

# 第十章

## 无穷级数

无穷级数 { 数项级数  
幂级数  
傅氏级数

无穷级数是研究函数的工具 { 表示函数  
研究性质  
数值计算

# 第一节

## 常数项级数的概念和性质

一、常数项级数的概念

二、无穷级数的基本性质

三、级数收敛的必要条件

\*四、柯西审敛原理



# 一、常数项级数的概念

**引例1.** 用圆内接正多边形面积逼近圆面积.

依次作圆内接正  $3 \times 2^n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) 边形, 设  $a_0$  表示内接正三角形面积,  $a_k$  表示边数增加时增加的面积, 则圆内接正

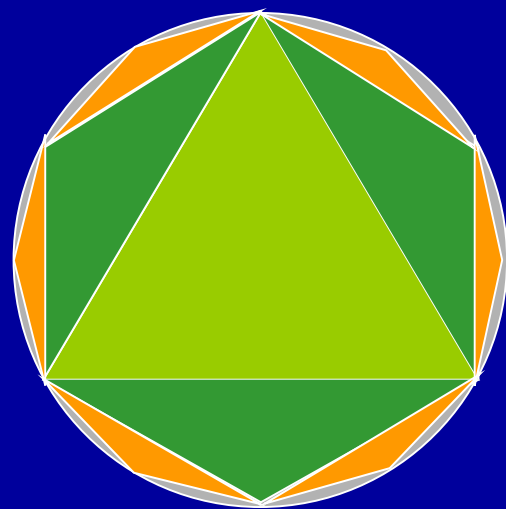
$3 \times 2^n$  边形面积为

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$n \rightarrow \infty$  时, 这个和逼近于圆的面积  $A$ .

即

$$A = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$



**引例2.** (神秘的康托尔尘集) 把 $[0,1]$ 区间三等分, 舍弃中间的开区间 $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ , 将剩下的两个子区间分别三等分, 并舍弃在中间的开区间, 如此反复进行这种“弃中”操作, 问丢弃部分的总长和剩下部分的总长各是多少?

丢弃的各开区间长依次为  $\frac{1}{3}, \frac{2}{3^2}, \frac{2^2}{3^3}, \frac{2^3}{3^4}, \dots, \frac{2^{n-1}}{3^n}, \dots$

故丢弃部分总长

$$l_{\text{丢}} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \frac{2^3}{3^4} + \dots + \frac{2^{n-1}}{3^n} + \dots$$



$$= \frac{1}{3} \left[ 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \dots \right] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1$$

剩余部分总长

$$l_{\text{剩}} = 1 - l_{\text{丢}} = 0$$

(此式计算用到后面的例1)

剩余部分总长虽然为0, 但康托尔证明了其成员和实数“一样多”, 它们象尘埃一样散落在 $[0, 1]$ 区间上, 人们称其为**康托尔尘集**.



**引例3.** 小球从 1 m 高处自由落下, 每次跳起的高度减少一半, 问小球是否会在某时刻停止运动? 说明道理.

由自由落体运动方程  $s = \frac{1}{2} g t^2$  知  $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$

设  $t_k$  表示第  $k$  次小球落地的时间, 则小球运动的时间为

$$T = t_1 + 2t_2 + 2t_3 + \cdots$$

$$= \sqrt{\frac{2}{g}} \left[ 1 + 2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{(\sqrt{2})^2} + \cdots \right) \right] \quad (\text{此式计算用到后面的例1})$$

$$= \sqrt{\frac{2}{g}} [1 + 2(\sqrt{2} + 1)] \approx 2.63 \text{ (s)}$$



**定义:** 给定一个数列  $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$  将各项依次相加, 简记为  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ , 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

称上式为**无穷级数**, 其中第  $n$  项  $u_n$  叫做级数的一般项, 级数的前  $n$  项和

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

称为级数的**部分和**. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$  存在, 则称无穷级数

**收敛**, 并称  $S$  为级数的**和**, 记作



$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

若  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  不存在, 则称无穷级数**发散**.

当级数收敛时, 称差值

$$r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

为级数的**余项**. 显然

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$$



**例1.** 讨论等比级数(又称几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a q^n = a + a q + a q^2 + \cdots + a q^n + \cdots \quad (a \neq 0)$$

( $q$  称为公比) 的敛散性.

