第四节 重积分的应用

一、立体体积

二、曲面的面积

三、物体的质心

四、物体的转动惯量

五、物体的引力

1. 能用重积分解决的实际问题的特点:

所求量是 $\begin{cases} \text{分布在有界闭域上的整体量} \\ \text{对区域具有可加性} \end{cases}$

2. 用重积分解决问题的方法:

—— 用微元分析法 (元素法)建立积分式

3. 解题要点:

画出积分域、选择坐标系、确定积分序、

定出积分限、计算要简便

一、立体体积

- **曲顶柱体**的顶为连续曲面 $z = f(x, y), (x, y) \in D$,

则其体积为

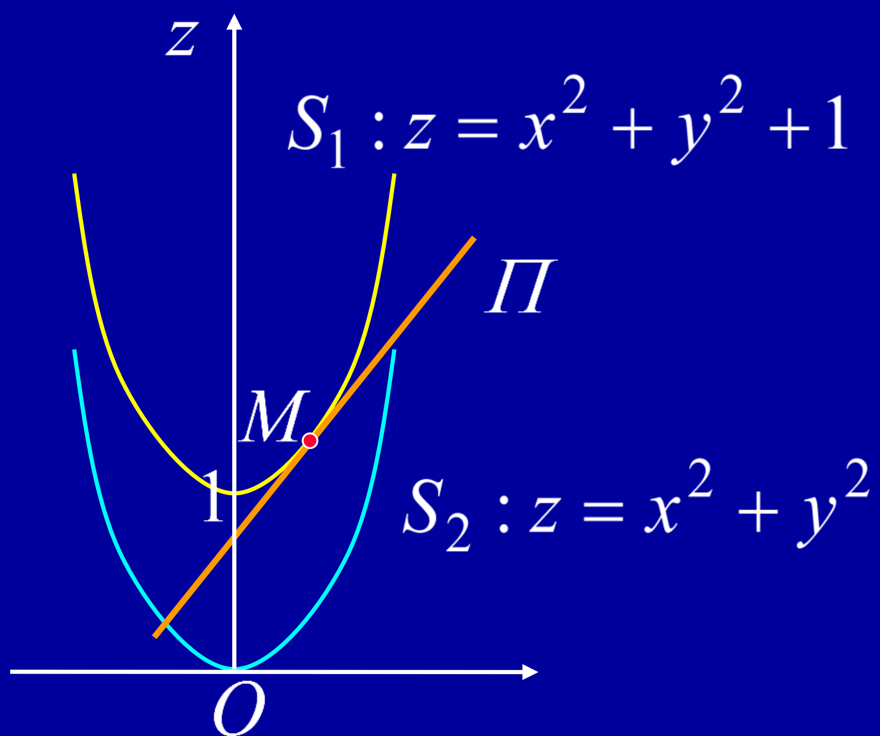
$$V = \iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

- 占有**空间有界域** Ω 的立体的体积为

$$V = \iiint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

例1. 求曲面 $S_1: z = x^2 + y^2 + 1$ 任一点的切平面与曲面 $S_2: z = x^2 + y^2$所围立体的体积 V.

分析:



(示意图)

第一步: 求切平面Π方程;

第二步: 求Π与S_2的交线

在xOy面上的投影,

写出所围区域 D;

第三步: 求体积V.

例1. 求曲面 $S_1: z = x^2 + y^2 + 1$ 任一点的切平面与曲面 $S_2: z = x^2 + y^2$所围立体的体积 V.

