第五节 函数的极值与最大值最小值

一、函数的极值及其求法

二、最大值与最小值问题

一、函数的极值及其求法

定义: 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有定义, $x_0 \in (a,b)$,

若存在 x_0 的一个邻域, 在其中当 $x \neq x_0$ 时,

(1) $f(x) < f(x_0)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的**极大值点**,

称 $f(x_0)$ 为函数的**极大值**;

(2) $f(x) > f(x_0)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的**极小值点**,

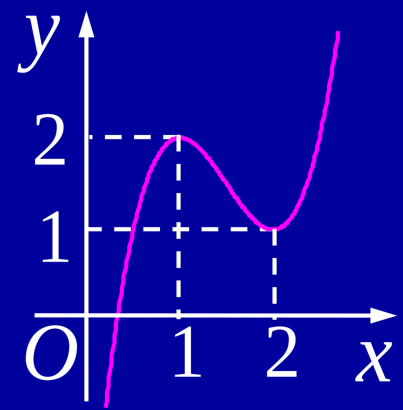
称 $f(x_0)$ 为函数的**极小值**.

极大值点与极小值点统称为**极值点**.

例如，函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$

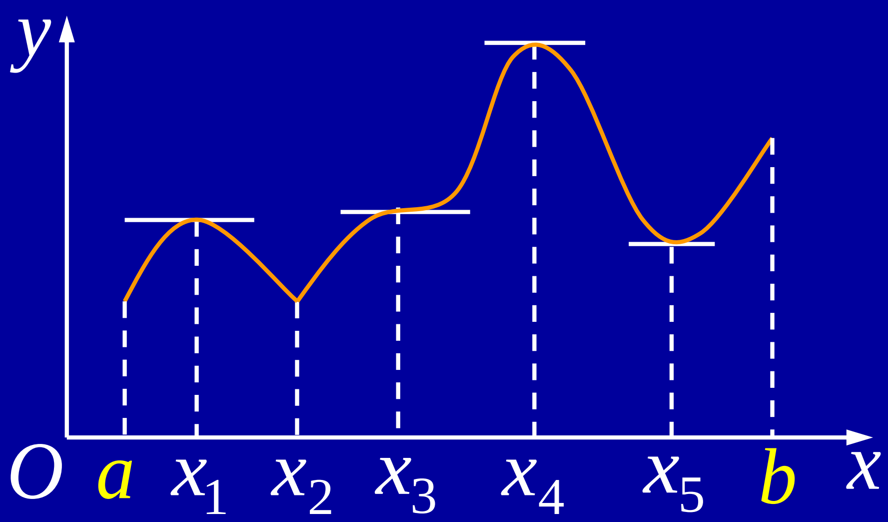
$x=1$ 为极大值点, $f(1)=2$ 是极大值

$x=2$ 为极小值点, $f(2)=1$ 是极小值



注意: 1) 函数的极值是函数的局部性质.

2) 对常见函数, 极值可能出现在导数为 0 或不存在的点.



x_1, x_4 为极大值点

x_2, x_5 为极小值点

x_3 不是极值点

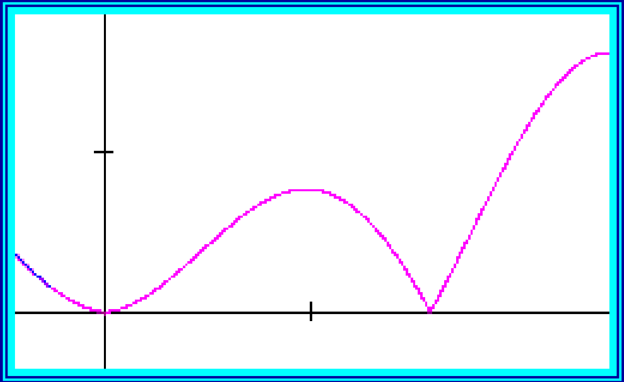
定理 1 **(极值第一判别法)**

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内连续, 且在空心邻域内有导数, 当x由小到大通过 x_0 时,

(1) $f'(x)$ "左正右负" ,则 $f(x)$ 在 x_0 取极大值.

