第三节 三重积分

一、三重积分的概念

二、三重积分的计算

一、三重积分的概念

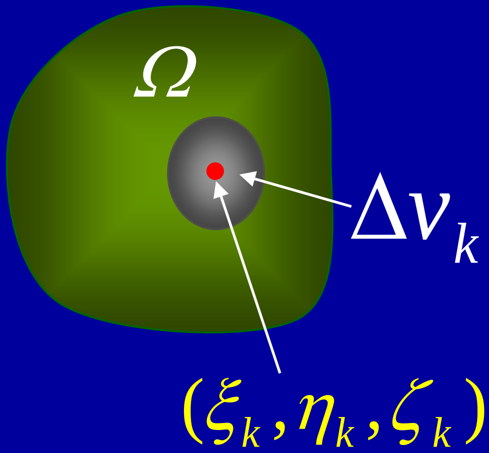
引例: 设在空间有限闭区域 Ω 内分布着某种不均匀的物质,密度函数为 $\mu(x, y, z) \in C$,求分布在 Ω 内的物质的质量 M .

解决方法: 类似二重积分解决问题的思想, 采用

"大化小, 常代变, 近似和, 求极限"

可得

$$M = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \mu(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta v_k$$



定义. 设 $f(x,y,z)$, $(x,y,z)\in\Omega$, 若对 Ω 作**任意分割**: $\Delta v_k\ (k=1,2,\cdots,n)$, **任意取点** $(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\in\Delta v_k$, 下列 "乘积和式" 极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta v_k \overset{\text{记作}}{=\!=\!=} \iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v$$

存在, 则称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上的**三重积分**.

$\mathrm{d}v$ 称为**体积元素**, 在直角坐标系下常写作 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

性质: 三重积分的性质与二重积分相似. 例如

中值定理. 设 $f(x,y,z)$ 在有界闭域 Ω 上连续, V 为 Ω 的体积, 则存在 $(\xi,\eta,\zeta)\in\Omega$, 使得

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = f(\xi,\eta,\zeta)V$$

二、三重积分的计算

1. 利用直角坐标计算三重积分

先假设连续函数 $f(x,y,z)\geq 0$, 并将它看作某物体的密度函数，通过计算该物体的质量引出下列各计算方法:

方法1. 投影法 (“先一后二”)

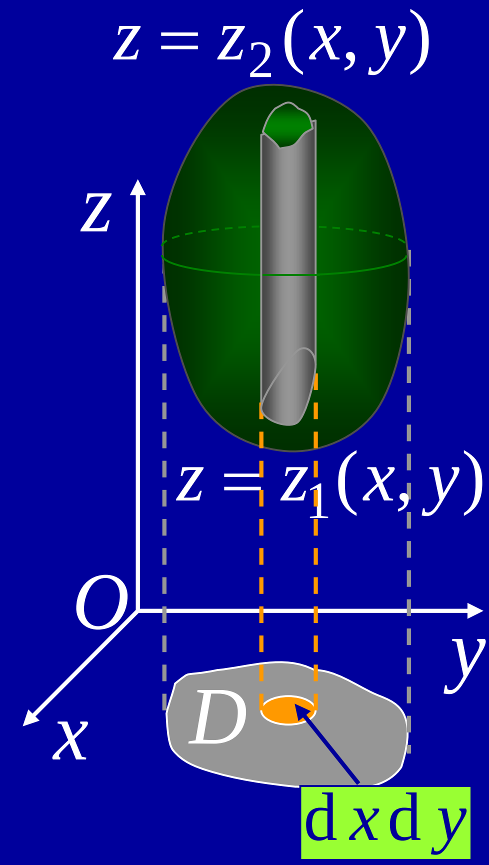
方法2. 截面法 (“先二后一”)

方法3. 三次积分法

最后, 推广到一般可积函数的积分计算.