解: 曲面 S_1在点(x_0, y_0, z_0)的切平面方程为

$$z = 2x_0x + 2y_0y + 1 - x_0^2 - y_0^2$$

它与曲面 $z = x^2 + y^2$ 的交线在 xOy 面上的投影为

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 1 \quad (\text{记所围域为} D)$$

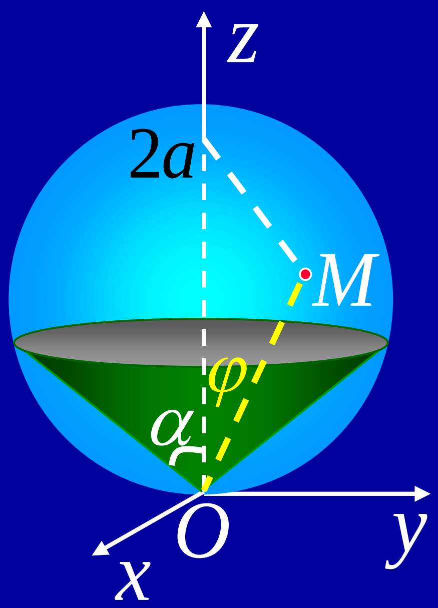
$$\therefore \quad V = \iint_D [2x_0x + 2y_0y + 1 - x_0{}^2 - y_0{}^2 - x^2 - y^2]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D [1 - ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

令 $x - x_0 = r\cos\theta$, $y - y_0 = r\sin\theta$

$$= \pi - \iint_D r^2 \cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \pi - \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}$$

例2. 求半径为 a 的球面与半顶角为 α 的内接锥面所围成的立体的体积.



解: 在球坐标系下空间立体所占区域为

$$\Omega:\begin{cases} 0\le r\le 2a\cos\varphi \\ 0\le\varphi\le\alpha \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$$

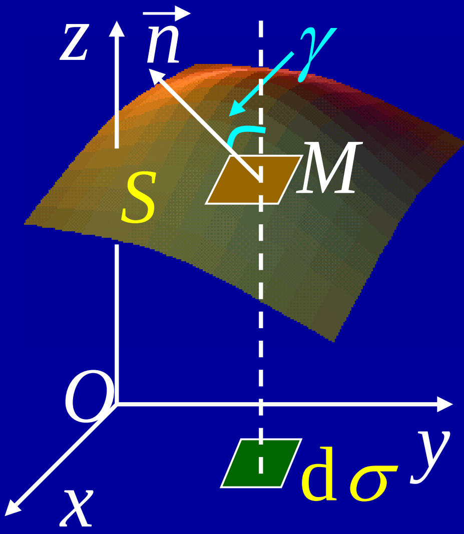
$$\boxed{\mathrm{d}v = r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r}$$

则立体体积为

$$V=\iiint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\alpha}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{16\pi a^3}{3}\int_0^{\alpha}\cos^3\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{4\pi a^3}{3}(1-\cos^4\alpha)$$

二、曲面的面积



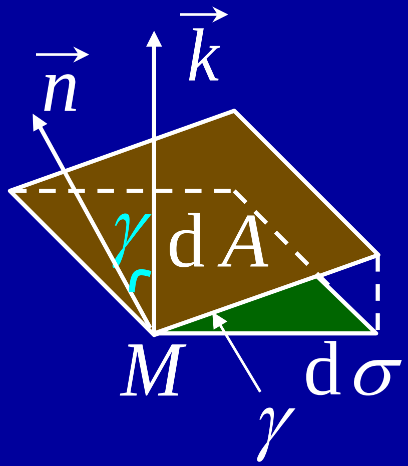
设光滑曲面 $S: z = f(x, y), (x, y) \in D$

则面积 A 可看成曲面上各点 $M(x, y, z)$ 处小切平面的面积 $\mathrm{d}A$ 无限积累而成.

设它在 D 上的投影为 $\mathrm{d}\sigma$, 则

$$\mathrm{d}\sigma = \cos\gamma \cdot \mathrm{d}A$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}}$$



$$\mathrm{d}A = \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}\ \mathrm{d}\sigma$$

(称为面积元素)

