第六章 二次型

第二节 实二次型的标准形

1.解：$A=\begin{pmatrix}1&-1&0&3\\-1&0&0&0\\0&0&3&-1\\3&0&-1&1\end{pmatrix}$，$r(A)=4$.

2.

1) 解：$A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$,

则 $f(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&2\\-2&\lambda-5&4\\2&4&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-10)(\lambda-1)^2$，所以 A 的特征值为$\lambda_1=10$，$\lambda_2=1$（二重）。对$\lambda_1=10$, 解方程组

$$(10E-A)X=\begin{pmatrix}8&-2&2\\-2&5&4\\2&4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_1=\left(\frac{1}{2},-1,1\right)^T$，标准化得到$q_1=\frac{1}{3}(-1,-2,2)^T$. 对于$\lambda_2=1$，解方程组

$$(E-A)X=\begin{pmatrix}-1&-2&2\\-2&-4&4\\2&4&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_2=(-2,1,0)^T$ ，$\xi_3=(2,0,1)^T$，标准化得到

$$q_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0)^T,\ q_3=\frac{1}{3\sqrt{5}}(2,4,5)^T.$$

取 $T=(q_1,q_2,q_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&-\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{2}{3\sqrt{5}}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{4}{3\sqrt{5}}\\\frac{2}{3}&0&\frac{\sqrt{5}}{3}\end{pmatrix}$，则 T 为正交矩阵，且 $X=TY$, 可得二次型的标准形为：

$f=10y_1^2+y_2^2+y_3^2$, 规范形为：$f=z_1^2+z_2^2+z_3^2$.

2) 解：$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$,

则 $f(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\0&\lambda-1&0\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)^2$，所以 A 的特征值为$\lambda_1=-1$, $\lambda_2=1$（二重）.

对$\lambda_1=-1$，解方程组

$$(-E-A)X=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_2=(-1,0,1)^T$，标准化得到$q_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T$,对于$\lambda_2=1$，解方程组

$$(E-A)X=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_1=(0,1,0)^T$，$\xi_2=(1,0,1)^T$，标准化得到$q_2=(0,1,0)^T$，$q_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^T$.

取 $T=(q_1,q_2,q_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，则 T 为正交矩阵，且 $X=TY$，可得二次型的标准形为：

$f=-y_1^2+y_2^2+y_3^2$, 规范形为：$f=z_1^2+z_2^2-z_3^2$.

3.

1） 解：$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+5x_1x_2-3x_2x_3$

$$=\left(x_1+\frac{5}{2}x_2\right)^2-\frac{25}{4}x_2^2-3x_2x_3$$

$$=\left(x_1+\frac{5}{2}x_2\right)^2-\frac{25}{4}\left(x_2+\frac{6}{25}x_3\right)^2-\frac{9}{25}x_3^2,$$

则$\begin{cases}y_1=x_1+\frac{5}{2}x_2\\ y_2=x_2+\frac{6}{25}x_3\\ y_3=x_3\end{cases}$, 即 $Y=\begin{pmatrix}1 & \frac{5}{2} & 0\\ 0 & 1 & \frac{6}{25}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}X$, 有标准型 $f=y_1^2-\frac{25}{4}y_2^2-\frac{9}{25}y_3^2$, 可以逆线性变换为:

$$X=\begin{pmatrix}1 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{5}\\ 0 & 1 & -\frac{6}{25}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}Y$$

2） 解 ：$f(x_1,x_2,x_3)=2(x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_3)+4x_2^2+4x_3^2-8x_2x_3=2(x_1+x_2-x_3)^2+2x_2^2+2x_3^2-4x_2x_3=2(x_1+x_2-x_3)^2+2(x_2-x_3)^2$

则$\begin{cases}y_1=x_1+x_2-x_3\\ y_2=x_2-x_3\\ y_3=x_3\end{cases}$ 即$Y=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}X$有标准形$f=2y_1^2+2y_2^2$，可逆线性变换为

$$X=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}Y$$

第三节 实二次型的正定性

1.

