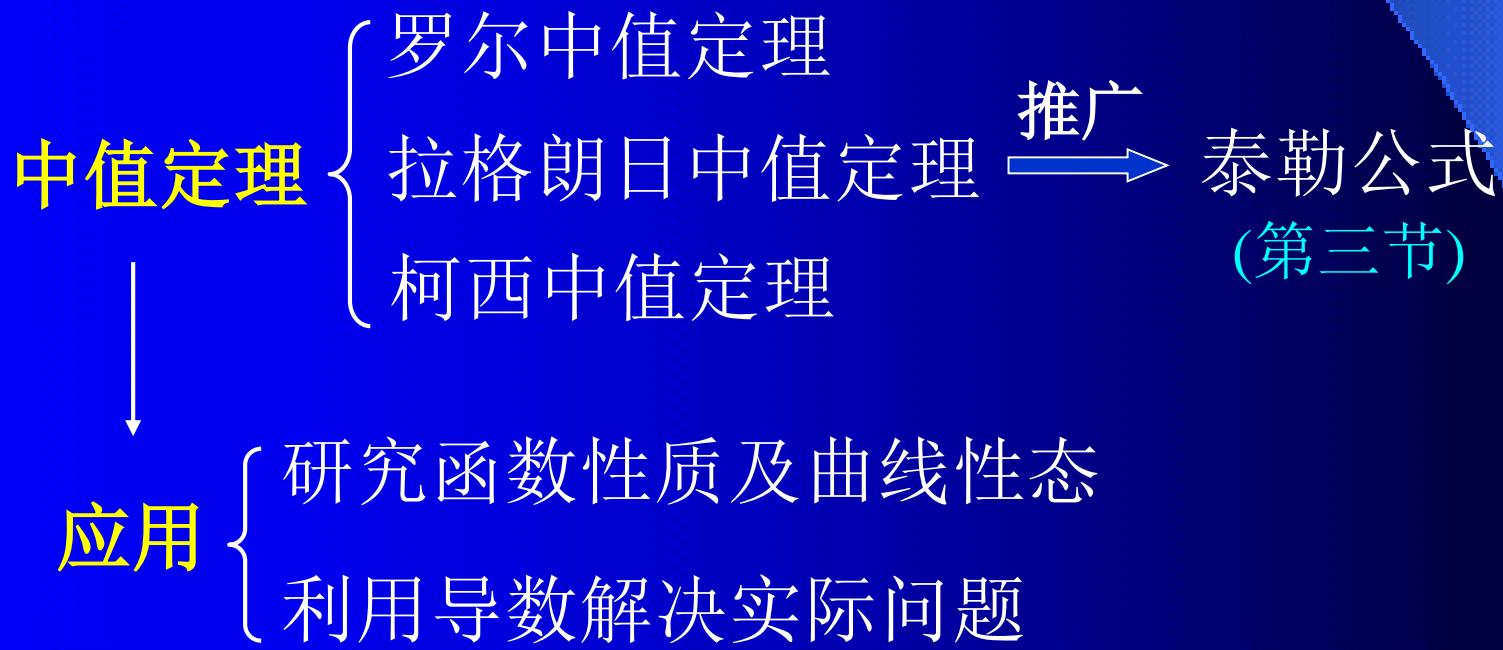


第三章 微分中值定理 与导数的应用



第一节 中值定理

一、罗尔(Rolle)定理

二、拉格朗日(Lagrange)中值定理

三、柯西(Cauchy)中值定理



一、罗尔(Rolle)定理

费马(fermat)引理



费马, P. de

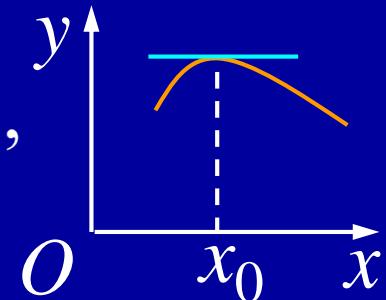
$y = f(x)$ 在 $U(x_0)$ 有定义, }
且 $f(x) \leq f(x_0)$, $f'(x_0)$ 存在 }
(或 \geq)

