南京航空航天大学

二〇一七 ～ 二〇一八 学年 第II学期**《工科数学分析 A(2)》考试试题**

考试日期： 2018年6 月30 日 试卷类型：B 试卷代号：

班号 学号 姓名

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

一、 填空题：（每题 4 分，共 24 分）

本题分数	24 分
得 分	

1. 已知 $z=f[\phi(x)-y,\psi(y)+x]$, f 具有连续的偏导数，ϕ,ψ 可导，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ ______________.

2. 设向量场 $\vec{A}=\{x^2y,y^2z,z^2x\}$，则 $\mathrm{div}\vec{A}=$ ______________,

$\mathrm{grad}(\mathrm{div}\vec{A})=$ ______________.

3. 微分形式 $(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y$ 的原函数为______________.

4. 设 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧，

则 $\iint\limits_{s}(x^3+\mathrm{sinz})\mathrm{d}y\Lambda\mathrm{d}z+(y^3+\mathrm{xz})\mathrm{d}z\Lambda\mathrm{d}x+(z^3+y^2)\mathrm{d}x\Lambda\mathrm{d}y=$ ______________..

5. 写出以函数 $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$ 为通解的常系数齐次线性微分方程：

______________.

6. 交换积分次序 $\int_1^2\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{y}}^{y^2}f(x,y)\mathrm{d}x=$ ______________.

二、单项选择题：（每题 4 分，共 12 分）

本题分数	12 分
得　　分	

1．微分方程 $y''+\lambda^2 y=\sin\lambda x\ \ (\lambda>0)$ 的特解形式为　（　　　）

(A) $a\sin\lambda x$；　(B) $ax\sin\lambda x$；

(C) $a\sin\lambda x+b\cos\lambda x$　；　(D) $x(a\sin\lambda x+b\cos\lambda x)$．

2. $\int_0^a \mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$ 化为极坐标形式为　（　　　）

(A) $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho$；(B) $\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho$；

(C) $\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho$；(D) $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho$．

3．二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，

则在 $(0,0)$ 点，下述正确的是：　（　　　）

(A) 极限不存在，因此不连续；　(B) 偏导数不存在，因此不可微；

(C) 可微，偏导函数不连续；　(D) 可微且偏导函数连续.

二、　计算题（每题 7 分，共 28 分）

本题分数	28 分
得　　分	

1. 计算 $\iint_\Sigma (x+y+z)\mathrm{d}S$,其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

2. 求线性微分方程组$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{dt} = x_1 + 2x_2, \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{dt} = 4x_1 + 3x_2 \end{cases}$的通解.

3．求微分方程 $y'' + 4y' = \sin 2x$ ，$y|_{x=0} = \dfrac{1}{4}$，$y'|_{x=0} = 0$ 满足初始条件的特解.

4. L 为曲线 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$，从 z 轴的正方向看 L 沿逆时针方向，求

$$\oint_L xy\mathrm{d}x + yz\mathrm{d}y + zx\mathrm{d}z .$$

本题分数	8 分
得　　分	

四、已知曲线积分 $\oint_C \frac{xdy - ydx}{2y^2 + \varphi(x)} \equiv A(A\text{为常数})$，其中函数 $\varphi(x)$ 具有连续导数，且 $\varphi(1) = 1$，C 是围绕原点一周的任一正向闭曲线，

（1）证明在任一不包含原点的单连通区域内，曲线积分 $\int_L \frac{xdy - ydx}{2y^2 + \varphi(x)}$ 与路径无关；

（2）求函数 $\varphi(x)$ 的表达式，并求 A 的值.

本题分数	8 分
得　分	

五、设 $z=f(x,y)$ 具有连续偏导数，$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$

（1）求 $\dfrac{\partial z}{\partial r}$；（2）若 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2=1$ 上恒为 1 且 $f(0,0)=0$，

求 $\lim\limits_{\varepsilon\to0+}\dfrac{1}{2\pi}\iint\limits_{\varepsilon^2\le x^2+y^2\le1}\dfrac{xf_x+yf_y}{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$.

