外作有用功(所围面积)，但该循环只在等温过程中吸热，而没有其它影响，即违反热力学第二定律，因此绝热线和等温线不能相交于两点。

5．(1) $\because\ V=\dfrac{a}{\sqrt{p}}$，$\therefore p=\dfrac{a^2}{V^2}$，系统对外界做功为

$$A=\int_{V_1}^{V_2}p\,\mathrm{d}V=\int_{V_1}^{V_2}\frac{a^2}{V^2}\mathrm{d}V=a^2\left(\frac{1}{V_1}-\frac{1}{V_2}\right)$$

(2) $\dfrac{T_2}{T_1}=\dfrac{p_2V_2}{p_1V_1}=\dfrac{\dfrac{a^2}{V_2^{\,2}}V_2}{\dfrac{a^2}{V_1^{\,2}}V_1}=\dfrac{V_1}{V_2}<1$，即温度降低。

6．(1) $a\to b$ 等温膨胀过程吸热，$b\to c$ 等容过程放热。

(2) $V_c=V_2$，$T_c=T_1\left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$

(3) $\eta=1-\dfrac{Q_2}{Q_1}=1-\dfrac{Q_{bc}}{Q_{ab}}=1-\dfrac{\dfrac{M}{M_{mol}}C_V(T_1-T_C)}{\dfrac{M}{M_{mol}}RT_1\ln\dfrac{V_2}{V_1}}=1-\dfrac{1}{\gamma-1}\cdot\dfrac{1-\left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}}{\ln\dfrac{V_2}{V_1}}$

综合练习 1.2.3 参考解答

7．致冷系数　$W_{卡}=\dfrac{Q_2}{A}=\dfrac{T_2}{T_1-T_2}=\dfrac{273-5}{22}=\dfrac{268}{22}=12.2$

$\therefore Q_2=AW_{卡}=1000\times 12.18=1.22\times 10^4\ \text{J}$（从室外吸收的热量）

传给室内的热量 $Q_1=Q_2+A=(1.22+0.1)\times 10^4=1.32\times 10^4\ \text{J}$

8．对 ABO 过程，外界做功 $A_1=Q_1=-30\,\text{J}$；

对 ODC 过程，对外做功 $A_2=Q_2=70\,\text{J}$；

$\because Q_1=Q_{BO}+Q_{OA}$，$Q_2=Q_{OD}+Q_{CO}$

$\therefore Q_1+Q_2=Q_{BD}+Q_{CA}$，$Q_{BD}=Q_1+Q_2-Q_{CA}=140\,\text{J}$

9．$0°\text{C}$ 水至 $100°\text{C}$ 水：设想该过程为一个可逆的等压过程

$$S_B-S_A=\int_A^B\frac{(\mathrm{d}Q)_p}{T}=\int_A^B\frac{1}{T}\left(\frac{M}{M_{mol}}C_p\,\mathrm{d}T\right)=\int_{T_1}^{T_2}MC\frac{\mathrm{d}T}{T}$$

$$=MC\ln\frac{T_2}{T_1}=1\times 4.18\times\ln\frac{373}{273}=1.30\,\text{kJ/K}$$

$100°\text{C}$ 水至 $100°\text{C}$ 水蒸汽：设想该过程为一个可逆的等温过程

$$S_C-S_B=\int_B^C\frac{(\mathrm{d}Q)_T}{T}=\frac{M\lambda}{T}=\frac{1\times 2253}{373}=6.04\,\text{kJ/K}$$

$$\Delta S_{AC}=S_C-S_A=(S_C-S_B)+(S_B-S_A)=7.34\,\text{kJ/K}$$

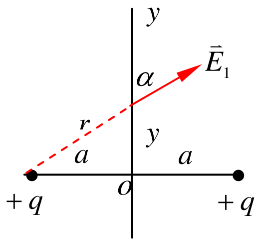
《大学物理》综合练习(四)

——静电学

教学班级：________ 序　号：________ 姓　名：______________ 日　期：________

一、选择题(把正确答案的序号填入括号内)

1．两个电量都是 $+q$ 的点电荷相距 $2a$， o 为其连线的中点，如图所示。则其中垂线 y 轴上，场强取极大值的点到 o 点的距离为



(A) $\dfrac{a}{2}$；　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$；　(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$；　(D) $\sqrt{2}a$。

解： $$E = 2E_1\cos\alpha = 2\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{y}{r},$$

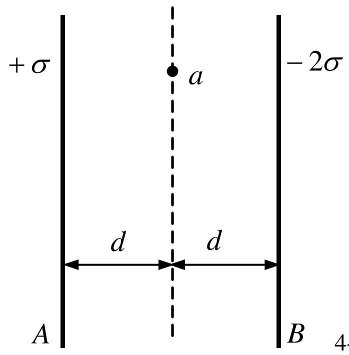
$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}y} = 0,\quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

2. 真空中两带电平行板 A、B，板间距为 d（很小），板面积为 S，带电量分别为 $+Q$ 和 $-Q$。若忽略边缘效应，则两板间作用力的大小为

(A) $\dfrac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$；　(B) $\dfrac{Q^2}{\varepsilon_0 S}$；　(C) $\dfrac{2Q^2}{\varepsilon_0 S}$；　(D) $\dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}$。

解： $$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S},\quad F = QE_1 = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}$$

3．如图， A、B 是真空中两块相互平行的均匀带电平面，电荷面密度分别为 $+\sigma$ 和 -2σ，若 A 板选作零电势参考点，则图中 a 点的电势是



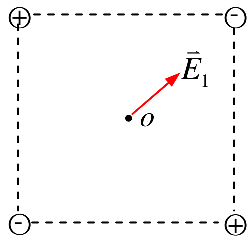
(A) $\dfrac{3\sigma d}{2\varepsilon_0}$；　　(B) $\dfrac{-\sigma d}{\varepsilon_0}$；

(C) $-\dfrac{3\sigma d}{2\varepsilon_0}$；　　　　(D) $\dfrac{3\sigma d}{\varepsilon_0}$。

解：$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}+\frac{2\sigma}{2\varepsilon_0}=\frac{3\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$U_a=\int_a^A \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-\frac{3\sigma}{2\varepsilon_0}d$$

4．四个点电荷的电量相等，两正两负置于正方形的四角上，如图所示。令U和E分别为图示中心o处的电势和场强的大小，当仅有左上角的点电荷存在时，o点处的电势和场强分别为U_0和E_0，试问U和E的值为多少?



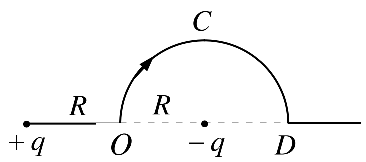
(A) $U=U_0$，$E=E_0$；　　(B) $U=0$，$E=0$；

(C) $U=0$，$E=4E_0$；　　(D) $U=4U_0$，$E=0$。

解：$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3+\vec{E}_4=0$$

$$U=U_1+U_2+U_3+U_4=0$$

5．如图所示，在相距$2R$的点电荷$+q$和$-q$的电场中，把点电荷$+Q$从O点沿OCD移到D点，则电场力作功与$+Q$（系统）电势能的增量分别为



(A) $\dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R}$，$\dfrac{-qQ}{4\pi\varepsilon_0 R}$；　(B) $\dfrac{-qQ}{4\pi\varepsilon_0 R}$，$\dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R}$；

(C) $\dfrac{qQ}{6\pi\varepsilon_0 R}$，$\dfrac{-qQ}{6\pi\varepsilon_0 R}$；　(D) $\dfrac{-qQ}{6\pi\varepsilon_0 R}$，$\dfrac{qQ}{6\pi\varepsilon_0 R}$。

解：

$$A_{OD}=\sum\frac{Qq_i}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{iO}}-\frac{1}{r_{iD}}\right)=\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{3R}\right)=\frac{Qq}{6\pi\varepsilon_0 R}$$

$$W_D - W_O = -A_{OD} = -\frac{Qq}{6\pi\varepsilon_0 R}$$

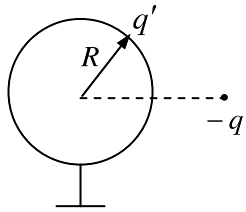
6．两大小不相等的金属球，大球半径是小球半径的二倍，小球带电量为$+q$，大球不带电。今用导线将两球相连，则有

(A) 两球带电量相等；　　(B) 小球带电量是大球的两倍；

(C) 两球电势相等；　　(D) 大球电势是小球的两倍。

解：两球电势相等

7．有一接地导体球，半径为R，距球心$2R$处有一点电荷$-q$，如图所示。则导体球面上的感应电荷的电量是

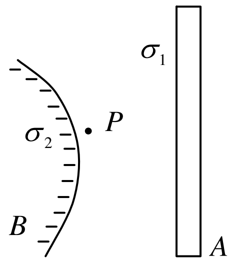


(A) 0；　(B) $-q$；　(C) $q/2$；　(D) $-q/2$。

解：$$U_0 = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 2R} = 0$$

$$q' = \frac{q}{2}$$

8．一无限大均匀带电介质平板A，电荷面密度为σ_1，将介质板移近一导体B后，此时导体B表面上靠近P点处的电荷面密度为σ_2，P点是极靠近导体B表面的一点，如图所示，则P点的场强是



(A) $\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}$；　(B) $\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}$；　(C) $\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}+\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}$；

(D) $\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}-\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}$；　(E) $\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}$；　(F)以上都不对。

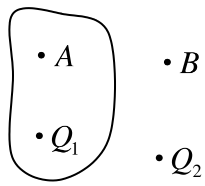
解：利用导体静电平衡条件和高斯定理可证。

9．两个同心金属球壳，半径分别为r_1、r_2 $(r_2 > r_1)$，如果外球壳带电q而内球壳接地，则内球壳带电为

(A) 0；　(B) $-q$；　(C) $\frac{r_1}{r_2}q$；　(D) $-\frac{r_1}{r_2}q$。

解：球心电势 $U_0=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}+\dfrac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r_1}=0$，$q'=-\dfrac{r_1}{r_2}q$

10．如图所示，一个封闭的空心导体，观察者 A（测量仪器）和电荷 Q_1 置于导体内，而观察者 B 和电荷 Q_2 置于导体外，下列说法中哪一种是正确的



(A) A 只观察到 Q_1 产生的场，B 只观察到 Q_2 产生的场；
(B) A 可观察到 Q_1 和 Q_2 产生的场，B 只观察到 Q_2 产生的场；
(C) A 只观察到 Q_1 产生的场，B 可观察到 Q_1 和 Q_2 产生的场。

解：导体空腔外的电荷对导体腔内的电场及电荷分布没有影响，A 只观察到 Q_1 产生的场；

Q_1 通过在腔外表面感应出等量同号电荷影响外电场，B 可观察到 Q_1 和 Q_2 产生的场。

11．密度均匀的电荷分布在半径为 a 的球内，其总电量为 Q，则系统的总静电能为

(A) $\dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$； (B) $\dfrac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 a}$； (C) $\dfrac{Q}{12\pi\varepsilon_0 a^2}$； (D) $\dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a^2}$

解：利用高斯定理

$$r<a:\ E_1=\frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3};\quad r>a:\ E_2=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$w_e=\frac{1}{2}\varepsilon E^2,$$

$$W=\int_0^a\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_1^2\,\mathrm{d}V+\int_a^\infty\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_2^2\,\mathrm{d}V=\frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 a}$$

12．一个半径为 R_1 的金属球带有正电荷 Q，球外包围着一层同心的相对介电常数为 ε_r 的均匀电介质球壳层，其内半径为 R_1，外半径为 R_2，在电介质内的点 a 距离球心为

$r_a(r_a < R_2)$，则 a 点的电势为

(A) $\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_r r_a}$；　　(B) $\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r_a}$；

(C) $\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r_a}$；　　(D) $\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_a}-\dfrac{1}{R_2}\right)+\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$。

解：由高斯定理

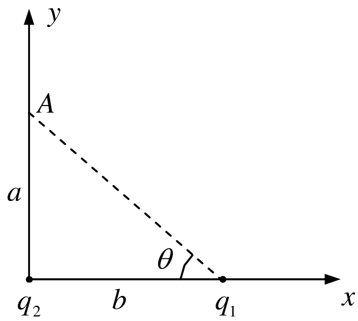
$$R_1 < r < R_2:\quad E_1=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2};$$

$$r > R_2:\quad E_2=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$V_a=\int_{r_a}^{\infty}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_{r_a}^{R_2}\vec{E}_1\cdot \mathrm{d}\vec{l}+\int_{R_2}^{\infty}\vec{E}_2\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

二、填充题(单位制为 SI)



1．如图所示，两个点电荷 q_1 与 q_2 位于坐标 x 轴上，已知两电荷间距离为 b，A 点到 q_2 的距离为 a，则 A 点的场强 $\vec{E}=E_x\vec{i}+E_y\vec{j}$，其中 $E_x=\underline{-\dfrac{q_1 b}{4\pi\varepsilon_0(a^2+b^2)^{3/2}}}$；

$E_y=\underline{\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{q_1 a}{(a^2+b^2)^{3/2}}+\dfrac{q_2}{a^2}\right]}$。

解：$E_1=\dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0(a^2+b^2)}$，$E_2=\dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$，

$$\cos\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$E_x = -E_1\cos\theta = -\frac{q_1 b}{4\pi\varepsilon_0(a^2+b^2)^{3/2}}$$

$$E_y = E_2 + E_1\sin\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1 a}{(a^2+b^2)^{3/2}} + \frac{q_2}{a^2}\right]$$

2．一无限长带电圆柱体，半径为b，其电荷体密度$\rho = K/r$，K为常数，r为轴线到场点的距离，则带电圆柱所产生的场强分布在圆柱体外为$E = \underline{\dfrac{bK}{\varepsilon_0 a}}$；在圆柱体内为$E = \underline{\dfrac{K}{\varepsilon_0}}$。

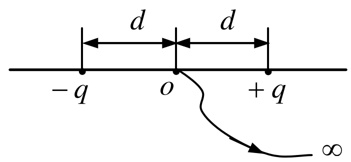
解：利用高斯定理，做半径为a，长为l的圆柱形高斯面

$$a > b：\ 2\pi al \cdot E = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^b \rho\,\mathrm{d}V = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^b \frac{K}{r}2\pi rl\,\mathrm{d}r$$

$$E = \frac{bK}{\varepsilon_0 a}$$

$$a < b：\ 2\pi al \cdot E = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^a \rho\,\mathrm{d}V = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^a \frac{K}{r}2\pi rl\,\mathrm{d}r$$

$$E = \frac{K}{\varepsilon_0}$$



3．把单位正电荷从一对等量异号电荷连线中点o，沿任意路线移到无穷远处，则电场力对该单位正电荷所作的功为__0__。

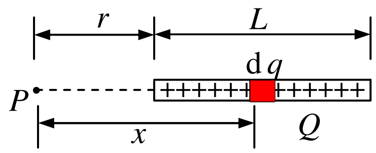
解：

$$A_{o\infty}=\sum\frac{q_0q_i}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{io}}-\frac{1}{r_{i\infty}}\right)$$

$$=\frac{q_0q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{d}-0\right)-\frac{q_0q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{d}-0\right)=0$$

或 $A_{o\infty}=q_0(U_o-U_\infty)=0$

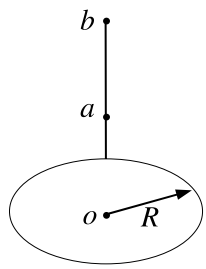
4．长度为L的细玻璃棒，沿着长度方向均匀地分布着电荷，总电量为Q，如图所示。在棒的轴向有一点P，离棒左端的距离为r，则P点的电势$U=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{L+r}{r}$。



解：$U=\int_r^{r+L}\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 x}$

$$=\int_r^{r+L}\frac{\lambda\,\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 x}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{L+r}{r}$$

5．如图所示，有一半径为R的均匀带电圆环，带电量为Q，其轴线上有两点a和b，$\overline{oa}=\overline{ab}=R$。设无穷远处的电势为零，$a$、$b$两点的电势分别为$U_1$和$U_2$，则$\frac{U_2}{U_1}=\sqrt{\frac{2}{5}}$。



解：$U_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2+R^2}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{2}R}$

$$U_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2+4R^2}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{5}R}$$

$$\frac{U_2}{U_1}=\sqrt{\frac{2}{5}}$$

6．接第 5 题，把电荷q从a点移到b点，外力作的功$A_{外}=\underline{\dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}$。

