# 习题课

# 级数的收敛、求和与展开

一、数项级数的审敛法

二、求幂级数收敛域的方法

三、幂级数和函数的求法

四、函数的幂级数和傅式级数展开法

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \underset{\text{展开}}{\overset{\text{求和}}{\rightleftarrows}} S(x) \quad \text{(在收敛域内进行)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \begin{cases} \text{当 } x = x_0 \text{ 时为数项级数;} \\ \text{当 } u_n(x) = a_n x^n \text{ 时为幂级数;} \\ \text{当 } u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx \end{cases}$$

($a_n, b_n$ 为傅氏系数) 时，为傅里叶级数.

**基本问题**：判别敛散；　　求收敛域；

求和函数；　　级数展开.

# 一、数项级数的审敛法

1. 利用部分和数列的极限判别级数的敛散性

2. 正项级数审敛法

必要条件 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ —不满足→ 发 散

↓ 满足

比值审敛法 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$

根值审敛法 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$

$\rho < 1$ → 收 敛

$\rho > 1$ → 发 散

$\rho = 1$ → 不定 —用它法判别→ 部分和极限、比较审敛法、积分审敛法

## 3. 任意项级数审敛法

**概念:** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为收敛级数

$$\begin{cases} \text{若 } \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ 收敛，称 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 绝对收敛} \\ \text{若 } \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ 发散，称 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 条件收敛} \end{cases}$$

**Leibniz审敛法:** 若 $u_n \ge u_{n+1} > 0$，且 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，

则交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ 收敛，且余项 $|r_n| \le u_{n+1}$.

**例1.** 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均收敛，且 $a_n \le c_n \le b_n$ $(n=1,2,\cdots)$，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛.

**证:** $\because 0 \le c_n - a_n \le b_n - a_n \quad (n=1,2,\cdots)$，则由题设

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) \text{ 收敛} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(c_n - a_n) \text{ 收敛}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty}[(c_n - a_n) + a_n]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(c_n - a_n) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛}$$

## 解答提示:

题2. 判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2n^2}$; (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$;

(4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^{10} n}$; (5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^s}$ $(a>0,\ s>0)$.

提示: (1) $\because \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1,$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散

据比较审敛法的极限形式, 原级数发散 .

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2n^2}$：　　$\lim_{n\to\infty}\frac{[(n+1)!]^2}{2(n+1)^2}\bigg/\frac{(n!)^2}{2n^2}=\infty$，原级数发散

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$：　　$0\le\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}\le\frac{n}{2^n}$，　$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{2^n}}=\frac{1}{2}$

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$收敛，故原级数收敛

(4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^{10}n}$：　　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln^{10}n}\bigg/\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln^{10}n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln^{10}x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{10\ln^9 x}=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{10\cdot9\cdot8\cdot\cdots\cdot2}=\infty$$

用洛必达法则

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，$\therefore$原级数发散

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^s}\ (a>0,\ s>0)$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)^s}}{\frac{a^n}{n^s}}=\lim_{n\to\infty}a\left(\frac{n}{n+1}\right)^s=a$$

$a<1$ 时收敛； $a>1$ 时发散.

$a=1$ 时, 为 $p$ 级数 $\begin{cases} s>1 \text{ 时收敛;} \\ s\le 1 \text{ 时发散.} \end{cases}$

**题3.** 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$ 也收敛 .

**法1** 由题设 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 收敛 , $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = 0$ ,

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \frac{(u_n + v_n)^2}{u_n + v_n} = \lim_{n\to\infty} (u_n + v_n) = 0$$

根据比较审敛法的极限形式知结论正确.

**法2** 因 $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = 0$ , $\therefore \lim_{n\to\infty} (u_n + v_n) = 0$ ,

故存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时 $0 \le (u_n + v_n) < 1$, 从而

$(u_n + v_n)^2 < (u_n + v_n)$ 再利用比较法可得结论

题4. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n}=1$，问级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是否也收敛？说明理由.