方法1. 投影法 (“先一后二”)

$$\Omega:\begin{cases} z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\\ (x,y)\in D\end{cases}$$



细长柱体微元的质量为

$$\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

该物体的质量为

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$$

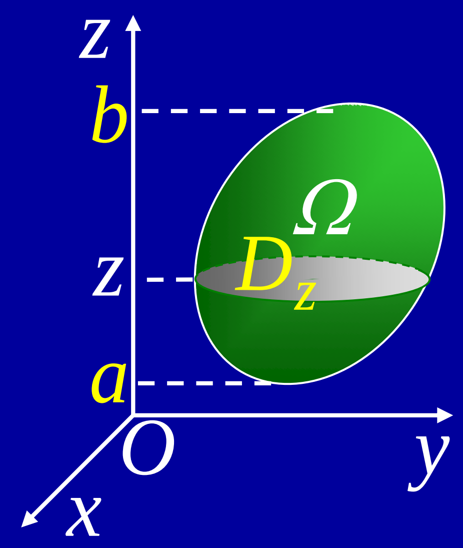
$$=\iint_D\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{记作}}{=\!=}\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

微元线密度≈ $f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

方法2. 截面法 (“先二后一”)

$$\Omega:\begin{cases}(x,y)\in D_z\\ a\le z\le b\end{cases}$$



以D_z为底, dz 为高的柱形薄片质量为

$$\left(\iint_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z$$

面密度≈ $f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$

该物体的质量为

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$$

$$=\int_a^b\left(\iint_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z$$

$$\overset{\text{记作}}{=\!=}\int_a^b \mathrm{d}z\iint_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

方法3. 三次积分法

设区域 $\Omega:\begin{cases} z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y) \\ (x,y)\in D:\begin{cases} y_1(x)\le y\le y_2(x) \\ a\le x\le b \end{cases} \end{cases}$

利用投影法结果，把二重积分化成二次积分即得:

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

投影法

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

当被积函数在积分域上变号时, 因为

$$f(x,y,z)$$

$$=\frac{|f(x,y,z)|+f(x,y,z)}{2}-\frac{|f(x,y,z)|-f(x,y,z)}{2}$$

$$=f_1(x,y,z)-f_2(x,y,z)$$

均为为非负函数

根据重积分性质仍可用前面介绍的方法计算.

小结: 三重积分的计算方法

方法1. “先一后二”

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \iint_{D} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

方法2. “先二后一”

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \int_{a}^{b} \mathrm{d}z \iint_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

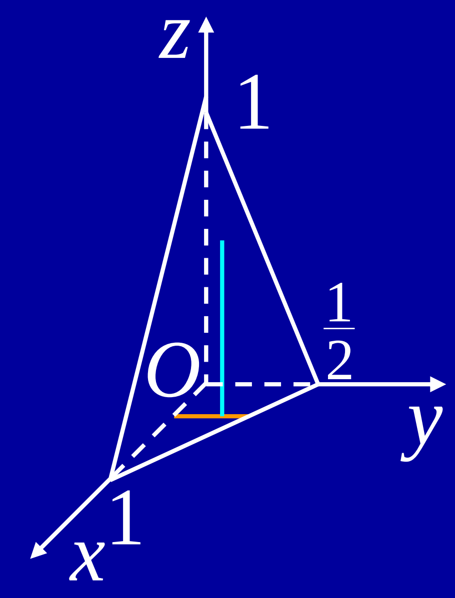
方法3. “三次积分”

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \int_{a}^{b} \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

三种方法(包含12种形式)各有特点, 具体计算时应根据被积函数及积分域的特点灵活选择.

例1. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 为三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域 .