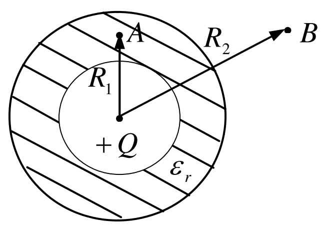
解：电场力的功 $A_{ab}=q(U_1-U_2)$

外力作功 $A_{外}=q(U_2-U_1)=\dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

7．在带电量为Q的导体球外部有一相对介电常数为ε_r的电介质球壳，在电介质内外分别为有两点A、B，它们到球心的距离为R_1和R_2，则

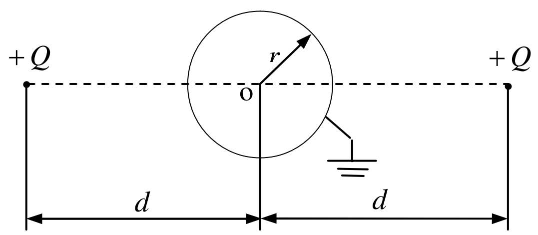
$E(A)=\underline{\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1^2}}$；$E(B)=\underline{\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}}$；

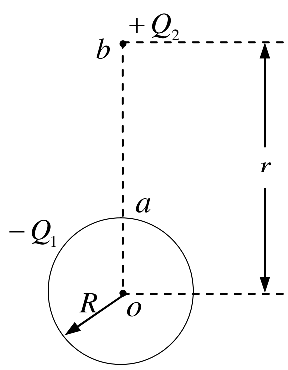
$D(A)=\underline{\dfrac{Q}{4\pi R_1^2}}$；　　$D(B)=\underline{\dfrac{Q}{4\pi R_2^2}}$。



解：利用$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$的高斯定理及$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$关系求解。

8．两带电量皆为$+Q$的点电荷相距$2d$，一接地的半径为r的导体球置于它们中间，如图所示。则导体球所带的净电量$q=\underline{-\dfrac{2rQ}{d}}$；若去掉接地线，把导体球充电到电势$U$，则导体球所带净电量$q'=\underline{r\left(4\pi\varepsilon_0 U-\dfrac{2Q}{d}\right)}$。





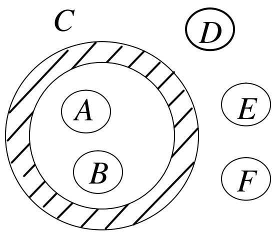
解：$U_0=\dfrac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 d}+\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}=0$，$q=-\dfrac{2rQ}{d}$

$$U=\frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 d}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r},\quad q'=r(4\pi\varepsilon_0 U-\frac{2Q}{d})$$

9．有一固定不动半径为 R 的导体薄球壳，带电量为 $-Q_1$，在薄球壳的正上方到球心 o 的距离为 $r=3R$ 的 b 点放一点电荷 $+Q_2$，如图所示。则导体薄壳中心 o 点的电势 $U_o=$ $\underline{\dfrac{Q_2-3Q_1}{12\pi\varepsilon_0 R}}$，导体薄球壳面上最高点 a 的电势 $U_a=$ $\underline{\dfrac{Q_2-3Q_1}{12\pi\varepsilon_0 R}}$。

解：$U_0=\dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}-\dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R}=\dfrac{Q_2-3Q_1}{12\pi\varepsilon_0 R}$

$$U_a=U_0=\frac{Q_2-3Q_1}{12\pi\varepsilon_0 R}$$

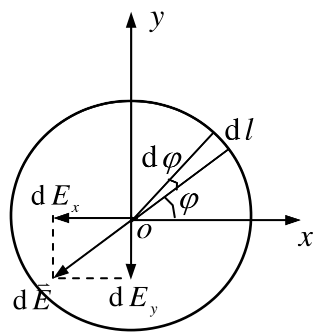


10．如图所示，中性导体 C 内有带电体 A、B，外面有带电体 D、E、F……，今使 A、B 所带电量变化，则 C 外的电场___变化___(变或不变)，电势___变化___(变或不变)；D、E、F……电量变化，C 内的电场___不变___，C 内的电势___变化___。

解：根据导体静电感应条件及屏蔽概念可解。

三、计算题

不讲 1．如图所示，一带电细线弯成半径为 R 的圆环，电荷线密度为 $\lambda=\lambda_0\cos\varphi$，式中 λ_0 为一常数，φ 为半径 R 与 x 轴的夹角，试求环心 o 处电场强度。



解：在圆环上任取一段 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 到 $\boldsymbol{o}$ 点的连线与 $\boldsymbol{x}$ 轴夹角为 φ，则 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 段上的电荷

$$\mathrm{d}q=\lambda\,\mathrm{d}l=\lambda R\,\mathrm{d}\varphi=\lambda_0 R\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$\mathrm{d}\boldsymbol{q}$ 在 $\boldsymbol{o}$ 点产生场强的大小为

$$\mathrm{d}E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{R^2}=\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$\mathrm{d}\vec{E}$ 的方向如图所示。

$$\mathrm{d}E_x=-\mathrm{d}E\cos\varphi,\quad \mathrm{d}E_y=-\mathrm{d}E\sin\varphi$$

整个圆环上的电荷在 $\boldsymbol{o}$ 点产生的场强为

$$E_x=\int\mathrm{d}E_x=-\int\mathrm{d}E\cos\varphi$$

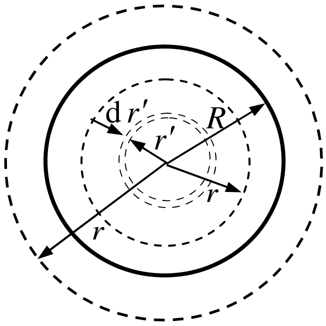
$$=-\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi=-\frac{\lambda_0}{4\varepsilon_0 R}$$

$$E_y=\int\mathrm{d}E_y=-\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{2\pi}\cos\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=0$$

$$\therefore\ \vec{E}=E_x\vec{i}+E_y\vec{j}=-\frac{\lambda_0}{4\varepsilon_0 R}\vec{i}$$

不讲 2．一半径为 R 的带电球体，其电荷体密度 $\rho = Kr^2$， K 为正常数， r 为球心到球内一点的矢径的大小。求此带电球体所产生的电场强度的分布。

解：在球体内，取半径为 $\boldsymbol{r}$ 的球面为高斯面，所含电量 $\boldsymbol{q}$



$$q = \int_V \rho \,\mathrm{d}V = \int_0^r \rho 4\pi r'^2 \,\mathrm{d}r'$$

$$= \int_0^r 4\pi K r'^4 \,\mathrm{d}r' = \frac{4}{5}\pi K r^5$$

由高斯定理得

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 4\pi r^2 E_{内} = \frac{4}{5\varepsilon_0}\pi K r^5$$

$$E_{内} = \frac{Kr^3}{5\varepsilon_0} \quad (r < R)$$

在球外，取半径为 $\boldsymbol{r}$ 的球面为高斯面，所含电量

$$q = \int_V \rho \,\mathrm{d}V = \int_0^R \rho 4\pi r^2 \,\mathrm{d}r = \int_0^R 4\pi K r^4 \,\mathrm{d}r = \frac{4}{5}\pi K R^5$$

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 4\pi r^2 E_{外} = \frac{4}{5\varepsilon_0}\pi K R^5$$

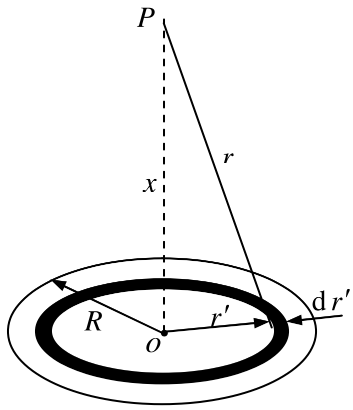
$$E_{外} = \frac{KR^5}{5\varepsilon_0 r^2} \quad (r > R)$$

3．一圆盘，半径 $R=8.0\times10^{-2}$ m，均匀带电，而电荷面密度 $\sigma=2.0\times10^{-5}\ \mathrm{C/m^2}$，求：

（1）轴线上任一点的电势(用该点与盘心的距离 x 表示)；

（2）从电场强度和电势梯度的关系，求该点的电场强度；

（3）计算 $x=6.0\times10^{-2}$ m 的电势和场强。



解：(1)半径为 r'、宽度为 $\mathrm{d}r'$ 的窄圆环的带电量为

$$\mathrm{d}q=\sigma 2\pi r'\,\mathrm{d}r'$$

此窄圆环在 P 点产生的电势

$$\mathrm{d}U=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

整个圆环在 P 点产生的电势为

$$U=\int\mathrm{d}U=\int_0^R\frac{\sigma 2\pi}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r'}{\sqrt{x^2+r'^2}}\mathrm{d}r'=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{x^2+R^2}-x)$$

(2) $$E_x=-\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}-1\right)$$

$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)$$ 场强方向沿 x 轴正向。

(3) $x=6.0\times10^{-2}$ m，$R=8.0\times10^{-2}$ m，

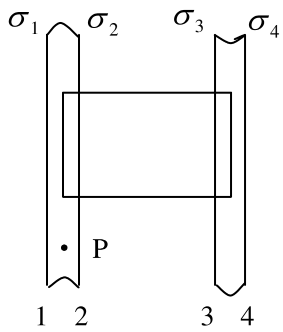
$\sigma=2.0\times10^{-5}\ \mathrm{C/m^2}$

$U=4.5\times10^{4}$ V，　$E=4.5\times10^{5}$ V/m

不讲 4．有两个无限大平行平面带电导体板，如图所示。证明：

(1) 相向的两面上，电荷面密度总是大小相等而符号相反；

(2) 相背的两个面上，电荷面密度总是大小等而符号相同。



解：（1）取两底面分别位于两导体板内部的柱面为高斯面，设底面面积为Δs，则由高斯定理得

$$\oint_s \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \oint_{侧} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} + \oint_{底1} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} + \oint_{底2} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0$$

面内包围电荷 $q = \sigma_2 \Delta s + \sigma_3 \Delta s$

$$\therefore \sigma_2 = -\sigma_3$$

(2) 在左导体内部场强为零，即各面上的电荷在其内产生的合场强为零

$$E_P = E_1 - E_2 - E_3 - E_4 = 0$$

即 $$E_1 - E_4 = E_2 + E_3 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} = 0$$

所以 $$\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = 0 \quad \therefore \sigma_1 = \sigma_4$$

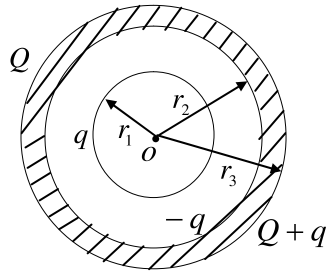
5. 半径为r_1的导体球带有电荷q，此球外有一个内、外半径为r_2、r_3的同心导体球壳，壳上带有电荷Q，如图所示。

(1) 求球的电势U_1，球壳的电势U_2及其电势差ΔU；

(2) 用导线把内球和外球壳的内表面联结在一起后，U_1、U_2和ΔU各为多少?

(3) 在情况(1)中，若外球接地，U_1、U_2和ΔU又各为多少?

(4) 在情况(1)中，设外球离地面很远，若内球接地，情况又怎样?



解：(1)由于静电感应，球壳内表面应带电$-q$，外表面带电$q+Q$。内球电势

$$U_1=\int_{r_1}^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_{r_1}^{r_2}\vec{E}\cdot d\vec{r}+\int_{r_3}^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$=\int_{r_1}^{r_2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr+\int_{r_3}^{\infty}\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_3}$$

或 $$U_1=U_0=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}+\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r_3}$$

外球电势 $$U_2=\int_{r_3}^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_{r_3}^{\infty}\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r_3}$$

两球间的电势差 $$\Delta U=U_1-U_2=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

(2) 连接后 $U_1 = U_2 = \int_{r_3}^{\infty} \frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathrm{d} r = \frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r_3}$

$$\Delta U = U_1 - U_2 = 0$$

(3) 外球接地，则 $U_2 = 0$

$$\Delta U = U_1 - U_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathrm{d} r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

(4) 内球接地，则 $U_1 = 0$，设此时内球剩余电荷为 q'，由于静电感应，外球壳内外表面分别带电 $-q'$ 和 $q' + Q$

$$\Delta U = U_1 - U_2 = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$U_2 = \frac{Q+q'}{4\pi\varepsilon_0 r_3}$$

所以 $\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = -\frac{Q+q'}{4\pi\varepsilon_0 r_3}$

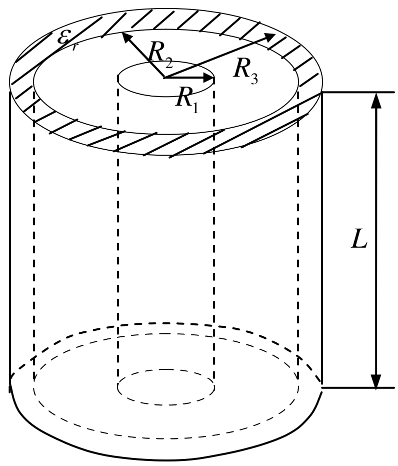
$$q' = \frac{Q r_1 r_2}{r_1 r_3 - r_2 r_3 - r_1 r_2}$$

$$U_2 = -\Delta U = -\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$= \frac{Q(r_2 - r_1)}{4\pi\varepsilon_0 (r_1 r_2 + r_2 r_3 - r_1 r_3)}$$

4-15

6．在半径为R_1长为L的均匀带电金属棒外，同轴地包围一层内、外半径分别为R_2、R_3的圆柱形均匀电介质壳层，其相对介电常数为ε_r，金属棒上轴向每单位长度的电荷为λ，设$L >> R_3$，试求



(1) 电场强度的分布；

(2) 若规定金属棒的电势为零，求电介质外表面的电势；

(3) 电介质内的电场能量。

解：因$L >> R$，忽略两端的边缘效应，带电金属棒可视为无限长。

(1) 场强分布

$r < R_1$（导体内部）：$E_1 = 0$；

$$R_1 < r < R_2：\quad E_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r};$$

$$R_2 < r < R_3：\quad E_3 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r};$$

$r > R_3$： $E_4 = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$。

(2) $U_{R_1} = 0$，介质外表面电势

$$U = \int_{R_3}^{R_1} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_{R_3}^{R_1} E \cdot \mathrm{d}l = \int_{R_3}^{R_1} E \cdot \mathrm{d}r$$

$$= \int_{R_3}^{R_2} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r} \mathrm{d}r + \int_{R_2}^{R_1} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \mathrm{d}r$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\varepsilon_r}\ln\frac{R_2}{R_3} + \ln\frac{R_1}{R_2}\right]$$

(3) 介质内的电场能量

$$W = \int_{R_2}^{R_3} \frac{1}{2}\varepsilon E_3^2 \,\mathrm{d}V = \int_{R_2}^{R_3} \frac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0\left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}\right)^2 2\pi r L \,\mathrm{d}r$$

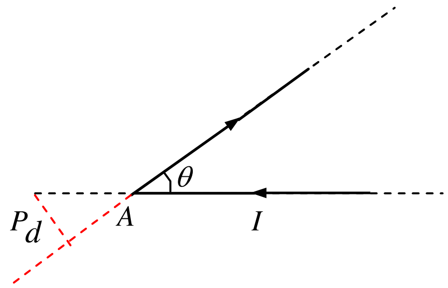
$$= \frac{\lambda^2 L}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\int_{R_2}^{R_3} \frac{1}{r}\mathrm{d}r = \frac{\lambda^2 L}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\ln\frac{R_3}{R_2}$$

《大学物理》综合练习(五)

——电磁学

教学班级：________序　号：________姓　名：______________日　期：________

一、选择题(把正确答案的序号填入括号内)



1. 一长直导线折成如图所示之形状，已知 $I=10\,\text{A}$，$\overline{PA}=2\,\text{cm}$，$\theta=60°$，则 P 点的磁感应强度为

   (A) 2.89×10^{-2} T；　(B) 5.98×10^{-3} T；

   (C) 5.98×10^{-5} T；　(D) 2.89×10^{-5} T 。

解：利用载流长直导线的磁场公式

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi d}(\sin\beta_2-\sin\beta_1)，\ \beta_1=30°，\ \beta_2=90°$$

$$d=\overline{PA}\cos\beta_1$$

2. 无限长直圆柱体半径为 R，沿轴向均匀流有电流。设圆柱体内（$r<R$）的磁感应强度为 B_i，圆柱体外（$r>R$）的磁感应强度为 B_e，则

   (A) B_i、B_e 均与 r 成正比；　　(B) B_i、B_e 均与 r 成反比；

   (C) B_i 与 r 成反比，B_e 与 r 成正比；　(D) B_i 与 r 成正比，B_e 与 r 成反比。

解：利用安培环路定理求解

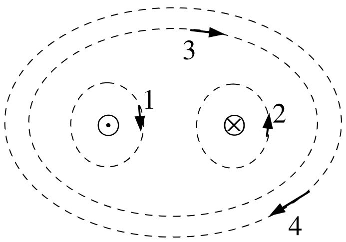
$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\sum I，\ B_i=\frac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2}，\ B_e=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

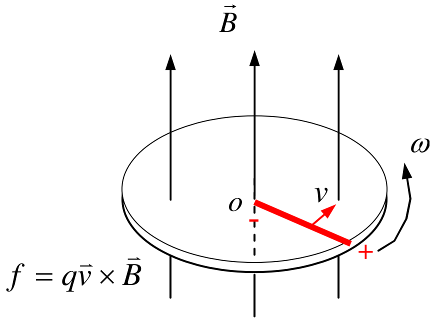
3. 如图所示，流出纸面的电流强度为 $2I$，流进纸面的电流强度为 I，该二电流都是稳定电流，则

   (A) $\oint_1 \vec{H}\cdot d\vec{l}=2I$；　(B) $\oint_2 \vec{H}\cdot d\vec{l}=I$；　(C) $\oint_3 \vec{H}\cdot d\vec{l}=I$；　(D) $\oint_4 \vec{H}\cdot d\vec{l}=-I$ 。

解：利用有磁介质时的安培环路定理求解

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum I$$





4．圆铜盘水平放置在均匀磁场中，$\vec{B}$ 的方向垂直盘面向上，当铜盘绕通过中心垂直于盘面的轴沿图示方向转动时

(A) 铜盘上产生涡流；

(B) 铜盘上有感应电动势产生，铜盘中心处电势最高；

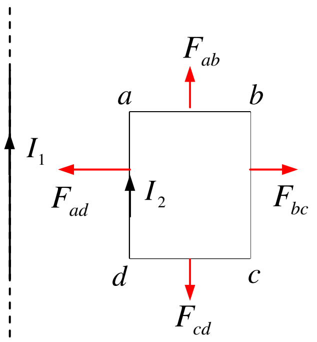
(C) 铜盘上有感应电动势产生，铜盘边缘处电势最高；

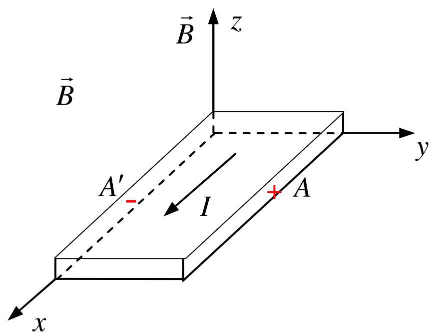
(D) 铜盘上有感应电流产生，沿铜盘转动的方向流动。

解：铜盘上有动生电动势，相当于许多电源并联，但不形成回路。

5．在一根无限长载流直导线旁放置一矩形截流线圈 $abcd$，它们都在纸平面内，ad 边平行于直导线，在磁场力作用下线圈将在纸平面内向什么方向运动?

