Tait 計算の覚え書き

橋本 航気

2023 年 10 月 8 日

概要

古典論理のための証明体系である Tait 計算は否定標準形の論理式のみを扱い非古典論理への拡張の余地を捨て去っている．その分扱いやすく，Gentzen 流のシーケント計算などの他の証明体系と比較してカット除去定理の証明が容易である．しかし他の証明体系と比較して応用が少ない分，文献もまた少ない．その上，[Sch77] をはじめとした主な文献では直感的に自明だが細かい議論が必要になる代入補題（cf. 補題 1.17）の証明が省かれており厳密な証明とは認めがたい．本稿はその穴を埋めたものである．

目次

1 Tait 計算 1
  1.1 項と論理式，及び代入の再帰的定義 1
  1.2 推論規則と導出木 3
  1.3 カット除去定理 5
  1.4 非論理公理 12

1 Tait 計算

アプリオリな記号は $\wedge, \vee, \neg, \exists, \forall$ であり，$\to$ や $\leftrightarrow$ はそれぞれ略記として扱う．また Tait 計算では，論理式は否定標準形のものだけを扱う．よって Tait 計算を考えている間は，$\neg\varphi$ と書いたら，それはド・モルガンの法則と二重否定の除去によって記号 $\neg$ をできる限り中に押し込んだ否定標準形の論理式を表している．つまり，$\neg$ は論理式に作用する関数だと拡大解釈する．特に論理式において記号 $\neg$ は原子論理式にのみついていることに注意せよ．

1.1 項と論理式，及び代入の再帰的定義

以下自由変数と束縛変数を分けるアイデアや用語は [新井 21] を参考にした．

定義 1.1 (自由変数記号と束縛変数記号)．自由変数と束縛変数は記号レベルで分けて考える．以降では自由変数を主に $a, b, c, \ldots$ で表し，束縛変数を主に $x, y, z, \ldots$ で表す．

定義 1.2 (擬項（semi term）)**.** 擬項を以下のように再帰的に定義する．

1. 定数と自由変数と束縛変数は擬項である．
2. $t_1, ..., t_n$ が擬項で，f が n 変数の関数記号ならば $f(t_1, ..., t_n)$ も擬項である．

擬項から束縛変数を取り除いたものが項である[*1]．特に項は擬項である．擬項中の自由変数への代入を次のように再帰で定める．

定義 1.4 (擬項への代入)**.** 擬項 t の構成に関する再帰によって，自由変数 a へ擬項 u を代入した結果の $t[u/a]$ を以下のように定義する．

1. $v[u/a] = \begin{cases} u & \text{if } v = a \\ v & \text{if } v \neq a \end{cases}$
2. $f(t_1, ..., t_n)[u/a] = f(t_1[u/a], ..., t_n[u/a])$

定義 1.5 (論理式)**.** 論理式は次にように束縛変数の代入との同時再帰で定義する．

1. R を n 変数関係記号，$t_1, ..., t_n$ を項とするとき，$R(t_1, ..., t_n)$ と $\neg R(t_1, ..., t_n)$ は論理式．a を自由変数，x を束縛変数とするとき，$R(t_1, ..., t_n)[x/a] = R(t_1[x/a], ..., t_n[x/a])$，$(\neg R(t_1, ..., t_n))[x/a] = \neg(R(t_1, ..., t_n)[x/a])$
2. φ, ψ を論理式，a を自由変数，x を束縛変数とするとき，$\forall x\varphi[x/a]$，$\exists x\varphi[x/a]$，$\varphi \vee \psi$，$\varphi \wedge \psi$ も論理式．
   b を自由変数，y を束縛変数とするとき，$(\varphi \vee \psi)[y/b] = \varphi[y/b] \vee \psi[y/b]$，$(\varphi \wedge \psi)[y/b] = \varphi[y/b] \wedge \psi[y/b]$，$(\forall x\varphi[x/a])[y/b] = \forall x(\psi[x/a][y/b])$，$(\exists x\varphi[x/a])[y/b] = \exists x(\psi[x/a][y/b])$．

定義 1.6 (論理式への代入)**.** 論理式への擬項の代入を再帰で定義する．

1. R を n 変数関係記号，$t_1, ..., t_n$ を項，u を擬項とするとき，
   $R(t_1, ..., t_n)[u/a] = R(t_1[u/a], ..., t_n[u/a])$，$(\neg R(t_1, ..., t_n))[u/a] = \neg(R(t_1, ..., t_n)[u/a])$
2. φ, ψ を論理式，t を擬項，a, b を自由変数とするとき，$(\varphi \vee \psi)[t/b] = \varphi[t/b] \vee \psi[t/b]$，$(\varphi \wedge \psi)[t/b] = \varphi[t/b] \wedge \psi[t/b]$，$(\forall x\varphi[x/a])[t/b] = \forall x(\psi[x/a][t/b])$，$(\exists x\varphi[x/a])[t/b] = \exists x(\psi[x/a][t/b])$．

定義 1.7 (論理式の複雑さ)**.** 論理式 φ に対し，その複雑さ $|\varphi| \in \omega$ を論理式の構成に関する再帰で次にように定義する．

1. φ が原子論理式なら $|\varphi| = |\neg\varphi| = 0$

[*1] 形式的には次にように定める．

定義 1.3 (項)**.**
1. 定数と自由変数は項である．
2. $t_1, ..., t_n$ が項で，f が n 変数の関数記号ならば $f(t_1, ..., t_n)$ も項である．

2. $|\varphi \lor \psi| = |\varphi \land \psi| = \max\{|\varphi|, |\psi|\} + 1$
3. $|\forall x\varphi[x/a]| = |\exists x\varphi[x/a]| = |\varphi| + 1$

