

# 曲率半径对薄透镜成像的影响

秦 媛 蒋燊林 黎昌金\*

(内江师范学院工程学院, 四川省内江市 邮编: 641100)

**摘 要:** 将薄透镜分为六种基本模型, 即凸透镜、平凸透镜、凸平透镜、凹透镜、平凹透镜、凹平透镜。推导出六种薄透镜的物方和象方焦距公式。研究了薄透镜成像规律和作图的基本方法。研究表明, 在介质折射率大于透镜折射率时, 凸透镜、平凸透镜、凸平对光都是发散作用, 凹透镜、平凹透镜、凹平透镜对光都是会聚作用。各种透镜的焦距与折射球面的曲率半径成正比, 曲率半径越大焦距越大, 凸透镜、平凸透镜、凸平透镜对光发散作用越弱, 凹透镜、平凹透镜、凹平透镜会聚作用也越弱; 当凹面和凸面曲率半径大小相等时, 平凸(凹)、凸(凹)平透镜焦距相等且为凸(凹)透镜的二倍。

**关 键 词:** 薄透镜; 曲率半径; 焦距; 光路图

[中图分类号] O435.1

[文献标志码] A

## 0 引言

利用薄透镜成像规律研究薄透镜成像作图的方法有许多讨论<sup>[1-8]</sup>, 并且主要研究在给定了透镜类型的条件下只针对光传播介质的折射率小于透镜折射率的光学系统中点光源或者线光源的成像作图方法。但对于光传播介质的折射率大于透镜折射率的光学系统成像作图方法以及曲率半径变化对光学系统成像影响的相关研究报道甚少。本文从针对光传播介质的折射率大于透镜折射率的条件下研究曲率半径对薄透镜成像的影响, 全面研究了薄透镜成像作图的基本方法, 这对理解薄透镜成像规律和提升薄透镜成像作图能力大有裨益。

## 1. 薄透镜的物理模型

薄透镜是由两个半径分别为  $r_1$  和  $r_2$  的折射球面组成, 透镜折射率为  $n$ , 两侧折射率分别记为  $n_1$  和  $n_2$ . 若对于主光轴上一点光源  $P$ , 发出一条光线  $PA$  经薄透镜折射后, 交于主光轴上  $P'$  点, 令  $OP = -s$ ,  $O'P' = s'$ . 如图 1 所示下:

\*作者简介: 秦 媛(1991-), 女, 四川南溪区人, 内江师范学院学生。

通讯作者: 黎昌金(1965-), 男, 四川资阳人, 内江师范学院教授。邮箱 lcj2255628@126.com。

基金项目: 内江师范学院大学生科研项目(13NSD-19)。

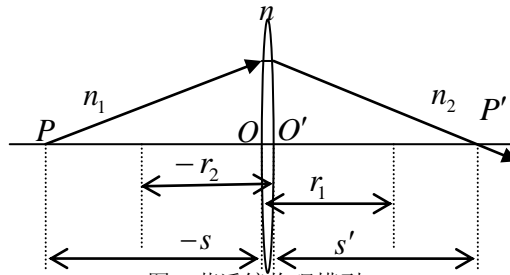


图 1 薄透镜物理模型

薄透镜折射球面的曲率半径变化时，薄透镜的形状及其成像规律将发生相应的变化。一般情况下，根据曲率半径  $r_1$ 、 $r_2$  的不同将薄透镜分为以下几种典型模型：(1) 当  $r_1 > 0$ 、 $r_2 < 0$  时，称为凸透镜；(2) 当  $r_1 \rightarrow \infty$ 、 $r_2 < 0$  时，称为平凸透镜；(3) 当  $r_2 \rightarrow \infty$ 、 $r_1 > 0$  时，称为凸平透镜；(4) 当  $r_1 < 0$ 、 $r_2 > 0$  时，称为凹透镜；(5) 当  $r_2 \rightarrow \infty$ 、 $r_1 < 0$  时，称为凹平透镜；(6) 当  $r_1 \rightarrow \infty$ 、 $r_2 > 0$  称为平凹透镜。

## 2. 薄透镜成像规律

由薄透镜的物像公式<sup>[1]</sup>

$$\frac{n_2}{s'} - \frac{n_1}{s} = \frac{n - n_1}{r_1} + \frac{n_2 - n}{r_2} \quad (1)$$

