

## 第四节

# 格林公式及其应用

一、格林公式

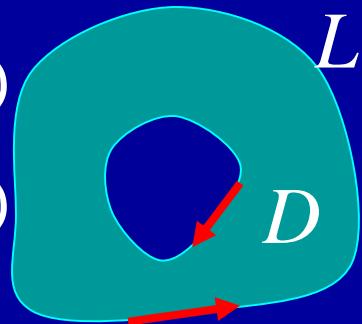
二、平面上曲线积分与路径无关的等价条件

三、全微分方程



# 一、格林公式

区域  $D$  分类  $\begin{cases} \text{单连通区域(无“洞”区域)} \\ \text{多连通区域(有“洞”区域)} \end{cases}$



域  $D$  边界  $L$  的正向: 域的内部靠左

**定理1.** 设区域  $D$  是由分段光滑正向曲线  $L$  围成, 函数  $P(x, y), Q(x, y)$  在  $D$  上具有连续一阶偏导数, 则有

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy \quad (\text{格林公式})$$

或

$$\iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} dx dy = \oint_L P dx + Q dy$$



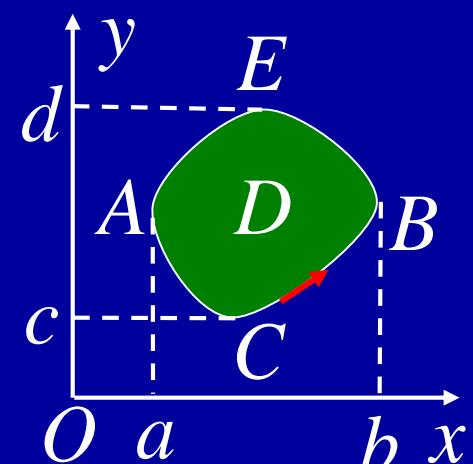
证明: 1) 若  $D$  既是  $X$ -型区域, 又是  $Y$ -型区域, 且

$$D: \begin{cases} \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \\ a \leq x \leq b \end{cases}$$

$$D: \begin{cases} \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \\ c \leq y \leq d \end{cases}$$

则  $\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx$

$$= \int_c^d Q(\psi_2(y), y) dy - \int_c^d Q(\psi_1(y), y) dy$$
$$= \int_{CBE}^{\widehat{}} Q(x, y) dy - \int_{CAE}^{\widehat{}} Q(x, y) dy$$
$$= \int_{CBE}^{\widehat{}} Q(x, y) dy + \int_{EAC}^{\widehat{}} Q(x, y) dy$$



即  $\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_L Q(x, y) dy$  ①

同理可证

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_L P(x, y) dx$$
 ②

①、②两式相加得：

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_L P dx + Q dy$$



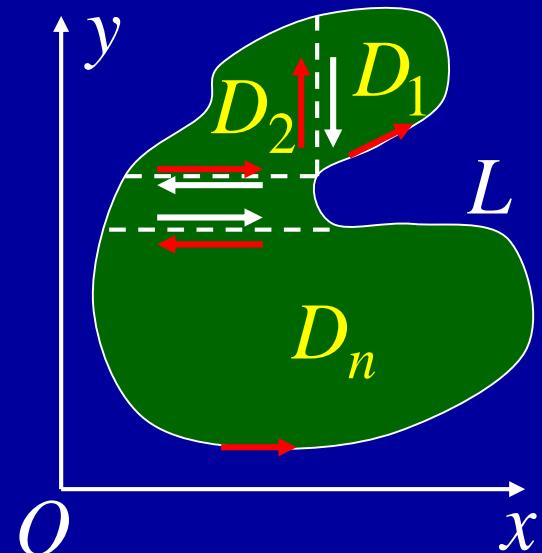
2) 若  $D$  不满足以上条件, 则可通过加辅助线将其分割为有限个上述形式的区域, 如图

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$$= \sum_{k=1}^n \iint_{D_k} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$$= \sum_{k=1}^n \int_{\partial D_k} P dx + Q dy \quad (\partial D_k \text{ 表示 } D_k \text{ 的正向边界})$$

$$= \oint_L P dx + Q dy \quad \text{证毕}$$



格林公式  $\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy$

---

推论：正向闭曲线  $L$  所围区域  $D$  的面积

$$A = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx$$

例如，椭圆  $L : \begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$  所围面积

$$A = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \cos^2 \theta + ab \sin^2 \theta) d\theta = \pi ab$$