解: $\Omega:\begin{cases} 0\le z\le 1-x-2y \\ 0\le y\le \frac{1}{2}(1-x) \\ 0\le x\le 1 \end{cases}$



$$\therefore \iiint_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

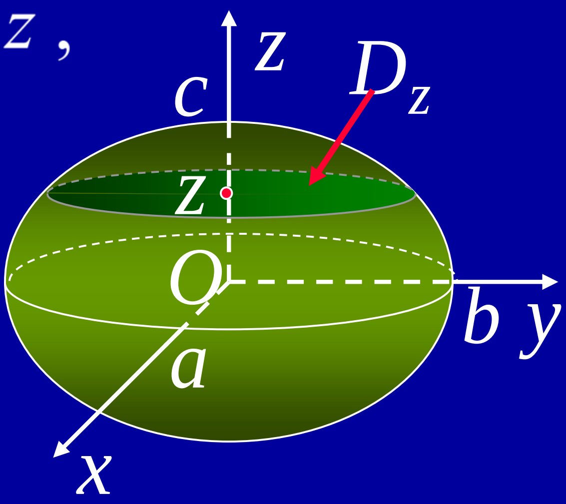
$$=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}(1-x)}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-2y}\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}(1-x)}(1-x-2y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1(x-2x^2+x^3)\mathrm{d}x=\frac{1}{48}$$

例2. 计算三重积分 $\iiint_\Omega z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，

其中 $\Omega: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1.$



解: $\Omega: \begin{cases} -c\le z\le c \\ D_z: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1-\dfrac{z^2}{c^2} \end{cases}$

用 “先二后一”

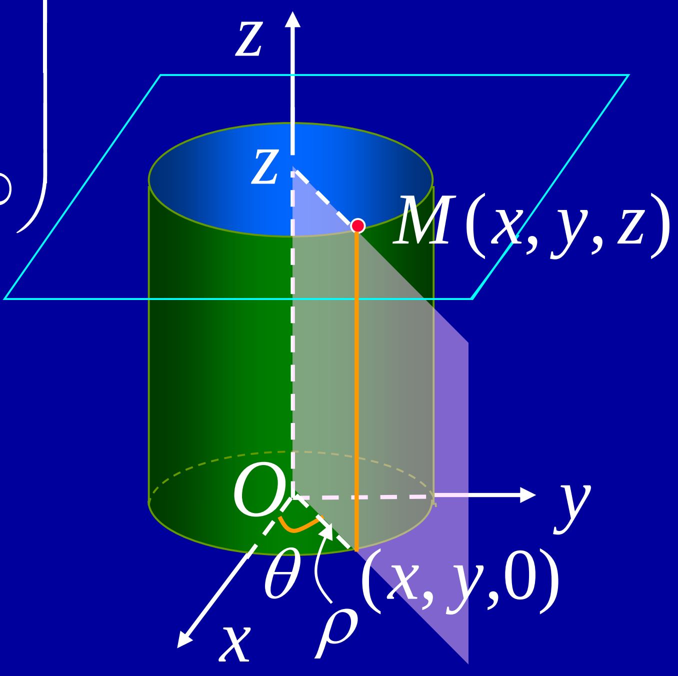
$$\therefore \iiint_\Omega z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{-c}^{c} z^2\,\mathrm{d}z \iint_{D_z} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-c}^{c} z^2\,\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z = \frac{4}{15}\pi abc^3$$

2. 利用柱坐标计算三重积分

设 $M(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$,将 x,y 用极坐标 ρ,θ 代替, 则 (ρ,θ,z) 就称为点 M 的柱坐标. 直角坐标与柱面坐标的关系:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0\le\rho<+\infty \\ 0\le\theta\le 2\pi \\ -\infty<z<+\infty \end{pmatrix}$$



