

# 第四节

## 反常积分

常义积分  $\left\{ \begin{array}{l} \text{积分限有限} \\ \text{被积函数有界} \end{array} \right.$

↓ 推广

反常积分 (广义积分)

一、无穷限的反常积分

二、无界函数的反常积分



# 一、无穷限的反常积分

**引例.** 曲线  $y = \frac{1}{x^2}$  和直线  $x = 1$  及  $x$  轴所围成的开口曲

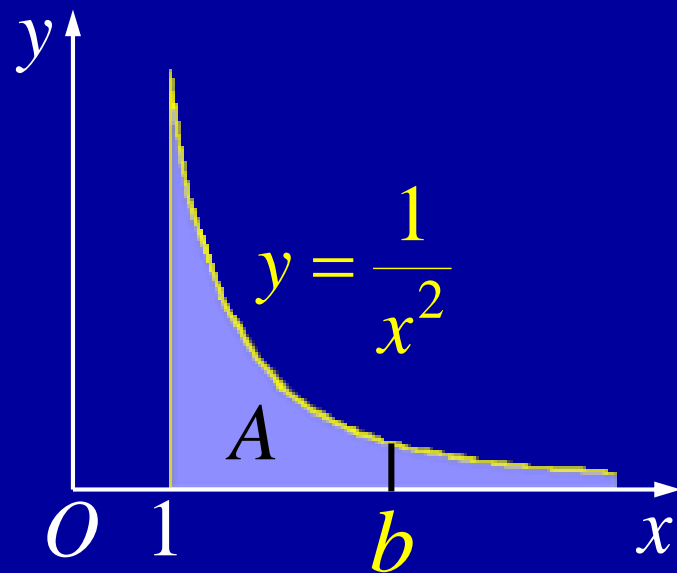
边梯形的面积 可记作

$$A = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

其含义可理解为

$$A = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{x} \right)_1^b$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{b} \right) = 1$$



**定义1.** 设  $f(x) \in C[a, +\infty)$ , 取  $b > a$ , 若

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

存在, 则称此极限为  $f(x)$  的无穷限**反常积分**, 记作

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

这时称反常积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  **收敛**; 如果上述极限不存在,

就称反常积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  **发散**.

类似地, 若  $f(x) \in C(-\infty, b]$ , 则定义

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$



若  $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$ , 则定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx$$

( $c$  为任意取定的常数)

只要有一个极限不存在, 就称  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  发散.

无穷限的反常积分也称为**第一类反常积分**.

**说明:** 上述定义中若出现  $\infty - \infty$ , 并非不定型,  
它表明该反常积分发散.



若  $F(x)$  是  $f(x)$  的原函数, 引入记号

$$F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x); \quad F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$$

则有类似牛-莱公式的计算表达式:

$$\int_a^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x = F(x) \Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)$$

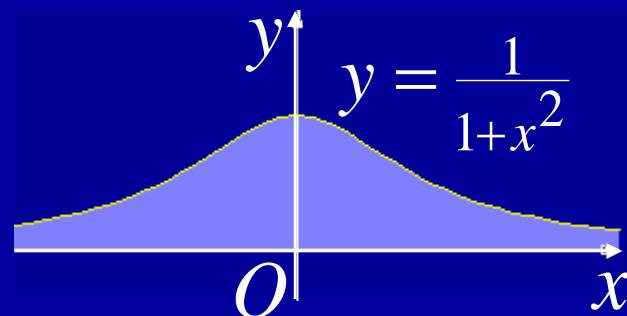
$$\int_{-\infty}^b f(x) \mathrm{d}x = F(x) \Big|_{-\infty}^b = F(b) - F(-\infty)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x = F(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty)$$



**例1.** 计算反常积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ .

**解:** 
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_{-\infty}^{+\infty}$$
$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$



**思考:**  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^2} \neq 0$  对吗?

**分析:**  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_{-\infty}^{+\infty}$  原积分发散!

**注意:** 对反常积分, 只有在收敛的条件下才能使用“偶倍奇零”的性质, 否则会出现错误.



**例2.** 证明第一类  $p$  积分  $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$  当  $p > 1$  时收敛； $p \leq 1$  时发散.

**证:** 当  $p = 1$  时有

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = [\ln|x|]_a^{+\infty} = +\infty$$

当  $p \neq 1$  时有

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \left[ \frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, & p < 1 \\ \frac{a^{1-p}}{p-1}, & p > 1 \end{cases}$$

因此, 当  $p > 1$  时, 反常积分收敛, 其值为  $\frac{a^{1-p}}{p-1}$ ;

当  $p \leq 1$  时, 反常积分发散.



