

# 一般周期的函数的傅里叶级数

一、周期为 $2l$ 的周期函数的  
傅里叶级数

\*二、傅里叶级数的复数形式



# 一、周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数

周期为 $2l$ 的函数 $f(x)$

↓ 变量代换  $z = \frac{\pi x}{l}$

周期为 $2\pi$ 的函数 $F(z)$

↓ 将 $F(z)$ 作傅氏展开

$f(x)$ 的傅氏展开式



**定理.** 设周期为 $2l$ 的周期函数 $f(x)$ 满足收敛定理条件, 则它的傅里叶级数展开式为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

(在 $f(x)$ 的连续点处)

其中

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx & (n=0, 1, 2, \dots) \\ b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx & (n=1, 2, \dots) \end{cases}$$



**证明:** 令  $z = \frac{\pi x}{l}$ , 则  $x \in [-l, l]$  变成  $z \in [-\pi, \pi]$ ,

令  $F(z) = f(x) = f\left(\frac{lz}{\pi}\right)$ , 则

$$\begin{aligned} F(z + 2\pi) &= f\left(\frac{l(z + 2\pi)}{\pi}\right) = f\left(\frac{lz}{\pi} + 2l\right) \\ &= f\left(\frac{lz}{\pi}\right) = F(z) \end{aligned}$$

所以  $F(z)$  是以  $2\pi$  为周期的周期函数, 且它满足收敛定理条件, 将它展成傅里叶级数:

$$F(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nz + b_n \sin nz) \quad (\text{在 } F(z) \text{ 的连续点处})$$



其中  $\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(z) \cos nz \, dz & (n=0, 1, 2, \cdots) \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(z) \sin nz \, dz & (n=1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$

$\downarrow$  令  $z = \frac{\pi x}{l}$

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx & (n=0, 1, 2, \cdots) \\ b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx & (n=1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

(在  $f(x)$  的连续点处)

证毕



**说明:** 如果  $f(x)$  为奇函数, 则有

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (\text{在 } f(x) \text{ 的连续点处})$$

其中  $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=1, 2, \dots)$

如果  $f(x)$  为偶函数, 则有

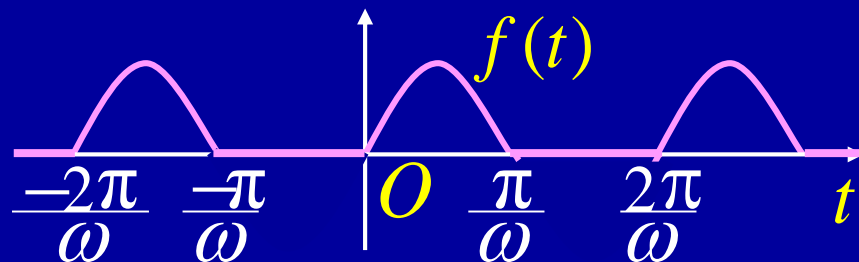
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (\text{在 } f(x) \text{ 的连续点处})$$

其中  $a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=0, 1, 2, \dots)$

**注:** 无论哪种情况, 在  $f(x)$  的间断点  $x$  处, 傅里叶级数都收敛于  $\frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)]$ .



**例1.** 交流电压  $E(t) = E \sin \omega t$  经半波整流后负压消失, 试求半波整流函数的傅里叶级数.



**解:** 这个半波整流函数的周期是  $\frac{2\pi}{\omega}$ , 它在  $[-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}]$  上的表达式为

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -\frac{\pi}{\omega} \leq t < 0 \\ E \sin \omega t, & 0 \leq t < \frac{\pi}{\omega} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} E \sin \omega t \cos n \omega t \, dt \\ &= \frac{E\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} [\sin(n+1)\omega t - \sin(n-1)\omega t] \, dt \end{aligned}$$



$$a_1 = \frac{E\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin 2\omega t \, dt = \frac{E\omega}{2\pi} \left[ -\frac{1}{2\omega} \cos 2\omega t \right]_0^{\frac{\pi}{\omega}} = 0$$

