

第四节

函数的单调性与 曲线的凹凸性

一、函数单调性的判定法

二、曲线的凹凸与拐点



一、函数单调性的判定法

定理 1. 设函数 $f(x)$ 在开区间 I 内可导, 若 $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), 则 $f(x)$ 在 I 内单调递增 (递减).

证: 无妨设 $f'(x) > 0$, $x \in I$, 任取 $x_1, x_2 \in I$ ($x_1 < x_2$)
由拉格朗日中值定理得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0$$

$$\xi \in (x_1, x_2) \subset I$$

故 $f(x_1) < f(x_2)$. 这说明 $f(x)$ 在 I 内单调递增.

证毕



例1. 确定函数 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ 的单调区间.

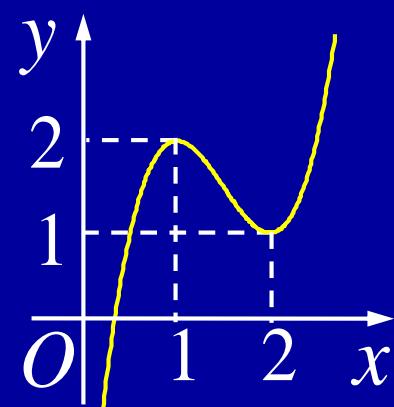
解: $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 1, x = 2$

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		2		1	

故 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty, 1), (2, +\infty)$;

$f(x)$ 的单调减区间为 $(1, 2)$.



说明:

1) 单调区间的分界点除驻点外,也可是导数不存在的点.

例如, $y = \sqrt[3]{x^2}$, $x \in (-\infty, +\infty)$

$$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

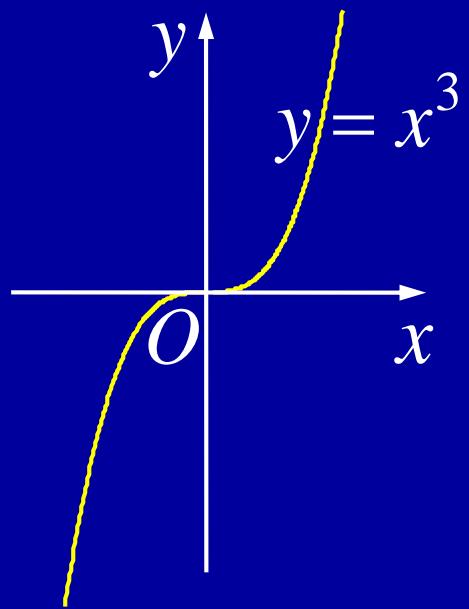
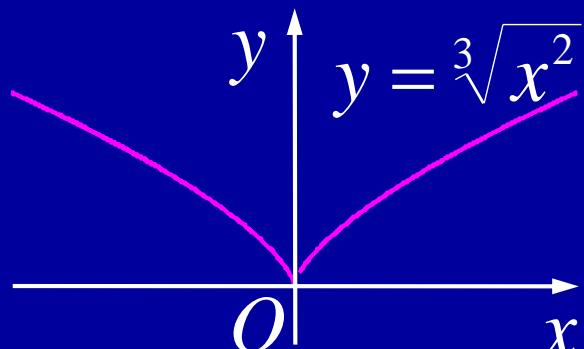
$$y'|_{x=0} = \infty$$

2) 如果函数在某驻点两边导数同号,
则不改变函数的单调性 .

例如, $y = x^3$, $x \in (-\infty, +\infty)$

$$y' = 3x^2$$

$$y'|_{x=0} = 0$$



例2. 证明 $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ 时, 成立不等式 $\frac{\sin x}{x} \geq \frac{2}{\pi}$.

证: 令 $f(x) = \frac{\sin x}{x} - \frac{2}{\pi}$,

则 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 上连续, 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上可导, 且

$$f'(x) = \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2} (x - \tan x) < 0$$

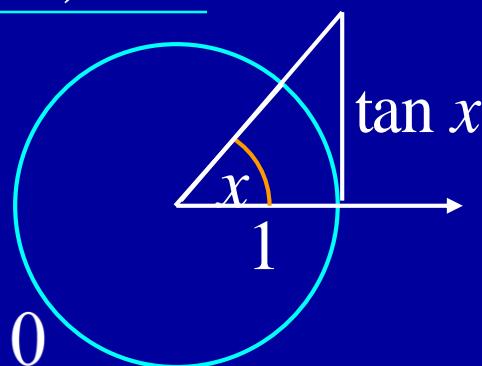
因此 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内单调递减,