命題 1.8. t を項，a を自由変数とするとき $|\varphi[t/a]| = |\varphi|$

証明. φ の複雑さによる帰納法で示される． □

1.2 推論規則と導出木

論理式の有限集合を推件（sequent）とよび[*2]，大抵の場合 Γ や Δ などのギリシャ文字で表す．本稿で定義する Tait 計算の推論規則は以下の 7 つ[*3]．

推論規則：

$$(A)\ \varphi, \neg\varphi \qquad \text{where } \varphi \text{ は原子論理式}$$

$$(\text{weak})\ \frac{\Gamma}{\Gamma, \varphi}$$

$$(\lor)\ \frac{\Gamma, \varphi_0, \varphi_1}{\Gamma, \varphi_0 \lor \varphi_1}$$

$$(\land)\ \frac{\Gamma, \varphi_0 \qquad \Gamma, \varphi_1}{\Gamma, \varphi_0 \land \varphi_1}$$

$$(\text{cut})\ \frac{\Gamma, \varphi \qquad \Gamma, \neg\varphi}{\Gamma}$$

$$(\exists)\ \frac{\Gamma, \varphi[t/a]}{\Gamma, \exists x\varphi[x/a]}$$

$$(\forall)\ \frac{\Gamma, \varphi}{\Gamma, \forall x\varphi[x/a]} \ \text{ここで } a \text{ は } \Gamma \text{ に現われていない．}$$

推論規則は一般的に書くとそれぞれ次の形をしている．

$$(*)\ \frac{\Gamma, \varphi_i \quad (i < k)}{\Gamma, \Phi}$$

ここで横棒の上を $(*)$ の上件，下を $(*)$ の下件という．k は上件の数で $1 \leq k \leq 2$．他にも次のように用語を定める．

- Φ を $(*)$ の主論理式（principal formula）．

---

*2 無限集合や多重集合は推件ではない．

*3 他にも様々な流儀がある．$(weak)$ を強化し一度に任意有限個の論理式を下に追加できる規則に変えたもの [田中 19] や，$(weak)$ を無くしてその役割を (A) に持たせるために $[\Gamma, \varphi, \neg\varphi \ \text{ where } \varphi \text{ は原子論理式}]$ で (A) を置き換えたもの [Sch77] がある．後者の流儀では $(weak)$ がないために導出の高さ（以降で定義する $|d|$ を指している）に関してより精密な分析が行えるが，今回の議論にはその分析は不要であり，証明の手間も僅かに増えるために採用しなかった．

- φ_i を $(*)$ の副論理式（minor formula）.
- Γ を $(*)$ の横論理式（side formula）.

$(*)$	主論理式	副論理式	上件の数
(A)	$\varphi, \neg\varphi$	無し	0
$(weak)$	φ	無し	1
$(\vee)$	$\varphi_0 \vee \varphi_1$	φ_0, φ_1	1
$(\wedge)$	$\varphi_0 \wedge \varphi_1$	φ_0, φ_1	2
(cut)	無し	$\varphi, \neg\varphi$	2
$(\exists)$	$\exists x\varphi[x/a]$	$\varphi[t/a]$	1
$(\forall)$	$\forall x\varphi[x/a]$	φ	1

$(\vee_0)$ と $(\vee_1)$ はまとめて $(\vee)$ と表記することもある.

定義 1.9 (導出木)**.** Tait 計算の導出木 (derivation tree) とは，各頂点に推件が張られた有限二分木であって，次の 2 条件を満たすものをいう.

- 葉ノードに貼られている推件は (A) の形である.
- 子ノードと親ノードに貼られている推件の関係は $(weak), (\vee), (\wedge), (cut), (\exists), (\forall)$ のいずれかの推論規則に沿った上件と下件の関係である.

導出木に関する用語を次のように定義する.

- d が Tait 計算の導出木であって根ノードに張られている推件が Γ であるとき $\vdash_d \Gamma$ と表記し，d は Γ の導出（木）であるという.
- $d' \subseteq d$ なる木 d' を部分導出木（subderivation tree）とよぶ．また，導出木 d の根ノードについて，その子ノードを切り出してきた高々 2 個の部分導出木を直部分導出木（direct subderivation tree）とよぶ.
- d の最後の推論規則とは，もし根ノードが子ノードを持たなければ (A) であり，さもなくば根ノードとその子ノードについている推件間の推論規則（$(weak), (\vee), etc...$）である.
- 導出木の高さ $|d|$ を次のように再帰で定める．もし d が根ノードのみなら $|d| = 0$．さもなくば d_i を直部分導出木として
$$|d| = (\max_i |d_i|) + 1$$
- 導出木のカットランク $\rho(d)$ を次のように再帰で定める．もし d が根ノードのみなら $\rho(d) = 0$．さもなくば d_i を直部分導出木として
$$\rho(d) = \begin{cases} \max_i\{\rho(d_0), \rho(d_1), |\varphi| + 1\} & \text{if 最後の推論規則が } (cut), \varphi \text{ がその主論理式} \\ \max_i\{\rho(d_0), \rho(d_1)\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

