

第六节

高斯公式 *通量与散度

Green 公式 $\xrightarrow{\text{推广}}$ Gauss 公式

一、高斯公式

*二、沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件

*三、通量与散度



一、高斯 (Gauss) 公式

定理1. 设空间闭区域 Ω 由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成, Σ 的方向取外侧, 函数 P, Q, R 在 Ω 上有连续的一阶偏导数, 则有



$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz \\ &= \oiint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \quad (\text{Gauss 公式}) \end{aligned}$$

下面先证:

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \oiint_{\Sigma} R dx dy$$



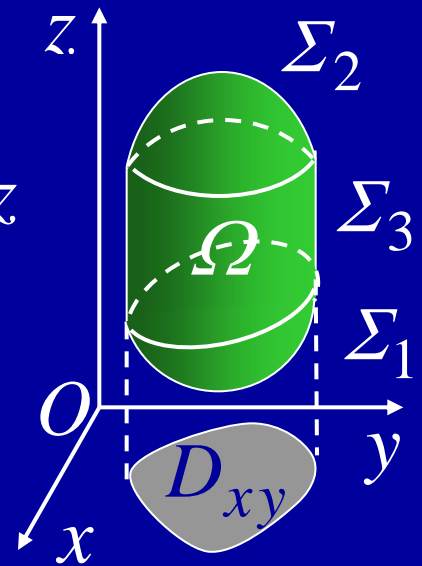
证明: 设 $\Omega: z_1(x, y) \leq z(x, y) \leq z_2(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 称为XY-型区域, $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$, $\Sigma_1: z = z_1(x, y)$, $\Sigma_2: z = z_2(x, y)$, 则

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz$$

$$= \iint_{D_{xy}} \{ R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y)) \} dx dy$$

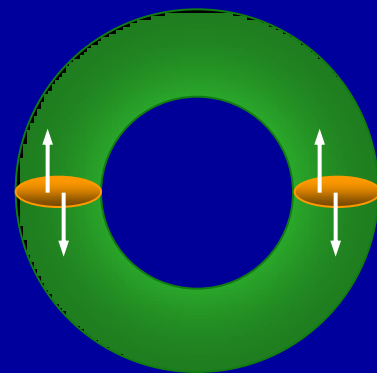
$$\oiint_{\Sigma} R dx dy = \left(\iint_{\Sigma_2} + \iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_3} \right) R dx dy$$

$$= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_2(x, y)) dx dy - \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_1(x, y)) dx dy$$



所以
$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \oiint_{\Sigma} R dx dy$$

若 Ω 不是 XY -型区域，则可引进辅助面将其分割成若干个 XY -型区域，在辅助面正反两侧面积分正负抵消，故上式仍成立。



类似可证
$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \oiint_{\Sigma} P dy dz$$

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \oiint_{\Sigma} Q dz dx$$

三式相加，即得所证 Gauss 公式：

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz \\ = \oiint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \end{aligned}$$



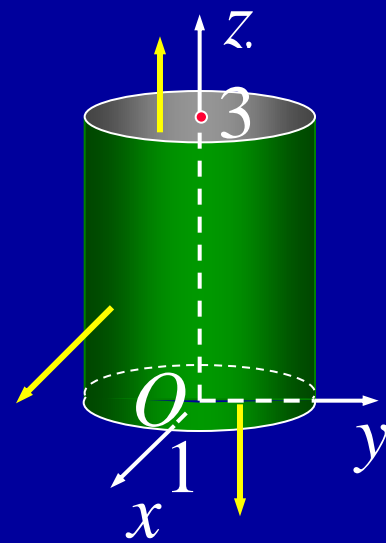
例1. 用Gauss 公式计算 $\iint_{\Sigma} (x-y)dx dy + (y-z)xdy dz$
其中 Σ 为柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 及平面 $z = 0, z = 3$ 所围空间
闭域 Ω 的整个边界曲面的外侧.

解: 这里 $P = (y-z)x, Q = 0, R = x-y$
利用Gauss 公式, 得

$$\text{原式} = \iiint_{\Omega} (y-z)dx dy dz$$

↓ 利用质心公式, 注意 $\bar{y} = 0, \bar{z} = \frac{3}{2}$

$$= (0 - \frac{3}{2}) \iiint_{\Omega} dx dy dz = -\frac{9\pi}{2}$$



思考: 若 Σ 改为内侧, 结果有何变化?