例1. 设  $L$  是一条分段光滑的闭曲线, 证明

$$\oint_L 2xy \, dx + x^2 \, dy = 0$$

证: 令  $P = 2xy$ ,  $Q = x^2$ , 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2x = 0$$

利用格林公式, 得

$$\oint_L 2xy \, dx + x^2 \, dy = \iint_D 0 \, dx \, dy = 0$$



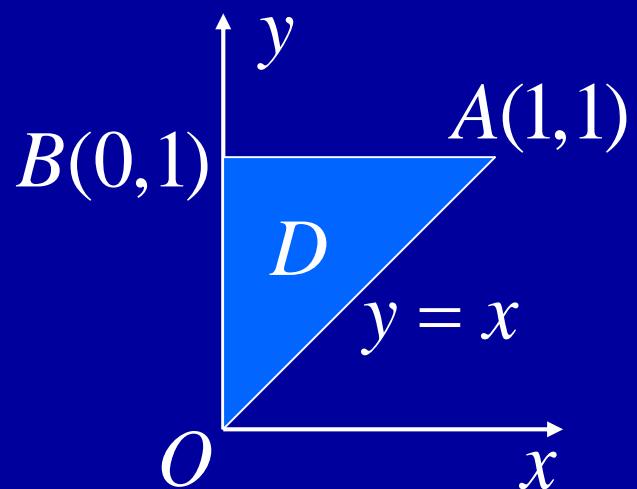
**例2.** 计算  $\iint_D e^{-y^2} dx dy$ , 其中  $D$  是以  $O(0,0)$ ,  $A(1,1)$ ,  $B(0,1)$  为顶点的三角形闭域.

解: 令  $P = 0$ ,  $Q = xe^{-y^2}$ , 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = e^{-y^2}$$

利用格林公式, 有

$$\begin{aligned}\iint_D e^{-y^2} dx dy &= \oint_{\partial D} xe^{-y^2} dy \\ &= \int_{\overline{OA}} xe^{-y^2} dy = \int_0^1 ye^{-y^2} dy \\ &= \frac{1}{2}(1 - e^{-1})\end{aligned}$$



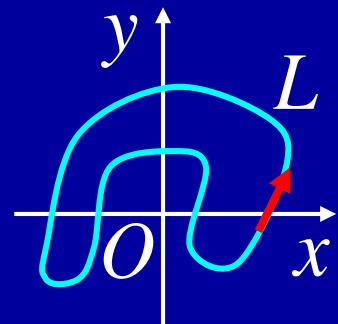
**例3.** 计算  $\oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ , 其中  $L$  为一无重点且不过原点的分段光滑正向闭曲线.

**解:** 令  $P = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ ,  $Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$

则当  $x^2 + y^2 \neq 0$  时,  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$

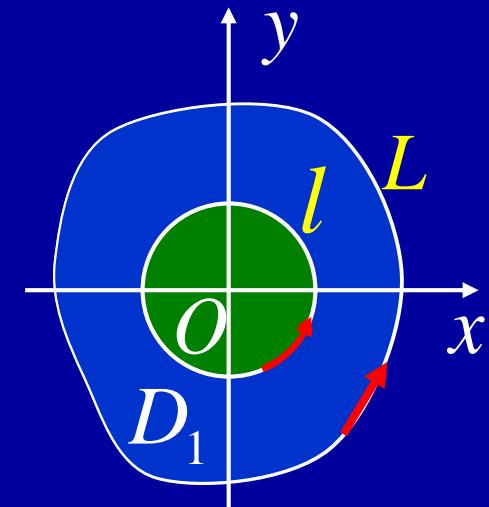
设  $L$  所围区域为  $D$ , 当  $(0,0) \notin D$  时, 由格林公式知

$$\oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 0$$



当 $(0,0) \in D$ 时, 在 $D$ 内作圆周  $L: x^2 + y^2 = r^2$ , 取逆时针方向, 记  $L$  和  $L^-$  所围的区域为  $D_1$ , 对区域  $D_1$  应用格林公式, 得

$$\begin{aligned} & \oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} - \oint_{L^-} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \\ &= \oint_{L \cup L^-} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \iint_{D_1} 0 dx dy = 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \therefore \oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} &= \oint_{L^-} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}{r^2} d\theta = 2\pi \end{aligned}$$



## 二、平面上曲线积分与路径无关的等价条件

**定理2.** 设  $D$  是单连通域, 函数  $P(x, y), Q(x, y)$  在  $D$  内具有一阶连续偏导数, 则以下四个条件等价:

(1) 沿  $D$  中任意光滑闭曲线  $L$ , 有  $\int_L P dx + Q dy = 0$ .