**解:** 1) 若  $q \neq 1$ , 则部分和

$$S_n = a + a q + a q^2 + \cdots + a q^{n-1} = \frac{a - a q^n}{1 - q}$$

当  $|q| < 1$  时, 由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ , 从而  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1 - q}$

因此级数收敛, 其和为  $\frac{a}{1 - q}$ ;

当  $|q| > 1$  时, 由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$ , 从而  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ ,

因此级数发散.





$$\sum_{n=0}^{\infty} a q^n, (a \neq 0)$$

2). 若  $|q| = 1$ , 则

当  $q = 1$  时,  $S_n = n a \rightarrow \infty$ , 因此级数发散;

当  $q = -1$  时, 级数成为

$$a - a + a - a + \cdots + (-1)^{n-1} a + \cdots$$

因此 
$$S_n = \begin{cases} a, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

从而  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  不存在, 因此级数发散.

综合 1)、2) 可知,  $|q| < 1$  时, 等比级数收敛;

$|q| \geq 1$  时, 等比级数发散.



**例2.** 判别下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

**解:** (1)

$$S_n = \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n}$$

$$= (\cancel{\ln 2} - \ln 1) + (\cancel{\ln 3} - \cancel{\ln 2}) + \cdots + (\ln(n+1) - \cancel{\ln n})$$

$$= \ln(n+1) \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

所以级数 (1) 发散;

**技巧:**

利用 “**拆项相消**” 求和



$$\begin{aligned}
 (2) \quad S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \\
 &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
 &= 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

所以级数 (2) 收敛, 其和为 1.

技巧:

利用 “拆项相消” 求和



**例3.** 判别级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$  的敛散性.

**解:**

$$\because \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln \frac{n^2 - 1}{n^2} = \ln(n+1) + \ln(n-1) - 2\ln n$$

$$\begin{aligned}\therefore S_n &= \sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \\&= [\ln 3 + \ln 1 - 2\ln 2] + [\ln 4 + \ln 2 - 2\ln 3] + [\ln 5 + \\&\quad + \ln 3 - 2\ln 4] + \cdots + [\ln(n+1) + \ln(n-1) - 2\ln n] \\&= -\ln 2 + \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln 2\end{aligned}$$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\ln 2$ , 故原级数收敛, 其和为  $-\ln 2$ .



## 二、无穷级数的基本性质

**性质1.** 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛于  $S$ , 即  $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ , 则各项

乘以常数  $c$  所得级数  $\sum_{n=1}^{\infty} c u_n$  也收敛, 其和为  $c S$ .

**证:** 令  $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ , 则  $\sigma_n = \sum_{k=1}^n c u_k = c S_n$ ,

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = c S$$

这说明  $\sum_{n=1}^{\infty} c u_n$  收敛, 其和为  $c S$ .

**说明:** 级数各项乘以非零常数后其敛散性不变.



**性质2.** 设有两个收敛级数

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad \sigma = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$  也收敛, 其和为  $S \pm \sigma$ .

**证:** 令  $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ ,  $\sigma_n = \sum_{k=1}^n v_k$ , 则

$$\tau_n = \sum_{k=1}^n (u_k \pm v_k) = S_n \pm \sigma_n \rightarrow S \pm \sigma \quad (n \rightarrow \infty)$$

这说明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$  也收敛, 其和为  $S \pm \sigma$ .



## 说明:

(1) 性质2 表明收敛级数可逐项相加或相减.

(2) 若两级数中一个收敛一个发散, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$  必发散. (用反证法可证)

但若二级数都发散,  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$  不一定发散.

例如, 取  $u_n = (-1)^{2n}$ ,  $v_n = (-1)^{2n+1}$ ,

而  $u_n + v_n = 0$



**性质3.** 在级数前面加上或去掉**有限项**, 不会影响级数的敛散性.

**证:** 将级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  的前  $k$  项去掉, 所得新级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_{k+n}$  的部分和为

$$\sigma_n = \sum_{l=1}^n u_{k+l} = S_{k+n} - S_k$$

由于  $n \rightarrow \infty$  时,  $\sigma_n$  与  $S_{k+n}$  极限状况相同, 故新旧两级数敛散性相同.

