記号の追加について

橋本 航気

2021 年 10 月 19 日

目次

1　記号の追加について

定理 1. （同型定理）$\mathcal{L}$ を一階の言語、M, N を $\mathcal{L}$ 構造とし、$h : M \to N$ を同型写像とする。このとき、任意の $\mathcal{L}$ 論理式 $\varphi(x_1, ..., x_n)$ と任意の $a_1, ..., a_n \in |M|$ に対して以下が成り立つ。

$$M \models \varphi(a_1, ..., a_n) \Longleftrightarrow N \models \varphi(h(a_1), ..., h(a_n))$$

定義 2. いくつかの略記を導入する．以下の表では t は言語 $\mathcal{L}_A$ の項である．この上の表に現れ

略記	正式
$\forall x < t(...)$	$\forall x(x < t \to ...)$
$\forall x \leq t(...)$	$\forall x(x \leq t \to ...)$
$\exists x < t(...)$	$\exists x(x < t \wedge ...)$
$\exists x \leq t(...)$	$\exists x(x \leq t \wedge ...)$

るような量化詞のことを有界な量化詞という．つまり，束縛されている変数 x が，ある項 t で $x < t$(または $x \leq t$) となっているとき，その x を束縛する量化詞は有界である．次に $\mathcal{L}_A$ 論理式が Δ_0 であるとは，論理式その論理式に含まれる量化詞がすべて有界であることをいう．

定義 3. ある論理式が Σ_{n+1} であるとは，それが $\varphi \in \Pi_n$ によって $\exists \overline{x} \varphi(\overline{x}, \overline{y})$ の形をしていることと定義する．ある論理式が Π_{n+1} であるとは，それが $\varphi \in \Sigma_n$ によって $\forall \overline{x} \varphi(\overline{x}, \overline{y})$ の形をしていることと定義する．

この定義から，ある論理式が Σ_n であるとは，それが次のような形をしていること同値である．

$$\exists \overline{x}_1 \forall \overline{x}_2 \exists \overline{x}_3 ... Q \overline{x}_n \varphi(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n, \overline{y})$$

ただしここで φ に含まれるすべての量化は有界であり，Q は n が奇数なら $\exists$，偶数なら $\forall$ である．同様に，ある論理式が Π_n であるとは，それが次のような形をしていること同値である．

$$\forall\overline{x}_1\exists\overline{x}_2\forall\overline{x}_3...Q\overline{x}_n\varphi(\overline{x}_1,\overline{x}_2,...,\overline{x}_n,\overline{y})$$

ただしここで φ に含まれるすべての量化は有界であり，Q は n が奇数なら $\forall$，偶数なら $\exists$ である．ここで量化のひとかたまりが空であることも許容する．そのため，例えば任意の Π_n 論理式は自動的に Π_{n+1} であり Σ_{n+1} でもある．

また，ある論理式 $\theta(\overline{x})$ が，考えているモデル M や理論 T である Σ_n（あるいは Π_n）論理式 $\varphi(\overline{x})$ と同値であるならば，すなわち

$$T\vdash\forall\overline{x}(\theta(\overline{x})\leftrightarrow\varphi(\overline{x}))$$

もしくは

$$M\models\forall\overline{x}(\theta(\overline{x})\leftrightarrow\varphi(\overline{x}))$$

であるならば，その論理式 $\theta(\overline{x})$ もまた Σ_n（あるいは Π_n）であるという．ただし、あるモデルで同値なのか，はたまたある理論で同値なのかを区別することが重要であるときは，とくに $\Sigma_n(T),\Pi_n(T),\Sigma_n(M),\Pi_n(M)$ と表記することによって区別を付ける．

定義 4. ある論理式が Δ_n であるとは，それがある Π_n 論理式と Σ_n 論理式の両方と同値であることと定義する．

前と同様に，これらの同値がある固定したモデルでなのか，理論でなのかを指し示すために，必要ならば $\Delta_n(T),\Delta_n(M)$ と表記する．

また、$\mathcal{L}_A$ を含む言語 $\mathcal{L}$ についても Σ_n、Π_n、Δ_n 論理式というものを自然な方法で定義しておく。すなわち、$\mathcal{L}$ 論理式が Δ_0 であるとは、その論理式に現れる量化がすべて有界（t を $\mathcal{L}$ の項として $\forall x<t$ などの形）であることをいう。その他 Σ_n などについても同様である。

補題 5. $\mathcal{L}$ を $\mathcal{L}_A$ を含む一階の言語、T を $\mathcal{L}$ の理論とする。いま $T\vdash\forall\overline{x}\exists!y\varphi(\overline{x},y)$ となる $\mathcal{L}$ の Σ_1 論理式 φ が存在したとする。このとき、新しい関数記号 f を追加して言語 $\mathcal{L}'(=\mathcal{L}\cup\{f\})$ を得る。そして言語 $\mathcal{L}'$ の理論 T' を以下のように定める（この T' を T の定義による拡張という）。

$$T'=T\cup\{\forall\overline{x},y(\varphi(\overline{x},y)\leftrightarrow f(\overline{x})=y)\}$$