坐标面分别为

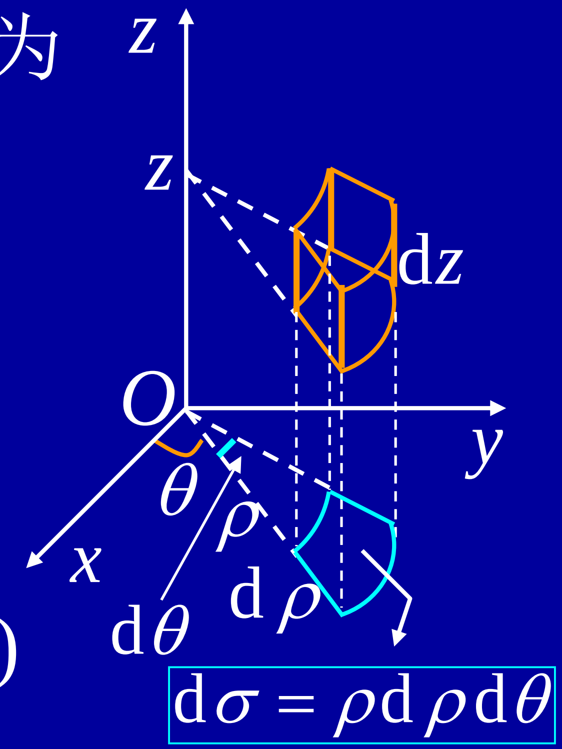
$\rho=$ 常数 ⟶ 圆柱面

$\theta=$ 常数 ⟶ 半平面

$z=$ 常数 ⟶ 平面

如图所示, 在柱面坐标系中体积元素为

$$\mathrm{d}v = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$



因此 $$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega} F(\rho,\theta,z)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

其中 $F(\rho,\theta,z) = f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta,\ z)$

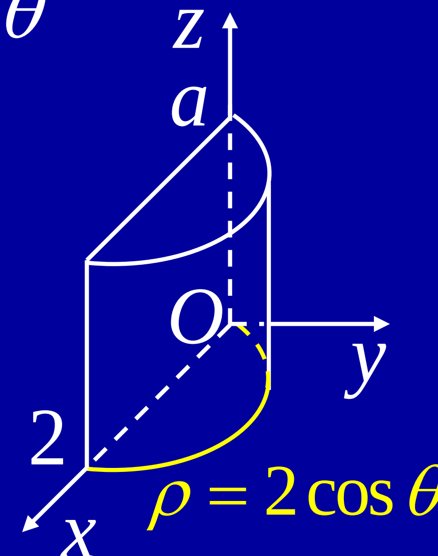
适用范围:

1) **积分域**表面用柱面坐标表示时**方程简单**;

2) **被积函数**用柱面坐标表示时**变量互相分离**.

例3. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 其中Ω为由柱面 $x^2+y^2=2x$ 及平面 $z=0, z=a\ (a>0), y=0$ 所围成半圆柱体.

解: 在柱面坐标系下 $\Omega:\begin{cases} 0\le\rho\le 2\cos\theta \\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2} \\ 0\le z\le a \end{cases}$



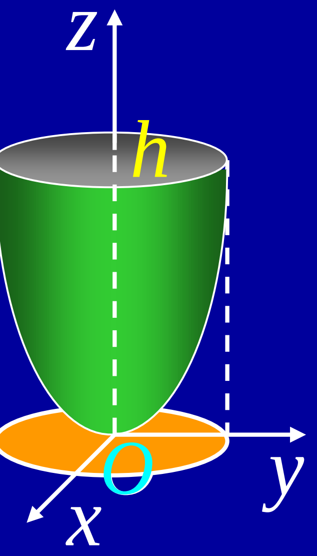
$$\text{原式}=\iiint_{\Omega} z\rho^2\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^a z\mathrm{d}z\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2\,\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{4a^2}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{8}{9}a^2$$

$\boxed{\mathrm{d}v=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z}$

例4. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{1+x^2+y^2}$，其中 Ω 由抛物面 $x^2+y^2=4z$ 与平面 $z=h\,(h>0)$ 所围成 .



解: 在柱面坐标系下 $\Omega:\begin{cases}\frac{\rho^2}{4}\le z\le h\\ 0\le\rho\le 2\sqrt{h}\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$

$$\text{原式}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sqrt{h}}\frac{\rho}{1+\rho^2}\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{4}}^{h}\mathrm{d}z$$

