

第九章

曲线积分与曲面积分

积分学	定积分	二重积分	三重积分	曲线积分	曲面积分
积分域	区间	平面域	空间域	曲线弧	曲面域

曲线积分 { 对弧长的曲线积分
 对坐标的曲线积分

曲面积分 { 对面积的曲面积分
 对坐标的曲面积分

第一节

对弧长的曲线积分

一、对弧长的曲线积分的概念与性质

二、对弧长的曲线积分的计算法



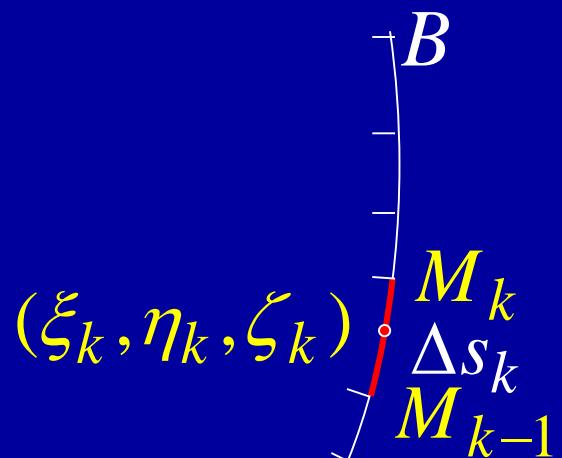
一、对弧长的曲线积分的概念与性质

1. 引例：曲线形构件的质量

假设曲线形细长构件在空间所占弧段为 \widehat{AB} ，其线密度为 $\rho(x, y, z)$ ，为计算此构件的质量，采用

“大化小，常代变，近似和，求极限”

可得
$$M = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \rho(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta s_k$$



2. 定义

设 Γ 是空间中一条有限长的光滑曲线, $f(x, y, z)$ 是定义在 Γ 上的一个有界函数, 若通过对 Γ 的任意分割 和对局部的任意取点, 下列“乘积和式极限”

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta s_k \quad \text{记作} \quad \int_{\Gamma} f(x, y, z) ds$$

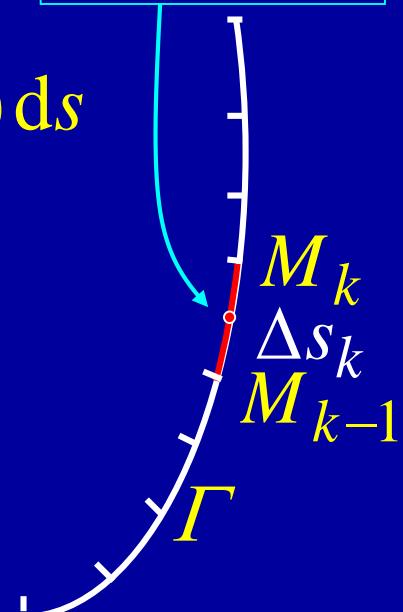
都存在, 则称此极限为函数 $f(x, y, z)$ 在曲线 Γ 上对弧长的曲线积分, 或第一类曲线积分.

$f(x, y, z)$ 称为被积函数, Γ 称为积分弧段.

$$\text{曲线形构件的质量 } M = \int_{\Gamma} \rho(x, y, z) ds$$



(ξ_k, η_k, ζ_k)



如果 L 是 xOy 面上的曲线弧, 则定义对弧长的曲线积分分为

$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k$$

如果 L 是闭曲线, 则记为 $\oint_L f(x, y) ds$.

思考:

(1) 若在 L 上 $f(x, y) \equiv 1$, 问 $\int_L ds$ 表示什么?

(2) 定积分是否可看作对弧长曲线积分的特例?

否! 对弧长的曲线积分要求 $ds \geq 0$, 但定积分中 dx 可能为负.



