

第二节

对坐标的曲线积分

- 一、对坐标的曲线积分的概念与性质
- 二、对坐标的曲线积分的计算法
- 三、两类曲线积分之间的联系

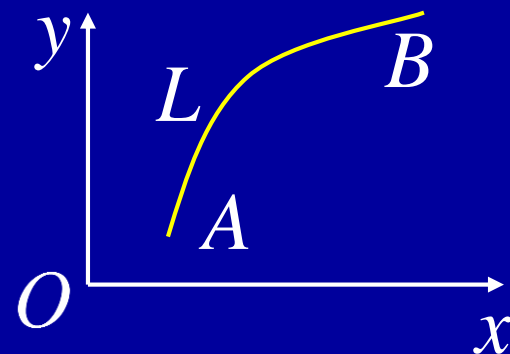


一、对坐标的曲线积分的概念与性质

1. 引例: 变力沿曲线所作的功.

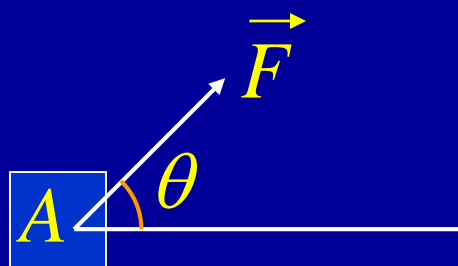
设一质点受如下变力作用

$$\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$



在 xOy 平面内从点 A 沿光滑曲线弧 L 移动到点 B , 求移动过程中变力所作的功 W .

常力沿直线所作的功


$$W = F|AB|\cos\theta$$
$$= \vec{F} \cdot \vec{AB}$$

解决办法:

“大化小”

“常代变”

“近似和”

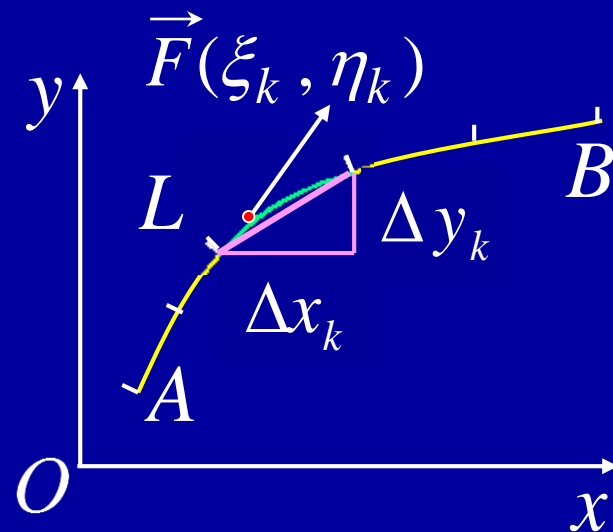
“取极限”



1) “大化小” .

把 L 分成 n 个小弧段, \vec{F} 沿 $\widehat{M_{k-1}M_k}$ 所做的功为 ΔW_k , 则

$$W = \sum_{k=1}^n \Delta W_k$$



2) “常代变”

有向小弧段 $\widehat{M_{k-1}M_k}$ 用有向线段 $\overrightarrow{M_{k-1}M_k} = (\Delta x_k, \Delta y_k)$ 近似代替, 在 $\widehat{M_{k-1}M_k}$ 上任取一点 (ξ_k, η_k) , 则有

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Delta W_k} &\approx \vec{F}(\xi_k, \eta_k) \cdot \overrightarrow{M_{k-1}M_k} \\ &= P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k \end{aligned}$$