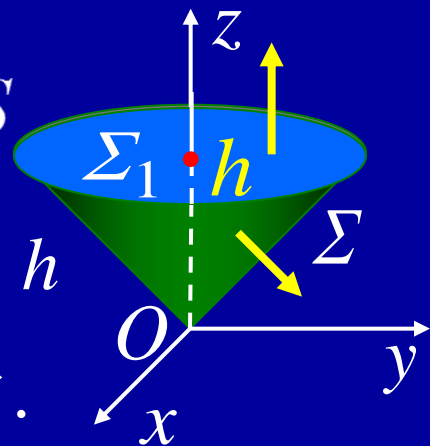
若 Σ 为圆柱侧面(取外侧), 如何计算?



例2. 利用Gauss 公式计算积分

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS$$

其中 Σ 为锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 介于 $z = 0$ 及 $z = h$ 之间部分的下侧, α, β, γ 为法向量的方向角.



解: 作辅助面

$\Sigma_1: z = h, (x, y) \in D_{xy} : x^2 + y^2 \leq h^2$, 取上侧

记 Σ, Σ_1 所围区域为 Ω , 则

在 Σ_1 上 $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}, \gamma = 0$

$$\begin{aligned} I &= \left(\iint_{\Sigma \cup \Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1} \right) (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS \\ &= 2 \iiint_{\Omega} (x + y + z) dx dy dz - \iint_{D_{xy}} h^2 dx dy \end{aligned}$$



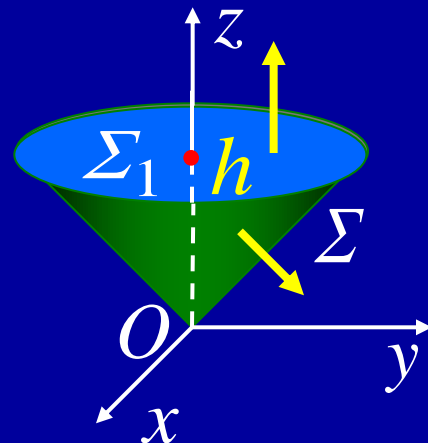
$$I = 2 \iiint_{\Omega} (x + y + z) dx dy dz - \iint_{D_{xy}} h^2 dx dy$$

利用质心公式, 注意 $\bar{x} = \bar{y} = 0$

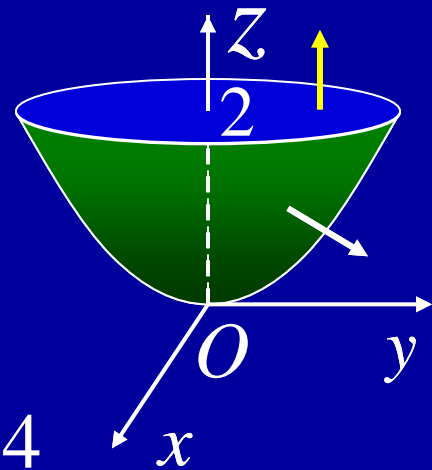
$$= 2 \iiint_{\Omega} z dx dy dz - \pi h^4$$

先二后一

$$= 2 \int_0^h z \cdot \pi z^2 dz - \pi h^4 = -\frac{1}{2} \pi h^4$$



思考: 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$,
 $\Sigma: z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 介于平面 $z = 0$ 及 $z = 2$
 之间部分的下侧.



提示: 作取上侧的辅助面 $\Sigma_1: z = 2$,

$$(x, y) \in D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 4$$



例3. 设 Σ 为曲面 $z = 2 - x^2 - y^2$, $1 \leq z \leq 2$ 取上侧, 求

$$I = \iint_{\Sigma} (x^3 z + x) dy dz - x^2 y z dz dx - \underline{x^2 z^2 dx dy}.$$

解: 作取下侧的辅助面

$$\Sigma_1: z = 1 \quad (x, y) \in D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 1$$

$$I = \oiint_{\Sigma \cup \Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1}$$