**例3.** 计算反常积分  $\int_0^{+\infty} t e^{-pt} dt \ (p > 0).$

**解:** 原式  $= -\frac{t}{p} e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt$

$$= -\frac{1}{p^2} e^{-pt} \Big|_0^{+\infty}$$
$$= \frac{1}{p^2}$$





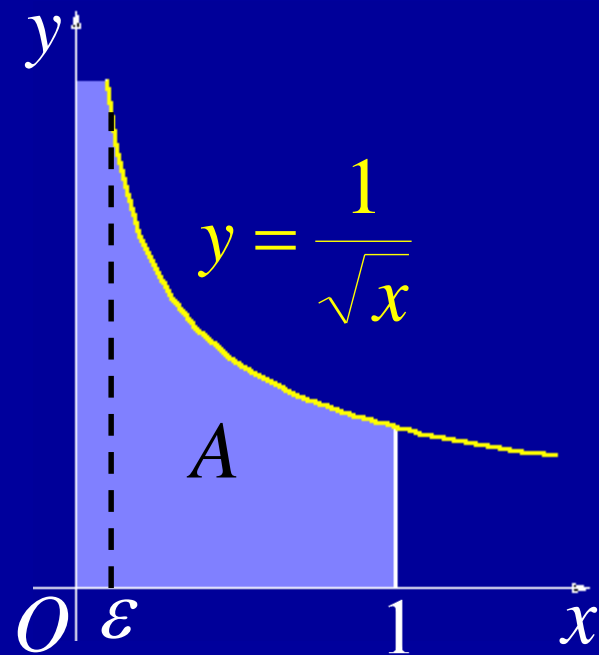
## 二、无界函数的反常积分

**引例:** 曲线  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$  与  $x$  轴,  $y$  轴和直线  $x=1$  所围成的开口曲边梯形的面积可记作

$$A = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

其含义可理解为

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} \Big|_{\varepsilon}^1 \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} 2(1 - \sqrt{\varepsilon}) = 2 \end{aligned}$$



**定义2.** 设  $f(x) \in C(a, b]$ , 而在点  $a$  的右邻域内无界, 取  $\varepsilon > 0$ , 若极限  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$  存在, 则称此极限为函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的反常积分, 记作

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

这时称反常积分  $\int_a^b f(x) dx$  **收敛**; 如果上述极限不存在, 就称反常积分  $\int_a^b f(x) dx$  **发散**.

类似地, 若  $f(x) \in C[a, b)$ , 而在  $b$  的左邻域内无界, 则定义

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$


若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上除点  $c (a < c < b)$  外连续, 而在点  $c$  的邻域内无界, 则定义

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \\ &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x) dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x) dx\end{aligned}$$

无界函数的积分又称作**第二类反常积分**, 无界点常称为**瑕点(奇点)**. 积分也称为**瑕积分**.

**说明:** 若被积函数在积分区间上仅存在有限个第一类间断点, 则本质上是常义积分, 而不是反常积分.

例如, 
$$\int_{-1}^1 \frac{x^2 - 1}{x - 1} dx = \int_{-1}^1 (x + 1) dx$$



设  $F(x)$  是  $f(x)$  的原函数，则也有类似牛－莱公式的计算表达式：

若  $b$  为瑕点，则  $\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = F(b^-) - F(a)$

若  $a$  为瑕点，则  $\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = F(b) - F(a^+)$

若  $a, b$  都为瑕点，则

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = F(b^-) - F(a^+)$$

**注意：**若瑕点  $c \in (a, b)$ ，则

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = F(b) - \underbrace{F(c^+) + F(c^-)} - F(a)$$

可相消吗？



**例4.** 计算反常积分  $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$  ( $a > 0$ ).

**解:** 显然瑕点为  $a$ , 所以

$$\text{原式} = \left[ \arcsin \frac{x}{a} \right]_0^{a^-} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

**例5.** 讨论反常积分  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$  的收敛性.

$$\text{解: } \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \left[ -\frac{1}{x} \right]_{-1}^{0^-} + \left[ -\frac{1}{x} \right]_{0^+}^1 = \infty$$

所以反常积分  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$  发散.