(2) $f'(x)$ "左负右正" ,则 $f(x)$ 在 x_0 取极小值;

(自证)



点击图中任意处动画播放\暂停

例1. **求函数** $f(x)=(x-1)x^{\frac{2}{3}}$ 的极值 .

解: 1) 求导数 $f'(x)=x^{\frac{2}{3}}+(x-1)\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{5}{3}\cdot\frac{x-\frac{2}{5}}{\sqrt[3]{x}}$

2) 求极值可疑点

令 $f'(x)=0$, 得 $x_1=\frac{2}{5}$;　令 $f'(x)=\infty$, 得 $x_2=0$

3) 列表判别

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{5})$	$\frac{2}{5}$	$(\frac{2}{5},+\infty)$
$f'(x)$	$+$	∞	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-0.33	$\nearrow$

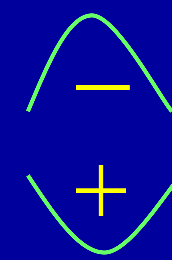
$\therefore x=0$ 是极大值点, 其极大值为 $f(0)=0$

$x=\frac{2}{5}$ 是极小值点, 其极小值为 $f(\frac{2}{5})=-0.33$

定理2 (极值第二判别法) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有二阶导数，且 $f'(x_0)=0,\ f''(x_0)\neq 0$

(1) 若 $f''(x_0)<0$，则 $f(x)$ 在点 x_0 取极大值；

(2) 若 $f''(x_0)>0$，则 $f(x)$ 在点 x_0 取极小值 .

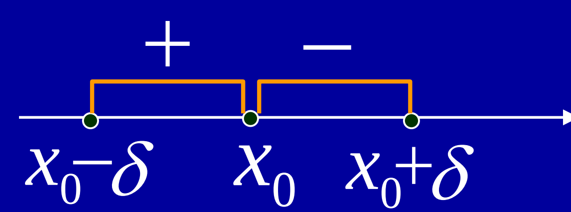


证: (1) $f''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{x-x_0}$

由 $f''(x_0)<0$ 知，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$\dfrac{f'(x)}{x-x_0}<0$

故当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，$f'(x)>0$；

当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，$f'(x)<0$，



由第一判别法知 $f(x)$ 在 x_0 取极大值.

(2) 类似可证 .

例2. 求函数 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值 .

解: 1) 求导数

$$f'(x)=6x(x^2-1)^2,\qquad f''(x)=6(x^2-1)(5x^2-1)$$

2) 求驻点

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=-1,\ x_2=0,\ x_3=1$

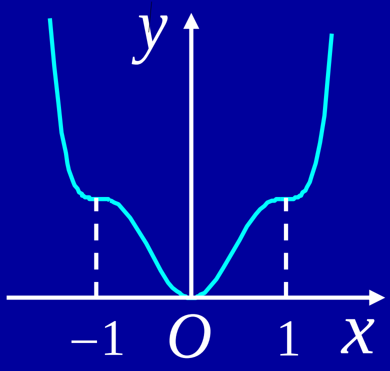
3) 判别

因 $f''(0)=6>0$，故 $f(0)=0$ 为极小值；

又 $f''(-1)=f''(1)=0$, 故需用第一判别法判别.

由于 $f'(x)$ 在 $x=\pm1$ 左右邻域内不变号,

$\therefore f(x)$ 在 $x=\pm1$ 没有极值.

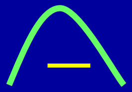


***定理3** **(判别法的推广)**若函数 $f(x)$ 在 x_0 点有直到 n 阶导数，且 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$,

则: 1) 当 n 为偶数时, x_0 为极值点，且

$f^{(n)}(x_0)>0$ 时, x_0 是极小点；

$f^{(n)}(x_0)<0$ 时, x_0 是极大点 .



2) 当 n 为奇数时, x_0 不是极值点 .