(A) 向上；　(B) 向下；　(C) 向左；　(D) 向右。





解：利用安培定律求解，$\boldsymbol{F_{ad} > F_{bc}}$，$\boldsymbol{F_{ab} = F_{cd}}$。

6．一块半导体样品为 $a\times b\times c$，如图所示，沿 x 方向通有电流 I，在 z 方向加有均匀磁场 $\vec{B}$，由实验测得样品薄片两侧的电位差 $U_A - U_{A'} > 0$，则

(A) 此样品为 P 型半导体；

(B) 此样品为 N 型半导体；

(C) 此样品内有感应电流产生；

(D) 载流子类型无法判断。

解：利用洛仑兹力判断，$\vec{f}=-e\vec{v}\times\vec{B}$。

7．用线圈的自感系数 L 来表示载流线圈磁场能量的公式 $W_m=\dfrac{1}{2}LI^2$

(A) 只适用于无限长密绕螺线管；

(B) 适用于自感系数 L 一定的任意线圈；

(C) 只适用于单匝圆线圈；

(D) 只适用于一个匝数很多，且密绕的螺线环。

解：$W_m=\dfrac{1}{2}LI^2$ 是电源电动势克服自感电动势所做的功，

适用于自感系数 L 一定的任意线圈，线圈匝数、形状等已在自感系数 L 中反映。

8．一平板空气电容器的两极板都是半径为 r 的圆导体，在充电时，板间电场强度的变化率 $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$，若略去边缘效应，则两板间的位移电流为

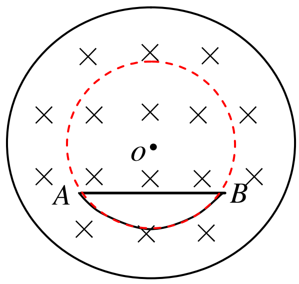
(A) $\dfrac{r^2}{4\varepsilon_0}\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$；　(B) $\varepsilon_0\pi r^2\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$；　(C) $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$；　(D) $2\pi\varepsilon_0 r\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$。

解：

$$I_d=\frac{\Phi_D}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varepsilon_0 E\pi r^2)=\varepsilon_0\pi r^2\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$

9．在圆柱形空间内有一磁感应强度为 $\vec{B}$ 的均匀磁场，如图所示。$\vec{B}$ 的大小以速率 $\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$ 变化，在磁场中有 A、B 两点，其间可放直导线 $\overline{AB}$ 和弯曲的导线 $\overset{\frown}{AB}$，则



(A) 电动势只在 $\overline{AB}$ 导线中产生；

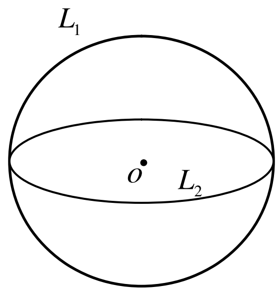
(B) $\overline{AB}$ 导线中的电动势小于 $\overset{\frown}{AB}$ 导线中的电动势；

(C)电动势在 $\overline{AB}$、$\overset{\frown}{AB}$ 中都产生，且两者大小相等；

(D)电动势只在 $\overset{\frown}{AB}$ 导线中产生。

解：产生涡旋电场，据 $\varepsilon_i = \oint \vec{E}_K \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 可判断。

10．两个自感应系数分别为 L_1、L_2，半径均为 R 的圆形线圈，圆心重合，线圈平面相互垂直。如图所示，则它们之间的互感系数 M



(A) $M = L_1 + L_2$；

(B) $M = L_1 - L_2$；

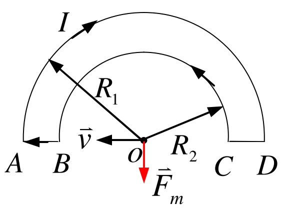
(C) $M = 0$；

(D) $M = \infty$。

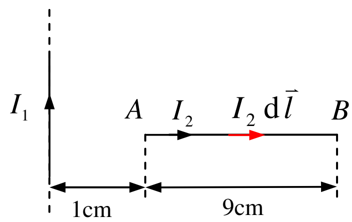
解：线圈 1（或 2）的电流变化不会引起线圈 2（或 1）的磁通量的变化。

二、填充题(单位制为 SI)

1．电流回路如图所示，弧线 $\overset{\frown}{AD}$、$\overset{\frown}{BC}$ 为同心半圆环。某时刻一电子以速度 $\vec{v}$ 沿水平向左的方向通过圆心 o 点，则电子在该点受到的洛仑兹力大小为 $F_m = \dfrac{\mu_0 I}{4} ev\left(\dfrac{1}{R_2} - \dfrac{1}{R_1}\right)$，



题 1 图



题 2 图

方向__向下__。

解：圆电流中点磁场：$B = \dfrac{\mu_0 I}{2R}$，

$$\therefore B_0 = \frac{\mu_0 I}{4}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)，方向\odot$$

$$|\vec{F}_m|=|-e\vec{v}\times\vec{B}_0|=\frac{\mu_0 I}{4}ev\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)，方向向下。$$

2．一长直导线通有电流 $I_1=20\text{A}$，旁边放一直导线 AB，通有电流 $I_2=10\text{A}$。两导线在同一平面内，且相互垂直(如图)，则导线 AB 受到的作用力为 $\underline{9.21\times10^{-5}\ \text{N}}$。

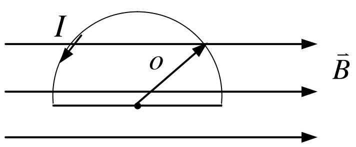
解：$B=\dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$，$\mathrm{d}\vec{f}=I_2\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}$，方向向下。

$$f=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\int_A^B\frac{\mathrm{d}r}{r}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln 9=9.21\times10^{-5}\text{N}$$

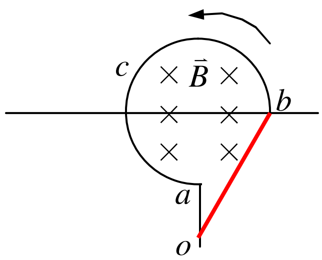
3．一半径为 R 的半圆形闭合线圈载有电流 I，放在均匀磁场 $\vec{B}$ 中，线圈平面与磁场线平行，则线圈受到的磁场力矩 $\underline{M=\frac{1}{2}\pi R^2 IB}$；如果线圈在力矩作用下转 $90°$，磁力矩做的功 $\underline{A=\frac{1}{2}\pi R^2 IB}$。

解：$|\vec{M}|=|\vec{p}_m\times\vec{B}|=\dfrac{1}{2}\pi R^2 IB$

$$A=I\Delta\Phi_m=\frac{1}{2}\pi R^2 IB$$



题 3 图



题 4 图 ω

4．一导线被弯成如图所示形状，acb 为半径为 R 的四分之三圆弧，$\overline{oa}$ 长亦为 R，若此导线以角速度 ω 在纸平面内绕 o 点匀速转动，匀强磁场 $\vec{B}$ 的方向垂直纸面向内，大小为 B，

则此导线中的感生电动势 $\varepsilon_i = \underline{\frac{5}{2}B\omega R^2}$；$\underline{\quad O \quad}$点电势高。

解：添 $\overline{ob}$ 后，整个线圈的感应电动势为零，所以

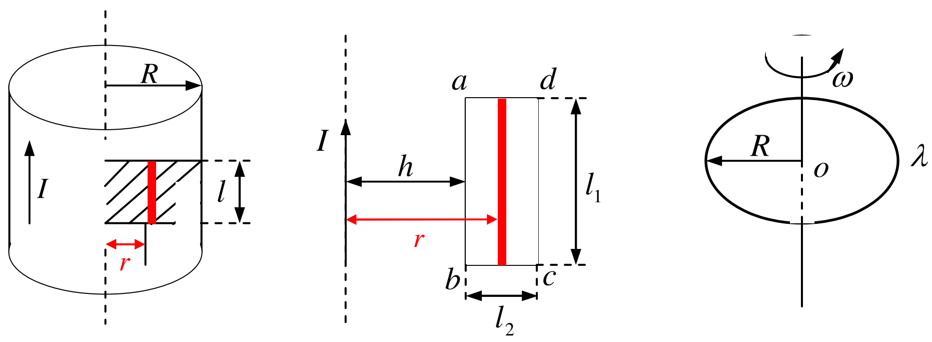
$$\varepsilon_{oacb} = \varepsilon_{ob} = \int_o^b (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= -\int_o^b r\omega B \cdot \mathrm{d}r = -\int_0^{\sqrt{5}R} r\omega B \cdot \mathrm{d}r == -\frac{5}{2}R^2 B\omega$$

5．如图所示，一无限长圆柱体半径为 R，均匀通过电流 I，则穿过图中阴影部分的磁通量为 $\Phi_B = \underline{\frac{\mu_0 I}{4\pi}l}$。

解：由安培环路定理，$2\pi rB = \mu_0 \dfrac{I}{\pi R^2}\pi r^2$，$B = \dfrac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2}$

$$\Phi_m = \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} l \int_0^R r\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I}{4\pi} l$$



题 5 图　　题 6 图　　题 9 图

6．长直导线通有电流 I，方向如图所示，其旁有一矩形线圈 $abcd$，ab 边与直导线平行，线圈与载流直导线共平面，$\overline{ab} = l_1$，$\overline{bc} = l_2$，则穿过此线圈的磁通量

$\Phi_B = \dfrac{\mu_0 I l_1}{2\pi}\ln\dfrac{l_2+h}{h}$。

解：由安培环路定理，$2\pi rB=\mu_0 I$，$B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$$\Phi_m=\int\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}l_1\int_h^{h+l_2}\frac{\mathrm{d}r}{r}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}l_1\ln\frac{h+l_2}{h}$$

7．一质点带有电荷 $q=8.0\times10^{-19}\ \mathrm{C}$，以速度 $v=3.0\times10^{5}\ \mathrm{m/s}$ 在半径为 $R=6.0\times10^{-8}\ \mathrm{m}$ 的圆上作匀速圆周运动，该带电质点在轨道中心所产生的磁感应强度 $B=6.67\times10^{-6}\ \mathrm{T}$；该带电质点轨道运动的磁矩 $P_m=7.20\times10^{-21}\ \mathrm{Am^2}$。

解：$\vec{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q\vec{v}\times\vec{R}}{R^3}$，$B=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{qv}{R^2}=6.67\times10^{-6}\ \mathrm{T}$

$$p_m=IS=\frac{qv}{2\pi R}\pi R^2=\frac{1}{2}qvR=7.20\times10^{-21}\ \mathrm{A\cdot m^2}$$

8．长直电缆由一个圆柱导体和一共轴圆筒状导体组成，两导体中有等值反向均匀电流 I 通过，其间充满磁导率为 μ 的均匀磁介质，介质中离中心轴为 r 的某点处的磁场强度 $H=\dfrac{I}{2\pi r}$，磁感应强度 $B=\dfrac{\mu I}{2\pi r}$，磁场能量密度 $w_m=\dfrac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2}$。

解：由安培环路定理，$2\pi rH=I$，$H=\dfrac{I}{2\pi r}$

$$B=\mu H=\frac{\mu I}{2\pi r},\quad w_m=\frac{1}{2}BH=\frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2}$$

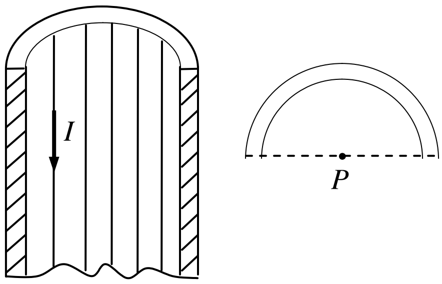
9．如图所示，半径为 R，电荷线密度为 $\lambda(>0)$ 的均匀带电圆线圈，绕过圆心与圆平面垂直的轴以角速度 ω 转动，线圈中心处磁感应强度 $B=\dfrac{1}{2}\mu_0\lambda\omega$。

解：$I=\dfrac{q}{T}=\dfrac{2\pi R\lambda}{2\pi/\omega}=\omega R\lambda$

$$B=\frac{\mu_0 I}{2R}=\frac{\mu_0\omega R\lambda}{2R}=\frac{1}{2}\mu_0\omega\lambda$$

三、计算题

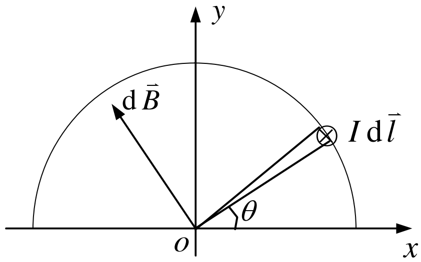
1．在一半径为 R 的无限长半圆柱形金属薄片中，自上而下地有电流 I 通过，如图所示。试求圆柱轴线任一点 P 处的磁感应强度。



解：选择电流元

$$\mathrm{d}I=\frac{I}{\pi R}\mathrm{d}l=\frac{I}{\pi}\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0\,\mathrm{d}I}{2\pi R}=\frac{\mu_0}{2\pi R}\frac{I}{\pi}\mathrm{d}\theta$$



$$\mathrm{d}B_x=-\mathrm{d}B\sin\theta$$

$$=-\frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

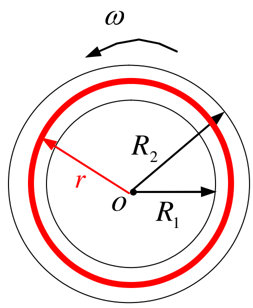
$$\mathrm{d}B_y=\mathrm{d}B\cos\theta$$

$$=\frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$B_x=\int_0^\pi \mathrm{d}B_x=-\frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$$

$$B_y=\int_0^\pi \mathrm{d}B_y=0,\quad B=B_x\vec{i}+B_y\vec{j}=-\frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}\vec{i}$$

2．如图所示，一内外半径分别为R_1、R_2的圆环均匀带电，电荷面密度为σ，绕其中心轴以角速度ω转动，求圆心处磁感应强度$\vec{B}$的大小和方向。



解：可看作由许多细圆环组成，

任一圆环的带电量

$$\mathrm{d}q = \sigma 2\pi r\,\mathrm{d}r$$

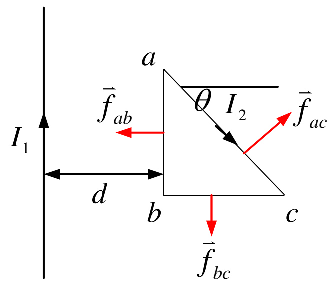
$$I = \frac{\mathrm{d}q}{T} = \sigma\omega r\,\mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0\,\mathrm{d}I}{2r} = \frac{\mu_0\sigma\omega r\,\mathrm{d}r}{2r} = \frac{\mu_0\sigma\omega\,\mathrm{d}r}{2}$$

$$B_x = \int_{R_1}^{R_2}\mathrm{d}B = \int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu\sigma\omega}{2}\mathrm{d}r = \frac{\mu\sigma\omega}{2}(R_2 - R_1)$$

