

第五章

定积分

积分学 $\left\{ \begin{array}{l} \text{不定积分} \\ \text{定积分} \end{array} \right.$

第一节

定积分的概念及性质

一、定积分问题举例

二、定积分的定义

*三、定积分的近似计算

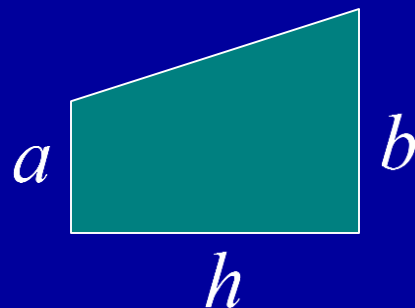
四、定积分的性质



一、定积分问题举例

矩形面积 = ah

梯形面积 = $\frac{h}{2}(a+b)$

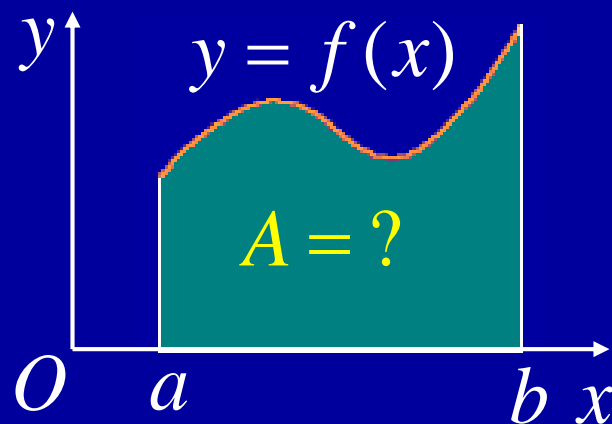


1. 曲边梯形的面积

设曲边梯形是由连续曲线

$$y = f(x) \quad (f(x) \geq 0)$$

及 x 轴, 以及两直线 $x = a, x = b$ 所围成, 求其面积 A .



解决步骤：

1) 大化小. 在区间 $[a, b]$ 中任意插入 $n-1$ 个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

用直线 $x = x_i$ 将曲边梯形分成 n 个小曲边梯形;

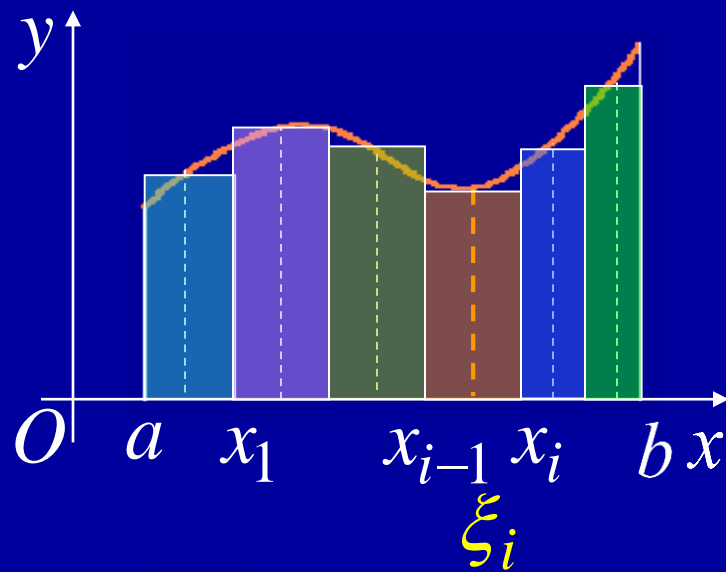
2) 常代变. 在第 i 个窄曲边梯形上任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

作以 $[x_{i-1}, x_i]$ 为底, $f(\xi_i)$

为高的小矩形, 并以此小矩形面积近似代替相应

窄曲边梯形面积 ΔA_i , 得

$$\Delta A_i \approx f(\xi_i) \Delta x_i \quad (\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \cdots, n)$$