このとき、$\mathcal{L}'$ の各原子論理式 $\theta(\overline{x})$ に対し、以下を満たす $\mathcal{L}$ の（つまり f を含まない）Σ_1 論理式 $\theta^{\Sigma_1}(\overline{x})$ と Π_1 論理式 $\theta^{\Pi_1}(\overline{x})$ が存在する。

$$T'\vdash\forall\overline{x}(\theta(\overline{x})\leftrightarrow\theta^{\Sigma_1}(\overline{x})\leftrightarrow\theta^{\Pi_1}(\overline{x}))$$

証明. そもそも $\theta(\overline{x})$ が新しい関数記号 f を含まない論理式なら $\theta^{\Sigma_1}(\overline{x})=\theta^{\Pi_1}(\overline{x})=\theta(\overline{x})$ とすればよいので、そうでないとする。

まず $\mathcal{L}$ の Σ_1 論理式 $\theta^{\Sigma_1}(\overline{x})$ を構成しよう。$\theta(\overline{x})$ は原子論理式なので，n 項関係記号 $R(\in \mathcal{L})$ と $\mathcal{L}'$ の項 $t_1(\overline{x}), ..., t_n(\overline{x})$ によって $R(t_1(\overline{x}), ..., t_n(\overline{x}))$ と書ける．すると明らかに $R(t_1(\overline{x}), ..., t_n(\overline{x}))$ は次と T' 上で同値。

$$\exists y_1, ..., y_n(y_1 = t_1(\overline{x}) \land \cdots \land y_n = t_n(\overline{x}) \land R(y_1, ..., y_n)) \tag{1}$$

次に、各 i について $y_i = t_i(\overline{x})$ を f を含まない Σ_1 論理式に変形する再帰的論理式変形操作 F^Σ を以下で定義する。

base:　$y = t(\overline{x})$ が f を含まないなら、$F^\Sigma(y = t(\overline{x}))$ は $y = t(\overline{x})$ とする。

recursion:　$y = t(\overline{x})$ が f を含むとする。まず以下のように項の木 U を構成する。

項 $t(\overline{x})$ は $\mathcal{L}'$ の m 変数関数記号 g_0 と部分項 $s_1(\overline{x}), ..., s_m(\overline{x})$ によって

$$g_0(s_1(\overline{x}), ..., s_m(\overline{x}))$$

と書けて、これを根ノードとする。次に、各 $s_i(\overline{x}), ..., s_m(\overline{x})$ をその子ノードとする。$s_i(\overline{x})$ が $\mathcal{L}'$ の k 変数関数記号 g_1 と項 $u_1(\overline{x}), ..., u_k(\overline{x})$ によって

$$s_i(\overline{x}) \equiv g_1(u_1(\overline{x}), ..., u_k(\overline{x}))$$

と書ければ、各 $u_j(\overline{x})$ を $s_i(\overline{x})$ の子とする。そうでなく $s_i(\overline{x})$ が変数や定数なら子を持たないとする（つまり $s_1(\overline{x})$ は葉になる）。この操作を続けていくことで葉が定数もしくは変数となり、葉でないノードは一つ以上の関数記号を含む項となるような木 U が得られる。

次に、一番外側の関数記号が f である項のノードを探索対象として設定し、木 U に横型探索を実行する。そして探索対象が見つかる順にそのノードに自然数を昇順で割り当てる。ふられた番号がもっとも大きい（横型探索によって最後にみつかる）ノード N を $f(v_1(\overline{x}), ..., v_n(\overline{x}))$ とおく。その N の先祖ノード[*1]すべてにおける $f(v_1(\overline{x}), ..., v_n(\overline{x}))$ をこれまで使われていない変数 z で置き換え、N を根とする U の部分木も z で置き換えることによって新たに木 U' を得る。その U' の根ノードの項を $t'(\overline{x}, z)$ とおき、

$$F^\Sigma(y = t(\overline{x})) \text{ を } \exists z(F^\Sigma(y = t'(\overline{x}, z)) \land \varphi(v_1(\overline{x}), ..., v_n(\overline{x}), z)) \tag{2}$$

と定める。

Claim 任意の $\mathcal{L}'$ の項 $t(\overline{x})$ に対し、$F^\Sigma(y = t(\overline{x}))$ は $\mathcal{L}$ の Σ_1 論理式であり、さらに

$$T' \vdash \forall \overline{x}, y(y = t(\overline{x}) \leftrightarrow F^\Sigma(y = t(\overline{x})))$$

これを項 $t(\overline{x})$ に含まれる f の数による帰納法で示す。まず一つも含まれないなら明らか。次に f が $t(\overline{x})$ に $k+1$ 個含まれているとすると、F^Σ の定義よりある論理式 $y = t'(\overline{x}, z)$ によって $F^\Sigma(y = t(\overline{x}))$ は

$$\exists z(F^\Sigma(y = t'(\overline{x}, z)) \land \varphi(v_1(\overline{x}), ..., v_n(\overline{x}), z))$$

