第五节

对坐标的曲面积分

一、有向曲面及曲面元素的投影

二、 对坐标的曲面积分的概念与性质

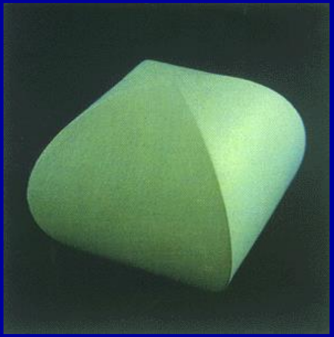
三、对坐标的曲面积分的计算法

四、两类曲面积分的联系

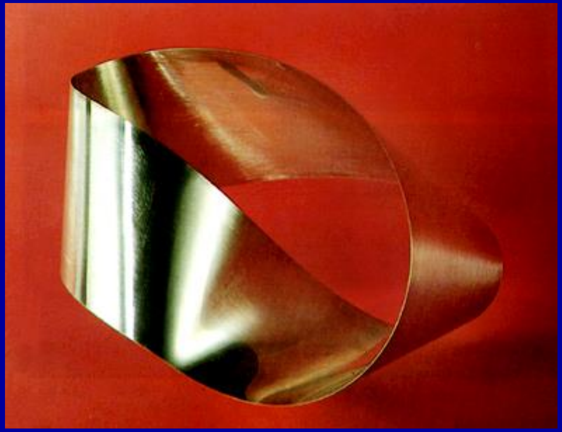
HIGHER EDUCATION PRESS

一、有向曲面及曲面元素的投影

- 曲面分类 $\begin{cases}\text{双侧曲面}\\ \text{单侧曲面}\end{cases}$

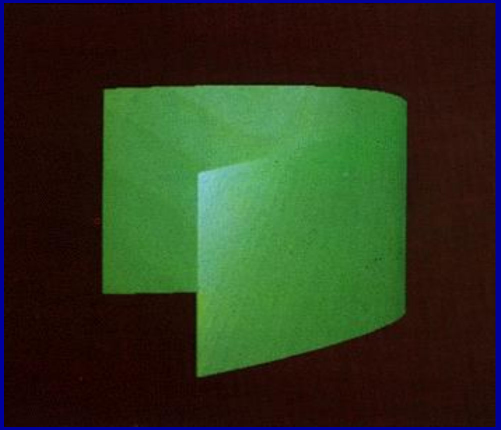


曲面分内侧和外侧

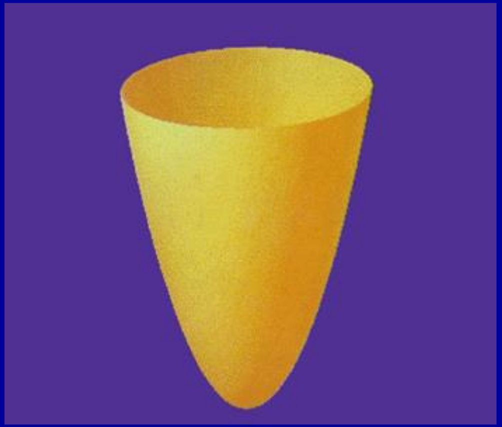


莫比乌斯带

(单侧曲面的典型)