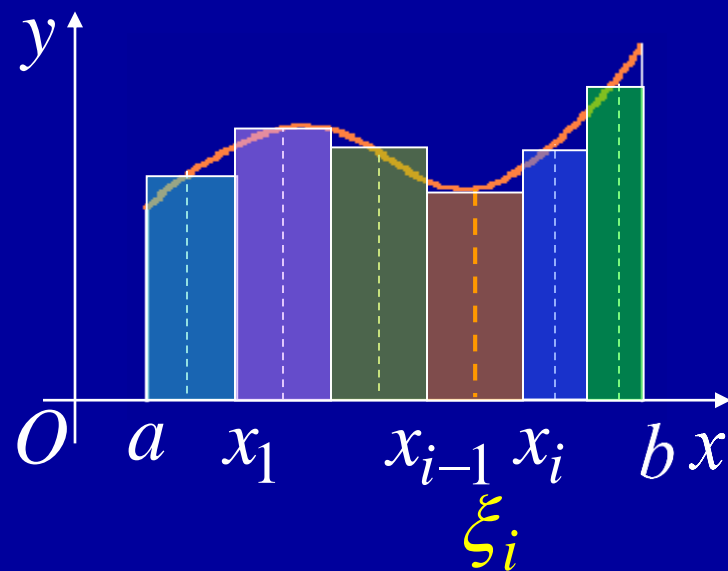


3) 近似和.

$$A = \sum_{i=1}^n \Delta A_i \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

4) 取极限. 令 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$, 则曲边梯形面积

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta A_i \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \end{aligned}$$



2. 变速直线运动的路程

设某物体作直线运动, 已知速度 $v = v(t) \in C[T_1, T_2]$, 且 $v(t) \geq 0$, 求在运动时间内物体所经过的路程 s .

解决步骤:

1) 大化小. 在 $[T_1, T_2]$ 中任意插入 $n-1$ 个分点, 将它分成 n 个小段 $[t_{i-1}, t_i] (i=1, 2, \dots, n)$, 在每个小段上物体经过的路程为 $\Delta s_i (i=1, 2, \dots, n)$

2) 常代变. 任取 $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, 以 $v(\xi_i)$ 代替变速, 得

$$\Delta s_i \approx v(\xi_i) \Delta t_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$



3) 近似和.

$$s \approx \sum_{i=1}^n v(\xi_i) \Delta t_i$$

4) 取极限.

$$s = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n v(\xi_i) \Delta t_i \quad (\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta t_i)$$

上述两个问题的共性:

- 解决问题的方法步骤相同:

“大化小, 常代变, 近似和, 取极限”

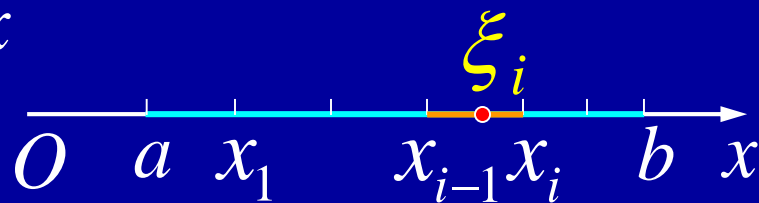
- 所求量极限结构式相同: 特殊乘积和式的极限



二、定积分定义 (P229)