$n \neq 1$  时

$$a_n = \frac{E\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} [\sin(n+1)\omega t - \sin(n-1)\omega t] \, dt$$

$$= \frac{E\omega}{2\pi} \left[ -\frac{1}{(n+1)\omega} \cos(n+1)\omega t + \frac{1}{(n-1)\omega} \cos(n-1)\omega t \right]_0^{\frac{\pi}{\omega}}$$

$$= \frac{E}{2\pi} \left[ \frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n-1} - \frac{1}{n-1} \right]$$

$$= \frac{[(-1)^{n-1} - 1]E}{(n^2 - 1)\pi} = \begin{cases} 0, & n = 2k + 3 \\ \frac{2E}{(1 - 4k^2)\pi}, & n = 2k \end{cases} \quad (k = 0, 1, \dots)$$





$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} E \sin \omega t \cdot \sin n \omega t \, dt$$

$$= \frac{E\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} [\cos(n-1)\omega t - \cos(n+1)\omega t] \, dt$$

$$b_1 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} E \sin \omega t \cdot \sin \omega t \, dt$$

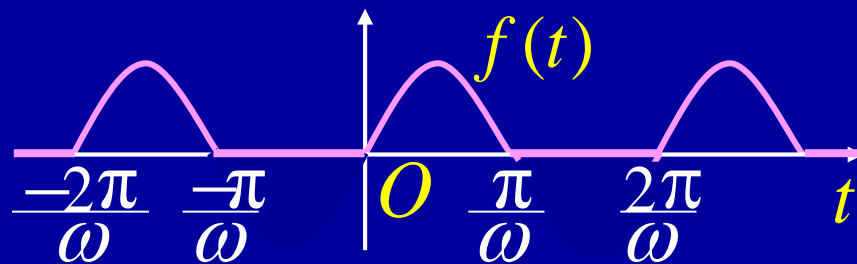
$$= \frac{E\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} (1 - \cos 2\omega t) \, dt = \frac{E\omega}{2\pi} \left[ t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right]_0^{\frac{\pi}{\omega}} = \frac{E}{2}$$

$n > 1$  时

$$b_n = \frac{E\omega}{2\pi} \left[ \frac{\sin(n-1)\omega t}{(n-1)\omega} - \frac{\sin(n+1)\omega t}{(n+1)\omega} \right]_0^{\frac{\pi}{\omega}} = 0$$



由于半波整流函数  $f(t)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 由收敛定理可得



$$f(t) = \underbrace{\frac{E}{\pi}}_{\text{直流部分}} + \underbrace{\frac{E}{2} \sin \omega t + \frac{2E}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-4k^2} \cos 2k\omega t}_{\text{交流部分}} \quad (-\infty < t < +\infty)$$

**说明:** 上述级数可分解为直流部分与交流部分的和.

$2k$  次谐波的振幅为  $A_k = \frac{2E}{\pi} \frac{1}{4k^2 - 1}$ ,  $k$  越大振幅越小,

因此在实际应用中展开式取前几项就足以逼近  $f(x)$  了.



**例2.** 把  $f(x) = x$  ( $0 < x < 2$ ) 展开成

(1) 正弦级数; (2) 余弦级数.

在  $x = 2k$  处级数收敛于何值?

**解:** (1) 将  $f(x)$  作奇周期延拓, 则有

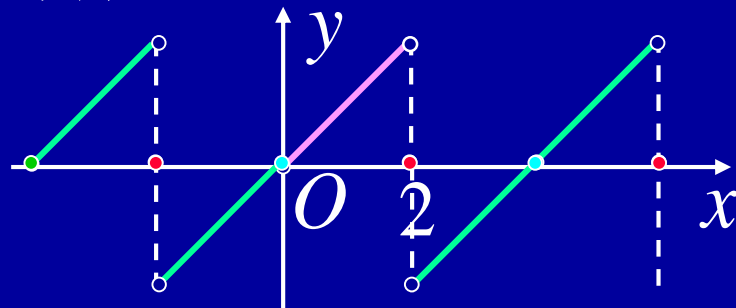
$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{2}{2} \int_0^2 x \cdot \sin \frac{n\pi x}{2} dx$$