3. 性质

- (1) $\int_{\Gamma} [\alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z)] ds = \alpha \int_{\Gamma} f(x, y, z) ds + \beta \int_{\Gamma} g(x, y, z) ds$
$$(\alpha, \beta \text{ 为常数})$$
- (2) $\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds = \int_{\Gamma_1} f(x, y, z) ds + \int_{\Gamma_2} f(x, y, z) ds$
$$(\Gamma \text{ 由 } \Gamma_1, \Gamma_2 \text{ 组成})$$
- (3) 设在 Γ 上 $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$, 则
$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds \leq \int_{\Gamma} g(x, y, z) ds$$
- (4) $\int_{\Gamma} ds = l$ $(l \text{ 为曲线弧 } \Gamma \text{ 的长度})$



二、对弧长的曲线积分的计算法

基本思路：求曲线积分 $\xrightarrow{\text{转化}}$ 计算定积分

定理：设 $f(x, y)$ 是定义在光滑曲线弧

$$L : x = \varphi(t), y = \psi(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

上的连续函数，则曲线积分 $\int_L f(x, y) ds$ 存在，且

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t)] \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

证：根据定义

$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k$$



设各分点对应参数为 t_k ($k = 0, 1, \dots, n$),

点 (ξ_k, η_k) 对应参数为 $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$,

$$\Delta s_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

$$= \sqrt{\varphi'^2(\tau'_k) + \psi'^2(\tau'_k)} \Delta t_k, \quad \tau'_k \in [t_{k-1}, t_k]$$

则 $\int_L f(x, y) ds$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f[\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)] \sqrt{\varphi'^2(\tau'_k) + \psi'^2(\tau'_k)} \Delta t_k$$

↓ 注意 $\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$ 连续

$$= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f[\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)] \sqrt{\varphi'^2(\tau_k) + \psi'^2(\tau_k)} \Delta t_k$$



因此

$$\begin{aligned} \int_L f(x, y) ds \\ = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t)] \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \end{aligned}$$

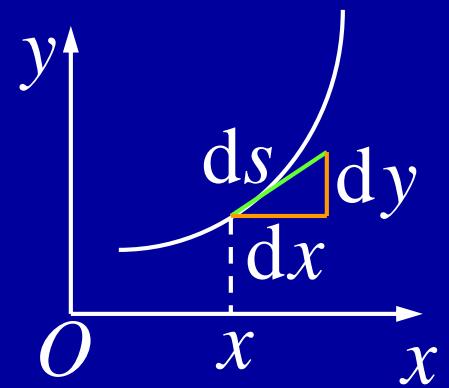
说明：

(1) $\because \Delta s_k > 0, \therefore \Delta t_k > 0$, 因此积分限必须满足 $\alpha < \beta$!

(2) 注意到

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \\ &= \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \end{aligned}$$

因此上述计算公式相当于“换元法”.



如果曲线 L 的方程为 $y = \psi(x)$ ($a \leq x \leq b$), 则有

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f(x, \psi(x)) \sqrt{1 + \psi'^2(x)} dx$$

如果方程为极坐标形式: $L: r = r(\theta)$ ($\alpha \leq \theta \leq \beta$), 则

$$\begin{aligned} & \int_L f(x, y) ds \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta) \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta \end{aligned}$$

推广: 设空间曲线弧的参数方程为

$$\Gamma: x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \omega(t) (\alpha \leq t \leq \beta)$$

则 $\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \omega'^2(t)} dt$$

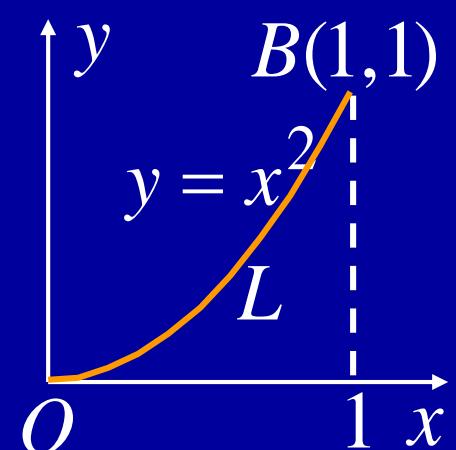


例2. 计算 $\int_L \sqrt{y} ds$, 其中 L 是抛物线 $y = x^2$ 上点 $O(0,0)$

与点 $B(1,1)$ 之间的一段弧.