(2) 对  $D$  中任一分段光滑曲线  $L$ , 曲线积分  $\int_L P dx + Q dy$  与路径无关, 只与起止点有关.

(3)  $P dx + Q dy$  在  $D$  内是某一函数  $u(x, y)$  的全微分,

即  $du(x, y) = P dx + Q dy$

(4) 在  $D$  内每一点都有  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ .

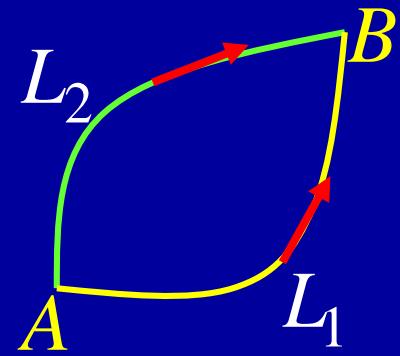


证明 (1)  $\Rightarrow$  (2)

设  $L_1, L_2$  为  $D$  内任意两条由  $A$  到  $B$  的有向分段光滑曲线, 则

$$\begin{aligned} & \int_{L_1} Pdx + Qdy - \int_{L_2} Pdx + Qdy \\ &= \int_{L_1} Pdx + Qdy + \int_{L_2^-} Pdx + Qdy \\ &= \int_{L_1 \cup L_2^-} Pdx + Qdy = 0 \quad (\text{根据条件(1)}) \end{aligned}$$

$$\therefore \int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$$



说明: 积分与路径无关时, 曲线积分可记为

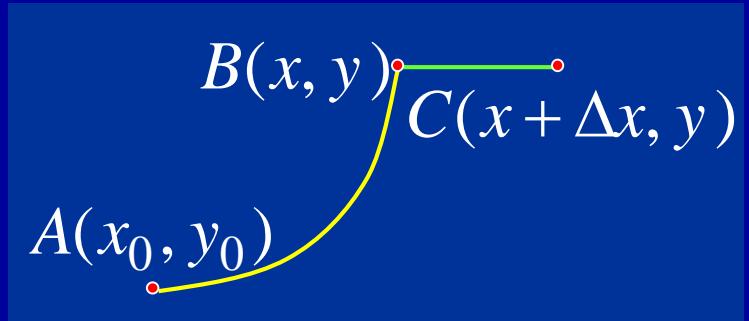
$$\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy = \int_A^B Pdx + Qdy$$



## 证明 (2) $\Rightarrow$ (3)

在  $D$  内取定点  $A(x_0, y_0)$  和任一点  $B(x, y)$ , 因曲线积分与路径无关, 有函数

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy$$



则  $\Delta_x u = u(x + \Delta x, y) - u(x, y)$

$$\begin{aligned} &= \int_{(x, y)}^{(x + \Delta x, y)} P dx + Q dy = \int_{(x, y)}^{(x + \Delta x, y)} P dx \\ &= P(x + \theta \Delta x, y) \Delta x \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(x + \theta \Delta x, y) = P(x, y)$$

同理可证  $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$ , 因此有  $du = P dx + Q dy$



### 证明 (3) $\Rightarrow$ (4)

设存在函数  $u(x, y)$  使得

$$du = P dx + Q dy$$

则  $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$

$\therefore \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$

$P, Q$  在  $D$  内具有连续的偏导数, 所以  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$

从而在  $D$  内每一点都有

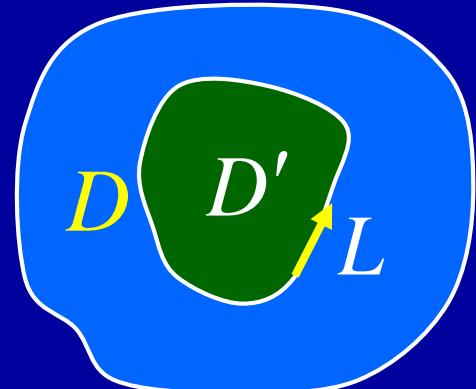
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$



## 证明 (4) $\Rightarrow$ (1)

设  $L$  为  $D$  中任一分段光滑闭曲线, 所围区域为  $D' \subset D$  (如图), 因此在  $D'$  上

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$$



利用格林公式, 得

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_{D'} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) dx dy = 0 \quad \text{证毕}$$

---

(4) 在  $D$  内每一点都有  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ .

(1) 沿  $D$  中任意光滑闭曲线  $L$ , 有  $\oint_L P dx + Q dy = 0$ .



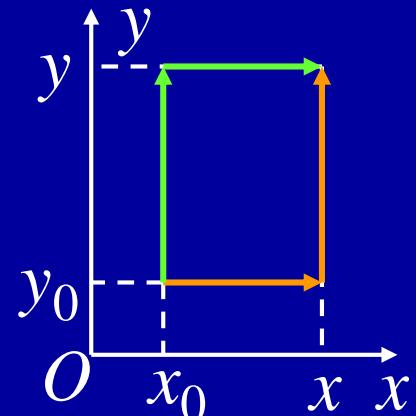
说明: 根据定理2, 若在某区域  $D$  内  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 则

- 1) 计算曲线积分时, 可选择方便的积分路径;
- 2) 求曲线积分时, 可利用格林公式简化计算,  
若积分路径不是闭曲线, 可添加辅助线;
- 3) 可用积分法求  $d u = P dx + Q dy$  在域  $D$  内的原函数:

取定点  $(x_0, y_0) \in D$  及动点  $(x, y) \in D$ , 则原函数为

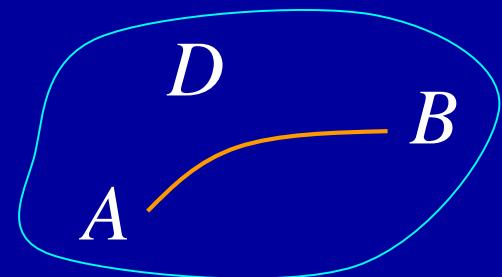
$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \\ &= \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy \end{aligned}$$

或  $u(x, y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy + \int_{x_0}^x P(x, y)dx$



4) 若已知  $d u = P dx + Q dy$ , 则对  $D$  内任一分段光滑曲线  $\widehat{AB}$ , 有

$$\begin{aligned}& \int_{\widehat{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \\&= \int_A^B P(x, y) dx + Q(x, y) dy \\&= \int_A^B du = u \Big|_A^B = u(B) - u(A)\end{aligned}$$



注: 此式称为**曲线积分的基本公式**

它类似于微积分基本公式:

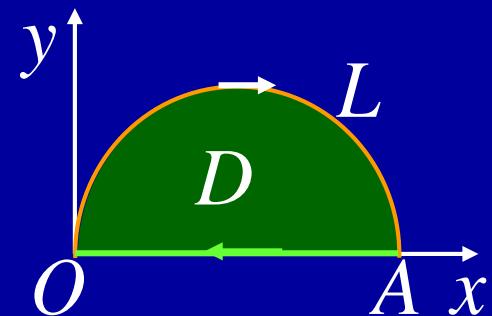
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \int_a^b dF(x) \quad (\text{其中 } F'(x) = f(x)) \\&= F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)\end{aligned}$$



**例4.** 计算  $\int_L (x^2 + 3y)dx + (y^2 - x)dy$ , 其中  $L$  为上半圆周  $y = \sqrt{4x - x^2}$  从  $O(0, 0)$  到  $A(4, 0)$ .

**解:** 为了使用格林公式, 添加辅助线段  $\overline{AO}$ , 它与  $L$  所围区域为  $D$ , 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \oint_{L \cup \overline{AO}} (x^2 + 3y)dx + (y^2 - x)dy \\ &\quad + \int_{\overline{OA}} (x^2 + 3y)dx + (y^2 - x)dy \\ &= 4 \iint_D dxdy + \int_0^4 x^2 dx \\ &= 8\pi + \frac{64}{3} \end{aligned}$$



**例5.** 验证  $xy^2 dx + x^2 y dy$  是某个函数的全微分，并求出这个函数。

证：设  $P = xy^2$ ,  $Q = x^2 y$ , 则  $\frac{\partial P}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial Q}{\partial x}$