[*1] N の親と N の親の親、N の親の親の親、$\cdots$　を指す

となるが、この論理式中の $y = t'(\overline{x}, z)$ に含まれる f の数は k 個であるので、帰納法の仮定から $F^{\Sigma}(y = t'(\overline{x}, z))$ は $\mathcal{L}$ の Σ_1 論理式であり、また F^{Σ} の定義より $\varphi(v_1(\overline{x}), ..., v_n(\overline{x}), z)$ の中には一つも f は出現しないので $F^{\Sigma}(y = t(\overline{x}))$ が $\mathcal{L}$ の Σ_1 論理式になることはよい。同値性は以下（$T' \vdash$ や自由変数の量化は省略してある）。

$$\begin{aligned} y = t(\overline{x}) &\leftrightarrow \exists z(y = t'(\overline{x}, z) \land z = f(v_1(\overline{x}), ..., v_n(\overline{x}))) \\ &\leftrightarrow \exists z(y = t'(\overline{x}, z) \land \varphi(v_1(\overline{x}), ..., v_n(\overline{x}), z)) \\ &\leftrightarrow \exists z(F^{\Sigma}(y = t'(\overline{x}, z)) \land \varphi(v_1(\overline{x}), ..., v_n(\overline{x}), z)) \qquad (\because \text{帰納法の仮定}) \\ &\leftrightarrow F^{\Sigma}(y = t(\overline{x})) \end{aligned}$$

以上から、$\theta^{\Sigma_1}(\overline{x})$ は

$$\exists y_1, ..., y_n(F^{\Sigma}(y_1 = t_1(\overline{x})) \land \cdots \land F^{\Sigma}(y_n = t_n(\overline{x})) \land R(y_1, ..., y_n)) \tag{3}$$

と定義すればよいことがわかる。

次に $\theta^{\Pi_1}(\overline{x})$ について考える。明らかに $\theta(\overline{x}) \equiv R(t_1(\overline{x}), ..., t_n(\overline{x}))$ は次と T' 上で同値。

$$\forall y_1, ..., y_n((y_1 = t_1(\overline{x}) \land \cdots \land y_n = t_n(\overline{x})) \to R(y_1, ..., y_n)) \tag{4}$$

したがって Claim より $\theta^{\Pi_1}(\overline{x})$ は

$$\forall y_1, ..., y_n((F^{\Sigma}(y_1 = t_1(\overline{x})) \land \cdots \land F^{\Sigma}(y_n = t_n(\overline{x}))) \to R(y_1, ..., y_n)) \tag{5}$$

と定義すればよいことがわかる。 □

次に先の補題 5 を Δ_0 論理式まで拡張したいのだが、補題の素朴なアナロジーでは有界量化の中に非有界量化が出てくるので、この場合は理論に一定の条件を課す必要がある。

定義 6. $\mathcal{L}$ を $\mathcal{L}_A$ を含む言語とし、$\varphi(x, \overline{y}, \overline{z})$ を $\mathcal{L}$ 論理式とする。ここで φ の採集公理 $B\varphi$[*2]とは、以下の文を指す。

$$\forall \overline{z}, t(\forall x < t \exists \overline{y} \varphi(x, \overline{y}, \overline{z}) \to \exists s \forall x < t \exists \overline{y} < s \varphi(x, \overline{y}, \overline{z}))$$

そして次の $\mathcal{L}$ の理論を $Coll(\mathcal{L})$ とよぶ。

$$PA^{-} + \{B\varphi | \varphi \text{ は } \mathcal{L} \text{ 論理式 }\}$$

$Coll(\mathcal{L})$ の論理式の階層を Σ_n に制限して得られる以下の理論を $Coll_n(\mathcal{L})$ と表記する.

$$PA^{-} + \{B\varphi | \varphi \text{ は } \mathcal{L} \text{ の} \Sigma_n \text{論理式}^{*3}\}$$

言語が文脈から明らかな場合は $Coll(\mathcal{L})$ を単に $Coll$ とかく。

[*2] 厳密には $x, \overline{y}$ を明示して $B_{x,\overline{y}}\varphi$ とかくべきであるが，$B\varphi$ と表記しても混乱することはないだろう.
[*3] ここは Σ_n の形をした論理式のことだと考えてよい。つまり、形は Σ_n でないが、述語論理の公理などによって変形すれば Σ_n になるといった論理式は排除してよい。結局それらは $Coll_n$ に含意されているからである。

注 7. $B\varphi$ の'逆',

$$\forall\overline{z},t(\exists s\forall x<t\exists\overline{y}<s\varphi(x,\overline{y},\overline{z}))\to\forall x<t\exists\overline{y}\varphi(x,\overline{y},\overline{z}))$$

はすべての $\mathcal{L}$ 構造で成り立つ.

命題 8. $\mathcal{L}$ を $\mathcal{L}_A$ を含む言語とする。$n\in\mathbb{N}$ とし，$\theta(x,\overline{y})$ を $\mathcal{L}$ のΣ_n 論理式、$\psi(x,\overline{y})$ を $\mathcal{L}$ の Π_n 論理式とし，$t(\overline{y})$ を $\mathcal{L}$ の項とする．このとき，論理式 $\forall x<t(\overline{y})\theta(x,\overline{y})$ と $\exists x<t(\overline{y})\psi(x,\overline{y})$ はそれぞれ $\Sigma_n(Coll_n(\mathcal{L}))$，$\Pi_n(Coll_n(\mathcal{L}))$ である．したがって $\Sigma_n(Coll_n(\mathcal{L}))$，$\Pi_n(Coll_n(\mathcal{L}))$，$\Delta_n(Coll_n(\mathcal{L}))$ は任意の $n\in\mathbb{N}$ で有界量化に閉じる.*4