例 1.10. 任意の φ について $\vdash_d \varphi, \neg\varphi$

証明. φ の構成による帰納法で示す．φ が原子論理式なら明らか．$\vee, \wedge$ は次の通り．

$$
(\wedge)\,\dfrac{(\vee)\,\dfrac{(weak)\,\dfrac{\dfrac{\vdots}{\varphi,\neg\varphi}}{\varphi,\psi,\neg\varphi}}{\varphi\vee\psi,\neg\varphi} \qquad (\vee)\,\dfrac{(weak)\,\dfrac{\dfrac{\vdots}{\psi,\neg\psi}}{\varphi,\psi,\neg\psi}}{\varphi\vee\psi,\neg\psi}}{\varphi\vee\psi,\underbrace{\neg\varphi\wedge\neg\psi}_{\neg(\varphi\vee\psi)}}
\qquad
(\wedge)\,\dfrac{(\vee)\,\dfrac{(weak)\,\dfrac{\dfrac{\vdots}{\varphi,\neg\varphi}}{\varphi,\neg\varphi,\neg\psi}}{\neg\varphi\vee\neg\psi,\varphi} \qquad (\vee)\,\dfrac{(weak)\,\dfrac{\dfrac{\vdots}{\psi,\neg\psi}}{\neg\varphi,\psi,\neg\psi}}{\neg\varphi\vee\neg\psi,\psi}}{\varphi\wedge\psi,\underbrace{\neg\varphi\vee\neg\psi}_{\neg(\varphi\wedge\psi)}}
$$

$\exists, \forall$ は以下のようになる．

$$
(\forall)\,\dfrac{(\exists)\,\dfrac{\dfrac{\vdots}{\varphi(=\varphi[a/a]),\neg\varphi}}{\exists x\varphi[x/a],\neg\varphi}}{\exists x\varphi[x/a],\forall x\neg\varphi[x/a]}
\qquad\qquad
(\forall)\,\dfrac{(\exists)\,\dfrac{\dfrac{\vdots}{\varphi,\neg\varphi}}{\varphi,\exists x\neg\varphi[x/a]}}{\forall x\varphi[x/a],\exists x\neg\varphi[x/a]}
$$

□

定義 1.11. 推件 Γ，項 t，自由変数 a について $\Gamma[t/a] := \{\, \varphi[t/a] \mid \varphi \in \Gamma \,\}$ と定める．

a が Γ に現われなければ $\Gamma[t/a] = \Gamma$．

1.3　カット除去定理

以下のカット除去定理の証明は [Sch77] 及び [Lee07] を参考にした．

補題 1.12. φ を論理式，a, b, c を相異なる自由変数，x を束縛変数，s を擬項，t を項とする．このとき以下が成り立つ．

1. $s[t/a][b/a] = s[t[b/a]/a]$
2. $\varphi[t/a][b/a] = \varphi[t[b/a]/a]$
3. $s[x/a][b/a] = s[x/a]$
4. $(\exists\varphi[x/a])[b/a] = \exists\varphi[x/a]$
5. $s[t/a][b/c] = s[b/c][t[b/c]/a]$
6. $\varphi[t/a][b/c] = \varphi[b/c][t[b/c]/a]$
7. $s[x/a][b/c] = s[b/c][x/a]$
8. $(\exists x\varphi[x/a])[b/c] = \exists x(\varphi[b/c][x/a])$

証明. 偶数の主張はそれぞれ一つ前の奇数のそれから即座に従う．奇数の主張は擬項 s の構成に関する帰納法で示す．

1. s が a のときは

$$\begin{aligned} a[t[b/a]/a] &= t[b/a] \\ &= a[t/a][b/a] \end{aligned}$$

より正しい．s がそれ以外の場合両辺はどちらも s になる．インダクションステップは明らか．3 も 1 と同様の方針で証明できる．

5. s が a のときは

$$\begin{aligned} a[b/c][t[b/c]/a] &= a[t[b/c]/a] && (\because a \neq c) \\ &= t[b/c] \\ &= a[t/a][b/c] \end{aligned}$$

s が c のときは

$$\begin{aligned} c[b/c][t[b/c]/a] &= b[t[b/c]/a] \\ &= b \\ &= c[b/c] \\ &= c[t/a][b/c] \end{aligned}$$

s がそれ以外の場合は両辺どちらも s.

7. $a \neq c$ より明らか.

□

定義 1.13 (導出木への代入)**.** d を導出木とする．d を構成する各推件中の変数 v を擬項 s で置き換えたものが再び導出木となる場合，それを $d[s/v]$ と表記する.

注 1.14. $|d[s/v]| = |d|$，$\rho(d[s/v]) = \rho(d)$,

補題 1.15 (変数の代入)**.** c, b を相異なる自由変数とする．このとき任意の導出木 d について，$\vdash_d \Gamma$ ならば $\vdash_{d[c/b]} \Gamma[c/b]$ である．さらに $d[c/b]$ の全ての推件に b は現れない.

証明. 導出木 d 中に現れる c の全てを b で置き換えたものが再び導出木の条件を満たすことを $|d| \in \omega$ の帰納法で示す.

原子論理式中の変数を取り替えても依然原子論理式なので $|d| = 0$ のときは明らか．最後の推論規則が $\wedge, \vee, weak, cut$ の場合は明らか．次に，d の最後の推論規則が以下のように $(\exists)$ である場合を考える.

$$(\exists)\ \frac{\dfrac{\vdots}{\Delta, \varphi[t/a]}}{\Delta, \exists x \varphi[x/a]}$$

このとき，次もまた $(\exists)$ の推論規則の形になっていることを確認すればよい.

