

习题课

定积分及其相关问题

一、与定积分概念有关的问题的解法

二、有关定积分计算和证明的方法



一、与定积分概念有关的问题的解法

1. 用定积分概念与性质求极限

2. 用定积分性质估值

3. 与变限积分有关的问题

例1. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n e^x}{1 + e^x} dx$.

解：因为 $x \in [0, 1]$ 时， $0 \leq \frac{x^n e^x}{1 + e^x} \leq x^n$ ，所以

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n e^x}{1 + e^x} dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

利用夹逼准则得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n e^x}{1 + e^x} dx = 0$



说明:

1) 思考例1下列做法对吗?

利用积分中值定理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n e^x}{1 + e^x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi^n e^\xi}{1 + e^\xi} = 0 \quad \times$$

不对! 因为 ξ 依赖于 n , 且 $0 \leq \xi \leq 1$, 故没理由认为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi^n = 0$$

2) 此类问题放大或缩小时一般应保留含参数的项.

如, P270 题7

$$1 - x^p \leq \frac{1}{1 + x^p} = 1 - \frac{x^p}{1 + x^p} \leq 1 \quad (0 \leq x \leq 1)$$



例2. 求 $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}} \right]$

解: 将数列适当放大和缩小, 以简化成积分和形式

$$\frac{n}{n+1} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n} \cdot \frac{1}{n} < \sum_{k=1}^n \frac{\sin \frac{k\pi}{n}}{n+\boxed{\frac{1}{k}}} < \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \sin \pi x \, dx = \frac{2}{\pi}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$

利用夹逼准则可知 $I = \frac{2}{\pi}$.



思考: $J = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n + \frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n + \frac{1}{n}} + \frac{\sin \frac{(n+1)\pi}{n}}{n + \frac{1}{n+1}} \right] = ?$

提示: 由上题

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n + 1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n + \frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n + \frac{1}{n}} \right] = \frac{2}{\pi}$$

故
$$\begin{aligned} J &= I - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n + 1} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{(n+1)\pi}{n}}{n + \frac{1}{n+1}} \\ &= \frac{2}{\pi} - 0 + 0 = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$



练习：1.求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right)$.

解：原式 = $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + (\frac{i}{n})^2} = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{4}$

2.求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1} + \frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}} \right)$.

提示： $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n 2^{\frac{i}{n}} \leq$ 原式 $\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2^{\frac{i}{n}}$

左边 = $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \sum_{i=1}^n 2^{\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 2^x dx = \frac{1}{\ln 2} =$ 右边



例3. 估计下列积分值 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2+x^3}} dx$.

解: 因为 $\frac{1}{\sqrt{4}} \leq \frac{1}{\sqrt{4-x^2+x^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$, $x \in [0,1]$

$$\therefore \int_0^1 \frac{1}{2} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2+x^3}} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

即 $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2+x^3}} dx \leq \frac{\pi}{6}$



例4. 证明 $\frac{2}{\sqrt[4]{e}} \leq \int_0^2 e^{x^2-x} dx \leq 2e^2$.

证: 令 $f(x) = e^{x^2-x}$, 则 $f'(x) = (2x-1)e^{x^2-x}$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{1}{2}$,

$$f(0) = 1, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}, \quad f(2) = e^2$$

$$\therefore \min_{[0,2]} f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}, \quad \max_{[0,2]} f(x) = e^2$$

故

$$\frac{2}{\sqrt[4]{e}} \leq \int_0^2 e^{x^2-x} dx \leq 2e^2$$



例5. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是单调递减的连续函数, 试证明对于任何 $q \in [0,1]$ 都有不等式

$$\int_0^q f(x) dx \geq q \int_0^1 f(x) dx$$

证明: 显然 $q=0, q=1$ 时结论成立. 当 $0 < q < 1$ 时,

$$\begin{aligned} & \int_0^q f(x) dx - q \int_0^1 f(x) dx \\ &= (1-q) \int_0^q f(x) dx - q \int_q^1 f(x) dx \quad (\text{用积分中值定理}) \\ &= (1-q) \cdot q \cdot f(\xi_1) - q \cdot (1-q) \cdot f(\xi_2) \quad \begin{matrix} \xi_1 \in [0, q] \\ \xi_2 \in [q, 1] \end{matrix} \\ &= q(1-q)[f(\xi_1) - f(\xi_2)] \geq 0 \end{aligned}$$

故所给不等式成立 .