又 $f(x)$ 在 $\frac{\pi}{2}$ 处左连续, 因此 $f(x) \geq f(\frac{\pi}{2}) = 0$

从而

$$\frac{\sin x}{x} \geq \frac{2}{\pi}, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}]$$

证



二、曲线的凹凸与拐点

定义. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, $\forall x_1, x_2 \in I$,

(1) 若恒有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 则称 $f(x)$ 的

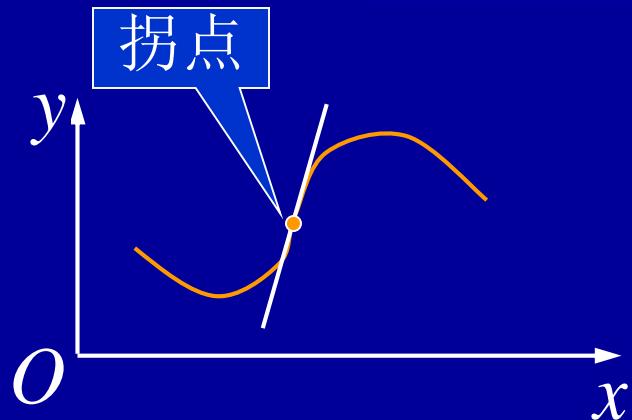
图形是**凹**的;

(2) 若恒有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 则称 $f(x)$ 的

图形是**凸**的.

连续曲线上有切线的凹凸分界点

称为**拐点**.



定理2.(凹凸判定法) 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有二阶导数

- (1) 在 I 内 $f''(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 I 内图形是凹的; 
- (2) 在 I 内 $f''(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 I 内图形是凸的. 

证: $\forall x_1, x_2 \in I$, 记 $\xi = \frac{x_1+x_2}{2}$, 利用一阶泰勒公式可得

$$f(x_1) = f(\xi) + \boxed{f'(\xi)(x_1 - \xi)} + \boxed{\frac{f''(\xi_1)}{2!}(x_1 - \xi)^2}$$
$$f(x_2) = f(\xi) + \boxed{f'(\xi)(x_2 - \xi)} + \boxed{\frac{f''(\xi_2)}{2!}(x_2 - \xi)^2}$$

两式相加


$$f(x_1) + f(x_2) = 2f(\xi) + \frac{1}{2!} \left(\frac{x_2 - x_1}{2} \right)^2 [f''(\xi_1) + f''(\xi_2)]$$

当 $f''(x) > 0$ 时, $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f(\xi)$, 说明 (1) 成立;
  (2) 证毕

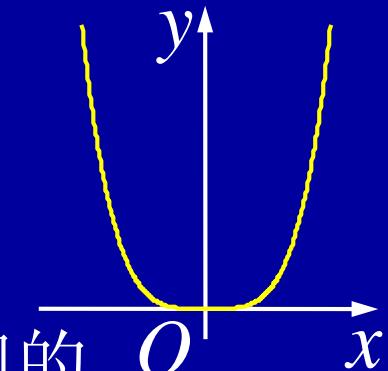


例3. 判断曲线 $y = x^4$ 的凹凸性.

解: $y' = 4x^3$, $y'' = 12x^2$

当 $x \neq 0$ 时, $y'' > 0$; $x = 0$ 时, $y'' = 0$,

故曲线 $y = x^4$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是向上凹的.



说明:

- 1) 若在某点二阶导数为 0, 在其两侧二阶导数不变号, 则曲线的凹凸性不变.
- 2) 根据拐点的定义及上述定理, 可得拐点的判别法如下:

若曲线 $y = f(x)$ 在点 x_0 连续, $f''(x_0) = 0$ 或不存在, 但 $f''(x)$ 在 x_0 两侧异号, 则点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一个拐点.

