第五节
隐函数的求导方法

1) 方程在什么条件下才能确定隐函数 .

例如, 方程 $x^2+\sqrt{y}+C=0$ $\begin{cases} C<0 \text{ 时, 能确定隐函数} \\ C>0 \text{ 时, 不能确定隐函数} \end{cases}$

2) 方程能确定隐函数时, 研究其连续性,可微性及求导方法问题.

本节讨论:

一、一个方程所确定的隐函数 及其导数

二、方程组所确定的隐函数组 及其导数

一、一个方程所确定的隐函数及其导数

定理1. 设函数 $F(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某一邻域内满足

① 具有连续的偏导数;

② $F(x_0,y_0)=0$;

③ $F_y(x_0,y_0)\neq 0$

则方程 $F(x,y)=0$ 在点 P 的**某邻域内**可唯一确定一个单值连续函数 $y=f(x)$，满足条件 $y_0=f(x_0)$，并有连续导数

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}$$ (隐函数求导公式)

定理证明从略，仅就求导公式推导如下：

设 $y = f(x)$ 为方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的隐函数，则

$$F(x, f(x)) \equiv 0$$

两边对 x 求导

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

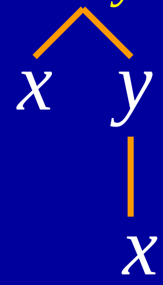
在(x_0, y_0)的某邻域内 $F_y \neq 0$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F_x}{F_y}$$

若$F(x,y)$的二阶偏导数也都连续，

则还可求隐函数的二阶导数：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}}$$



$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

$$=-\frac{F_{xx}F_y-F_{yx}F_x}{F_y^2}-\frac{F_{xy}F_y-F_{yy}F_x}{F_y^2}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)$$

$$=-\frac{F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$$

例1. 验证方程 $\sin y + \mathrm{e}^x - xy - 1 = 0$ 在点(0,0)某邻域可确定一个单值可导隐函数 $y = f(x)$,并求

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0},\quad \left.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$$

解: 令 $F(x,y) = \sin y + \mathrm{e}^x - xy - 1$, 则

① $F_x = \mathrm{e}^x - y,\ F_y = \cos y - x$ 连续;

② $F(0,0) = 0$;

③ $F_y(0,0) = 1 \neq 0$,

由 定理1 可知, 在 $x = 0$ 的某邻域内方程存在单值可导的隐函数 $y = f(x)$, 且

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = -\left.\frac{F_x}{F_y}\right|_{x=0} = -\left.\frac{\mathrm{e}^x - y}{\cos y - x}\right|_{x=0,\, y=0} = -1$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$$

$$= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{e}^x - y}{\cos y - x}\right)\Bigg|_{x=0,\ y=0,\ y'=-1}$$

$$= -\left.\frac{(\mathrm{e}^x - y')(\cos y - x) - (\mathrm{e}^x - y)(-\sin y \cdot y' - 1)}{(\cos y - x)^2}\right|_{\substack{x=0\\ y=0\\ y'=-1}}$$

$$= -3$$

导数的另一求法 — 利用隐函数求导

$$\sin y + \mathrm{e}^x - xy - 1 = 0, \quad y = y(x)$$

两边对 x 求导

$$\cos y \cdot y' + \mathrm{e}^x - y - xy' = 0$$

$$y'\Big|_{x=0} = -\left.\frac{\mathrm{e}^x - y}{\cos y - x}\right|_{(0,0)} = -1$$

两边再对 x 求导

$$-\sin y \cdot (y')^2 + \cos y \cdot y'' + \mathrm{e}^x - y' - y' - xy'' = 0$$

令 $x = 0$，注意此时 $y = 0$，$y' = -1$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0} = -3$$

定理2. 若函数 $F(x,y,z)$ 满足:

① 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某邻域内具有**连续偏导数**;

② $F(x_0,y_0,z_0)=0$;

③ $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$,

则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0) 某一邻域内可唯一确定一个单值连续函数 $z=f(x,y)$, 满足 $z_0=f(x_0,y_0)$, 并有连续偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