**提示:** 对正项级数,由比较判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛,但对任意项级数却不一定收敛 . 例如, 取

$$u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \qquad v_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=1+\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}=1$$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 .

题5.讨论下列级数的绝对收敛性与条件收敛性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^p}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\frac{n+1}{n}$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$.

**提示:** (1) $p>1$ 时, 绝对收敛 ; $0<p\le 1$ 时, 条件收敛 ;

$p\le 0$ 时, 发散 .

(2) $\left|(-1)^{n+1}\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}}\right| \le \frac{1}{\pi^{n+1}}$, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\pi^{n+1}}}=\frac{1}{\pi}<1$,

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^{n+1}}$ 收敛, 故原级数绝对收敛.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\frac{n+1}{n}$

因 $u_n=\ln\frac{n+1}{n}=\ln(1+\frac{1}{n})$ 单调递减，且 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$

由Leibniz审敛法知级数收敛；

但对 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k+1}{k}=\sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln k)$$

$$=\ln(n+1)\to\infty\quad(n\to\infty)$$

所以原级数仅条件收敛.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$

因 $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{\frac{(n+2)!}{(n+2)^{n+2}}}{\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}}$

$$= \frac{n+2}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} \mathrm{e}^{-1} < 1$$

所以原级数绝对收敛 .

## 二、求幂级数收敛域的方法

- 标准形式幂级数: 先求收敛半径 $R$：

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,\qquad 或\ \frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\qquad (自证)$$

再讨论 $x=\pm R$ 处的敛散性 .

- 非标准形式幂级数 $\begin{cases}\text{通过换元转化为标准形式}\\ \text{直接用比值法或根值法}\end{cases}$

**练习:**

题7. 求下列级数的敛散域:

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}x^n$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{2n}$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}x^n$

**解:** $\because \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\mathrm{e}$

$\therefore R=\frac{1}{\mathrm{e}}$, 故 $-\frac{1}{\mathrm{e}}<x<\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时原级数收敛 .

当 $x=\pm\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时, $|u_n|=\left[\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{\mathrm{e}}\right]^n$

$$\boxed{(1+\frac{1}{n})^{n+1}>\mathrm{e}}$$

$$>\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}\to\frac{1}{\mathrm{e}}\neq 0\quad(n\to\infty)$$

因此级数在端点发散 , 故收敛域为 $(-\frac{1}{\mathrm{e}},\frac{1}{\mathrm{e}})$ .

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^{2n}$

**解:** 因 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}|x|^{2(n+1)}}{\frac{n}{2^n}|x|^{2n}} = \frac{x^2}{2}$

当 $\frac{x^2}{2}<1$，即 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ 时，级数收敛；

当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时，一般项 $|u_n|=n$ 不趋于0，级数发散；

故收敛域为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

**例2.** 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}x^n$ 的收敛半径.

**解:** 分别考虑偶次幂与奇次幂组成的级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^{2k}}{2k}x^{2k},\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\beta_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k-1}}{2k-1}x^{2k-1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha_{n+1}(x)}{\alpha_n(x)}\right|=(4x)^2,\quad \therefore R_1=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\beta_{n+1}(x)}{\beta_n(x)}\right|=(2x)^2,\quad \therefore R_2=\frac{1}{2}$$

$$\because \text{原级数}=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k(x)$$

$\therefore$ 其收敛半径 $R=\min\{R_1,R_2\}=\frac{1}{4}$

注意: 此题 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ 极限不存在

## 三、幂级数和函数的求法

- 求部分和式极限
- 初等变换法: 分解、套用公式
- 映射变换法(在收敛区间内)

$$
\begin{tikzcd}
\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \arrow[rr, "\text{逐项求导或求积分}"] \arrow[d, dashed, "\text{难}"] & & \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^* x^n \arrow[d, "\text{求和}"] \\
S(x) & & S^*(x) \arrow[ll, "\text{对和函数求积或求导}"]
\end{tikzcd}
$$

