第七节 多元函数微分学的几何应用

一、空间曲线的切线与法平面

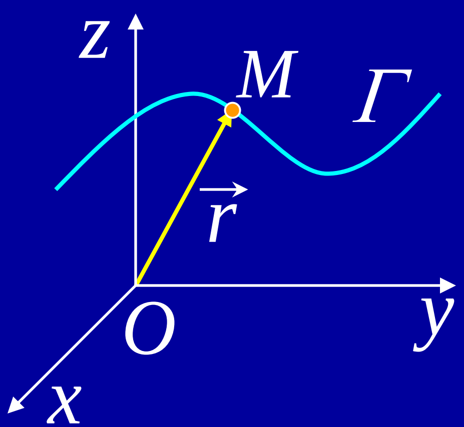
二、曲面的切平面与法线

*三、一元向量值函数及其导数

一、空间曲线的切线与法平面

已知空间曲线 $\varGamma$ 的参数方程:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \quad t \in [\alpha, \beta] \\ z = \omega(t) \end{cases}$$



对 $\varGamma$ 上的动点 M, 空间光滑曲线在点 M 处的**切线**为此点处割线的极限位置.

过点 M 与切线垂直的平面称为曲线在该点的**法平面.**

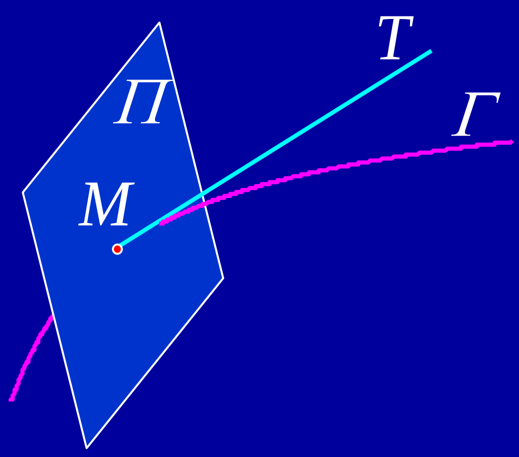
给定光滑曲线

$$\Gamma: \ \vec{f}(t) = (\varphi(t), \psi(t), \omega(t))$$

则当 φ', ψ', ω' 不同时为 0 时，Γ 在

点 $M(x, y, z)$ 处的切向量及法平面的法向量均为

$$\overrightarrow{f'}(t) = (\varphi'(t), \psi'(t), \omega'(t))$$



利用 $\begin{cases} \text{点向式可建立曲线的切线方程} \\ \text{点法式可建立曲线的法平面方程} \end{cases}$

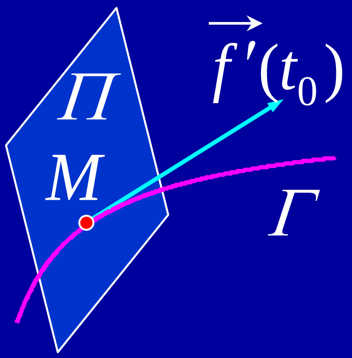
1. 曲线方程为参数方程的情况

给定光滑曲线 Γ：$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\omega(t),\quad t\in[\alpha,\beta]$

设Γ上的点$M(x_0,y_0,z_0)$对应$t=t_0$, $\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)$不全为0, 则$\Gamma$在点$M$的导向量为

$$\overrightarrow{f'}(t_0)=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$$

因此曲线 Γ在点 M 处的



切线方程

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$

法平面方程

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$$

例1. 求曲线 $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$ 在点 $M\,(1,1,1)$ 处的切线方程与法平面方程.

解: $x'=1,\ y'=2t,\ z'=3t^2$, 点 $(1,1,1)$ 对应于 $t_0=1$,

故点 M 处的切向量为 $\vec{T}=(1,2,3)$

因此所求切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$$

法平面方程为

$$(x-1)+2\,(y-1)+3(z-1)=0$$

即 $\quad x+2y+3z=6$

思考: 光滑曲线

$$\Gamma:\begin{cases} y=\varphi(x) \\ z=\psi(x) \end{cases}$$

的切向量有何特点?