補題 9. $\mathcal{L}$ を $\mathcal{L}_A$ を含む一階の言語、T を $\mathcal{L}$ の理論とする。いま $T\vdash\forall\overline{x}\exists!y\varphi(\overline{x},y)$ となる $\mathcal{L}$ の Σ_1 論理式 φ が存在したとし、新しい関数記号 f を $\mathcal{L}$ に追加して言語 $\mathcal{L}'(=\mathcal{L}\cup\{f\})$ を得る。そして以下で定める言語 $\mathcal{L}'$ の理論 T' が $T'\vdash Coll_1(\mathcal{L})$*5を満たすと仮定する。

$$T'=T\cup\{\forall\overline{x},y(\varphi(\overline{x},y)\leftrightarrow f(\overline{x})=y)\}$$

このとき、$\mathcal{L}'$ の各 Δ_0 論理式 $\theta(\overline{x})$ に対し、以下を満たす $\mathcal{L}$ の Σ_1 論理式 $\theta^{\Sigma_1}(\overline{x})$ と Π_1 論理式 $\theta^{\Pi_1}(\overline{x})$ が存在する。

$$T'\vdash\forall\overline{x}(\theta(\overline{x})\leftrightarrow\theta^{\Sigma_1}(\overline{x})\leftrightarrow\theta^{\Pi_1}(\overline{x}))$$

証明. 論理式の複雑さに関する帰納法によって示す。原子論理式については補題 5 よりよい。帰納ステップにおいて本質的なのは有界量化である。$t(\overline{y})$ を言語 $\mathcal{L}'$ の項、$\theta(\overline{x})$ を $\mathcal{L}'$ の Δ_0 論理式とする。このとき

$$\begin{aligned}\forall\overline{x}<t(\overline{y})\theta(\overline{x},\overline{y})&\leftrightarrow\exists z(z=t(\overline{y})\wedge\forall\overline{x}<z\theta(\overline{x},\overline{y})))\\&\leftrightarrow\exists z((z=t(\overline{y}))^{\Sigma_1}\wedge\forall\overline{x}<z\theta^{\Sigma_1}(\overline{x},\overline{y}))\qquad(\because\text{補題 5と帰納法の仮定})\end{aligned}$$

となる。ここで $\forall\overline{x}<z\theta^{\Sigma_1}(\overline{x},\overline{y})$ は $\Sigma_1(Coll_1(\mathcal{L}))$ であるので、$\exists z((z=t(\overline{y}))^{\Sigma_1}\wedge\forall\overline{x}<z\theta^{\Sigma_1}(\overline{x},\overline{y}))$ は f を含まない $\Sigma_1(T')$ 論理式である。また、

$$\begin{aligned}\forall\overline{x}<t(\overline{y})\theta(\overline{x},\overline{y})&\leftrightarrow\forall\overline{x}(\overline{x}<t(\overline{y})\to\theta(\overline{x},\overline{y}))\\&\leftrightarrow\forall\overline{x}((z<t(\overline{y}))^{\Sigma_1}\to\theta^{\Pi_1}(\overline{x},\overline{y}))\qquad(\because\text{補題 5と帰納法の仮定})\end{aligned}$$

となるので有界任意量化についてはよい。次に有界存在量化についても同様にみていくと、

$$\begin{aligned}\exists\overline{x}<t(\overline{y})\theta(\overline{x},\overline{y})&\leftrightarrow\forall z(z=t(\overline{y})\to\exists\overline{x}<z\theta(\overline{x},\overline{y})))\\&\leftrightarrow\forall z((z=t(\overline{y}))^{\Sigma_1}\to\exists\overline{x}<z\theta^{\Pi_1}(\overline{x},\overline{y}))\qquad(\because\text{補題 5と帰納法の仮定})\end{aligned}$$

となり、$\exists\overline{x}<z\theta^{\Pi_1}(\overline{x},\overline{y})$ は $\Pi_1(Coll_1(\mathcal{L}))$ であるので、$\forall z((z=t(\overline{y}))^{\Sigma_1}\to\exists\overline{x}<z\theta^{\Pi_1}(\overline{x},\overline{y}))$ は f を含まない $\Pi_1(T')$ 論理式である。また、

$$\begin{aligned}\exists\overline{x}<t(\overline{y})\theta(\overline{x},\overline{y})&\leftrightarrow\exists\overline{x}(\overline{x}<t(\overline{y})\wedge\theta(\overline{x},\overline{y}))\\&\leftrightarrow\exists\overline{x}((z<t(\overline{y}))^{\Sigma_1}\wedge\theta^{\Sigma_1}(\overline{x},\overline{y}))\qquad(\because\text{補題 5と帰納法の仮定})\end{aligned}$$

*4 この命題を繰り返し適用することによって $\forall\overline{x}<t(\overline{y})\theta(\overline{x},\overline{y})$ もまた $\Sigma_n(Coll_n(\mathcal{L}))$ になる。

*5 集合として含まずとも、証明可能ならばよい.