1） 解：$f(x_1,x_2,x_3)=5\left(x_1^2-\frac{4}{5}x_1x_2\right)+6x_2^2+4x_3^2-4x_2x_3$

$$=5\left(x_1-\frac{2}{5}x_2\right)^2+\frac{26}{5}x_2^2+4x_3^2-4x_2x_3$$

$$=5\left(x_1-\frac{2}{5}x_2\right)^2+\frac{26}{5}\left(x_2-\frac{5}{13}x_3\right)^2+\frac{42}{13}x_3^3,$$

则有标准形 f=$5y_1^2+\frac{26}{5}y_2^2+\frac{42}{13}y_3^2$，故此二次型是正定的.

2） 解：$f(x_1,x_2,x_3)$=$10\left(x_1^2+\frac{4}{5}x_1x_2+\frac{12}{5}x_2x_3\right)+2x_2^2+x_3^2-28x_2x_3$

$$=10\left(x_1+\frac{2}{5}x_2+\frac{6}{5}x_3\right)^2+\frac{2}{5}x_2^2-\frac{67}{5}x_3^2-28x_2x_3$$

$$=10\left(x_1+\frac{2}{5}x_2+\frac{6}{5}x_3\right)^2+\frac{2}{5}(x_2-35x_3)^2+\left(490-\frac{67}{5}\right)x_3^2.$$

则有标准形$f=10y_1^2+\frac{2}{5}y_2^2+\left(490-\frac{67}{5}\right)y_3^2$,故此二次型是正定的。

2. 证：A+B 显然是对称矩阵，又因为若存在可逆矩阵 X，有$X^T(A+B)X=X^TAX+X^TBX$, 由于 A 和 B 都是正定的，则X^TAX和X^TBX正定，故$X^T(A+B)X$正定，可得 A+B 正定。

3. 证：不妨设 A 是 n 阶方阵，则设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是 A 的全部特征根，因为 A 是正定的，固有$\lambda_1>0,\lambda_2>0,\cdots,\lambda_n>0$. 又因为$\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\cdots,\frac{1}{\lambda_n}$是$A^{-1}$的全部特征根，显然也有$\frac{1}{\lambda_1}>0,\frac{1}{\lambda_2}>0,\cdots,\frac{1}{\lambda_n}>0$，则 A^{-1} 是正定的. 又因为$A^*=A^{-1}|A|$， 故 A^* 的所有特征根为$\frac{|A|}{\lambda_1},\frac{|A|}{\lambda_2},\cdots,\frac{|A|}{\lambda_n}$，由于$|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$，故有$\frac{|A|}{\lambda_1}>0,\frac{|A|}{\lambda_2}>0,\cdots,\frac{|A|}{\lambda_n}>0$，即$A^*$也正定

第四节 实对称矩阵

1.（1） 解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 2 & 0\\ 2 & \lambda-2 & 2\\ 0 & 2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5)$,所以 A 的特征值为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=5$.对$\lambda_1=-1$，解方程组

$$(-E-A)X=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 0\\ 2 & -3 & 2\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

得到一个基础解系：$\xi_1=(1\quad 2\quad 2)^T$,标准化得$q_1=\frac{1}{3}(1\quad 2\quad 2)^T$.对于$\lambda_2=2$，解方程组

$$(2E-A)X=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

得到一个基础解系：$\xi_2=(2\quad 1\quad -2)^T$，标准化得$q_2=\frac{1}{3}(2\quad 1\quad -2)^T$.对于$\lambda_3=5$，解方程

组

$$(5E\text{-}A)X=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&3&2\\0&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

得到一个基础解系：$\xi_3=(2\quad -2\quad 1)^T$，标准化得$q_3=\frac{1}{3}(2\quad -2\quad 1)^T$.

取正交矩阵$T=(q_1\quad q_2\quad q_3)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}$，使得$T^{-1}AT=A=\begin{pmatrix}-1&&\\&2&\\&&5\end{pmatrix}$.