方向垂直纸面向外$(\sigma > 0)$

3．一无限长导线通有电流I_1，其旁有一直角三角形线圈，通有电流I_2，线圈与直导线在同一平面内，$ab = bc = l$，ab边与直导线平行，试求，此线圈每一边受到I_1的磁场的作用力。



解：$f_{ab} = B_1 I_2 l = \dfrac{\mu_0 l}{2\pi d} I_1 I_2$

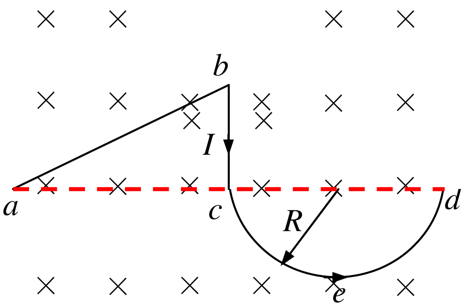
方向水平向左。

$$f_{bc}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\int_d^{d+l}\frac{\mathrm{d}r}{r}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln\frac{d+l}{d}$$，向下。

$$\mathrm{d}f=I_2\,\mathrm{d}lB_1=I_2\frac{\mathrm{d}r}{\cos\theta}\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

$$f_{ac}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\cos 45^\circ}\int_d^{d+l}\frac{\mathrm{d}r}{r}=\sqrt{2}\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln\frac{d+l}{d}$$

不讲 4．如图所示形状的导线，通电流 I，放在一个与均匀磁场 B 垂直的平面上，ced 为半圆弧，ac 长为 l，求导线受到的安培力的大小和方向。



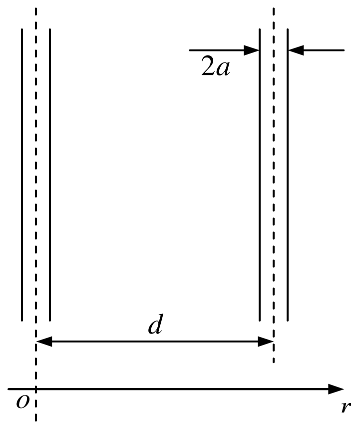
解：已知在均匀磁场中闭合电流回路所受的磁场力之和为零。设想添上 ca、dc 导线，使 $abca$ 及 $cedc$ 分别构成两个闭合回路，所以

$$\vec{f}_{ab}+\vec{f}_{bc}+\vec{f}_{ca}=0,\quad \vec{f}_{ced}+\vec{f}_{dc}=0$$

$$\therefore\ \vec{f}_{ab}+\vec{f}_{bc}+\vec{f}_{ced}=-(\vec{f}_{ca}+\vec{f}_{dc})=\vec{f}_{ad}$$

$$f_{ad}=\int_0^{l+2R}IBdl=IB(l+2r)$$，方向为沿纸面竖直向上。

5. 两根平行长直导线，横截面的半径都是a，中心相距为d，属于同一回路，设两导线的内部磁通量都可略去不计，求这样一对导线长为l的一段的自感。



解：两导线之间任意一点磁感应强度

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}+\frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)}$$

介于这一对平行长直导线间长为l一段面积的磁通量

$$\Phi_B=\int_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=\int_a^{d-a}\left[\frac{\mu_0 I}{2\pi r}+\frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)}\right]l\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\mu_0 lI}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}$$

$$L=\frac{\Phi_B}{I}=\frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}$$

6. 一面积为S的单匝平面线圈，以恒定角速度ω在磁感应强度$\vec{B}=B_0\sin\omega t\,\vec{k}$的均匀磁场中转动，转轴与线圈共面且与$\vec{B}$垂直。设$t=0$时线圈法向与$\vec{k}$同方向，求线圈中的感应电动势。

解：

$$\Phi_B=BS\cos\theta$$

$$=B_0\cos\omega t\cdot S\cos\omega t=B_0 S\cos^2\omega t$$

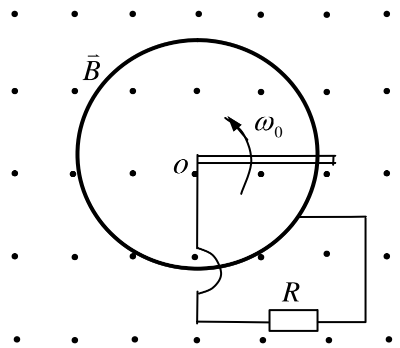
$$\varepsilon=-\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}=2B_0 S\omega\sin\omega t\cos\omega t$$

$$=B_0 S\omega\sin 2\omega t$$

7．长为l、质量为m的均匀金属细棒，以o为中心在水平面内旋转，棒的另一端在半径为l的金属圆环上滑动，如图。棒端o和金属环之间接一电阻R，并在竖直方向中加一均匀磁场$\vec{B}$。设在起始位置$\theta=0$时棒有一个初速度ω_0，忽略摩擦力及金属棒，导线和圆环的电阻，求

(1) 棒的角速度随时间变化的规律；

(2) 棒的角速度为$\omega_0/2$时棒转过的角度。



解：(1)动生电动势

$$\varepsilon=\int_0^l(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$$

$$=\int_0^l\omega rBdr=\frac{1}{2}\omega Bl^2$$

棒中感应电流

$$I=\frac{\varepsilon}{R}=\frac{1}{2R}B\omega l^2$$

阻尼力矩

$$M=-\int_0^l r\,\mathrm{d}f=-\int_0^l rIB\,\mathrm{d}r=-\frac{1}{4R}B^2\omega l^4$$

由转动定律

$$-\frac{1}{4R}B^2l^4\omega=J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t},\quad J=\frac{1}{3}ml^2$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega}\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega}=-\frac{3B^2l^2}{4mR}\int_0^t\mathrm{d}t$$，积分得 $\omega=\omega_0e^{-\frac{3B^2l^2}{4mR}t}$

（2） $\because \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \omega \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta} \quad \therefore -\dfrac{3B^2l^2}{4mR}\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\omega$

积分 $\int_0^{\theta} -\dfrac{3B^2l^2}{4mR}\mathrm{d}\theta = \int_{\omega_0}^{\omega_0/2}\mathrm{d}\omega$

得 $\theta = \dfrac{2mR}{3B^2l^2}\omega_0$

《大学物理》综合练习(六)

——机械振动与机械波

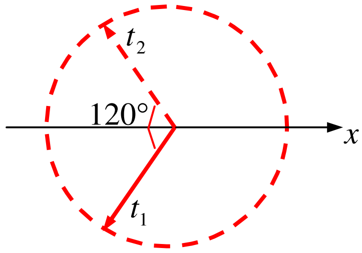
一、选择题

1. 一质点在 x 轴上作谐振动，振幅为 4cm，周期为 2 s，其平衡位置取作坐标原点。若 $t_1 = 0$ 时刻质点第一次通过 $x = -2\text{cm}$ 处，且向 x 轴正方向运动，则质点第二次通过 $x = -2\text{cm}$ 处的时刻 t_2 为

(A) $t_2 = 1\text{s}$；　(B) $t_2 = 4/3\text{s}$；　(C) $t_2 = 2/3\text{s}$；　(D) $t_2 = 2\text{s}$。

解：用旋转矢量法

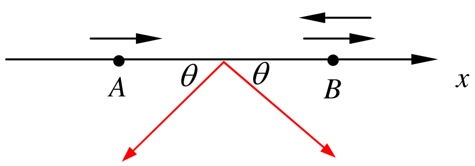
$$t = \frac{2}{3}T = \frac{4}{3}\text{s}。$$



2. 如图所示，一质点作谐振动，在一个周期内相继通过相距 11cm 的两个点 A、B 历时 2s，并具有相同的速度；再经过 2s 后，质点又从另一方向通过 B 点，则质点的振幅是

(A) $\dfrac{11}{\sqrt{2}}\text{cm}$；　(B) 11cm；

(C) $11\sqrt{2}\text{cm}$；　(D) 22cm。



解：由旋转矢量法知 $\theta = 45°$

$$A\cos 45° = \frac{11}{2}，\quad A = \frac{11}{\sqrt{2}}\text{cm}$$

3. 一弹簧振子作谐振动，总能量为 E，若谐振动振幅增加为原来的 2 倍，重物的质量增加为原来的 4 倍，则它的总能量为

(A) $2E$；　(B) $4E$；　(C) $8E$；　(D) $16E$。

解：$E = E_k + E_p = \dfrac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \dfrac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi) = \dfrac{1}{2}kA^2$

$A' = 2A$，$E' = 4E$

4．已知有两谐振动在同一方向上运动，方程为

$$x_1 = 5\cos(10t + 0.75\pi)\,\text{cm}\;;\quad x_2 = 6\cos(10t + 0.25\pi)\,\text{cm}$$

则合振动的振幅为

(A) $A = \sqrt{61}\,\text{cm}$； (B) $A = \sqrt{11}\,\text{cm}$； (C) $A = 11\,\text{cm}$； (D) $A = 61\,\text{cm}$。

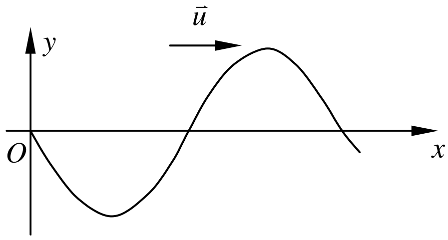
解：$A_1 = 5\,\text{cm}$，$A_2 = 6\,\text{cm}$，$\varphi_1 = 0.75\pi$，$\varphi_2 = 0.25\pi$

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \\ &= \sqrt{5^2 + 6^2 + 2\times 5\times 6\cos(0.25\pi - 0.75\pi)} \\ &= \sqrt{61}\,\text{cm} \end{aligned}$$

5．图为 $t=0$ 时刻，以余弦函数表示的沿 x 轴正方向传播的平面谐波波形，则 0 点处质点振动的初相是

(A) $\pi/2$； (B) 0；

(C) $3\pi/2$； (D) π。



解：由波的传波方向知 $t=0$，$v_0 > 0$，$y = 0$

$$\therefore\quad \varphi_0 = \frac{3}{2}\pi \quad 或 \quad \varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$$

6．一质点沿 y 轴方向作谐振动，振幅为 A，周期为 T，平衡位置在坐标原点。在 $t=0$ 时刻，质点位于 y 正向最大位移处，以此振动质点为波源，传播的横波波长为 λ，则沿 x 轴正方向传播的横波方程为

(A) $y = A\sin\left(2\pi\frac{t}{T} - \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$； (B) $y = A\sin\left(2\pi\frac{t}{T} - \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$；

(C) $y = A\sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$； (D) $y = A\sin\left(2\pi\frac{t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$。

解：设波源振动方程为 $y = A\sin(\omega t + \varphi_0)$

$$t = 0,\quad y = A,\quad \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$y = A\sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

7．一平面谐波，频率为$100\,\mathrm{Hz}$，波速$360\,\mathrm{m/s}$，在波线上有A、B两点，相位差为$\varphi_A-\varphi_B=\pi/3$，则两点的距离为

(A) $0.6\,\mathrm{m}$，且A点距波源较近；　　(B) $1.2\,\mathrm{m}$，且A点距波源较近；

(C) $0.6\,\mathrm{m}$，且B点距波源较近；　　(D) $1.2\,\mathrm{m}$，且B点距波源较近。

解：$v=\nu\lambda$，$\lambda=\dfrac{v}{\nu}=3.6\,\mathrm{m}$，$\dfrac{2\pi}{\lambda}x=\dfrac{\pi}{3}$，$x=\dfrac{1}{6}\lambda=0.6\,\mathrm{m}$

$\varphi_B=\varphi_A-\dfrac{\pi}{3}$，$B$点较$A$点相位延迟，$A$点离波源较近。

8．两波在同一弦上传播，其方程为

$$y_1=6.0\cos\frac{\pi}{2}(0.02x-8.0t)\,;\quad y_2=6.0\cos\frac{\pi}{2}(0.02x+8.0t)$$

（单位：长度：厘米．时间：秒）则节点位置为

(A) $x=100k,\ k=0,1,2,\cdots$；　　(B) $x=50(2k+1),\ k=0,1,2,\cdots$；

(C) $x=50k,\ k=0,1,2,\cdots$；　　(D) $x=100(2k+1),\ k=0,1,2,\cdots$；

(E) $x=25(2k+1),\ k=0,1,2,\cdots$。

解：$y_1=6.0\cos 2\pi(\dfrac{t}{1/2}-\dfrac{x}{200})$，　$y_2=6.0\cos 2\pi(\dfrac{t}{1/2}+\dfrac{x}{200})$

$T=\dfrac{1}{2}\,\mathrm{s}$，$\lambda=200\,\mathrm{cm}$，$y=(2A\cos\dfrac{2\pi}{\lambda}x)\cos\dfrac{2\pi}{T}t$

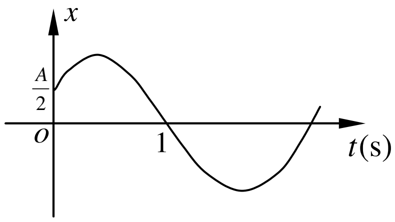
$\dfrac{2\pi}{\lambda}x=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$，$x=50(2k+1)$，$k=0,1,2,\cdots$

二、填充题

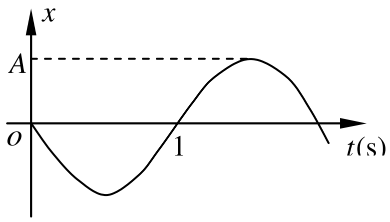
1．一物体作简谐振动，周期为T，求其在第一个周期内经过：(1) 由平衡位置到位移最大处所需的时间为$\underline{\frac{T}{4}}$；(2) 由平衡位置到位移最大处的$1/2$处所需时间为$\underline{\frac{T}{12}}$。

解：$\alpha=\pi/2$，$t=T/4$，$\alpha=\pi/6$，$t=T/12$

2．如图，表示简谐振动的位移$x-t$图，则图(1)的谐振动表述式为$\underline{x=A\cos(\frac{5\pi}{6}t-\frac{\pi}{3})}$；图(2)的谐振动表述式为$\underline{x=A\cos(\pi t+\frac{\pi}{2})}$。



图(1)



图(2)

解：$t=0$，$x_0=\frac{A}{2}$，$v>0$，$\therefore \varphi=-\frac{\pi}{3}$

$\frac{5}{6}\times\frac{T}{2}=1$，$T=\frac{12}{5}\text{s}$，$\therefore\ x=A\cos(\frac{5\pi}{6}t-\frac{\pi}{3})$

$t=0$，$x_0=0$，$v<0$，$\therefore \varphi=\frac{\pi}{2}$，$T=2\text{s}$

$\therefore\ x=A\cos(\pi t+\frac{\pi}{2})$

3．一质量为 100 克的物体作简谐振动，振幅为1.0cm，加速度的最大值为4.0cm/s^2。取平衡位置势能为零。则 (1) 总振动能量为$\underline{2\times10^{-5}\text{ J}}$；(2)过平衡点时的动能为$\underline{2\times10^{-5}\text{ J}}$；(3) 在距平衡点$\underline{7.1\text{mm}}$处势能与动能相等。

解：$a_m=\omega^2A$，$\omega^2=\frac{a_m}{A}=\frac{k}{m}$

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}ma_m A = 2\times 10^{-5}\ \text{J}$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}E = 1\times 10^{-5}\ \text{J}，\quad k = \frac{a_m}{A}m = 0.4$$

$$x = \sqrt{\frac{2\times 10^{-5}}{k}} = \sqrt{\frac{2\times 10^{-5}}{0.4}} = 7.1\text{mm}$$

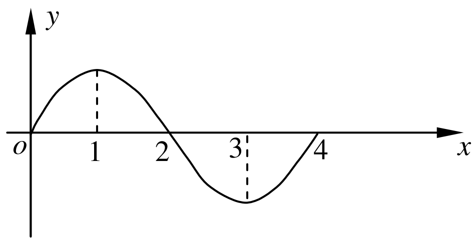
4．两个同方向、同频率的简谐振动，其合振幅为$10\,\text{cm}$。合振动的位相与第一个振动的位相差为$30°$，若第一个振动的振幅为$A_1 = 8\,\text{cm}$，则第二个振动振幅为$A_2 = \underline{5.04\,\text{cm}}$；第一与第二两振动的位相差为$\Delta\varphi = \underline{82°}$。