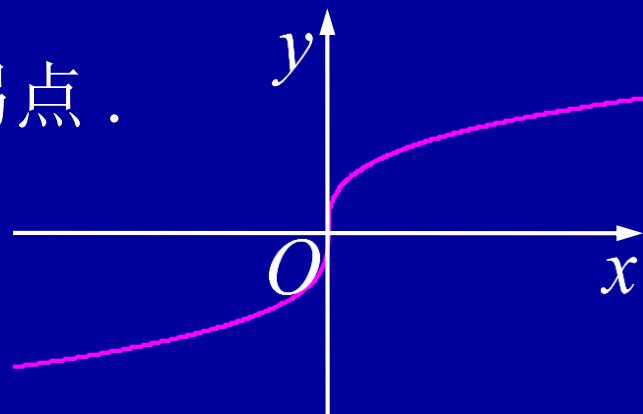


例4. 求曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 的拐点.

解: $y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $y'' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
y''	+	不存在	-
y	凹	0	凸

因此点 $(0, 0)$ 为曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 的拐点.



例5. 求曲线 $y=3x^4-4x^3+1$ 的凹凸区间及拐点.

解: 1) 求 y''

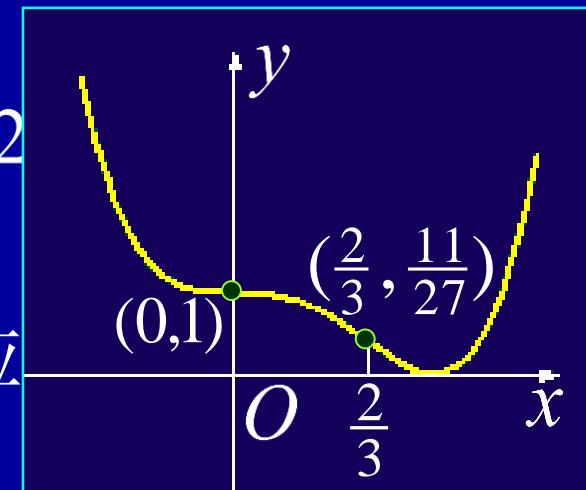
$$y' = 12x^3 - 12x^2, \quad y'' = 36x^2 - 2$$

2) 求拐点可疑点坐标

令 $y'' = 0$ 得 $x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{3}$, 对应

3) 列表判别

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3}, +\infty)$
y''	+	0	-	0	+
y	凹	1	凸	$\frac{11}{27}$	凹



故该曲线在 $(-\infty, 0)$ 及 $(\frac{2}{3}, +\infty)$ 上向上凹, 在 $(0, \frac{2}{3})$ 上向上凸, 点 $(0, 1)$ 及 $(\frac{2}{3}, \frac{11}{27})$ 均为拐点.



内容小结

1. 可导函数单调性判别

$f'(x) > 0, x \in I \implies f(x)$ 在 I 上单调递增

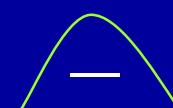
$f'(x) < 0, x \in I \implies f(x)$ 在 I 上单调递减

2. 曲线凹凸与拐点的判别

$f''(x) > 0, x \in I \implies$ 曲线 $y = f(x)$
在 I 上向上凹



$f''(x) < 0, x \in I \implies$ 曲线 $y = f(x)$
在 I 上向上凸



拐点 — 连续曲线上有切线的凹凸分界点



思考与练习

1. 设在 $[0,1]$ 上 $f''(x) > 0$, 则 $f'(0), f'(1), f(1) - f(0)$ 或 $f(0) - f(1)$ 的大小顺序是 (**B**)

(A) $f'(1) > f'(0) > f(1) - f(0)$

(B) $f'(1) > f(1) - f(0) > f'(0)$

(C) $f(1) - f(0) > f'(1) > f'(0)$

(D) $f'(1) > f(0) - f(1) > f'(0)$

提示: 利用 $f''(x) > 0 \Rightarrow f'(x)$ 单调增加, 及

$$f(1) - f(0) = f'(\xi) \quad (0 < \xi < 1)$$

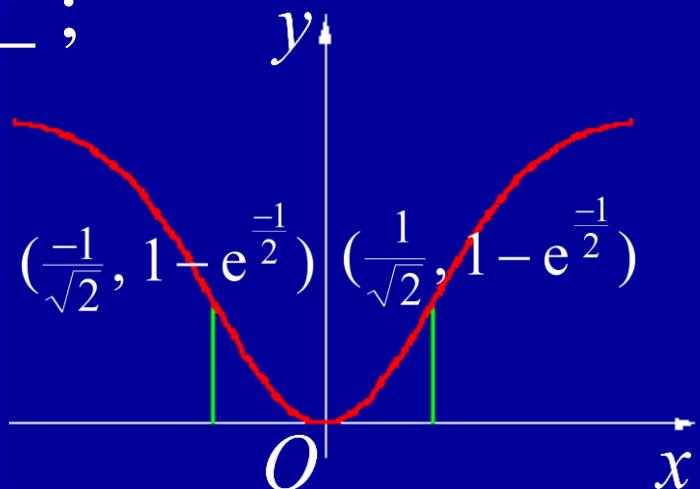


2. 曲线 $y = 1 - e^{-x^2}$ 的凹区间是 $\underline{(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})}$;