证: 设 $\forall x_0 + \Delta x \in U(x_0)$, $f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0)$,

$$\text{则 } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \begin{cases} f'_-(x_0) \geq 0 & (\Delta x \rightarrow 0^-) \\ f'_+(x_0) \leq 0 & (\Delta x \rightarrow 0^+) \end{cases} \implies f'(x_0) = 0$$

证毕



罗尔 (Rolle) 定理

$y = f(x)$ 满足:

(1) 在区间 $[a, b]$ 上连续

(2) 在区间 (a, b) 内可导

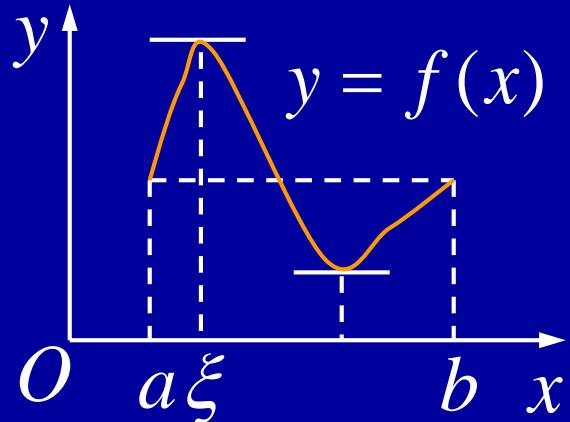
(3) $f(a) = f(b)$

⇒ 在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使 $f'(\xi) = 0$.

证: 因 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 故在 $[a, b]$ 上取得最大值 M 和最小值 m .

若 $M = m$, 则 $f(x) \equiv M, x \in [a, b]$,

因此 $\forall \xi \in (a, b), f'(\xi) = 0$.

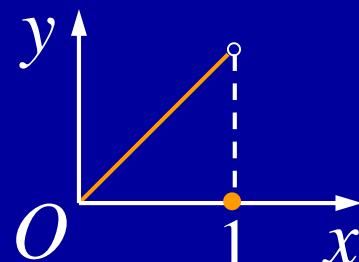


若 $M > m$, 则 M 和 m 中至少有一个与端点值不等, 不妨设 $M \neq f(a)$, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = M$, 则由费马引理得 $f'(\xi) = 0$.

注意:

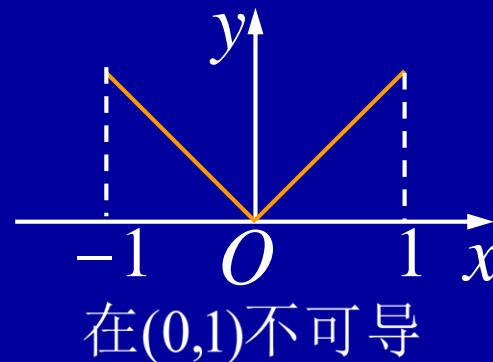
1) 定理条件条件不全具备, 结论不一定成立. 例如,

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

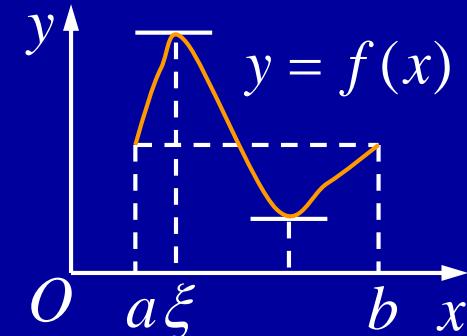


在 $[0, 1]$ 不连续

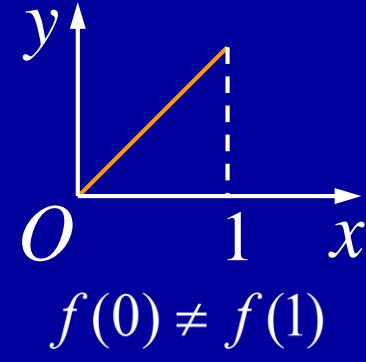
$$\begin{aligned} f(x) &= |x| \\ x &\in [-1, 1] \end{aligned}$$



在 $(0, 1)$ 不可导



$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ x &\in [0, 1] \end{aligned}$$



$f(0) \neq f(1)$



2) 定理条件只是充分的. 本定理可推广为

$y = f(x)$ 在 (a, b) 内可导, 且

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$$

\Rightarrow 在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使 $f'(\xi) = 0$.

