补充内容
函数幂级数展开式的应用

一、近似计算

*二、微分方程的幂级数解法

三、欧拉公式

一、近似计算

例1. 计算 $\sqrt[5]{240}$ 的近似值, 精确到 10^{-4}.

$\boxed{3^5 = 243}$

解: $\sqrt[5]{240} = \sqrt[5]{243-3} = 3\left(1-\frac{1}{3^4}\right)^{1/5}$

$$= 3\left(1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^4}-\frac{1\cdot 4}{5^2\cdot 2!}\cdot\frac{1}{3^8}-\frac{1\cdot 4\cdot 9}{5^3\cdot 3!}\cdot\frac{1}{3^{12}}-\cdots\right)$$

$$\because \left|r_2\right| = 3\left(\frac{1\cdot 4}{5^2\cdot 2!}\cdot\frac{1}{3^8}+\frac{1\cdot 4\cdot 9}{5^3\cdot 3!}\cdot\frac{1}{3^{12}}+\frac{1\cdot 4\cdot 9\cdot 14}{5^4\cdot 4!}\cdot\frac{1}{3^{16}}+\cdots\right)$$

$$< 3\cdot\frac{1\cdot 4}{5^2\cdot 2!}\cdot\frac{1}{3^8}\left[1+\frac{1}{81}+\left(\frac{1}{81}\right)^2+\cdots\right] < 0.5\times 10^{-4}$$

$$\therefore \quad \sqrt[5]{240} \approx 3\left(1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^4}\right) \approx 3-0.00741 \approx 2.9926$$

例2. 计算 $\ln 2$ 的近似值，使准确到 10^{-4}.

用此式求 ln2 计算量大

解: 已知

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad (-1 < x \le 1)$$

$$\therefore \quad \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots \quad (-1 \le x < 1)$$

故
$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$

$$= 2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots\right) \quad (-1 < x < 1)$$

令 $\frac{1+x}{1-x} = 2$ 得 $x = \frac{1}{3}$, 于是有

$$\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7} + \cdots\right)$$

在上述展开式中取前四项,

$$\because\ |r_4| = 2\left(\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^9}+\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{3^{11}}+\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{3^{13}}+\cdots\right)$$

$$<\frac{2}{3^{11}}\left(1+\frac{1}{9}+(\frac{1}{9})^2+\cdots\right)=\frac{2}{3^{11}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{4\cdot 3^9}$$

$$=\frac{1}{78732}<0.2\times 10^{-4}$$

$$\therefore\ \ln 2 \approx 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}\right)\approx 0.6931$$

说明: 在展开式

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots\right)$$

中,令 $x=\dfrac{1}{2n+1}$ (n为自然数) , 得

$$\ln\frac{n+1}{n}=2\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^5+\cdots\right)$$

$$\therefore \ln(n+1)=\ln n+2\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^5+\cdots\right)$$

具此递推公式可求出任意正整数的对数 . 如

$$\ln 5=2\ln 2+2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{9}\right)^5+\cdots\right)\approx 1.6094$$

例3. 利用 $\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{3!}$，求 $\sin 9°$ 的近似值，并估计误差.

解: 先把角度化为弧度 $9° = \dfrac{\pi}{180} \times 9 = \dfrac{\pi}{20}$ (弧度)

$$\because \quad \sin\frac{\pi}{20} = \underline{\frac{\pi}{20} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^3} + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^7 + \cdots$$

$$|r_2| < \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^5 < \frac{1}{120}(0.2)^5 < \frac{1}{3} \times 10^{-5}$$

$$\therefore \quad \sin\frac{\pi}{20} \approx \frac{\pi}{20} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^3 \approx 0.157080 - 0.000646$$

$$\approx 0.15643$$

例4. 计算积分 $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 的近似值, 精确到 10^{-4}.

(取 $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \approx 0.56419$)

解: $\mathrm{e}^{-x^2} = 1 + \frac{(-x^2)}{1!} + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \cdots$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{\frac{1}{2}} x^{2n}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx = \cdots$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{1}{2^2\cdot 3} + \frac{1}{2^4\cdot 5\cdot 2!} - \frac{1}{2^6\cdot 7\cdot 3!} + \cdots\right)$$

欲使截断误差 $|r_n| < \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{n!(2n+1)\cdot 2^{2n}} < 10^{-4}$

则 n 应满足 $\sqrt{\pi}\cdot n!(2n+1)\cdot 2^{2n} > 10^4 \Longrightarrow n \geq 4$

取 $n=4$, 则所求积分近似值为

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}\,dx \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{1}{2^2\cdot 3} + \frac{1}{2^4\cdot 5\cdot 2!} - \frac{1}{2^6\cdot 7\cdot 3!}\right)$$

$$\approx 0.5205$$

例5. 计算积分 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 的近似值, 精确到 10^{-4}.

解: 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, 故所给积分不是广义积分.