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Delta[b/c], \varphi[t/a][b/c]}}{\Delta[b/c], (\exists x\varphi[x/a])[b/c]}$$

$a = c$ の場合：補題 1.12 より $\varphi[t/a][b/c] = \varphi[t/a][b/a] = \varphi[t[b/a]/a]$ であり，$(\exists x\varphi[x/a])[b/c] = (\exists\varphi[x/a])[b/a] = \exists\varphi[x/a]$ となるのでよい．$a \neq c$ の場合も同様で，補題 1.12 より $\varphi[t/a][b/c] = \varphi[b/c][t[b/c]/a]$ であり，$(\exists x\varphi[x/a])[b/c] = \exists x(\varphi[b/c][x/a])$ となるのでいずれにせよ $(\exists)$ の推論規則に沿っている．

d の最後の推論規則が以下のように $(\forall)$ の場合を最後に考える．

$$(\forall)\ \dfrac{\dfrac{\vdots}{\Delta, \varphi}}{\Delta, \forall x\varphi[x/a]}\ \text{ここで } a \text{ は } \Delta \text{ に現われていない．}$$

$(\exists)$ の場合と同様に，以下もまた $(\forall)$ の推論規則の形になっていることを確認すればよい．

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Delta[b/c], \varphi[b/c]}}{\Delta[b/c], (\forall x\varphi[x/a])[b/c]}$$

$a = c$ の場合：このとき $\varphi[b/c] = \varphi[b/a]$ であり，下件については補題 1.12 より $(\exists x\varphi[x/a])[b/a] = \exists x(\varphi[b/a][x/a])$ なのでよい．

$a \neq c$ の場合：補題 1.12 より $(\forall x\varphi[x/a])[b/c] = \forall x(\varphi[b/c][x/a])$ となるのでよい． □

補題 1.16. φ を論理式，a, b を自由変数，x を束縛変数，s を擬項，t, u を項とし，c を a や b でなく，s, u, t, φ にも含まれない自由変数とする．このとき以下が成り立つ．

1. $s[c/a][u/b][t[u/b]/c] = s[t/a][u/b]$
2. $\varphi[c/a][u/b][t[u/b]/c] = \varphi[t/a][u/b]$
3. $s[x/a][u/b] = s[c/a][u/b][x/c]$
4. $(\exists x\varphi[x/a])[u/b] = \exists x((\varphi[c/a][u/b])[x/c])$

証明. 4 は 3 から，2 は 1 から即座に従う．1.$a = b$ の場合は，$s[c/a][u/a][t[u/a]/c] = s[c/a][t[u/a]/c] = s[t[u/a]/a]$ であるので，$s[t[u/a]/a] = s[t/a][u/a]$ を示せば十分．これは s の帰納法で簡単に示すことができる．以降 $a \neq b$ とした上で，改めて擬項 s に関する帰納法で示す．

s が a のとき．

$$\begin{aligned} a[c/a][u/b][t[u/b]/c] &= c[u/b][t[u/b]/c] \\ &= c[t[u/b]/c] \\ &= t[u/b] \\ &= a[t/a][u/b] \end{aligned}$$

s が b のとき．

$$\begin{aligned}
b[c/a][u/b][t[u/b]/c] &= b[u/b][t[u/b]/c] \\
&= u[t[u/b]/c] \\
&= u && (\because c \text{ は } u \text{ に現われない．}) \\
&= b[u/b] \\
&= b[t/a][u/b]
\end{aligned}$$

s が a, b 以外の変数あるいは定数ならば明らかに両者は s である．インダクションステップは明らか．

3. $a = b$ の場合は $s[x/a][u/a] = s[x/a] = s[c/a][x/c] = s[c/a][u/a][x/c]$ よりよい．以降 $a \neq b$ とする．項 s に関する帰納法で示す．s が a のとき．

$$\begin{aligned}
a[x/a][u/b] &= x \\
&= c[x/c] \\
&= c[u/b][x/c] \\
&= a[c/a][u/b][x/c]
\end{aligned}$$

s が b のとき．

$$\begin{aligned}
b[x/a][u/b] &= u \\
&= u[x/c] \\
&= b[u/b][x/c] \\
&= b[c/a][u/b][x/c]
\end{aligned}$$

s が a, b 以外の変数あるいは定数ならば明らかに両者は s である．インダクションステップは明らか．

□

補題 1.17 (代入補題)**.** $\vdash_d \Gamma$ とし，b を自由変数，u を項とする．このとき，ある d' で $\vdash_{d'} \Gamma[u/b]$ かつ $|d| = |d'|$ かつ $\rho(d') = \rho(d)$ を満たすものが存在する．

証明. まずはじめに，u に含まれる変数が一つも現われないような導出木 d について主張が成り立つことを $|d| \in \omega$ の帰納法で示す．$|d| = 0$ なら明らか．d の最後の推論が $weak, \vee, \wedge, cut$ なら帰納法の仮定から即座に従う．最後の推論が以下のように $(\exists)$ の場合を考える．

$$(\exists)\ \frac{\dfrac{\vdots}{\Delta, \varphi[t/a]}}{\Delta, \exists x \varphi[x/a]}$$

帰納法の仮定からある d_0 で $\vdash_{d_0} \Delta[u/b], \varphi[t/a][u/b]$ であり，補題 1.16 より適当な新しい変数 c によって[*4] $\varphi[t/a][u/b] = \varphi[c/a][u/b][t[u/b]/c]$ となる．同補題によって $(\exists x \varphi[x/a])[u/b] =$

[*4] 実際には c は論理式中に現われない．

$\exists x((\varphi[c/a][u/b])[x/c])$ となり $(\exists)$ の下件の形に沿っていることが確認できる．

d の最後が以下のように $(\forall)$ の場合を考える．

$$(\forall)\ \frac{\Delta, \varphi}{\Delta, \forall x\varphi[x/a]}\ \text{ここで } a \text{ は } \Gamma \text{ に現われていない．}$$

$a = b$ の場合は Δ 中に a が含まれていないことから $\Delta[u/a] = \Delta$ であり，$(\forall x\varphi[x/a])[u/a] = \forall x\varphi[x/a]$ なので何も書き変える必要がない．$a \neq b$ とする．帰納法の仮定からある d_1 で $\vdash_{d_1} \Delta[u/b], \varphi[u/b]$ である．u に a が含まれていないため $(\forall x\varphi[x/a])[u/b] = \forall x\varphi[u/b][x/a]$ となりよい．以上で帰納法が完了した．