解: ∵ $L: y = x^2 \quad (0 \leq x \leq 1)$

$$\begin{aligned}\therefore \int_L \sqrt{y} ds &= \int_0^1 x \cdot \sqrt{1 + (2x)^2} dx \\ &= \int_0^1 x \sqrt{1 + 4x^2} dx \\ &= \left[\frac{1}{12} (1 + 4x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 1)\end{aligned}$$



例3. 计算 $I = \int_L |x| ds$, 其中 L 为双纽线

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \quad (a > 0)$$

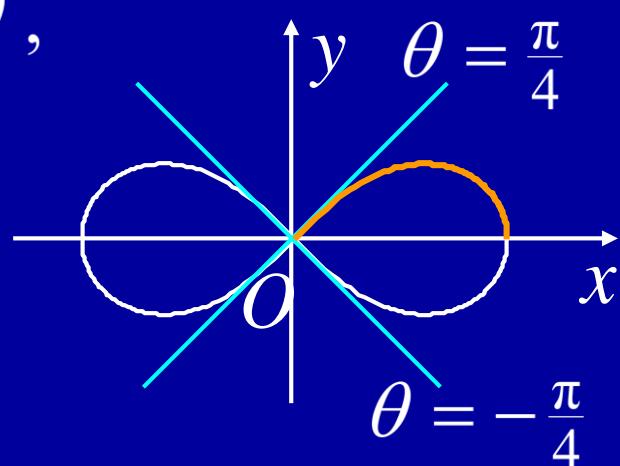
解: 在极坐标系下 $L : r^2 = a^2 \cos 2\theta$,

它在第一象限部分为

$$L_1 : r = a\sqrt{\cos 2\theta} \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4})$$

利用对称性, 得

$$\begin{aligned} I &= 4 \int_{L_1} x ds = 4 \int_0^{\pi/4} r \cos \theta \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi/4} a^2 \cos \theta d\theta = 2\sqrt{2} a^2 \end{aligned}$$



例4. 计算曲线积分 $\int_{\Gamma} (x^2 + y^2 + z^2) ds$, 其中 Γ 为螺旋线 $x = a \cos t, y = a \sin t, z = kt$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 的一段弧.

解:
$$\int_{\Gamma} (x^2 + y^2 + z^2) ds$$

$$= \int_0^{2\pi} [(a \cos t)^2 + (a \sin t)^2 + (kt)^2] \cdot \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + k^2} dt$$

$$= \sqrt{a^2 + k^2} \int_0^{2\pi} [a^2 + k^2 t^2] dt$$

$$= \sqrt{a^2 + k^2} \left[a^2 t + \frac{k^2}{3} t^3 \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{2\pi}{3} \sqrt{a^2 + k^2} (3a^2 + 4\pi^2 k^2)$$



例5. 计算 $I = \int_{\Gamma} (x^2 + y^2 + z^2) ds$, 其中 Γ 为球面

$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{9}{2}$ 与平面 $x + z = 1$ 的交线.

解: $\Gamma : \begin{cases} \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$, 化为参数方程

$$\Gamma : \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \\ y = 2 \sin \theta \\ z = \frac{1}{2} - \sqrt{2} \cos \theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

则

$$ds = \sqrt{(-\sqrt{2} \sin \theta)^2 + (2 \cos \theta)^2 + (\sqrt{2} \sin \theta)^2} d\theta = 2d\theta$$

$$\therefore I = \frac{9}{2} \int_0^{2\pi} 2d\theta = 18\pi$$



例6. 计算 $\oint_{\Gamma} x^2 \, ds$, 其中 Γ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

被平面 $x + y + z = 0$ 所截的圆周.

解: 由对称性可知 $\oint_{\Gamma} x^2 \, ds = \oint_{\Gamma} y^2 \, ds = \oint_{\Gamma} z^2 \, ds$

$$\begin{aligned}\therefore \oint_{\Gamma} x^2 \, ds &= \frac{1}{3} \oint_{\Gamma} (x^2 + y^2 + z^2) \, ds \\&= \frac{1}{3} \oint_{\Gamma} a^2 \, ds = \frac{1}{3} a^2 \cdot 2\pi a \\&= \frac{2}{3} \pi a^3\end{aligned}$$



思考: 例6中 Γ 改为 $\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = a^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$, 如何计算 $\oint_{\Gamma} x^2 ds$?