曲面分左侧和右侧



曲面分上侧和下侧

• 指定了侧的曲面叫有向曲面，其方向用法向量指向表示：

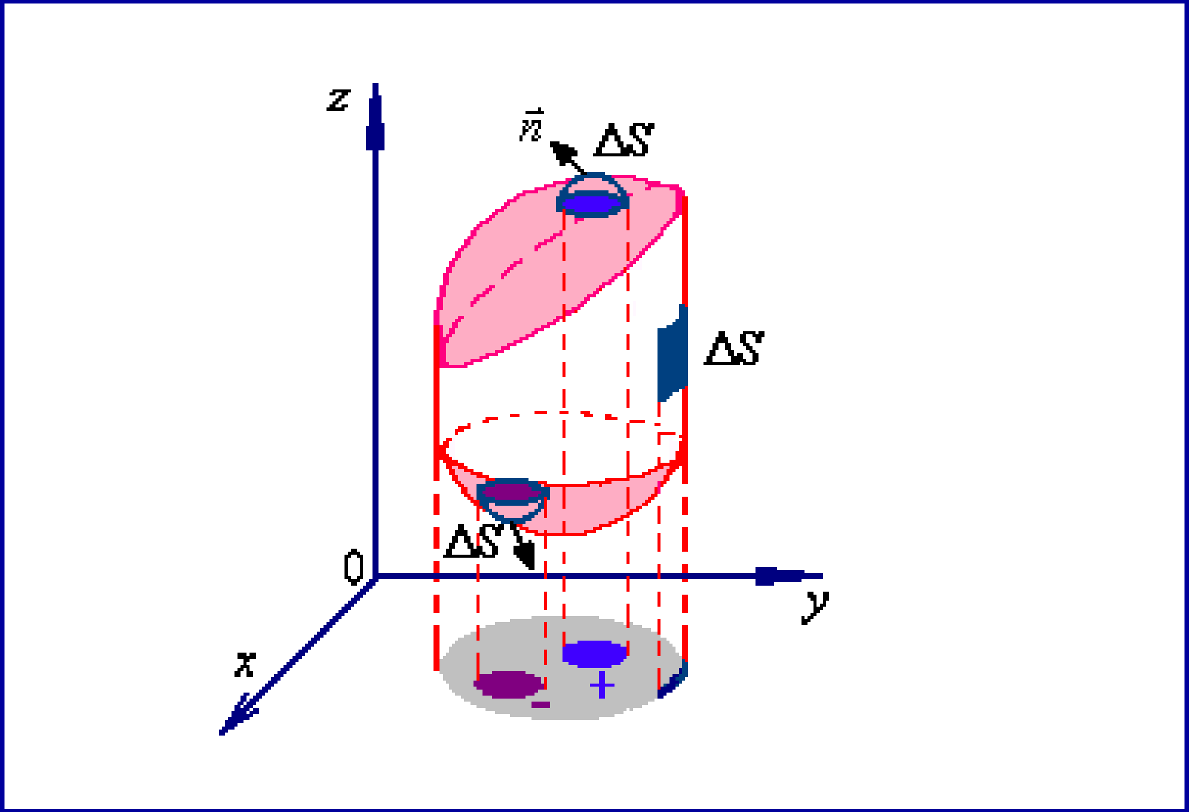
方向余弦	$\cos\alpha$	$\cos\beta$	$\cos\gamma$	封闭曲面
侧的规定	>0 为前侧 <0 为后侧	>0 为右侧 <0 为左侧	>0 为上侧 <0 为下侧	外侧 内侧

• 设 Σ 为有向曲面，其面元 ΔS 在 xOy 面上的投影记为 $(\Delta S)_{xy}$，$(\Delta S)_{xy}$ 的面积为 $(\Delta\sigma)_{xy}\ge 0$，则规定

$$(\Delta S)_{xy}=\begin{cases}(\Delta\sigma)_{xy}, & \text{当}\cos\gamma>0\text{时}\\ -(\Delta\sigma)_{xy}, & \text{当}\cos\gamma<0\text{时}\\ 0, & \text{当}\cos\gamma\equiv 0\text{时}\end{cases}$$

类似可规定 $(\Delta S)_{yz}$，$(\Delta S)_{zx}$

ΔS 在xoy的投影$(\Delta S)_{xy}$,



二、 对坐标的曲面积分的概念与性质

1. 引例 设稳定流动的不可压缩流体的速度场为

$$\vec{v}=(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$$

求单位时间流过有向曲面Σ的流量Φ.