证明提示: 设 $F(x) = \begin{cases} f(a^+), & x = a \\ f(x), & a < x < b \\ f(b^-), & x = b \end{cases}$

证 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足罗尔定理.



例1. 证明方程 $x^5 - 5x + 1 = 0$ 有且仅有一个小于1的正实根 .

证: 1) 存在性 .

设 $f(x) = x^5 - 5x + 1$, 则 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续, 且 $f(0) = 1, f(1) = -3$. 由介值定理知存在 $x_0 \in (0, 1)$, 使 $f(x_0) = 0$, 即方程有小于 1 的正根 x_0 .

2) 唯一性 .

假设另有 $x_1 \in (0, 1), x_1 \neq x_0$, 使 $f(x_1) = 0, \therefore f(x)$ 在以 x_0, x_1 为端点的区间满足罗尔定理条件, \therefore 在 x_0, x_1 之间至少存在一点 ξ , 使 $f'(\xi) = 0$.

但 $f'(x) = 5(x^4 - 1) < 0, x \in (0, 1)$, 矛盾, 故假设不真!



二、拉格朗日中值定理

$y = f(x)$ 满足:

(1) 在区间 $[a, b]$ 上连续

(2) 在区间 (a, b) 内可导

→ 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

证: 问题转化为证 $f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$

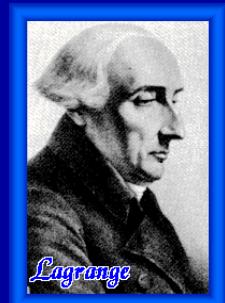
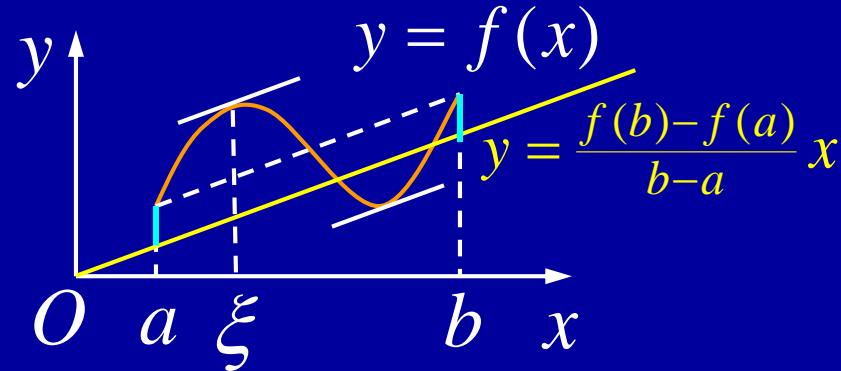
作辅助函数

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x$$

显然, $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且

$\varphi(a) = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} = \varphi(b)$, 由罗尔定理知至少存在一点

$\xi \in (a, b)$, 使 $\varphi'(\xi) = 0$, 即定理结论成立. 证毕



Lagrange



HIGHER EDUCATION PRESS

拉氏

目录

上页

下页

返回

结束

拉格朗日中值定理的有限增量形式:

令 $a = x_0$, $b = x_0 + \Delta x$, 则

$$\Delta y = f'(\underbrace{x_0 + \theta \Delta x}_{\xi}) \Delta x \quad (0 < \theta < 1)$$

推论: 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上满足 $f'(x) \equiv 0$, 则 $f(x)$ 在 I 上必为常数.

证: 在 I 上任取两点 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), 在 $[x_1, x_2]$ 上用拉格朗日中值公式, 得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0 \quad (x_1 < \xi < x_2)$$

$$\therefore f(x_2) = f(x_1)$$

由 x_1, x_2 的任意性知, $f(x)$ 在 I 上为常数.



例2. 证明等式 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $x \in [-1, 1]$.

证: 设 $f(x) = \arcsin x + \arccos x$, 则在 $(-1, 1)$ 上

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \equiv 0$$

由推论可知 $f(x) = \arcsin x + \arccos x = C$ (常数)

令 $x = 0$, 得 $C = \frac{\pi}{2}$.

又 $f(\pm 1) = \frac{\pi}{2}$, 故所证等式在定义域 $[-1, 1]$ 上成立.

经验: 欲证 $x \in I$ 时 $f(x) = C_0$, 只需证在 I 上 $f'(x) \equiv 0$,

且 $\exists x_0 \in I$, 使 $f(x_0) = C_0$.