解：$A_2 = \sqrt{A_1^2 + A^2 + 2A_1 A\cos 30°} = 5.04\,\text{cm}$

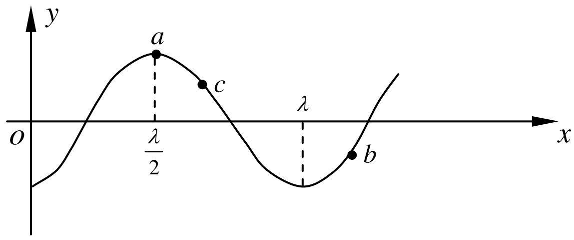
$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1) = 82°$$

5．右图为沿x轴正向传播的平面谐波在$t=0$时刻的$y-x$曲线。由图可知原点O和1、2、3、4点的振动初位相分别为$\underline{\frac{\pi}{2}}$、$\underline{0}$、$\underline{-\frac{\pi}{2}}$、$\underline{-\pi}$、$\underline{-\frac{3\pi}{2}}$。



6．图示为某时刻的驻波的波形图，则a、b两点位相差为$\Delta\varphi_{ab} = \underline{\pi}$；$a$、$c$两点位相差为$\Delta\varphi_{ac} = \underline{0}$。



解：注意驻波！同一分段上各点有相同的振动位相；相邻两分段振动位相相反。

7. 一沿 x 正方向传播的平面简谐波，波速为 $v=5.00\,\mathrm{cm/s}$，周期 $T=2.00\,\mathrm{s}$，振幅 $A=2.00\,\mathrm{cm}$。$x=10\,\mathrm{cm}$ 处有一点 a 在 $t=3\,\mathrm{s}$ 时 $y_a=0$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}|_a>0$；当 $t=5\,\mathrm{s}$ 时，$x=0$ 处的位移 $y_0=\underline{0}$，此刻该点速度 $v=\underline{-6.28\,\mathrm{cm/s}}$。

解：$y_0=A\cos(\frac{2\pi}{T}t+\varphi_0)$，$y_a=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\varphi_0]$

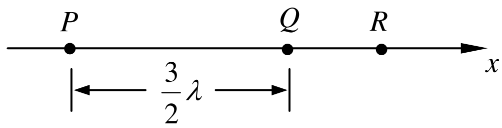
$x=10\,\mathrm{cm}$，$t=3\,\mathrm{s}$，$\lambda=vT=10\,\mathrm{cm}$

$y_a=A\cos(\pi+\varphi_0)=0$，已知 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}|_a>0$，$\therefore\varphi_0=-\frac{\pi}{2}$

$t=5\,\mathrm{s}$，$y_0=A\cos(\frac{2\pi}{T}\times5-\frac{\pi}{2})=0$

$v=-A\frac{2\pi}{T}\sin(\frac{2\pi}{T}\times5-\frac{\pi}{2})=-6.28\,\mathrm{cm/s}$

8. P、Q 为两个以同位相、同频率、同振幅振动的相干波源，它们在同一媒质中。设频率为 ν，波长为 λ，P、Q 间距离为 $3\lambda/2$，R 为 P、Q 连线上 P、Q 两点之外的任意一点。则 P 点发出的波在 R 点的振动与自 Q 发出的波在 R 点的振动的位相差为 $\underline{\Delta\varphi=3\pi}$；$R$ 点的合振动振幅为 $\underline{A=0}$。



解：$y_1=A\cos[\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}(x+\frac{3}{2}\lambda)+\varphi]$，　　$y_2=A\cos[\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x+\varphi]$

$\Delta\varphi=[\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x+\varphi]-[\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}(x+\frac{3}{2}\lambda)+\varphi]=3\pi$，

$\therefore\ A=0$

9. 同方向振动的两平面简谐波波源为 S_1 和 S_2，波源的振动方程分别为

$$y_1=6\cos2\pi\nu t\,(\mathrm{cm})\qquad y_2=8\sin2\pi\nu t\,(\mathrm{cm})$$

当两波在与 S_1 和 S_2 等距离的 P 相遇时，P 点的振幅为 $\underline{10\,\mathrm{cm}}$。

解：$y_1=6\cos2\pi\nu t\,(\mathrm{cm})$，$y_2=8\sin2\pi\nu t\,(\mathrm{cm})=8\cos(2\pi\nu t-\frac{\pi}{2})$

$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2}=10\,\mathrm{cm}$

10．一驻波方程为 $y=0.5\cos\dfrac{\pi x}{3}\cos 40\pi t\,(x,y:\mathrm{cm};t:\mathrm{s})$，则形成驻波的两成分波的振幅为$\underline{A=0.25\,\mathrm{cm}}$；周期为$\underline{T=\dfrac{1}{20}\,\mathrm{s}}$；波速为$\underline{v=120\,\mathrm{cm/s}}$；该驻波的两相邻波节之间距离为$\underline{\dfrac{\lambda}{2}=3\,\mathrm{cm}}$。

解：$y=(2A\cos\dfrac{2\pi}{\lambda}x)\cos\dfrac{2\pi}{T}t$

$A=0.25\,\mathrm{cm}$，$\lambda=6\,\mathrm{cm}$，$T=\dfrac{1}{20}\,\mathrm{s}$，$v=\dfrac{\lambda}{T}=120\,\mathrm{cm/s}$

11．一谐波沿直径为$0.14\,\mathrm{m}$的圆柱管行进，波的平均强度为$9\times10^{-3}\,\mathrm{W/m^2}$，频率为$300\,\mathrm{Hz}$，波速为$300\,\mathrm{m/s}$，波的平均能量密度为$\underline{\overline{\varpi}=3\times10^{-5}\,\mathrm{J/m^3}}$；最大能量密度为$\underline{\varpi_m=6\times10^{-5}\,\mathrm{J/m^3}}$。

解：$I=\overline{\varpi}u$，$\overline{\varpi}=\dfrac{I}{u}=\dfrac{9\times10^{-3}}{300}=3\times10^{-5}\,\mathrm{J/m^3}$

$\varpi=\rho A^2\omega^2\sin^2(t-\dfrac{x}{u})$，$\overline{\varpi}=\dfrac{1}{2}\rho A^2\omega^2$

$\varpi_m=\rho A^2\omega^2=2\overline{\varpi}=6\times10^{-5}\,\mathrm{J/m^3}$

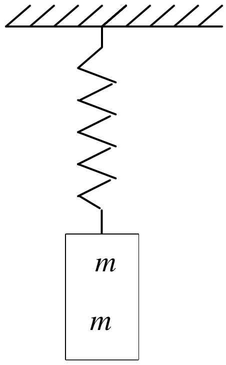
12．一列火车 A 以 $u_1=20\,\mathrm{m/s}$ 的速度向前行驶，若火车 A 的司机听到自己的汽笛声频率 $\nu=120\,\mathrm{Hz}$，另一列火车 B 以 $u_2=25\,\mathrm{m/s}$ 的速度行驶。当 A、B 两车相向而行时，B 的司机听到汽笛的频率 ν' 为$\underline{137\,\mathrm{Hz}}$；当 A、B 两车运行方向相同时，且 B 车在 A 车前方，B 的司机听到汽笛的频率 ν'' 为$\underline{118\,\mathrm{Hz}}$。

解：波源与观察者相向运动：$\nu'=\dfrac{u+v_R}{u-v_S}\nu=\dfrac{331+20}{331-25}\times120=137\,\mathrm{Hz}$

相当于波源不动，观察者相对运动：$\nu''=\left(1-\dfrac{v_R}{u}\right)\nu=(1-\dfrac{25-20}{331})\times120=118\,\mathrm{Hz}$

三、计算题

1．如图所示，弹簧的一端固定在天花板上，另一端挂着两个质量均为$1.0\,\text{Kg}$的物体，此时弹簧伸长$2.0\,\text{cm}$静止不动。若挂在下面的一个物体自己脱落下来，求剩下的物体的振幅和周期(不计弹簧质量)。



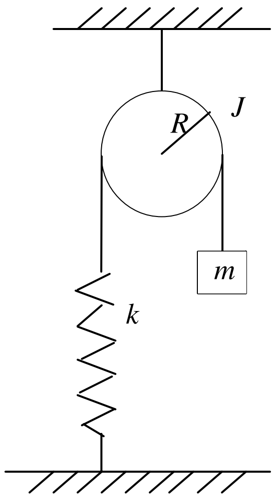
解：$kx' = 2mg$，$k = \dfrac{2mg}{x'} = 9.8\times10^2\ \text{N/m}$

取系统静平衡位置为坐标原点，$A = x_0 = 1.0\,\text{cm}$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{9.8\times10^2}{1}} = 31.3\,\text{s}^{-1}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{31.3} = 0.2\,\text{s}$$

2．一定滑轮的半径为R，转动惯量为J，其上挂有一轻绳，绳的一端系一质量为m的物体，绳的另一端与一固定的轻弹簧相连。设弹簧的倔强系数为k，绳与滑轮间无摩擦、无滑动，现将物体从平衡位置拉下一微小距离后放手。试证明此振动为简谐振动，并求周期。



解：取系统平衡位置为坐标原点，平衡时

$$mg = ky_0$$

$$mg - T = m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}$$

$$(T - T')R = J\alpha = \frac{J}{R}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}，\quad T' = k(y + y_0)$$

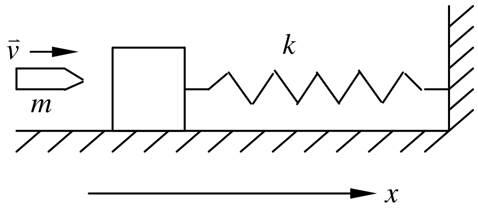
整理得 $$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{\dfrac{J}{R^2} + m}y = 0$$

所以此振动为谐振动

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\dfrac{J}{R^2} + m}}，\quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\dfrac{J}{R^2} + m}{k}}$$

3．质量为$10\,\mathrm{g}$的子弹，以$1000\,\mathrm{m/s}$的速度射入置于光滑平面上的木块并嵌入木块中，致使弹簧压缩而作谐振动，若木块质量为$4.99\,\mathrm{Kg}$，弹簧的倔强系数为$8\times10^3\,\mathrm{N/m}$，求振动的振幅，并写出振动方程。

解：子弹射入木块过程有



$$mv=(m+M)V$$

$$V=\frac{m}{m+M}v=2\,\mathrm{m/s}$$

又 $$\frac{1}{2}(m+M)V^2=\frac{1}{2}kx_0^2$$

$$x_0=\sqrt{\frac{m+M}{k}}V=5.0\times10^{-2}\,\mathrm{m}$$

$$A=x_0=5.0\times10^{-2}\,\mathrm{m}，\quad \omega=\sqrt{\frac{k}{m+M}}=40\,\mathrm{s}^{-1}$$

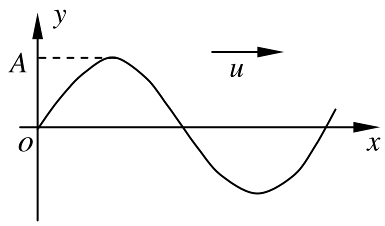
设$t=0$时，$x=0$，$v_0=2\,\mathrm{m/s}$，$\varphi=-\dfrac{\pi}{2}$

$$\therefore x=5.0\times10^{-2}\cos\left(40t-\frac{\pi}{2}\right)$$

4．一平面谐波沿x轴正向传播，其振幅为A，频率为ν，波速为u，设$t=t'$时的波形曲线如图所示。求

(1) $x=0$处质点的振动方程；

(2) 该波波动方程。



解：(1) 设 $y_0=A\cos(2\pi\nu t+\varphi)$

$\because t=t'$时，$y_0=0$，$v_0<0$，

$$2\pi\nu t'+\varphi=\frac{\pi}{2}\qquad \therefore\varphi=\frac{\pi}{2}-2\pi\nu t'$$

$$y_0=A\cos\left[2\pi\nu(t-t')+\frac{\pi}{2}\right]$$

(2) $$y_0=A\cos\left[2\pi\nu(t-t'-\frac{x}{u})+\frac{\pi}{2}\right]$$

5．设有 x 轴正向传播的波，波速为 $2\,\mathrm{m/s}$ 。原点振动方程为： $y = 0.6\cos\pi t(\mathrm{m})$ 。求：

(1) 该波波长；

(2) 波动方程；

(3) 同一质点在 1 秒末与 2 秒末所处两个位置的相位差 $\varphi_1 - \varphi_2$ ；

(4) 如有 A 、 B 两点，其坐标分别为 1 米和 1.5 米，在同一时刻， A 、 B 两点的相位差 $\varphi_A - \varphi_B = ?$

解：(1) $v = 2\,\mathrm{m/s}$ ， $\omega = \pi\,\mathrm{s}^{-1}$ ， $\lambda = vT = v\dfrac{2\pi}{\omega} = 4\,\mathrm{m}$

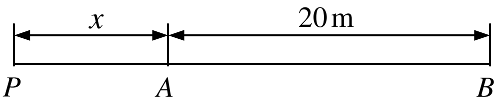
(2) $y(x,t) = A\cos(\omega t - \dfrac{2\pi}{\lambda}x) = 0.6\cos\pi\left(t - \dfrac{x}{2}\right)$

(3) $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \pi(t_1 - t_2) = -\pi$

(4) $\varphi_A - \varphi_B = \pi(\dfrac{x_B}{2} - \dfrac{x_A}{2}) = \dfrac{\pi}{4}$

6．同一介质中 A 、 B 两相干波源相距 $20\,\mathrm{m}$ ，作同频率、同方向的简谐振动， $\nu = 100\,\mathrm{Hz}$ ，两波源分别激发两列平面行波相向传播，且 A 处为波峰时， B 处恰为波谷，若波速均为 $200\,\mathrm{m/s}$ ，求两列波迭加后 AB 连线上因干涉而静止的各点到 A 的距离。

解： $\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_B = \pi$

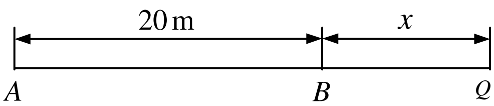


(1)在 A 、 B 左侧，两波的位相差为

$$\Delta\phi = \phi_A - \phi_B = \left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi_A\right] - \left[\omega\left(t - \frac{x+20}{c}\right) + \varphi_B\right]$$

$$= \frac{20\omega}{c} + \pi = 21\pi$$

所以在 A 、 B 左侧处处静止。

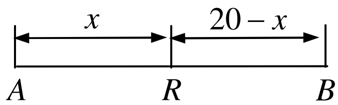


(2) A 、 B 右侧，两波的位相差为

$$\Delta\phi = \phi_A - \phi_B = \left[\omega\left(t - \frac{x+20}{c}\right) + \varphi_A\right] - \left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi_B\right]$$

$$= -\frac{20\omega}{c} + \pi = -19\pi$$

所以在 A 、 B 右侧处处静止。



(3) 在 A 、 B 连线之间两波的位相差为

$$\Delta\phi = \phi_A - \phi_B = \left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi_A\right] - \left[\omega\left(t - \frac{20 - x}{c}\right) + \varphi_B\right]$$

$$= -\frac{20\omega}{c} + \pi = 21\pi - 2\pi x$$

$$\Delta\phi = 21\pi - 2\pi x = (2k+1)\pi\text{，}\quad x = 10 - k \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \pm 10)$$

7．一列波以$1\,\mathrm{m/s}$的速度传播，波动方程为 $y_1 = 0.05\cos\pi(4t + x/B)$；并在 $x = 0$ 处产生反射，反射波方程为 $y = 0.05\cos\pi(4t - x/B)$（其中 B 为常数），求：

(1) 合成波的方程及各波腹，波节的位置；

(2) 在 $x = 1.2\,\mathrm{m}$ 处振幅为多大?