答: $\Gamma:\begin{cases} x=x \\ y=\varphi(x) \\ z=\psi(x) \end{cases}$

切向量 $\vec{T}=(1,\varphi',\psi')$

2. 曲线为一般式的情况

光滑曲线 $\varGamma:\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

当 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\neq 0$ 时，$\varGamma$ 可表示为 $\begin{cases} y=\varphi(x) \\ z=\psi(x) \end{cases}$，且有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)},$$

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl] & \\ y \arrow[rr] & & z \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

曲线上一点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量为

$$\vec{T}=\left(1,\varphi'(x_0),\psi'(x_0)\right)$$

$$=\left(1,\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\bigg|_M,\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\bigg|_M\right)$$

或 $\vec{T}=\left(\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M,\ \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M,\ \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M\right)$

则在点 $M(x_0,y_0,z_0)$有

切线方程

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M}$$

法平面方程

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M(x-x_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M(y-y_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M(z-z_0)=0$$

法平面方程

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M (x-x_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M (y-y_0)$$

$$+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M (z-z_0)=0$$

也可表为

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ F_x(M) & F_y(M) & F_z(M) \\ G_x(M) & G_y(M) & G_z(M) \end{vmatrix}=0$$

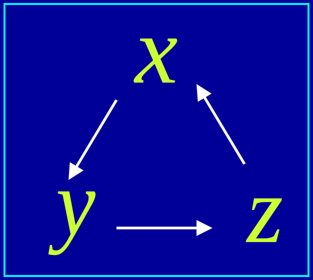
(自己验证)

例2. 求曲线 $x^2+y^2+z^2=6,\ x+y+z=0$ 在点 $M\,(1,-2,1)$ 处的切线方程与法平面方程.

解法1 令 $F=x^2+y^2+z^2-6,\ \ G=x+y+z$, 则

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M=\left.\begin{vmatrix}2y & 2z\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right|_M=2(y-z)\Big|_M=-6;$$

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M=0;\qquad \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M=6$$



切向量 $\vec{T}=(-6,\ 0,\ 6)$

切线方程 $\dfrac{x-1}{-6}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{6}$ 即 $\begin{cases}x+z-2=0\\ y+2=0\end{cases}$

法平面方程 $-6\cdot(x-1)+0\cdot(y+2)+6\cdot(z-1)=0$

即 $x-z=0$

解法2 方程组两边对 x 求导, 得 $\begin{cases} y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-x \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-1 \end{cases}$

解得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\begin{vmatrix}-x & z\\ -1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y & z\\ 1 & 1\end{vmatrix}}=\dfrac{z-x}{y-z},\quad \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\begin{vmatrix}y & -x\\ 1 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y & z\\ 1 & 1\end{vmatrix}}=\dfrac{x-y}{y-z}$

曲线在点 $M(1,-2,1)$ 处有:

切向量 $\vec{T}=\left(1,\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_M,\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\Big|_M\right)=(1,0,-1)$

点 $M(1,-2,1)$ 处的切向量

$$\vec{T}=(1,0,-1)$$

切线方程 $$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1}$$

即 $$\begin{cases} x+z-2=0 \\ y+2=0 \end{cases}$$

法平面方程 $$1\cdot(x-1)+0\cdot(y+2)+(-1)\cdot(z-1)=0$$

即 $$x-z=0$$

二、曲面的切平面与法线

设有光滑曲面 $\Sigma: F(x,y,z)=0$

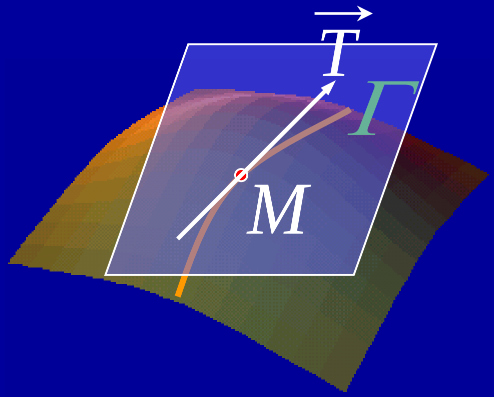
通过其上定点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 任意引一条光滑曲线

$\Gamma: x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\omega(t)$，设 $t=t_0$ 对应点 M，且

$\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0)$不全为0 . 则 Γ在

点 M 的**切向量**为

$$\vec{T}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$$

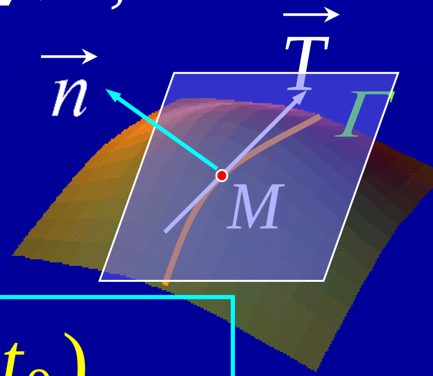


切线方程为 $$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$

下面证明: Σ上过点 M 的任何曲线在该点的切线都在同一平面上. 此平面称为 Σ在该点的**切平面**.