となる。等号付きの有界量化の場合も同様。 □

系 10. $\mathcal{L}$ を $\mathcal{L}_A$ を含む一階の言語、T を $\mathcal{L}$ の理論とする。いま $T \vdash \forall\overline{x}\exists!y\varphi(\overline{x}, y)$ となる $\mathcal{L}$ の Σ_1 論理式 φ が存在したとし、新しい関数記号 f を $\mathcal{L}$ に追加して言語 $\mathcal{L}'(= \mathcal{L} \cup \{f\})$ を得る。そして以下で定める言語 $\mathcal{L}'$ の理論 T' が $T' \vdash Coll_1(\mathcal{L})$ を満たすと仮定する。

$$T' = T \cup \{\forall\overline{x}, y(\varphi(\overline{x}, y) \leftrightarrow f(\overline{x}) = y)\}$$

このとき、$n \geq 1$ について $\mathcal{L}'$ の各 Σ_n 論理式 $\theta(\overline{x})$ と Π_n 論理式 $\psi(\overline{x})$ に対し、以下を満たす $\mathcal{L}$ の Σ_n 論理式 $\theta^{\Sigma_n}(\overline{x})$ と Π_n 論理式 $\psi^{\Pi_n}(\overline{x})$ が存在する。

$$T' \vdash \forall\overline{x}(\theta(\overline{x}) \leftrightarrow \theta^{\Sigma_n}(\overline{x})), \quad T' \vdash \forall\overline{x}(\psi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi^{\Pi_n}(\overline{x}))$$

証明. $n \in \mathbb{N}$ による帰納法によって示す。

base: $\mathcal{L}$ の任意の Σ_1 論理式は、ある Δ_0 論理式 $\psi(\overline{x}, \overline{y})$ によって $\exists\overline{y}\psi(\overline{x}, \overline{y})$ と書ける。すると補題 9 から、ある $\mathcal{L}_A$ の Σ_1 論理式 $\psi^{\Sigma_1}(\overline{x}, \overline{y})$ で

$$T' \vdash \forall\overline{x}, \overline{y}(\psi(\overline{x}, \overline{y}) \leftrightarrow \psi^{\Sigma_1}(\overline{x}, \overline{y}))$$

を満たすものが存在する。このとき、

$$T' \vdash \forall\overline{x}(\exists\overline{y}\psi(\overline{x}, \overline{y}) \leftrightarrow \exists\overline{y}\psi^{\Sigma_1}(\overline{x}, \overline{y}))$$

である。Π_1 論理式についても同様。

induction: $n \geq 2$ としてよい。

$\mathcal{L}$ の任意の Σ_n 論理式は、ある Π_{n-1} 論理式 $\psi(\overline{x}, \overline{y})$ によって $\exists\overline{y}\psi(\overline{x}, \overline{y})$ と書ける。すると帰納法の仮定から、ある $\mathcal{L}_A$ の Π_{n-1} 論理式 $\psi^{\Pi_{n-1}}(\overline{x}, \overline{y})$ で

$$T' \vdash \forall\overline{x}, \overline{y}(\psi(\overline{x}, \overline{y}) \leftrightarrow \psi^{\Pi_{n-1}}(\overline{x}, \overline{y}))$$

を満たすものが存在する。このとき、

$$T' \vdash \forall\overline{x}(\exists\overline{y}\psi(\overline{x}, \overline{y}) \leftrightarrow \exists\overline{y}\psi^{\Pi_{n-1}}(\overline{x}, \overline{y}))$$

である。Π_n 論理式についても同様。 □

補題 9 や系 10 は、関係記号についても同じようなことがいえる。

系 11. $\mathcal{L}$ を $\mathcal{L}_A$ を含む一階の言語、T を $\mathcal{L}$ の理論とする。いま $T \vdash \forall\overline{x}(\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi(\overline{x}))$ を満たす $\mathcal{L}$ の Σ_1 論理式 $\varphi(\overline{x})$ と Π_1 論理式 $\psi(\overline{x})$ が存在したとし、新しい関係記号 R を追加して言語 $\mathcal{L}'(= \mathcal{L} \cup \{R\})$ を得る。そして言語 $\mathcal{L}'$ の理論 T' を以下のように定める。

$$T' = T \cup \{\forall\overline{x}(\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow R(\overline{x}))\}$$

このとき、$\mathcal{L}'$ の各 Δ_0 論理式 $\theta(\overline{x})$ に対し、以下を満たす $\mathcal{L}$ の Σ_1 論理式 $\theta^{\Sigma_1}(\overline{x})$ と Π_1 論理式 $\theta^{\Pi_1}(\overline{x})$ が存在する。

$$T' \vdash \forall\overline{x}(\theta(\overline{x}) \leftrightarrow \theta^{\Sigma_1}(\overline{x}) \leftrightarrow \theta^{\Pi_1}(\overline{x}))$$

また $n \geq 1$ について $\mathcal{L}'$ の各 Σ_n 論理式 $\theta(\overline{x})$ と Π_n 論理式 $\psi(\overline{x})$ に対し、以下を満たす $\mathcal{L}$ の Σ_n 論理式 $\theta^{\Sigma_n}(\overline{x})$ と Π_n 論理式 $\psi^{\Pi_n}(\overline{x})$ が存在する。

$$T' \vdash \forall \overline{x}(\theta(\overline{x}) \leftrightarrow \theta^{\Sigma_n}(\overline{x})), \quad T' \vdash \forall \overline{x}(\psi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi^{\Pi_n}(\overline{x}))$$

証明. $\theta(\overline{x})$ を $\mathcal{L}'$ の Δ_0 論理式とすると、その中の $R(\overline{x})$ の出現を $\varphi(\overline{x})$ もしくは $\psi(\overline{x})$ の都合のよい方で置き換えていけば $\theta^{\Sigma_1}(\overline{x})$ と $\theta^{\Pi_1}(\overline{x})$ が得られる。$n \geq 1$ についても同様。 □