定理证明从略, 仅就求导公式推导如下:

设 $z=f(x,y)$ 是方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数，则

$$F(x,y,f(x,y))\equiv 0$$

$$\Big\downarrow \text{两边对 } x \text{ 求偏导}$$

$$F_x+F_z\,\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$\Big\downarrow \text{在 } (x_0,y_0,z_0) \text{ 的某邻域内 } F_z\neq 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$$

同样可得 $$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

例2. 设 $x^2+y^2+z^2-4z=0$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解法1 利用隐函数求导

$$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}-4\frac{\partial z}{\partial x}=0 \longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{2-z}$$

再对 x 求导

$$2+2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}{2-z}=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}$$

解法2　利用公式

设　$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4z$

则　$F_x=2x,\ F_z=2z-4$

$$\therefore\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{x}{z-2}=\frac{x}{2-z}$$

两边对 x 求偏导

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{2-z}\right)=\frac{(2-z)+x\dfrac{\partial z}{\partial x}}{(2-z)^2}=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}$$

例3. 设$F(x,y)$具有连续偏导数，已知方程 $F(\frac{x}{z},\frac{y}{z})=0$，求 $\mathrm{d}z$.

解法1 利用偏导数公式. 设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $F(\frac{x}{z},\frac{y}{z})=0$ 确定的隐函数，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_1'\cdot\frac{1}{z}}{F_1'\cdot(-\frac{x}{z^2})+F_2'\cdot(-\frac{y}{z^2})}=\frac{z\,F_1'}{x\,F_1'+y\,F_2'}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_2'\cdot\frac{1}{z}}{F_1'\cdot(-\frac{x}{z^2})+F_2'\cdot(-\frac{y}{z^2})}=\frac{z\,F_2'}{x\,F_1'+y\,F_2'}$$

故 $$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\frac{z}{x\,F_1'+y\,F_2'}(F_1'\mathrm{d}x+F_2'\mathrm{d}y)$$

解法2 微分法. 对方程两边求微分:

$$F(\frac{x}{z},\frac{y}{z})=0$$

$$F_1'\cdot \mathrm{d}(\frac{x}{z})+F_2'\cdot \mathrm{d}(\frac{y}{z})=0$$

$$F_1'\cdot(\frac{z\mathrm{d}x-x\mathrm{d}z}{z^2})+F_2'\cdot(\frac{z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z}{z^2})=0$$

$$\frac{xF_1'+yF_2'}{z^2}\mathrm{d}z=\frac{F_1'\mathrm{d}x+F_2'\mathrm{d}y}{z}$$

$$\mathrm{d}z=\frac{z}{xF_1'+yF_2'}(F_1'\mathrm{d}x+F_2'\mathrm{d}y)$$

二、方程组所确定的隐函数组及其导数

隐函数存在定理还可以推广到方程组的情形.

以两个方程确定两个隐函数的情况为例，即

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$$

由 F、G 的偏导数组成的行列式

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$$


雅可比，C.G.J.

称为F、G 的**雅可比 行列式**.

定理3. 设函数 $F(x,y,u,v), G(x,y,u,v)$ 满足:

① 在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数;

② $F(x_0\,,y_0,u_0,v_0)=0,\ G(x_0\,,y_0,u_0,v_0)=0;$

③ $J\Big|_P=\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_P\neq 0\,,$

则方程组 $F(x,y,u,v)=0,\ G(x,y,u,v)=0$ 在点 $(x_0\,,y_0)$ 的某一邻域内可**唯一**确定一组满足条件 $u_0=u(x_0\,,y_0),$ $v_0=v(x_0\,,y_0)$ 的**单值连续函数** $u=u(x,y), v=v(x,y),$ 且有偏导数公式 :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(\underline{x},v)} = -\frac{1}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(\underline{y},v)} = -\frac{1}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,\underline{x})} = -\frac{1}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}$$

定理证明略.
仅推导偏导
数公式如下:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,\underline{y})} = -\frac{1}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}$$