故有曲面面积公式

$$A=\iint_D \sqrt{1+f_x^{\,2}(x,y)+f_y^{\,2}(x,y)}\ \mathrm{d}\sigma$$

即

$$\boxed{A=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$

若光滑曲面方程为 $x=g(y,z)\,,(y,z)\in D_{yz}$,则有

$$A=\iint_{D_{yz}} \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

若光滑曲面方程为 $y = h(z, x)$, $(z, x) \in D_{zx}$,则有

$$A = \iint_{D_{zx}} \sqrt{1 + (\frac{\partial y}{\partial z})^2 + (\frac{\partial y}{\partial x})^2}\, \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

若光滑曲面方程为隐式 $F(x, y, z) = 0$, 且 $F_z \neq 0$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}, \qquad (x, y) \in D_{xy}$$

$$\therefore \quad A = \iint_{D_{xy}} \frac{\sqrt{F_x{}^2 + F_y{}^2 + F_z{}^2}}{|F_z|}\, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

例3. 计算双曲抛物面 $z = xy$ 被柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 所截出的面积 A .

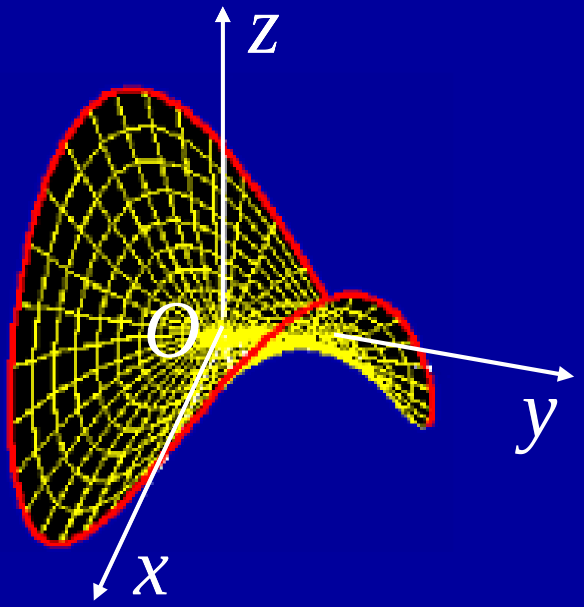
解: 曲面在 xOy 面上投影为 $D: x^2 + y^2 \le R^2$, 则

$$A = \iint_D \sqrt{1 + z_x{}^2 + z_y{}^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R \sqrt{1 + r^2}\, r\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{2}{3}\pi\,[(1 + R^2)^{3/2} - 1)]$$



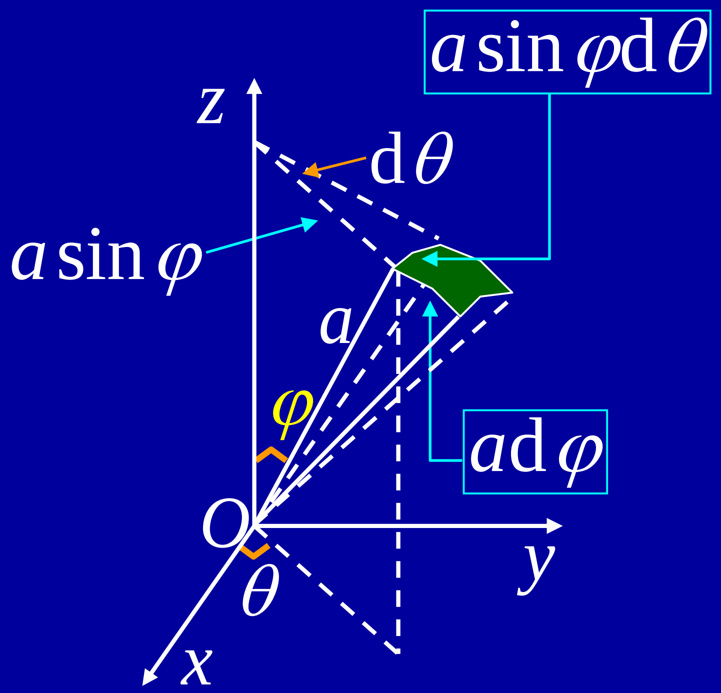
例4. 计算半径为 a 的球的表面积.

解：方法1 利用球坐标方程.