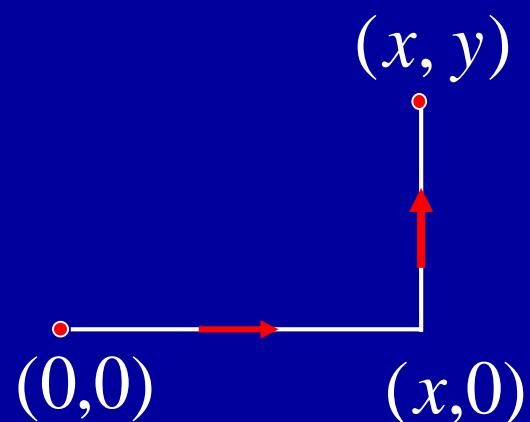
由定理2 可知，存在函数  $u(x, y)$  使

$$du = xy^2 dx + x^2 y dy$$

$$u(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} xy^2 dx + x^2 y dy$$

$$= 0 + \int_0^y x^2 y dy$$

$$= \int_0^y x^2 y dy = \frac{1}{2} x^2 y^2$$



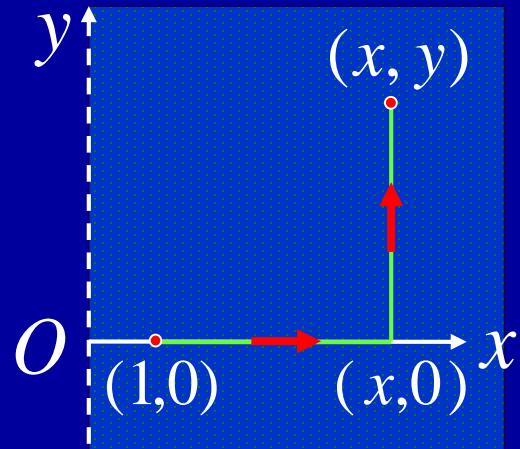
**例6.** 验证  $\frac{x \, dy - y \, dx}{x^2 + y^2}$  在右半平面 ( $x > 0$ ) 内存在原函数，并求出它。

证：令  $P = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ ,  $Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$

则  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$  ( $x > 0$ )

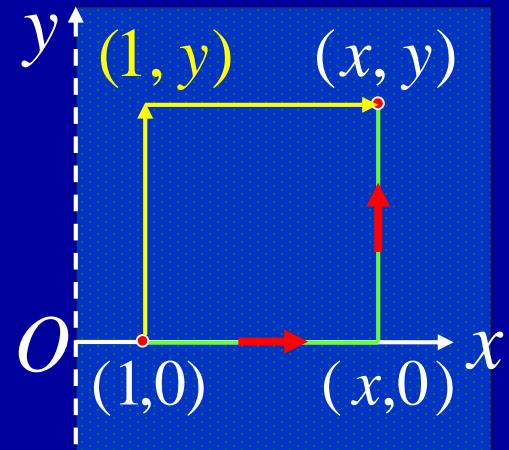
由定理 2 可知存在原函数

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{x \, dy - y \, dx}{x^2 + y^2} \\ &= 0 + x \int_0^y \frac{dy}{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x} \quad (x > 0) \end{aligned}$$



或

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{x \, dy - y \, dx}{x^2 + y^2} \\ &= \int_0^y \frac{dy}{1+y^2} - y \int_1^x \frac{dx}{x^2+y^2} \\ &= \arctan y + \arctan \frac{1}{y} - \arctan \frac{x}{y} \\ &= \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{x}{y} \\ &= \arctan \frac{y}{x} \quad (x > 0) \end{aligned}$$



**例7.** 设质点在力场  $\vec{F} = \frac{k}{r^2}(y, -x)$  作用下沿曲线  $L$ :

$y = \frac{\pi}{2} \cos x$  由  $A(0, \frac{\pi}{2})$  移动到  $B(\frac{\pi}{2}, 0)$ , 求力场所作的功  $W$

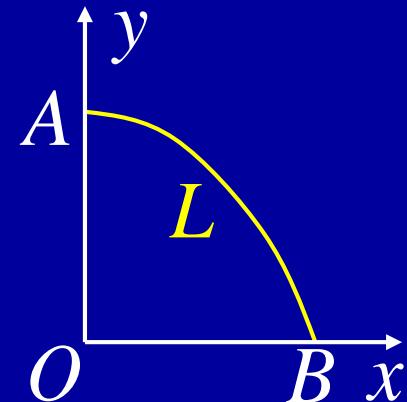
(其中  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  ).