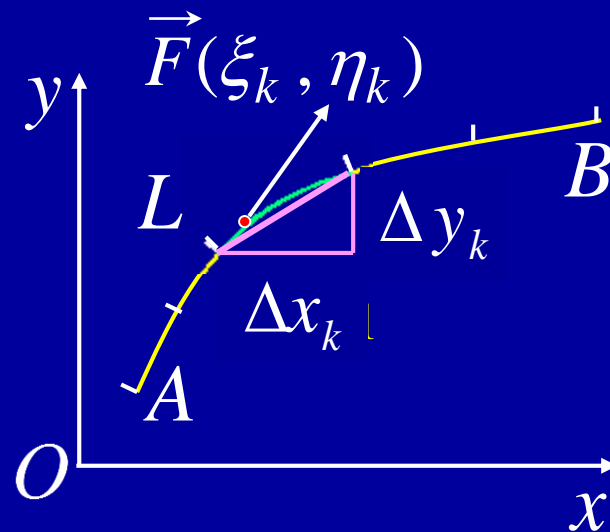
3) “近似和”

$$W \approx \sum_{k=1}^n [P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k]$$

4) “取极限”

$$W = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k]$$

(其中 λ 为 n 个小弧段的
最大长度)



2. 定义. 设 L 为 xOy 平面内从 A 到 B 的一条有向光滑弧, 在 L 上定义了一个向量函数

$$\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

若对 L 的任意分割和在局部弧段上任意取点, 极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k]$$

记作 $\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$

都存在, 则称此极限为函数 $\vec{F}(x, y)$ 在有向曲线弧 L 上对坐标的曲线积分, 或第二类曲线积分. 其中, $P(x, y)$, $Q(x, y)$ 称为被积函数, L 称为积分弧段或积分曲线.



$$\int_L P(x, y) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k,$$

称为对 x 的曲线积分;

$$\int_L Q(x, y) dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k,$$

称为对 y 的曲线积分.

若记 $\overrightarrow{ds} = (dx, dy)$, 对坐标的曲线积分也可写作

$$\int_L \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

类似地, 若 Γ 为空间曲线弧, 记 $\overrightarrow{ds} = (dx, dy, dz)$

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

$$\int_{\Gamma} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_{\Gamma} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$



3. 性质

(1) 若 L 可分成 k 条有向光滑曲线弧 L_i ($i = 1, \cdots, k$),

$$\begin{aligned} \text{则 } \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy \\ = \sum_{i=1}^k \int_{L_i} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \end{aligned}$$

(2) 用 L^- 表示 L 的反向弧, 则

$$\int_{L^-} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = -\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

说明:

- 对坐标的曲线积分必须注意积分弧段的**方向**!
- 定积分是第二类曲线积分的特例.



二、对坐标的曲线积分的计算法

定理: 设 $P(x, y), Q(x, y)$ 在有向光滑弧 L 上有定义且连续, L 的参数方程为 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad t: \alpha \rightarrow \beta$, 则曲线积分存在, 且有

$$\begin{aligned} & \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \{ P[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)] \psi'(t) \} dt \end{aligned}$$

证明: 下面先证

$$\int_L P(x, y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} P[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t) dt$$



根据定义 $\int_L P(x, y)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i$

设分点 x_i 对应参数 t_i , 点 (ξ_i, η_i) 对应参数 τ_i , 由于

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\tau'_i) \Delta t_i$$

$$\therefore \int_L P(x, y)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P[\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)] \varphi'(\tau'_i) \Delta t_i$$

↓ 因为 L 为光滑弧, 所以 $\varphi'(t)$ 连续

$$\begin{aligned} &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P[\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)] \varphi'(\tau_i) \Delta t_i \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} P[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t) dt \end{aligned}$$

同理可证 $\int_L Q(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q[\varphi(t), \psi(t)] \psi'(t) dt$



特别是, 如果 L 的方程为 $y = \psi(x)$, $x: a \rightarrow b$, 则

$$\begin{aligned} \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy \\ = \int_a^b \{ P[x, \psi(x)] + Q[x, \psi(x)] \psi'(x) \} dx \end{aligned}$$

对空间光滑曲线弧 $\Gamma: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases} \quad t: \alpha \rightarrow \beta$, 类似有

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \\ = \int_{\alpha}^{\beta} \{ P[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)] \varphi'(t) \\ + Q[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)] \psi'(t) \\ + R[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)] \omega'(t) \} dt \end{aligned}$$



例1. 计算 $\int_L xy dx$, 其中 L 为沿抛物线 $y^2 = x$ 从点 $A(1, -1)$ 到 $B(1, 1)$ 的一段.

