極限順序数が絡む和

橋本 航気

2021 年 9 月 15 日

概要

任意の順序数 α, γ について γ が極限順序数のときに $\alpha + \gamma = \sup_{\beta<\gamma}(\alpha+\beta)$ が成り立つことはいたるところで紹介されているが、almost everywhere でその証明は省略されている。この pdf はその完全な証明を与えることを目的に書いた。

基本的にキューネン基礎論講義の定義に従う。例えば全順序といえば三分律・非反射律・推移律を指す。また ON は順序数全体の真クラスを表す。

定義 1. $(X, <)$ を整列集合とする。$x \in X$ について、

$$\{y \in X | x < y\}$$

が空でないとき、その最小元（整列性より存在する）を $S(x)$ とかく。

命題 2. 直前の表記法は順序数の後続者関数の抽象化になっている。すなわち、α を順序数としたとき、上で定めた S は、$S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ を満たす。

証明. まず、本来の順序数の後続者関数を S' と書くことにすると、$\gamma < S'(\gamma)$ と $\gamma < S'(\beta) \leftrightarrow \gamma \leq \beta$ が任意の順序数 β, γ で成り立つ。よって $S(\alpha)$ の最小性より $S(\alpha) \leq S'(\alpha)$ は明らかで、もし $S(\alpha) < S'(\alpha)$ なら $S(\alpha) \leq \alpha$ となるが、これは矛盾。よって $S(\alpha) = S'(\alpha)$ □

命題 3. X, Y を同型な整列集合とし、$f : X \to Y$ を同型写像とする。このとき、任意の $x \in X$ について、もし $S(x) \in X$ ならば $S(f(x)) \in Y$ であり、さらに

$$S(f(x)) = f(S(x))$$

が成り立つ。

証明. 簡単なのでとりあえず省略（気が向いたら書くかも）。 □

命題 4. X, Y を同型な全順序集合とし、$f : X \to Y$ を同型写像とする。このとき、任意の $A(\neq \varnothing) \in X$ について、もし $\sup(A) \in X$ ならば $\sup(f(A)) \in Y$ であり、さらに

$$\sup(f(A)) = f(\sup(A))$$

が成り立つ。

証明. 簡単なのでとりあえず省略（気が向いたら書くかも）。 □

補題 5. $\alpha \neq 0, \gamma$ を順序数とし、

$$F : \{0\} \times \alpha \cup \{1\} \times \gamma \to \alpha + \gamma$$

が同型であるとする。このとき、任意の $\delta < \alpha$ について $F(0, \delta) = \delta$ が成り立つ。

証明. 先の命題からいえる。とりあえず省略。 □

定理 6. 任意の順序数 α, γ について、γ が極限順序数のとき、以下が成り立つ。

$$\alpha + \gamma = \sup_{\beta<\gamma}(\alpha + \beta)$$

証明.

$$0 + \gamma = \gamma = \sup_{\beta<\gamma}(\beta) = \sup_{\beta<\gamma}(0 + \beta)$$

より $\alpha = 0$ なら明らかなので $\alpha > 0$ と固定しておき、以下のクラスに関する超限帰納法で示す。

$$\{\gamma \in ON | \gamma \text{は極限順序数で、かつ} \alpha + \gamma \neq \sup_{\beta<\gamma}(\alpha + \beta)\} \tag{1}$$

(1) が空であることを背理法で示す。もし仮に空でなければその最小元 γ がとれる。次に

$$F : \{0\} \times \alpha \cup \{1\} \times \gamma \to \alpha + \gamma$$

を同型とし、集合 X を

$$X = \{\beta < \gamma | F(\langle 1, \beta \rangle \neq \alpha + \beta)\}$$

とおく。$X = \varnothing$ を背理法で示すために $\varepsilon = \min(X)$ とおいたとき（整列性からとれる）、まず $\varepsilon \neq 0$ であることを示そう。$\alpha = S(\delta)$ だとすると、

$$\begin{aligned}
F(\langle 1, 0 \rangle &= F(S(\langle 0, \delta \rangle))) \\
&= S(F(\langle 0, \delta \rangle)) && (\because \text{命題 } 3) \\
&= S(\delta) && (\because \text{補題 } 5) \\
&= \alpha = \alpha + 0
\end{aligned}$$

であり、α が極限順序数のときは

$$\begin{aligned}
F(\langle 1, 0 \rangle &= F(\sup\{\langle 0, \delta \rangle | \delta \in \alpha\}) \\
&= \sup\{F(\langle 0, \delta \rangle) | \delta \in \alpha\} && (\because \text{命題 } 4) \\
&= \sup\{\delta | \delta \in \alpha\}) && (\because \text{補題 } 5) \\
&= \alpha = \alpha + 0
\end{aligned}$$

となり、いずれにせよ $0 \notin X$ であるので $\varepsilon > 0$ だと分かる。次に $\varepsilon = S(\beta)$ だとすると

$$
\begin{aligned}
F(\langle 1, \varepsilon \rangle &= F(S(\langle 1, \beta \rangle))) \\
&= S(F(\langle 1, \beta \rangle)) && (\because \text{命題 } 3) \\
&= S(\alpha + \beta) && (\because \varepsilon\text{の最小性}) \\
&= (\alpha + \beta) + 1 = \alpha + S(\beta)
\end{aligned}
$$

である。この時点で $\gamma \neq \omega$ が確定し、最後に ε が極限順序数のときも

$$
\begin{aligned}
F(\langle 1, 0 \rangle) &= F(\sup\{\langle 1, \beta \rangle \,|\beta \in \varepsilon\}) \\
&= \sup\{F(\langle 1, \beta \rangle)|\beta \in \varepsilon\}) && (\because \text{命題 } 4) \\
&= \sup\{\alpha + \beta | \beta \in \varepsilon\} && (\because \varepsilon\text{の最小性}) \\
&= \alpha + \varepsilon && (\because \gamma\text{の最小性})
\end{aligned}
$$

となり $\varepsilon \in X$ に反する。したがって $X = \varnothing$ だと分かる。さて、それではこの γ について

$$
\alpha + \gamma = \sup_{\beta < \gamma} (\alpha + \beta) \tag{2}
$$

を導こう。ただし、($\geq$) は $\sup_{\beta<\gamma}(\alpha + \beta) = \cup_{\beta<\gamma}(\alpha + \beta)$ から明らかなので逆を示すために $x \in \alpha + \gamma$ を任意に取る。

$F^{-1}(x) \in \{0\} \times \alpha$ のとき: $\delta < \alpha$ で $F^{-1}(x) = \langle 0, \delta \rangle$ を満たすものがあるので、補題 5 より $F^{-1}(x) = F^{-1}(\delta)$ となり、単射性から $x = \delta \in \alpha = \alpha + 0 \in \sup_{\beta<\gamma}(\alpha + \beta)$。

$F^{-1}(x) \in \{1\} \times \gamma$ のとき: $\beta < \gamma$ で $F^{-1}(x) = \langle 1, \beta \rangle$ を満たすものがあるので、$X = \varnothing$ より $x = F(F^{-1}(x)) = F(\langle 1, \beta \rangle) = \alpha + \beta$ となり、$x \in \alpha + (\beta + 1) \in \sup_{\beta<\gamma}(\alpha + \beta)$ が成り立つ。

したがって (2) が成り立つが、これは γ が (1) から取ってきたものであるという仮定に反する。したがって証明が完了した。 $\square$

参考文献

[1] ケネス・キューネン, “キューネン数学基礎論講義”, 藤田博司 訳, 日本評論社, 2016.