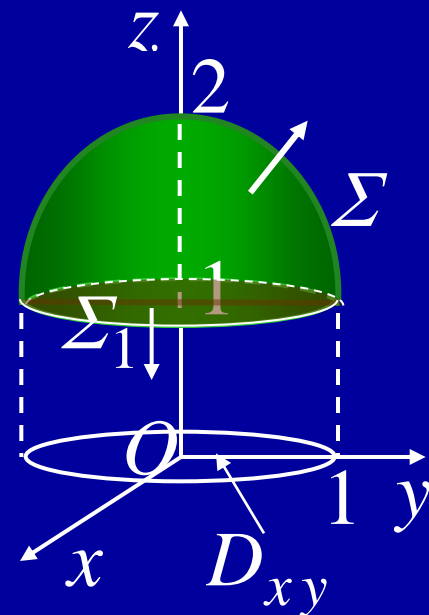
用柱坐标

用极坐标

$$= \iiint_{\Omega} dx dy dz - (-1) \iint_{D_{xy}} (-x^2) dx dy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_1^{2-r^2} dz - \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^1 r^3 dr$$

$$= \frac{\pi}{4}$$



例4. 设函数 $u(x, y), v(x, y)$ 在闭区域 Ω 上具有一阶和二阶连续偏导数, 证明格林(Green)第一公式

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) dx dy dz \\ &= \oiint_{\Sigma} u \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial v}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial v}{\partial z} \cos \gamma \right) dS \\ & \quad - \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dx dy dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= u \frac{\partial v}{\partial x} \\ Q &= u \frac{\partial v}{\partial y} \\ R &= u \frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned}$$

其中 Σ 是整个 Ω 边界面的外侧.

注意: 高斯公式
$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz \\ &= \oiint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \end{aligned}$$



证: 令 $P = u \frac{\partial v}{\partial x}$, $Q = u \frac{\partial v}{\partial y}$, $R = u \frac{\partial v}{\partial z}$, 由高斯公式得

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \left[u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right] dx dy dz \\ &= \oiint_{\Sigma} u \left(\frac{\partial v}{\partial x} dy dz + \frac{\partial v}{\partial y} dz dx + \frac{\partial v}{\partial z} dx dy \right) \\ &= \oiint_{\Sigma} u \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial v}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial v}{\partial z} \cos \gamma \right) dS \end{aligned}$$

移项即得所证公式.

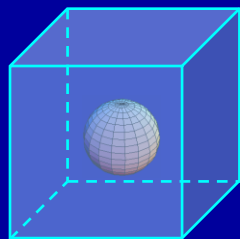
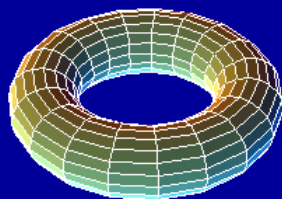
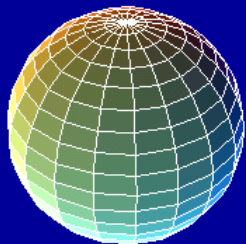


*二、沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件

1. 连通区域的类型 设有空间区域 G ,

- 若 G 内任一闭曲面所围成的区域全属于 G , 则称 G 为空间二维单连通域;
- 若 G 内任一闭曲线总可以张一片全属于 G 的曲面, 则称 G 为空间一维单连通域.

例如, 球面所围区域既是一维也是二维单连通区域;
环面所围区域是二维但不是一维单连通区域;
立方体中挖去一个小球所成的区域是一维但



不是二维单连通区域.



2. 闭曲面积分为零的充要条件

定理2. 设 $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 在空间二维单连通域 G 内具有连续一阶偏导数, Σ 为 G 内任一闭曲面, 则

$$\oiint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = 0 \quad (1)$$

的充要条件是:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0, \quad (x, y, z) \in G \quad (2)$$

证: “充分性” 根据高斯公式可知②是①的充分条件.

“必要性”. 用反证法已知①成立, 假设存在 $M_0 \in G$, 使

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)_{M_0} \neq 0$$



因 P, Q, R 在 G 内具有连续一阶偏导数, 则存在邻域
 $U(M_0) \subset G$, 使在 $U(M_0)$ 上,

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \neq 0$$

设 $U(M_0)$ 的边界为 Σ' 取外侧, 则由 高斯公式 得

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma'} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \\ &= \iiint_{U(M_0)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

与①矛盾, 故假设不真. 因此条件②是必要的.