分析: 若Σ是面积为S的平面,

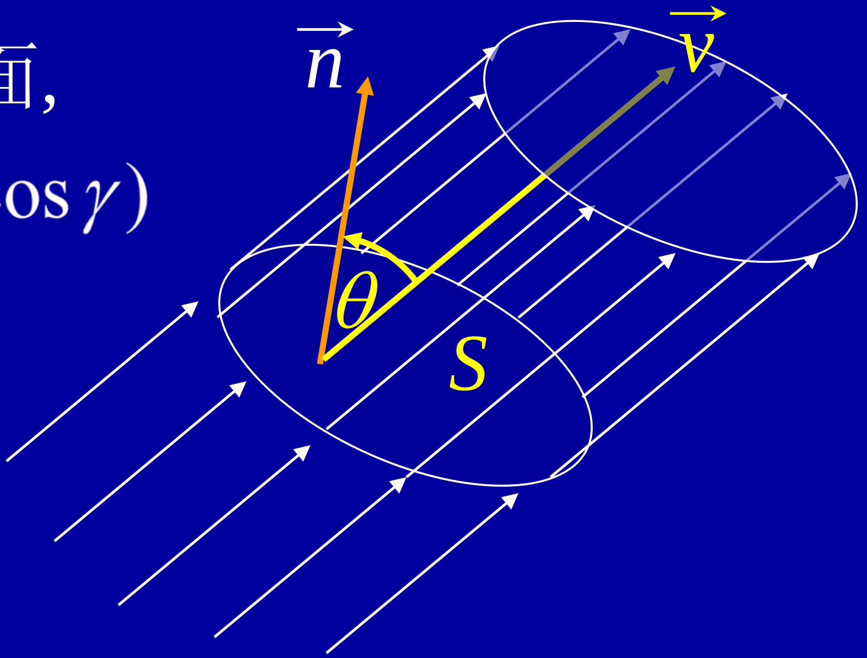
法向量: $\vec{n}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

流速为常向量: $\vec{v}$

则流量

$$\Phi=S\cdot\left|\vec{v}\right|\cos\theta$$

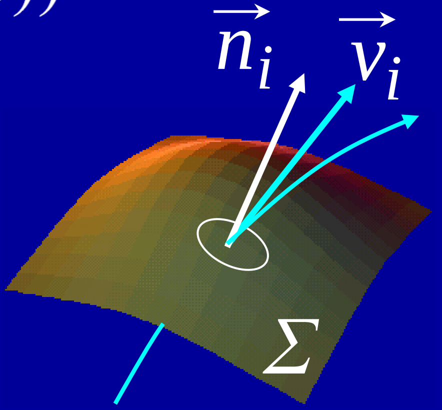
$$=S\,\vec{v}\cdot\vec{n}$$



对一般的有向曲面Σ，对稳定流动的不可压缩流体的速度场 $\vec{v}=(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$

用“大化小, 常代变, 近似和, 取极限”

进行分析可得 $\Phi=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{v}_i\cdot\vec{n}_i\,\Delta S_i$



设 $\vec{n}_i=(\cos\alpha_i,\cos\beta_i,\cos\gamma_i)$, 则

$$\Phi=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\big[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha_i+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\beta_i+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i\big]\Delta S_i$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\big[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}\big]$$

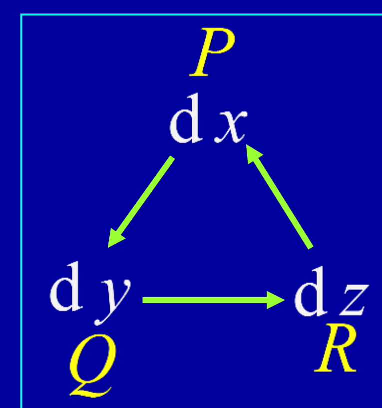
2. 定义： 设 Σ 为光滑的有向曲面, 在 Σ 上定义了一个向量场 $\vec{A}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$, 若对 Σ 的任意分割和在局部面元上任意取点, 下列极限都存在

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Big[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}\Big]$$

则称此极限为向量场 $\vec{A}$ 在有向曲面上对坐标的曲面积分, 或第二类曲面积分. 记作

$$\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

P, Q, R 叫做**被积函数**; Σ 叫做**积分曲面**.



$\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 称为P 在有向曲面Σ上**对 y, z 的曲面积分;**

$\iint_{\Sigma} Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$ 称为Q 在有向曲面Σ上**对 z, x 的曲面积分;**

$\iint_{\Sigma} R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 称为R 在有向曲面Σ上**对 x, y 的曲面积分.**

引例中, 流过有向曲面 Σ 的流体的流量为

$$\Phi = \iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

若记 **Σ 正侧**的单位法向量为 $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

令 $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \vec{n}\,\mathrm{d}S = (\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \mathrm{d}z\mathrm{d}x, \mathrm{d}x\mathrm{d}y)$

$\vec{A} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$

则对坐标的曲面积分也常写成如下向量形式

$$\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{\Sigma} \vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

3. 性质

(1) 若 $\Sigma = \bigcup_{i=1}^{k} \Sigma_i$, 且 Σ_i 之间无公共内点, 则

$$\iint_{\Sigma} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \sum_{i=1}^{k} \iint_{\Sigma_i} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

