# 第六章 二次型

## 第二节 实二次型的标准形

1.解：*A* =，*r*(*A*) = 4.

2.

1. 解：*A* =，

则*f*(λ)== =(*λ*-10)(*λ*-1)2，所以A的特征值为=10，=1（二重）。对=10,解方程组

*X*==,

得到一个基础解系：=, 标准化得到==1，解方程组

*X*==,

得到一个基础解系：= ,=，标准化得到

=,=.

取*T*==，则T为正交矩阵，且*X*=*TY*,可得二次型的标准形为：

*f*=10++,规范形为：f=++.

1. 解：*A*=，

则*f*===，所以*A*的特征值为=-1 ,=1（二重）.对=-1，解方程组

*X*==,

得到一个基础解系：=，标准化得到=,对于=1，解方程组

*X*==,

得到一个基础解系：=，=，标准化得到=， =.

取T==，则T为正交矩阵，且*X*=*TY*, 可得二次型的标准形为： *f*=-++,规范形为：*f*=+-.

3.

1. 解：=+5-3

=--3

=--,

则，即*Y*=*X*，有标准型*f*=,可以逆线性变换为：*X*=Y

1. 解：

则即有标准形，可逆线性变换为

## 第三节 实二次型的正定性

1.

1. 解：=5+6+4-4

=5+

=5,

则有标准形*f*=5，故此二次型是正定的.

1. 解：=10

=10

=10.

则有标准形,故此二次型是正定的。

2.证：*A+B*显然是对称矩阵，又因为若存在可逆矩阵X，有,由于*A*和*B*都是正定的，则和正定，故正定，可得*A+B*正定。

3.证：不妨设*A*是n阶方阵，则设是A的全部特征根，因为A是正定的，固有.又因为是的全部特征根，显然也有,则是正定的.又因为，故的所有特征根为， 由于，故有，即也正定

## 第四节 实对称矩阵

1.（1） 解：,所以A的特征值为对解方程组

*（-E-A）X*=

得到一个基础解系：标准化得.对于解方程组

*（2E-A）X*=

得到一个基础解系：标准化得.对于解方程组

*（5E-A）X*=

得到一个基础解系：标准化得.

取正交矩阵使得

(2) 解：,所以A的特征值为（二重）。对于，解方程组

*（6E-A）X*=

得到一个基础解系：标准化得.对于解方程组*（-（-3E-A）X*=

得到一个基础解系：标准化得.

取正交矩阵使得

（3） 解：,所以A的特征值为（二重）。对于，解方程组

*（-8E-A）X*=

得到一个基础解系：标准化得.对于解方程组

*（E-A）X*=

得到一个基础解系：标准化得.

取正交矩阵使得

3. 解：首先由，正交得解得a=1.因为是的一个特征向量，是的一个特征向量，假设的另外一个特征向量是则存在可逆矩阵

解得

或者：

首先由，正交得解得a=1.因为是的一个特征向量，是的一个特征向量，分别将它们标准化得，假设由的另外一个特征向量标准正交化得到的单位向量是,则由正交关系得方程组

解得若，此时，则得正交矩阵，此时对角矩阵为,则

.

若，此时。此时正交矩阵为

,最后求得的A也是一样的。