解:  $W = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_L \frac{k}{r^2} (y dx - x dy)$

令  $P = \frac{ky}{r^2}$ ,  $Q = -\frac{kx}{r^2}$ , 则有

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{k(x^2 - y^2)}{r^4} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (x^2 + y^2 \neq 0)$$

可见, 在不含原点的单连通区域内积分与路径无关.

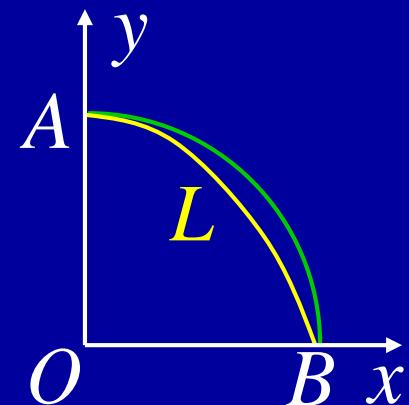


取圆弧  $\widehat{AB}$ :  $x = \frac{\pi}{2} \cos \theta$ ,  $y = \frac{\pi}{2} \sin \theta$  ( $\theta: \frac{\pi}{2} \rightarrow 0$ )

$$W = \int_{\widehat{AB}} \frac{k}{r^2} (y \, dx - x \, dy)$$

$$= k \int_{\pi/2}^0 -(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) d\theta$$

$$= -\frac{\pi}{2} k$$



思考: 积分路径是否可以取  $\overline{AO} \cup \overline{OB}$ ? 为什么?

注意, 本题只在不含原点的单连通区域内积分与路径无关! 转内容小结



### 三、全微分方程

若存在  $u(x, y)$  使  $du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$   
则称  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad ③$   
为全微分方程.

判别:  $P, Q$  在某单连通域  $D$  内有连续一阶偏导数, 则

$$③ \text{ 为全微分方程} \iff \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (x, y) \in D$$

求解步骤:

1. 求原函数  $u(x, y)$

方法1 凑微分法;

方法2 利用积分与路径无关的条件.

2. 由  $du = 0$  知通解为  $u(x, y) = C$ .



## 例8. 求解

$$(5x^4 + 3xy^2 - y^3)dx + (3x^2y - 3xy^2 + y^2)dy = 0$$

解: 因为  $\frac{\partial P}{\partial y} = 6xy - 3y^2 = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 故这是全微分方程.

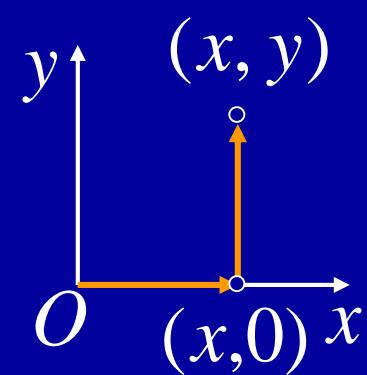
法1 取  $x_0 = 0, y_0 = 0$ , 则有

$$u(x, y) = \int_0^x 5x^4 dx + \int_0^y (3x^2y - 3xy^2 + y^2) dy$$

$$= x^5 + \frac{3}{2}x^2y^2 - xy^3 + \frac{1}{3}y^3$$

因此方程的通解为

$$x^5 + \frac{3}{2}x^2y^2 - xy^3 + \frac{1}{3}y^3 = C$$



**法2** 此全微分方程的通解为  $u(x, y) = C$  , 则有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 5x^4 + 3xy^2 - y^3 \quad ④$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2y - 3xy^2 + y^2 \quad ⑤$$

由④得  $u(x, y) = \int (5x^4 + 3xy^2 - y^3) dx + \varphi(y)$   
 $= x^5 + \frac{3}{2}x^2y^2 - xy^3 + \varphi(y), \quad \varphi(y) \text{待定}$

两边对  $y$  求导得  $\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2y - 3xy^2 + \varphi'(y)$