定義による拡張で得られる理論は元の理論と本質的に変わらないことを確認しよう。そのために今一度用語の定義を確認しておく。

定義 12. $\mathcal{L}$ を一階の言語とし、T を $\mathcal{L}$ の理論とする。$T \vdash \forall \overline{x} \exists ! y \varphi(\overline{x}, y)$ を満たす $\mathcal{L}$ 論理式 φ に応じて新しい関数記号 f を用意し、$\forall \overline{x} \forall y(\varphi(\overline{x}, y) \leftrightarrow f(\overline{x}) = y)$ を理論 T に付け加えて得られる理論を T の定義による拡張という（この理論の言語は $\mathcal{L} \cup \{f\}$）。また、$\mathcal{L}$ 論理式 $\psi(\overline{x})$ について新しい関係記号 R を用意し、$\forall \overline{x}(\psi(\overline{x}) \leftrightarrow R(\overline{x}))$ を理論 T に付け加えて得られる理論も T の定義による拡張という。

定義 13. $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ を一階の言語とし、T を $\mathcal{L}$ の理論、T' を $\mathcal{L}'$ の理論とする。ここで T' が T の保存的拡大であるとは、任意の $\mathcal{L}$ 文 σ について以下が成り立つことをいう。

$$T \vdash \sigma \Leftrightarrow T' \vdash \sigma$$

定義による拡張によって得られる理論は元の理論の保存的拡大になる。

命題 14. $\mathcal{L}$ を一階の言語とし、T を $\mathcal{L}$ の理論とする。言語 $\mathcal{L} \cup \{f\}$ の理論 T'、言語 $\mathcal{L} \cup \{R\}$ の理論 T'' がそれぞれ T の定義による拡張であるとき、T' と T'' は T の保存的拡大になる。

証明. $T \subseteq T'$ より $\mathcal{L}$ 文 σ について $T \vdash \sigma \Rightarrow T' \vdash \sigma$ は明らか。逆も完全性定理より簡単に確認できる。 □

定理 15. T_0 を $Coll_1(\mathcal{L}_A)$ を含意する言語 $\mathcal{L}_A$ の理論とする。いま理論の可算上昇列 $\{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} T_{i+1} = T_i &\cup \left\{ \forall \overline{x}, y(\varphi(\overline{x}, y) \leftrightarrow f(\overline{x}) = y) \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ は新し関数記号。} \varphi(\overline{x}, y) \text{ は } \mathcal{L}_i \text{の} \Sigma_1 \text{論理式であり、} \\ \text{かつ } T_i \vdash \forall \overline{x} \exists ! y \varphi(\overline{x}, y) \text{ が成り立つ。} \end{array} \right\} \\ &\cup \left\{ \forall \overline{x}(\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow R(\overline{x})) \;\middle|\; \begin{array}{l} R \text{ は新しい関係記号。} \varphi(\overline{x}) \text{ は } \mathcal{L}_i \text{の} \Sigma_1 \text{論理式であり、かつ} \\ T_i \vdash \forall \overline{x}(\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi(\overline{x})) \text{ を満たす } \mathcal{L}_i \text{の} \Pi_1 \text{ 論理式 } \psi \text{ が存在する。} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

言語 $\mathcal{L}_i$ を理論 T_i の言語とし、$\mathcal{L} = \cup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{L}_i$、$T = \cup_{i \in \mathbb{N}} T_i$ とおく。このとき、以下が成り立つ。

(1) T は T_0 の保存的拡大。

(2) $\mathcal{L}$ の任意の Δ_0 論理式 $\theta(\overline{x})$ に対し、以下を満たす $\mathcal{L}_A$ の Σ_1 論理式 $\theta^{\Sigma_1}(\overline{x})$ と Π_1 論理式 $\theta^{\Pi_1}(\overline{x})$ が存在する。

$$T \vdash \forall \overline{x}(\theta(\overline{x}) \leftrightarrow \theta^{\Sigma_1}(\overline{x}) \leftrightarrow \theta^{\Pi_1}(\overline{x}))$$

(3) $n \geq 1$ とする。$\mathcal{L}$ の任意の Σ_n 論理式 $\theta(\overline{x})$ と Π_n 論理式 $\psi(\overline{x})$ に対し、以下を満たす $\mathcal{L}_A$ の Σ_n 論理式 $\theta^{\Sigma_n}(\overline{x})$ と Π_n 論理式 $\psi^{\Pi_n}(\overline{x})$ が存在する。

$$T \vdash \forall \overline{x}(\theta(\overline{x}) \leftrightarrow \theta^{\Sigma_n}(\overline{x})), \quad T \vdash \forall \overline{x}(\psi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi^{\Pi_n}(\overline{x}))$$

(4) すべての $f, R \in \mathcal{L}$ について、以下を満たす $f_1, R_1 \in \mathcal{L}_1$ が存在する。[*6]

$$T \vdash \forall \overline{x}(f(\overline{x}) = f_1(\overline{x})), \quad T \vdash \forall \overline{y}(R(\overline{y}) \leftrightarrow R_1(\overline{y}))$$

(5) $\mathcal{L}$ 構造 M, N がそれぞれ T のモデルであるとする。このとき、$\mathcal{L}_A$ 構造についての同型写像 $h : M \upharpoonright \mathcal{L}_A \to N \upharpoonright \mathcal{L}_A$ は、$\mathcal{L}$ 構造の同型写像でもある。