最後に u に現われる変数が導出木にも現われている場合を考える．いま u に現れる変数は $b_1, ..., b_n$ のみであるとする．ここで項 u 及び導出木 d 中に一切現れず，b とも異なる同数の変数を $c_1, ..., c_n$ とする．$u' = u[c_1/b_1][c_2/b_2]\cdots[c_n/b_n]$ とおけば，u' に含まれる変数は一つも d に現れない．この u' について $\vdash_{d'} \Gamma[u'/b]$ を満たす d' を取れば補題 1.15 から

$$\vdash_{d'[b_n/c_n][b_{n-1}/c_{n-1}]\cdots[b_1/c_1]} \Gamma[u'/b][b_n/c_n][b_{n-1}/c_{n-1}]\cdots[b_1/c_1]$$

が得られる．すると

$$\Gamma[u'/b][b_n/c_n][b_{n-1}/c_{n-1}]\cdots[b_1/c_1] = \Gamma[u/b]$$

である[*5]ので結論が従う． □

補題 1.18 (還元補題)**.** $\vdash_{d_0} \Gamma, \varphi$ かつ $\vdash_{d_1} \Delta, \neg\varphi$ でさらに $\rho(d_0), \rho(d_1) \leq |\varphi|$ であるとき，$\rho(d) \leq |\varphi|$ を満たしつつ $\vdash_d \Gamma, \Delta$ となる導出木 d が存在する．

証明. $|d_0| + |d_1| \in \omega$ による帰納法で示す．まず d_0, d_1 のいずれかの高さが 0 の場合を考える．d_0 の高さが 0 だと仮定して一般性を失わない．このとき φ は原子論理式であり，d_0 の根ノードには $(A)\ \varphi, \neg\varphi$ が貼られている．ゆえにこのとき Γ は $\neg\varphi$ のシングルトンなので，d_1 が条件を満たす．

次に d_0 の最後の推論規則の主論理式が φ でないか，あるいは d_1 の最後の推論規則の主論理式が $\neg\varphi$ でない場合を考える．いま d_0 の最後の推論規則の主論理式が φ でない場合を考えて一般性を失わない．

$$d_0 : (*)\ \frac{\dfrac{\vdots}{\Lambda, \varphi, \psi_i \quad (i < k)}}{\Lambda, \varphi, \Phi} \qquad\qquad d_1 : (*')\ \frac{\vdots}{\Delta, \neg\varphi}$$

まず $(*) = (cut)$ の場合，つまり d_0 が次の形の場合を考える．

$$(cut)\ \frac{\dfrac{\vdots}{\Gamma, \varphi, \psi} \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma, \varphi, \neg\psi}}{\Gamma, \varphi}$$

[*5] 略記すると $\Gamma[u[\overline{c_i}/\overline{b_i}]/b][\overline{b_i}/\overline{c_i}] = \Gamma[u/b]$ である．これも補題 1.12 などと同様の方針で証明できる．実際，$b[u[\overline{c_i}/\overline{b_i}]/b][\overline{b_i}/\overline{c_i}] = u[\overline{c_i}/\overline{b_i}][\overline{b_i}/\overline{c_i}] = u = b[u/b]$ であり，b 以外の変数については代入と関係ないので，帰納的に全ての擬項に関して等号が成り立ち，従って全ての論理式及び推件について正しい．

いま d_0 の直部分導出木を左から $d_{0,0}, d_{0,1}$ とする．このとき $|d_{0,0}| + |d_1| < |d_0| + |d_1|$ であるので，帰納法の仮定によりある d'_0 で $\vdash_{d'_0} \Gamma, \Delta, \psi$ かつ $\rho(d'_0) \leq |\varphi|$ となる．同様にある d'_1 で $\vdash_{d'_1} \Gamma, \Delta, \neg\psi$ かつ $\rho(d'_1) \leq |\varphi|$ となる．よって次を d' とすればよい．

$$\dfrac{d'_0 : \dfrac{\vdots}{\Gamma, \Delta, \psi} \qquad d'_1 : \dfrac{\vdots}{\Gamma, \Delta, \neg\psi}}{\Gamma, \Delta}\,(cut)$$

実際 $|\psi| + 1 \leq \rho(d_0) \leq |\varphi|$ であるので $\rho(d) = \max\{|\psi| + 1, \rho(d'_0), \rho(d'_1)\} \leq |\varphi|$ となり，カットランクの条件もよい．$(*) = (\wedge)$ の場合も同様である．$(*)$ が $(weak), (\vee), (\exists)$ の場合は帰納法の仮定から容易に従う．$(*)$ が $(\forall)$ の場合，つまり d_0 が次の形の場合を考える．

$$(\forall)\,\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Lambda, \varphi, \psi}}{\Lambda, \varphi, \forall x \psi[x/a]} \quad \text{ここで } a \text{ は } \Lambda, \varphi \text{ に現われていない．}$$

c を新しい自由変数とする．このとき補題 1.15 より $\vdash_{d_1[c/a]} \Delta[c/a], \neg\varphi$ であるので，d_0 の直部分導出木と $d_1[c/a]$ の対に帰納法の仮定を適用して $\vdash_{d'} \Lambda, \Delta[c/a], \psi$ なる d' を得る．このとき

$$(\forall)\,\dfrac{d' : \dfrac{\vdots}{\Lambda, \Delta[c/a], \psi}}{\Lambda, \Delta[c/a], \forall x \psi[x/a]} \quad \text{ここで } a \text{ は } \Lambda, \Delta[c/a] \text{ に現われていない．}$$