(2) 用 Σ^- 表示 Σ 的反向曲面, 则

$$\iint_{\Sigma^-} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = -\iint_{\Sigma} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

三、对坐标的曲面积分的计算法

定理: 设光滑曲面 $\Sigma: z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$ 取上侧, $R(x, y, z)$ 是 Σ 上的连续函数, 则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

证: $$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

$\because \Sigma$ 取上侧, $\therefore (\Delta S_i)_{xy} = (\Delta \sigma_i)_{xy}$

$\zeta_i = z(\xi_i, \eta_i)$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i))(\Delta \sigma_i)_{xy}$$

$$= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

说明: 如果积分曲面 Σ 取下侧, 则

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

- 若 $\Sigma : x = x(y,z),\ (y,z) \in D_{yz}$,则有

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \pm\iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

(前正后负)

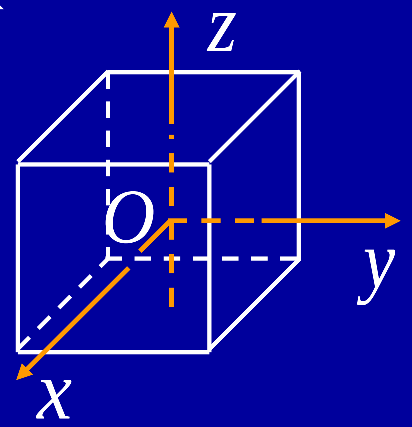
- 若 $\Sigma : y = y(z,x),\ (z,x) \in D_{zx}$,则有

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \pm\iint_{D_{zx}} Q(x,y(z,x),z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

(右正左负)

例1. 计算 $\iint_\Sigma (x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

其中 Σ 是以原点为中心, 边长为 a 的正立方体的整个表面的外侧.



解: 利用对称性.

$$原式 = 3\iint_\Sigma (z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Σ 的顶部 $\Sigma_1: z=\frac{a}{2}\ \left(|x|\le\frac{a}{2}, |y|\le\frac{a}{2}\right)$ 取上侧

Σ 的底部 $\Sigma_2: z=-\frac{a}{2}\ \left(|x|\le\frac{a}{2}, |y|\le\frac{a}{2}\right)$ 取下侧

$$= 3\left[\iint_{\Sigma_1}(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{\Sigma_2}(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right]$$

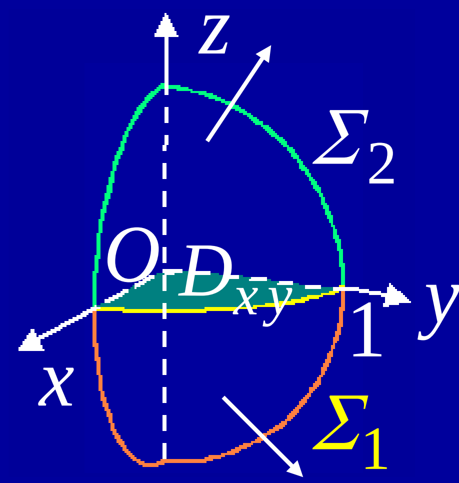
$$= 3\left[\iint_{D_{xy}}\left(\frac{a}{2}+x\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint_{D_{xy}}\left(-\frac{a}{2}+x\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right]$$

$$= 3a\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 3a^3$$

例2. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 外侧在第一和第八卦限部分.

思考: 下述解法是否正确:

$$\boxed{\text{根据对称性}\ \iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \cancel{=} 0}$$



解: 把 Σ 分为上下两部分

$$\begin{cases} \Sigma_1: z=-\sqrt{1-x^2-y^2} \\ \Sigma_2: z=\sqrt{1-x^2-y^2} \end{cases}$$

$$(x,y)\in D_{xy}:\begin{cases} x^2+y^2\le 1 \\ x\ge 0,\ y\ge 0 \end{cases}$$

$$\therefore \iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma_1} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{\Sigma_2} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

