

第三节

隐函数和参数方程求导 相关变化率

- 一、隐函数的导数
- 二、由参数方程确定的函数的导数
- 三、相关变化率



一、隐函数的导数

若由方程 $F(x, y) = 0$ 可确定 y 是 x 的函数, 则称此函数为**隐函数**.

由 $y = f(x)$ 表示的函数, 称为**显函数**.

例如, $x - y^3 - 1 = 0$ 可确定显函数 $y = \sqrt[3]{x-1}$

$y^5 + 2y - x - 3x^7 = 0$ 可确定 y 是 x 的函数,
但此隐函数不能显化.

隐函数求导方法: $F(x, y) = 0$

↓ 两边对 x 求导(注意 $y = y(x)$)

$$\frac{d}{dx} F(x, y) = 0 \quad (\text{含导数 } y' \text{ 的方程})$$


例1. 求由方程 $y^5 + 2y - x - 3x^7 = 0$ 确定的隐函数

$y = y(x)$ 在 $x = 0$ 处的导数 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$.

解: 方程两边对 x 求导

$$\frac{d}{dx}(y^5 + 2y - x - 3x^7) = 0$$

得 $5y^4 \frac{dy}{dx} + 2 \frac{dy}{dx} - 1 - 21x^6 = 0$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1 + 21x^6}{5y^4 + 2}$$

因 $x = 0$ 时 $y = 0$, 故 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \frac{1}{2}$



例2. 求椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 在点 $(2, \frac{3}{2}\sqrt{3})$ 处的切线方程.

解: 椭圆方程两边对 x 求导

$$\frac{x}{8} + \frac{2}{9}y \cdot y' = 0$$

$$\therefore y' \bigg|_{\substack{x=2 \\ y=\frac{3}{2}\sqrt{3}}} = -\frac{9}{16} \frac{x}{y} \bigg|_{\substack{x=2 \\ y=\frac{3}{2}\sqrt{3}}} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

故切线方程为 $y - \frac{3}{2}\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{4}(x - 2)$

即 $\sqrt{3}x + 4y - 8\sqrt{3} = 0$



例3. 求 $y = x^{\sin x}$ ($x > 0$) 的导数 .

解: 两边取对数 , 化为隐式

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x$$

↓ 两边对 x 求导

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}$$

$$\therefore y' = x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$$



说明:

1) 对幂指函数 $y = u^v$, 其中 $u = u(x)$, $v = v(x)$, 可用对数求导法求导:

$$\ln y = v \ln u$$

$$\frac{1}{y} y' = v' \ln u + \frac{u' v}{u}$$

$$y' = u^v \left(v' \ln u + \frac{u' v}{u} \right)$$

注意:

$$y' = \underbrace{u^v \ln u \cdot v'}_{\text{按指数函数求导公式}} + \underbrace{v u^{v-1} \cdot u'}_{\text{按幂函数求导公式}}$$

按指数函数求导公式

按幂函数求导公式



2) 有些显函数用对数求导法求导很方便.

例如, $y = \left(\frac{a}{b}\right)^x \left(\frac{b}{x}\right)^a \left(\frac{x}{a}\right)^b \quad (a > 0, b > 0, \frac{a}{b} \neq 1)$

↓ 两边取对数

$$\ln y = x \ln \frac{a}{b} + a[\ln b - \ln x] + b[\ln x - \ln a]$$

↓ 两边对 x 求导

$$\frac{y'}{y} = \ln \frac{a}{b} - \frac{a}{x} + \frac{b}{x}$$

$$y' = \left(\frac{a}{b}\right)^x \left(\frac{b}{x}\right)^a \left(\frac{x}{a}\right)^b \left(\ln \frac{a}{b} - \frac{a}{x} + \frac{b}{x} \right)$$



又如, $y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$

↓ 两边取对数

$$(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$$

$$\ln y = \frac{1}{2} [\ln|x-1| + \ln|x-2| - \ln|x-3| - \ln|x-4|]$$

↓ 对 x 求导

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} \right]$$

$$y' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}} \left[\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} \right]$$



二、由参数方程确定的函数的导数

若参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 可确定一个 y 与 x 之间的函数

关系, $\varphi(t), \psi(t)$ 可导, 且 $[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 \neq 0$, 则

$\varphi'(t) \neq 0$ 时, 有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

$\psi'(t) \neq 0$ 时, 有

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dy} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dy}{dt}} = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$$

(此时看成 x 是 y 的函数)



若上述参数方程中 $\varphi(t), \psi(t)$ 二阶可导, 且 $\varphi'(t) \neq 0$, 则由它确定的函数 $y = f(x)$ 可求二阶导数.