$$= \left[ -\frac{2}{n\pi} x \cos \frac{n\pi x}{2} + \left( \frac{2}{n\pi} \right)^2 \sin \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2$$

$$= -\frac{4}{n\pi} \cos n\pi = \frac{4}{n\pi} (-1)^{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\therefore f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi x}{2} \quad (0 < x < 2)$$



(2) 将  $f(x)$  作偶周期延拓, 则有

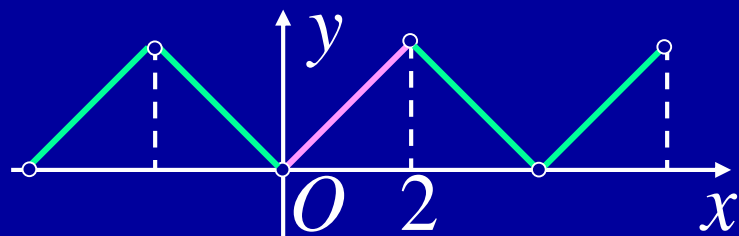
$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 x \, dx = 2$$

$$a_n = \frac{2}{2} \int_0^2 x \cdot \cos \frac{n\pi x}{2} \, dx$$

$$= \left[ \frac{2}{n\pi} x \sin \frac{n\pi x}{2} + \left( \frac{2}{n\pi} \right)^2 \cos \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2$$

$$= -\frac{4}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{-8}{(2k-1)^2 \pi^2}, & n = 2k-1 \end{cases} \quad (k=1, 2, \dots)$$

$$\therefore f(x) = x = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2} \quad (0 < x < 2)$$



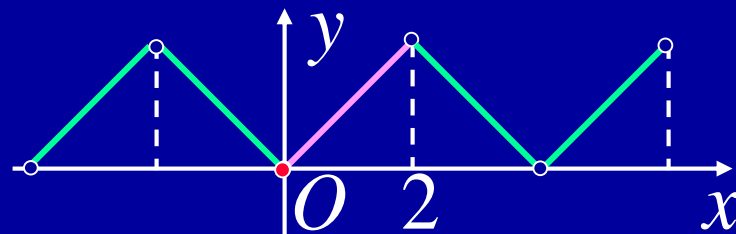
$$b_n = 0 \quad (n=1, 2, \dots)$$



$$f(x) = x = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2} \quad (0 < x < 2)$$

**说明:** 此式对  $x=0$  也成立,

据此有 
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$



由此还可导出

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$



当函数定义在任意有限区间上时, 其展开方法为:

**方法1**  $f(x), x \in [a, b]$  

↓ 令  $x = z + \frac{b+a}{2}$ , 即  $z = x - \frac{b+a}{2}$

$$F(z) = f(x) = f\left(z + \frac{b+a}{2}\right), z \in \left[-\frac{b-a}{2}, \frac{b-a}{2}\right]$$