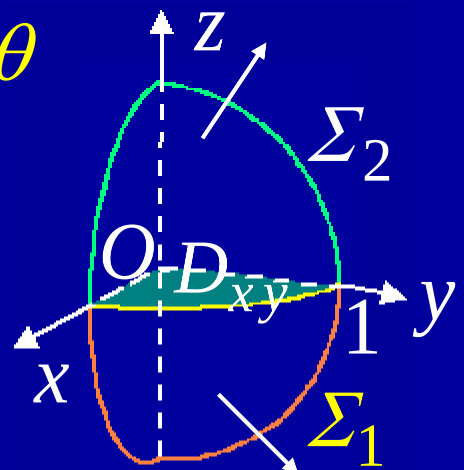
$$= -\iint_{D_{xy}} xy\left(-\sqrt{1-x^2-y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} r^2\sin\theta\cos\theta\sqrt{1-r^2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r$$

$$= 2/15$$



例3. 设S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧，计算

$$I=\iint_S \frac{2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x\cos^2 x}+\frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x}{\cos^2 y}-\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z\cos^2 z}$$

解: 利用轮换对称性，有

$$\iint_S \frac{2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x\cos^2 x}=\iint_S \frac{2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z\cos^2 z},\quad \iint_S \frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x}{\cos^2 y}=\iint_S \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\cos^2 z}=0$$

$$\therefore I=\iint_S \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z\cos^2 z}=2\iint_{x^2+y^2\le 1}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2-y^2}\,\cos^2\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^2}\,\cos^2\sqrt{1-r^2}}=-4\pi\int_0^1\frac{\mathrm{d}\sqrt{1-r^2}}{\cos^2\sqrt{1-r^2}}$$

$$=4\pi\tan 1$$

四、两类曲面积分的联系

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\big[\,P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}\,\big]$$

曲面的方向用法向量的方向余弦刻画

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\big[\,P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha_i + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\beta_i + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i\,\big]\Delta S_i$$

$$= \iint_{\Sigma}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

令 $\vec{A} = (P, Q, R),\ \vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

$\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \vec{n}\,\mathrm{d}S = (\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \mathrm{d}z\mathrm{d}x, \mathrm{d}x\mathrm{d}y)$

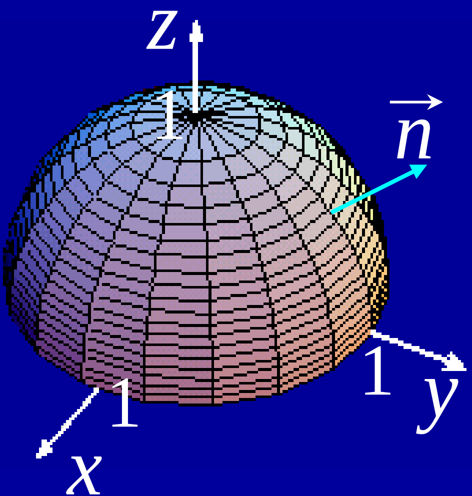
向量形式 $\iint_{\Sigma} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iint_{\Sigma} \vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$

$A_n = \vec{A}\cdot\vec{n}$ ($\vec{A}$ 在 $\vec{n}$ 上的投影)

$$= \iint_{\Sigma} A_n\,\mathrm{d}S$$

例4. 设 $\Sigma: z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, γ 是其外法线与 z 轴正向夹成的锐角, 计算 $I=\iint_\Sigma z^2\cos\gamma\,\mathrm{d}S$.

解:
$$I=\iint_\Sigma z^2\cos\gamma\,\mathrm{d}S$$
$$=\iint_\Sigma z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\iint_{D_{xy}}(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^2)\,r\,\mathrm{d}r$$
$$=\frac{\pi}{2}$$



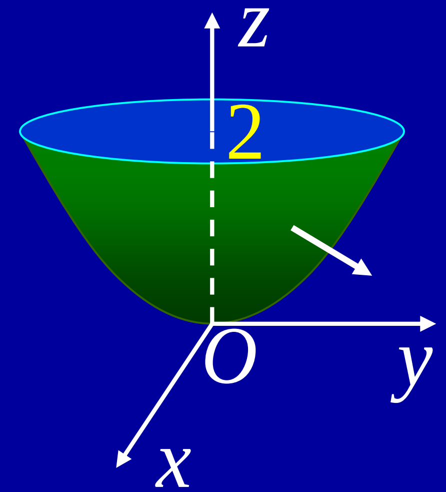
例5 设 $f(x,y,z)\in C$, Σ 是平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分的上侧，计算

$$I=\iint_\Sigma [f(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+[2f(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$
$$+[f(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

提示: 求出Σ的法方向余弦，转化成第一类曲面积分

$$I=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma (x-y+z)\,\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma \mathrm{d}S$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x-1}^0 \sqrt{3}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}$$

例6. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma}(z^2+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 旋转抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=2$ 之间部分的下侧.