利用新的参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \end{cases}$, 可得

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \bigg/ \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)} \bigg/ \varphi'(t) \\ &= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)} \stackrel{\text{记}}{=} \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3} \end{aligned}$$



注意：已知 $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, $\frac{d^2 y}{dx^2} \neq \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right)'$ 对谁求导？

例4. 设 $\begin{cases} x = f'(t) \\ y = t f'(t) - f(t) \end{cases}$, 且 $f''(t) \neq 0$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

解: $\frac{dy}{dx} = \frac{t f''(t)}{f''(t)} = t$, $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{f''(t)}$

练习:

解: $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 \\ y = 1 - t \end{cases}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{t}$; $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{1}{t^2}}{t} = \frac{1}{t^3}$



例5. 抛射体运动轨迹的参数方程为 $\begin{cases} x = v_1 t \\ y = v_2 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$

求抛射体在时刻 t 的运动速度的大小和方向.

解: 先求速度大小:

速度的水平分量为 $\frac{dx}{dt} = v_1$, 垂直分量为 $\frac{dy}{dt} = v_2 - gt$,

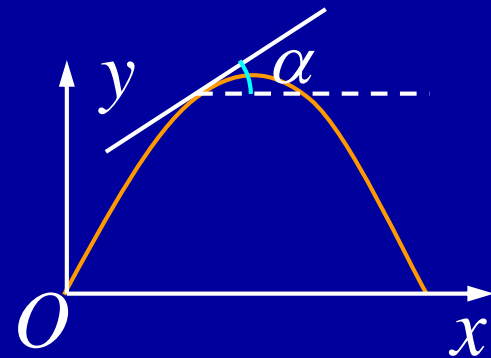
故抛射体速度大小

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{v_1^2 + (v_2 - gt)^2}$$

再求速度方向 (即轨迹的切线方向):

设 α 为切线倾角, 则

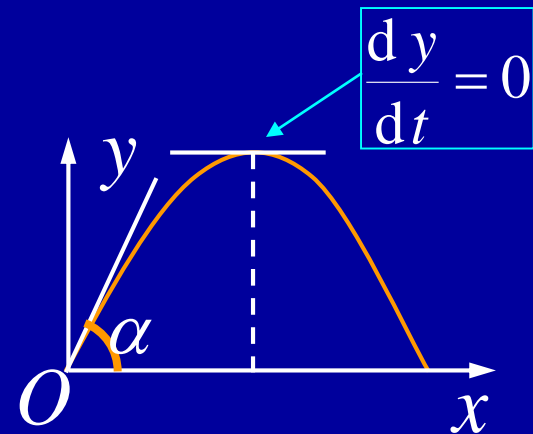
$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{v_2 - gt}{v_1}$$



抛射体轨迹的参数方程
$$\begin{cases} x = v_1 t \\ y = v_2 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

速度的水平分量 $\frac{dx}{dt} = v_1$, 垂直分量 $\frac{dy}{dt} = v_2 - g t$,

速度的方向 $\tan \alpha = \frac{v_2 - g t}{v_1}$



在刚射出 (即 $t = 0$) 时, 倾角为

$$\alpha = \arctan \frac{v_2}{v_1}$$

达到最高点的时刻 $t = \frac{v_2}{g}$, 高度 $y \Big|_{t = \frac{v_2}{g}} = \frac{1}{2} \frac{v_2^2}{g}$

落地时刻 $t = \frac{2v_2}{g}$, 抛射最远距离 $x \Big|_{t = \frac{2v_2}{g}} = \frac{2v_1 v_2}{g}$



例6. 设由方程 $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ t^2 - y + \varepsilon \sin y = 1 \end{cases} \quad (0 < \varepsilon < 1)$

确定函数 $y = y(x)$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解: 方程组两边对 t 求导, 得

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2t + 2 \\ 2t - \frac{dy}{dt} + \varepsilon \cos y \frac{dy}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2(t+1) \\ \frac{dy}{dt} = \frac{2t}{1 - \varepsilon \cos y} \end{cases}$$

故 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{t}{(t+1)(1 - \varepsilon \cos y)}$