解: 令 $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y + 1, \text{ 则 } \Gamma: \begin{cases} X^2 + Y^2 + Z^2 = a^2 \\ X + Y + Z = 0 \end{cases} \\ Z = z \end{cases}$

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma} x^2 ds &= \oint_{\Gamma} (X + 1)^2 ds \quad \boxed{\text{利用形心公式}} \\ &= \oint_{\Gamma} X^2 ds + 2 \underbrace{\oint_{\Gamma} X ds}_{\text{圆 } \Gamma \text{ 的形心在原点, 故 } \bar{X} = 0} + \oint_{\Gamma} ds \\ &= \frac{2}{3} \pi a^3 + 2 \cdot \bar{X} \cdot 2 \pi a + 2 \pi a \\ &= 2 \pi a \left(\frac{1}{3} a^2 + 1 \right)\end{aligned}$$



例7. 计算半径为 R , 中心角为 2α 的圆弧 L 对于它的对称轴的转动惯量 I (设线密度 $\mu = 1$) 和质心.

解: 建立坐标系如图, 则

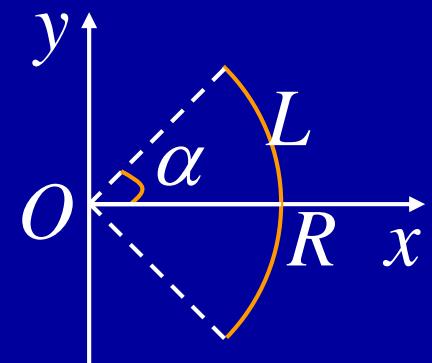
$$I = \int_L y^2 ds$$

$$\downarrow L : \begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \end{cases} \quad (-\alpha \leq \theta \leq \alpha)$$

$$= \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \sin^2 \theta \sqrt{(-R \sin \theta)^2 + (R \cos \theta)^2} d\theta$$

$$= R^3 \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2 \theta d\theta = 2R^3 \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\alpha}$$

$$= R^3 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)$$



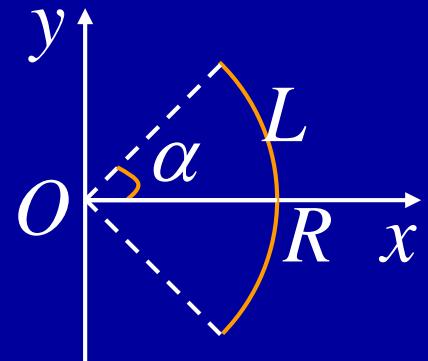
由质心公式，则根据对称性 $\bar{y} = 0$

$$\bar{x} = \frac{1}{2\alpha R} \int_L x \, ds$$

$$L: \begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \end{cases} \quad (-\alpha \leq \theta \leq \alpha)$$

$$= \frac{1}{2\alpha R} \int_{-\alpha}^{\alpha} R \cos \theta \sqrt{(-R \sin \theta)^2 + (R \cos \theta)^2} \, d\theta$$

$$= \frac{R}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \theta \, d\theta = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}$$



内容小结

1. 定义 $\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k$

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta s_k$$

2. 性质

$$(1) \int_{\Gamma} [\alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z)] ds$$

$$= \alpha \int_{\Gamma} f(x, y, z) ds + \beta \int_{\Gamma} g(x, y, z) ds \quad (\alpha, \beta \text{ 为常数})$$

$$(2) \int_{\Gamma} f(x, y, z) ds = \int_{\Gamma_1} f(x, y, z) ds + \int_{\Gamma_2} f(x, y, z) ds$$

(Γ 由 Γ_1, Γ_2 组成)

$$(3) \int_{\Gamma} ds = l \quad (l \text{ 曲线弧 } \Gamma \text{ 的长度})$$



3. 计算

- 对光滑曲线弧 $L: x = \varphi(t), y = \psi(t), (\alpha \leq t \leq \beta)$,

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t)] \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

- 对光滑曲线弧 $L: y = \psi(x) (a \leq x \leq b)$,

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f(x, \psi(x)) \sqrt{1 + \psi'^2(x)} dx$$

- 对光滑曲线弧 $L: r = r(\theta) (\alpha \leq \theta \leq \beta)$,

$$\int_L f(x, y) ds$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta) \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta$$