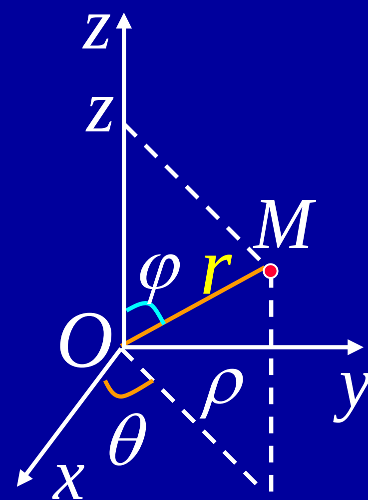
$$\boxed{\mathrm{d}v=\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z}$$

$$=2\pi\int_0^{2\sqrt{h}}\frac{\rho}{1+\rho^2}\left(h-\frac{\rho^2}{4}\right)\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{\pi}{4}[(1+4h)\ln(1+4h)-4h]$$

3. 利用球坐标计算三重积分

设 $M(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$, 其柱坐标为(ρ,θ,z), 令 $|\overrightarrow{OM}|=r$, $\angle zOM=\varphi$, 则(r,θ,φ)就称为点M的球坐标.



直角坐标与球面坐标的关系

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0\le r<+\infty \\ 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\varphi\le\pi \end{pmatrix}$$

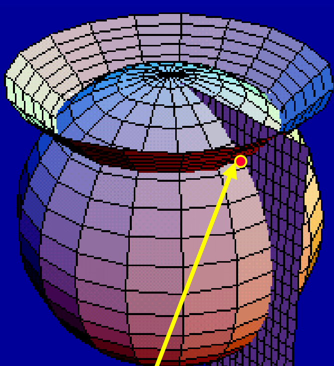
$$\rho = r\sin\varphi$$
$$z = r\cos\varphi$$

坐标面分别为

$r=$常数 ⟶ 球面

$\theta=$常数 ⟶ 半平面

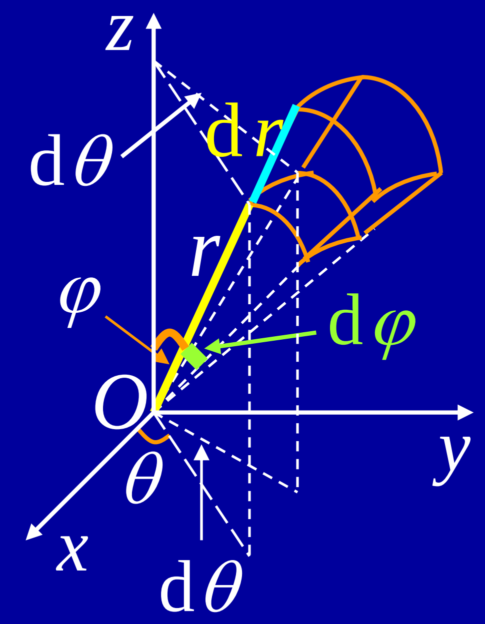
$\varphi=$常数 ⟶ 锥面



$M(r,\theta,\varphi)$

如图所示, 在球面坐标系中体积元素为

$$\mathrm{d}v = r^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$



因此有

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_{\Omega} F(r,\theta,\varphi)\, r^2 \sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

其中 $F(r,\theta,\varphi) = f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)$

适用范围:

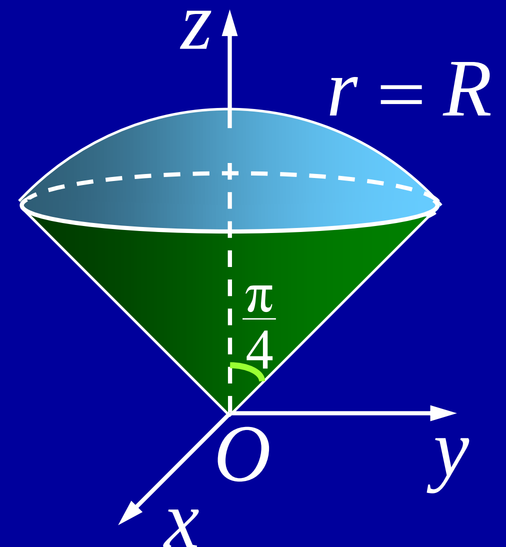
1) **积分域**表面用球面坐标表示时**方程简单**;

2) **被积函数**用球面坐标表示时**变量互相分离**.

例5. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 所围立体.

