南 京 航 空 航 天 大 学

二〇一八～二〇一九学年 第一学期《工科数学分析》期末考试试题

考试日期：2018年　月　日　　试卷类型：A　　试卷代号：

班号　　　　学号　　　　姓名

题号	一	二	三	四	总分
得分					

一、　填空题：（每题 3 分，共 24 分）

本题分数	24
得　分	

1. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{n}-a\ln\left(1-\frac{2}{n}\right)\right)$ 收敛，则 $a=$ ________；

2. 设 $f(x)$ 是连续函数且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$，则 $f(x)=$________；

3. 对数螺线 $r=a\mathrm{e}^{\theta}\,(a>0)$, $-\pi<\theta<\pi$ 与极轴所围图形的面积是________；

4. 已知 $f'(x_0)=-1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=$________；

5. 若极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x (at-\arcsin t)\mathrm{d}t}{b-\cos x}=1$，则 $a=$______，$b=$______；

6. $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=$________；

7. 微分方程 $y'\cos^2 x+y=\tan x$ 满足 $y(0)=2$ 的解为 $y=$________；

8. 曲线 $y=\frac{|x-1|}{x\sqrt{x}}$ 的拐点坐标为________.

二、 选择题：（每题 3 分，共 12 分）

本题分数	12
得　分	

1、设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\le 0\\ x-1, & x>0\end{cases}$，$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $F(x)$ 在 $x=0$ 处　　　（　　）

(A) 不连续；　　(B) 连续不可导；

(C) 可导，但导函数不连续；　　(D) 导函数连续.

2．已知数列 $\{x_n\}$ 收敛，下述可以得出 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$ 的是　　　（　　）

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(x_n)=0$；　　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n+\sqrt{|x_n|}\right)=0$；

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n+x_n^2\right)=0$；　　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n+\sin(x_n)\right)=0$.

3. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1\right)$ 的收敛性为　　　（　　）

(A) 绝对收敛；　　(B) 条件收敛；　　(C) 发散；　　(D)不能确定.

4. 设 $0<r<1$，下述使得函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ 一致收敛的区间是　　　（　　）

(A) $(-1,1)$；　　(B) $(-r,1)$；　　(C) $(-1,r)$；　　(D) $[-r,r]$.

三、 计算题（每小 6 分，共 24 分）

本题分数	24
得　分	

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

2．求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$.

3. 设D是由曲线$y=\sqrt[3]{x}$，直线$x=a\ (a>0)$及x轴所围成的平面图形，求D绕y轴旋转一周所形成的立体的体积.

4．求级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!}$的和.

四、解答与证明题（每题 8 分，共 40 分）

本题分数	40
得　分	

1．设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R，其系数满足 $a_0 = 1$，$a_1 = 0$，$a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(na_n + a_{n-1}\right)$，在区间 $(-R, R)$ 内导出幂级数的和函数 $S(x)$ 满足的微分方程，并求 $S(x)$ 的表达式.

2．已知曲线 $L: y = y(x)$ 经过 $(1,0)$ 点，在点 $p(x, y)$ 处的切线与 y 轴交于 $(0, Y_p)$，在点 $p(x, y)$ 处的法线与 x 轴交于 $(X_p, 0)$，并且 $X_p = Y_p$，求曲线方程.

3. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可微，且 $f'(x)>0$，若极限 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在，证明在区间 (a,b) 内 $f(x)>0$ 且存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $\dfrac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}=\dfrac{2\xi}{f(\xi)}$.

4.（1）证明级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln^2 n}{n}$ 条件收敛；

（2）证明函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

5．将函数 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & 1<x<\pi\end{cases}$ 展开为余弦级数，写出和函数在 $[-\pi,\pi]$ 的表达式，并求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$ 的和.

南 京 航 空 航 天 大 学

二〇一八～ 二〇一九 学年 第 1 学期

课程名称：《 工科数学分析》参考答案及评分标准

命题教师： 试卷类型：A 卷 试卷代号：

一、 填空题

1. $-\frac{1}{2}$； 2. $x-1$； 3. $\frac{a^2}{4}\left(e^{2\pi}-e^{-2\pi}\right)$； 4. 1；

5. $a=2,b=1$； 6. 1； 7. $3e^{-\tan x}+\tan x-1$； 8. $\left(5,\frac{4}{5\sqrt{5}}\right)$.