*三、相关变化率

$x = x(t)$, $y = y(t)$ 为两可导函数

x, y 之间有联系 $\implies \underbrace{\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}}_{\text{称为相关变化率}}$ 之间也有联系

相关变化率问题解法:

找出相关变量的关系式

↓ 对 t 求导

得相关变化率之间的关系式

↓
求出未知的相关变化率



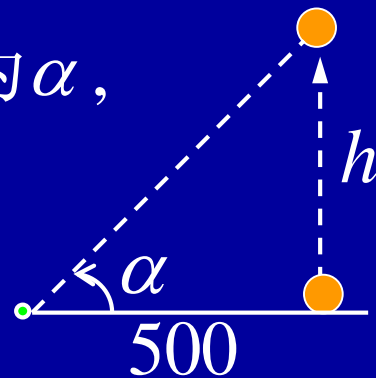
例7. 一气球从离开观察员500 m 处离地面铅直上升, 其速率为140 m/min, 当气球高度为 500 m 时, 观察员视线的仰角增加率是多少?

解: 设气球上升 t 分后其高度为 h , 仰角为 α ,

则 $\tan \alpha = \frac{h}{500}$

↓ 两边对 t 求导

$$\sec^2 \alpha \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{500} \frac{dh}{dt}$$



$$\sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$$

已知 $\frac{dh}{dt} = 140 \text{ m/min}$, $h = 500 \text{ m}$ 时, $\tan \alpha = 1$, $\sec^2 \alpha = 2$,

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{500} \cdot 140 = 0.14 \text{ (rad/min)}$$

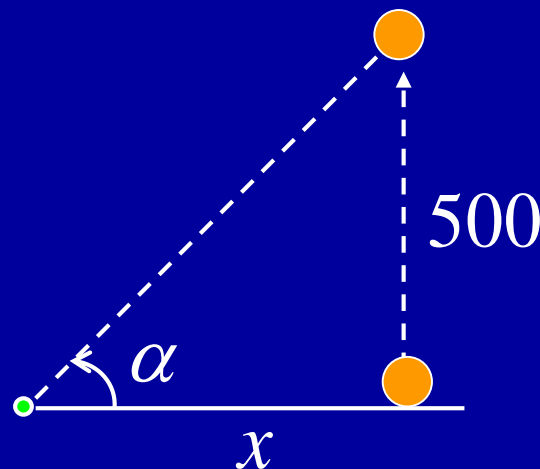


思考题：当气球升至500 m 时停住，有一观测者以100 m / min 的速率向气球出发点走来,当距离为500 m 时,仰角的增加率是多少？

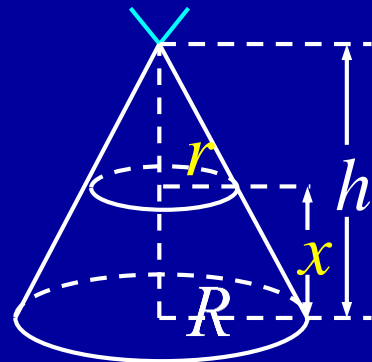
提示： $\tan \alpha = \frac{500}{x}$
对 t 求导

$$\sec^2 \alpha \cdot \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{500}{x^2} \frac{dx}{dt}$$

已知 $\frac{dx}{dt} = -100 \text{ m/min}$, $x = 500 \text{ m}$, 求 $\frac{d\alpha}{dt}$.



例8. 有一底半径为 R cm, 高为 h cm 的圆锥容器, 今以 $25\text{cm}^3/\text{s}$ 自顶部向容器内注水, 试求当容器内水位等于锥高的一半时水面上升的速度.



解: 设时刻 t 容器内水面高度为 x , 水的体积为 V , 则

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2 (h-x) = \frac{\pi R^2}{3h^2} [h^3 - (h-x)^3]$$

两边对 t 求导

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi R^2}{h^2} \cdot (h-x)^2 \cdot \frac{dx}{dt}, \text{ 而 } \frac{dV}{dt} = 25 (\text{cm}^3/\text{s})$$

$$\text{故 } \frac{dx}{dt} = \frac{25h^2}{\pi R^2 (h-x)^2}, \text{ 当 } x = \frac{h}{2} \text{ 时, } \frac{dx}{dt} = \frac{100}{\pi R^2} (\text{cm/s})$$



内容小结

1. 隐函数求导法则 —— 直接对方程两边求导
2. 对数求导法： 适用于幂指函数及某些用连乘，
连除表示的函数
3. 参数方程求导法 $\xleftarrow{\text{转化}}$ 极坐标方程求导
求高阶导数时,从低到高每次都用参数方程求导公式
4. 相关变化率问题
列出依赖于 t 的相关变量关系式
 \downarrow 对 t 求导
相关变化率之间的关系式



思考与练习

1. 求螺线 $r = \theta$ 在对应于 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 的点处的切线方程.