设球面方程为 $r = a$

球面面积元素为

$$\mathrm{d}A = a^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$



$$\therefore \quad A = a^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= 4\pi a^2$$

方法2 利用直角坐标方程. (略)

三、物体的质心

设空间有n个质点, 分别位于(x_k, y_k, z_k), 其质量分别为$m_k\ (k=1,2,\cdots,n)$, 由力学知, 该质点系的质心坐标为

$$\bar{x}=\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k},\quad \bar{y}=\frac{\sum_{k=1}^{n} y_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k},\quad \bar{z}=\frac{\sum_{k=1}^{n} z_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}$$

设物体占有空间域 Ω, 有连续密度函数$\rho(x,y,z)$, 则采用 "大化小, 常代变, 近似和, 取极限" 可导出其质心公式, 即:

将 Ω 分成 n 小块, 在第 k 块上任取一点 (ξ_k,η_k,ζ_k), 将第 k 块看作质量集中于点 (ξ_k,η_k,ζ_k) 的质点, 此质点系的质心坐标就近似该物体的质心坐标. 例如,

$$\bar{x} \approx \frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k \rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta v_k}{\sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta v_k}$$

令各小区域的最大直径 $\lambda \to 0$,即得

$$\bar{x} = \frac{\iiint_{\Omega} x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint_{\Omega} \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

同理可得 $$\bar{y}=\frac{\iiint_{\Omega} y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint_{\Omega}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

$$\bar{z}=\frac{\iiint_{\Omega} z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint_{\Omega}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

当$\rho(x,y,z)\equiv$常数时, 则得形心坐标:

$$\bar{x}=\frac{\iiint_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{V},\quad \bar{y}=\frac{\iiint_{\Omega} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{V},$$

$$\bar{z}=\frac{\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{V}$$ $\left(V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\right.$为$\Omega$的体积$\left.\right)$

若物体为占有xOy面上区域D的平面薄片,其面密度为$\mu(x,y)$,则它的质心坐标为

$$\bar{x}=\frac{\iint_D x\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{M_y}{M}$$

$$\bar{y}=\frac{\iint_D y\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{M_x}{M}$$

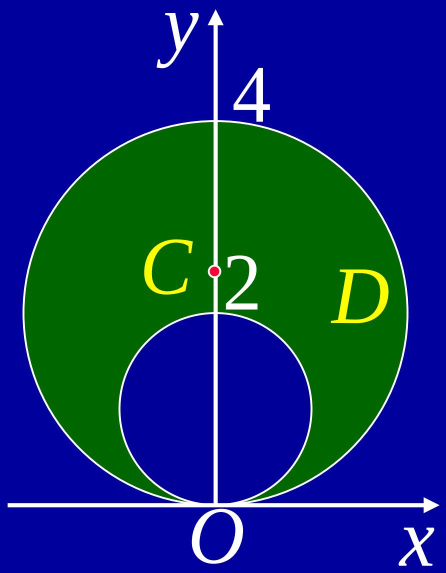
M_x — 对 x 轴的静矩

M_y — 对 y 轴的静矩

$\mu=$常数时, 得D的形心坐标:

$$\bar{x}=\frac{\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{A},\quad \bar{y}=\frac{\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{A}$$ (A 为D的面积)

例5. 求位于两圆 $r=2\sin\theta$ 和 $r=4\sin\theta$ 之间均匀薄片的质心.