- 数项级数求和 $\begin{cases} \text{直接求和: 直接变换, 求部分和等} \\ \text{间接求和: 转化成幂级数求和, 再代值} \end{cases}$

**例3.** 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{n+1}{(2n+1)\,!}x^{2n+1}$ 的和函数 .

**法1**　易求出级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}(x^{2n+2})'$$

$$=\frac{1}{2}\Big(x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\Big)'$$

$$=\frac{1}{2}(x\sin x)'$$

$$=\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2}\cos x,\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

**法2** 先求出收敛区间$(-\infty,+\infty)$，设和函数为$S(x)$，则

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)\,!}x^{2n+1}$$

$$\int_0^x S(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}\int_0^x x^{2n+1}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+2}$$

$$=\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\frac{x}{2}\sin x$$

$$\therefore\quad S(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2}\cos x,\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

**练习:** 题8. 求下列幂级数的和函数:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)};\qquad (4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}.$$

**解:** (1)

$x\neq 0$

$$\text{原式}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(x^{2n-1})'=\Big(\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\big(\frac{x^2}{2}\big)^n\Big)'=\Big(\frac{1}{x}\cdot\frac{\frac{x^2}{2}}{1-\frac{x^2}{2}}\Big)'$$

$$=\Big(\frac{x}{2-x^2}\Big)'=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}\qquad \Big(0<\frac{x^2}{2}<1\Big)$$

显然 $x=0$ 时上式也正确, 而在 $x=\pm\sqrt{2}$ 级数发散,

故和函数为 $\quad S(x)=\dfrac{2+x^2}{(2-x^2)^2},\quad x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2}).$

(4) 原式 $=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)x^n$

$x\neq 0$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{n-1}\,\mathrm{d}\,t-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^x t^n\,\mathrm{d}\,t\right)$$

$$=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}\right)\mathrm{d}\,t-\frac{1}{x}\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}t^n\right)\mathrm{d}\,t$$

$$=\int_0^x\frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}\,t-\frac{1}{x}\int_0^x\frac{t}{1-t}\,\mathrm{d}\,t \qquad (0<|x|<1)$$

$$=-\ln(1-x)+1+\frac{1}{x}\ln(1-x)$$

$$=1+\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln(1-x)$$

即得 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=1+(\frac{1}{x}-1)\ln(1-x)\,,\quad 0<|x|<1$

显然 $x=0$ 时, 级数收敛于0,

又 $\displaystyle\lim_{x\to 0}[1+(\frac{1}{x}-1)\ln(1-x)]=1+\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{x}=0$

$x=\pm 1$ 时, 级数也收敛 .

根据和函数的连续性 , 有

$$S(x)=\begin{cases}1+(\frac{1}{x}-1)\ln(1-x)\,, & 0<|x|<1 \text{ 及 } x=-1\\ 0\,, & x=0\\ 1\,, & x=1\end{cases}$$

**练习:**

题9 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}$ 的和 .

**解:** 原式= $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left[(2n+1)+1\right]}{(2n+1)!}$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right]$$

$$=\frac{1}{2}[\cos 1+\sin 1]$$

**注:** 本题也可利用例3间接求和.

# 四、函数的幂级数和傅式级数展开法

## 1. 函数的幂级数展开法

- 直接展开法 — 利用泰勒公式
- 间接展开法 — 利用已知展式的函数及幂级数性质

**练习:**

**1)** 将函数 $\dfrac{1}{(2-x)^2}$ 展开成 $x$ 的幂级数.

**解:**

$$\frac{1}{(2-x)^2}=\left(\frac{1}{2-x}\right)'=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}\right)'$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,x^{n-1}}{2^n},\quad x\in(-2,2)$$

**2)** 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{x}\arctan x, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，将 $f(x)$展开成 $x$ 的幂级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

