

第二章

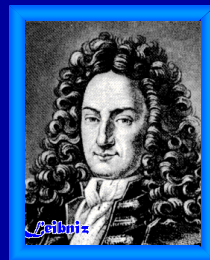
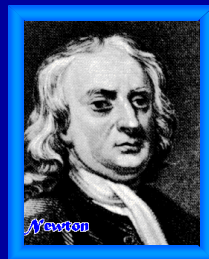
导数与微分

导数思想最早由法国数学家 Fermat 在研究极值问题中提出.

微积分学的创始人:

英国数学家 Newton

德国数学家 Leibniz



微分学 $\left\{ \begin{array}{ll} \text{导数} & \text{—— 描述函数变化快慢} \\ \text{微分} & \text{—— 描述函数变化程度} \end{array} \right.$

都是描述物质运动的工具(从微观上研究函数)



第一节

导数的概念

一、引例

二、导数的定义

三、导数的几何意义

四、函数的可导性与连续性的关系

五、单侧导数



一、引例

1. 变速直线运动的速度

设描述质点运动位置的函数为

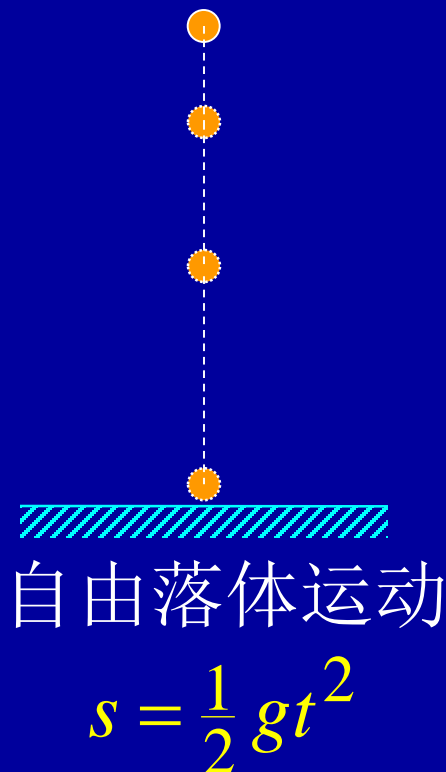
$$s = f(t)$$

则 t_0 到 t 的平均速度为

$$\bar{v} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

而在 t_0 时刻的瞬时速度为

$$v = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

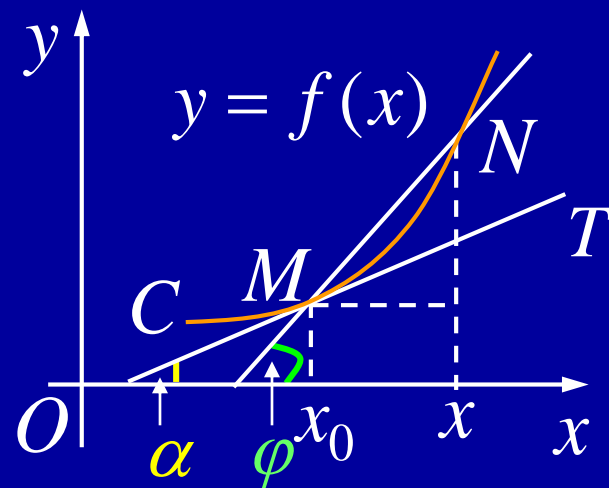


2. 曲线的切线斜率

曲线 $C: y = f(x)$ 在 M 点处的切线

—— 割线 MN 的极限位置 MT
(当 $\varphi \rightarrow \alpha$ 时)

切线 MT 的斜率



$$k = \tan \alpha = \lim_{\varphi \rightarrow \alpha} \tan \varphi$$

割线 MN 的斜率 $\tan \varphi = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

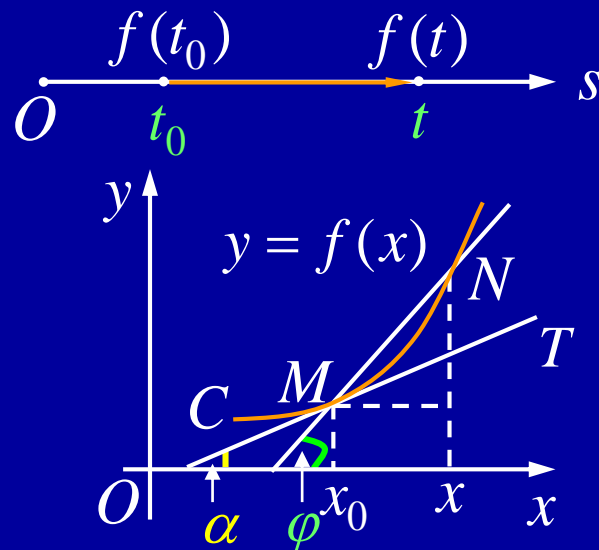
$$k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



瞬时速度 $v = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$

切线斜率 $k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

两个问题的**共性**:



所求量为**函数增量与自变量增量之比**的极限.

