南 京 航 空 航 天 大 学

二〇一八 ～ 二〇一九 学年 第Ⅱ学期《工科数学分析A(2)》考试试题

考试日期： 2019年6 月30 日 试卷类型：A 试卷代号：

班号		学号		姓名	

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

一、填空题：（每题4分，共24分）

本题分数	24
得 分	

1. 若表达式 $\dfrac{(x+ay)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$ 为某函数的全微分，则 $a=$____________.

2. $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1 \dfrac{\tan x}{x}\mathrm{d}x=$____________________.

3. 曲面Σ为平面$x+y+z=1$与三个坐标面所围成区域的外侧，则 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y-z)\mathrm{d}x\Lambda\mathrm{d}y-(y+z)\mathrm{d}y\Lambda\mathrm{d}z=$______________________.

4. 设Γ为螺旋线$x=\cos t, y=\sin t, z=t$ 从$t=0$到$t=2\pi$的一段，则$\int_{\Gamma} y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=$______________________.

5. 函数$u=xyz$在点$(3,4,5)$处沿锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的法线方向（与z轴正方向夹角为锐角）的方向导数为__________________________.

6. 已知$y_1=x, y_2=x+\mathrm{e}^x, y_1=1+x+\mathrm{e}^x$是微分方程$y''+a(x)y'+b(x)y=d(x)$的三个解，则方程$y''+a(x)y'+b(x)y=0$满足$y(0)=0, y'(0)=1$的解$y(x)=$______________.

二、单项选择题：（每题 4 分，共 12 分）

本题分数	12
得　分	

1．在 $\mathbb{R}^2$ 上满足下列哪条，积分 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关　（　　）

(A) $P(x,y)=\dfrac{x-y}{x^2+4y^2},Q(x,y)=\dfrac{x+4y}{x^2+4y^2}$；　(B) $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial y}$；

(C) $P(x,y)=\dfrac{x+y}{x^2+4y^2},Q(x,y)=\dfrac{x-4y}{x^2+4y^2}$；　(D) 以上都不可以.

2. 设 σ_{xy} 为曲面 $\Sigma: z=z(x,y)$ 在 xy 平面的投影域，则下述正确的是：（　　）

(A) $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y)\mathrm{d}x\Lambda\mathrm{d}y=\iint\limits_{\sigma_{xy}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；　(B) $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y)\mathrm{d}x\Lambda\mathrm{d}y=-\iint\limits_{\sigma_{xy}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

(C) $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\sigma_{xy}} f(x,y)\sqrt{1+z_x^2++z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；(D) $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\sigma_{xy}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

3．已知函数 $f(x)$ 可导，$f(1)=1$，$F(x)=\int_0^2 |x-y| f(y)\mathrm{d}y$，则 $F''(1)=$（　　）

(A) 0；　(B) 1；　(C) 2；　(D) 3.

三、计算题（每题 6 分，共 24 分）

本题分数	24
得　分	

1. L 为曲线 $x^2+y^2=2(x+y)$，求 $\oint_L (2x^2+3y^2)\mathrm{d}s$.

2. 求线性微分方程组$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{dt} = \quad 3x_1 + 2x_2, \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{dt} = -2x_1 - \ x_2 \end{cases}$满足条件$x_1(0) = x_2(0) = 1$的特解.

3．设$\vec{r} = (x, y, z), r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$，求函数$f(r)$的表达式，满足$\operatorname{div}\left(f(r)\vec{r}\right) = 0$.

4．求三重积分$\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$由曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$和$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$围成.

本题分数	10
得　　分	

四、已知Σ是由直线段$x-1=y=z$ $(0\le z\le 2)$绕z旋转所成曲面的外侧，计算曲面积分

$$\oiint\limits_{\Sigma}(2x-2x^3)\mathrm{d}y\Lambda\mathrm{d}z+(zy^2+6x^2y+z^2x)\mathrm{d}z\Lambda\mathrm{d}x-z^2y\mathrm{d}x\Lambda\mathrm{d}y\ .$$

本题分数	10
得　　分	

五、设函数$u(x,y)$在整个平面上具有二阶连续偏导数，且$u(0,1)=1,\ u(\pi,0)=0$，L是从点$A(0,1)$沿曲线$y=\dfrac{\sin x}{x}$到点$(\pi,0)$的曲线段，计算曲线积分$I=\int_L\left[u_x(x,y)+xy\right]\mathrm{d}x+u_y(x,y)\mathrm{d}y$.

本题分数	10
得　　分	

六、设$f(x)$具有二阶连续导数，$f(0)=0,f'(0)=1$，曲线积分$\int_L\left[xy(x+y)-f(x)y\right]\mathrm{d}x+\left[f'(x)+x^2y\right]\mathrm{d}y$与路径无关.