解法1 取 x 为参数, 则 $L: \widehat{AO} \cup \widehat{OB}$

$$\widehat{AO}: y = -\sqrt{x}, \quad x: 1 \rightarrow 0$$

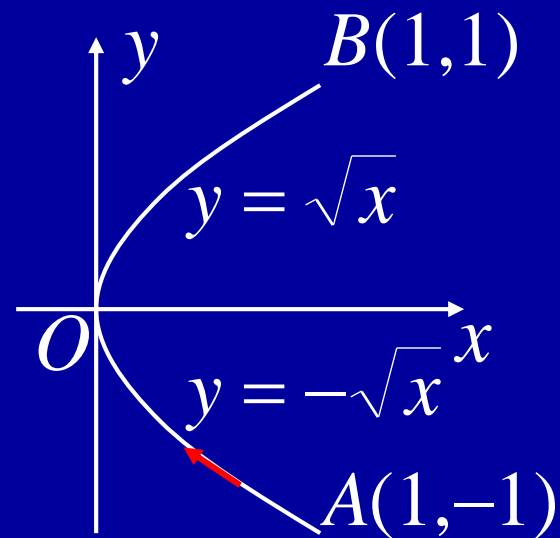
$$\widehat{OB}: y = \sqrt{x}, \quad x: 0 \rightarrow 1$$

$$\therefore \int_L xy dx = \int_{\widehat{AO}} xy dx + \int_{\widehat{OB}} xy dx$$

$$= \int_1^0 x(-\sqrt{x}) dx + \int_0^1 x\sqrt{x} dx = 2 \int_0^1 x^{3/2} dx = \frac{4}{5}$$

解法2 取 y 为参数, 则 $L: x = y^2, \quad y: -1 \rightarrow 1$

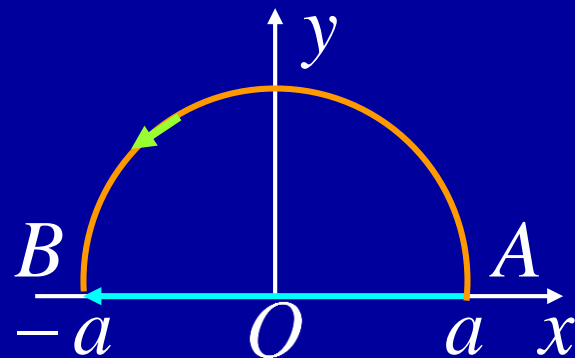
$$\therefore \int_L xy dx = \int_{-1}^1 y^2 y(y^2)' dy = 2 \int_{-1}^1 y^4 dy = \frac{4}{5}$$



例2. 计算 $\int_L y^2 dx$, 其中 L 为

(1) 半径为 a 圆心在 origin 的上半圆周, 方向为逆时针方向;

(2) 从点 $A(a, 0)$ 沿 x 轴到点 $B(-a, 0)$.



解: (1) 取 L 的参数方程为 $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $t: 0 \rightarrow \pi$

则
$$\int_L y^2 dx = \int_0^\pi a^2 \sin^2 t \cdot (-a \sin t) dt$$

$$= -2a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^3 t dt = -2a^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = -\frac{4}{3}a^3$$