自证: $\arctan x + \operatorname{arc}\cot x = \frac{\pi}{2}$, $x \in (-\infty, +\infty)$



例3. 证明不等式 $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ ($x > 0$).

证: 设 $f(t) = \ln(1+t)$, 则 $f(t)$ 在 $[0, x]$ 上满足拉格朗日中值定理条件, 因此应有

$$f(x) - f(0) = f'(\xi)(x - 0), \quad 0 < \xi < x$$

即

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1+\xi}, \quad 0 < \xi < x$$

因为

$$\frac{x}{1+x} < \frac{x}{1+\xi} < x$$

故

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \quad (x > 0)$$



三、柯西(Cauchy)中值定理

$f(x)$ 及 $g(x)$ 满足：

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续

(2) 在开区间 (a, b) 内可导

(3) 在开区间 (a, b) 内 $g'(x) \neq 0$

\implies 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

分析: $g(b)-g(a)=g'(\eta)(b-a) \neq 0 \quad a < \eta < b$

问题转化为证

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi) - f'(\xi) = 0$$

$\varphi'(\xi)$

构造辅助函数

$$\varphi(x) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x) - f(x)$$



柯西, A.-L.

证：作辅助函数 $\varphi(x) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x) - f(x)$

则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且

$$\varphi(a) = \frac{f(b)g(a) - f(a)g(b)}{g(b) - g(a)} = \varphi(b)$$

由罗尔定理知，至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ ，使 $\varphi'(\xi) = 0$ ，即

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

思考：柯西定理的下述证法对吗？

$\because f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a), \xi \in (a, b)$ 两个 ξ 不
 $g(b)-g(a) = g'(\xi)(b-a), \xi \in (a, b)$ 一定相同

上面两式相比即得结论。错！



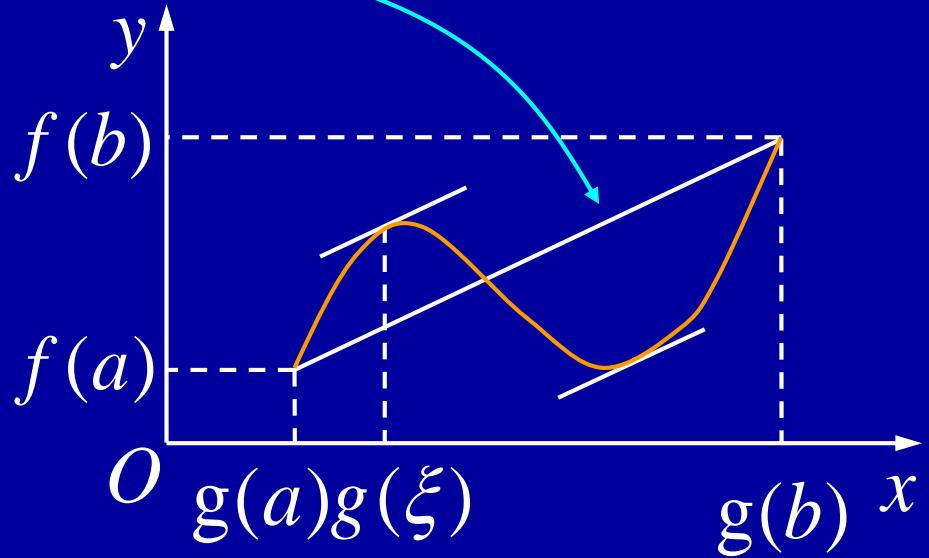
柯西定理的几何意义:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

弦的斜率 切线斜率

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = f(t) \end{cases}$$

注意: $\frac{dy}{dx} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$



例4. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 证明
至少存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使 $f'(\xi) = 2\xi[f(1) - f(0)]$.

证: 问题转化为证

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{f'(\xi)}{2\xi} = \frac{f'(x)}{(x^2)' \Big|_{x=\xi}}$$

设 $F(x) = x^2$, 则 $f(x), F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上满足柯西中值定理条件, 因此在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{f'(\xi)}{2\xi}$$

即

$$f'(\xi) = 2\xi[f(1) - f(0)]$$



例5. 试证至少存在一点 $\xi \in (1, e)$ 使 $\sin 1 = \cos \ln \xi$.