証明. (1) 帰納法によって簡単に示せる。

(2)(3) まず (2)⇒(3) は系 10 の証明において補題 9 の代わりに (2) を使えばそれが証明になる。

(2) を示す。$\theta(\overline{x})$ を $\mathcal{L}$ の Δ_0 論理式とすると、$\theta(\overline{x})$ に現れる記号は有限個であるので、ある $i \in \mathbb{N}$ によって $\theta(\overline{x})$ は $\mathcal{L}_i$ の論理式である。いま $T_i \subseteq T$ であることを考慮れば、次が任意の $i \in \mathbb{N}$ について成り立つことを示せば十分である。

$$(^i)\begin{Bmatrix} \mathcal{L}_i\text{の任意の}\Delta_0\text{論理式}\theta(\overline{x})\text{ に対し、}T_i \vdash \forall \overline{x}(\theta(\overline{x}) \leftrightarrow \theta^{\Sigma_1}(\overline{x}) \leftrightarrow \theta^{\Pi_1}(\overline{x})) \\ \text{を満たす }\mathcal{L}_A\text{の}\Sigma_1\text{論理式}\theta^{\Sigma_1}(\overline{x})\text{ と}\Pi_1\text{論理式}\theta^{\Pi_1}(\overline{x})\text{ が存在する。} \end{Bmatrix}$$

$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_A$ であるので $i = 0$ のときに $(^i)$ が成り立つのは明らか。ある i で $(^i)$ が成り立つと仮定する。$i+1$ で成り立つことを示すためには、次が任意の $k \in \mathbb{N}$ について成り立てば十分。

$$(^k)\begin{Bmatrix} k\text{ 種類の }\mathcal{L}_{i+1}\backslash\mathcal{L}_i\text{の記号を含む任意の }\mathcal{L}_{i+1}\text{の}\Delta_0\text{論理式}\theta(\overline{x})\text{ に対し、} \\ T_{i+1} \vdash \forall \overline{x}(\theta(\overline{x}) \leftrightarrow \theta^{\Sigma_1}(\overline{x}) \leftrightarrow \theta^{\Pi_1}(\overline{x}))\text{ を満たす }\mathcal{L}_A\text{の}\Sigma_1\text{論理式}\theta^{\Sigma_1}(\overline{x})\text{ と} \\ \Pi_1\text{論理式}\theta^{\Pi_1}(\overline{x})\text{ が存在する。} \end{Bmatrix}$$

$k = 0$ なら明らか。$\theta(\overline{x})$ が $k+1$ 種類の $\mathcal{L}_{i+1}\backslash\mathcal{L}_i$ の記号を含むと仮定したとき、その $k+1$ 種の内にもし関係記号を含んでいるならその場合も明らか。よって $\theta(\overline{x})$ は $k+1$ 種類の $\mathcal{L}_{i+1}\backslash\mathcal{L}_i$ の関数記号を含んでいるとしてよい。このとき、ある $k+1$ 個の関数記号 $f_1, ..., f_{k+1}$ によって $\theta(\overline{x})$ は言語 $\mathcal{L} \cup \{f_1, ..., f_k, f_{k+1}\}$ の論理式となる。

Claim T_{i+1} は $Coll_1(\mathcal{L}_i \cup \{f_1, ..., f_k\})$ を含意する。

$\varphi(x, \overline{y}, \overline{z})$ を言語 $\mathcal{L}_i \cup \{f_1, ..., f_k\}$ の Σ_1 論理式とする。帰納法の仮定 $(^k)$ と系 10 の base と同様の議論から、

$$T_{i+1} \vdash \forall x, \overline{y}, \overline{z}(\varphi(x, \overline{y}, \overline{z}) \leftrightarrow \varphi^{\Sigma_1}(x, \overline{y}, \overline{z})) \tag{6}$$

を満たす $\mathcal{L}_A$ の Σ_1 論理式 φ^{Σ_1} が存在する。$T_{i+1} \supseteq T_0 \Rightarrow Coll_1(\mathcal{L}_A)$ より、T_{i+1} はこの φ^{Σ_1} に関する採集公理を含意する。したがって式 (6) より T_{i+1} は最初にとった $\varphi(x, \overline{y}, \overline{z})$ に関する採集公理も含意する。

[*6] これは T_1 以降本質的に新しい関数や関係は増えていないことを意味する。さらに $\mathcal{L}_1$ に入っている関数や関係は $\mathcal{L}_A$ 論理式によって定義できるものだったから、結局すべて $\mathcal{L}_A$ に還元できるのである。

したがって Claim と補題 9 より

$$T_{i+1} \vdash \forall \overline{x}(\theta(\overline{x}) \leftrightarrow \theta_k^{\Sigma_1}(\overline{x}) \leftrightarrow \theta_k^{\Pi_1}(\overline{x})) \tag{7}$$

を満たす $\mathcal{L} \cup \{f_1, ..., f_k\}$ のΣ_1論理式$\theta_k^{\Sigma_1}(\overline{x})$ と Π_1論理式$\theta_k^{\Pi_1}(\overline{x})$ が存在する。帰納法の仮定 $(^i)$ と系 10 の base と同様の議論から、

$$T_{i+1} \vdash \forall \overline{x}(\theta_k^{\Sigma_1}(\overline{x}) \leftrightarrow \theta^{\Sigma_1}(\overline{x})), \quad T_{i+1} \vdash \forall \overline{x}(\psi_k^{\Pi_1}(\overline{x}) \leftrightarrow \psi^{\Pi_1}(\overline{x})) \tag{8}$$