证: $\because \Gamma: x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\omega(t)$ 在 Σ 上,

$$\therefore \quad F(\varphi(t),\psi(t),\omega(t)) \equiv 0$$



两边在 $t=t_0$ 处求导,注意 $t=t_0$ 对应点M,

得

$$\boxed{\begin{aligned} F_x(x_0,y_0,z_0)\,\varphi'(t_0) + F_y(x_0,y_0,z_0)\,\psi'(t_0) \\ + F_z(x_0,y_0,z_0)\,\omega'(t_0) = 0 \end{aligned}}$$

令 $\vec{T} = (\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$

$\vec{n} = (F_x(x_0,y_0,z_0),\ F_y(x_0,y_0,z_0),\ F_z(x_0,y_0,z_0))$

切向量 $\vec{T} \perp \vec{n}$

由于曲线 Γ 的任意性,表明这些切线都在以 $\vec{n}$ 为法向量的平面上,从而切平面存在.

曲面 Σ 在点 M 的**法向量:**

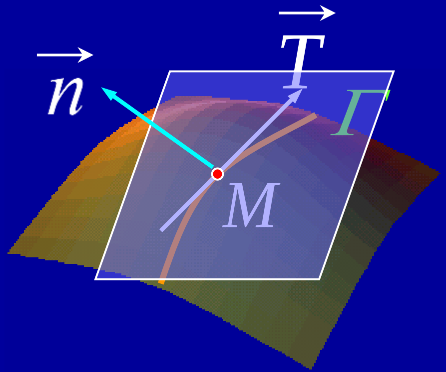
$$\vec{n} = (F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0))$$

切平面方程

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

过M点且垂直于切平面的直线

称为曲面 Σ 在点 M 的**法线.**



法线方程

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

特别, 当光滑曲面Σ的方程为显式 $z=f(x,y)$时，令

$$F(x,y,z)=f(x,y)-z$$

则在点 (x,y,z), $F_x=f_x, F_y=f_y, F_z=-1$

故当函数 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)有连续偏导数时, 曲面 Σ 在点(x_0,y_0,z_0)有

法向量 $\vec{n}=(f_x(x_0,y_0),\ f_y(x_0,y_0),\ -1)$

切平面方程

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

法线方程 $$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

用 α,β,γ 表示法向量的方向角，并假定法向量方向向上，则 γ 为锐角.

法向量 $\vec{n}=(-f_x(x_0,y_0),-f_y(x_0,y_0),1)$

将 $f_x(x_0,y_0)$, $f_y(x_0,y_0)$ 分别记为 f_x, f_y, 则

法向量的方向余弦：

$$\cos\alpha=\frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^{\,2}+f_y^{\,2}}},\qquad \cos\beta=\frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^{\,2}+f_y^{\,2}}},$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^{\,2}+f_y^{\,2}}}$$

例3. 求球面 $x^2+y^2+z^2=14$ 在点$(1,2,3)$ 处的切平面及法线方程.

解: 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-14$

法向量 $\vec{n}=(2x,2y,2z)$ $\vec{n}\big|_{(1,2,3)}=(2,4,6)$

所以球面在点 $(1,2,3)$ 处有:

切平面方程 $2(x-1)+4(y-2)+6(z-3)=0$

即 $x+2y+3z-14=0$

法线方程 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{3}$

即 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ (可见法线经过原点，即球心)

例4. 确定正数σ使曲面 $xyz=\sigma$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$在点 $M(x_0,y_0,z_0)$相切.