证: 利用 $f(x)$ 在 x_0 点的泰勒公式，可得

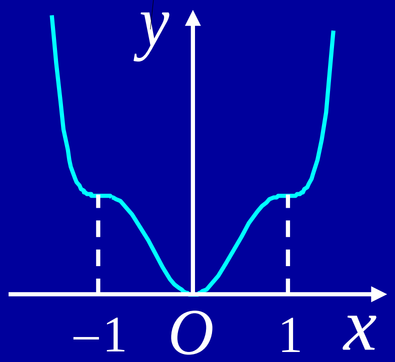
$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

当 x 充分接近 x_0 时, 上式左端正负号由右端第一项确定，故结论正确 .

例如, 例2中 $f(x)=(x^2-1)^3+1$

$$f'''(x)=24x(5x^2-3),\quad f'''(\pm1)\neq 0$$

所以 $x=\pm1$ 不是极值点 .

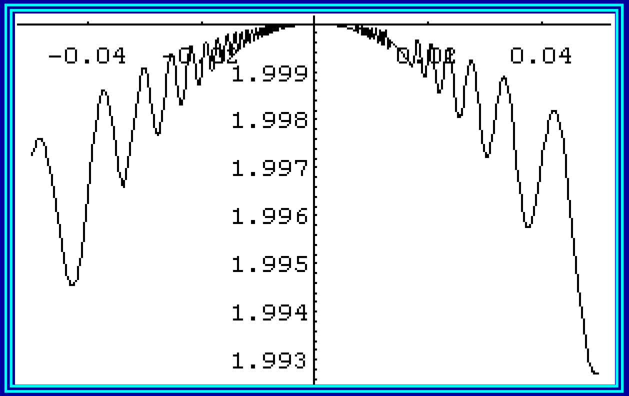


说明: 极值的判别法(定理1 ~ 定理3) **都是充分的.**

当这些充分条件不满足时, 不等于极值不存在 .

例如:

$$f(x)=\begin{cases}2-x^2(2+\sin\frac{1}{x}), & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$$



$f(0)=2$ 为极大值 , 但不满足定理1 ~ 定理3 的条件.

二、最大值与最小值问题

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则其最值只能在**极值点**或**端点**处达到 .

求函数最值的方法:

(1) 求 $f(x)$ 在 (a,b) 内的极值可疑点

$$x_1\ ,\ x_2\ ,\ \cdots\ ,\ x_m$$

(2) 最大值

$$M=\max\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_m),f(a),f(b)\}$$

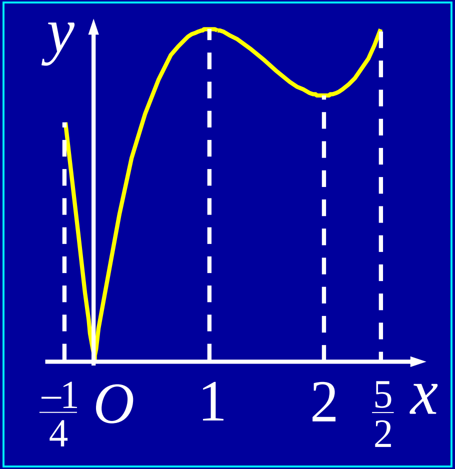
最小值

$$m=\min\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_m),f(a),f(b)\}$$

特别:

- 当$f(x)$ 在 $[a,b]$内只有一个极值可疑点时,
  若在此点取极大 (小)值 , 则也是最大(小)值 .
- 当$f(x)$ 在$[a,b]$ 上**单调**时, 最值必在端点处达到.
- 对应用问题 , 有时可根据实际意义判别求出的可疑点
  是否为最大 值点或最小值点 .

例3. 求函数 $f(x)=\left|2x^3-9x^2+12x\right|$ 在闭区间 $[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}]$ 上的最大值和最小值 .