例6. 已知 $f(x)$ 在 $x > 0$ 处连续, $f(1) = 3$, 且由方程

$$\int_1^{xy} f(t) dt = x \int_1^y f(t) dt + y \int_1^x f(t) dt$$

确定 y 是 x 的函数, 求 $f(x)$.

解: 方程两端对 x 求导, 得

$$\begin{aligned} \underline{f(xy) \cdot (y + xy')} &= \int_1^y f(t) dt + \underline{x \cdot f(y) \cdot y'} \\ &\quad + \underline{y' \int_1^x f(t) dt} + y \cdot f(x) \end{aligned}$$

令 $x = 1$, 得 $f(y)y = \int_1^y f(t) dt + yf(1) \rightarrow = 0$

再对 y 求导, 得 $f'(y) = \frac{1}{y} f(1) = \frac{3}{y} \implies f(y) = 3 \ln y + C$

令 $y = 1$, 得 $C = 3$, 故 $f(x) = 3 \ln x + 3$



例7. 求可微函数 $f(x)$ 使满足

$$f^2(x) = \int_0^x f(t) \frac{\sin t}{2 + \cos t} dt$$

解: 等式两边对 x 求导, 得

$$2f(x)f'(x) = f(x) \frac{\sin x}{2 + \cos x}$$

不妨设 $f(x) \neq 0$, 则

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{2 + \cos x}$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \frac{1}{2} \int \frac{\sin x}{2 + \cos x} dx \\ &= -\frac{1}{2} \ln(2 + \cos x) + C\end{aligned}$$



$$f^2(x) = \int_0^x f(t) \frac{\sin t}{2 + \cos t} dt$$

$$f(x) = -\frac{1}{2} \ln(2 + \cos x) + C$$

注意 $f(0) = 0$, 得 $C = \frac{1}{2} \ln 3$

$$\therefore f(x) = -\frac{1}{2} \ln(2 + \cos x) + \frac{1}{2} \ln 3$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2 + \cos x}$$



例8. 求多项式 $f(x)$ 使它满足方程

$$\int_0^1 f(xt) dt + \int_0^x f(t-1) dt = x^3 + 2x$$

解: 令 $u = xt$, 则 $\int_0^1 f(xt) dt = \frac{1}{x} \int_0^x f(u) du$

代入原方程得 $\int_0^x f(u) du + x \int_0^x f(t-1) dt = x^4 + 2x^2$

两边求导: $f(x) + \int_0^x f(t-1) dt + x f'(x-1) = 4x^3 + 4x$

再求导: $f'(x) + 2f(x-1) + xf''(x-1) = 12x^2 + 4$ ①

可见 $f(x)$ 应为二次多项式, 设 $f(x) = ax^2 + bx + c$

代入①式比较同次幂系数, 得 $a = 3, b = 4, c = 1$.

故 $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$



二、有关定积分计算和证明的方法

1. 熟练掌握定积分计算的常用公式和方法

思考：下列作法是否正确？

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx \cancel{=} -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -2$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x^2}} dx \cancel{=} \int_1^1 \frac{1}{1+t^2} \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}} dt = 0 \quad (\text{令 } t = \sqrt[3]{x^2})$$

2. 注意特殊形式定积分的计算

3. 利用各种积分技巧计算定积分

4. 有关定积分命题的证明方法



例9. 求 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{1 - e^{-2x}} dx$.

解: 令 $e^{-x} = \sin t$, 则 $x = -\ln \sin t$, $dx = -\frac{\cos t}{\sin t} dt$,

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \cos t \left(-\frac{\cos t}{\sin t} \right) dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 t}{\sin t} dt \\&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\csc t - \sin t) dt \\&= [\ln |\csc t - \cot t| + \cos t] \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\&= \ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$



例10. 选择一个常数 c , 使

$$\int_a^b (x+c) \cos^{99}(x+c) dx = 0$$

解: 令 $t = x+c$, 则

$$\int_a^b (x+c) \cos^{99}(x+c) dx = \int_{a+c}^{b+c} t \cos^{99} t dt$$

因为被积函数为奇函数, 故选择 c 使

$$a+c = -(b+c)$$

即 $c = -\frac{a+b}{2}$

可使原式为 0.