类似问题还有:

加速度 是**速度增量与时间增量之比**的极限
 角速度 是**转角增量与时间增量之比**的极限
 线密度 是**质量增量与长度增量之比**的极限
 电流强度 是**电量增量与时间增量之比**的极限

变化率问题



二、导数的定义

定义1. 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ $\Delta y = f(x) - f(x_0)$
 $\Delta x = x - x_0$

存在, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**可导**, 并称此极限为

$y = f(x)$ 在点 x_0 的**导数**. 记作:

$$y' \Big|_{x=x_0}; \quad f'(x_0); \quad \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0}; \quad \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=x_0}$$

即 $y' \Big|_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



运动质点的位置函数 $s = f(t)$

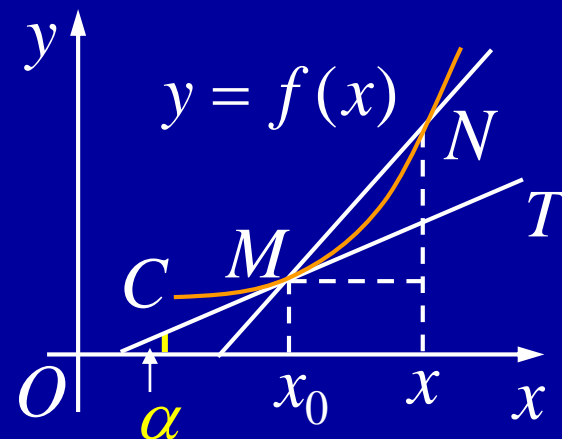
在 t_0 时刻的瞬时速度



$$v = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0)$$

曲线 $C: y = f(x)$ 在 M 点处的切线斜率

$$k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$



若极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x) - f(x_0) \\ \Delta x &= x - x_0 \end{aligned}$$

不存在, 就说函数在点 x_0 不可导.

若 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$, 也称 $f(x)$ 在 x_0 的导数为无穷大.

若函数在开区间 I 内每点都可导, 就称函数在 I 内可导.

此时导数值构成的新函数称为导函数.

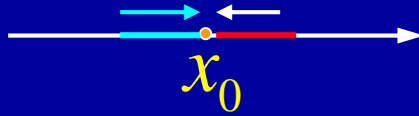
记作: y' ; $f'(x)$; $\frac{dy}{dx}$; $\frac{df(x)}{dx}$.

注意: $f'(x_0) = f'(x)|_{x=x_0} \neq \frac{df(x_0)}{dx}$



单侧导数

定义2. 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个**右**(**左**)邻域内有定义, 若极限

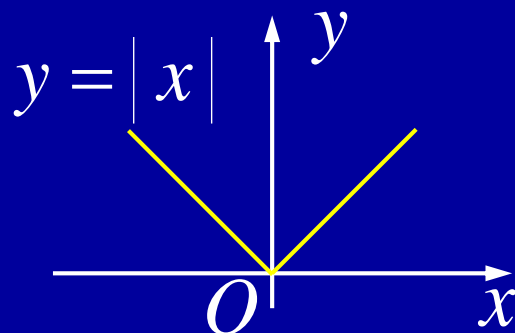
$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0^+ \\ (\Delta x \rightarrow 0^-)}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0^+ \\ (\Delta x \rightarrow 0^-)}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$


存在, 则称此极限值为 $f(x)$ 在 x_0 处的**右**(**左**) **导数**, 记作 $f'_+(x_0)$ ($f'_-(x_0)$)

即
$$f'_{\pm}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^{\pm}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

例如, $f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 处有

$$f'_+(0) = +1, \quad f'_-(0) = -1$$



例1. 证明函数 $f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 不可导.

证: $\because \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1, & h > 0 \\ -1, & h < 0 \end{cases}$

$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$ 不存在, 即 $|x|$ 在 $x = 0$ 不可导.

例2. 设 $f'(x_0)$ 存在, 求极限 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$.

解: 原式 $= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{2h} + \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{2(-h)} \right]$

$$= \frac{1}{2} f'(x_0) + \frac{1}{2} f'(x_0) = f'(x_0)$$



例3. 求函数 $f(x) = C$ (C 为常数) 的导数.