解: 二曲面在 M 点的法向量分别为

$$\vec{n}_1=(y_0z_0\,,x_0z_0\,,x_0y_0)\,,\quad \vec{n}_2=(x_0\,,y_0\,,z_0)$$

二曲面在点 M 相切, 故 $\vec{n}_1 // \vec{n}_2$, 因此有

$$\frac{x_0y_0z_0}{x_0^2}=\frac{x_0y_0z_0}{y_0^2}=\frac{x_0y_0z_0}{z_0^2}$$

$$\therefore \qquad x_0^{\ 2}=y_0^{\ 2}=z_0^{\ 2}$$

又点 M 在球面上, 故 $x_0^{\ 2}=y_0^{\ 2}=z_0^{\ 2}=\dfrac{a^2}{3}$

于是有 $\quad \sigma=x_0\,y_0\,z_0=\dfrac{a^3}{3\sqrt{3}}$

内容小结

1. 空间曲线的切线与法平面

1) 参数式情况. 空间光滑曲线 $\Gamma:\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\\ z=\omega(t)\end{cases}$

切向量 $\vec{T}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$

切线方程 $$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$

法平面方程

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$$

2) 一般式情况. 空间光滑曲线 $\Gamma:\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

切向量 $\vec{T}=\left(\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M, \left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M, \left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M\right)$

切线方程 $$\frac{x-x_0}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M}=\frac{y-y_0}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M}=\frac{z-z_0}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M}$$

法平面方程 $$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M(x-x_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M(y-y_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M(z-z_0)=0$$

2. 曲面的切平面与法线

1) 隐式情况 . 空间光滑曲面 $\Sigma : F(x,y,z)=0$

曲面 Σ 在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 的**法向量**

$$\vec{n}=(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0))$$

切平面方程

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)$$
$$+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

法线方程

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

2) 显式情况. 空间光滑曲面 $\Sigma: z = f(x,y)$

法向量 $\vec{n} = (-f_x, -f_y, 1)$

法线的**方向余弦**

$$\cos\alpha = \frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\quad \cos\beta = \frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

切平面方程

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

法线方程 $$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}$$

思考与练习

1. 如果平面 $3x+\lambda y-3z+16=0$ 与椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 相切, 求 λ.

提示: 设切点为 $M(x_0, y_0, z_0)$, 则

$$\begin{cases} \dfrac{6x_0}{3}=\dfrac{2y_0}{\lambda}=\dfrac{2z_0}{-3} & \text{(二法向量平行)} \\ 3x_0+\lambda y_0-3z_0+16=0 & \text{(切点在平面上)} \\ 3x_0^2+y_0^2+z_0^2=16 & \text{(切点在椭球面上)} \end{cases}$$

$\longrightarrow \lambda=\pm 2$

2. 设 $f(u)$ 可微, 证明 曲面 $z = x f(\frac{y}{x})$ 上任一点处的切平面都通过原点.

提示: 在曲面上任意取一点 $M(x_0, y_0, z_0)$,则通过此点的切平面为

$$z - z_0 = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M (x - x_0) + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M (y - y_0)$$

证明原点坐标满足上述方程 .

作业

备用题

1. 证明曲面 $F(x-my, z-ny)=0$ 的所有切平面恒与定直线平行, 其中 $F(u,v)$ 可微.

证: 曲面上任一点的法向量

$$\vec{n}=(F_1',\ F_1'\cdot(-m)+F_2'\cdot(-n),\ F_2')$$

取定直线的方向向量为 $\vec{l}=(m,1,n)$ (定向量)

则 $\vec{l}\cdot\vec{n}=0$, 故结论成立.

2. 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0 \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$ 在点(1,1,1) 的切线与法平面.

解: 点 (1,1,1) 处两曲面的法向量为

$$\vec{n}_1=(2x-3,2y,2z)\big|_{(1,1,1)}=(-1,2,2)$$

$$\vec{n}_2=(2,-3,5)$$

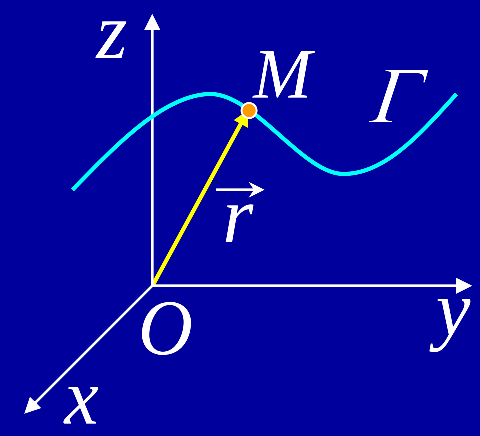
因此切线的方向向量为 $\vec{l}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(16,9,-1)$