（1）求函数$f(x)$；（2）求积分$\int_{(0,0)}^{(a,b)}\left[xy(x+y)-f(x)y\right]\mathrm{d}x+\left[f'(x)+x^2y\right]\mathrm{d}y$.

本题分数	10
得　　分	

七、设Γ为弧长为s的有向光滑曲线段，

（1）将$\int_{\Gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$化为对弧长的曲线积分；

（2）若$M = \max\limits_{\Gamma} \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}$，证明不等式

$$\left| \int_{\Gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z \right| \le Ms .$$

一、 填空题

1.$\underline{2}$；2．$\underline{\ln\cos 1}$； 3．$\underline{-\dfrac{1}{6}}$； 4．$\underline{-\pi}$； 5．$\underline{-6\sqrt{2}}$； 6．$\underline{e^x-1}$.

二、 选择题

1.（A） 2．(C) 3．（C）

三、

1. 解：令 $x=1+\sqrt{2}\cos t, y=1+\sqrt{2}\sin t$， ………………………………………………… (2 分)

则原式 $=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left[2(1+\sqrt{2}\cos t)^2+3(1+\sqrt{2}\sin t)^2\right]\mathrm{d}t=20\sqrt{2}\pi$ ……………………... (6 分)

2. 解：$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}$，$\det\left(A-\lambda E\right)=\lambda^2-2\lambda+1=0$，特征根为 $\lambda_{1,2}=1$ ……………(2 分)

基解矩阵为 $\boldsymbol{X}(t)=\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}\right)\mathrm{e}^t=\begin{pmatrix}2t+1 & 2t\\ -2t+1 & -2t\end{pmatrix}\mathrm{e}^t$ ………………… (4 分)

因此满足初始条件的特解为 $x_1(t)=(4t+1)\mathrm{e}^t, x_2(t)=(-4t+1)\mathrm{e}^t$ ……………………… (6 分)

3 解：由于 $\mathrm{div}\left(f(r)\vec{r}\right)=3f(r)+rf'(r)=0$ ……………………………………………… (3 分)

故 $f(r)=Cr^{-3}=\dfrac{C}{r^3}$ ……………………………………………………………… (6 分)

4 解：$\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ ……………………………………………………… (2 分)

$\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho=\dfrac{\pi}{8}$ …………………………………… (6 分)

四、解： $x-1=y=z$ $(0\le z\le 2)$ 绕 z 旋转所成曲面为 $\Sigma: x^2+y^2=2z^2+2z+1$， … (3 分)

令 $\Sigma_1: z=0$（下侧），$\Sigma_2: z=1$（上侧），由 Gauss 公式，$\oiint\limits_{\Sigma} = \oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2} - \oiint\limits_{\Sigma_1} - \oiint\limits_{\Sigma_2}$

其中 $\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2} =2\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V=2\pi\int_0^1(2z^2+2z+1)\mathrm{d}z=\dfrac{16\pi}{3}$ …………………………… (8 分)

同时$\oiint_{\Sigma_1} =0, \oiint_{\Sigma_2} = \iint_{x^2+y^2\le 5} -y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，原积分$=\dfrac{16\pi}{3}$ .... (10 分)

五、解：$I=\int_L u_x(x,y)\mathrm{d}x+u_y(x,y)\mathrm{d}y+\int_L xy\mathrm{d}x=I_1+I_2$，其中$I_1$与路径无关

$I_1=\int_0^{\pi}u_x(x,1)\mathrm{d}x+\int_1^0 u_y(\pi,y)\mathrm{d}y=u(\pi,1)-u(0,1)+u(\pi,0)-u(\pi,1)=-1$ ...... (5 分)

$I_2=\int_L xy\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}x\cdot\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=2$ ....(8 分)

于是$I=I_1+I_2=1$ .... (10 分)

六、解：（1）$f(x)$满足微分方程$f''(x)+f(x)=x^2$，$f(0)=0, f'(0)=1$ .... (2 分)

可得$f(x)=2\cos x+\sin x+x^2-2$； .... (5 分)

（2）$\int_{(0,0)}^{(a,b)}\left[xy(x+y)-f(x)y\right]\mathrm{d}x+\left[f'(x)+x^2y\right]\mathrm{d}y$

$=\int_{(0,0)}^{(a,b)}\mathrm{d}\left[-2y\sin x+y\cos x+2xy+\dfrac{1}{2}x^2y^2\right]$ .... (10 分)

$=-2b\sin a+b\cos a+2ab+\dfrac{1}{2}a^2b^2$

七、（1）设有向曲线Γ的单位切向量为$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，则

$\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_\Gamma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}s$ .... (4 分)

（2）由于$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

则$\left|P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\right|\le\sqrt{P^2+Q^2+R^2}\cdot\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}\le M$ ... (6 分)

于是$\left|\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\right|\le\int_\Gamma\left|P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\right|\mathrm{d}s\le Ms$ .... (10 分)