解: 在球面坐标系下

$$\Omega:\begin{cases}0\le r\le R\\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$$



$$\therefore\ \iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^4\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{5}\pi R^5(2-\sqrt{2})$$

$$\boxed{\mathrm{d}v=r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta}$$

例6. 求曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^3 z\ (a>0)$ 所围立体体积.

解: 由曲面方程可知, 立体位于 xOy 面上部, 且关于 xOz yOz 面对称, 并与 xOy 面相切, 故在球坐标系下所围立体为

$$\Omega: 0 \le r \le a\sqrt[3]{\cos\varphi},\ 0 \le \varphi \le \pi/2,\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

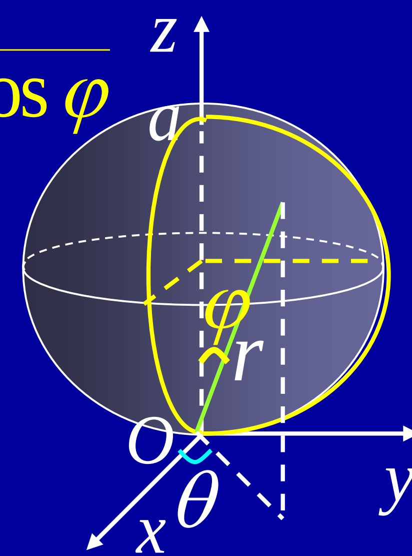
利用对称性, 所求立体体积为

$$V = \iiint_\Omega \mathrm{d}v$$

$$= 4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta \int_0^{\pi/2}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \int_0^{a\sqrt[3]{\cos\varphi}} r^2\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{2}{3}\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{3}\pi a^3$$

$$r = a\sqrt[3]{\cos\varphi}$$



$$\boxed{\mathrm{d}v = r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta}$$

内容小结

坐标系	体积元素	适用情况
直角坐标系	$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$	积分区域多由坐标面围成；
柱面坐标系	$\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$	被积函数形式简洁, 或
球面坐标系	$r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$	变量可分离.

* **说明:**

三重积分也有类似二重积分的**换元积分公式:**

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega^*} F(u,v,w)\,|J|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

对应雅可比行列式为 $J = \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$

思考与练习

1. 将$I=\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$用三次积分表示, 其中$\Omega$ 由六个平面 $x=0,\ x=2,\ y=1,\ x+2y=4,\ z=x,\ z=2$ 所围成 , $f(x,y,z)\in C(\Omega)$.

提示:

$$\Omega:\begin{cases} x\le z\le 2 \\ 1\le y\le 2-\frac{1}{2}x \\ 0\le x\le 2 \end{cases}$$

$$I=\int_0^2 \mathrm{d}x\int_1^{2-\frac{1}{2}x}\mathrm{d}y\int_x^2 f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

2. 设 $\Omega: x^2+y^2+z^2 \le 1$, 计算

$$\iiint_{\Omega} \frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\,\mathrm{d}v$$

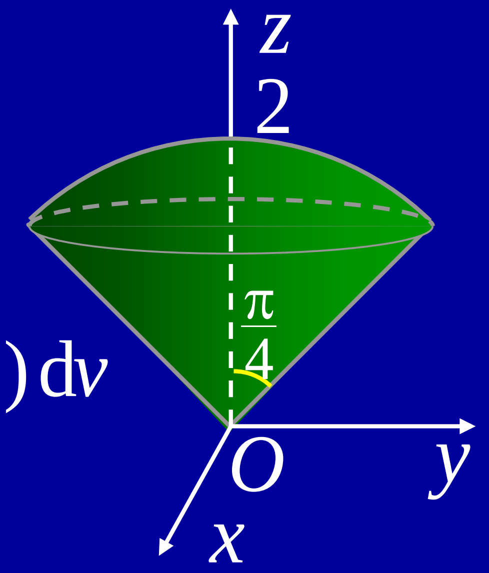
提示: 利用对称性

$$\text{原式} = \iint_{x^2+y^2\le 1} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\,\mathrm{d}z$$

$$= 0$$

奇函数

3. 设Ω由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 所围成，计算 $I=\iiint_\Omega (x+y+z)^2\,\mathrm{d}v$.