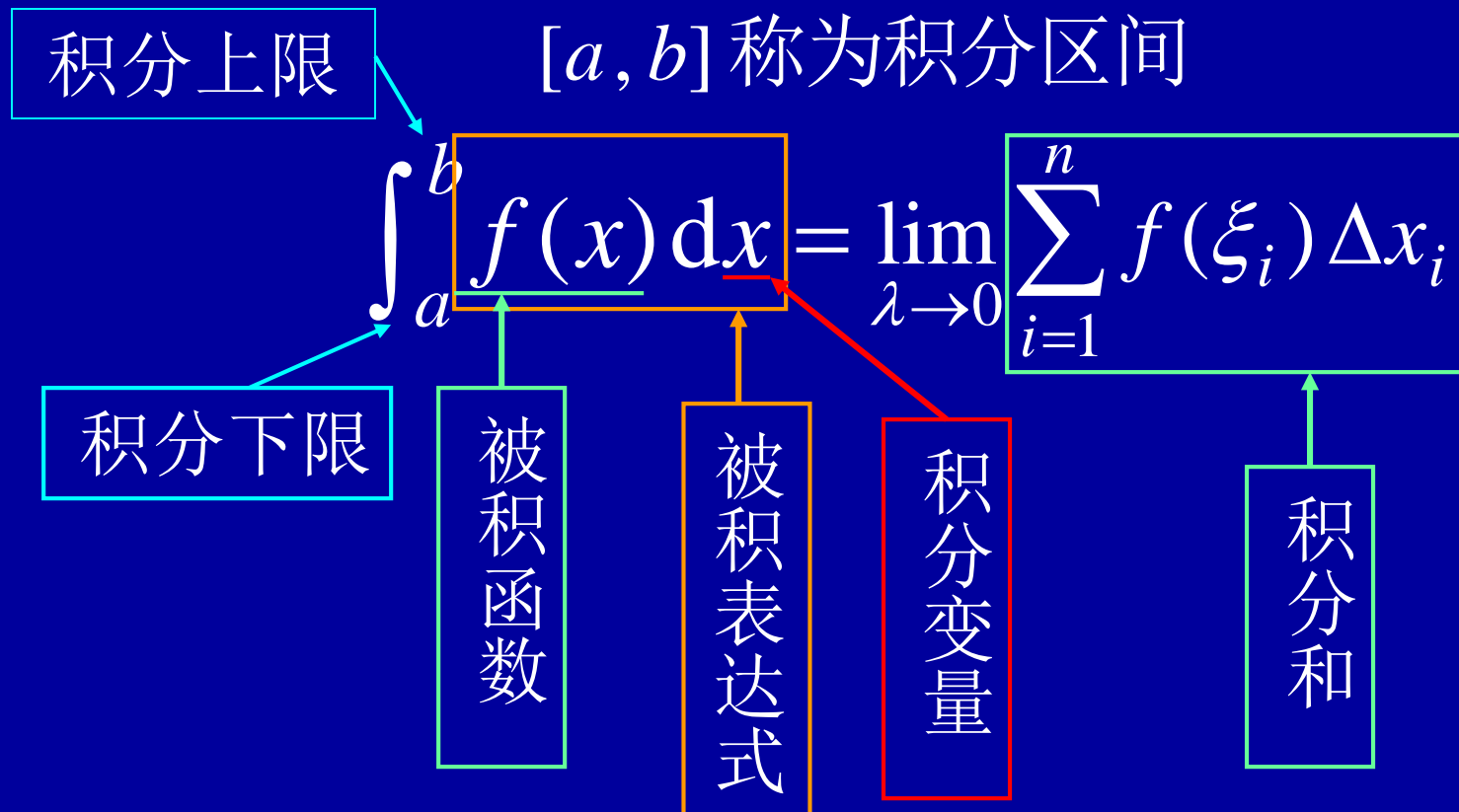
设函数 $f(x)$ 定义在 $[a, b]$ 上, 若对 $[a, b]$ 的任一种分法
 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, 令 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, 任取
 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 只要 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\} \rightarrow 0$ 时 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$
总趋于确定的极限 I , 则称此极限 I 为函数 $f(x)$ 在区间
 $[a, b]$ 上的定积分, 记作 $\int_a^b f(x) dx$

即
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$



此时称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.





