

第二节

可分离变量微分方程

可分离变量方程

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y)$$

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0$$

转化

解分离变量方程 $g(y)dy = f(x)dx$ 

分离变量方程的解法:

$$g(y)dy = f(x)dx \quad (1)$$

设 $y = \varphi(x)$ 是方程①的解, 则有恒等式

$$g(\varphi(x))\varphi'(x)dx \equiv f(x)dx$$

两边积分, 得 $\int g(y)dy = \int f(x)dx$

设左右两端的原函数分别为 $G(y)$, $F(x)$, 则有

$$G(y) = F(x) + C \quad (2)$$

当 $G(y)$ 与 $F(x)$ 可微且 $G'(y) = g(y) \neq 0$ 时, 说明由②确定的隐函数 $y = \varphi(x)$ 是①的解. 同样, 当 $F'(x) = f(x) \neq 0$ 时, 由②确定的隐函数 $x = \psi(y)$ 也是①的解.

称②为方程①的**隐式通解**, 或**通积分**.



例1. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = 3x^2 y$ 的通解.

解: 分离变量得 $\frac{dy}{y} = 3x^2 dx$

两边积分 $\int \frac{dy}{y} = \int 3x^2 dx$

得 $\ln|y| = x^3 + C_1$

即 $y = \pm e^{x^3 + C_1} = \pm e^{C_1} e^{x^3}$

↓ 令 $C = \pm e^{C_1}$

$y = C e^{x^3}$

或

说明: 在求解过程中
每一步不一定是同解
变形, 因此可能增、
减解.

$$\ln|y| = x^3 + \ln|C|$$

(C 为任意常数)

(此式含分离变量时丢失的解 $y = 0$)



例2. 解初值问题 $\begin{cases} xydx + (x^2 + 1)dy = 0 \\ \underline{y(0) = 1} \end{cases}$

解: 分离变量得 $\frac{dy}{y} = -\frac{x}{1+x^2}dx$

两边积分得 $\ln|y| = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} + \ln|C|$

即 $y\sqrt{x^2 + 1} = C$ (C 为任意常数)

由初始条件得 $C = 1$, 故所求特解为

$$y\sqrt{x^2 + 1} = 1$$



例3. 求下述微分方程的通解:

$$y' = \sin^2(x - y + 1)$$

解: 令 $u = x - y + 1$, 则

$$u' = 1 - y'$$

故有 $1 - u' = \sin^2 u$

即 $\sec^2 u \, du = dx$

解得 $\tan u = x + C$

所求通解: $\tan(x - y + 1) = x + C$ (C 为任意常数)



练习: 求方程 $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$ 的通解.

解法 1 分离变量 $e^{-y} dy = e^x dx$

积分 $-e^{-y} = e^x + C$

即 $(e^x + C)e^y + 1 = 0 \quad (C < 0)$

解法 2 令 $u = x + y$, 则 $u' = 1 + y'$

故有 $u' = 1 + e^u$

积分 $\int \frac{du}{1 + e^u} = x + C$

$$\int \frac{(1 + e^u) - e^u}{1 + e^u} du$$

$$u - \ln(1 + e^u) = x + C$$

所求通解: $\ln(1 + e^{x+y}) = y - C$ (C 为任意常数)



例4. 已知放射性元素铀的衰变速度与当时未衰变原子的含量 M 成正比, 已知 $t = 0$ 时铀的含量为 M_0 , 求在衰变过程中铀含量 $M(t)$ 随时间 t 的变化规律.

解: 根据题意, 有
$$\begin{cases} \frac{dM}{dt} = -\lambda M \quad (\lambda > 0) \\ M|_{t=0} = M_0 \quad (\text{初始条件}) \end{cases}$$

对方程分离变量, 然后积分:
$$\int \frac{dM}{M} = \int (-\lambda) dt$$

得 $\ln M = -\lambda t + \ln C$, 即

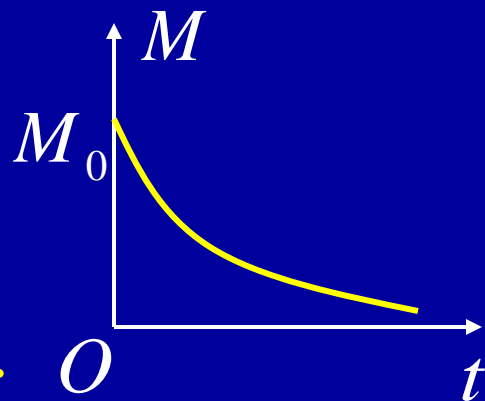
$$M = C e^{-\lambda t}$$

利用初始条件, 得

$$C = M_0$$

故所求铀的变化规律为

$$M = M_0 e^{-\lambda t}.$$



例5. 设降落伞从跳伞塔下落后所受空气阻力与速度成正比, 并设降落伞离开跳伞塔时($t=0$) 速度为0, 求降落伞下落速度与时间的函数关系.