二、 选择题

1. B 2.D 3.A 4.D

三、1 解：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sec^2 x+\tan^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+2\tan^2 x}d(\tan x)$ ………… (3 分)

$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+2t^2}d(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}t\right)\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. …………………………………… (6 分)

2 解：原极限$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 x\ln(1+x)\,d\,x$ …………………………… (3 分)

$=\frac{1}{2}\left(x^2\ln(1+x)\right)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x}d\,x=\frac{1}{4}$ ………………………………… (6 分)

3 解：$V_y=2\pi\int_0^a xf(x)dx=2\pi\int_0^a x^{\frac{4}{3}}dx=\frac{6}{7}a^{\frac{7}{3}}\pi$ …………………………………… (6 分)

4 解：考虑幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{n!}x^n$，其收敛域为$(-\infty,+\infty)$，……………………… (2 分)

令$s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{n!}x^n$，则$s(x)=\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}\right)'=\left(xe^x\right)'=(x+1)e^x$； …… (5 分)

故$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!}=s(2)=3e^2$ ……………………………………………………… (6 分)

四、1 解：首先利用逐项求导公式 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}x^{n+1}\Rightarrow S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$

代入条件可得 $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(na_n+a_{n-1}\right)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n$，

其中 $\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\right)'=xS'(x)$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1}=xS(x)$

故 $S(x)$ 满足微分方程 $S'(x)=xS'(x)+xS(x)\Rightarrow(1-x)S'(x)-xS(x)=0$ …………………… (4 分)

上述微分方程的通解为 $S(x)=\dfrac{Ce^{-x}}{1-x}$，利用 $S(0)=1$ 可得 $S(x)=\dfrac{e^{-x}}{1-x}$ …………………… (8 分)

2 解：$Y_p=y-xy'$，$X_p=x+yy'$，因此有 $y'=\dfrac{y-x}{y+x}$ …………………………………… (4 分)

上述方程为齐次方程，令 $u=\dfrac{y}{x}$，方程变为 $xu'=\dfrac{u-1}{u+1}-u=-\dfrac{1+u^2}{u+1}$，

其通解为 $\arctan u+\dfrac{1}{2}\ln(1+u^2)+\ln|x|=C\Rightarrow\arctan\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=C$

由于曲线过 $(1,0)$ 点，曲线方程为 $\arctan\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=0$. ……………………… (8 分)

3 证明：$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在，可得 $f(a)=\lim\limits_{x\to a^+}f(2x-a)=0$，

又由于 $f'(x)>0$，故 $f(x)>f(a)=0$ …………………………………………………… (4 分)

令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，$G(x)=x^2$，根据 Cauchy 中值定理，$\exists\xi\in(a,b)$ 使

$$\frac{G(b)-G(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{G'(\xi)}{F'(\xi)}\Rightarrow\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}=\frac{2\xi}{f(\xi)}$$ ……………………… (8 分)

4 解：（1）$\left|(-1)^n\dfrac{\ln^2 n}{n}\right|\ge\dfrac{1}{n}$，$\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，故原级数非绝对收敛；令 $f(x)=\dfrac{\ln^2 x}{x}$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$，

$f'(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}(2-\ln x)<0\ (x>e^2)$，根据莱布尼茨判别法，级数条件收敛………………… (4 分)

（2）$|R_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}x^2}{(1+x^2)^k}\right|\le\dfrac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}$，令 $f(x)=\dfrac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}$，$f'(x)=\dfrac{2x(1-nx^2)}{(1+x^2)^{n+2}}=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，

故 $|R_n(x)|\le\dfrac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\le\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}\to0$，故级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛…………… (8 分)

5 解：$f(x)$ 展开成余弦级数为 $\dfrac{1}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n\pi}\sin n\cos nx$；……………………………… (4 分)

和函数的表达式为 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<-1\\ 1, & -1<x<1\\ 0, & 1<x\le\pi\\ \dfrac{1}{2}, & x=\pm1\end{cases}$ …………………………………… (6 分)

令 $x=0$，可得 $\dfrac{1}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n\pi}\sin n=1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n}=\dfrac{\pi-1}{2}$. ………………………… (8 分)