HIGHER EDUCATION PRESS

例11. 设 $f(x) = \int_0^x e^{-y^2+2y} dy$, 求 $\int_0^1 (x-1)^2 f(x) dx$.

解: $\int_0^1 (x-1)^2 f(x) dx$

$$= \frac{1}{3}(x-1)^3 f(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 (x-1)^3 f'(x) dx$$

$$= -\frac{1}{3} \int_0^1 (x-1)^3 e^{-x^2+2x} dx$$

$-x^2 + 2x$
 $=-(x^2 - 2x + 1) + 1$

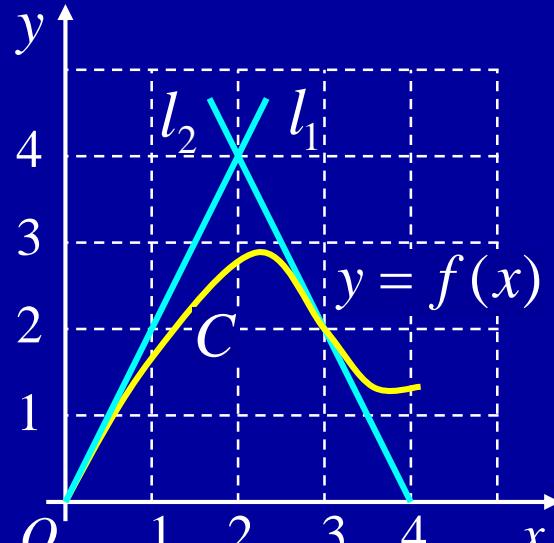
$$= -\frac{1}{6} \int_0^1 (x-1)^2 e^{-(x-1)^2+1} d(x-1)^2 \quad (\text{令 } u = (x-1)^2)$$

$$= \frac{e}{6} \int_0^1 u e^{-u} du = -\frac{e}{6} (u+1) e^{-u} \Big|_0^1 = \frac{1}{6} (e-2)$$



例12. 如图, 曲线 C 的方程为 $y = f(x)$, 点 $(3, 2)$ 是它的一个拐点, 直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点 $(0, 0)$ 与 $(3, 2)$ 处的切线, 其交点为 $(2, 4)$, 设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数, 计算定积分 $\int_0^3 (x^2 + x) f'''(x) dx$. (2005 考研)

解:
$$\begin{aligned} & \int_0^3 (x^2 + x) f'''(x) dx \\ &= (x^2 + x) f''(x) \Big|_0^3 - \int_0^3 (2x + 1) f''(x) dx \\ &= -(2x + 1) f'(x) \Big|_0^3 + \int_0^3 f'(x) dx \\ &= -(7 \times (-2) - 2) + 2 f(x) \Big|_0^3 \\ &= 16 + 2[f(3) - f(0)] = 16 + 4 = 20 \end{aligned}$$



$$f''(3) = 0$$

$$f'(0) = 2; f'(3) = -2$$



例13. 若 $f(x) \in C[0, 1]$, 试证:

$$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx \quad \checkmark$$
$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$$

解: 令 $t = \pi - x$, 则

$$\underline{\int_0^\pi x f(\sin x) dx} = -\int_\pi^0 (\pi - t) f(\sin t) dt$$
$$= \pi \int_0^\pi f(\sin t) dt - \underline{\int_0^\pi t f(\sin t) dt}$$

$$\therefore \int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$$



因为

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(\sin x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi f(\sin x) dx \\ &\quad \downarrow \text{对右端第二个积分令 } t = \pi - x \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx \end{aligned}$$

综上所述

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x f(\sin x) dx &= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx \end{aligned}$$



例14. 证明恒等式

$$\int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t} dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t} dt = \frac{\pi}{4} \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$$

证: 令 $f(x) = \int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t} dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t} dt$

则 $f'(x) = 2x \sin x \cos x - 2x \sin x \cos x = 0$

因此 $f(x) = c \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$, 又

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin \sqrt{t} dt + \int_0^{\frac{1}{2}} \arccos \sqrt{t} dt$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} (\arcsin \sqrt{t} + \arccos \sqrt{t}) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{2} dt = \frac{\pi}{4}$$

故所证等式成立.