由此得切线: $\dfrac{x-1}{16}=\dfrac{y-1}{9}=\dfrac{z-1}{-1}$

法平面: $16(x-1)+9(y-1)-(z-1)=0$

即 $16x+9y-z-24=0$

*三、一元向量值函数及其导数



引例: 已知空间曲线 Γ 的参数方程:

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \quad t\in[\alpha,\beta] \\ z=\omega(t) \end{cases}$$

记 $\vec{r}=(x,y,z)$, $\vec{f}(t)=(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))$

Γ 的向量方程 $\vec{r}=\vec{f}(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$

此方程确定映射 $\vec{f}:[\alpha,\beta]\to\mathbf{R}^3$,称此映射为一元向量值函数.

对 Γ 上的动点 M , 显然 $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$, 即 Γ 是 $\vec{r}$ 的终点 M 的轨迹 , 此轨迹称为向量值函数的终端曲线 .

要用向量值函数研究曲线的**连续性**和**光滑性**, 就需要引进向量值函数的极限、连续和导数的概念.

定义: 给定数集 $D\subset \mathbf{R}$, 称映射 $\vec{f}:D\to\mathbf{R}^n$ 为**一元向量值函数**（简称向量值函数）, 记为

定义域

$$\vec{r}=\vec{f}(t),\quad t\in D$$

因变量　　　　自变量

向量值函数的极限、连续和导数都与各分量的极限、连续和导数密切相关, 因此下面仅以 $n=3$ 的情形为代表进行讨论.

设 $\vec{f}(t)=(f_2(t), f_1(t), f_3(t)),\ t\in D,$ 则

极限: $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{f}(t)=(\lim\limits_{t\to t_0} f_1(t), \lim\limits_{t\to t_0} f_2(t), \lim\limits_{t\to t_0} f_3(t))$

连续: $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{f}(t)=\vec{f}(t_0)$

导数: $\vec{f}'(t)=(f_1'(t),\ f_2'(t),\ f_3'(t))$

$$\boxed{\vec{f}'(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{\vec{f}(t_0+\Delta t)-\vec{f}(t_0)}{\Delta t}}$$

向量值函数的导数运算法则:

设 $\vec{u},\vec{v}$ 是可导向量值函数, $\vec{C}$ 是常向量, c 是任一常数, $\varphi(t)$ 是可导函数, 则

(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{C}=\vec{O}$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[c\vec{u}(t)]=c\,\vec{u}'(t)$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\vec{u}(t)\pm\vec{v}(t)]=\vec{u}'(t)\pm\vec{v}'(t)$

(4) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\varphi(t)\vec{u}(t)]=\varphi'(t)\vec{u}(t)+\varphi(t)\vec{u}'(t)$

(5) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\vec{u}(t)\cdot\vec{v}(t)]=\vec{u}'(t)\cdot\vec{v}(t)+\vec{u}(t)\cdot\vec{v}'(t)$

(6) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\vec{u}(t)\times\vec{v}(t)]=\vec{u}'(t)\times\vec{v}(t)+\vec{u}(t)\times\vec{v}'(t)$

(7) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{u}[\varphi(t)]=\varphi'(t)\vec{u}'[\varphi(t)]$

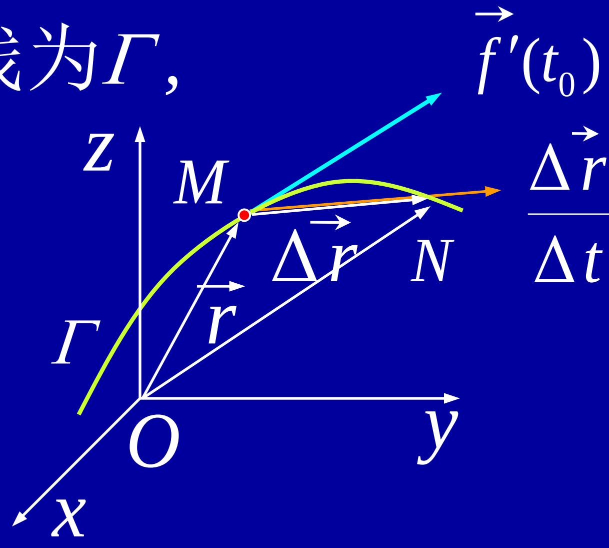
向量值函数导数的几何意义:

在 $\mathbf{R}^3$中, 设$\vec{r}=\vec{f}(t), t\in D$ 的终端曲线为Γ,

$$\overrightarrow{OM}=\vec{f}(t_0),\quad \overrightarrow{ON}=\vec{f}(t_0+\Delta t)$$

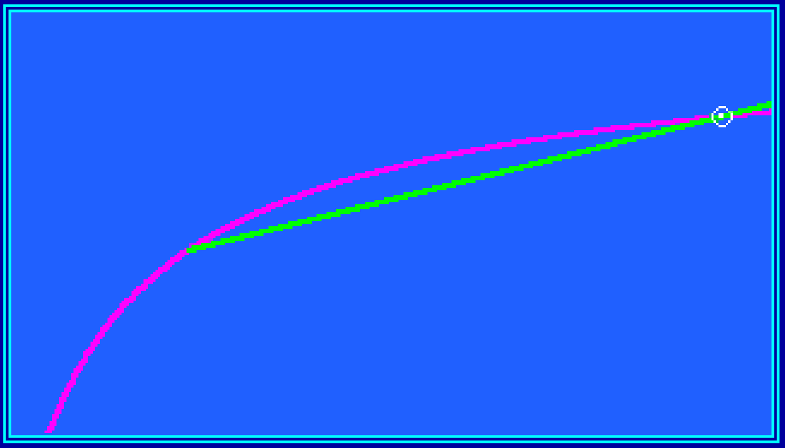
$$\Delta\vec{r}=\vec{f}(t_0+\Delta t)-\vec{f}(t_0)$$

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\vec{f}'(t_0)$$



设 $\vec{f}'(t_0)\neq\vec{0}$, 则

$\vec{f}'(t_0)$ 表示终端曲线在t_0处的切向量, 其指向与t 的增长方向一致.



切线的生成

点击图中任意点动画开始或暂停

向量值函数导数的物理意义:

设 $\vec{r}=\vec{f}(t)$ 表示质点沿光滑曲线运动的位置向量, 则有

速度向量: $\vec{v}(t)=\vec{f}\,'(t)$

加速度向量: $\vec{a}=\vec{v}\,'(t)=\vec{f}\,''(t)$

例1. 设 $\vec{f}(t)=(\cos t)\,\vec{i}+(\sin t)\,\vec{j}+t\,\vec{k}$, 求 $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{4}}\vec{f}(t)$.

解: $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{4}}\vec{f}(t)=(\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{4}}\cos t)\,\vec{i}+(\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{4}}\sin t)\,\vec{j}+\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{4}}t\,\vec{k}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}+\frac{\pi}{4}\vec{k}\quad\left(=\vec{f}\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right)$$

例2. 设空间曲线Γ的向量方程为

$$\vec{r}=\vec{f}(t)=(t^2+1,4t-3,2t^2-6t),\quad t\in\mathbf{R}$$

求曲线Γ上对应于$t_0=2$的点处的单位切向量.

解: $\vec{f}'(t)=(2t,4,4t-6),\quad t\in\mathbf{R}$

$$\vec{f}'(2)=(4,4,-2)$$

$$\left|\vec{f}'(2)\right|=\sqrt{4^2+4^2+(-2)^2}=6$$

故所求单位切向量为 $\dfrac{\vec{f}'(2)}{\left|\vec{f}'(2)\right|}=(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3})$

其方向与 t 的增长方向一致

另一与 t 的增长方向相反的单位切向量为$(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3})$

例3. 一人悬挂在滑翔机上, 受快速上升气流影响作螺旋式上升, 其位置向量为 $\vec{r}=(3\cos t, 3\sin t, t^2)$, 求

(1) 滑翔机在任意时刻 t 的速度向量与加速度向量;

(2) 滑翔机在任意时刻 t 的速率;

(3) 滑翔机的加速度与速度正交的时刻.

解: (1) $\vec{v}=\vec{r}'(t)=(-3\sin t, 3\cos t, 2t)$

$\vec{a}=\vec{v}'=(-3\cos t, -3\sin t, 2)$

(2) $|\vec{r}'(t)|=\sqrt{(-3\sin t)^2+(-3\cos t)^2+(2t)^2}=\sqrt{9+4t^2}$

(3) 由 $\vec{v}\cdot\vec{a}=0$ 即 $9\sin t\cos t-9\cos t\sin t+4t=0$,

得 $t=0$, 即仅在开始时刻滑翔机的加速度与速度正交.