若定义被积函数在 $x=0$ 处的值为 1, 则它在积分区间上连续, 且有幂级数展开式:

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\underline{1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}}-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}+\cdots$$

$$|r_3|<\frac{1}{7\cdot 7!}=\frac{1}{35280}<0.3\times 10^{-4}$$

$$\approx 1-0.05556+0.00167\ \approx 0.9461$$

*二、微分方程的幂级数解法

幂级数解法
本质上就是
待定系数法

1. 一阶微分方程的情形

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y) \\ y\big|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$$

其中 $f(x, y)$ 是 $x - x_0$ 及 $y - y_0$ 的多项式.

设所求解为

$$y = y_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots \quad ①$$

代入原方程, 比较同次幂系数可定常数 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$

由此确定的级数①即为定解问题在收敛区间内的解.

例6. 求方程 $y' = x + y^2$ 满足 $y\big|_{x=0} = 0$的特解.

解: 根据初始条件, 设所求特解为

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

代入原方程, 得

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \cdots$$

$$= x + (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots)^2$$

$$= x + a_1^2 x^2 + 2a_1 a_2 x^3 + (a_2^2 + 2a_1 a_3) x^4 + \cdots$$

比较同次幂系数, 得

$$a_1 = 0,\quad a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = 0,\ a_4 = 0,\ a_5 = \frac{1}{20}, \cdots$$

故所求解的幂级数前几项为 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{20}x^5 + \cdots$

2. 二阶齐次线性微分方程问题

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad ②$$

定理: 设 $P(x)$, $Q(x)$ 在 $(-R, R)$ 内可展成 x 的幂级数, 则在 $-R < x < R$ 内方程 ② 必有幂级数解:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

(证明略)

此定理在数学物理方程及特殊函数中非常有用, 很多重要的特殊函数都是根据它从微分方程中得到的.

例7. 求方程 $x^2y''-(x+2)(xy'-y)=x^4$ 的一个特解.

解: 设特解为 $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 代入原方程整理得

$$2a_0+a_0x+\sum_{n=2}^{\infty}[(n-1)(n-2)a_n-(n-2)a_{n-1}]x^n=x^4$$

比较系数得: $a_0=0,\quad 6a_4-2a_3=1$

$$\underline{(n-1)(n-2)a_n-(n-2)a_{n-1}=0}\quad (n\ge 2,\ n\ne 4)$$

显然 a_1, a_2 可任意取值, 因是求特解, 故取 $a_1=a_2=0$,

从而得 $a_3=0,\quad a_4=\frac{1}{6}$

当 $n>4$ 时,

$$a_n=\frac{1}{n-1}a_{n-1}=\cdots=\frac{1}{(n-1)(n-2)\cdots 4}a_4=\frac{1}{(n-1)!}$$

因此

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^n=x\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$$

注意到: $\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$, 此题的上述特解即为

$$y=x(\mathrm{e}^x-1-x-\frac{1}{2}x^2)$$

三、欧拉(Euler)公式


欧拉，L.

对复数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + \mathrm{i}\, v_n)$ ③

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v$, 则称 ③ **收敛**, 且其和为 $u + \mathrm{i}\, v$.

若 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| u_n + \mathrm{i}\, v_n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n^2 + v_n^2}$ 收敛, 则称 ③ **绝对收敛.**

由于 $\left| u_n \right| \le \sqrt{u_n^2 + v_n^2}$, $\left| v_n \right| \le \sqrt{u_n^2 + v_n^2}$, 故知

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + \mathrm{i}\, v_n) \text{ 绝对收敛} \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 绝对收敛}$$

$$\longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(u_n + \mathrm{i}\, v_n) \text{ 收敛 .}$$

定义: 复变量 $z=x+\mathrm{i}\,y$ 的指数函数为

$$\mathrm{e}^{z}=1+z+\frac{1}{2!}z^{2}+\cdots+\frac{1}{n!}z^{n}+\cdots\quad(\,|z|<\infty\,)$$

易证它在整个复平面上绝对收敛 .

当 $y=0$ 时, 它与实指数函数 e^{x} 的幂级数展式一致.

当 $x=0$ 时,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,y}=1+\mathrm{i}\,y+\frac{1}{2!}(\mathrm{i}\,y)^{2}+\frac{1}{3!}(\mathrm{i}\,y)^{3}+\cdots+\frac{1}{n!}(\mathrm{i}\,y)^{n}+\cdots$$

$$=\left(1-\frac{1}{2!}y^{2}+\frac{1}{4!}y^{4}-\cdots+\frac{(-1)^{n}}{(2n)!}y^{2n}+\cdots\right)$$

$$+\mathrm{i}\left(y-\frac{1}{3!}y^{3}+\frac{1}{5!}y^{5}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}y^{2n-1}+\cdots\right)$$

$$=\cos y+\mathrm{i}\sin y$$

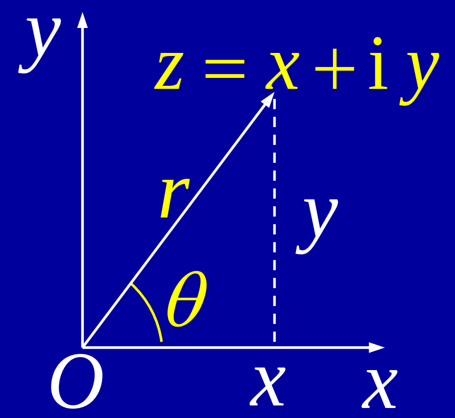
$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$ （欧拉公式）