例15. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $g(x) \neq 0$, 试证至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}$$

分析: 即证 $\underline{g(\xi)} \int_a^b f(x) dx - \underline{f(\xi)} \int_a^b g(x) dx = 0$

即 $\left[\int_a^x g(x) dx \int_a^b f(x) dx - \int_a^x f(x) dx \int_a^b g(x) dx \right]'_{x=\xi} = 0$

故作辅助函数

$$F(x) = \int_a^x g(x) dx \int_a^b f(x) dx - \int_a^x f(x) dx \int_a^b g(x) dx$$



证明：令

$$F(x) = \int_a^x g(x)dx \int_a^b f(x)dx - \int_a^x f(x)dx \int_a^b g(x)dx$$

因 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 故 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $F(a) = F(b) = 0$, 故由罗尔定理知, 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $F'(\xi) = 0$, 即

$$g(\xi) \int_a^b f(x)dx - f(\xi) \int_a^b g(x)dx = 0$$

因在 $[a, b]$ 上 $g(x)$ 连续且不为 0, 从而不变号, 因此

$$\int_a^b g(x)dx \neq 0$$

故所证等式成立.



思考: 本题能否用柯西中值定理证明?
如果能, 怎样设辅助函数?

要证: $\frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}, \quad \xi \in (a, b)$

提示: 设辅助函数 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

$$G(x) = \int_a^x g(t) dt$$



例16. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f'(x) > 0$. 若 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在, 证明:

- (1) 在 (a, b) 内 $f(x) > 0$;
- (2) 在 (a, b) 内存在点 ξ , 使

$$\frac{b^2 - a^2}{\int_a^b f(x) dx} = \frac{2\xi}{f(\xi)}$$

- (3) 在 (a, b) 内存在与 ξ 相异的点 η , 使

$$f'(\eta)(b^2 - a^2) = \frac{2\xi}{\xi - a} \int_a^b f(x) dx$$



证: (1) $\because \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在, $\therefore \lim_{x \rightarrow a^+} f(2x-a) = 0$,

由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 知 $f(a) = 0$. 又 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调增, 因此

$$f(x) > f(a) = 0, \quad x \in (a, b)$$

(2) 设 $F(x) = x^2$, $g(x) = \int_a^x f(t) dt$ ($a \leq x \leq b$)

则 $g'(x) = f(x) > 0$, 故 $F(x), g(x)$ 满足柯西中值定理条件,
于是存在 $\xi \in (a, b)$, 使

$$\frac{F(b) - F(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{b^2 - a^2}{\int_a^b f(t) dt - \int_a^a f(t) dt} = \frac{(x^2)'|_{x=\xi}}{\left(\int_a^x f(t) dt\right)'|_{x=\xi}}$$



即

$$\frac{b^2 - a^2}{\int_a^b f(t) dt} = \frac{2\xi}{f(\xi)}$$

(3) 因 $f(\xi) = f(\xi) - 0 = f(\xi) - f(a)$

\downarrow
 在 $[a, \xi]$ 上用拉格朗日中值定理
 $= f'(\eta)(\xi - a), \quad \eta \in (a, \xi)$

代入(2)中结论得

$$\frac{b^2 - a^2}{\int_a^b f(t) dt} = \frac{2\xi}{f'(\eta)(\xi - a)}$$

因此得

$$f'(\eta)(b^2 - a^2) = \frac{2\xi}{\xi - a} \int_a^b f(x) dx$$



例17. 设 $f(x) \in C[a, b]$, 且 $f(x) > 0$, 试证:

$$\int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geq (b-a)^2 \quad ②$$

证: 设 $F(x) = \int_a^x f(t) dt \int_a^x \frac{dt}{f(t)} - (x-a)^2$

则 $F'(x) = f(x) \int_a^x \frac{dt}{f(t)} + \frac{1}{f(x)} \int_a^x f(t) dt - 2(x-a)$

$$= \int_a^x \left[\frac{f(x)}{f(t)} + \frac{f(t)}{f(x)} - 2 \right] dt = \int_a^x \frac{[f(x) - f(t)]^2}{f(x)f(t)} dt$$
$$\geq 0 \quad x > a, f(x) > 0$$

故 $F(x)$ 单调不减, $\therefore F(b) \geq F(a) = 0$, 即 ② 成立.

