ω/β モデルが帰納法公理/超限帰納法公理図式を充足することの証明.

橋本 航気

2022 年 6 月 6 日

命題 0.1 (Simpson [1]Lemma VII.2.2). 各 L_2 文 σ（これはゲーデル数ではない）に対して，ACA_0 で次が証明可能．すべての coded ω モデル M に対し，ただひとつの付値 $f\colon \mathrm{Sub}_M(\varphi) \to \{0,1\}$ が存在する．

証明. 文の構成に関するの帰納法はまわしにくいので，少し一般的に論理式の構成に関して帰納法をまわす．手間は多いが素朴にやればできる． □

命題 0.2. 任意の ω モデルは全ての L_2 論理式の帰納法公理を充足する．つまり，以下のモデルである．

$$\{\, \varphi(0) \land \forall x(\varphi(x) \to \varphi(x+1)) \to \forall x \varphi(x) \mid \varphi \text{ は } \mathrm{L}_2\text{論理式.} \,\}$$

証明. M を ω モデルとする．もし M が可算でないなら Löwenheim–Skolem の下降定理により可算なものに帰着すればよいので，以降 M は可算とする．このとき $W \in \mathcal{P}(\omega)$ を $\{(W)_n | n \in \omega\} = M$(の二階部分) となるように取れる．任意に L_2 論理式 $\varphi(x)$ をとって固定する．σ を φ の帰納法公理を表す L_2 文とすれば，命題 0.1 より $f\colon \mathrm{Sub}_M(\sigma) \to \{0,1\}$ なる $f \in \mathcal{P}(\omega)$ が存在し，σ の任意の部分論理式 θ に，M のパラメータを任意に代入した θ について

$$\mathcal{P}(\omega) \models f(\theta) = 1 \Leftrightarrow M \models \theta$$

が成り立つ．$M \models \varphi(0) \land \forall x(\varphi(x) \to \varphi(x+1))$ とすれば，$\mathcal{P}(\omega) \models f(\varphi(0)) \land \forall x(f(\varphi(x)) \to f(\varphi(x+1)))$[*1]であるので，$\mathcal{P}(\omega)$ における（Σ^0_0）帰納法で $\mathcal{P}(\omega) \models \forall x f(\varphi(x))$ ，すなわち付値の定義から $\mathcal{P}(\omega) \models f(\forall x \varphi(x))$ を得る．よって $M \models \forall x \varphi(x)$ が成り立つ． □

β モデルはより強く，すべての超限帰納法公理のモデルになる．β モデルや coded β モデルの定義，基本的性質は [1] の VII 章を見て欲しい．

[*1] ここで f の中の φ はゲーデル数である．つまり，例えばここで $f(\varphi(0))$ と書いているのは，$f(\mathrm{Substitute}(\ulcorner\varphi\urcorner, 0))$ である．ただし Substitute はゲーデル数として表された論理式の特定の変数に（変数や定数の）代入を行う関数であり，それは再帰的内包公理のもとで作ることができる．実際に定義をきちんと書き下す（＝プログラムを書き下し，それが正しく実装されているかを証明する）ことは手間だが，そのような関数が作れることは容易にわかるだろう．

命題 0.3. 任意の β モデルは全ての L_2 論理式の超限帰納法公理を充足する．つまり，以下のモデルである．ただし WO(X) は「X は整列順序のコードである」を意味する Π^1_1 論理式である．[*2]

$$\{\, \mathrm{WO}(X) \to [\forall j(\forall i(i <_X j \to \varphi(i)) \to \varphi(j)) \to \forall j \varphi(j)] \mid \varphi \text{ は } \mathrm{L}_2\text{論理式.} \,\}$$

証明. 命題 0.2 と同様の方針で示せる．β の条件は $\mathcal{P}(\omega) \models \mathrm{WO(X)} \Leftrightarrow M \models \mathrm{WO(X)}$ に使う．

□

参考文献

[1] S. G. Simpson, Subsystems of Second Order Arithmetic, Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, 1999.

[*2] その形式的定義は [1] の V 章を見よ．