を満たす $\mathcal{L}_A$のΣ_1論理式$\theta^{\Sigma_1}(\overline{x})$ と Π_1論理式$\theta^{\Pi_1}(\overline{x})$ が存在する。式 (7) と式 (8) より

$$T_{i+1} \vdash \forall \overline{x}(\theta(\overline{x}) \leftrightarrow \theta^{\Sigma_1}(\overline{x}) \leftrightarrow \theta^{\Pi_1}(\overline{x}))$$

が成り立つ。

(4) は (3) の $n = 1$ の場合を考えればよい。

(5)T のモデルであるような $\mathcal{L}$ 構造 M, N を取り、$h : M \restriction \mathcal{L}_A \to N \restriction \mathcal{L}_A$ を同型写像とする。示すべきことは、すべての $\mathcal{L}$ に含まれる関数や関係を h が保存することである。したがって任意の $i \in \mathbb{N}$ について $h : M \restriction \mathcal{L}_i \to N \restriction \mathcal{L}_i$ が同型写像、すなわち以下が成り立つことを示せば十分。

$$(^i) \begin{Bmatrix} \mathcal{L}_i\text{の任意の } f \text{ と任意の}\overline{a} \in M \text{ に対し、} h(f^M(\overline{a})) = f^N(h(\overline{a})) \\ \mathcal{L}_i\text{の任意の } R \text{ と任意の}\overline{b} \in M \text{ に対し、} R^M(\overline{b}) \Leftrightarrow R^N(h(\overline{b})) \end{Bmatrix}$$

仮定より $i = 0$ で $(^i)$ は成り立つ。$f \in \mathcal{L}_{i+1} \backslash \mathcal{L}_i$ と $\overline{a} \in M$ をとると、この f について以下を満たす $\mathcal{L}_i$ の Σ_1 論理式 $\varphi(\overline{x}, y)$ が存在する。

$$T_{i+1} \vdash \forall \overline{x}, y(\varphi(\overline{x}, y) \leftrightarrow f(\overline{x}) = y), \quad T_i \vdash \forall \overline{x} \exists! y \varphi(\overline{x}, y)$$

したがって $\overline{a}, b \in M$ で $f^M(\overline{a}) = b$ とすると次が成り立つ。

$$\begin{aligned} f^M(\overline{a}) = b &\Leftrightarrow M \models \varphi(\overline{a}, b) && (\because M \models T_{i+1}) \\ &\Leftrightarrow M \restriction \mathcal{L}_i \models \varphi(\overline{a}, b) && (\because \varphi \text{ は言語 } \mathcal{L}_i \text{の論理式}) \\ &\Leftrightarrow N \restriction \mathcal{L}_i \models \varphi(h(\overline{a}), h(b)) && (\because \text{帰納法の仮定と定理 1}) \\ &\Leftrightarrow N \models \varphi(h(\overline{a}), h(b)) && (\because \varphi \text{ は言語 } \mathcal{L}_i \text{の論理式}) \\ &\Leftrightarrow f^N(h(\overline{a})) = h(b) && (\because N \models T_{i+1})) \end{aligned}$$

以上から $f^N(h(\overline{a})) = h(f^M(\overline{a}))$ が結論できる。次に $R \in \mathcal{L}_{i+1} \backslash \mathcal{L}_i$ と $\overline{b} \in M$ をとると、この R について以下を満たす $\mathcal{L}_i$ の Σ_1 論理式 $\varphi(\overline{x}, y)$ と Π_1 論理式 $\psi(\overline{x}, y)$ が存在する。

$$T_{i+1} \vdash \forall \overline{x}(\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow R(\overline{x})), \quad T_i \vdash \forall \overline{x}(\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi(\overline{x}))$$

したがって次が成り立つ。

$$\begin{aligned} R^M(\overline{b}) &\Leftrightarrow M \models \varphi(\overline{b}) && (\because M \models T_{i+1}) \\ &\Leftrightarrow M \restriction \mathcal{L}_i \models \varphi(\overline{b}) && (\because \varphi \text{ は言語 } \mathcal{L}_i \text{の論理式}) \\ &\Leftrightarrow N \restriction \mathcal{L}_i \models \varphi(h(\overline{b})) && (\because \text{帰納法の仮定と定理 1}) \\ &\Leftrightarrow N \models \varphi(h(\overline{b})) && (\because \varphi \text{ は言語 } \mathcal{L}_i \text{の論理式}) \\ &\Leftrightarrow R^N(h(\overline{b})) && (\because N \models T_{i+1})) \end{aligned}$$

以上から $R^M(\bar{b}) \Leftrightarrow R^N(h(\bar{b}))$ が結論できる。

系 **16.**

$\square$

参考文献

[1] 田中一之 [編], “ゲーデルと 20 世紀の論理学②完全性定理とモデル理論” , 東京大学出版会, 2006.

[2] Richard Kaye, “Models of Peano Arithmetic” ,（Oxford logic guides, 15）（Oxford science publications）Clarendon Press , Oxford University Press,1991.