解: 显然 $f(x)\in C[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}]$, 且

$$f(x)=\begin{cases}-(2x^3-9x^2+12x), & -\frac{1}{4}\le x\le 0\\ 2x^3-9x^2+12x, & 0<x\le\frac{5}{2}\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}-6x^2+18x-12=-6(x-1)(x-2), & -\frac{1}{4}\le x<0\\ 6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2), & 0<x\le\frac{5}{2}\end{cases}$$

$f(x)$ 在 $[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}]$ 内有极值可疑点 $x_1=0, x_2=1, x_3=2$

$$f(\tfrac{-1}{4})=3\tfrac{19}{32},\ f(0)=0,\ f(1)=5,\ f(2)=4,\ f(\tfrac{5}{2})=5$$

故函数在 $x=0$ 取最小值 0 ; 在 $x=1$ 及 $\frac{5}{2}$ 取最大值 5.

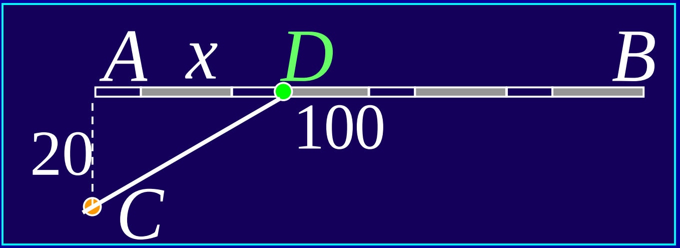
例3. 求函数 $f(x)=\left|2x^3-9x^2+12x\right|$ 在闭区间$[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}]$上的最大值和最小值 .

说明:

令 $\varphi(x)=f^2(x)$

由于 $\varphi(x)$ 与 $f(x)$ 最值点相同 , 因此也可通过 $\varphi(x)$ 求最值点. (自己练习)

例4. 铁路上 AB 段的距离为100 km，工厂 C 距 A 处20 km，$AC\perp AB$，要在 AB 线上选定一点 D 向工厂修一条公路，已知铁路与公路每公里货运价之比为3:5，为使货物从 B 运到工厂 C 的运费最省，问 D 点应如何取?



解: 设 $AD=x$ (km)，则 $CD=\sqrt{20^2+x^2}$，总运费

$$y=5k\sqrt{20^2+x^2}+3k(100-x)\qquad(0\le x\le 100)$$

(k 为某常数)

$$y'=k\left(\frac{5x}{\sqrt{400+x^2}}-3\right),\qquad y''=5k\frac{400}{(400+x^2)^{3/2}}$$

令 $y'=0$，得 $x=15$，又 $y''\big|_{x=15}>0$，所以 $x=15$ 为唯一的极小值点，从而为最小值点，故 $AD=15$ km 时运费最省 .

例5. 把一根直径为 d 的圆木锯成矩形梁，问矩形截面的高 h 和 b 应如何选择才能使梁的抗弯截面模量最大?

解: 由力学分析知矩形梁的抗弯截面模量为

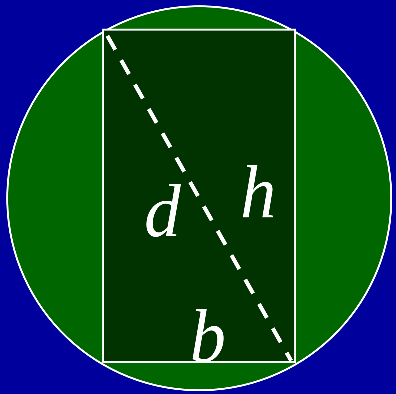
$$w=\tfrac{1}{6}b\,h^2=\tfrac{1}{6}b(d^2-b^2),\qquad b\in(0,d)$$