证: 法1 用柯西中值定理. 令

$$f(x) = \sin \ln x, \quad F(x) = \ln x$$

则 $f(x), F(x)$ 在 $[1, e]$ 上满足柯西中值定理条件,

因此

$$\frac{f(e) - f(1)}{F(e) - F(1)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}, \quad \xi \in (1, e)$$

即

$$\sin 1 = \frac{\frac{1}{\xi} \cos \ln \xi}{\frac{1}{\xi}} = \cos \ln \xi$$

分析:

$$\sin 1 = \cos \ln \xi$$



$$\frac{\sin \ln e - \sin \ln 1}{\ln e - \ln 1} = \frac{\frac{1}{\xi} \cos \ln \xi}{\frac{1}{\xi}}$$



例5. 试证至少存在一点 $\xi \in (1, e)$ 使 $\sin 1 = \cos \ln \xi$.

法2 令 $f(x) = \sin \ln x - \sin 1 \cdot \ln x$

则 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上满足罗尔中值定理条件,
因此存在 $\xi \in (1, e)$, 使

$$f'(\xi) = 0$$

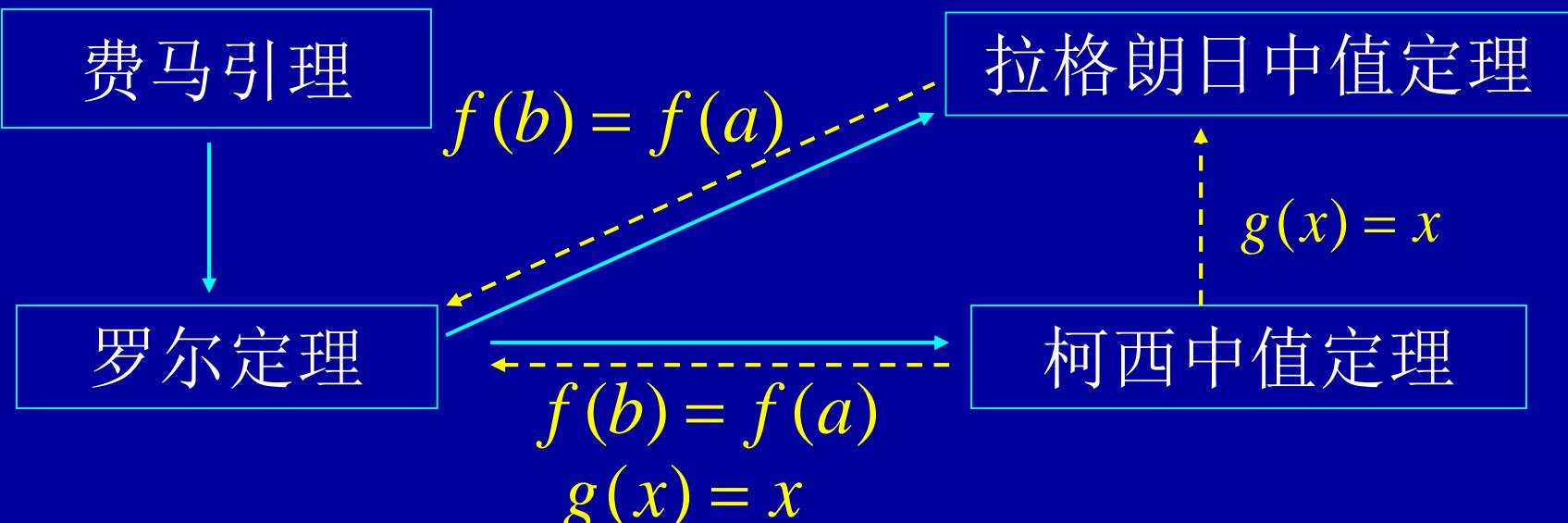
$$\downarrow f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \cos \ln x - \sin 1 \cdot \frac{1}{x}$$

$$\sin 1 = \cos \ln \xi$$



内容小结

1. 微分中值定理的条件、结论及关系



2. 微分中值定理的应用

- (1) 证明恒等式
- (2) 证明不等式
- (3) 证明有关中值问题的结论

关键:
利用逆向思维
设辅助函数



3. 有关中值问题的解题方法

利用逆向思维，设辅助函数。一般解题方法：

- (1) 证明含一个中值的等式或根的存在，多用罗尔定理，可用原函数法找辅助函数。
- (2) 若结论中涉及含中值的两个不同函数，可考虑用柯西中值定理。
- (3) 若结论中含两个或两个以上的中值，必须多次应用中值定理。
- (4) 若已知条件中含高阶导数，多考虑用泰勒公式，有时也可考虑对导数用中值定理。
- (5) 若结论为不等式，要注意适当放大或缩小的技巧。