(2) 解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-4\\-2&\lambda+2&-2\\-4&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-6)(\lambda+3)^2$,所以 A 的特征值为$\lambda_1=6$，$\lambda_2=-3$（二重）。对于$\lambda_1=6$，解方程组

$$(6E\text{-}A)X=\begin{pmatrix}5&-2&-4\\-2&8&-2\\-4&-2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

得到一个基础解系：$\xi_1=(2\quad 1\quad 2)^T$,标准化得$q_1=\frac{1}{3}(2\quad 1\quad 2)^T$.对于$\lambda_2=-3$，解方程组（-

$$(-3E\text{-}A)X=\begin{pmatrix}-4&-2&-4\\-2&-1&-2\\-4&-2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

得到一个基础解系：$\xi_2=(1\quad -2\quad 0)^T$，$\xi_3=(0\quad -2\quad 1)^T$标准化得$q_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(1\quad -2\quad 0)^T$，

$q_3=\frac{1}{3\sqrt{5}}(-4\quad -2\quad 5)^T$.

取正交矩阵$T=(q_1\quad q_2\quad q_3)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{\sqrt{5}}&-\frac{4}{3\sqrt{5}}\\\frac{1}{3}&-\frac{2}{\sqrt{5}}&-\frac{2}{3\sqrt{5}}\\\frac{2}{3}&0&\frac{\sqrt{5}}{3}\end{pmatrix}$，使得$T^{-1}AT=A=\begin{pmatrix}6&&\\&-3&\\&&-3\end{pmatrix}$.

（3） 解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&2&-2\\2&\lambda+3&-4\\-2&-4&\lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda+8)(\lambda-1)^2$,所以 A 的特征值为$\lambda_1=-8$，$\lambda_2=1$（二重）。对于$\lambda_1=-8$，解方程组

$$(-8E\text{-}A)X=\begin{pmatrix}-8&2&-2\\2&-5&-4\\-2&-4&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

得到一个基础解系：$\xi_1=\left(-\frac{1}{2},\quad -1,\quad 1\right)^T$,标准化得$q_1=\frac{1}{3}\left(-1,\quad -2,\quad 2\right)^T$.对于$\lambda_2=$

1，解方程组

$$(E\text{-}A)X=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 4 & -4\\ -2 & -4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

得到一个基础解系：$\xi_2=(-2,\quad 1,\quad 0)^T$，$\xi_3=(2,\quad 0,\quad 1)^T$ 标准化得 $q_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,\quad 1,\quad 0)^T$，$q_3=\frac{1}{3\sqrt{5}}(2,\quad 4,\quad 5)^T$.

取正交矩阵 $\mathrm{T}=(q_1\quad q_2\quad q_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}}\\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3}\end{pmatrix}$，使得 $T^{-1}AT=A=\begin{pmatrix}-8 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$.

3. 解：首先由 ξ_1，ξ_2 正交得 ${\xi_1}^T\xi_2=\mathrm{a}-1=0$，解得 a=1.因为 ξ_1 是 $\lambda_1=-1$ 的一个特征向量，ξ_2 是 $\lambda_2=1$ 的一个特征向量，假设 $\lambda_2=1$ 的另外一个特征向量是 $\xi_3=(2,\quad -1,\quad 1)^T$，则存在可逆矩阵 $\mathrm{P}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $\mathrm{P}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$,

解得 $\mathrm{A}=\mathrm{P}\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$

或者：

首先由 ξ_1,ξ_2 正交得 ${\xi_1}^T\xi_2=\mathrm{a}-1=0$，解得 a=1.因为 ξ_1 是 $\lambda_1=-1$ 的一个特征向量,ξ_2 是 $\lambda_2=1$ 的一个特征向量，分别将它们标准化得 $q_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,\quad 1,\quad -1)^T$，$q_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,\quad 1,\quad 1)^T$，假设由 $\lambda_2=1$ 的另外一个特征向量标准正交化得到的单位向量是 $q_3=(x_1,\quad x_2,\quad x_3)^T$,则由正交关系得方程组

$$\begin{cases}{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2=1,\\ x_1+x_2+x_3=0,\\ x_2+x_3=0.\end{cases}$$

解得 $x_3=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$，若 $x_3=\frac{1}{\sqrt{6}}$，此时 $q_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(2,\quad -1,\quad 1)^T$，则得正交矩阵 $\mathrm{U}=(q_1,\quad q_2,\quad q_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，此时对角矩阵为 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$,则

$$A = UAU^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

若$x_3 = -\frac{1}{\sqrt{6}}$，此时$q_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-2, \quad 1, \quad -1\right)^T$。此时正交矩阵为

$$U = \left(q_1, \quad q_2, \quad q_3\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$,最后求得的 A 也是一样的。