本题分数	10 分
得　分	

六、设曲线 Γ 为 $x^2+y^2=2x(y\ge0)$ 上从 $O(0,0)$ 到 $A(2,0)$ 的一段弧，连续函数 $f(x)$ 满足：

$$f(x)=x^2+\int_\Gamma y\left(f(x)+\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x+\left(\mathrm{e}^x-xy^2\right)\mathrm{d}y\ ,$$

求 $f(x)$.

本题分数	10 分
得　　分	

七、（1）求函数 $f(x,y,z)=x+2y-2z+5$ 在 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1$ 上的最大值和最小值；

（2）证明不等式 $\frac{11}{6}\pi<\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x+2y-2z+5}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z<4\pi$.

一、 填空题

1. $f_1\phi'(x)+f_2$；　　2．$2xy+2yz+2zx;\ \{2y+2z,2x+2z,2x+2y\}$；

3．$\dfrac{x^3-y^3}{3}+x^2y-xy^2+C$；

4．$\dfrac{12}{5}\pi a^5$；5．$y'''+y''+4y'+4y=0$；

6．$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{2}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{1}^{4}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{2}f(x,y)\mathrm{d}y$.

二、 选择题

1.（D） 2．(A)　3．（B）

三、

1　解：Σ 在 xoy 面投影为 D_{xy}：$x^2+y^2\le a^2$，　$\mathrm{d}S=\dfrac{a\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$，

$$\text{原式}=\iint_{\Sigma}z\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi a^3\ .\ \ldots$$

2.　$A=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}$，　$\det\left(A-\lambda E\right)=\left(1-\lambda\right)\left(3-\lambda\right)-8=\lambda^2-4\lambda-5=0$

特征根为 $\lambda_1=-1,\quad \lambda_2=5$，特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，

解得通解为　$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-t}&\mathrm{e}^{5t}\\-\mathrm{e}^{-t}&2\mathrm{e}^{5t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=c_1\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+c_2\mathrm{e}^{5t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.\ \ldots\ldots$$

3　解：对应齐次方程的特征根为：$r_{1,2}=\pm 2i$，

对应齐次方程的通解为：$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$ ……………………

自由项 $f(x)=e^x(x^2+x-3)$，$\lambda+\omega i=2\ i$ 是特征根，

所以方程特解为：$y^*=x(A\cos 2x+B\sin 2x)$.

代入方程解得 $A=-\dfrac{1}{4}$，$B=0$，所以 $y^*=-\dfrac{x}{4}\cos 2x$ 。

故通解：$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\dfrac{x}{4}\cos 2x$ 。………………

、由初始条件可得：$C_1=\dfrac{1}{4}$，$C_2=\dfrac{1}{8}$。

故满足初始条件的特解为：$y=\dfrac{1}{4}\cos 2x+\dfrac{1}{8}\sin 2x-\dfrac{x}{4}\cos 2x$ ……….、

4　解：取Σ：$z=1-x-y,(x^2+y^2+x+y\le 1)$上侧，$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{3}},$

$$原式=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy & yz & zx \end{vmatrix} \mathrm{d}S=-\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma (x+y+z)\mathrm{d}S=-\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{3}{2}\pi \ldots.$$

四、解：(1)在不含原点的单连通区域内，任作两条起点为A终点为B的光滑曲线$C_1,C_2,$再补充一条光滑曲线C_3，是C_1+C_3和C_2+C_3成为包含原点的正向曲线，则

$\oint_{C_1+C_3}\dfrac{xdy-ydx}{2y^2+\varphi(x)}=\oint_{C_2+C_3}\dfrac{xdy-ydx}{2y^2+\varphi(x)}=A$，则$\oint_{C_1}\dfrac{xdy-ydx}{2y^2+\varphi(x)}=\oint_{C_2}\dfrac{xdy-ydx}{2y^2+\varphi(x)}.$

由$C_1,C_2,$的任意性可知，曲线积分与路径无关。……………………………

(2) 由(1)知，在$(x,y)\ne(0,0)$时，有$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y},$即

$\dfrac{\varphi(x)+2y^2-x\varphi'(x)}{(\varphi(x)+2y^2)^2}=-\dfrac{\varphi(x)+2y^2-4y^2}{(\varphi(x)+2y^2)^2}$，则$x\varphi'(x)=2\varphi(x)$，从而$\varphi(x)=x^2$. …(6 分)