可知当光源在无限远处，即以平行光入射， $-s \rightarrow \infty$  时，得像方焦距  $f'$  的表达式

$$f' = \lim_{s \rightarrow -\infty} s' = n_2 / \left( \frac{n - n_1}{r_1} + \frac{n_2 - n}{r_2} \right) \quad (2)$$

当像在无限远处，即为平行光出射， $s' \rightarrow \infty$  时，得物方焦距  $f$  的表达式

$$f = \lim_{s' \rightarrow \infty} s = -n_1 / \left( \frac{n - n_1}{r_1} + \frac{n_2 - n}{r_2} \right) \quad (3)$$

为便于讨论，仅考虑薄透镜两边介质折射率相等且当薄透镜折射率小于介质的折射率的情况

$$n < n_0 = n_1 = n_2 \quad (4)$$

将(4)代入(2)可得

$$f' = \frac{n_0 r_1 r_2}{(n - n_0)(r_2 - r_1)} \quad (5)$$

将(4)代入(3)可得

$$f = -\frac{n_0 r_1 r_2}{(n - n_0)(r_2 - r_1)} \quad (6)$$

## 2.1 凸透镜成像规律

令该透镜曲率半径为  $r_1 = -r_2 = r > 0$ ，则该透镜为两球面对称的凸透镜，式(5)和(6)分别变为

$$f' = \frac{n_0 r}{2(n - n_0)} \quad (7)$$

$$f = -\frac{n_0 r}{2(n - n_0)} \quad (8)$$

由式(7)和(8)可知凸透镜焦距与曲率半径成正比，曲率半径越大焦距越大，凸透镜发散作用越弱，反之亦然。结合式(4)和式(7)可知  $f' < 0$ ，即入射光线为平行光线，出射光线反向延长线会聚于焦平面上  $F'$  点，像在物空间，为虚像，透镜对光有发散作用。其光路图如图 2 所示。

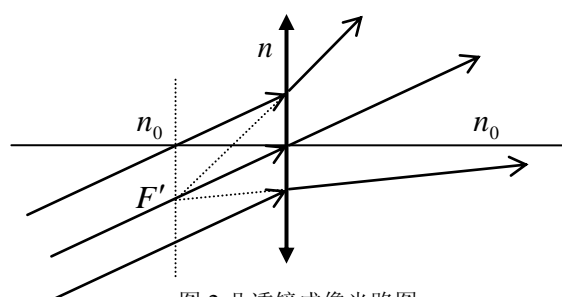


图 2 凸透镜成像光路图

结合式(4)和式(8)可知  $f > 0$ ，入射光线延长线会聚于物方焦平面上  $F$  点，入射光为会聚光束，出射光线平行光线，物在像空间，为虚物，透镜对光有发散作用，其光路图如图 3 所示。

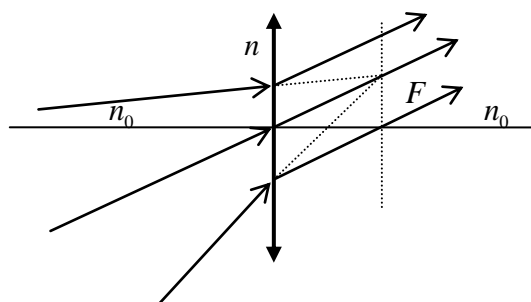


图 3 凸透镜成像光路图

由图 2 和 3 可知：在介质折射率大于透镜折射率时凸透镜对光有发散作用。

## 3.2 平凸透镜成像规律

令平凸透镜曲率半径  $r_2 = -r < 0$  则式(5)和(6)分别变为

$$f' = \frac{n_0 r}{n - n_0} \quad (9)$$

$$f = -\frac{n_0 r}{n - n_0} \quad (10)$$

由式(9)和(10)可知平凸透镜焦距与曲率半径成正比，曲率半径越大焦距越大，平凸透镜发散作用越弱，反之亦然。结合式(4)和式(9)可知  $f' < 0$ ，即入射光线为平行光线，出射光线反向延长线会聚于焦平面上  $F'$  点，像在物空间，为虚像，平凸透镜对光有也有发散作用。其光路图如图 4 所示。

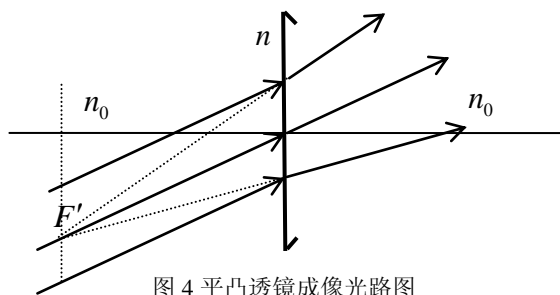


图 4 平凸透镜成像光路图

结合式(4)和式(10)可知  $f > 0$ ，入射光线延长线会聚于物方焦平面上  $F$  点，入射光为会聚光束，物在像空间，为虚物，出射光线为平行光线，透镜对光有发散作用，其光路如图 5 所示。