解: 利用对称性可知 $\bar{x}=0$

而

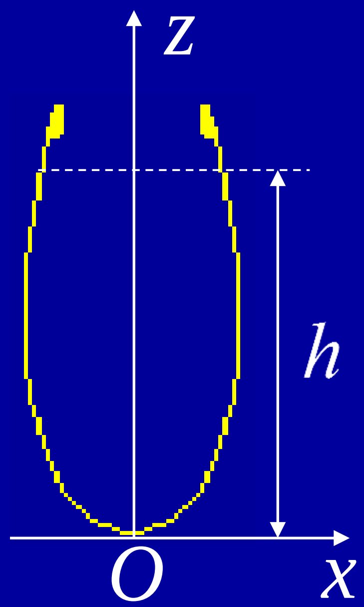
$$\bar{y}=\frac{1}{A}\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{3\pi}\iint_D r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{3\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}r^2\,\mathrm{d}r=\frac{56}{9\pi}\int_0^{\pi}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{56}{9\pi}\cdot 2\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{56}{9\pi}\cdot 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{7}{3}$$

例6. 一个炼钢炉为旋转体形, 剖面壁线的方程为 $9x^2 = z(3-z)^2, 0 \le z < 3$, 若炉内储有高为 h 的均质钢液, 不计炉体的自重, 求它的质心.



解: 利用对称性可知质心在 z 轴上，故其坐标为

$$\bar{x} = \bar{y} = 0, \ \bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{V}$$

采用柱坐标, 则炉壁方程为 $9r^2 = z(3-z)^2$, 因此

$$V = \iiint_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^h \mathrm{d}z \iint_{D_z} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^h \frac{\pi}{9} z(3-z)^2 \mathrm{d}z$$

$$V=\frac{\pi}{9}h^3\left(\frac{9}{2}-2h+\frac{1}{4}h^2\right)$$

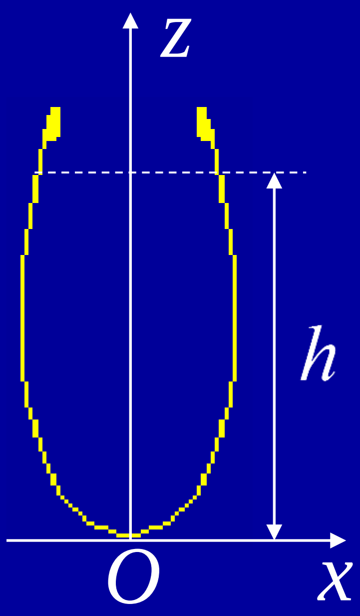
$$\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^h z\,\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^h \frac{\pi}{9}z^2(3-z)^2\,\mathrm{d}z$$

$$=\frac{\pi}{9}h^3\left(3-\frac{3}{2}h+\frac{1}{5}h^2\right)$$

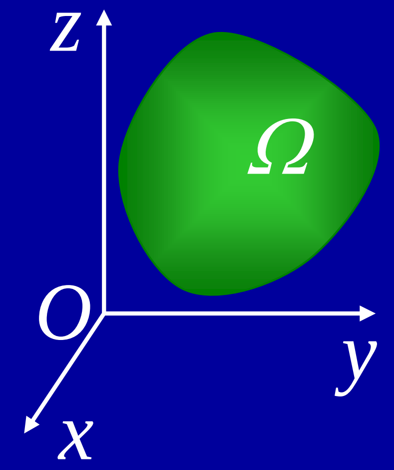
$$\therefore\quad \bar{z}=h\,\frac{60-30h+4h^2}{90-40h+5h^2}$$



四、物体的转动惯量

因质点系的转动惯量等于各质点的转动惯量之和, 故连续体的转动惯量可用积分计算.

设物体占有空间区域 Ω, 有连续分布的密度函数 $\rho(x,y,z)$. 该物体位于$(x\,,y\,,z)$ 处的微元对 z 轴的转动惯量为



$$\mathrm{d}I_z=(x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}v$$

因此物体 对 z 轴 的转动惯量:

$$I_z=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

类似可得:

对 x 轴的转动惯量

$$I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2)\, \rho(x, y, z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

对 y 轴的转动惯量

$$I_y = \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2)\, \rho(x, y, z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

对原点的转动惯量

$$I_O = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)\, \rho(x, y, z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

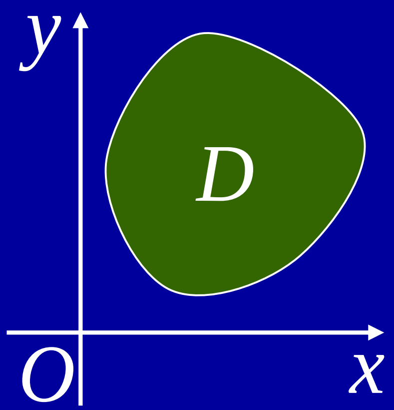
如果物体是平面薄片, 面密度为 $\mu(x,y),(x,y)\in D$

则转动惯量的表达式是二重积分.