定积分仅与被积函数及积分区间有关，而与积分变量用什么字母表示无关，即

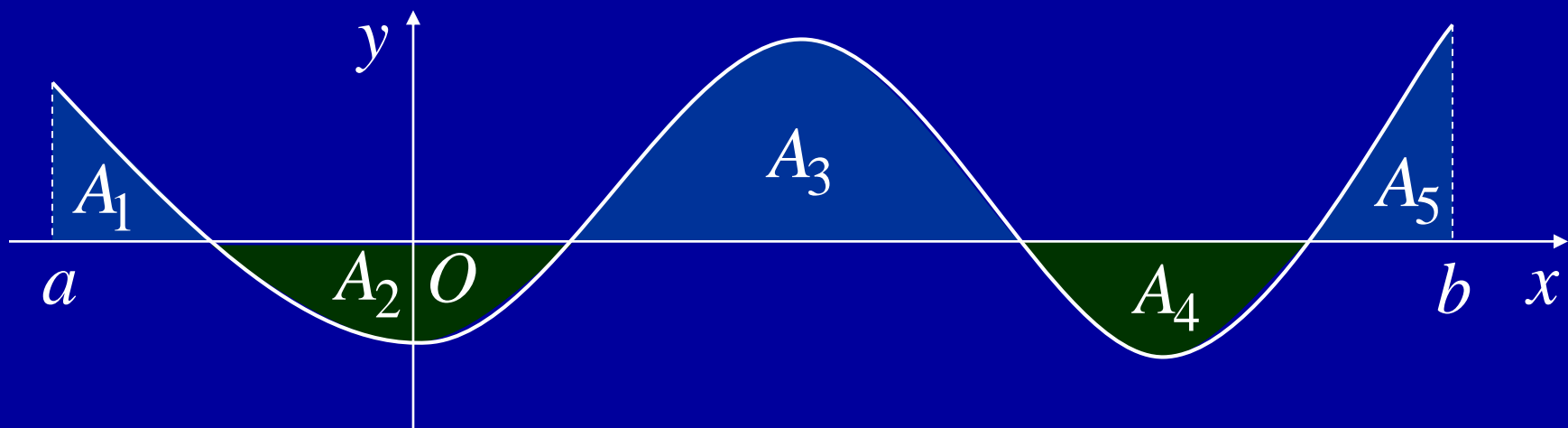
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du$$



定积分的几何意义:

$$f(x) > 0, \int_a^b f(x) dx = A \quad \text{曲边梯形面积}$$

$$f(x) < 0, \int_a^b f(x) dx = -A \quad \text{曲边梯形面积的负值}$$



$$\int_a^b f(x) dx = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5$$

各部分面积的代数和



可积的充分条件:

定理1. 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $\implies f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积.

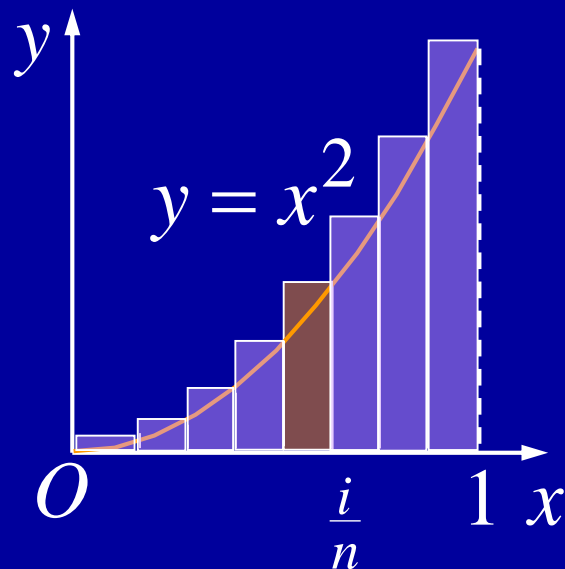
***定理2.** 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 且只有有限个间断点
 $\implies f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积. (证明略)

例1. 利用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2 dx$.