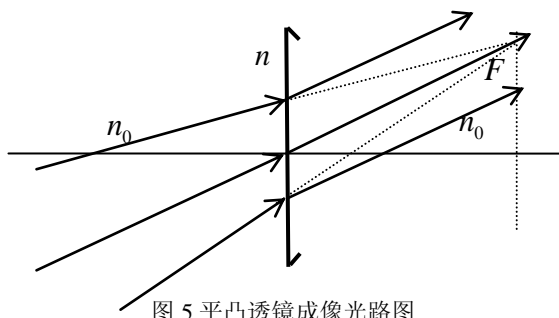


图 5 平凸透镜成像光路图

由图 4 和 5 可知，在介质折射率大于透镜折射率时平凸透镜对光有发散作用。

### 3.3 凸平透镜成像规律

令凸平透镜曲率半径  $r_1 = r > 0$  则式(5)和(6)分别变为

$$f' = \frac{n_0 r}{n - n_0} \quad (11)$$

$$f = -\frac{n_0 r}{n - n_0} \quad (12)$$

由式(11)和(12)可知凸平透镜焦距与曲率半径成正比，曲率半径越大焦距越大，凸平透镜发散作用越弱，反之亦然。结合式(4)和式(11)可知  $f' < 0$ ，即入射光线为平行光线，出射光线反向延长线会聚于焦平面  $F'$ ，像在物空间，为虚像，透镜对光有发散作用。其光路如图 6

所示。

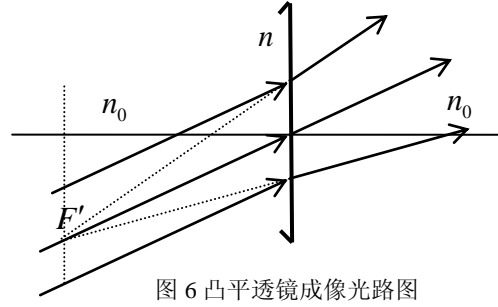


图 6 凸平透镜成像光路图

结合式(4)和式(12)可知  $f > 0$ ，入射光线延长线会聚于物方焦平面上  $F$  点，入射光为会聚光束，物在像空间，为虚物，出射光线平行光线，透镜对光有发散作用，其光路如图 7 所示。

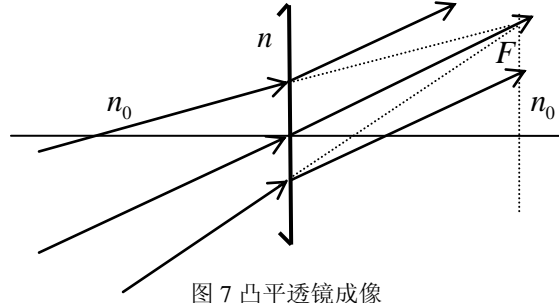


图 7 凸平透镜成像

由图 6 和 7 可知：在介质折射率大于透镜折射率时凸平透镜对光有发散作用。从式(7)-(12)可知，平凸透镜和凸平透镜的焦距相等，且为凸透镜焦距的 2 倍。

### 3.4 凹透镜成像规律

令凹透镜曲率半径  $-r_1 = r_2 = r$  则式(5)和(6)分别变为

$$f' = -\frac{n_0 r}{2(n - n_0)} \quad (13)$$

$$f = \frac{n_0 r}{2(n - n_0)} \quad (14)$$

由式(13)和(14)可知凹透镜焦距与曲率半径成正比，曲率半径越大焦距越大，凹透镜会聚作用越弱，反之亦然。结合式(4)和式(13)可知当  $f' > 0$  时出射光线会聚于焦平面一点  $F'$ ，像在像空间，为实像，透镜对光有会聚作用。其光路如图 8 所示。