解：(1) $\lambda = vT = v\dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{1}{2}m$

$$y = 0.05\cos\pi(4t + x/B) + 0.05\cos\pi(4t - x/B)$$
$$= (2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x)\cos\frac{2\pi}{T}t$$
$$= 0.1\cos 4\pi x\cos 4\pi t$$

当 $4\pi x = k\pi$ 时，即 $x = \dfrac{k}{4}(\mathrm{m})$ 时为波腹，

当 $4\pi x = \left(k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)$时，即 $x = \left(\dfrac{k}{4} + \dfrac{1}{8}\right)(\mathrm{m})$ 时为波节。

(2)当 $x = 1.2\,\mathrm{m}$ 时，$A' = 2A\left|\cos 4\pi \times 1.2\right| = 0.081\,\mathrm{m}$

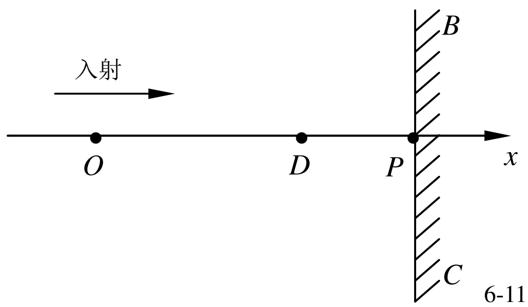
8. 一平面谐波沿 x 方向传播，BC 为波密媒质的反射面，波传播到 P 点被反射，$OP = \dfrac{3}{4}\lambda$；$DP = \dfrac{1}{6}\lambda$。$t = 0$ 时 O 处质点由平衡点向正方向运动。设 A、ω 为已知，求：

(1) 以 O 为原点，写出入射波的波动方程；

(2) 反射波的波动方程；

(3) 合成波的波动方程；

(4) D 点的合振动方程。



6-11

解：(1) 设入射波方程为

$$y_1 = A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)+\varphi\right]$$

$t=0$， $x=0$， $y=0$， $v>0$，$\therefore \varphi=-\dfrac{\pi}{2}$

则 $$y_1 = A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)-\frac{\pi}{2}\right]$$

(2) 设反射波方程为 $y_2 = A\cos\left[\omega\left(t+\dfrac{x}{c}\right)+\varphi'\right]$

当 $x = OP = \dfrac{3}{4}\lambda$ 时，$\omega\left(t+\dfrac{x}{c}\right)+\varphi'-\omega\left(t-\dfrac{x}{c}\right)+\dfrac{\pi}{2}=-\pi$

$\therefore \varphi' = -\dfrac{\pi}{2}$，则 $y_2 = A\cos\left[\omega\left(t+\dfrac{x}{c}\right)-\dfrac{\pi}{2}\right]$

(3) $y = y_1 + y_2 = 2A\cos\dfrac{2\pi x}{\lambda}\cos\left(\omega t-\dfrac{\pi}{2}\right)$

(4) 当 $x = OP - DP = \dfrac{7}{12}\lambda$ 时，$y = -\sqrt{3}\sin\omega t$

6-12

《大学物理》综合练习(七)

——波动光学

教学班级：________ 序 号：________ 姓 名：______________ 日 期：________

一、选择题(把正确答案的序号填入括号内)

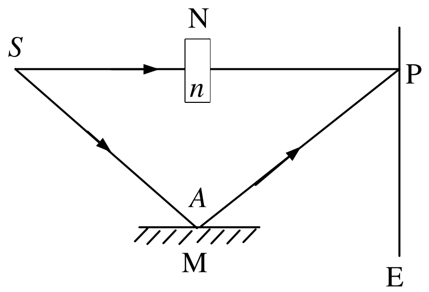
1．如图，由空气中一单色点光源 S 发出的光，一束掠入射到平面反射镜 M 上，另一束经折射率为 n、厚度为 d 的媒质薄片 N 后直接射到屏 E 上。如果 $SA = AP = l$，$SP = D$，则两相干光束 SP 与 SAP 在 P 点的光程差为：

(A) $\delta = 2l - D$；　　(B) $\delta = 2l - D - (n-1)d + \lambda/2$；

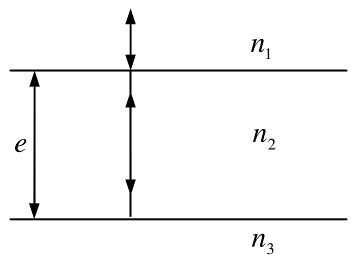
(C) $\delta = 2l - D - (n-1)d$；　　(D) $\delta = 2l - D + \lambda/2$。

解：$\delta = 2l - [(D-d) + nd] + \lambda/2 = 2l - D - (n-1)d + \lambda/2$

[B]



题 1 图



题 2 图

2．如图，折射率为 n_2、厚度为 e 的透明媒质薄膜上方和下方的透明介质的折射率分别是 n_1 和 n_3，已知 $n_1 < n_2 < n_3$。如果用波长为 λ 的单色平行光垂直入射到该薄膜上，则从上下两表面

反射的光束的光程差是

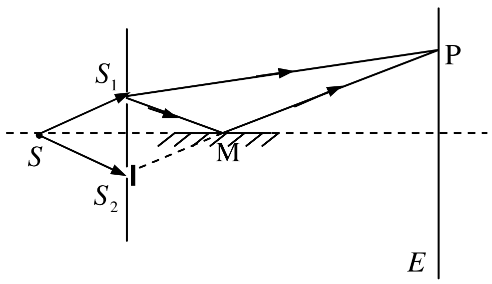
(A) $2n_2e$；　　(B) $2n_2e-\lambda/2$；

(C) $2n_2e-3\lambda/2$；　　(D) $2n_2e-\lambda/2n_2$。

解：两反射面均有半波损失, $\delta=2n_2e$。

[A]

3．设在双缝干涉实验中，屏幕 E 上的 P 点是亮条纹，如将缝 S_2 盖住，并在 S_1S_2 连线的垂直平分面处放一反射镜 M（如图），则此时：



题 3 图

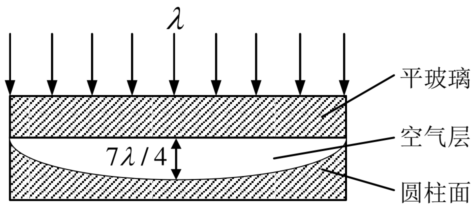
(A) P 点处为暗条纹；(B) P 点处仍然是亮条纹；

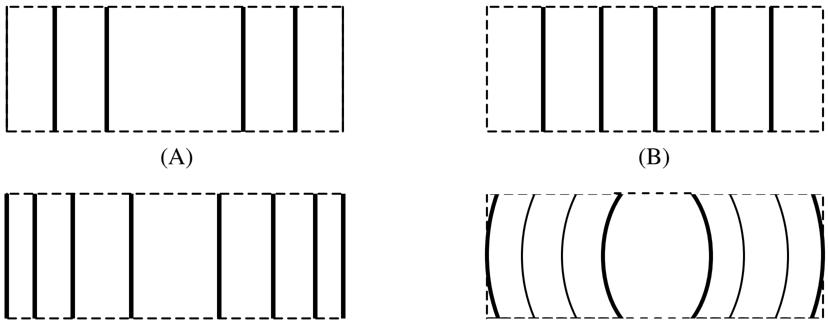
(C)无干涉条纹；　　(D)无法确定 P 点是亮条纹还是暗条纹。

解：光在 M 处发射有半波损失，故 P 点处为暗条纹。

[A]

4．用波长为λ的平行单色光垂直照射图示装置观察空气层上下表面反射光形成的等厚干涉条纹。以下各图画出可能出现的暗条纹的形状和位置。试判断哪一图是实际观察到的干涉暗条纹。





(A) (B) (C) (D)

解： $\delta_{max} = \frac{7}{4}\lambda \times 2 + \frac{\lambda}{2} = 4\lambda$

$k_{max} = 4$（明），故图(C)正确。

[C]

5．在迈克尔耳逊干涉仪的一条光路中，放入一折射率为n、厚度为d的透明薄片，放入前后两条光路的光程差的改变量为

(A) $(n-1)d$； (B) nd； (C) $2(n-1)d$； (D) $2nd$。

解： $\delta = 2(n-1)d$

[C]

6．根据惠更斯—菲涅耳原理，如果已知光在某时刻的波阵面为S，则S的前方某点P的光强度决定于波阵面S上所有面积元发出的子波各自传到P点的

(A) 振动振幅之和； (B) 光强之和；

(C) 振动振幅之和的平方； (D) 振动的相干迭加。

解：由惠更斯—菲涅耳原理知。

[D]

7．波长为5000 Å的单色光，以$30°$入射角照射到光栅上，原来垂直入射时的中央明纹位置现在变为第二级光谱线的位置。此时能看到光谱线的最高级次是

(A) 3 级；　(B) 5 级；　(C) 4 级；　(D) 2 级。

解：斜入射时的光栅方程

$d(\sin\varphi+\sin\theta)=k\lambda$，$\varphi=30°$，$\theta=0$时，$k=2$

$\therefore d=4\lambda$

$d(\sin\varphi+\sin 90°)=4\lambda\times\dfrac{3}{2}=6\lambda$，$k_{\max}=5$。

[B]

8．强度为I_0的自然光，经过两块互相迭合的偏振片后，光强为$I_0/8$，则这两块偏振片的偏振化方向夹角是

(A) $\pi/3$；　(B) $\pi/4$；　(C) $\pi/6$；　(D) $\pi/2$。

解：$I_2=I_1\cos^2\alpha=\dfrac{1}{2}I_0\cos^2\alpha=\dfrac{1}{8}I_0$，$\therefore\alpha=60°$

[A]

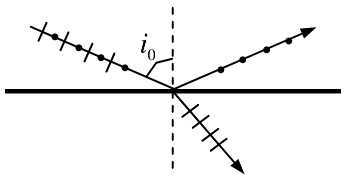
9．一束自然光从空气投射到折射率为$n=1.60$的釉质平板上，如果测得反射光是完全偏振光，则此时光的入射角和折射角分别是

(A)$58°$和$42°$；(B)$38°$和$52°$；(C)$58°$和$32°$；(D)$42°$和$58°$。

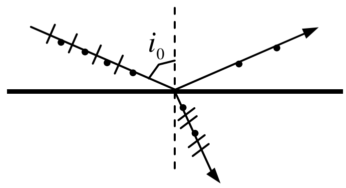
解：$\tan i_0=\dfrac{n_2}{n_1}=1.60$，$i_0=58°$，$\gamma=32°$。

[C]

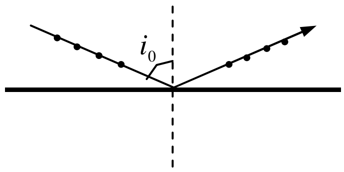
10．下列各图表示自然光或线偏振光入射于两介质分界面，i_0表示布儒斯特角。哪些图示情况是正确的?



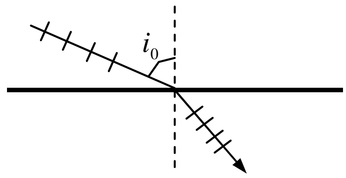
(A)



(B)



(C)



(D)

解：(A)折射光为部分偏振光；

(C)有折射光存在。

[B、D]

二、填充题(单位制为 SI)

1．薄钢片上有两条紧靠着的平行细缝，用双缝干涉方法来测量两缝间距。如果用波长$\lambda = 546.1\,\text{nm}$的单色光照射，双缝与屏的距离$D = 300\,\text{mm}$。测得中央明条纹两侧的两个第五级明条纹的间距为$12.2\,\text{mm}$。则两缝间距离为______________mm。

解：$\Delta x_{5-5} = 10\Delta x = 10 \times \dfrac{D\lambda}{d}$

$$d=\frac{10D\lambda}{\Delta x_{5-5}}=\frac{10\times300\times0.5461\times10^{-3}}{12.2}=0.134\,\text{mm}$$

2．在双缝干涉实验中，已知屏与双缝间距 $D=1\,\text{m}$，双缝间距离 $d=2\,\text{mm}$，设入射光波长 $\lambda=480.0\,\text{nm}$，如果用折射率分别是 1.40 和 1.70 的两块厚度均为 $8.00\times10^{-6}\,\text{m}$ 的薄玻璃片覆盖在两缝上，则干涉条纹将向__________的方向移动，零级明纹的移动距离为__________ mm，干涉条纹间距___________。

解：干涉条纹向折射率大的方向移动；

在原零级明纹处的程差为

$$\delta=(n_2-n_1)d=(1.7-1.4)\times8\times10^{-6}=2.4\times10^{-6}\,\text{m}=5\lambda$$

平移 5 级，平移距离为

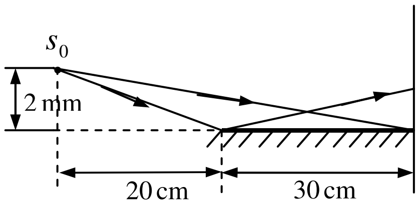
$$l=5\times\frac{D\lambda}{d}=5\times\frac{1000\times0.48\times10^{-3}}{2}=1.2\,\text{mm}$$

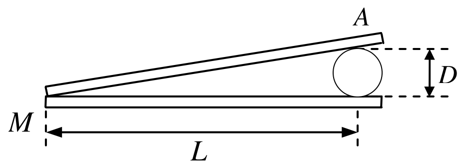
干涉条纹间距不变，$\Delta x=\dfrac{D\lambda}{d}$

3．洛埃镜干涉装置如图，已知光源波长 $\lambda=720.0\,\text{nm}$，则反射镜右边缘到第一条亮纹的距离为________________ mm。

解：由于半波损失，反射镜右边缘为暗纹，所以

$$\Delta x'=\frac{1}{2}\Delta x=\frac{1}{2}\times\frac{D\lambda}{d}=\frac{1}{2}\times\frac{500\times7200\times10^{-7}}{4}=4.50\times10^{-2}\,\text{mm}$$





4．如图，在长度为$4\,\text{cm}$的两块玻璃平板之间夹一细金属丝，形成空气劈尖，在波长为$\lambda=600.0\,\text{nm}$的单色光垂直照射下形成干涉条纹。如果观察到相邻两明条纹间隔为$\Delta l=0.1\,\text{mm}$，则金属丝直径为$D=$________mm。如将金属丝通电，使之受热膨胀，则在上方A处可观察到干涉条纹向________方向移动，条纹间距变________（密或稀）。若在A处观察到干涉条纹移动6条，则金属丝直径的热膨胀量为__________mm。

解：$\dfrac{D}{L}=\dfrac{\Delta e}{\Delta l}$，$D=\dfrac{L}{\Delta l}\Delta e=\dfrac{40}{0.1}\times\dfrac{\lambda}{2}=0.12\,\text{mm}$。

干涉条纹向M方向移动，条纹间距变密。

金属丝直径的热膨胀量为$6\times\dfrac{\lambda}{2}=1.8\times10^{-3}\,\text{mm}$。

5．一块玻璃片上滴上一油滴，当油滴展开成油膜时在单色光$\lambda=600.0\,\text{nm}$正入射下，从反射光中观察油膜所形成的干涉条纹。已知油滴折射率$n_1=1.20$，玻璃折射率$n_2=1.50$，则油滴最外围处(最薄处)对应__________（亮或暗）条纹。如果总共可看到5个亮条纹，并且中心处是亮点，则中心点油滴厚度

应为______________mm。

解：在油膜和玻璃表面反射时均有半波损失，故油滴最外围处为亮纹。

中心处 $\delta = 2n_1 e = 4\lambda$，$e_{\max} = \dfrac{2\lambda}{n_1} = 10^{-3}\,\text{mm}$

6．一玻璃片$(n_1 = 1.50)$上涂有一层MgF_2薄膜$(n_2 = 1.38)$，现用$\lambda = 500.0\,\text{nm}$的单色光垂直入射，为达到透射光增强，反射光几乎消失的目的，此MgF_2薄膜的厚度至少应等于______nm。

解：$2ne = (k + \dfrac{1}{2})\lambda$，取$k = 0$，$e = \dfrac{\lambda}{4n} = \dfrac{500.0}{4\times 1.38} = 90.6\,\text{nm}$。

7. 用牛顿环实验测单色光波长。当用已知波长为$\lambda = 589.3\,\text{nm}$的光垂直照射时，测得第一级和第四级暗环的距离$\Delta_1 = 4.00\times 10^{-3}\,\text{m}$；当用未知的单色光垂直照射时，测得第一级和第四级暗环的距离$\Delta_2 = 3.85\times 10^{-3}\,\text{m}$，则未知单色光的波长是______________nm。

解：$r_k = \sqrt{kR\lambda}$，$r_4 - r_1 = 2\sqrt{R\lambda} - \sqrt{R\lambda}$

$$R = \frac{(r_4 - r_1)^2}{\lambda} = \frac{(4.00\times 10^{-3})^2}{589.3\times 10^{-9}} = 27.1\,\text{m}$$

$$\lambda = \frac{(r_4' - r_1')^2}{R} = \frac{(3.85\times 10^{-3})^2}{27.1} = 5469\times 10^{-10}\,\text{m}$$

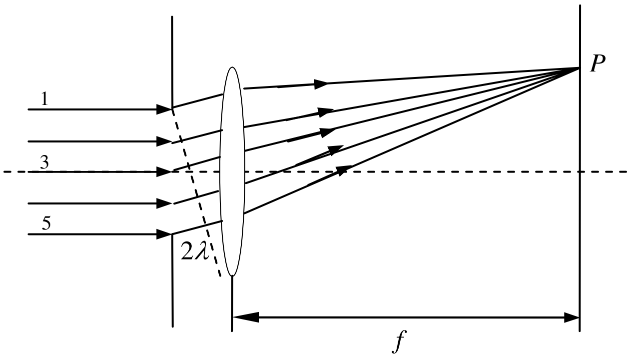
8．当牛顿环实验装置中的透镜与玻璃之间充以折射率$n = 1.20$

的 液体时，第十亮环的半径将由14.0mm变为________mm。

解：$2e_1+\dfrac{\lambda}{2}=k\lambda$，$e_1=\dfrac{r_1^2}{2R}$，$2ne_2+\dfrac{\lambda}{2}=k\lambda$，$e_2=\dfrac{r_2^2}{2R}$

$$ne_2=e_1,\quad \therefore r_2=\frac{r_1}{\sqrt{n}}=\frac{14.0}{\sqrt{1.20}}=12.8\,\text{mm}$$