解:
$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C - C}{\Delta x} = 0$$

即 $(C)' = 0$

例4. 求函数 $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbf{N}^+$) 在 $x = a$ 处的导数.

解:
$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-1}) \\ &= na^{n-1} \end{aligned}$$



说明:

对一般幂函数 $y = x^\mu$ (μ 为常数)

$$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$$

(以后将证明)

例如, $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x}}\right)' = (x^{-\frac{3}{4}})' = -\frac{3}{4} x^{-\frac{7}{4}}$$



例5. 求函数 $f(x) = \sin x$ 的导数.

解: 令 $h = \Delta x$, 则

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos(x + \frac{h}{2}) \sin \frac{h}{2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x + \frac{h}{2}) \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x \end{aligned}$$

即

$$(\sin x)' = \cos x$$

类似可证得

$$(\cos x)' = -\sin x$$



例6. 求函数 $f(x) = \ln x$ 的导数.

解:
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left[\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{1}{x}} \\ &= \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

即

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$



三、导数的几何意义

曲线 $y = f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 的切线斜率为
 $\tan \alpha = f'(x_0)$

若 $f'(x_0) > 0$, 曲线过 (x_0, y_0) 上升;

若 $f'(x_0) < 0$, 曲线过 (x_0, y_0) 下降;

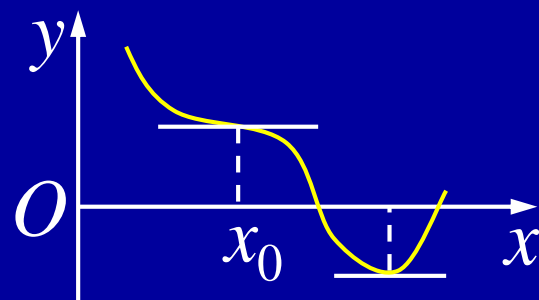
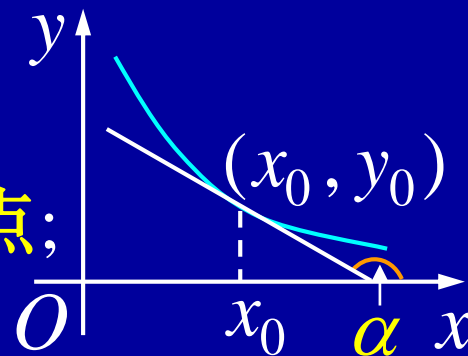
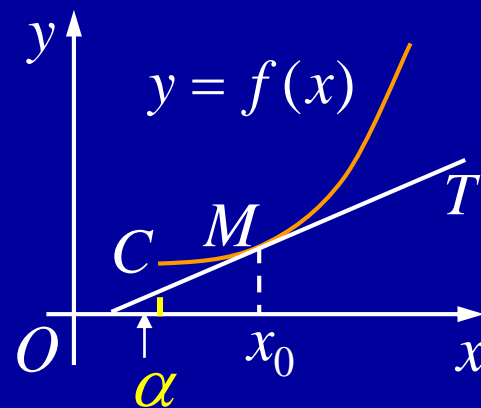
若 $f'(x_0) = 0$, 切线与 x 轴平行, x_0 称为**驻点**;

若 $f'(x_0) = \infty$, 切线与 x 轴垂直.

$f'(x_0) \neq \infty$ 时, 曲线在点 (x_0, y_0) 处的

切线方程: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

法线方程: $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (f'(x_0) \neq 0)$



例7. 问曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 哪一点有铅直切线？哪一点处的切线与直线 $y = \frac{1}{3}x - 1$ 平行？写出其切线方程.

解: $\because y' = (\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad \therefore y'|_{x=0} = \infty,$

故在原点 $(0, 0)$ 有铅直切线 $x = 0$

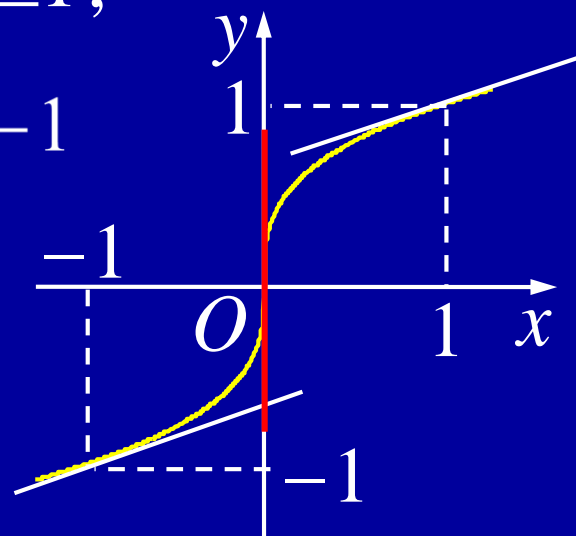
令 $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3}$, 得 $x = \pm 1$, 对应 $y = \pm 1$,