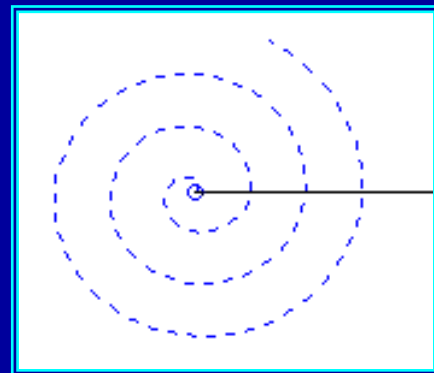
解: 化为参数方程
$$\begin{cases} x = r \cos \theta = \theta \cos \theta \\ y = r \sin \theta = \theta \sin \theta \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \bigg/ \frac{dx}{d\theta} = \frac{\sin \theta + \theta \cos \theta}{\cos \theta - \theta \sin \theta}$$

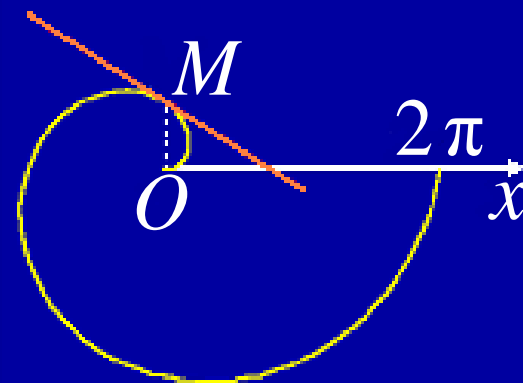
当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时对应点 $M(0, \frac{\pi}{2})$,

$$\text{斜率 } k = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\theta = \frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$$

\therefore 切线方程为 $y = -\frac{2}{\pi}x + \frac{\pi}{2}$



点击图中任意处
动画播放\暂停



2. 设 $y = \underbrace{(\sin x)^{\tan x}}_{y_1} + \underbrace{\frac{x}{x^{\ln x}} \sqrt[3]{\frac{2-x}{(2+x)^2}}}_{y_2}$, 求 y' .

提示: 分别用对数微分法求 y'_1, y'_2 .

答案:

$$y' = y'_1 + y'_2$$

$$= (\sin x)^{\tan x} (\sec^2 x \cdot \ln \sin x + 1)$$

$$+ \frac{1}{x^{\ln x}} \sqrt[3]{\frac{3-x}{(2+x)^2}} \left[1 - 2 \ln x - \frac{x}{3(2-x)} - \frac{2x}{3(2+x)} \right]$$



3. 设 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + xy = e$ 确定, 求 $y'(0)$, $y''(0)$.

解: 方程两边对 x 求导, 得

$$e^y y' + y + xy' = 0 \quad (1)$$

再求导, 得

$$e^y y'^2 + (e^y + x)y'' + 2y' = 0 \quad (2)$$

当 $x = 0$ 时, $y = 1$, 故由 (1) 得

$$y'(0) = -\frac{1}{e}$$

再代入 (2) 得 $y''(0) = \frac{1}{e^2}$



备用题

1. 设 $y = x + e^x$, 求其反函数的导数.

解: 方法1 $\because \frac{dy}{dx} = 1 + e^x$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'} = \frac{1}{1 + e^x}$$

方法2 等式两边同时对 y 求导

$$1 = \frac{dx}{dy} + e^x \cdot \frac{dx}{dy} \implies \frac{dx}{dy} = \frac{1}{1 + e^x}$$



2. 设 $\begin{cases} x = 3t^2 + 2t \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0}$.

解: 方程组两边同时对 t 求导, 得

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6t + 2 \\ e^y \cdot \frac{dy}{dt} \cdot \sin t + e^y \cos t - \frac{dy}{dt} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{e^y \cos t}{1 - e^y \sin t}$$

$$\therefore \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = \frac{\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0}}{\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0}} = \frac{e^y \cos t}{(1 - e^y \sin t)(6t + 2)} \Big|_{t=0} = \frac{e}{2}$$