取$L:x^2+2y^2=1$，取逆时针方向，则$\oint_C\dfrac{xdy-ydx}{2y^2+\varphi(x)}=\oint_C xdy-ydx=2\iint_D dxdy=\sqrt{2}\pi.$ (8 分)

五、（1）$\dfrac{\partial z}{\partial r}=\cos\theta f_x+\sin\theta f_y$；…………… (3 分)

（2）$\displaystyle\iint_{\varepsilon^2\le x^2+y^2\le 1}\frac{xf_x+yf_y}{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_\varepsilon^1\frac{r(\cos\theta f_x+\sin\theta f_y)}{r^2}r\mathrm{d}r=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_\varepsilon^1\frac{\partial z}{\partial r}\mathrm{d}r$

$$=\int_0^{2\pi}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\Big|_\varepsilon^1\mathrm{d}\theta=2\pi-\int_0^{2\pi}f(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)\mathrm{d}\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$=2\pi-2\pi f(\varepsilon\cos\theta_0,\varepsilon\sin\theta_0)\qquad \left(\theta_0\in(0,2\pi)\right)$$

于是 $\lim\limits_{\varepsilon\to0+}\dfrac{1}{2\pi}\iint\limits_{\varepsilon^2\le x^2+y^2\le1}\dfrac{xf_x+yf_y}{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma=1-\lim\limits_{\varepsilon\to0+}f(\varepsilon\cos\theta_0,\varepsilon\sin\theta_0)=1$ …………………

六、解：令 $\int_\Gamma y\left(f(x)+\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x+\left(\mathrm{e}^x-xy^2\right)\mathrm{d}y=A$，则 $f(x)=x^2+A$，记 Γ 与 $\overline{AO}$ 包围的区域为 D，由 Green 公式

$$\int_{\Gamma+\overline{AO}}y\left(f(x)+\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x+\left(\mathrm{e}^x-xy^2\right)\mathrm{d}y=\iint_D\left(y^2+f(x)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ \ldots$$

又 $\int_{\overline{AO}}y\left(f(x)+\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x+\left(\mathrm{e}^x-xy^2\right)\mathrm{d}y=0$

代入 $f(x)=x^2+A$，得

$$A=\iint_D\left(y^2+x^2+A\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\left(y^2+x^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+A\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ \ldots\ldots$$

又 $\iint_D\left(y^2+x^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{3}{4}\pi$ ………………………………………………

可得 $A=\dfrac{3}{4}\pi+\dfrac{\pi}{2}A\Rightarrow A=\dfrac{3\pi}{2(2-\pi)}\Rightarrow f(x)=x^2+\dfrac{3\pi}{2(2-\pi)}$ ……

七、（1）首先在 Ω 内部 $x^2+y^2+z^2<1$，$f(x,y,z)=x+2y-2z+5$ 没有驻点，在边界 $x^2+y^2+z^2=1$ 上，应用 Lagrange 乘数法，令 $F=x+2y-2z+5+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$，由 $\begin{cases}F_x=1+2\lambda x=0 & F_z=-2+2\lambda z=0\\ F_y=2+2\lambda y=0 & F_\lambda=x^2+y^2+z^2-1=0\end{cases}$ 可得条件极值点 $P_1\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3}\right),P_2\left(-\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$，$f(P_1)=8,f(P_2)=2$ 分别为最大值和最小值. …………………………………

（2）证明：由于在 Ω 上，$f(x,y,z)=x+2y-2z+5$ 的最大值和最小值分别为 $8,2$，因此

$$\sqrt{2}\frac{4}{3}\pi\le\iiint\limits_\Omega\sqrt{x+2y-2z+5}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\le\sqrt{8}\frac{4}{3}\pi$$

由于 $\sqrt{2}\dfrac{4}{3}\pi>\dfrac{11}{6}\pi,\sqrt{8}\dfrac{4}{3}\pi<4\pi$，因此 $\dfrac{11}{6}\pi<\iiint\limits_\Omega\sqrt{x+2y-2z+5}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z<4\pi$ ……