が導出木であるので，再び補題 1.15 によって c を a に戻せば求める導出木が得られる．

最後に d_0 の最後の推論規則の主論理式が φ であり，かつ d_1 の最後の推論規則の主論理式が $\neg\varphi$ である場合を考えるのだが，φ あるいは $\neg\varphi$ が $(weak)$ の主論理式である場合は，その d_i の直部分導出木から $(weak)$ を有限回繰返すことによってもう片方の Δ ないしは Γ を導けるのでよい．よって以下では φ と $\neg\varphi$ はどちらも $(weak)$ の主論理式でないとしてよい．

φ の形に応じて場合分けして考える．

φ が原子論理式の場合：原子論理式を主論理式にできるのは (A) あるいは $(weak)$ である．(A) の場合ははじめに済ませてある．d_0 が最後の推論規則 $(weak)$ によって φ を出した場合は，d_0 の直部分導出木を d'_0 とすると $\vdash_{d'_0} \Gamma$ なので，この d'_0 から $(weak)$ を繰り返して Δ も出せばよい．d_1 が最後の推論規則 $(weak)$ によって $\neg\varphi$ を出した場合も同様である．

φ が $\varphi_0 \vee \varphi_1$ の場合[*6]：以下のように d'_0 を d_0 の，$d_{1,1}, d_{1,0}$ を d_1 の直部分導出木とする．

$$d_0 : (\vee)\,\dfrac{d'_0 : (*)\,\dfrac{\vdots}{\Gamma, \varphi_0, \varphi_1}}{\Gamma, \varphi_0 \vee \varphi_1} \qquad\qquad d_1 : (\wedge)\,\dfrac{d_{1,0} : (*)\,\dfrac{\vdots}{\Delta, \neg\varphi_0} \qquad d_{1,1} : (*)\,\dfrac{\vdots}{\Delta, \neg\varphi_1}}{\Delta, \neg\varphi_0 \wedge \neg\varphi_1}$$

[*6] この証明中の $(\neg)^l \varphi_i$ を $(\neg)^{l+1} \varphi_i$ に $(0 \leq l \leq 1)$，$\vee$ を $\wedge$ に置換したものは φ が $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ の場合の証明になっている．

このとき d_0' と $d_{1,1}$ の対に帰納法の仮定を適用して $\vdash_{d_2} \Gamma, \Delta, \varphi_0$ かつ $\rho(d_2) \leq |\varphi|$ を満たす d_2 を得る．次に $d_{1,0}$ から有限回 $(weak)$ を適用して $\vdash_{d_3} \Gamma, \Delta, \neg\varphi_0$ なる d_3 を得る．このとき次が求める導出木 d である．

$$d : (cut)\ \dfrac{d_2 : (*)\ \dfrac{\vdots}{\Gamma, \Delta, \varphi_0} \qquad d_3 : (*)\ \dfrac{\vdots}{\Gamma, \Delta, \neg\varphi_0}}{\Gamma, \Delta}$$

$|\varphi_0| < |\varphi|$ より $\rho(d) = \max\{|\varphi_0| + 1, \rho(d_2), \rho(d_3)\} \leq |\rho|$ となりカットランクの条件もよい．

φ が $\exists x\psi[x/a]$ の場合：以下のように d_0' を d_0 の，d_1' を d_1 の直部分導出木とする．

$$d_0 : (\exists)\ \dfrac{d_0' : (*)\ \dfrac{\vdots}{\Gamma, \psi[t/a]}}{\Gamma, \exists x\psi[x/a]} \qquad d_1 : (\forall)\ \dfrac{d_1' : (*)\ \dfrac{\vdots}{\Delta, \neg\psi}}{\Delta, \forall x\neg\psi[x/a]}\ \text{ここで}\ a\ \text{は}\ \Delta\ \text{に現われていない．}$$

いま d_1' について代入補題から次を満たす d_1'' がとれる．

$$\vdash_{d_1''} \Delta, \neg\psi[t/a]\ \&\ |d_1''| = |d_1'|\ \&\ \rho(d_1'') = \rho(d_1')$$

よって d_0' と d_1'' それぞれ適切に $(weak)$ を使い Δ，Γ を加えて (cut) を使えば求める導出木が得られる．カットランクの計算については φ が $\varphi_0 \vee \varphi_1$ の場合と同様である． □

定理 1.19 (カット除去定理)**.** $\vdash_d \Gamma$ のとき，カットを一切用いない Γ の導出木も存在する．

証明. $\vdash_d \Gamma\ \&\ 0 < \rho(d)$ のとき，$\vdash_{d'} \Gamma\ \&\ \rho(d') < \rho(d)$ なる d' も存在することを $|d| \in \omega$ による帰納法で示せば十分，

$|d| = 0$ のときは $\rho(d) = 0$ なので空虚な真．d の最後の推論が (cut) 以外なら帰納法の仮定から即座に従うので，最後の推論は (cut) だとして d_0, d_1 を直部分導出木とする．

$$d : (cut)\ \dfrac{d_0 : (*)\ \dfrac{\vdots}{\Gamma, \varphi} \qquad d_1 : (*)\ \dfrac{\vdots}{\Gamma, \neg\varphi}}{\Gamma}$$

$\rho(d) = \max\{|\varphi| + 1, \rho(d_0), \rho(d_1)\} > |\varphi| + 1$ なら $\rho(d_0) > |\varphi| + 1$ または $\rho(d_1) > |\varphi| + 1$ であり，このときは帰納法の仮定を適用して再び (cut) を使えばカットランクが高々 $|\varphi| + 1$ の Γ の導出木が得られる．$\rho(d) = |\varphi| + 1$ の場合を考える．いま d_0 と d_1 に帰納法の仮定を適用し，d_0', d_1' で次を満たすものをとる．

$$\vdash_{d_0'} \Gamma, \varphi\ \&\ \rho(d_0') \leq |\varphi|\ \&\ \vdash_{d_1'} \Gamma, \neg\varphi\ \&\ \rho(d_1') \leq |\varphi|$$