与⑤比较得  $\varphi'(y) = y^2$ , 取  $\varphi(y) = \frac{1}{3}y^3$

因此方程的通解为  $x^5 + \frac{3}{2}x^2y^2 - xy^3 + \frac{1}{3}y^3 = C$



**例9.** 求解  $(x + \frac{y}{x^2})dx - \frac{1}{x}dy = 0$

**解:**  $\because \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ,  $\therefore$  这是一个全微分方程 .

用凑微分法求通解. 将方程改写为

$$xdx - \frac{x dy - y dx}{x^2} = 0$$

即  $d(\frac{1}{2}x^2) - d(\frac{y}{x}) = 0$ , 或  $d(\frac{1}{2}x^2 - \frac{y}{x}) = 0$

故原方程的通解为  $\frac{1}{2}x^2 - \frac{y}{x} = C$



**思考:** 如何解方程  $(x^3 + y)dx - x dy = 0$  ?

这不是一个全微分方程, 但若在方程两边同乘  $\frac{1}{x^2}$ ,  
就化成例9 的方程 .

**注:**若存在连续可微函数  $\mu = \mu(x, y) \neq 0$ , 使

$$\mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy = 0$$

为全微分方程, 则称  $\mu(x, y)$  为原方程的积分因子.

在简单情况下, 可凭观察和经验根据微分倒推式得到  
积分因子.



## 内容小结

1. 格林公式  $\oint_L P \mathrm{d}x + Q \mathrm{d}y = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$
2. 等价条件

设  $P, Q$  在  $D$  内具有一阶连续偏导数, 则有

$\int_L P \mathrm{d}x + Q \mathrm{d}y$  在  $D$  内与路径无关.

$\iff$  对  $D$  内任意闭曲线  $L$  有  $\oint_L P \mathrm{d}x + Q \mathrm{d}y = 0$

$\iff$  在  $D$  内有  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

$\iff$  在  $D$  内有  $\mathrm{d}u = P \mathrm{d}x + Q \mathrm{d}y$

$\iff$   $P \mathrm{d}x + Q \mathrm{d}y = 0$  为全微分方程



## 思考与练习

1. 设  $L: x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$ ,  $l: x^2 + y^2 = 4$ ,

且都取正向, 问下列计算是否正确?

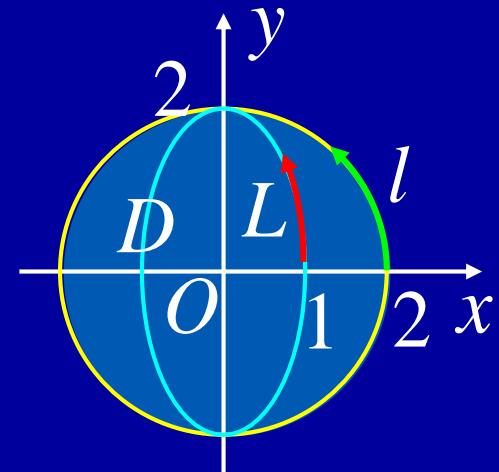
$$(1) \oint_L \frac{x dy - 4y dx}{x^2 + y^2} \text{ } \times \oint_l \frac{x dy - 4y dx}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{1}{4} \oint_l x dy - 4y dx = \frac{1}{4} \iint_D 5 d\sigma = 5\pi$$

$$(2) \oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \oint_l \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{1}{4} \oint_l x dy - y dx = \frac{1}{4} \iint_D 2 d\sigma$$

$$= 2\pi$$



提示:  $x^2 + y^2 \neq 0$  时

$$(1) \frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$(2) \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

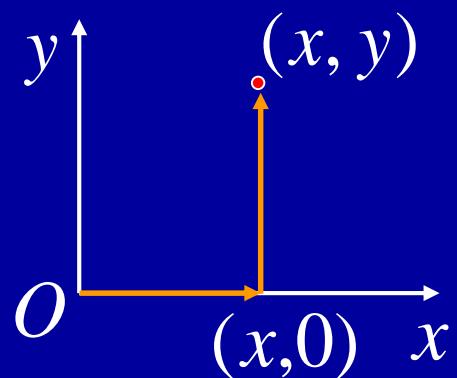


2. 设  $\text{grad } u(x, y) = (x^4 + 4xy^3, 6x^2y^2 - 5y^4)$ , 求  $u(x, y)$ .