**例6.** 证明反常积分  $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q}$  当  $q < 1$  时收敛； $q \geq 1$  时发散.

**证:** 当  $q = 1$  时,  $\int_a^b \frac{dx}{x-a} = [\ln|x-a|]_{a^+}^b = +\infty$

当  $q \neq 1$  时

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q} = \left[ \frac{(x-a)^{1-q}}{1-q} \right]_{a^+}^b = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & q < 1 \\ +\infty, & q > 1 \end{cases}$$

所以当  $q < 1$  时, 该广义积分收敛, 其值为  $\frac{(b-a)^{1-q}}{1-q}$ ;

当  $q \geq 1$  时, 该广义积分发散.



**例7.** 设  $f(x) = \frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$ , 求  $I = \int_{-1}^3 \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx$ .

**解:**  $\because x=0$  与  $x=2$  为  $f(x)$  的无穷间断点, 故  $I$  为反常积分.

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-1}^0 \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx + \int_0^2 \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx + \int_2^3 \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx \\
 &\quad \left| \int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx = \int \frac{df(x)}{1+f^2(x)} = \arctan f(x) + C \right. \\
 &= [\arctan f(x)]_{-1}^{0^-} + [\arctan f(x)]_{0^+}^{2^-} + [\arctan f(x)]_{2^+}^3 \\
 &= -\frac{\pi}{2} + \left[-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right] + \left[\arctan \frac{32}{27} - \frac{\pi}{2}\right] = \arctan \frac{32}{27} - 2\pi
 \end{aligned}$$



# 内容小结

1. 反常积分  $\left\{ \begin{array}{l} \text{积分区间无限} \\ \text{被积函数无界} \end{array} \right\}$  —— 常义积分的极限

2. 两个重要的反常积分

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} +\infty, & p \leq 1 \\ \frac{1}{(p-1)a^{p-1}}, & p > 1 \end{cases} \quad (a > 0)$$

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q} = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^q} = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & q < 1 \\ +\infty, & q \geq 1 \end{cases}$$





**说明:** (1) 有时通过换元, 反常积分和常义积分可以互相转化.

$$\text{例如, } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \quad (\text{令 } x = \sin t)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+1} dx &= \int_0^1 \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} dx = \int_0^1 \frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2} \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{2+t^2} \quad (\text{令 } t = x - \frac{1}{x}) \end{aligned}$$

(2) 当一题同时含两类反常积分时, 应划分积分区间, 分别讨论每一区间上的反常积分.



\* (3) 有时需考虑主值意义下的反常积分,其定义为

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a f(x) dx$$

$$\text{v.p.} \int_a^b f(x) dx \quad (c \text{ 为瑕点}, a < c < b)$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right]$$

**注意:** 主值意义下反常积分存在不等于一般意义下反常积分收敛.

思考与练习



# 作业

提示:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k} = \int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{(\ln x)^k}$$

$$\text{当 } k > 1 \text{ 时, } I(k) = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k} = \frac{1}{(k-1)(\ln 2)^{k-1}}$$

令  $f(k) = (k-1)(\ln 2)^{k-1}$ , 求其最大值.



**备用题** 试证  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$ , 并求其值.

**解:**  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} \xrightarrow{\text{令 } t = \frac{1}{x}} \int_{+\infty}^0 \frac{1}{1+\frac{1}{t^4}} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$$

$$\therefore \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \left[ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} + \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx \right]$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{x^2} + 1}{\frac{1}{x^2} + x^2} dx$$



$$= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{x^2} + 1}{\frac{1}{x^2} + x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x - \frac{1}{x})^2 + 2} d(x - \frac{1}{x})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{2}} \Big|_{0^+}^{+\infty}$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