令 $\quad w'=\tfrac{1}{6}(d^2-3b^2)=0$

得 $\quad b=\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,d$

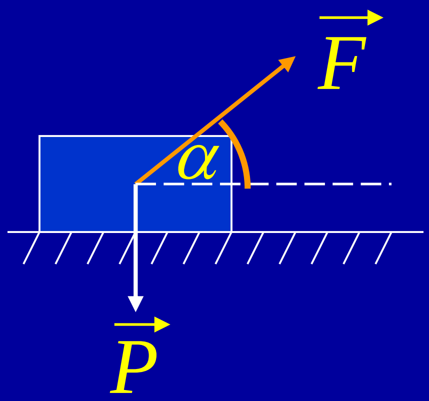
从而有 $\quad h=\sqrt{d^2-b^2}=\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,d$

即 $\quad d:h:b=\sqrt{3}:\sqrt{2}:1$



由实际意义可知，所求最值存在，驻点只一个，故所求结果就是最好的选择 .

例6. 设有质量为 5 kg 的物体置于水平面上，受力 $\vec{F}$ 作用开始移动，设摩擦系数 $\mu = 0.25$，问力 $\vec{F}$ 与水平面夹角 α 为多少时才可使力 $\vec{F}$ 的大小最小?



解: 克服摩擦的水平分力 $F_x = F\cos\alpha$

正压力 $\quad P - F_y = 5g - F\sin\alpha$

$\therefore \quad F\cos\alpha = \mu(5g - F\sin\alpha)$

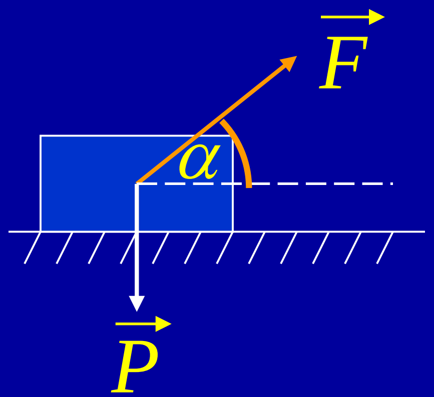
即 $$F = \frac{5\mu g}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}, \quad \alpha \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

令 $$\varphi(\alpha) = \cos\alpha + \mu\sin\alpha$$

则问题转化为求 $\varphi(\alpha)$ 的最大值问题 .

解： ……

即 $$F=\frac{5\mu g}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha},\quad \alpha\in[0,\tfrac{\pi}{2}]$$



令 $$\varphi(\alpha)=\cos\alpha+\mu\sin\alpha$$

则问题转化为求$\varphi(\alpha)$的最大值问题 .

$$\varphi'(\alpha)=-\sin\alpha+\mu\cos\alpha$$

$$\varphi''(\alpha)=-\cos\alpha-\mu\sin\alpha$$

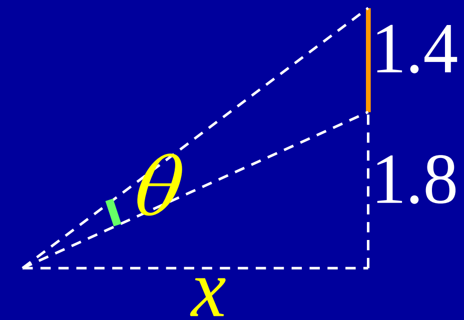
令 $\varphi'(\alpha)=0$, 解得

$$\alpha=\arctan\mu=\arctan 0.25=14^\circ 2'$$

而 $\varphi''(\alpha)<0$, $\therefore\ \alpha=14^\circ 2'$ 时 $\varphi(\alpha)$ 取最大值 ,

因而 ***F*** 取最小值 .

例7. 一张 1.4 m 高的图片挂在墙上，它的底边高于观察者的眼睛1.8 m，问观察者在距墙多远处看图才最清楚(视角 θ 最大)？



解: 设观察者与墙的距离为 x m，则

$$\theta = \arctan\frac{1.4+1.8}{x} - \arctan\frac{1.8}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

$$\theta' = \frac{-3.2}{x^2+3.2^2} + \frac{1.8}{x^2+1.8^2} = \frac{-1.4(x^2-5.76)}{(x^2+3.2^2)(x^2+1.8^2)}$$

令 $\theta' = 0$，得驻点 $x = 2.4 \in (0, +\infty)$

根据问题的实际意义，观察者最佳站位存在，驻点又唯一，因此观察者站在距离墙 2.4 m 处看图最清楚 .