9．在单缝夫琅和费衍射示意图中，所画出的各条正入射光线间距相等。光线1和3在幕上P点相遇时的位相差为____________；P点应为_________(暗或亮)点。



解：位相差为2π；P点应为暗点。

10．波长$\lambda=600.0\,\text{nm}$的单色光垂直入射在光栅上，光栅常数$d=3600\,\text{nm}$，则第三级明条纹的衍射角为_________；欲使该条纹的衍射角为$\pi/4$，则入射角应变为__________，入射角与衍射角应在光栅平面法线____________(同或异)侧。

解：$d\sin\theta=k\lambda$，$\theta_3=\sin^{-1}\dfrac{3\lambda}{d}=\sin^{-1}\dfrac{3\times6000}{36000}=30°$

$$d(\sin\theta+\sin\varphi)=3\lambda,\quad \sin\varphi=\frac{3\lambda-d\sin45°}{d}=-\frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

$\varphi = -\dfrac{\pi}{15}$，入射角与衍射角在光栅平面法线的异侧。

11．波长为λ的单色平行光垂直照射到缝宽$a = 5\lambda$的夫琅和费单缝衍射装置上，当衍射角$\varphi = \sin^{-1}(7/10)$时，缝可分成_____个半波带，屏上相应位置出现第______级亮条纹。

解：$a\sin\theta = 5\lambda \times \dfrac{7}{10} = 7\times\dfrac{\lambda}{2} = (2k+1)\dfrac{\lambda}{2}$，$k=3$

所以缝可分成7个半波带，屏上相应位置出现第3级亮条纹。

12．天空中两颗星相对一望远镜的角距离为3.50×10^{-6} rad，它们都发出波长$\lambda = 5.60\times10^{-6}$ mm的光，要能分辨出这两颗星，望远镜的口径至少为__________mm。

解：$\theta_R = 1.22\dfrac{\lambda}{D}$，$D = 1.22\dfrac{\lambda}{\theta_R} = 1.22\times\dfrac{5.60\times10^{-5}}{3.50\times10^{-6}} = 19.5\,\text{cm}$

13．以波长为$0.110\,\text{nm}$的 X 射线照射岩盐晶面，实验测得 X 射线与晶面夹角（掠射角）为$11°30'$时获得第一级极大的反射光，则岩盐晶体原子平面之间的间距为________nm。如果以另一束未知波长的 X 射线照射岩盐晶面，测得 X 射线与晶面夹角$17°30'$时获得第一级极大反射光，则这束待测 X 射线的波长为_____________nm。

解：$2d\sin\theta = k\lambda$，$k=1$，

$$d=\frac{\lambda}{2\sin\theta}=\frac{0.110}{2\sin 11°30'}=0.276\,\text{nm}$$

$$\lambda=2d\sin\theta=2\times0.276\times\sin 17°30'=0.166\,\text{nm}$$

14．两偏振片的偏振化方向成$30°$角，自然光透射过两偏振片，如果不考虑偏振化方向的吸收，则透射光与入射光强度之比为________________，如偏振片的偏振化方向有10%的吸收，则透射光与入射光强度之比为______________。

解：$I_2=I_1\cos^2 30°=\frac{1}{2}I_0\cos^2 30°$

$$\frac{I_2}{I_0}=\frac{1}{2}\cos^2 30°=\frac{3}{8}=0.375$$

$$\frac{I_2'}{I_0}=\frac{1}{2}\cos^2 30°(1-10\%)^2=0.304$$

15．一束线偏振光垂直射入一块方解石晶体，光的振动方向与晶体的主截面成$20°$角，则两束折射光（e 光和 o 光）的强度比$I_e/I_o=$______________________________。

解：$A_e=A\cos 20°$，$A_o=A\sin 20°$，$\therefore \frac{I_e}{I_o}=\frac{\cos^2 20°}{\sin^2 20°}=7.55$

三、计算题

1．一双缝，缝距$d = 0.40\,\text{mm}$，两缝宽度都是$a = 0.08\,\text{mm}$。用波长$\lambda = 480.0\,\text{nm}$的平行光垂直照射双缝，在双缝后放一焦距$f = 2.0\,\text{m}$的透镜，求：

(1) 在透镜焦平面处的屏上，双缝干涉条纹的间距Δx；

(2) 在单缝衍射中央亮纹范围内的双缝干涉亮纹数目N。

解：(1) 对双缝干涉，条纹间距 $\Delta x = \dfrac{D}{d}\lambda \approx \dfrac{f}{d}\lambda = 2.4\,\text{mm}$。

(2) 对单缝衍射，中央亮纹宽度 $\Delta x_0 = 2f\dfrac{\lambda}{a} = 24\,\text{mm}$

所以此时有 $\dfrac{\Delta x_0}{\Delta x} = 10$。

又 $\dfrac{d}{a} = 5$，双缝干涉第± 5级缺级，在单缝衍射中央亮纹范围内双缝干涉亮纹数目共$N = 9$，即$K = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$

2．有一单缝, 缝宽$a = 0.60\,\text{mm}$，缝后放一焦距$f = 400\,\text{mm}$的透镜，现用一束白光$(400.0 \sim 760.0\,\text{nm})$垂直入射，并在焦面处的屏幕上形成衍射条纹。求

(1)哪些波长的光在离中心点$x = 1.4\,\text{mm}$处的P点形成亮纹；

(2)它们在P点产生的亮纹的级次；

(3)从P点来看，该狭缝对这些波长可分成的半波带数；

(4)如果这束白光以$5°$角斜入射，这些亮条纹移向离中心点多远的地方。

解：(1)由单缝衍射亮纹条件 $a\sin\varphi=(2K+1)\cdot\frac{\lambda}{2}\quad k=1,2\cdots$

而 $\sin\varphi\approx\tan\varphi=\frac{x}{f}=3.5\times10^{-3}$，$\therefore\lambda=\frac{2a\sin\varphi}{2K+1}=\frac{4200}{2K+1}\mathrm{nm}$

考虑在白光范围$(400.0\sim760.0\,\mathrm{nm})$，分别取$K=3$、$4$。只有$\lambda_1=600.0\,\mathrm{nm}$(橙)光和$\lambda_2=466.7\,\mathrm{nm}$(蓝)光在P点形成亮纹。

(2)对$\lambda_1=600.0\,\mathrm{nm}$，$P$点为$K=3$的亮条纹；

对$\lambda_2=466.7\,\mathrm{nm}$，$P$点为$K=4$的亮条纹。

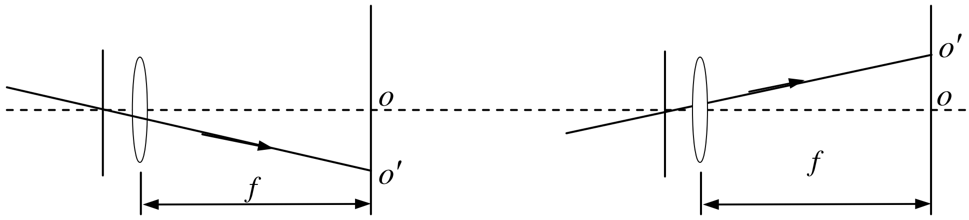
(3)分成半波带数 $N=\frac{a\sin\varphi}{\lambda/2}$，对$\lambda_1$，$N_1=7$；对$\lambda_2$，$N_2=9$。

(4)当光线向下斜入射时，零级条纹由o下移至o'，且$\overline{oo'}=f\tan5°=35\,\mathrm{mm}$，所有各级条纹均向下平移此高度，所以原来$P$点的亮纹距$o$的距离为

$$x'=x-\overline{oo'}=x-f\tan5°=-33.6\,\mathrm{mm}$$

当光线向上斜入射时，所有各级条纹均向上平移$f\tan5°$，所以原来P点的亮纹距o的距离为

$$x'=x+f\tan5°=36.4\,\mathrm{mm}$$



3．波长$\lambda = 600.0\,\text{nm}$的一束平行光垂直照射在二狭缝所在平面上，在狭缝后$500\,\text{mm}$的屏幕上，测得双缝干涉条纹间距离为$0.30\,\text{mm}$。问：

(1) 这时第二级干涉亮条纹在距屏幕中央 O 点多远处?

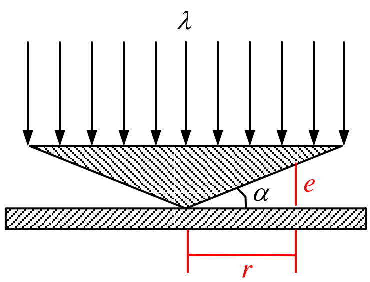
(2) 如果这束平行光以$5°$角斜入射于双缝平面，此时这第二级干涉亮条纹移向何处?

解：(1) 亮纹间距 $\Delta x = \dfrac{D}{d}\lambda$，$d = \dfrac{D}{\Delta x}\lambda = \dfrac{500}{0.3} \times 600.0 \times 10^{-6} = 1\,\text{mm}$

亮纹位置 $x_2 = k\dfrac{D\lambda}{d} = 2 \times 0.3 = 0.6\,\text{mm}$

(2)斜入射，$x_2' = k\dfrac{D\lambda}{d} \pm D\sin\theta = x_2 \pm D\sin 5° = \begin{cases} 44.18\,\text{mm} \\ -42.98\,\text{mm} \end{cases}$

4.将一玻璃圆锥体放在一平板玻璃上，做成如图 示装置。锥体母线与玻璃平面夹角$\alpha = 2.0 \times 10^{-4}\,\text{rad}$，现用$\lambda = 600.0\,\text{nm}$单色平行光垂直入射在圆锥底面上方观察干涉图样。



(1) 定性描述干涉图样；

(2) 求干涉图样中亮纹和暗纹的位置；

(3) 求第二级暗纹处对应的空气层厚度；

(4) 如将圆锥面和平玻璃间充满水（$n=1.33$），求第 K 级暗纹位置的相对改变量。

解：(1) 接触点为暗点，干涉图样是以接触点为中心的明暗相间的圆环，且等间距。

(2) 光程差 $\delta = 2e + \dfrac{\lambda}{2} = \begin{cases} k\lambda & k = 1,2,\cdots(亮) \\ (2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & k = 0,1,2\cdots(暗) \end{cases}$

$e = r\tan\alpha \approx r\alpha$，代入上式得 $r = \begin{cases} (2k-1)\dfrac{\lambda.}{4\alpha}\ (明) \\ k\dfrac{\lambda}{2\alpha}\ (暗) \end{cases}$

(3) $k=2$，$r = \dfrac{\lambda}{\alpha}$，$e = r\alpha = \dfrac{\lambda}{\alpha}\alpha = \lambda = 6000\,\mathring{A}$

(4) $\delta = 2ne + \dfrac{\lambda}{2} = 2nr\alpha + \dfrac{\lambda}{2} = \begin{cases} k\lambda \\ (2k+1)\dfrac{\lambda}{2} \end{cases}$

暗环半径 $r' = k\dfrac{\lambda}{2n\alpha}$，$\left|\dfrac{\Delta r}{r}\right| = \dfrac{k\dfrac{\lambda}{2\alpha}(1-\dfrac{1}{n})}{k\dfrac{\lambda}{2\alpha}} = 1 - \dfrac{1}{n} = 24.8\%$

5．波长$\lambda = 600.0\,\text{nm}$的单色光垂直入射到光栅上。已知第二级主极大出现在$\theta = 30°$处，第三级缺级。求：

(1) 光栅常数d；

(2) 光栅上每个缝的宽度a；

(3) 屏幕上可以看到的明条纹级数。

解：(1) $d\sin\theta = k\lambda$，$k = 2$，$\theta = 30°$，$d = \dfrac{2\lambda}{\sin 30°} = 4\lambda = 2400\,\text{nm}$

(2) $\begin{cases} d\sin\theta = k\lambda \\ a\sin\theta = k'\lambda \end{cases}$，$\dfrac{k}{k'} = \dfrac{d}{a}$，$k = 3$，$a = \dfrac{d}{3}k' = 800k'\,\text{nm}$

$k' = 1$，$a = 800\,\text{nm}$；$k' = 2$，$a = 1600\,\text{nm}$

(3) $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$，$k_m = \dfrac{d}{\lambda} = \dfrac{2400}{600} = 4$，$k = 3$缺级

所以能看到$0, \pm 1, \pm 2$级。

《大学物理》综合练习（八）

——相对论与量子力学基础

教学班级：________序　号：________姓　名：______________日　期：________

一、选择题（把正确答案的序号填入括号内）

1．一短跑选手，在地球上以 $10\,\mathrm{s}$ 的时间跑完 $100\,\mathrm{m}$ 的跑道。在飞行速度为 $0.98\,c$ 的飞船中观察者看来，这选手跑过的距离为（设飞船飞行方向与跑道平行）。

(A) $100\,\mathrm{m}$；　(B) $19.9\,\mathrm{m}$；　(C) $1.48\times10^{10}\,\mathrm{m}$。

解：$x'=\dfrac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$\Delta x'=x_2'-x_1'=\frac{(x_2-x_1)-v(t_2-t_1)}{\sqrt{1-0.98^2}}$$

$$=\frac{100-0.98\times3.0\times10^8}{0.199}=1.48\times10^{10}\,\mathrm{m}$$

[C]

2．对于同时性，下列说法哪一个是正确的：

(A) 对某观察者来说发生在同一地点，同一时刻的二事件，对其它一切观察者来说二事件发生在不同地点、不同时刻；

(B) 有二事件，在某惯性系发生于同一时刻、不同地点，它们

在任何其它惯性系中也是发生于同一时刻、不同地点；

(C) 有二事件，在某惯性系发生于同一时刻、不同地点，它们在任何其它惯性系中是发生于不同时刻、不同地点。

解：(A) 由 $x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$，$t' = \dfrac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ 知，仍为同一地点、同一时刻；

(B) 同理，应为不同地点、不同时刻；

(C) 正确。

[C]

3．观察者甲在与其相对静止的惯性系中测得在同一地点发生的两事件的时间间隔为4s，在其他惯性系中观察者乙和丙声称他们测得的时间分别为5s和3s，根据相对论的时空观，两事件的固有时间间隔应为

(A) 3s；　(B) 4s；　(C) 5s。

解：相对于过程发生的地点为静止的参考系中测量的时间，或在一惯性系中测量的该惯性系同一地点先后发生的两件事件的时间间隔为固有时。

[B]

4．粒子的动能等于静止能量时，粒子的速度为：

(A) 1.414c；　　(B) 0.866c；　　(C) 0.910c。

解：$E_k = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2$，

$mc^2 = 2m_0c^2$，$m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$，

$\therefore v = \sqrt{\dfrac{3}{4}}c = 0.866c$

[B]

5．宇宙飞船相对地面以速度v作匀速直线飞行，某一时刻飞船头部的宇航员向飞船尾部发出一个光信号（c 为真空中光速），经过Δt（飞船上的钟）时间后，被尾部的接受器受到，则由此可知飞船的固有长度为

(A) $c\Delta t$；　(B) $v\Delta t$；　C) $c\Delta t\sqrt{1-(v/c)^2}$；　(D) $\dfrac{c\Delta t}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$。

解：由光速不变原理直接得到

[A]

6．根据天体物理学的观察和推算，宇宙正在膨胀，太空中的天体都离开我们的星球而去。假定在地球上观察到一颗脉冲星（发出周期性脉冲电波的星）的脉冲周期为 0.50s，且这颗星正以运行速度 0.8c 离我们而去，那么这颗星的固有脉冲周期

应是

(A) 0.1s；　　(B) 0.30s；　　(C) 0.50s；　　(D) 0.83s。

解：地球上观测到的为运动时

$$\tau = \Delta t\sqrt{1-(v/c)^2} = 0.5\times\sqrt{1-0.8^2} = 0.30\,\mathrm{s}$$

[B]

7．在参考系 S 中有两个静止质量都是m_0的粒子 A 和 B，分别以速度v沿同一直线相向运动，相碰后合成为一个粒子，此合成粒子的静止质量为

(A) $2m_0$；　　(B) $2m_0\sqrt{1-(v/c)^2}$；

(C) $\dfrac{m_0}{2}\sqrt{1-(v/c)^2}$；　　(D) $\dfrac{2m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$。

解：由动量守恒知合成粒子速度为零，由能量守恒得

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}c^2 + \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = M_0c^2$$

$$M_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

[D]