提示:  $du(x, y) = (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy + C \\ &= \int_0^x x^4 dx + \int_0^y (6x^2y^2 - 5y^4) dy + C \\ &= \frac{1}{5}x^5 + 2x^2y^3 - y^5 + C \end{aligned}$$

作业



HIGHER EDUCATION PRESS



第四节



目录



上页



下页



返回

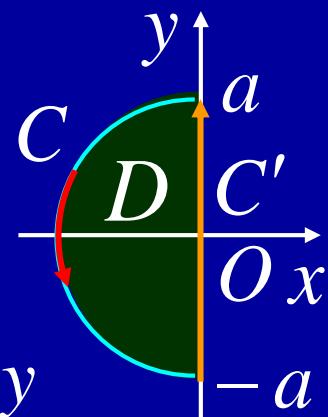
结束

**备用题 1.** 设  $C$  为沿  $x^2 + y^2 = a^2$  从点  $(0, a)$  依逆时针到点  $(0, -a)$  的半圆, 计算

$$\int_C \frac{y^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx + [ax + 2y \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})] dy$$

**解:** 添加辅助线如图, 利用格林公式.

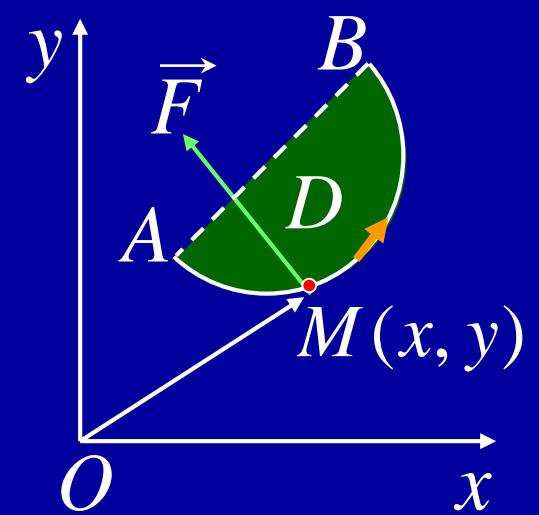
$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_{C \cup C'} - \int_{C'} \\ &= \iint_D \left[ a + \frac{2y}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{2y}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right] dx dy \\ &\quad - \int_{-a}^a (2y \ln a) dy \\ &= \frac{1}{2} \pi a^3 \end{aligned}$$



2. 质点 $M$ 沿着以 $AB$ 为直径的半圆, 从 $A(1,2)$ 运动到点 $B(3, 4)$ , 在此过程中受力 $\vec{F}$ 作用,  $\vec{F}$ 的大小等于点 $M$ 到原点的距离, 其方向垂直于 $OM$ , 且与 $y$ 轴正向夹角为锐角, 求变力 $\vec{F}$ 对质点 $M$ 所作的功.

解: 由图知  $\vec{F} = (-y, x)$ , 故所求功为

$$\begin{aligned} W &= \int_{\widehat{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\widehat{AB}} -y dx + x dy \\ &= \left( \int_{\widehat{AB} \cup \overline{BA}} + \int_{\overline{AB}} \right) (-y dx + x dy) \\ &= 2 \iint_D dx dy + \int_1^3 [-(x+1) + x] dx \\ &= 2\pi - 2 \end{aligned}$$



$\overline{AB}$ 的方程

$$y = 2 + \frac{4-3}{3-1}(x-1)$$



3. 已知曲线积分  $\int_L F(x, y)[y \sin x dx - \cos x dy]$   
 与路径无关, 其中  $F \in C^1$ ,  $F(0,1) = 0$ , 求由  $F(x, y) = 0$   
 确定的隐函数  $y = f(x)$ .

解: 因积分与路径无关, 故有

$$\frac{\partial}{\partial x}[-F(x, y)\cos x] = \frac{\partial}{\partial y}[F(x, y)y \sin x]$$

即  $-F_x \cos x + F \cancel{\sin x} = F_y y \sin x + F \cancel{\sin x}$

$$y' \xrightarrow{-\frac{F_x}{F_y}} -\frac{F_x}{F_y} = y \tan x$$

因此有  $\begin{cases} y' = y \tan x \\ y|_{x=0} = 1 \end{cases} \implies y = \frac{1}{\cos x} = \sec x$