このとき，還元補題から条件を満たす d がとれる． □

定義 1.20. 論理式 φ に対し，部分論理式への項の代入例全体の集合 $\mathrm{Sub}(\varphi)$ を論理式の構成に関する再帰で次にように定義する．

1. φ が原子論理式で，φ 中の自由変数が高々 $a_1, ..., a_n$ のみだとすると，
   $\mathrm{Sub}(\varphi) = \{\, \varphi[u_1/a_1][u_2/a_2] \cdots [u_n/a_n] \mid u_1, ..., u_n \text{は項} \,\}$,
   $\mathrm{Sub}(\neg\varphi) = \{\, \neg\varphi[u_1/a_1][u_2/a_2] \cdots [u_n/a_n] \mid u_1, ..., u_n \text{は項} \,\}$.
2. φ_0, φ_1 中の自由変数が高々 $b_1, ..., b_m$ だとすると，
   $\mathrm{Sub}(\varphi_0 \vee \varphi_1) = \mathrm{Sub}(\varphi_0) \cup \mathrm{Sub}(\varphi_1) \cup \{\, (\varphi_0 \vee \varphi_1)[u_1/b_1][u_2/b_2] \cdots [u_m/b_m] \mid u_1, ..., u_m \text{は項} \,\}$,
   $\mathrm{Sub}(\varphi_0 \wedge \varphi_1) = \mathrm{Sub}(\varphi_0) \cup \mathrm{Sub}(\varphi_1) \cup \{\, (\varphi_0 \wedge \varphi_1)[u_1/b_1][u_2/b_2] \cdots [u_m/b_m] \mid u_1, ..., u_m \text{は項} \,\}$,
   $\mathrm{Sub}(\exists x \varphi_0[x/a]) = \mathrm{Sub}(\varphi_0) \cup \{\, \exists x \varphi_0[x/a][u_1/b_1][u_2/b_2] \cdots [u_m/b_m] \mid u_1, ..., u_m \text{は項} \,\}$,
   $\mathrm{Sub}(\forall x \varphi_0[x/a]) = \mathrm{Sub}(\varphi_0) \cup \{\, \forall x \varphi_0[x/a][u_1/b_1][u_2/b_2] \cdots [u_m/b_m] \mid u_1, ..., u_m \text{は項} \,\}$.

系 1.21 (部分論理式性（subformula property）)**.** $\vdash_d \varphi$ のとき，$\mathrm{Sub}(\varphi)$ の要素からなる推件のみを用いた φ の導出木も存在する．

証明. φ のカット除去された導出木が条件を満たす． □

1.4 非論理公理

本稿では等号公理は PA や ZFC などの非論理公理と同等に扱い，Tait 計算の定義には含めない流儀を採用している．それゆえ，非論理公理と等号公理を考慮した標準的な証明可能関係は以下のように定める．

定義 1.22. L を一階の言語とする．L の等号公理 $\mathrm{Eq}(L)$ とは次の論理式からなる集合である．

1. $a = a$,
2. $a \neq b, b = a$,
3. $a \neq b, b \neq c, a = c$,
4. n 変数関数記号 $f \in \mathrm{L}$，n 変数関係記号 $R \in \mathrm{L}$ ごとに

$$a_1 \neq b_1 \vee a_2 \neq b_2 \vee \cdots \vee a_n \neq b_n \vee f(a_1, ..., a_n) = f(b_1, ..., b_n),$$

$$a_1 \neq b_1 \vee a_2 \neq b_2 \vee \cdots \vee a_n \neq b_n \vee \neg R(a_1, ..., a_n) \vee R(b_1, ..., b_n)$$

上記で a, b, c, a_i, b_i たちは自由変数，$a_i \neq b_i$ とは $\neg(a_i = b_i)$ の略記である．

T を L 論理式の集合とする．有限部分集合 $\Gamma \subseteq T \cup \mathrm{Eq}(\mathrm{L})$ と導出木 d で

$$\vdash_d \{\, \neg\psi \mid \psi \in \Gamma \,\}, \varphi$$

を満たすものが存在するとき，φ は T から（Tait 計算によって）証明可能であると言い $T \vdash \varphi$ と表記する．

命題 1.23. 各 $\varphi \in T \cup \mathrm{Eq}(\mathrm{L})$ については $T \vdash \varphi$ が成り立つ．

証明. 例 1.10 から従う． □

補題 1.24 (遡及補題（inversion lemma）)**.**

$\vee$ の遡及　$\vdash_d \Gamma, \varphi_0 \vee \varphi_1$ のとき，以下を満たす導出木 d' が見つかる．

$$\vdash_{d'} \Gamma, \varphi_0, \varphi_1 \ \& \ |d'| \leq |d| \ \& \ \rho(d') \leq \rho(d),$$

$\wedge$ の遡及　$\vdash_d \Gamma, \varphi_0 \wedge \varphi_1$ のとき，以下を満たす導出木 d_0, d_1 が見つかる．

$$\vdash_{d_0} \Gamma, \varphi_0 \ \& \ |d_0| \leq |d| \ \& \ \rho(d_0) \leq \rho(d),$$
$$\vdash_{d_1} \Gamma, \varphi_1 \ \& \ |d_1| \leq |d| \ \& \ \rho(d_1) \leq \rho(d).$$