↓ 周期延拓

$F(z)$  在  $\left[-\frac{b-a}{2}, \frac{b-a}{2}\right]$  上展成傅里叶级数

↓ 将  $z = x - \frac{b+a}{2}$  代入展开式

$f(x)$  在  $[a, b]$  上的傅里叶级数



方法2  $f(x), x \in [a, b]$  

↓ 令  $x = z + a$ , 即  $z = x - a$

$$F(z) = f(x) = f(z + a), \quad z \in [0, b - a]$$

↓ 奇或偶式周期延拓

$F(z)$  在  $[0, b - a]$  上展成正弦或余弦级数

↓ 将  $z = x - a$  代入展开式

$f(x)$  在  $[a, b]$  上的正弦或余弦级数



**例3.** 将函数  $f(x) = 10 - x$  ( $5 < x < 15$ ) 展成傅里叶级数.

**解:** 令  $z = x - 10$ , 设

$$F(z) = f(x) = f(z + 10) = -z \quad (-5 < z < 5)$$

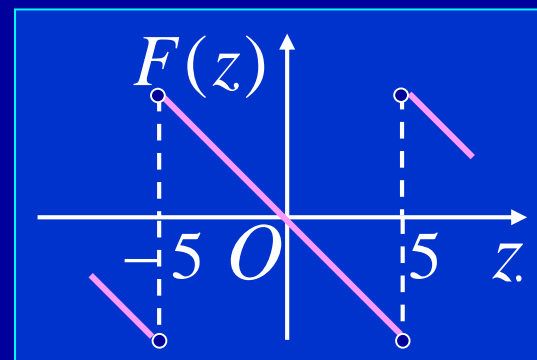
将  $F(z)$  延拓成周期为 10 的周期函数, 则它满足收敛定理条件. 由于  $F(z)$  是奇函数, 故

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{2}{5} \int_0^5 -z \sin \frac{n\pi z}{5} dz = (-1)^n \frac{10}{n\pi} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$F(z) = \frac{10}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi z}{5} \quad (-5 < z < 5)$$

$$\therefore 10 - x = \frac{10}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{5} \quad (5 < x < 15)$$





## \*二、傅里叶级数的复数形式

设  $f(x)$  是周期为  $2l$  的周期函数, 则

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

利用欧拉公式 
$$\begin{cases} \cos \frac{n\pi x}{l} = \frac{1}{2} (e^{i\frac{n\pi x}{l}} + e^{-i\frac{n\pi x}{l}}) \\ \sin \frac{n\pi x}{l} = \frac{-i}{2} (e^{i\frac{n\pi x}{l}} - e^{-i\frac{n\pi x}{l}}) \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{a_n}{2} (e^{i\frac{n\pi x}{l}} + e^{-i\frac{n\pi x}{l}}) - \frac{ib_n}{2} (e^{i\frac{n\pi x}{l}} - e^{-i\frac{n\pi x}{l}}) \right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n - ib_n}{2} e^{i\frac{n\pi x}{l}} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-i\frac{n\pi x}{l}} \right)$$

$c_0$   $c_n$   $c_{-n}$



注意到  $c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx$

$$c_n = \frac{a_n - \mathrm{i}b_n}{2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx - \frac{\mathrm{i}}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right]$$

$$= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \left( \cos \frac{n\pi x}{l} - \mathrm{i} \sin \frac{n\pi x}{l} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-\mathrm{i} \frac{n\pi x}{l}} dx \quad (n=1, 2, \dots)$$

同理  $c_{-n} = \frac{a_n + \mathrm{i}b_n}{2} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{\mathrm{i} \frac{n\pi x}{l}} dx \quad (n=1, 2, \dots)$



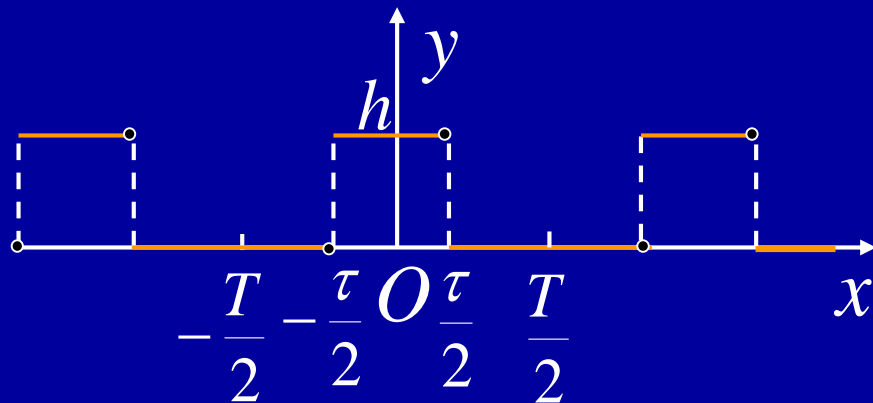
因此得 傅里叶级数的复数形式:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i \frac{2n\pi x}{T}} \\ c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i \frac{2n\pi x}{T}} dx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{array} \right.$$