三、通量与散度

引例. 设稳定流动的不可压缩流体的密度为1, 速度场为

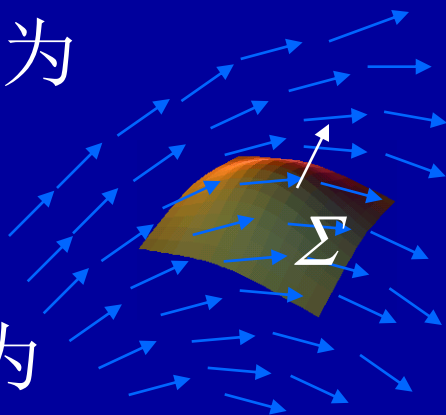
$$\vec{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

设 Σ 为场中任一有向曲面, 则由对坐标的曲面积分的物理意义可知, 单位时间通过曲面 Σ 的流量为

$$\Phi = \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

由两类曲面积分的关系, 流量还可表示为

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS \\ &= \iint_{\Sigma} \vec{v} \cdot \vec{n} dS\end{aligned}$$



若 Σ 为方向向外的闭曲面, 则单位时间通过 Σ 的流量为

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy$$

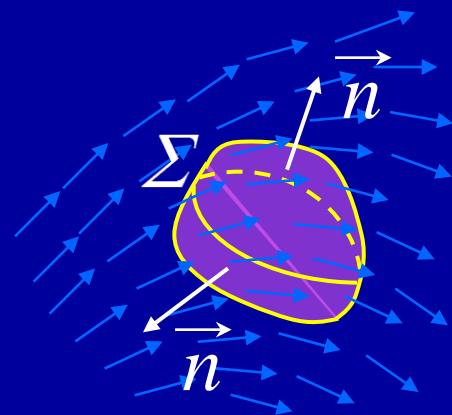
当 $\Phi > 0$ 时, 说明流入 Σ 的流体质量少于流出的, 表明 Σ 内有泉;

当 $\Phi < 0$ 时, 说明流入 Σ 的流体质量多于流出的, 表明 Σ 内有洞;

当 $\Phi = 0$ 时, 说明流入与流出 Σ 的流体质量相等.

根据高斯公式, 流量也可表为

$$\Phi = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz \quad \textcircled{3}$$



为了揭示场内任意点 M 处的特性, 设 Σ 是包含点 M 且方向向外的任一闭曲面, 记 Σ 所围域为 Ω , 在③式两边同除以 Ω 的体积 V , 并令 Ω 以任意方式缩小至点 M (记作 $\Omega \rightarrow M$), 则有



$$\begin{aligned} \lim_{\Omega \rightarrow M} \frac{\Phi}{V} &= \lim_{\Omega \rightarrow M} \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz \\ &= \lim_{\Omega \rightarrow M} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)_{(\xi, \eta, \zeta)} ((\xi, \eta, \zeta) \in \Omega) \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)_M \end{aligned}$$

此式反应了流速场在点 M 的特点: 其值为正, 负或 0, 分别反映在该点有流体涌出, 吸入, 或没有任何变化.



定义: 设有向量场

$$\vec{A}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

其中 P, Q, R 具有连续一阶偏导数, Σ 是场内的一片有向曲面, 其单位法向量 \vec{n} , 则称 $\iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{n} dS$ 为向量场 \vec{A} 通过有向曲面 Σ 的**通量**(流量).

在场中点 $M(x, y, z)$ 处

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad \text{记作} \quad \operatorname{div} \vec{A}$$

divergence

称为向量场 \vec{A} 在点 M 的**散度**.

显然 $\operatorname{div} \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A}$



说明: 由引例可知, 散度是通量对体积的变化率, 且

$\operatorname{div} \vec{A} > 0$ 表明该点处有正源,

$\operatorname{div} \vec{A} < 0$ 表明该点处有负源,

$\operatorname{div} \vec{A} = 0$ 表明该点处无源,

散度绝对值的大小反映了源的强度.

若向量场 \vec{A} 处处有 $\operatorname{div} \vec{A} = 0$, 则称 \vec{A} 为无源场.

例如, 匀速场 $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ (其中 v_x, v_y, v_z 为常数),

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

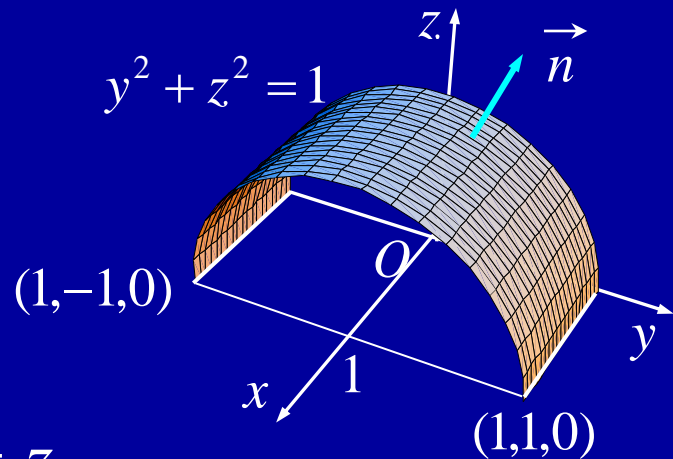
故它是无源场.



