Theorem II.2.7 (nomal form theorem) の証明.

橋本 航気

2022 年 5 月 21 日

定理 0.1 (形式化されたクリーネの正規形定理). $\varphi(X)$ を Σ^0_1 論理式とする．このとき，次が RCA_0 で証明できるような Σ^0_0 論理式 $\theta(s)$ が存在する．

$$\forall X(\varphi(X) \leftrightarrow \exists m\theta(X[m]))$$

ただしここで $X[m] = \langle \xi_0, \xi_0, ..., \xi_{m-1} \rangle$ で $\xi_i = \begin{cases} 1 & \text{if } i \in X \\ 0 & \text{if } i \notin X \end{cases}$ である．また φ は X 以外の自由変数を持ってもよく，その場合 θ も同じ自由変数を含むことになる．

これは定理のステートメントの書き方のせいでよく示すべきことが分からないが，より形式的に書き直せば以下である．

定理 0.2 (形式化されたクリーネの正規形定理). $\varphi(X)$ を Σ^0_1 論理式とする．このとき，次が RCA_0 で証明できるような Σ^0_0 論理式 $\theta(s)$ が存在する．任意の $X \subseteq \mathbb{N}$ について

$$\begin{aligned} \varphi(X) &\leftrightarrow \exists m\exists s[(s \in \mathbb{N}^m \wedge \forall i < m\{(i \in X \to s(i) = 1) \wedge (i \notin X \to s(i) = 0)\}) \wedge \theta(s)] \\ &\leftrightarrow \exists m\forall s[(s \in \mathbb{N}^m \wedge \forall i < m\{(i \in X \to s(i) = 1) \wedge (i \notin X \to s(i) = 0)\}) \to \theta(s)] \end{aligned}$$

また φ は X 以外の自由変数を持ってもよく，その場合 θ も同じ自由変数を含むことになる．

証明. RCA_0 で議論する．$\varphi(X)$ が Σ^0_1 なので，ある Σ^0_0 論理式 ψ によって

$$\varphi(X) \leftrightarrow \exists x\psi(x, X)$$

となる[*1]．いま $\psi(x, X)$ は述語論理の公理によって

（いくつかの有界量化）[quantifier free 論理式]

の形になっているとしてよい．

$\psi(x, X)$ 中に現われる「$t \in X$」（t は数項）の部分を一つ選び，新しい変数 n_1 を用意して $\exists n_1(n_1 = t \wedge n_1 \in X)$ に置き換える．もし t の中に束縛されている変数がなければ，$\exists n_1$ を論理

[*1] もし $\varphi(X)$ が $\exists x_1 \exists_2, ...$ のようにたくさんの存在量化を持っていてもよい．これはペアリングによって結局（非有界）存在量化を一つにまとめることができるからであるが，この事実は証明中でも説明するのでここでは詳しく述べない．

式の一番外にもっていく．そうでなければ，$\exists n_1$ を，t に含まれる変数を縛っている量化子の手前に（もしあれば）もっていく．これによって次の (1) か (2) の形になる．（s は数項）

(1) $\exists x_1 < s \exists n_1 (\cdots n_1 \in X \cdots)$
(2) $\forall x_1 < s \exists n_1 (\cdots n_1 \in X \cdots)$

(1) ならそのまま量化の順番を入れ替えて $\exists n_1 \exists x_1 < s(\cdots n_1 \in X \cdots)$ とする．(2) なら新しい変数 n_2 を用意して $\exists n_2 \forall x_1 < s \exists n_1 < n_2(\cdots n_1 \in X \cdots)$ とする[*2]．この手続きを続けることによって，次の形に同値性を保ったまま変形できる，

$$\exists n_k \text{（いくつかの有界量化）} (\cdots n_1 \in X \cdots)$$

以上の手続きを他の「$t' \in X$」（t' は数項）全てにも適用して次の論理式が得られる．

$$\exists n_p \exists n_l \cdots \exists n_k \text{（いくつかの有界量化）} \quad \underbrace{(\cdots n_1 \in X \cdots n_l \in X \cdots)}_{\text{quantifier-free で，} t \in X \text{ の } t \text{ は必ず変数記号}}$$

このとき次が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&\varphi(X) \\
&\leftrightarrow \exists x \psi(x, X) \\
&\leftrightarrow \exists x \exists n_p \exists n_l \cdots \exists n_k \text{（いくつかの有界量化）} (\cdots n_1 \in X \cdots n_l \in X \cdots) \\
&\leftrightarrow \exists m (\underbrace{\exists x < m \exists n_p < m \cdots \exists n_k < m}_{\text{有界量化}} \text{（いくつかの有界量化）} (\cdots n_1 \in X \cdots n_l \in X \cdots) \\
&\leftrightarrow \exists m (\text{（いくつかの有界量化）} (\cdots n_1 \in X \cdots n_l \in X \cdots)) \\
&\leftrightarrow \exists m \exists s (\underbrace{s \in \mathbb{N}^m \wedge \forall i < m \{ i \in X \to s(i) = 1 \wedge i \notin X \to s(i) = 0 \}}_{s = X[m]} \\
&\qquad \wedge \text{（いくつかの有界量化）} (\cdots s(n_1) = 1 \cdots s(n_l) = 1 \cdots)) \\
&\leftrightarrow \exists m \forall s (s \in \mathbb{N}^m \wedge \forall i < m \{ i \in X \to s(i) = 1 \wedge i \notin X \to s(i) = 0 \} \\
&\qquad \to \text{（いくつかの有界量化）} (\cdots s(n_1) = 1 \cdots s(n_l) = 1 \cdots))
\end{aligned}$$

従って $\theta(s)$ は変形最後の 2 行目の論理式とすればよい．これは Σ^0_0 である． □

参考文献

[1] 田中 一之, “数学基礎論序説　数の体系への論理的アプローチ”, 裳華房,2019.
[2] S. G. Simpson, Subsystems of Second Order Arithmetic, Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, 1999.

[*2] この操作変形をしても同値性が保たれることは採集公理（collection axiom）による．この公理については例えば [1] などを見よ．しかしここで必要とされている採集公理を RCA_0 から証明するのも難しくはない．