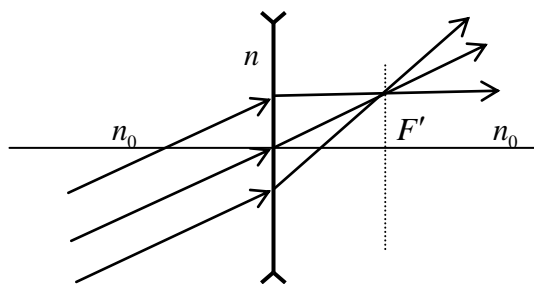


图 8 凹透镜成像光路图

结合式(4)和式(14)可知当  $f < 0$  时入射光源为焦平面上一点光源  $F$ ，即入射光为发散光束，物在物空间，为实物，透镜对光有会聚作用，其光路如图 9 所示。

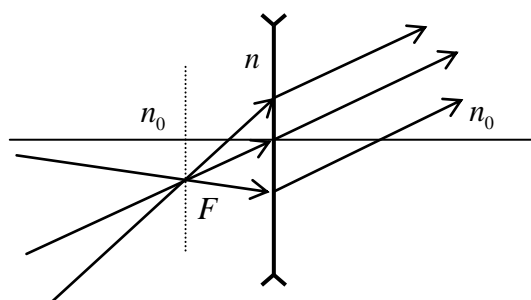


图 9 凹透镜成像光路图

由图 8 和 9 可知：在介质折射率大于透镜折射率时凹透镜对光有会聚作用。

### 3.5 平凹透镜成像规律

令平凹透镜曲率半径为  $r_2 = r > 0$  则式(5)和(6)分别变为

$$f' = -\frac{n_0 r}{n - n_0} \quad (15)$$

$$f = \frac{n_0 r}{n - n_0} \quad (16)$$

由式(15)和(16)可知平凹透镜焦距与曲率半径成正比，曲率半径越大焦距越大，平凹透镜会聚作用越弱，反之亦然。结合式(4)和式(15)可知当  $f' > 0$  时出射光线会聚于焦平面上一点  $F'$ ，像在像空间，为实像，透镜对光有会聚作用。其光路如图 10 所示。

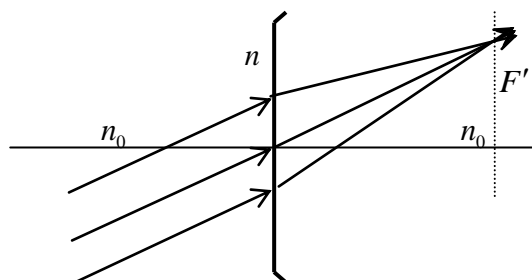


图 10 平凹透镜成像光路图

结合式(4)和式(16)可知当  $f < 0$  时入射光源为焦平面上一点光源  $F$ ，即入射光为发散光束，

物在物空间，为实物，透镜对光有会聚作用，其光路如图 11 所示。

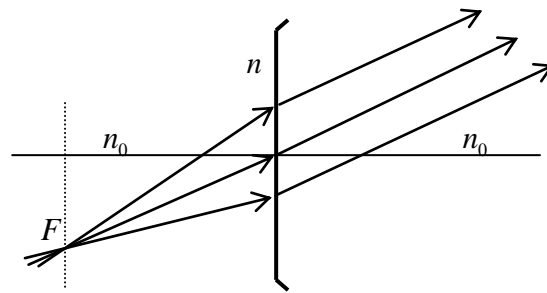


图 11 平凹透镜成像光路图

由图 10 和 11 可知：在介质折射率大于透镜折射率时平凹透镜对光有会聚作用。

### 3.6 凹平透镜成像

令凹平透镜曲率半径  $r_1 = -r < 0$ ，则式(5)和(6)分别变为

$$f' = -\frac{n_0 r}{n - n_0} \quad (17)$$

$$f = \frac{n_0 r}{n - n_0} \quad (18)$$

由式(17)和(18)可知凹平透镜焦距与曲率半径成正比，曲率半径越大焦距越大，凹平透镜会聚作用越弱，反之亦然。结合式(4)和式(17)可知当  $f' > 0$  时出射光线会聚于焦平面  $F'$  点，像在像空间，为实像，透镜对光有会聚作用。其光路如图 12 所示。

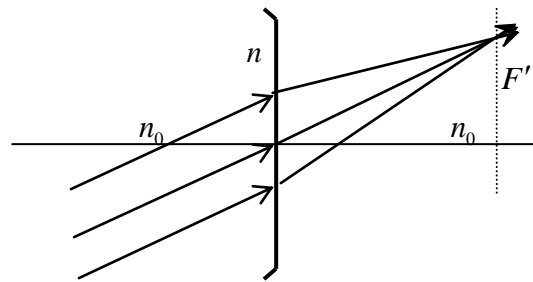


图 12 凹平透镜成像光路图

结合式(4)和式(18)可知当  $f < 0$  时入射光源为焦平面上一点光源  $F$ ，即入射光为发散光束，物在物空间，为实物，透镜对光有会聚作用，其光路如图 13 所示。