**例4.** 把宽为  $\tau$ , 高为  $h$ , 周期为  $T$  的矩形波展成复数形式的傅里叶级数.

**解:** 在一个周期  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  内矩形波的函数表达式为



$$u(t) = \begin{cases} h, & -\frac{\tau}{2} \leq t < \frac{\tau}{2} \\ 0, & -\frac{T}{2} \leq t < -\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2} \leq t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

它的复数形式的傅里叶系数为

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} h dt = \frac{h\tau}{T}$$



$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) e^{-i \frac{2n\pi t}{T}} dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} h e^{-i \frac{2n\pi t}{T}} dt$$

$$= \frac{h}{T} \left[ -\frac{T}{2n\pi i} e^{-i \frac{2n\pi t}{T}} \right]_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{h}{n\pi} \cdot \frac{-1}{2i} \left[ e^{-i \frac{n\pi \tau}{T}} - e^{i \frac{n\pi \tau}{T}} \right]$$

$$= \frac{h}{n\pi} \sin \frac{n\pi \tau}{T} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$\therefore u(t) = \frac{h\tau}{T} + \frac{h}{\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi \tau}{T} e^{i \frac{2n\pi t}{T}}$$

$$(t \neq \pm \frac{\tau}{2} + kT, k = 0, \pm 1, \dots)$$



## 内容小结

1. 周期为 $2l$  的函数的傅里叶级数展开公式

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \quad (x \neq \text{间断点})$$

$$\text{其中} \begin{cases} a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx & (n=0,1,\cdots) \\ b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx & (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

当 $f(x)$ 为奇(偶)函数时, 为正弦(余弦) 级数.

2. 在任意有限区间上函数的傅里叶展开法  $\left\{ \begin{array}{l} \text{变换} \\ \text{延拓} \end{array} \right.$

3. 傅里叶级数的复数形式 —— 利用欧拉公式导出



## 思考与练习

1. 将函数展开为傅里叶级数时为什么最好先画出其图形?

**答:** 易看出奇偶性及间断点, 从而便于计算系数和写出收敛域.

2. 计算傅里叶系数时哪些系数要单独算?

**答:** 用系数公式计算  $a_n, b_n$  时, 如分母中出现因子  $n-k$  则  $a_k$  或  $b_k$  必须单独计算.



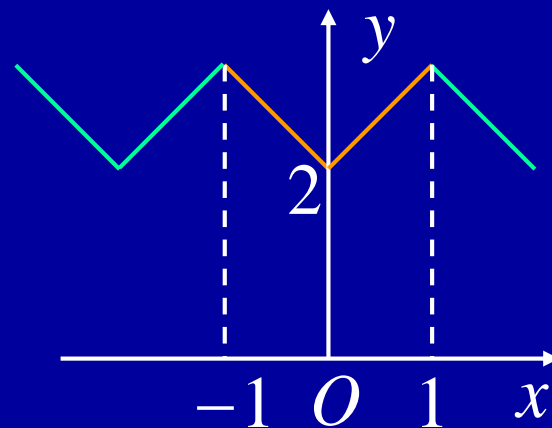
**备用题** 将  $f(x) = 2 + |x|$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ) 展开成以2为周期的傅立叶级数, 并由此求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  的和.

**解:**  $f(x)$  为偶函数,  $\therefore b_n = 0$

$$a_0 = 2 \int_0^1 (2 + x) dx = 5$$

$$a_n = 2 \int_0^1 (2 + x) \cos(n\pi x) dx$$

$$= \frac{2}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1]$$



因  $f(x)$  偶延拓后在  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 故得

$$2 + |x| = \frac{5}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)\pi x, \quad x \in [-1, 1]$$





令  $x = 0$ , 得

$$2 = \frac{5}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

故 
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$$

$$\frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