解: 将 $[0,1]$ n 等分, 分点为 $x_i = \frac{i}{n}$
($i = 0, 1, \dots, n$)

取 $\xi_i = \frac{i}{n}$, $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

则 $f(\xi_i)\Delta x_i = \xi_i^2 \Delta x_i = \frac{i^2}{n^3}$



注

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

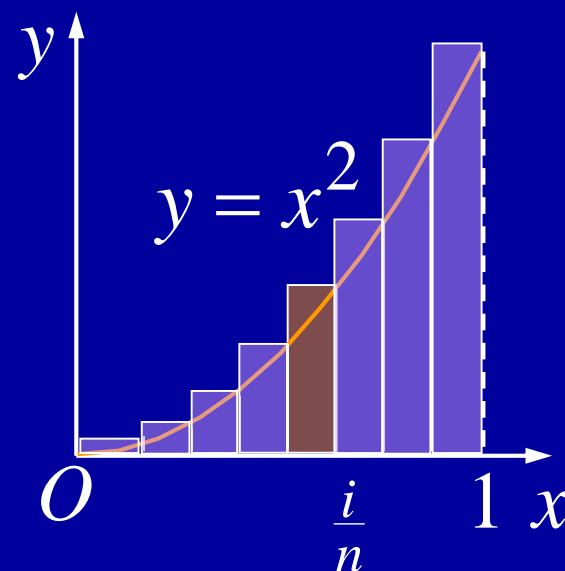
$$= \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

注. 当 n 较大时, 此值可作为 $\int_0^1 x^2 dx$ 的近似值

$$\therefore \int_0^1 x^2 dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \Delta x_i$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{3}$$



[注] 利用 $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$, 得

$$\left\{ \begin{array}{l} (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1 \\ n^3 - (n-1)^3 = 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1 \\ \dots\dots\dots \\ 2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \end{array} \right.$$

两端分别相加, 得

$$(n+1)^3 - 1 = 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 3(1 + 2 + \dots + n) + n$$

即
$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3 \sum_{i=1}^n i^2 + 3 \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$\therefore \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$



例2. 用定积分表示下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \frac{i}{n}}$$

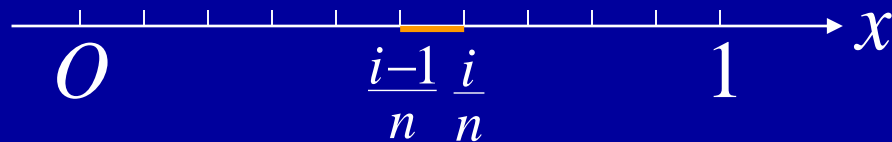
$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}$$

解: (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \frac{i}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n}$

$\left[\frac{1}{n} \right] \leftarrow \Delta x_i$

$\left[\frac{i}{n} \right] \leftarrow \xi_i$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+x} dx$$



$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} \right)^p \frac{1}{n}$$

$\left[\frac{1}{n} \right] \leftarrow \Delta x_i$

$\left[\frac{i}{n} \right] \leftarrow \xi_i$

$$= \int_0^1 x^p dx$$



**三、定积分的近似计算

例1 设 $f(x) \in C[a, b]$, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 存在, 根据定积分定义

可得如下近似计算方法:

将 $[a, b]$ 分成 n 等份: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$,

$$x_i = a + i \cdot \Delta x \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

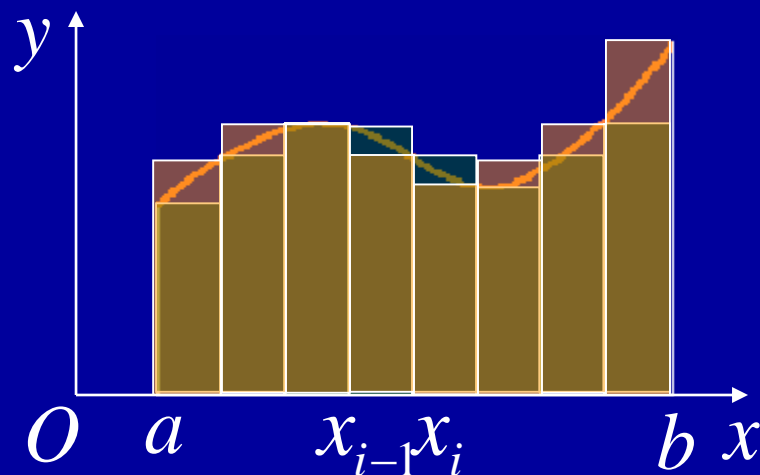
记 $f(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \dots, n)$