设方程组 $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$ 有隐函数组 $\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$, 则

$$\begin{cases} F(x,y,u(x,y),v(x,y))\equiv 0 \\ G(x,y,u(x,y),v(x,y))\equiv 0 \end{cases}$$

两边对 x 求导得 $\begin{cases} F_x+F_u\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+F_v\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 \\ G_x+G_u\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+G_v\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 \end{cases}$

这是关于 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\ \dfrac{\partial v}{\partial x}$ 的线性方程组, 在点P 的某邻域内

系数行列式 $J=\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}\neq 0$, 故得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$$

同样可得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}$$

例4. 设 $xu-yv=0,\ yu+xv=1$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

解: 方程组两边对 x 求导，并移项得

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial v}{\partial x} = -u \\ y\dfrac{\partial u}{\partial x} + x\dfrac{\partial v}{\partial x} = -v \end{cases}$$

由题设 $J = \begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix} = x^2+y^2 \neq 0$

故有
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{J}\begin{vmatrix} -u & -y \\ -v & x \end{vmatrix} = -\dfrac{xu+yv}{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{1}{J}\begin{vmatrix} x & -u \\ y & -v \end{vmatrix} = -\dfrac{xv-yu}{x^2+y^2} \end{cases}$$

练习: 求 $\dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$

答案:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{yu-xv}{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{xu+yv}{x^2+y^2} \end{cases}$$

例5. 设函数 $x = x(u, v),\ y = y(u, v)$ 在点(u,v) 的某一邻域内有连续的偏导数, 且 $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$

1) 证明函数组 $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$ 在与点 (u, v) 对应的点 (x, y) 的某一邻域内唯一确定一组单值、连续且具有连续偏导数的反函数 $u = u(x, y),\ v = v(x, y)$.

2) 求 $u = u(x, y),\ v = v(x, y)$ 对 x, y 的偏导数.

解: 1) 令 $F(x, y, u, v) \equiv x - x(u, v) = 0$

$$G(x, y, u, v) \equiv y - y(u, v) = 0$$

则有 $$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0,$$

由定理 3 可知结论 1) 成立.

2) 求反函数的偏导数.

$$\begin{cases} x\equiv x(u(x,y),v(x,y)) \\ y\equiv y(u(x,y),v(x,y)) \end{cases} \qquad ①$$

①式两边对 x 求导, 得

$$\begin{cases} 1=\dfrac{\partial x}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial x}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ 0=\dfrac{\partial y}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \qquad ②$$

注意 $J \neq 0$，从方程组②解得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{J}\begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial x}{\partial v} \\ 0 & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial v},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{J}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & 1 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial u}$$

同理, ①式两边对 y 求导, 可得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial u}$$

例5的应用: 计算极坐标变换 $x = \overset{u}{r}\cos\overset{v}{\theta},\ y = r\sin\theta$ 的反变换的导数 .

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial \theta}\\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial r}\end{aligned}}$$

由于 $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix} = r$

所以 $$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{1}{r}r\cos\theta = \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial r} = -\frac{1}{r}\sin\theta = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

同样有 $$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

内容小结

1. 隐函数(组) 存在定理

2. 隐函数 (组) 求导方法

方法1. 利用复合函数求导法则直接计算；

方法2. 利用微分形式不变性；

方法3. 代公式 .

思考与练习

设 $z=f(x+y+z,\ xyz)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial x}{\partial z},\ \dfrac{\partial x}{\partial y}$.