例8. 设某工厂生产某产品 x 千件的成本是 $C(x)=x^3-6x^2+15x$，售出该产品 x 千件的收入是$R(x)=9x$，问是否存在一个取得最大利润的生产水平? 如果存在, 找出它来.

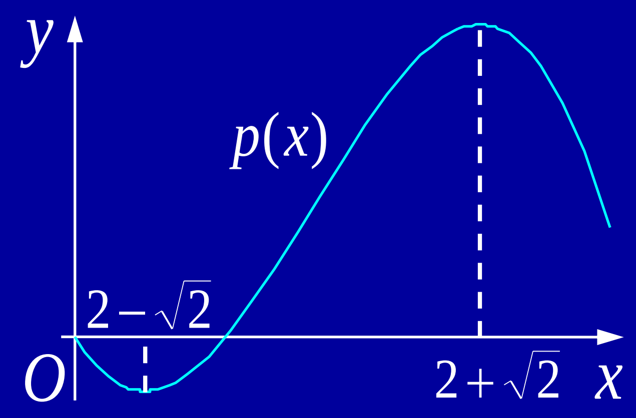
解: 售出 x 千件产品的利润为

$$p(x)=R(x)-C(x)=-x^3+6x^2-6x$$

$$p'(x)=-3x^2+12x-6=-3(x^2-4x+2)$$

令$p'(x)=0$, 得 $x_1=2-\sqrt{2}\approx 0.586$

$x_2=2+\sqrt{2}\approx 3.414$



又 $p''(x)=-6x+12$,

$$p''(x_1)>0,\quad p''(x_2)<0$$

故在 $x_2=3.414$千件处达到最大利润,

而在 $x_1=0.586$千件处发生局部最大亏损.