例5. 求向量场 $\vec{A} = yz\vec{j} + z^2\vec{k}$ 穿过曲面 Σ 流向上侧的通量, 其中 Σ 为柱面 $y^2 + z^2 = 1$ ($z \geq 0$) 被平面 $x=0$ 及 $x=1$ 截下的有限部分.

解: 记 $f(x, y) = y^2 + z^2$, 则 Σ 上侧的法向量为

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{y^2 + z^2}} \\ &= y\vec{j} + z\vec{k}\end{aligned}$$



在 Σ 上 $\vec{A} \cdot \vec{n} = y^2 z + z^3 = z(y^2 + z^2) = z$

故所求通量为

$$\iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma} z dS = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1-y^2} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dx dy = 2$$



例6. 置于原点, 电量为 q 的点电荷产生的场强为

$$\vec{E} = \frac{q}{r^3} \vec{r} = \frac{q}{r^3} (x, y, z) \quad (\vec{r} \neq \vec{0})$$

求 $\operatorname{div} \vec{E}$.

解: $\operatorname{div} \vec{E} = q \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r^3} \right) \right]$

$$= q \left[\frac{r^2 - 3x^2}{r^5} + \frac{r^2 - 3y^2}{r^5} + \frac{r^2 - 3z^2}{r^5} \right]$$

$$= 0 \quad (r \neq 0)$$

计算结果与仅原点有点电荷的事实相符.



内容小结

1. 高斯公式及其应用

$$\begin{aligned}\text{公式: } \oiint_{\Sigma} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy \\ = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz\end{aligned}$$

应用: (1) 计算曲面积分

(非闭曲面时注意添加辅助面的技巧)

(2) 推出闭曲面积分为零的充要条件:

$$\begin{aligned}\oiint_{\Sigma} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy = 0 \\ \iff \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0\end{aligned}$$



2. *通量与散度

设向量场 $\vec{A} = (P, Q, R)$, P, Q, R , 在域 G 内有一阶连续偏导数, 则

向量场通过有向曲面 Σ 的通量为

$$\iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{n} dS \quad (\vec{n} \text{ 为 } \Sigma \text{ 的单位法向量})$$

G 内任意点处的散度为

$$\operatorname{div} \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$



思考与练习

设 $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 取外侧, Ω 为 Σ 所围立体, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 判断下列演算是否正确?

$$\begin{aligned}(1) \quad & \iint_{\Sigma} \frac{x^3}{r^3} dy dz + \frac{y^3}{r^3} dz dx + \frac{z^3}{r^3} dx dy \\ &= \frac{1}{R^3} \iint_{\Sigma} x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy \\ &= \frac{1}{R^3} \iiint_{\Omega} \underbrace{3(x^2 + y^2 + z^2)}_{\neq R^2} dv \neq \frac{3}{R} \iiint_{\Omega} dv = 4\pi R^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \quad & \iint_{\Sigma} \frac{x^3}{r^3} dy dz + \frac{y^3}{r^3} dz dx + \frac{z^3}{r^3} dx dy \\ & \neq \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^3}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y^3}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z^3}{r^3} \right) \right] dv = \dots\end{aligned}$$



备用题 设 Σ 是一光滑闭曲面, 所围立体 Ω 的体积为 V , θ 是 Σ 外法线向量与点 (x, y, z) 的向径 \vec{r} 的夹角, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 试证 $\frac{1}{3} \oiint_{\Sigma} r \cos \theta \, dS = V$.

证: 设 Σ 的单位外法向量为 $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, $\vec{r} = (x, y, z)$, 则

$$\cos \theta = \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{r}|} = \frac{x}{r} \cos \alpha + \frac{y}{r} \cos \beta + \frac{z}{r} \cos \gamma$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{3} \oiint_{\Sigma} r \cos \theta \, dS &= \frac{1}{3} \oiint_{\Sigma} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) \, dS \\ &= \frac{1}{3} \iiint_{\Omega} 3 \, dv = V \end{aligned}$$