南 京 航 空 航 天 大 学

二〇一八～二〇一九学年 第一学期 **《工科数学分析》期末考试试题**

考试日期：2018年　　月　　日　　　试卷类型：B　　　试卷代号：

班号　　　　　　　学号　　　　　　　姓名

题号	一	二	三	四	总分
得分					

一、　填空题：（每题 3 分，共 24 分）

本题分数	24
得　分	

1. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{n}-a\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right)$ 收敛，则 $a=$ ______；

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, x\le 0,\\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x>0,\end{cases}$ 则 $\int_1^3 f(x-2)\mathrm{d}x=$ ______；

3. 曲线 $y=\cos x\ \ (-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2})$ 与 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积为______________；

4. 曲线 $\begin{cases}x-\mathrm{e}^x\sin t+1=0\\ y=t^3+2t\end{cases}$ 于 $t=0$ 处的切线方程为： $y=$ __________________；

5. $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\int_0^x\sqrt{x-t}\cdot\mathrm{e}^t\mathrm{d}t}{\sqrt{x^3}}=$ ____________；

6．设 $f(x)=\int_0^x\left[\int_1^{\sin t}\sqrt{1+u^4}\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t$，则 $f''(x)=$ ______________.

7．微分方程 $(1+x^2)y'+y=\arctan x$ 满足 $y(0)=2$ 的解为 $y=$ ____________________

8．曲线 $y=\dfrac{x^3}{12+x^2}\ \ (x>0)$ 的拐点坐标为________________.

二、 选择题：（每题 3 分，共 12 分）

本题分数	12
得　分	

1、设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\le 0\\ x, & x>0\end{cases}$，$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $F(x)$ 在 $x=0$ 处　（　　）

(A) 不连续；　(B) 连续不可导；

(C) 可导，但导函数不连续；　(D) 导函数连续.

2．已知数列 $\{x_n\}$ 收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n+x_n^2\right)=0$，则下述正确的是　（　　）

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$；　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n+\sqrt{|x_n|}\right)=0$；

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-1$；　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 未必存在.

3. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\dfrac{\ln n}{n}\right)$ 的收敛性为　（　　）

(A) 条件收敛；　(B) 绝对收敛；　(C) 发散；　(D)不能确定.

4. 设 $0<r<1$，下述使得函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$ 一致收敛的区间是　（　　）

(A) $[r,2-r]$；　(B) $(0,r)$；　(C) $(r,2)$；　(D). $(0,2)$

三、 计算题（每小 6 分，共 24 分）

本题分数	24
得　分	

1． $\int_0^1\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

2．求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$.

3. 设D是由曲线$r=1-\cos\theta$和$r=\cos\theta$围成的平面图形，求D的面积.

4．求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}n}{(2n-1)!}$的和.

四、 解答与证明题（每题 8 分，共 40 分）

本题分数	40
得　　分	

1．设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R，其系数满足 $a_0 = 1$，$a_1 = 2$，$a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left((n+2)a_n - a_{n-1}\right)$，在区间 $(-R, R)$ 内导出幂级数的和函数 $S(x)$ 满足的微分方程，并求 $S(x)$ 的表达式.

2．已知曲线 $L: y = y(x)$ 经过 $(1,0)$ 点，在点 $p(x,y)$ 处的切线与 y 轴交于 $(0, Y_p)$，在点 $p(x,y)$ 处的法线与 x 轴交于 $(X_p, 0)$，并且 $X_p + Y_p = 0$，求曲线方程.

3．设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可微，且 $f(1)-2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)\mathrm{d}x=0$，证明存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$.

4．（1）证明级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln^2 n}{n}$ 条件收敛；

（2）证明函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

5．将函数 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & 1<x<\pi\end{cases}$ 展开为余弦级数，写出和函数在 $\left[-\pi,\pi\right]$ 的表达式，并求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\cos n}{n}$ 的和.

南 京 航 空 航 天 大 学

二〇一八～ 二〇一九　学年　第 1 学期

课程名称：《 工科数学分析》参考答案及评分标准

命题教师：　　　　试卷类型：B 卷　　　　试卷代号：

一、 填空题

1. 2；　2. $\frac{3\pi}{4}$；　3. $\frac{\pi^2}{2}$；　4. $y=2\mathrm{e}(x+1)$；

5. $\frac{2}{3}$；　6. $\cos x\sqrt{1+\sin^4 x}$　7. $3\mathrm{e}^{-\arctan x}+\arctan x-1$；　8. $\left(6,\frac{9}{2}\right)$.