**解:** $\because\quad \dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\quad x\in(-1,1)$

$$\therefore\quad \arctan x=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\quad x\in[-1,1]$$

于是

$$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}$$

$$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\underline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}\right]x^{2n}$$

$$=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}x^{2n},\qquad x\in[-1,1]$$

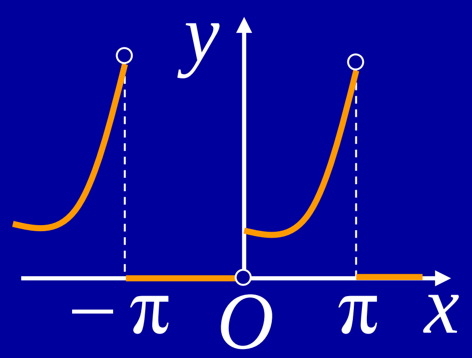
$$\therefore\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}=\frac{1}{2}[f(1)-1]=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

## 2. 函数的傅式级数展开法

系数公式及计算技巧; 收敛定理; 延拓方法

**练习:**

题11. 设 $f(x)$是周期为$2\pi$的函数, 它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}0, & x\in[-\pi,0)\\ e^x, & x\in[0,\pi)\end{cases}$ 将其展为傅氏级数.




**解答提示**

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^x\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\frac{e^x(n\sin nx+\cos nx)}{1+n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{e^{\pi}(-1)^n-1}{1+n^2}\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin nx \,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{\pi}\Big[\,\frac{\mathrm{e}^x(\sin nx - n\cos nx)}{1+n^2}\,\Big]_0^{\pi}$$

$$= \frac{n}{\pi}\,\frac{1-e^{\pi}(-1)^n}{1+n^2} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$\therefore\ f(x) = \frac{\mathrm{e}^{\pi}-1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\pi}(-1)^n - 1}{1+n^2}(\cos nx - n\sin nx)$$

$$(\,x \neq k\pi\,,\,k = 0\,,\pm 1\,,\pm 2\,,\cdots)$$

**思考:** 如何利用本题结果求级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\pi}(-1)^n - 1}{1+n^2}$ 的和?

**提示:** 根据傅式级数收敛定理 , 当 $x = 0$ 时, 有

$$\frac{\mathrm{e}^{\pi}-1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\pi}(-1)^n - 1}{1+n^2} = \frac{f(0^-)+f(0^+)}{2} = \frac{1}{2}$$

**备用题** 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内收敛, 其和函数 $y(x)$ 满足 $y'' - 2xy' - 4y = 0,\ \ y(0)=0,\ \ y'(0)=1$

(1) 证明 $a_{n+2} = \dfrac{2}{n+1} a_n,\quad n = 1, 2, \cdots$

(2) 求 $y(x)$ 的表达式.

**解:** 设 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 则由 $y(0)=0, y'(0)=1$ 得 $a_0 = 0, a_1 = 1$

$$\therefore \quad y = x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n, \qquad y' = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

代入微分方程得

$$2a_2+(6a_3-6)x+\sum_{n=2}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}-(2n+4)a_n]x^n=0$$

可见 $a_2=0,\ a_3=1,\quad a_{n+2}=\dfrac{2n+4}{(n+2)(n+1)}a_n=\dfrac{2}{n+1}a_n$

$\because a_1=1,\ \therefore a_3=\dfrac{2}{1+1}a_1$，故得 $a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n\quad(n=1,2,\cdots)$

**(2)** 由(1)知 $a_{2m}=0$

$$a_{2m+1}=\frac{2}{2m}a_{2m-1}=\frac{1}{m}a_{2m-1}=\frac{1}{m(m-1)}a_{2(m-1)-1}$$

$$=\frac{1}{m(m-1)\cdots2}a_{2\times2-1}=\frac{1}{m!}\quad(m=1,2,\cdots)$$

$$\therefore\quad y(x)=x+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}x^{2m+1}=x\,\mathrm{e}^{x^2}$$