1. 左矩形公式

$$\int_a^b f(x) dx \approx y_0 \Delta x + y_1 \Delta x + \dots + y_{n-1} \Delta x$$

2. 右矩形公式

$$\int_a^b f(x) dx \approx y_1 \Delta x + y_2 \Delta x + \dots + y_n \Delta x$$



$$= \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1})$$

$$= \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n)$$

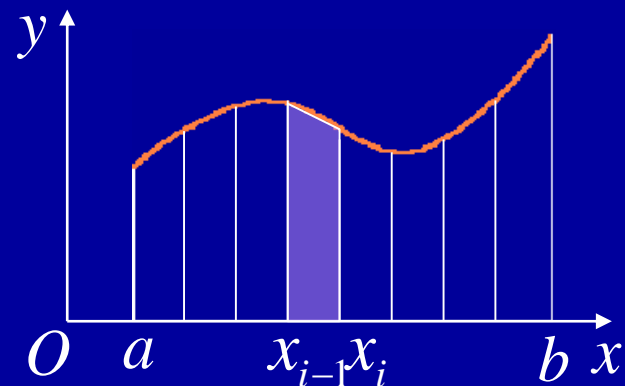


3. 梯形公式

$$\int_a^b f(x) dx$$

$$\approx \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} [y_{i-1} + y_i] \Delta x$$

$$= \frac{b-a}{n} \left[\frac{1}{2} (y_0 + y_n) + (y_1 + \cdots + y_{n-1}) \right]$$

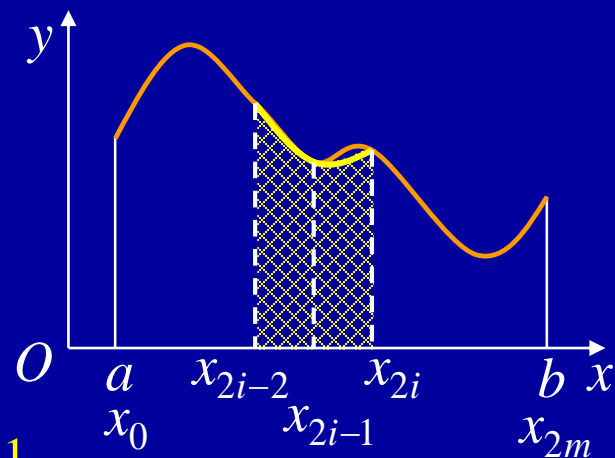


4. 抛物线法公式

推导

$$\int_a^b f(x) dx$$

$$\approx \frac{b-a}{6m} \left[y_0 + y_{2m} + 4 \sum_{i=1}^m y_{2i-1} + 2 \sum_{i=1}^{m-1} y_{2i} \right]$$

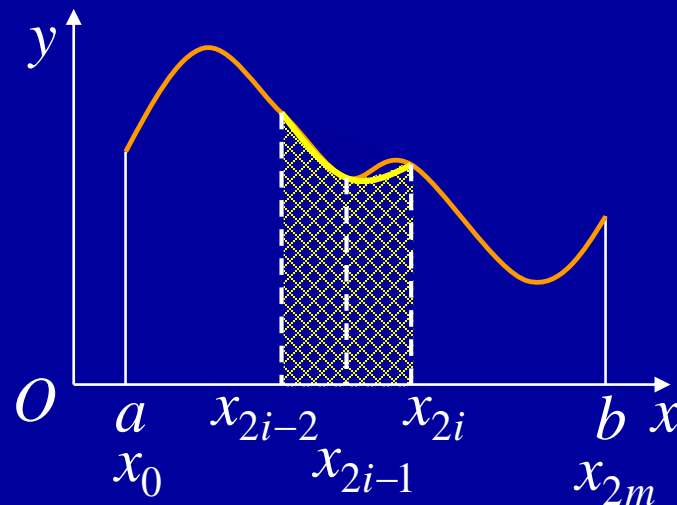


抛物线法公式的推导

将 $[a, b]$ 分成 $n = 2m$ 等分,

在 $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ 上作抛物线(如图)