凸区间是 $\underline{(-\infty, \frac{-1}{\sqrt{2}})}$ 及 $\underline{(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)}$;

拐点为 $\underline{(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 - e^{\frac{-1}{2}})}$.

提示: $y'' = 2e^{-x^2}(1 - 2x^2)$



备用题

1. 求证曲线 $y = \frac{x+1}{x^2 + 1}$ 有位于一直线的三个拐点.

证明: $y' = \frac{(x^2 + 1) - (x+1)2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - 2x - x^2}{(x^2 + 1)^2}$

$$y'' = \frac{(-2 - 2x)(x^2 + 1)^2 - (1 - 2x - x^2) \cdot 2(x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4}$$
$$= \frac{2(x^3 + 3x^2 - 3x - 1)}{(x^2 + 1)^3}$$
$$= \frac{2(x-1)(x+2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})}{(x^2 + 1)^3}$$



令 $y'' = 0$ 得

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -2 - \sqrt{3}, \quad x_3 = -2 + \sqrt{3}$$

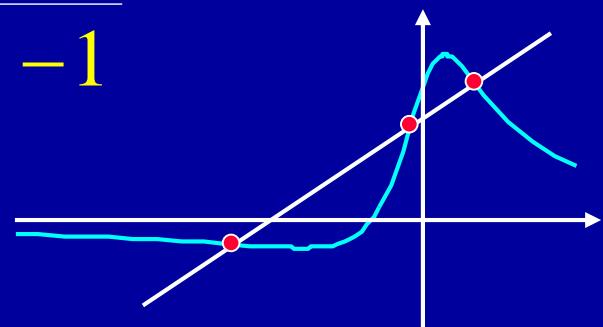
从而三个拐点为

$$(1, 1), \quad (-2 - \sqrt{3}, \frac{-1 - \sqrt{3}}{8 + 4\sqrt{3}}), \quad (-2 + \sqrt{3}, \frac{-1 + \sqrt{3}}{8 - 4\sqrt{3}})$$

因为

$$\frac{\frac{-1 - \sqrt{3}}{8 + 4\sqrt{3}} - 1}{-2 - \sqrt{3} - 1} = \frac{1}{4} = \frac{\frac{-1 + \sqrt{3}}{8 - 4\sqrt{3}} - 1}{-2 + \sqrt{3} - 1}$$

所以三个拐点共线.



$$y = \frac{x+1}{x^2+1}$$

$$y'' = \frac{2(x-1)(x+2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$$



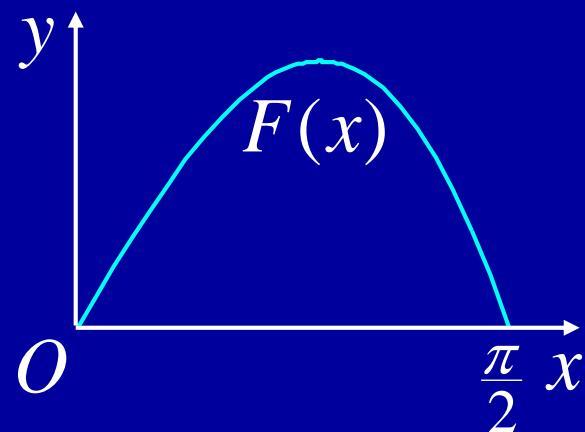
2. 证明: 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, 有 $\sin x > \frac{2}{\pi}x$.

证明: 令 $F(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x$, 则 $F(0) = 0$, $F(\frac{\pi}{2}) = 0$

$$\therefore F'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$$

$$F''(x) = -\sin x < 0$$

$\therefore F(x)$ 是凸函数



$$\therefore F(x) \geq \min\{F(0), F(\frac{\pi}{2})\} = 0 \quad (\text{自证})$$

即 $\sin x > \frac{2}{\pi}x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$