提示:

$$I=\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2+\underline{2xy+2yz+2xz})\,\mathrm{d}v$$

利用对称性

$$=\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v$$

用球坐标

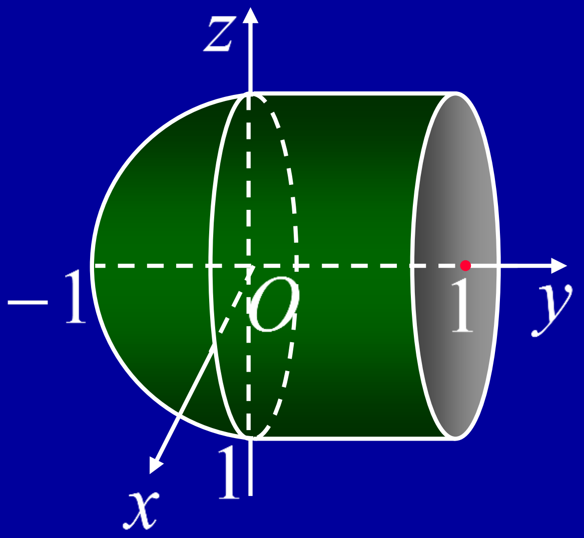
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^2 r^4\,\mathrm{d}r=\frac{64}{5}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi$$

备用题 1. 计算 $I=\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 Ω 由 $y=-\sqrt{1-x^2-z^2}$，$x^2+z^2=1$，$y=1$ 所围成.

分析： 若用“先二后一”，则有

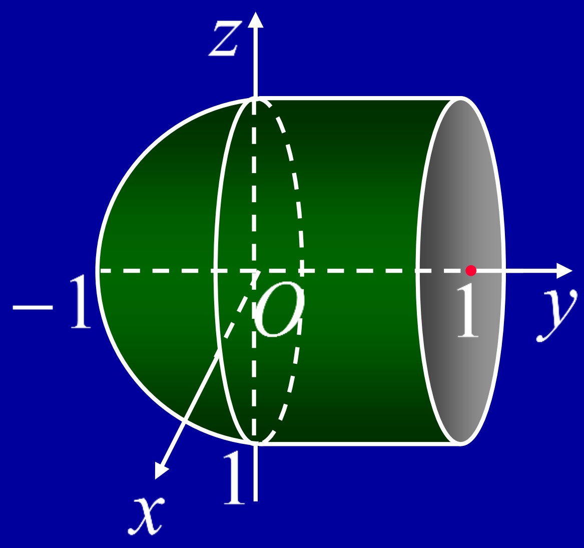
$$I=\int_{-1}^{0} y\mathrm{d}y\iint_{D_y}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$$

$$+\int_{0}^{1} y\,\mathrm{d}\,y\iint_{D_y}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$$



计算较繁！采用“三次积分”较好.

解: Ω 由 $y=-\sqrt{1-x^2-z^2}\,,\ x^2+z^2=1,\ y=1$ 所围, 故可表为



$$\Omega:\begin{cases}-\sqrt{1-x^2-z^2}\le y\le 1\\ -\sqrt{1-x^2}\le z\le\sqrt{1-x^2}\\ -1\le x\le 1\end{cases}$$

$$I=\iiint_\Omega y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}z\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1}y\,\mathrm{d}y=\cdots=\frac{28}{45}$$

思考: 若被积函数为 $f(y)$ 时, 如何计算简便?

2. 计算$I=\iiint_\Omega (x^2+5xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$,其中

Ω 由 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $z=1$, $z=4$围成.

解: $I=\iiint_\Omega \boxed{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+5\iiint_\Omega xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

利用对称性

$$=\frac{1}{2}\iiint_\Omega (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+0$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^4\mathrm{d}z\iint_{D_z}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^4\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2z}}r^3\,\mathrm{d}r=21\pi$$