说明： 在经济学中

$C'(x)$ 称为边际成本

$R'(x)$ 称为边际收入

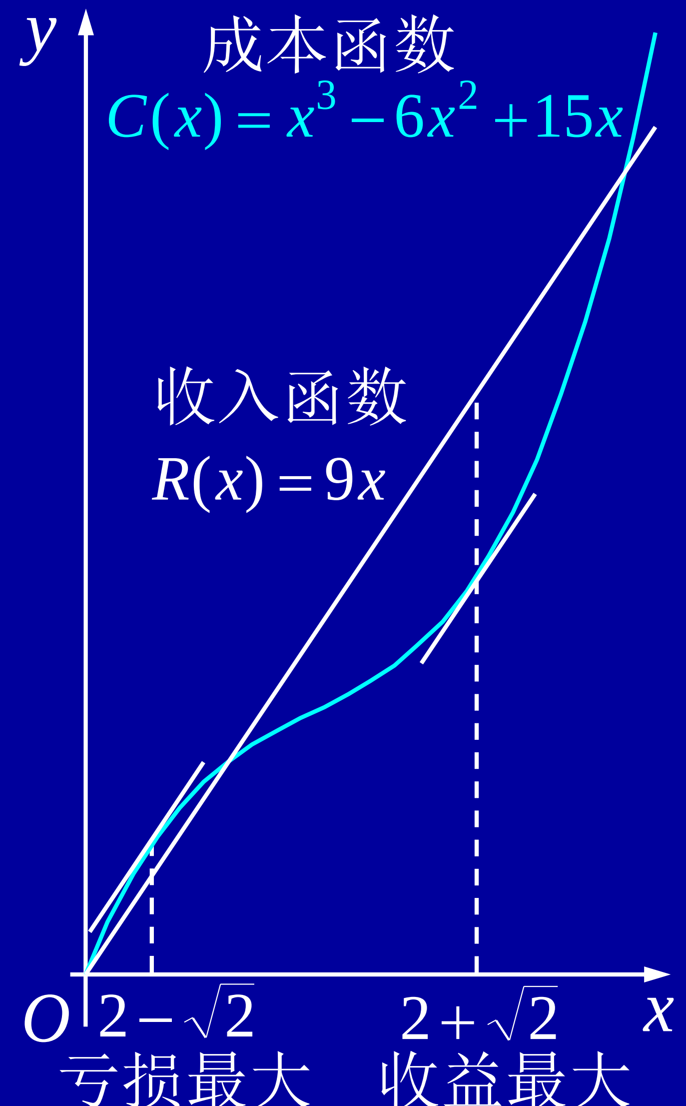
$p'(x)$ 称为边际利润

由此例分析过程可见, 在给出最大利润的生产水平上 $p'(x)=0$, 即

$$R'(x)=C'(x)$$

即边际收入＝边际成本

（见右图）



内容小结

1. 连续函数的极值

(1) 极值可疑点：使导数为0 或不存在的点

(2) 第一充分条件

$f'(x)$ 过 x_0 由正变负 $\Longrightarrow$ $f(x_0)$ 为极大值

$f'(x)$ 过 x_0 由负变正 $\Longrightarrow$ $f(x_0)$ 为极小值

(3) 第二充分条件

$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)<0 \Longrightarrow f(x_0)$ 为极大值 $-$

$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)>0 \Longrightarrow f(x_0)$ 为极小值 $+$

(4) 判别法的推广 定理3

2. 连续函数的最值

最值点应在极值点和边界点上找；

应用题可根据问题的实际意义判别 .

思考与练习

1. 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$, 则在点 a 处(B).

(A) $f(x)$ 的导数存在，且 $f'(a)\neq 0$;

(B) $f(x)$ 取得极大值；

(C) $f(x)$ 取得极小值;

(D) $f(x)$的导数不存在.

提示:

利用极限的保号性

2. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续, 且 $f(0)=0$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$, 则在点 $x=0$ 处 $f(x)$ (D).

(A) 不可导 ;

(B) 可导, 且 $f'(0)\neq 0$;

(C) 取得极大值 ;

(D) 取得极小值 .

提示: 利用极限的保号性 .

3. 设 $y=f(x)$ 是方程 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解, 若 $f(x_0)>0$, 且 $f'(x_0)=0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 (A)

(A) 取得极大值 ;

(B) 取得极小值 ;

(C) 在某邻域内单调增加 ;

(D) 在某邻域内单调减少 .

提示: 将 $f(x)$ 代入方程, 令 $x=x_0$, 得

$$f''(x_0)=-4f(x_0)<0$$

备用题 1. 试问 a 为何值时，$f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\frac{2}{3}\pi$ 时取得极值，求出该极值，并指出它是极大还是极小.

解: $\because\ f'(x)=a\cos x+\cos 3x$，由题意应有 $f'(\frac{2}{3}\pi)=0$

即 $a\cos(\frac{2}{3}\pi)+\cos 3(\frac{2}{3}\pi)=-\frac{1}{2}a+1=0$

$\therefore\ a=2$

又$\because\ f''(x)=-2\sin x-3\sin 3x$,

$f''(\frac{2}{3}\pi)=-2\sin\frac{2}{3}\pi<0$

$\therefore\ f(x)$ 在 $a=2$ 时取得极大值: $f(\frac{2}{3}\pi)=\sqrt{3}$

2. 设 $f(x)=nx(1-x)^n, n\in N$, 试求 $f(x)$ 在[0,1]上的最大值 $M(n)$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty} M(n)$.

解: $\because \quad f'(x)=n(1-x)^n-nx\cdot n(1-x)^{n-1}$

$$=n(1-x)^{n-1}[1-(n+1)x]$$

令 $f'(x)=0$, 得 $(0,1)$ 内的唯一驻点 $x=\frac{1}{n+1}$

易判别x通过此点时 $f(x)$ 由增变减, 故所求最大值为

$$M(n)=f(\frac{1}{n+1})=(\frac{n}{n+1})^{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} M(n)=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}=\mathrm{e}^{-1}$$