二、 选择题

1.D　2. B　3.A　4.A

三、1 解：$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1+x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\sin t}{\cos^3 t}\cdot\cos t\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$ …………………………… (3 分)

$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}(\cos t)=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2}{\sqrt{3}}-1=\sqrt{3}-1$. ………………………… (6 分)

2 解：原极限$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\frac{1}{1+x}\ln(1+x)\,\mathrm{d}x$ ……………………… (3 分)

$=\frac{1}{2}\left(\ln(1+x)\right)^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln^2 2$ ……………………………………………… (6 分)

3 解：$S(D)=2\left[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\right]=\frac{7\pi}{12}-\sqrt{3}$ ……………… (6 分)

4 解：由于$\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}$，　$x\in(-\infty,+\infty)$，……… (2 分)

则$\left(x\sin x\right)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{(2n-1)!}\right)'=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}nx^{2n-1}}{(2n-1)!}=x\cos x+\sin x$ …… (5 分)

令$x=1$，即得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{(2n-1)!}=\frac{1}{2}\left(\sin 1+\cos 1\right)$ ……………………………… (6 分)

四、1 解：首先利用逐项求导公式 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}x^{n+1}\Rightarrow S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$

代入条件可得 $S'(x)=2+\sum_{n=1}^{\infty}\left((n+2)a_n-a_{n-1}\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)a_nx^n-\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n$，

其中 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)a_nx^n=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)a_nx^{n+1}=\frac{1}{x}\left(x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=xS'(x)+2S(x)$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n=xS(x)$

故 $S(x)$ 满足微分方程 $(1-x)S'(x)=(2-x)S(x)$ ………………………………………… (4 分)

上述微分方程的通解为 $S(x)=\frac{C\mathrm{e}^x}{1-x}$，利用 $S(0)=1$ 可得 $S(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{1-x}$……………………… (8 分)

2 解：$Y_p=y-xy'$，$X_p=x+yy'$，因此有 $y'=\frac{x+y}{x-y}$……………………………………… (4 分)

上述方程为齐次方程，令 $u=\frac{y}{x}$，方程变为 $xu'=\frac{1+u}{1-u}-u=\frac{1+u^2}{1-u}$，

其通解为 $\arctan u-\frac{1}{2}\ln(1+u^2)-\ln|x|=C\Rightarrow\arctan\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=C$

由于曲线过 $(1,0)$ 点，曲线方程为 $\arctan\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=0$． ………………………… (8 分)

3 证明：由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，根据定积分中值定理，

$\exists\eta\in(a,b)$ 使 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\mathrm{d}x=\eta f(\eta)$，………………………………………………… (4 分)

令 $F(x)=xf(x)$，则 $F(\eta)=F(1)$，根据 Rolle 中值定理，$\exists\xi\in(\eta,1)\subset(a,b)$，使得

$$F'(\xi)=0\Rightarrow f(\xi)+\xi f'(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}$$ ………………………… (8 分)

4 解：

（1）当 $n\ge 2$ 时，$\left|(-1)^n\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}\right|\ge\frac{1}{\ln(n+1)}$，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$ 发散，故原级数非绝对收敛；又由于 $\int_{n+1}^{n+2}\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}\le\frac{1}{\ln(n+1)}\le\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}\le\frac{1}{\ln n}$，根据莱布尼茨判别法，级数条件收敛……………… (4 分)

（2）$|R_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{x^2+k}\right|\le\frac{1}{x^2+n+1}\le\frac{1}{n}\to 0$，故级数一致收敛……………………… (8 分)

5 解：$f(x)$ 展开成余弦级数为 $\frac{1}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin n\cos nx$；……………………………… (4 分)

和函数的表达式为 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<-1\\ 1, & -1<x<1\\ 0, & 1<x\le\pi\\ \frac{1}{2}, & x=\pm 1\end{cases}$ ………………………………… (6 分)

令 $x=0$，可得 $\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\cos n}{n}=\frac{1}{2}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\cos n}{n}=\frac{\pi-2}{4}$. ……………… (8 分)