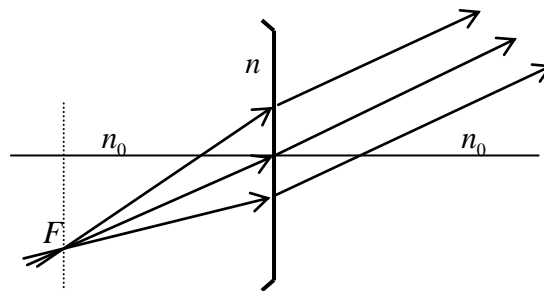


图 13 凹平透镜成像光路图

由图 12 和 13 可知：在介质折射率大于透镜折射率时凹平透镜对光有会聚作用。从式 (13)-(18)可知，平凹透镜和凹平透镜的焦距相等，且为凹透镜焦距的 2 倍。

#### 4. 结论

本文根据曲率半径的不同将薄透镜分为六种基本模型，即为凸透镜、平凸透镜、凸平透镜、凹透镜、平凹透镜、凹平透镜。由薄透镜成像公式推导出凸透镜、平凸透镜、凸平透镜、凹透镜、平凹透镜、凹平透镜的物方和像方焦距公式。研究了薄透镜成像规律和作图的基本方法。研究表明，凸透镜、平凸透镜、凸平透镜对光均起发散作用，凹透镜、平凹透镜、凹平透镜对光均起会聚作用；各种透镜的焦距与折射球面的曲率半径成正比，曲率半径越大焦距越大，凸透镜、平凸透镜、凸平透镜对光发散作用越弱，凹透镜、平凹透镜、凹平透镜会聚作用越弱，反之亦然。平凸(凹)透镜和凸(凹)平透镜的焦距相等，且为凸(凹)透镜焦距的 2 倍。

#### 参考文献：

- [1] 姚启军. 光学教程(第四版)[M]. 北京：高等教育出版社，2008:137.
- [2] 程立斌. 薄透镜在不同介质中的会聚与发散性质[J]. 大学物理，2006(02)：25.
- [3] 彭金松. 薄透镜成像作图法的讨论[J]. 河池师专学报，1999(06)：19.
- [4] 张志鸣，沈元华. 光学(第三版)[M]. 北京：高等教育出版社，2009:55-51.
- [5] 赵凯华，钟锡华. 光学(上册)[M]. 北京：北京大学出版社，1982:63.
- [6] 王佳男，许多. 薄透镜作图法成像的研究[J]. 科技论坛，15-16.
- [7] 李翠华. 薄透镜的虚物成像[J]. 焦作大学学报 1999(06)：2.
- [8] 牛振凤. 推导薄透镜成像公式的一种方法[J]. 张家口专科学校学报 2001(06)：17.

## Effect of curvature radius on the thin lens imaging

QinYuan<sup>1</sup> JiangShenLin<sup>2</sup> LiChangJin<sup>1,2</sup>

(Engineering and technology college, NeiJiang Normal University, NeiJiang, Sichuan 641100, China)

**Abstract:** Thin lenses can be grouped into six categories: Convex lens, Plano-Convex Lens, Convex-Plane Lens, Concave Lens, Plano-Concave Lens and Concave-Plane Lens. The formulas of imaging with a thin lens have been deduced, and the laws of the imaging with a thin lens and the basic ways of drawing the light paths have been studied. It is shown that when the refractive index of medium is greater than that of the lens, convex lens, Plano-Convex Lens and Convex-Plane Lens diverge the light beams and Concave Lens, Plano-Concave Lens and Concave-Plane Lens Converge the light beams. The focal length is proportional to the radius of curvature of various lenses. The bigger curvature radius of spherical surface, the bigger the focal



length is, and the weaker divergence function of the Convex lens, Plano-Convex Lens, Convex-Plane Lens, Concave Lens, Plano-Concave Lens are, and the weaker convergence function of the Concave Lens, Plano-Concave Lens and Concave-Plane Lens are. When the size of concave and convex curvature radius are equal, the focal length of Plano-convex (or Plano-Concave) lens is equal that of Convex-plate(or Convex-Plane) lens, and equal twice as much as that of convex(or concave) lens.

**Keywords:** The thin lens; Radius of curvature; focal length; Optical path