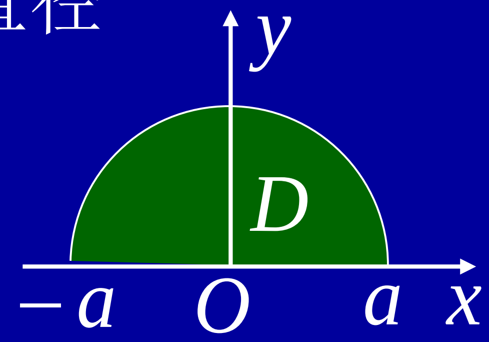
$$I_x=\iint_D y^2\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I_y=\iint_D x^2\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I_O=\iint_D (x^2+y^2)\,\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



例7. 求半径为 a 的均匀半圆薄片对其直径的转动惯量.



解: 建立坐标系如图, $D:\begin{cases} x^2+y^2\le a^2 \\ y\ge 0 \end{cases}$

$$\therefore I_x = \iint_D \mu\, y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \mu\iint_D r^3\sin^2\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

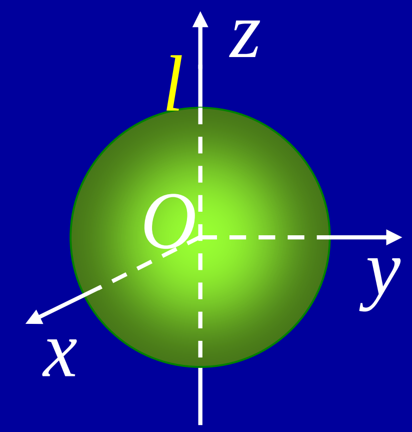
$$= \mu\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{a} r^3\,\mathrm{d}r = \frac{1}{4}\mu a^4\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

半圆薄片的质量 $M=\frac{1}{2}\pi a^2\mu$

$$=\frac{1}{4}M a^2$$

例8. 求密度为ρ 的均匀球体对于过球心的一条轴 l 的转动惯量.

解: 取球心为原点, z 轴为 l 轴, 设球所占域为$\Omega: x^2+y^2+z^2 \le a^2$, 则



$$I_z = \iiint_\Omega (x^2+y^2)\rho \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad \text{(用球坐标)}$$

$$= \rho \iiint_\Omega (\underline{r^2\sin^2\varphi}\cos^2\theta + \underline{r^2\sin^2\varphi}\sin^2\theta)$$

$$\cdot \underline{r^2\sin\varphi}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \sin^3\varphi \,\mathrm{d}\varphi \int_0^{a} r^4 \,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{2}{5}\pi\rho a^5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{5}a^2 M$$

球体的质量

$$M = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho$$

五、物体的引力

设物体占有空间区域 Ω, 其密度函数 $\rho(x,y,z)$ 连续,

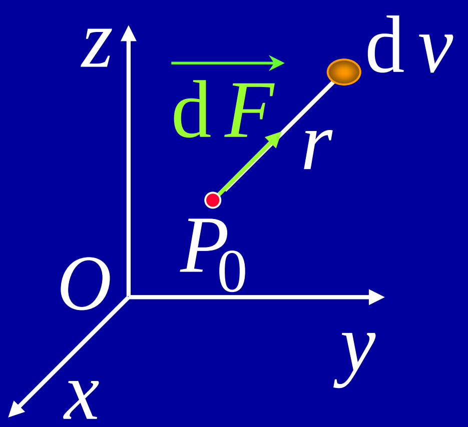
物体对位于点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的单位质量质点的引力为