8．在狭义相对论中，下列说法中哪些是正确的？

(1)一切物体相对于观察者的速度都不能大于真空中的光速。

(2)质量、长度、时间的测量结果都随物体与观察者的相对运动状态而改变。

(3)一惯性系中的观察者观察一个与他作匀速相对运动的时钟时，会看到这时钟比与他相对静止的相同的时钟走得快些。

(4)一惯性系中的观察者观察一个与他作匀速相对运动的时钟时，会看到这时钟比与他相对静止的相同的时钟走得慢些。

(A) (1)，(3)，(4)；　　(B) (1)，(2)，(4)；

(C) (1)，(2)，(3)；　　(D) (2)，(3)，(4)。

[B]

9．A 和 B 两个相同的物体，具有相同的温度，A 周围的温度低于 A，而 B 周围的温度高于 B，则 A、B 二物体在单位时间内辐射的能量 $E(A)$、$E(B)$ 的关系为：

(A) $E(A) > E(B)$；　(B) $E(A) < E(B)$；　(C) $E(A) = E(B)$。

解：只与辐射体本身温度有关，与周围温度无关。

[C]

10．用频率为 ν_1 和 ν_2 的两种单色光，先后照射同一种金属均能产生光电效应，已知该金属的红限频率为 ν_0，测得两次照射时的遏止电压 $|u_{a2}| = 2|u_{a1}|$，则这两种单色光的频率有如下关

系：

(A) $\nu_2 = \nu_1 + \nu_0$；　(B) $\nu_2 = 2\nu_1 - \nu_0$；　(C) $\nu_2 = \nu_1 - 2\nu_0$。

解：$\frac{1}{2}mv^2 = eU_a = h\nu - A = h(\nu - \nu_0)$

$eU_{a1} = h(\nu_1 - \nu_0)$，$eU_{a2} = 2eU_{a1} = h(\nu_2 - \nu_0)$

$\therefore \nu_2 = 2\nu_1 - \nu_0$

[B]

11．光电效应和康谱顿效应，都包含电子与光子的相互作用，今有一光子和一静止的自由电子相互作用，此过程只能是

(A) 光电效应；　(B) 康谱顿效应；

(C) 同时产生光电效应和康谱顿效应。

解：静止的自由电子不能吸收光子，因不满足能量守恒和动量守恒规律。

[B]

12. 不确定度关系 $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{2\pi}$ 表明粒子的坐标和动量不可能同时具有确定的值，这是因为

(A) 微观粒子的质量大小很难测量；

(B) 微观粒子的运动轨道不确定，所以很难测量；

(C) 微观粒子具有波粒二象性的必然结果。

[C]

13．已知一粒子在一维矩形无限深势阱中运动，其波函数为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{a}}\cos\frac{3\pi x}{2a} \quad (-a\le x\le a)$$

那么粒子在 $x=\frac{5}{6}a$ 处出现的概率密度为

(A) $\frac{1}{2a}$；　(B) $\frac{1}{a}$；　(C) $\frac{1}{\sqrt{a}}$。

解：$|\varphi(x)|^2=\frac{1}{a}\cos^2\frac{3\pi x}{2a}$， $x=\frac{5}{6}a$， $|\varphi(x)|^2=\frac{1}{2a}$。

[A]

二、填充题(单位制为 SI)

1．火箭 A 以0.8c的速度相对于地球向正东方向飞行，火箭 B 以0.6c的速度相对于地球向正西方向飞行，则火箭 A 测得火箭 B 的速度大小为____________，方向_____________。

解：$v'=\dfrac{v-u}{1-\dfrac{u}{c^2}v}=\dfrac{-0.6c-0.8c}{1+\dfrac{0.6c}{c^2}0.8c}=-0.946c$，方向正西。

2．一根米尺静止在 K' 系中，与 ox' 轴成 $30°$ 角，若 K' 系相对于 K 系以0.8c运动，则在 K 系中测得米尺的长度为__________。

解：$l_x = l'_x\sqrt{1-\beta^2} = 1\times\cos 30°\sqrt{1-0.64} = 0.6\cos 30°$，

$l_y = 1\times\sin 30°$，$l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2} = 0.721\,\mathrm{m}$。

3．某微观粒子的总能量是它的静止能量的K倍，则其运动速度的大小为(以 c 表示真空中光速)________________________。

解：$mc^2 = Km_0c^2$，$m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

$\therefore v = \dfrac{c}{K}\sqrt{K^2-1}$。

4．把一电子自速度$0.6c$加速到$0.8c$，所需的能量为__________；这时电子的质量增加了__________________________。

解：$\Delta E = \Delta mc^2 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-0.8^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-0.6^2}}\right)m_0c^2 = \dfrac{5}{12}m_0c^2$，

$\Delta m = \dfrac{5}{12}m_0$

5．对黑体加热后，测得总的辐出度(即单位面积辐射功率)增大为原来的16倍，则黑体的温度为原来____________倍，它的最大单色辐出度所对应的波长为原来的__________倍。

解：$M_B(T) = \sigma T^4$，　$M'_B(T') = \sigma T'^4 = 16\sigma T^4$

$\therefore\quad T' = 2T$

$\lambda_m T = b$，$\lambda'_m T' = \lambda'_m 2T = \lambda_m T$

$$\therefore \quad \lambda'_m = \frac{\lambda_m}{2}$$

6．某黑体在 $\lambda_m = 600.0\,\text{nm}$ 处辐射最强，假如物体被加热使其 λ_m 移到 $500.0\,\text{nm}$，则前后两种情况下辐出度之比为_____________。

解：$\lambda_m T = b$， $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{\lambda_{m2}}{\lambda_{m1}} = \dfrac{5}{6}$

$$M_B(T) = \sigma T^4，\quad \frac{M_B(T_1)}{M_B(T_2)} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^4 = \frac{5^4}{6^4} = 0.482$$

7．设氢原子的基态能量为 E，当氢原子从激发态 $n = 2$ 跃迁到基态时，发射的光子的波长 $\lambda =$______________________________（用 E、h、c 表示）。

解：$E_n = -\dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\right) = -\dfrac{1}{n^2}E$， $\nu = \dfrac{E_2 - E}{h}$

$$\nu = \frac{3|E|}{4h}，\quad \therefore \quad \lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{4hc}{3|E|}$$

8． 电子的静止质量为 m_0， 若以速度 $v = 0.6c$ 运动， 则它的动能为__________________，它的德布罗波长为____________________，频率为______________________(用 m_0、h、c 表示)。

解：$E_k = mc^2 - m_0c^2 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-0.6^2}} - 1\right)m_0c^2 = 0.25m_0c^2$

$$\lambda=\frac{h}{mv}=\frac{h}{m_0 v}\sqrt{1-\beta^2}=\frac{h}{m_0\times 0.6c}\times\sqrt{1-0.6^2}=\frac{4h}{3m_0 c}$$

$$\nu=\frac{mc^2}{h}=\frac{m_0c^2}{h\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{5m_0c^2}{4h}$$

9．一个光子的波长为$300.0\,\text{nm}$，如果测定此波长的精度为$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}=10^{-6}$，则此光子位置的不确定量为________。

解：$p=\frac{h}{\lambda}$，$\Delta p=\frac{h}{\lambda^2}\Delta\lambda$，$\Delta x\Delta p=\frac{h}{2\pi}$

$$\therefore\quad \Delta x=\frac{h}{2\pi\Delta p}=\frac{\lambda^2}{2\pi\Delta\lambda}=\frac{300\times10^{-9}\times10^{6}}{2\pi}=0.0477\,\text{m}$$

10．初速度为零的电子经100伏电压加速后垂直平行入射到缝宽$a=200\,\text{nm}$的单缝上，此电子的速度为________，波长为________，衍射中央明纹的半角宽度$\Delta\varphi=$________。

解：$eU=\frac{1}{2}m_0v^2$

$$v=\sqrt{\frac{2eU}{m_0}}=\sqrt{\frac{2\times1.60\times10^{-19}\times100}{9.1\times10^{-31}}}=5.93\times10^{6}\,\text{m/s}$$

$$\lambda=\frac{h}{mv}\approx\frac{h}{m_0v}=\frac{6.63\times10^{-34}}{9.1\times10^{-31}\times5.93\times10^{6}}=1.23\times10^{-10}\,\text{m}$$

$$\Delta x\sin\theta_1=\lambda,\ \sin\theta_1=\frac{\lambda}{\Delta x}=\frac{\lambda}{a}=\frac{1.23}{20},\ \Delta\varphi=\theta_1=3.53°$$

11．在一维无限深势阱中处于基态的粒子的振幅波函数 $\varphi(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi x}{a}$，能量 $E=\frac{\pi^2h^2}{2ma^2}$，则其定态波函数 $\psi(x,t)=$____________________。

解：$\psi(x,t)=\varphi(x)e^{-\frac{i}{\hbar}Et}=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi x}{a}\,e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\pi^2h^2}{2ma^2}t}$

三、计算题

1．在惯性 K 系，有两事件发生于同一地点，且第二事件比第一事件晚发生8s，而在另一惯性系 K' 中，观测到第二事件比第一事件晚10s，求：

(1) K' 相对于 K 运动的速度；

(2) K' 中测得两事件发生地点之间的距离。

解：(1) $t'=\frac{t-vx/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$，$\Delta t'=\frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

$\Delta t = 8\text{s}$， $\Delta t' = 10\text{s}$， $\sqrt{1 - v^2 / c^2} = \dfrac{8}{10}$

$\therefore v = 0.6c = 1.8 \times 10^8 \text{ m/s}$

（2） $x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}$，

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} = \frac{-1.8 \times 10^8 \times 8}{4/5} = -1.8 \times 10^9 \text{ m}$$

2．波长为$\lambda = 0.71\text{Å}$的 X 射线使金属箔发射光电子，电子在磁感应强度为B的均匀磁场中做半径为r的圆周运动，已知$rB = 1.88 \times 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{T}$。求：

(1) 光电子最大动能；

(2) 金属逸出功。

解：(1) $evB = m\dfrac{v^2}{r}$，

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{(erB)^2}{m} = 0.5 \times 10^{-15} \text{ J} = 3.1 \times 10^3 \text{ eV}$$

(2) $h\nu = h\dfrac{c}{\lambda} = 6.63 \times 10^{-34} \times \dfrac{3.0 \times 10^8}{0.71 \times 10^{-10}}$

$$= 2.80 \times 10^{-15} \text{ J} = 1.75 \times 10^4 \text{ eV}$$

$$h\nu = \frac{1}{2}mv^2 + A$$

$$A = h\nu - \frac{1}{2}mv^2 = 1.44 \times 10^4 \text{ eV}$$

3．在康谱顿散射实验中，当能量为$0.50\,\mathrm{MeV}$的X射线射中一个电子时，该电子获得$0.10\,\mathrm{MeV}$的动能，假设电子原来是静止的，试求：

(1) 散射光子的波长；

(2) 散射光子与入射方向的夹角。

解：(1) $h\dfrac{c}{\lambda}=h\nu_0-E_k$

$$\lambda=\frac{hc}{h\nu_0-E_k}=\frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{(0.5-0.1)\times10^{6}\times1.6\times10^{-19}}$$

$$=3.1\times10^{-12}\ \mathrm{m}=0.031\ \text{Å}$$

(2) $h\dfrac{c}{\lambda_0}=E$，$\lambda_0=\dfrac{hc}{E}=2.49\times10^{-2}\,\text{Å}$

$$\Delta\lambda=0.0061\,\text{Å}$$

$$\Delta\lambda=\frac{2h}{m_0c}\sin^2\frac{\phi}{2},\quad \sin^2\frac{\phi}{2}=\frac{m_0c\Delta\lambda}{2h}=0.126$$

$$\phi=41^\circ36'$$

4．有一微观粒子，沿x方向运动，其波函数为

$$\varphi(x)=\frac{A}{1+ix}\quad(-\infty<x<+\infty\quad A\text{为正常数})$$

(1) 将此波函数归一化；

(2) 求粒子的几率密度函数；

(3) 求找到粒子几率最大的位置。

解：(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\pi A^2=1$，$A=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$

归一化波函数　$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}(1+ix)}\ (-\infty<x<+\infty)$

(2) $\omega(x)=\varphi(x)\varphi^*(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}\ (-\infty<x<+\infty)$

(3) $\frac{\mathrm{d}\,\omega(x)}{\mathrm{d}\,x}=\frac{1}{\pi}\frac{-2x}{(1+x^2)^2}=0$，得 $x_1=0$，$x_2=-\infty$，$x_3=+\infty$

$x_2=-\infty$ 和 $x_3=+\infty$ 时，$\omega(x)=0$，不合题意。

所以 $x=0$ 时，$\omega(x)$ 最大，$\omega(0)=\frac{1}{\pi}$

5．一个质量为 m 的粒子，约束在长度为 L 的一维线段上，试根据测不准关系估算这个粒子所能具有的最小能量值，并计算在直径 1.0×10^{-14} m 的核内质子的最小动能。

解：$\Delta x\cdot\Delta p_x\geq h$，$\Delta p_x=m\Delta v_x$，$\therefore\Delta v_x\geq\frac{h}{\Delta x\cdot m}=\frac{h}{mL}$

$$E=\frac{1}{2}mv^2\geq\frac{1}{2}m(\Delta v_x)^2\geq\frac{1}{2}m\left(\frac{h}{mL}\right)^2$$

$$\therefore\ E_{\min}=\frac{h^2}{2mL^2}=\frac{(6.63\times10^{-34})^2}{2\times1.67\times10^{-27}\times(1.0\times10^{-14})^2}=1.31\times10^{-12}\ \mathrm{J}$$

6．一质量为 m 的粒子被约束在宽度为 $a(0<x<a)$ 的一维无限深

势阱中，试从驻波和物质波的观点，求出粒子的波函数$\varphi(x)$及粒子的能量E（提示：设驻波振幅波函数为$\varphi(x)=A\sin(kx+\varphi)$）。

解：设粒子驻波振幅波函数为 $\varphi(x)=A\sin(kx+\varphi)$

由连续条件 $\varphi(0)=A\sin\varphi=0$，得$\varphi=0$

$\varphi(a)=A\sin(ka+\varphi)=0$，得$k=n\dfrac{\pi}{a}$，$n=1,2,3\cdots$

$\therefore \varphi(x)=A\sin\dfrac{n\pi}{a}x$，$n=1,2,3\cdots$

由归一化条件 $\int_0^a|\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}x=\int_0^a A^2\sin^2\dfrac{n\pi}{a}x\,\mathrm{d}x=1$，

得 $A=\sqrt{\dfrac{2}{a}}$

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 & x\le 0,\ x\ge a\\ \sqrt{\dfrac{2}{a}}\sin\dfrac{n\pi}{a}x & n=1,2,3\cdots,\ 0<x<a\end{cases}$$

又 $E=\dfrac{P^2}{2m}$，$P=\dfrac{h}{\lambda}$，驻波满足条件$a=n\dfrac{\lambda}{2}\,(n=1,2,3\cdots)$，$\lambda=\dfrac{2a}{n}$

$\therefore P=n\dfrac{h}{2a}$，$E=\dfrac{P^2}{2m}=\dfrac{n^2h^2}{2m\cdot 4a^2}=\dfrac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\quad(n=1,2,3\cdots)$

四、证明题

1．试证明一个静止的自由电子不能吸收一个光子(提示：用能量守恒和动量守恒定律)。

证明：设入射光子的能量为$h\nu$，m_0为电子的静止质量，v为与光子碰撞并吸收光子以后的自由电子的运动速度，则根据能量守恒定律有

$$h\nu + m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{1}$$

由(1)解得电子吸收光子后的运动速度为

$$v = \frac{c\sqrt{h^2\nu^2 + 2h\nu m_0c^2}}{h\nu + m_0c^2}$$

又根据动量守恒定律有

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{m_0v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{2}$$

由(2)解得电子吸收光子后的运动速度为

$$v = \frac{h\nu c}{\sqrt{h^2\nu^2 + m_0^2c^4}}$$

显然由(1)、(2)两式得到的电子速度不相等，这说明自由电子吸收一个光子这一过程不能同时遵守能量守恒和动量守恒定律，因而这一过程是不可能发生的。

2．试由玻尔理论证明玻尔半径$r_1=\dfrac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2}$。

证明：电子绕核作圆周运动，有

$$F_c=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=m\frac{v^2}{r}$$

根据玻尔角动量量子化假设

$$L=mvr=n\frac{h}{2\pi}$$

得
$$v=\frac{nh}{2\pi mr}\quad(n=1,2,3\cdots)$$

$$\therefore\quad \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=m\frac{1}{r}\frac{n^2h^2}{4\pi^2m^2r^2}$$

得
$$r_n=n^2\left(\frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2}\right),$$

$n=1$时

$$r_1=\frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2}$$