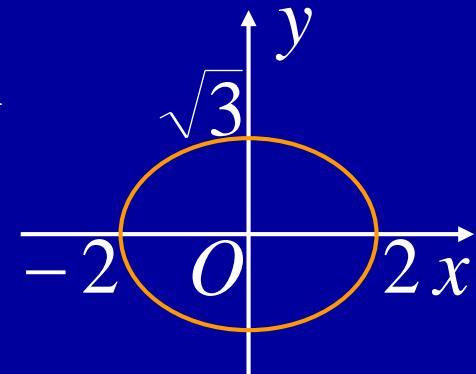
思考与练习

1. 已知椭圆 $L: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 周长为 a , 求

$$\oint_L (2xy + 3x^2 + 4y^2) ds$$

提示: 利用对称性 $\oint_L 2xy ds = 0$

$$\text{原式} = 12 \oint_L \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} \right) ds = 12 \oint_L ds = 12a$$



$$\begin{aligned}\text{分析: } \oint_L 2xy ds &= \int_{L_{\text{上}}} 2xy ds + \int_{L_{\text{下}}} 2xy ds \\ &= \int_{-2}^2 2x \sqrt{1+y'^2} dx + \int_{-2}^2 2x(-\sqrt{1+y'^2}) dx\end{aligned}$$



2. 设均匀螺旋形弹簧 L 的方程为 $x = a \cos t, y = a \sin t,$
 $z = kt \quad (0 \leq t \leq 2\pi),$

(1) 求它关于 z 轴的转动惯量 I_z ;

(2) 求它的质心.

解: 设其密度为 ρ (常数).

$$(1) I_z = \int_L (x^2 + y^2) \rho ds = \int_0^{2\pi} a^2 \rho \sqrt{a^2 + k^2} dt \\ = 2\pi a^2 \rho \sqrt{a^2 + k^2}$$

$$(2) L \text{ 的质量 } m = \int_L \rho ds = 2\pi \rho \sqrt{a^2 + k^2}$$

而 $\int_L x \rho ds = a \rho \sqrt{a^2 + k^2} \int_0^{2\pi} \cos t dt = 0$



$$\int_L y\rho \, ds = a\rho\sqrt{a^2 + k^2} \int_0^{2\pi} \sin t \, dt = 0$$

$$\int_L z\rho \, ds = k\rho\sqrt{a^2 + k^2} \int_0^{2\pi} t \, dt = 2\pi^2 k\rho\sqrt{a^2 + k^2}$$

故重心坐标为 $(0, 0, k\pi)$



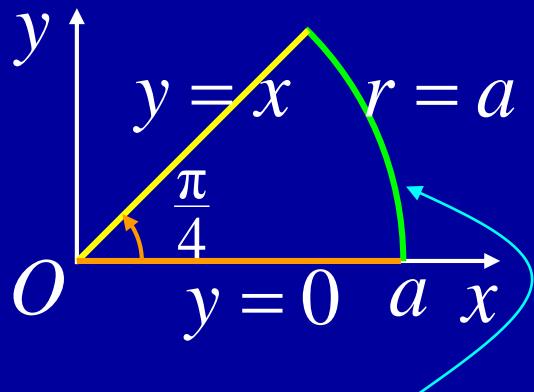
备用题

1. 设 C 是由极坐标系下曲线 $r = a, \theta = 0$ 及 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 所围区域的边界, 求

$$I = \int_C e^{\sqrt{x^2 + y^2}} ds$$

提示: 分段积分

$$\begin{aligned} I &= \int_0^a e^x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a a d\theta + \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} e^{\sqrt{2}x} \sqrt{2} dx \\ &= \left(\frac{\pi}{4}a + 2 \right) e^a - 2 \end{aligned}$$



$$ds = a d\theta$$



2. L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 在第一卦限与三个坐标面的交线, 求其形心坐标.

解: 如图所示, 交线长度为

$$l = 3 \int_{L_1} ds = 3 \cdot \frac{2\pi R}{4} = \frac{3\pi R}{2}$$

由对称性, 形心坐标为

$$\bar{z} = \bar{y} = \bar{x} = \frac{1}{l} \int_{L_1 \cup L_2 \cup L_3} x ds$$

$$= \frac{1}{l} \left[\int_{L_1} x ds + \int_{L_2} \cancel{x} ds + \int_{L_3} x ds \right] = \frac{2}{l} \int_{L_1} x ds$$

$$= \frac{2}{l} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \cos \theta \cdot R d\theta = \frac{4R}{3\pi}$$