$\vec{F}=(F_x,F_y,F_z)$, 引力元素在三坐标轴上分量为

$$\mathrm{d}F_x = G\frac{\rho(x,y,z)(x-x_0)}{r^3}\mathrm{d}v$$

$$\mathrm{d}F_y = G\frac{\rho(x,y,z)(y-y_0)}{r^3}\mathrm{d}v$$

$$\mathrm{d}F_z = G\frac{\rho(x,y,z)(z-z_0)}{r^3}\mathrm{d}v$$



其中 $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$,G 为引力常数

因此引力分量为

$$F_x = G\iiint_{\Omega} \frac{\rho(x,y,z)(x-x_0)}{r^3}\,\mathrm{d}v$$

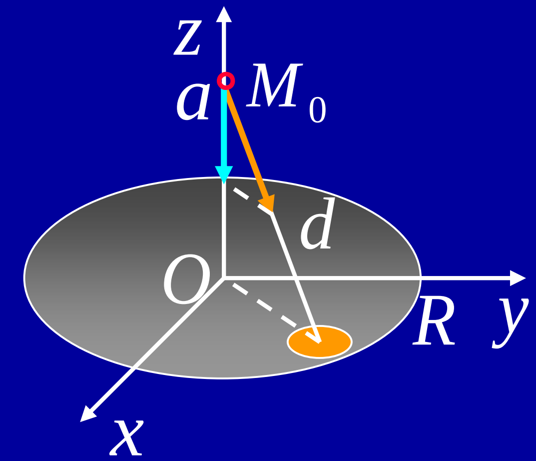
$$F_y = G\iiint_{\Omega} \frac{\rho(x,y,z)(y-y_0)}{r^3}\,\mathrm{d}v$$

$$F_z = G\iiint_{\Omega} \frac{\rho(x,y,z)(z-z_0)}{r^3}\,\mathrm{d}v$$

其中：$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$

若求 xOy 面上的平面薄片D, 对点P_0处的单位质量质点的引力分量, 则上式改为D上的二重积分, 密度函数改为 $\mu(x,y)$ 即可. 例如, $F_z = G\iint_D \frac{\mu(x,y)(0-z_0)}{r^3}\,\mathrm{d}\sigma$

例9. 设面密度为μ，半径为R的圆形薄片 $x^2+y^2\le R^2$，$z=0$，求它对位于点 $M_0(0,0,a)\ (a>0)$ 处的单位质量质点的引力.



解: 由对称性知引力$\vec{F}=(0,0,F_z)$

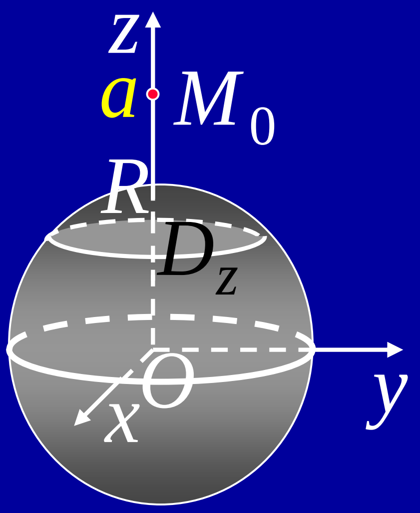
$$\mathrm{d}F_z=-G\frac{\mu\,\mathrm{d}\sigma}{d^2}\cdot\frac{a}{d}=-Ga\mu\frac{\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}$$

$$\therefore\ F_z=-Ga\mu\iint_D\frac{\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}$$

$$=-Ga\mu\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\frac{r\,\mathrm{d}r}{(r^2+a^2)^{3/2}}=2\pi Ga\mu\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}}-\frac{1}{a}\right)$$

例10. 求半径为R的均匀球 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 对位于点 $M_0(0,0,a)$ $(a>R)$的单位质量质点的引力.