提示: $z = f(x+y+z, xyz)$

- $$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1' \cdot (1 + \frac{\partial z}{\partial x}) + f_2' \cdot (yz + xy\frac{\partial z}{\partial x})$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f_1' + yz f_2'}{1 - f_1' - xy f_2'}$$

- $$1 = f_1' \cdot (\frac{\partial x}{\partial z} + 1) + f_2' \cdot (yz\frac{\partial x}{\partial z} + xy)$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1 - f_1' - xy f_2'}{f_1' + yz f_2'}$$

- $$0 = f_1' \cdot (\frac{\partial x}{\partial y} + 1) + f_2' \cdot (yz\frac{\partial x}{\partial y} + xz)$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{f_1' + xz f_2'}{f_1' + yz f_2'}$$

解法2. 利用全微分形式不变性同时求出各偏导数.

$$z = f(x+y+z, xyz)$$

$$\mathrm{d}z = f_1' \cdot (\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z) + f_2' \cdot (yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z)$$

解出 $\mathrm{d}x$:

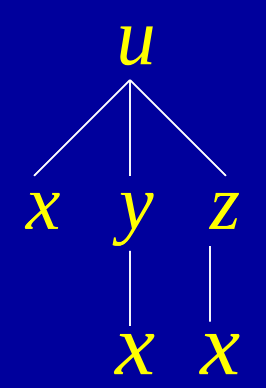
$$\mathrm{d}x = \frac{-(f_1' + xz f_2')\mathrm{d}y + (1 - f_1' - xy f_2')\mathrm{d}z}{f_1' + yz f_2'}$$

由 $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ 的系数即可得 $\dfrac{\partial x}{\partial y}, \dfrac{\partial x}{\partial z}.$

备用题 **1.** 设 $u = f(x, y, z)$ 有连续的一阶偏导数，又函数 $y = y(x)$ 及 $z = z(x)$ 分别由下列两式确定：

$$e^{xy} - xy = 2\,,\quad e^{x} = \int_0^{x-z} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\,,\ \text{求}\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

解: 两个隐函数方程两边对 x 求导, 得



$$\begin{cases} e^{xy}(y + xy') - (y + xy') = 0 \\ e^{x} = \dfrac{\sin(x-z)}{x-z}(1 - z') \end{cases}$$

解得 $$y' = -\frac{y}{x}\,,\quad z' = 1 - \frac{e^{x}(x-z)}{\sin(x-z)}$$

因此 $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f_1' - \frac{y}{x} f_2' + \left[1 - \frac{e^{x}(x-z)}{\sin(x-z)}\right] f_3'$$

2. 设 $y=y(x),\ z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

解法1 分别在各方程两端对 x 求导，得

$$\begin{cases} z'=f+x\cdot f'\cdot(1+y') \\ F_x+F_y\cdot y'+F_z\cdot z'=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -xf'\cdot y'+z'=f+xf' \\ F_y\cdot y'+F_z\cdot z'=-F_x \end{cases}$$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\begin{vmatrix} -xf' & f+xf' \\ F_y & -F_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -xf' & 1 \\ F_y & F_z \end{vmatrix}}=\frac{(f+xf')F_y-xf'\cdot F_x}{F_y+xf'\cdot F_z}$$

$$(F_y+xf'\cdot F_z\neq 0)$$

解法2 微分法.

$$z = xf(x+y),\ F(x,y,z)=0$$

对各方程两边分别求微分:

$$\begin{cases} \mathrm{d}z = f\,\mathrm{d}x + xf'\cdot(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y) \\ F_1'\mathrm{d}x + F_2'\mathrm{d}y + F_3'\mathrm{d}z = 0 \end{cases}$$

化简得

$$\begin{cases} (f+xf')\,\mathrm{d}x + xf'\mathrm{d}y - \mathrm{d}z = 0 \\ F_1'\,\mathrm{d}x + F_2'\,\mathrm{d}y + F_3'\mathrm{d}z = 0 \end{cases}$$

消去 $\mathrm{d}y$ 可得 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

二元线性代数方程组解的公式

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

解:

$$x = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$y = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

雅可比(1804 – 1851)

德国数学家. 他在数学方面最主要的成就是和挪威数学家阿贝儿相互独地奠定了椭圆函数论的基础. 他对行列式理论也作了奠基性的工作. 在偏微分方程的研究中引进了 "雅可比行列式"并应用在微积分中. 他的工作还包括代数学, 变分法, 复变函数和微分方程, 在分析力学,动力学及数学物理方面也有贡献 . 他在柯尼斯堡大学任教18年, 形成了以他为首的学派.