则以抛物线为顶的小曲边梯形面积经推导可得:



$$\frac{1}{6}(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}) \cdot 2\Delta x = \frac{b-a}{6m}(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i})$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6m} \sum_{i=1}^m (y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i})$$

$$= \frac{b-a}{6m} \left[y_0 + y_{2m} + 4 \sum_{i=1}^m y_{2i-1} + 2 \sum_{i=1}^{m-1} y_{2i} \right]$$



例3. 用梯形公式和抛物线法公式

计算定积分 $I = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$ 的近似值.

(取 $n = 10$, 计算时取5位小数)

解: 计算 y_i (见右表)

用梯形公式得 $I \approx 3.13993$

用抛物线法公式得 $I \approx 3.14159$

积分准确值为

$$I = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx = \pi = 3.1415926 \dots$$

i	x_i	y_i
0	0.0	4.00000
1	0.1	3.96040
2	0.2	3.84615
3	0.3	3.66972
4	0.4	3.44828
5	0.5	3.20000
6	0.6	2.94118
7	0.7	2.68456
8	0.8	2.43902
9	0.9	2.20994
10	1.0	2.00000



四、定积分的性质 (设所列定积分都存在)

$$1. \int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx \implies \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$2. \int_a^b dx = b - a$$

$$3. \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (k \text{ 为常数})$$

$$4. \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$\begin{aligned} \text{*证:左端} &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)] \Delta x_i \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \pm \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i = \text{右端} \end{aligned}$$



$$5. \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

证: 当 $a < c < b$ 时,



因 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积,

所以在分割区间时, 可以永远取 c 为分点, 于是

$$\sum_{[a, b]} f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{[a, c]} f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{[c, b]} f(\xi_i) \Delta x_i$$

令 $\lambda \rightarrow 0$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$



当 a, b, c 的相对位置任意时, 例如 $a < b < c$,

则有



$$\int_a^c f(x) \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \mathrm{d}x + \int_b^c f(x) \mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_a^b f(x) \mathrm{d}x &= \int_a^c f(x) \mathrm{d}x - \int_b^c f(x) \mathrm{d}x \\ &= \int_a^c f(x) \mathrm{d}x + \int_c^b f(x) \mathrm{d}x \end{aligned}$$



6. 若在 $[a, b]$ 上 $f(x) \geq 0$, 则 $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

证: $\because \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \geq 0$

$$\therefore \int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \geq 0$$

推论1. 若在 $[a, b]$ 上 $f(x) \leq g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$



推论2. $\left| \int_a^b f(x) \mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x \quad (a < b)$

证: $\because -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$

$$\therefore -\int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x) \mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x$$

$$\text{即} \quad \left| \int_a^b f(x) \mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x$$

7. 设 $M = \max_{[a, b]} f(x)$, $m = \min_{[a, b]} f(x)$, 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \mathrm{d}x \leq M(b-a) \quad (a < b)$$



例4. 试证: $1 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{\pi}{2}$.

证: 设 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, 则在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上, 有

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2} (x - \tan x) < 0$$

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}^-\right) < f(x) < f(0^+)$$

即
$$\frac{2}{\pi} < f(x) < 1, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

故
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx$$

即
$$1 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{\pi}{2}$$



8. 积分中值定理

若 $f(x) \in C[a, b]$, 则至少存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$$

证: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值与最大值分别为 m, M , 则由**性质7**可得

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

根据闭区间上连续函数介值定理, 在 $[a, b]$ 上至少存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

因此定理成立.

