# 第三章 n维向量与线性方程组解的结构

## 第一节 n维向量及其线性运算

1.

## 第二节 向量组的线性相关性和线性无关性

1.

1. 能，唯一种表示：
2. 不能

2.唯一表达式为：

3.

1. 线性无关
2. 线性相关
3. 线性相关，因为4个向量，每个向量维数3维。
4. 若a,b,c均不相等，线性无关，否则人线性相关。

4.

1. 线性无关
2. 线性相关

5.解：设

整理可得

因为已知是线性无关的，故有

系数矩阵A= 则r(A)=3

故是线性相关的。

6.证：因为任意n+1个n维向量必线性相关，故线性相关，不全为零的n+1个数 若线性相关，矛盾。所以可由线性表出，表达式为一

7. 证：（反证法即得）.假设不全为零，其中某个为零，其他的不为零. 不妨假设则其均不为零，则可推出 是线性相关的，这与已知任意三个向量都线性无关矛盾,故假设不成立.由假设的任意性可知其中全不为 零.

## 第三节 向量组的秩

1.

1. 故

故一个极大线性无关组是

1. 故

故一个极大线性无关组是

2.证：由于不全为零，使得，则一定有 设，类似的由这几个等式可推出所有系数均为零故

3.证：因为向量组的秩为，则其有一个极大线性无关组，设为向量组的秩为，则其有一个极大线性无关组，设为则向量组可以由和线性表出，故.

4.且为其中r 个线性无关的向量. 设是向量组中任意一个向量，则线性相关，否则向量组的秩会大于r .所以，由定理 3.5，可由线性表出，故为向量组的一个极大线性无关组。

## 第四节 齐次线性方程组

1.

1. 于是得阶梯形方程组 方程组的一般解为：

可得方程组的一个基础解系为

通解为为常数

于是得阶梯形方程

方程组的一般解为

可得方程组的一个基础解系为：

通解为为常数

2.证：先证线性无关，设存在使得，即又因为线性无关，则可得唯一解即线性无关，由于 可知任意一个向量都可由线性表出，即也是AX=0的一个基础解系。

3.证：假定一个基础解系为，线性无关向量组与其等价，故也含有s个向量。已知向量组满足线性无关性，又因为每一个解向量都可以由线性表出，而和是等价向量组，根据传递性，每个解向量都可以由 线性表出，故也是一个基础解析。

## 第五节 非齐次线性方程组

1.

于是得阶梯型方程组取为自由变量，可得方程组的一般解为可得一个特解为一个基础解系为则方程组的通解为 其中为常数。

于是得阶梯形方程组取为自由变量，可得方程组一般解为可得一个特解为一个基础解系为

则方程组的通解为 其中为常数。

2.解：自由变量的个数为4-r(A)=2， ，显然线性无关，故齐次线性方程组的一个基础解系为.取特解,则非齐次线性方程组的通解为

3.解：

当，即或时有解；当，即或时无解。

若有解，得阶梯形方程组：取为自由变量，则方程组一般解为可得一个特解为一个基础解系为则方程组的通解为：其中为常数，或.

4.记 所以Ax=0且任一个n维向量均是其解向量那么均为基解向量即n维基向量组，即有 故成立