解: 利用对称性知引力分量$F_x=F_y=0$



$$F_z=\iiint_{\Omega} G\rho\frac{z-a}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{3/2}}\mathrm{d}v$$

$$=G\rho\int_{-R}^{R}(z-a)\mathrm{d}z\iint_{D_z}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{3/2}}$$

$$=G\rho\int_{-R}^{R}(z-a)\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\frac{r\mathrm{d}r}{[r^2+(z-a)^2]^{3/2}}$$

$$F_z = \cdots = G\rho \int_{-R}^{R} (z-a)\mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \frac{r\,\mathrm{d}r}{[r^2+(z-a)^2]^{3/2}}$$

$$= 2\pi G\rho \int_{-R}^{R} (z-a)\left(\frac{1}{a-z} - \frac{1}{\sqrt{R^2-2az+a^2}} \right) \mathrm{d}z$$

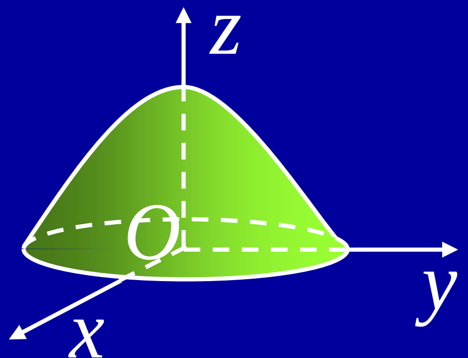
$$= 2\pi G\rho \left(-2R - \frac{1}{a} \int_{-R}^{R} (z-a)\,\mathrm{d}\sqrt{R^2-2az+a^2} \right)$$

$$= -G\frac{M}{a^2}$$

$$\boxed{M = \frac{4\pi R^3}{3}\rho \text{ 为球的质量}}$$

备用题

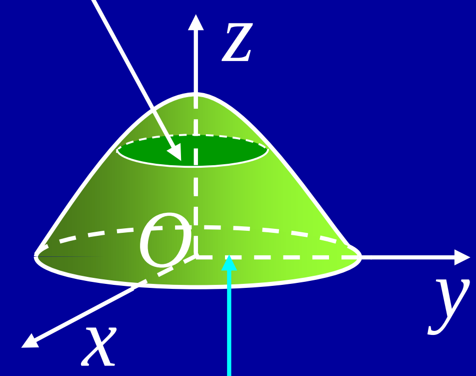
设有一高度为 $h(t)$(t 为时间) 的雪堆在融化过程中,其侧面满足方程 $z=h(t)-\dfrac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$, 设长度单位为厘米, 时间单位为小时, 已知体积减少的速率与侧面积成正比(比例系数 0.9), 问高度为130 cm 的雪堆全部融化需要多少小时? (2001考研)



提示:

$D_z: x^2 + y^2 \le [\frac{1}{2}h^2(t) - h(t)z]$

记雪堆体积为 V, 侧面积为 S ,则



$$V = \int_0^{h(t)} \mathrm{d}z \iint_{D_z} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{h(t)} \tfrac{1}{2}\pi[h^2(t) - h(t)z]\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{4}h^3(t)$$

$$S = \iint_{D_0} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$D_0: x^2 + y^2 \le \frac{1}{2}h^2(t)$

$$= \iint_{D_0} \sqrt{1 + \frac{16(x^2+y^2)}{h^2(t)}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(用极坐标)

$$= \frac{2\pi}{h(t)} \int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}} \sqrt{h^2(t) + 16r^2}\,r\,\mathrm{d}r = \frac{13\pi}{12}h^2(t)$$

$$\boxed{V=\frac{\pi}{4}h^3(t), \qquad S=\frac{13\pi}{12}h^2(t)}$$

由题意知 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-0.9S$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{13}{10} \\ h(0)=130 \end{cases} \Longrightarrow h(t)=-\frac{13}{10}t+130$$

令 $h(t)\to 0$, 得 $t=100\,(\mathrm{h})$

因此高度为130厘米的雪堆全部融化所需的时间为100小时.