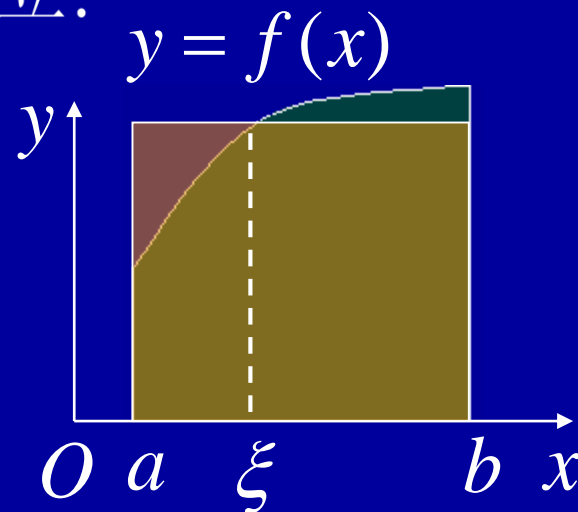


说明:

- 积分中值定理对 $a < b$ 或 $a > b$ 都成立.

- 可把
$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} = f(\xi)$$

理解为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的平均值. 因



$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} = \frac{1}{b-a} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \frac{b-a}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)$$

故它是有限个数的平均值概念的推广.



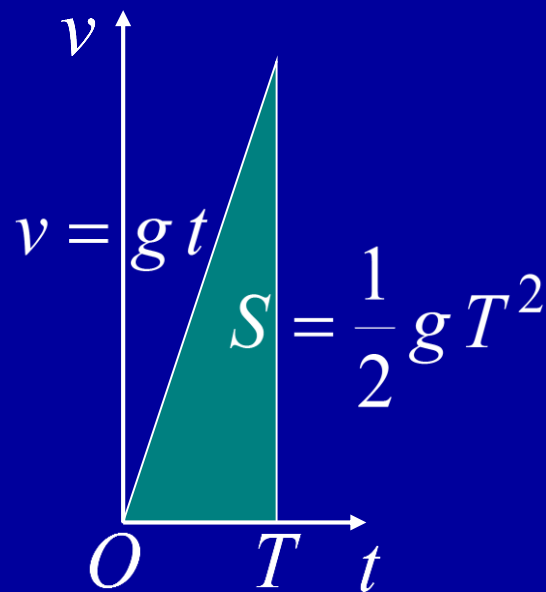
例5. 计算从 0 秒到 T 秒这段时间内自由落体的平均速度.

解: 已知自由落体速度为

$$v = gt$$

故所求平均速度

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \frac{1}{T-0} \int_0^T gt \, dt \\ &= \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2} g T^2 = \frac{gT}{2}\end{aligned}$$



内容小结

1. 定积分的定义 — 乘积和式的极限

⇒ *近似计算 { 矩形公式
梯形公式
抛物线法公式

2. 定积分的性质

3. 积分中值定理

⇒ 连续函数在区间上的平均值公式

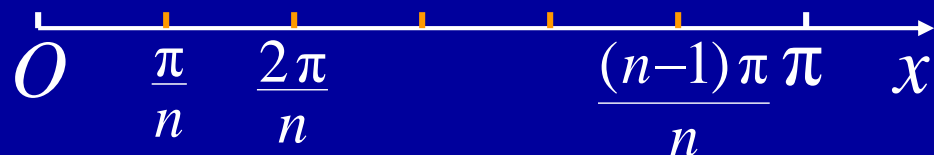


思考与练习

1. 用定积分表示下述极限：

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right]$$

解: $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} \cdot \frac{\pi}{n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \, dx$



或 $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\pi \cdot \frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \sin \pi x \, dx$



思考： 如何用定积分表示下述极限

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{n} + \sin \frac{(n+1)\pi}{n} \right]$$

提示： $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n} \cdot \frac{\pi}{n}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin \frac{(n+1)\pi}{n}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x \, dx$$

极限为 0 !



2. P234 题4-(4)

解: 设 $f(x) = x - \ln(1+x)$, 则

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} > 0, \quad x \in (0, 1]$$

$$\implies f(x) \nearrow$$

$$\implies f(x) > f(0) = 0, \quad x \in (0, 1]$$

$$\implies \int_0^1 f(x) dx > 0$$

$$\text{即 } \int_0^1 x dx > \int_0^1 \ln(1+x) dx$$