解: 根据牛顿第二定律列方程 $m \frac{dv}{dt} = mg - kv$

初始条件为 $v|_{t=0} = 0$

对方程分离变量, 然后积分: $\int \frac{dv}{mg - kv} = \int \frac{dt}{m}$

得 $-\frac{1}{k} \ln(mg - kv) = \frac{t}{m} + C$ (此处 $mg - kv > 0$)

利用初始条件, 得 $C = -\frac{1}{k} \ln(mg)$

代入上式后化简, 得特解 $v = \frac{mg}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t})$

t 足够大时

$$v \approx \frac{mg}{k}$$

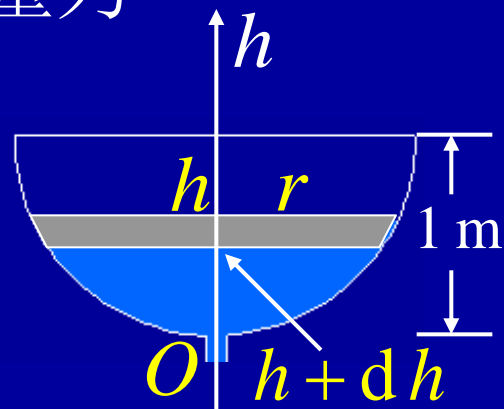


***例6.** 有高 1 m 的半球形容器, 水从它的底部小孔流出, 小孔横截面积 $S = 1 \text{ cm}^2$. 开始时容器内盛满了水, 求水从小孔流出过程中, 容器里水面的高度 h 随时间 t 的变化规律.

解: 由水力学知, 水从孔口流出的流量为

$$Q = \frac{dV}{dt} = k S \sqrt{2gh}$$

流量系数 \swarrow 孔口截面面积 \downarrow 重力加速度 \swarrow



即
$$dV = kS\sqrt{2gh}dt$$

设在 $[t, t + dt]$ 内水面高度由 h 降到 $h + dh$ ($dh < 0$),



对应下降体积

$$dV = -\pi r^2 dh$$

$$\downarrow r = \sqrt{1^2 - (1-h)^2} = \sqrt{2h - h^2}$$

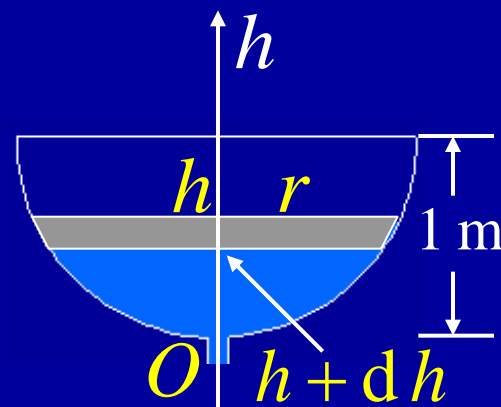
$$dV = -\pi (2h - h^2) dh$$

因此得微分方程定解问题:

$$\begin{cases} kS\sqrt{2gh} dt = -\pi(2h - h^2) dh \\ h|_{t=0} = 1 \end{cases}$$

将方程分离变量:

$$dt = -\frac{\pi}{kS\sqrt{2g}} (2h^{1/2} - h^{3/2}) dh$$



两端积分, 得

$$t = -\frac{\pi}{k S \sqrt{2g}} \left(\frac{4}{3} h^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} h^{\frac{5}{2}} + C \right)$$

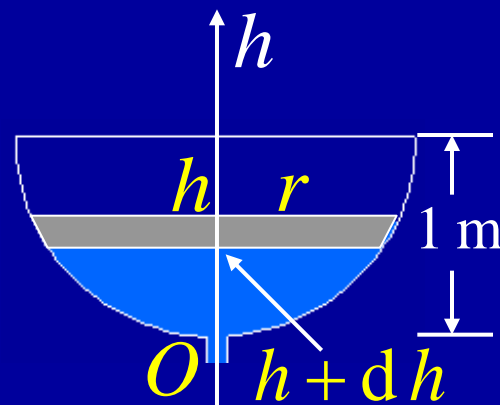
利用初始条件, 得 $C = -\frac{14}{15}$, 因此

$$t = \frac{14\pi}{15k S \sqrt{2g}} \left(1 - \frac{10}{7} h^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{7} h^{\frac{5}{2}} \right)$$

以 $k = 0.62$, $S = 10^{-4} \text{ m}^2$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 代入上式, 则得容器内水面高度 h 与时间 t 的关系:

$$t = 1.068 \times 10^4 \left(1 - \frac{10}{7} h^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{7} h^{\frac{5}{2}} \right) (\text{s})$$

可见水流完所需时间为 $t = 1.068 \times 10^4 (\text{s})$



$$h \Big|_{t=0} = 1$$



内容小结

1. 微分方程的概念

微分方程; 阶; 定解条件; 解; 通解; 特解

说明: 通解不一定是方程的全部解.

例如, 方程 $(x + y)y' = 0$ 有解

$$y = -x \text{ 及 } y = C$$

后者是通解, 但不包含前一个解.

2. 可分离变量方程的求解方法:

分离变量后积分; 根据定解条件定常数.



3. 解微分方程应用题的方法和步骤

(1) 找出事物的共性及可贯穿于全过程的规律列方程.

常用的方法:

1) 根据几何关系列方程

2) 根据物理规律列方程

例4

例5

3) 根据微量分析平衡关系列方程

例6

(2) 利用反映事物个性的特殊状态确定定解条件.

(3) 求通解, 并根据定解条件确定特解.



思考与练习

求下列方程的通解：

$$(1) (x + xy^2)dx - (x^2y + y)dy = 0$$

$$(2) y' + \sin(x+y) = \sin(x-y)$$

提示: (1) 分离变量 $\frac{y}{1+y^2}dy = \frac{x}{1+x^2}dx$

(2) 方程变形为 $y' = -2\cos x \sin y$

$$\implies \ln \left| \tan \frac{y}{2} \right| = -2\sin x + C$$