当级数收敛时, 其和的关系为  $\sigma = S - S_k$ .

类似可证前面加上有限项的情况.





**性质4.** 收敛级数加括弧后所成的级数仍收敛于原级数的和.

**证:** 设收敛级数  $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ , 若按某一规律加括弧, 例如

$$(u_1 + u_2) + (u_3 + u_4 + u_5) + \cdots$$

则新级数的部分和序列  $\sigma_m$  ( $m = 1, 2, \cdots$ ) 为原级数部分和序列  $S_n$  ( $n = 1, 2, \cdots$ ) 的一个子序列, 因此必有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

用反证法可证

**推论:** 若加括弧后的级数发散, 则原级数必发散.

**注意:** 收敛级数去括弧后所成的级数不一定收敛.

例如,  $(1-1) + (1-1) + \cdots = 0$ , 但  $1-1+1-1+\cdots$  发散.



### 三、级数收敛的必要条件

设收敛级数  $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ , 则必有  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

证:  $u_n = S_n - S_{n-1}$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

可见: 若级数的一般项不趋于0, 则级数必发散.

例如,  $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{n}{n+1} + \cdots$ , 其一般项为

$$u_n = (-1)^{n-1} \frac{n}{n+1}$$

当  $n \rightarrow \infty$  时,  $u_n$  不趋于0, 因此这个级数发散.



**注意:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$  并非级数收敛的充分条件.

**例如,** 调和级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$

虽然  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ , 但此级数发散.

**事实上,** 假设调和级数收敛于  $S$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} - S_n) = 0$$

$$\text{但 } S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

矛盾! 所以假设不真.



**例4.**判断级数的敛散性:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{4}-1} - \frac{1}{\sqrt{4}+1} + \cdots$$

**解:** 考虑加括号后的级数

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{4}-1} - \frac{1}{\sqrt{4}+1}\right) + \cdots$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} = \frac{2}{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty} a_n = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ 发散, 从而原级数发散.}$$



**例5.** 判断下列级数的敛散性, 若收敛求其和:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 3n^2 + 2n}; \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}.$$

**解:** (1) 令  $u_n = \frac{e^n n!}{n^n}$ , 则

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{e^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{e^n n!}{n^n}} = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} > 1 \quad (n=1, 2, \dots)$$

故  $u_n > u_{n-1} > \dots > u_1 = e$

从而  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ , 这说明级数(1) 发散.



(2) 因

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^3 + 3n^2 + 2n} &= \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \frac{(n+2) - n}{n(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right] \quad (n=1, 2, \cdots)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3 + 3k^2 + 2k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[ \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]\end{aligned}$$

进行拆项相消

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{4}$ , 这说明原级数收敛, 其和为  $\frac{1}{4}$ .



$$(3) \quad S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}$$

$$S_n - \frac{1}{2}S_n$$

$$= \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} \right) - \left( \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \cdots + \frac{2n-1}{2^{n+1}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$\therefore S_n = 3 - \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n}, \text{ 故 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 3$$

这说明原级数收敛, 其和为 3.



## \*四、柯西审敛原理

**定理.** 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛的充要条件是:  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+,$

当  $n > N$  时, 对任意  $p \in \mathbf{N}_+,$  有

$$\left| u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} \right| < \varepsilon$$

**证:** 设所给级数部分和数列为  $S_n (n=1, 2, \cdots),$  因为

$$\left| u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} \right| = \left| S_{n+p} - S_n \right| < \varepsilon$$

所以利用数列  $S_n (n=1, 2, \cdots)$  的柯西审敛原理(第一章第六节), 即得本定理的结论.





**例6.** 利用柯西审敛原理判别级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  的敛散性.

**解:** 对任意  $p \in \mathbf{N}_+$ , 有

$$\begin{aligned} & \left| u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} \right| \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \\ &< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\ &= \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} \end{aligned}$$



$\therefore \forall \varepsilon > 0$ , 取  $N \geq \left[ \frac{1}{\varepsilon} \right]$ , 当  $n > N$  时, 对任意  $p \in \mathbf{N}_+$ , 都有

$$\left| u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} \right| < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

由柯西审敛原理可知, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛.