思考与练习

1. 填空题

1) 函数 $f(x) = x^4$ 在区间 $[1, 2]$ 上满足拉格朗日定理

条件, 则中值 $\xi = \sqrt[3]{\frac{15}{4}}$.

$$\frac{2^4 - 1^4}{2 - 1} = 4\xi^3$$

2) 设 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, 方程 $f'(x) = 0$ 有 3 个根, 它们分别在区间 $(1, 2), (2, 3), (3, 4)$ 上.



2. 设 $f(x) \in C[0, \pi]$, 且在 $(0, \pi)$ 内可导, 证明至少存在一点 $\xi \in (0, \pi)$, 使 $f'(\xi) = -f(\xi) \cot \xi$.

提示: 由结论可知, 只需证

$$f'(\xi) \sin \xi + f(\xi) \cos \xi = 0$$

即 $[f(x) \sin x]'|_{x=\xi} = 0$

设 $F(x) = f(x) \sin x$

验证 $F(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上满足罗尔定理条件.



3. 若 $f(x)$ 可导, 试证在其两个零点间一定有

$f(x) + f'(x)$ 的零点.

提示: 设 $f(x_1) = f(x_2) = 0$, $x_1 < x_2$,

欲证: $\exists \xi \in (x_1, x_2)$, 使 $f(\xi) + f'(\xi) = 0$

只要证 $e^\xi f(\xi) + e^\xi f'(\xi) = 0$

亦即 $[e^x f(x)]'|_{x=\xi} = 0$

作辅助函数 $F(x) = e^x f(x)$, 验证 $F(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上满足罗尔定理条件.



4. 思考: 在 $[0, x]$ 上对函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

应用拉格朗日中值定理得

$$f(x) - f(0) = f'(\xi)(x - 0), \quad \xi \in (0, x)$$

即 $x^2 \sin \frac{1}{x} = (2\xi \sin \frac{1}{\xi} - \cos \frac{1}{\xi})x, \quad \xi \in (0, x)$

$\therefore \cos \frac{1}{\xi} = 2\xi \sin \frac{1}{\xi} - x \sin \frac{1}{x}$

当 $x \rightarrow 0^+$ 时 $\xi \rightarrow 0^+$, 因此由上式得 $\cos \frac{1}{\xi} \rightarrow 0$.

问是否可由此得出 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos \frac{1}{x} = 0$?

不能! 因为 $\xi = \xi(x)$ 是依赖于 x 的一个特殊的函数.

$x \rightarrow 0^+$ 表示 x 从右侧以任意方式趋于 0 .



备用题

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, $(0,1)$ 可导, 且 $f(1) = 0$,

求证存在 $\xi \in (0,1)$, 使 $nf(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$.

证: 设辅助函数 $\varphi(x) = x^n f(x)$

显然 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理条件,

因此至少存在 $\xi \in (0,1)$, 使得

$$\varphi'(\xi) = n\xi^{n-1}f(\xi) + \xi^n f'(\xi) = 0$$

即

$$nf(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$$



2. 设 $f''(x) < 0$, $f(0) = 0$ 证明对任意 $x_1 > 0, x_2 > 0$ 有

$$f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2)$$

证: 不妨设 $0 < x_1 < x_2$

$$\therefore f(x_1 + x_2) - f(x_2) - f(x_1)$$

$$= [f(x_1 + x_2) - f(x_2)] - [f(x_1) - f(0)]$$

$$= f'(\xi_2)x_1 - f'(\xi_1)x_1 \quad (x_2 < \xi_2 < x_1 + x_2, 0 < \xi_1 < x_1)$$

$$= x_1 f''(\xi)(\xi_2 - \xi_1) < 0 \quad (\xi_1 < \xi < \xi_2)$$

$$\therefore f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2)$$