则在点 $(1, 1)$, $(-1, -1)$ 处与直线 $y = \frac{1}{3}x - 1$

平行的切线方程分别为

$$y - 1 = \frac{1}{3}(x - 1), \quad y + 1 = \frac{1}{3}(x + 1)$$

即 $x - 3y \pm 2 = 0$



四、函数的可导性与连续性的关系

定理1. $f(x)$ 在点 x 处可导 $\implies f(x)$ 在点 x 处连续

证: 设 $y = f(x)$ 在点 x 处可导, 即 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ 存在, 因此必有

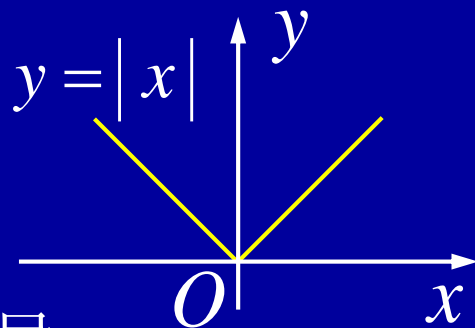
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha, \text{ 其中 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0$$

$$\text{故 } \Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$$

所以函数 $y = f(x)$ 在点 x 连续.

注意: 函数在点 x 连续, 但在该点未必可导.

反例: $y = |x|$ 在 $x = 0$ 处连续, 但不可导.



定理2. 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 可导的充分必要条件是 $f'_+(x_0)$ 与 $f'_-(x_0)$ 存在, 且 $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

简写为

$$f'(x_0) \text{ 存在} \iff f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$$

定理3. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处右(左)导数存在 \implies
 $f(x)$ 在点 x_0 必右(左)连续.

若函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内可导, 且 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 都存在, 则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可导.

显然:

$$f(x) \text{ 在闭区间 } [a, b] \text{ 上可导} \implies f(x) \in C[a, b]$$



内容小结

1. 导数的实质: 增量比的极限;
2. $f'(x_0) = a \iff f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = a$
3. 导数的几何意义: 切线的斜率;
4. 可导必连续, 但连续不一定可导;
5. 已学求导公式:

$$(C)' = 0; \quad (x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}; \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x; \quad (\cos x)' = -\sin x;$$

6. 判断可导性 $\left\{ \begin{array}{l} \text{不连续, 一定不可导.} \\ \text{直接用导数定义;} \\ \text{看左右导数是否存在且相等.} \end{array} \right.$



思考与练习

1. 函数 $f(x)$ 在某点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 与导函数 $f'(x)$ 有什么区别与联系？

区别: $f'(x)$ 是函数, $f'(x_0)$ 是数值;

联系: $f'(x) \Big|_{x=x_0} = f'(x_0)$

注意: $f'(x_0) \neq [f(x_0)]'$



2. 设 $f'(x_0)$ 存在, 则

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h} = \underline{-f'(x_0)}.$$

3. 已知 $f(0) = 0$, $f'(0) = k_0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \underline{k_0}$.

4. 若 $x \in (-\delta, \delta)$ 时, 恒有 $|f(x)| \leq x^2$, 问 $f(x)$ 是否在 $x = 0$ 可导?

解: 由题设 $f(0) = 0$

$$0 \leq \left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| \leq |x|$$

由夹逼准则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$

故 $f(x)$ 在 $x = 0$
可导, 且

$$f'(0) = 0$$



5. 设 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0 \\ ax, & x \geq 0 \end{cases}$, 问 a 取何值时, $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 都存在, 并求出 $f'(x)$.

解: 显然该函数在 $x = 0$ 连续.

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x - 0}{x - 0} = 1$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax - 0}{x - 0} = a$$

故 $a = 1$ 时 $f'(0) = 1$, 此时 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 都存在,

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$



备用题

1. 设 $f'(x)$ 存在, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = -1$, 求 $f'(1)$.

解: 因为

$$\begin{aligned} -1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-x) - f(1)}{-2x} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+(-x)) - f(1)}{(-x)} \\ &= \frac{1}{2} f'(1) \end{aligned}$$

所以 $f'(1) = -2$.



2. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 证明:
 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

证: 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则有 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

又 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 故 $f(0) = 0$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$

即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