解: 利用两类曲面积分的联系, 有

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

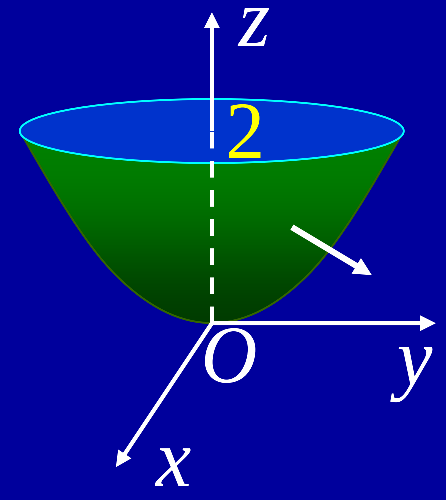
$$=\iint_{\Sigma}(z^2+x)\cos\alpha\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma}(z^2+x)\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\boxed{\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\\ \cos\gamma &= \frac{-1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\end{aligned}}$$

$$\therefore\ \text{原式} = \iint_{\Sigma}[(z^2+x)(-x)-z]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

将 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 代入，得



$$\text{原式}=-\iint_{D_{xy}}\{[\tfrac{1}{4}(x^2+y^2)^2+x](-x)$$

$$-\tfrac{1}{2}(x^2+y^2)\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}}[x^2+\tfrac{1}{2}(x^2+y^2)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(r^2\cos^2\theta+\tfrac{1}{2}r^2)\,r\,\mathrm{d}r$$

$$=8\pi$$

内容小结

1. 两类曲面积分及其联系

定义:

- $$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$
- $$\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Big[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}\Big]$$

性质: $\iint_{\Sigma^-} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$= -\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

联系: $\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$= \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

思考:

两类曲面积分的定义一个与 Σ 的方向无关, 一个与 Σ 的方向有关, 上述联系公式是否矛盾 ?

2. 常用计算公式及方法

$$\text{面积分}\begin{cases}\text{第一类 (对面积)}\\ \text{第二类 (对坐标)}\end{cases}\xrightarrow{\text{转化}}\text{二重积分}$$

(1) 统一积分变量 —— 代入曲面方程
(方程不同时分片积分)

$$\text{(2) 积分元素投影}\begin{cases}\text{第一类：面积投影}\\ \text{第二类：有向投影}\end{cases}$$

(4) 确定积分域 —— 把曲面积分域投影到相关坐标面

注：二重积分是第一类曲面积分的特殊情况.

当 $\Sigma : z = z(x, y)\,,\,(x, y) \in D_{xy}$ 时,

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

（上侧取“+”, 下侧取“−”）

类似可考虑在 yOz 面及 zOx 面上的二重积分转化公式 .

思考与练习

1.

提示: 设 $\Sigma: z = 0, (x, y) \in D_{xy}$, 则

Σ 取上侧时,

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} R(x, y, 0)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Σ 取下侧时,

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_{D_{xy}} R(x, y, 0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

备用题 求 $I=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\left(\dfrac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x}+\dfrac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x}{y}+\dfrac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z}\right)$, 其中

$\Sigma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 取外侧 .

解: $$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z}=\frac{2}{c}\iint_{D_{x,y}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$\boxed{\text{注意}\pm\text{号}}$

$$D_{x,y}:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$$

$$x=a\,r\cos\theta,\ y=b\,r\sin\theta,\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=abr\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{2}{c}ab\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,\mathrm{d}r=\frac{1}{c^2}\cdot 4\pi\,abc$$

$$\oiint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z} = \frac{1}{c^2} \cdot 4\pi\, abc$$

利用轮换对称性

$$\oiint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x} = \frac{1}{a^2} \cdot 4\pi\, abc$$

$$\oiint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x}{y} = \frac{1}{b^2} \cdot 4\pi\, abc$$

$$\therefore \quad I = 4\pi\, abc\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$