

# 算術的超限再帰公理を表す論理式

橋本 航気

2022 年 5 月 21 日

## 1 算術的超限再帰

定義 1.1 (超限再帰).  $\theta(n, Y)$  を  $L_2$  論理式とする (他に自由変数をもってもよい). 「(線形順序)  $X$  に沿って  $\theta$  の超限再帰によって得られる集合が  $Y$  である」を意味する論理式  $H_\theta(X, Y)$  の形式的定義を与える. まず  $\varphi(n, Y, X, j)$  <sup>\*1</sup> を次の論理式とする.

$$\exists m, i \leq n (n = (m, i) \wedge i <_X j \wedge (m, i) \in Y)$$

次に  $\theta(n, Y)$  における  $t \in Y$  ( $t$  は数項) の箇所を全て  $\varphi(t, Y, X, j)$  に置き換えた論理式を  $\theta'(n, Y, X, j)$  と書く <sup>\*2</sup>. 以上のもとで次のように定義する.

$$H_\theta(X, Y) :\leftrightarrow \text{LO}(X) \wedge \forall n, j ((n, j) \in Y \leftrightarrow j \in \text{field}(X) \wedge \theta'(n, Y, X, j))$$

$$H_\theta(k, X, Y) :\leftrightarrow \text{LO}(X) \wedge \forall n, j ((n, j) \in Y \leftrightarrow j \in \text{field}(X) \wedge j <_X k \wedge \theta'(n, Y, X, j))$$

定義 1.2 ( $\text{ATR}_0$ ).  $\text{ATR}_0$  とは <sup>\*3</sup>,  $\text{ACA}_0$  に次の公理 (図式) を加えた体系である.

$$\forall X (\text{WO}(X) \rightarrow \exists Y H_\theta(X, Y))$$

ここで  $\theta$  は算術的論理式である.  $\theta$  に自由変数が他に含まれているなら上記論理式全体をその全称量化で縛る.

## 参考文献

- [1] S. G. Simpson, Subsystems of Second Order Arithmetic, Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, 1999.

---

<sup>\*1</sup>  $\varphi(n, Y, X, j)$  は集合  $\{(m, i) \mid i <_X j \wedge (m, i) \in Y\}$  を定義する論理式である. この集合はテキストには  $Y^j$  と書いてあるものである.

<sup>\*2</sup> このとき  $\text{RCA}_0$  で以下が正しい ( $\theta$  に他の変数が含まれていればそれも全称量化で縛る).

$$\forall X, Y, Z, j (\underbrace{\forall n [n \in Z \leftrightarrow \varphi(n, Y, X, j)]}_{Z \text{ が } Y^j \text{ であることを意図}} \rightarrow \forall n (\theta(n, Z) \leftrightarrow \theta'(n, Y, X, j)))$$

<sup>\*3</sup> 算術的超限再帰 (Arithmetical Transfinite Recursion) の頭文字で  $_0$  はいつもの.