$\forall$ の遡及　$\vdash_d \Gamma, \forall x\varphi[x/a]$ のとき，以下を満たす導出木 d' が見つかる．

$$\vdash_{d'} \Gamma, \varphi \ \& \ |d'| \leq |d| \ \& \ \rho(d') \leq \rho(d),$$

証明． いずれも $|d| \in \omega$ による帰納法で同じように証明できる．ここでは $\forall$ の遡及のみを示す．$|d| = 0$ の場合は空虚な真．$\forall x\varphi[x/a]$ が d の最後の推論規則の主論理式の場合は直部分導出木が条件を満たすのでそうでない場合を考える．

d の最後の推論規則が $(weak), (\vee), (\wedge), (cut), (\exists)$ の場合はいずれも直部分導出木に帰納法の仮定を適用し，得られる導出木に再び同じ推論規則を使えばよい．最後の推論規則が $(\forall)$ の場合を考える．以下では Γ は $\Delta, \forall y\psi[y/b]$ である．

$$(\forall)\ \dfrac{\dfrac{\vdots}{\Delta, \forall x\varphi[x/a], \psi}}{\Delta, \forall x\varphi[x/a], \forall y\psi[y/b]}\ \text{ここで } b \text{ は } \Delta, \forall x\varphi[x/a] \text{ に現われていない．}$$

ここで d の直部分導出木を d_0 とし，c を新しい自由変数とすると補題 1.15 から $\vdash_{d_0[c/b]}$ $\Delta, \forall x\varphi[x/a], \psi[c/b]$ が得られる[*7]．この導出木に帰納法の仮定を適用し，再び $(\forall)$ を使えばよい．導出木の高さやカットランクに関する条件は自明に満たされる．□

定理 1.25 (演繹定理)**.** $T + \varphi \vdash \psi \Leftrightarrow T \vdash \varphi \to \psi$

証明． $(\Rightarrow)$ $T + \varphi \vdash \psi$ とする．このとき，ある $\Gamma \subseteq \{\neg\theta \mid \theta \in T \cup \{\varphi\}\}$ と d で $\vdash_d \Gamma, \psi$ となる．$\neg\varphi \in \Gamma$ なら $(\vee)$ で $\neg\varphi \vee \psi$ を導出すればよい．$\neg\varphi \notin \Gamma$ の場合も一度 $(weak)$ によって $\neg\varphi$ を出せば後は同様である．

$(\Leftarrow)$ $\vee$ の遡及から明らか．□

命題 1.26 (モーダス・ポーネンス)**.** $T \vdash \varphi$ かつ $T \vdash \varphi \to \psi$ ならば $T \vdash \psi$

---

*7 d_0 に帰納法の仮定を適用できない理由は $b = a$ であって φ に a が含まれている場合にうまくいかないからである．

証明. 次を示せば十分.

$$\vdash_{d_0} \Gamma, \varphi \text{ かつ } \vdash_{d_1} \Delta, \neg\varphi \vee \psi \text{ならば} \vdash_d \Gamma, \Delta, \psi \text{を満たす } d \text{ が存在する.}$$

$\vee$ の遡及から $\vdash_{d_1'} \Delta, \psi, \neg\varphi$ なる d_1' が存在する．次が求める d である.

$$\dfrac{(weak)\dfrac{\dfrac{d_0 : (*)\dfrac{\vdots}{\Gamma, \varphi}}{\vdots}}{\Gamma, \Delta, \varphi} \qquad (weak)\dfrac{\dfrac{d_1' : (*)\dfrac{\vdots}{\Delta, \psi, \neg\varphi}}{\vdots}}{\Gamma, \Delta, \psi, \neg\varphi}}{\Gamma, \Delta, \psi}\,(cut)$$

□

定義 1.27 (矛盾). T を L 論理式の集合とする．ある $\Gamma \subseteq T \cup \mathrm{Eq}(\mathrm{L})$ と導出木 d で

$$\vdash_d \{\, \neg\psi \mid \psi \in \Gamma \,\}$$

を満たすものが存在するとき，T は矛盾するという．そうでないとき T は無矛盾という.

命題 1.28. T が矛盾する $\Leftrightarrow$ 任意の φ について $T \vdash \varphi$.

証明. ($\Rightarrow$) $(weak)$ を使えばよい.

($\Leftarrow$) 特に $T \vdash a = a$ かつ $T \vdash \neg(a = a)$ であるので (cut) を使えばよい. □

定理 1.29 (一般化された健全性定理). 任意の T について以下が正しい.

$$T \text{ がモデルを持つ} \Rightarrow T \text{ は無矛盾.}$$

証明. M を L 構造とし，等号は通常通り解釈されるとする．このとき任意の導出木 d に対し，d 中の各推件 Γ について $M \models \bigvee \Gamma$ が成り立つ．また，$M \models T$ なる M が存在するとき，T は矛盾しえない. □

系 1.30 (健全性定理). $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$

証明.

$$\begin{aligned} T \not\models \varphi &\Rightarrow T + \neg\varphi \text{ がモデルを持つ.} \\ &\Rightarrow T + \neg\varphi \text{ が無矛盾.} \\ &\Rightarrow T \nvdash \varphi. \end{aligned}$$

□

完全性定理も通常のヘンキン定数の追加による証明が通る.

参考文献

[Lee07] Chung Tong Lee. Note on cut-elimination. 2007.

[Sch77] Helmut Schwichtenberg. *Proof Theory: Some Applications of Cut-Elimination*, Vol. 90 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. Elsevier, 1977.

[新井 21] 新井敏康. 数学基礎論 増補版. 東京大学出版会, 2021.

[田中 19] 田中一之. 数学基礎論序説：数の体系への論理的アプローチ. 裳華房, 2019.