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

则 $$\begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\[2ex] \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \end{cases}$$ （也称欧拉公式）

利用欧拉公式可得复数的指数形式

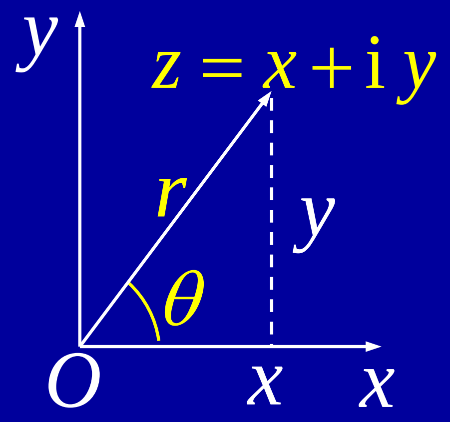
$$z = x + i\,y = r(\cos\theta + i \sin\theta)$$
$$= r\,e^{i\theta}$$



据此可得

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\,\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\,\sin n\theta$$

(德莫弗公式)



利用幂级数的乘法, 不难验证

$$\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\cdot\mathrm{e}^{z_2}$$

特别有

$$\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}\,y} = \mathrm{e}^{x}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,y} = \mathrm{e}^{x}(\cos y + i\sin y) \qquad (x,\, y \in R)$$

$$\left|\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}\,y}\right| = \left|\mathrm{e}^{x}(\cos y + \mathrm{i}\sin y)\right| = \mathrm{e}^{x}$$

$$z = x + \mathrm{i}\,y = r(\cos\theta + \mathrm{i}\,\sin\theta) = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

备用题 1. (1) 验证函数

$$y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots$$

$(-\infty<x<+\infty)$

满足微分方程 $y''+y'+y=\mathrm{e}^x$;

(2) 利用(1)的结果求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和.

解: (1) $y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots$

$$y'(x)=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots+\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\cdots$$

$$y''(x)=x+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}+\cdots$$

所以 $y'' + y' + y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

(2) 由(1)的结果可知所给级数的和函数满足

$$\begin{cases} y'' + y' + y = e^x \\ y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0 \end{cases}$$

其特征方程: $r^2 + r + 1 = 0$, 特征根: $r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

∴齐次方程通解为

$$Y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

设非齐次方程特解为 $y^* = A e^x$, 代入原方程得 $A = \frac{1}{3}$,

故非齐次方程通解为

$$y = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{1}{3}\mathrm{e}^x$$

代入初始条件可得 $C_1 = \frac{2}{3},\ C_2 = 0$

故所求级数的和

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{3}\mathrm{e}^x \quad (-\infty < x < +\infty)$$

2. 求解勒让德 (Legendre) 方程

$$\underline{(1-x^2)y''}\ \underline{-2xy'}+\underline{n(n-1)y}=0 \quad (n\text{为常数}) \qquad ④$$

解: $P(x)=\dfrac{-2x}{1-x^2},\ Q(x)=\dfrac{n(n-1)}{1-x^2}$ 都可在$(-1,1)$内展成幂级数, 故方程满足定理条件. 定理

因方程特点, 不用将 P, Q 进行展开

设方程的解为 $y=\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, 代入④:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2}-\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^k$$

$$-2\sum_{k=1}^{\infty} k\,a_k x^k+n(n-1)\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k=0$$

整理后得:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\,(k+2)(k+1)\,a_{k+2}+(n-k)(n+k+1)\,a_k\,\right]x^k=0$$

比较系数, 得 $a_{k+2}=-\dfrac{(n-k)(n+k+1)}{(k+2)(k+1)}a_k \quad (k=0,1,\cdots)$

例如:

$$a_2=-\frac{n(n+1)}{2!}a_0 \qquad a_3=-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}a_1$$

$$a_4=-\frac{(n-2)(n+2)}{3\cdot 4}a_2=\frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}a_0$$

$$a_5=-\frac{(n-3)(n+4)}{4\cdot 5}a_3=\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}a_1$$

……

a_0, a_1 可以任意取, 于是得勒让德方程的通解:

$$y = a_0\left[1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 + \cdots\right]$$

$$+ a_1\left[x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \right.$$

$$\left. + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 + \cdots\right]$$

$$(-1 < x < 1)$$

上式中两个级数都在(−1, 1)内收敛, 它们是方程的两个线性无关特解.