(2) 取 L 的方程为 $y = 0$, $x: a \rightarrow -a$, 则

$$\int_L y^2 dx = \int_a^{-a} 0 dx = 0$$

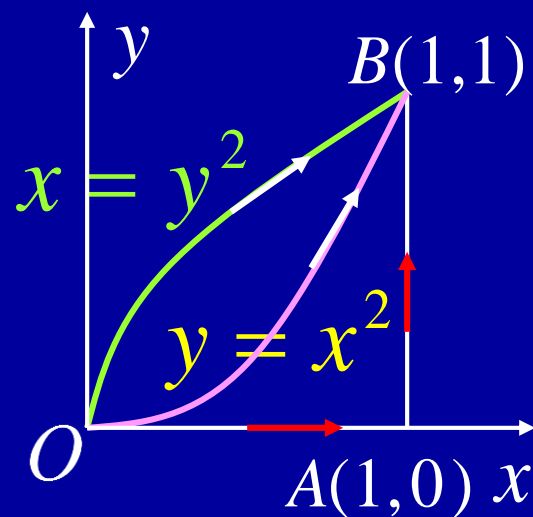


例3. 计算 $\int_L 2xydx + x^2 dy$, 其中 L 为

(1) 抛物线 $L: y = x^2, x: 0 \rightarrow 1$;

(2) 抛物线 $L: x = y^2, y: 0 \rightarrow 1$;

(3) 有向折线 $L: \overline{OA} \cup \overline{AB}$.



解: (1) 原式 $= \int_0^1 (2x \cdot x^2 + x^2 \cdot 2x) dx = 4 \int_0^1 x^3 dx = 1$

(2) 原式 $= \int_0^1 (2y^2 y \cdot 2y + y^4) dy = 5 \int_0^1 y^4 dy = 1$

(3) 原式 $= \int_{\overline{OA}} 2xy dx + x^2 dy + \int_{\overline{AB}} 2xy dx + x^2 dy$
 $= 0 + \int_0^1 dy = 1$

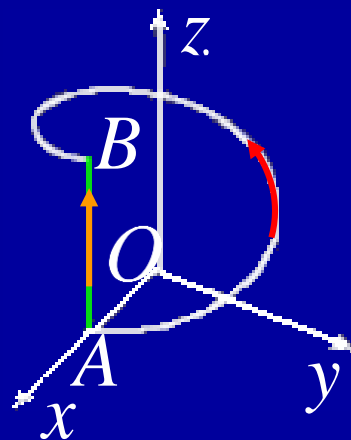


例4. 设在力场 $\vec{F} = (y, -x, z)$ 作用下, 质点由 $A(R, 0, 0)$ 沿 Γ 移动到 $B(R, 0, 2\pi k)$, 其中 Γ 为

(1) $x = R \cos t, y = R \sin t, z = kt$;

(2) \overline{AB} .

试求力场对质点所作的功.



解: (1)
$$W = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_{\Gamma} y dx - x dy + z dz$$
$$= \int_0^{2\pi} (-R^2 + k^2 t) dt = 2\pi(\pi k^2 - R^2)$$

(2) Γ 的参数方程为 $x = R, y = 0, z = t, t: 0 \rightarrow 2\pi k$

$$W = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_{\overline{AB}} y dx - x dy + z dz = \int_0^{2\pi k} t dt$$
$$= 2\pi^2 k^2$$



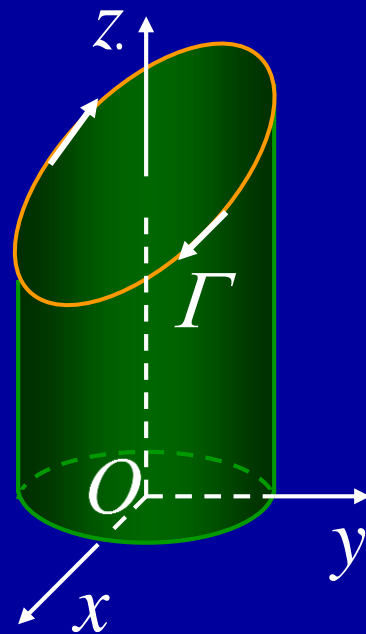
例5. 求 $I = \int_{\Gamma} (z - y) dx + (x - z) dy + (x - y) dz$, 其中

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}, \text{ 从 } z \text{ 轴正向看为顺时针方向.}$$

解: 取 Γ 的参数方程

$$x = \cos t, y = \sin t, z = 2 - \cos t + \sin t \quad (t: 2\pi \rightarrow 0)$$

$$\begin{aligned} \therefore I &= - \int_0^{2\pi} [(2 - \cos t)(-\sin t) \\ &\quad + (-2 + 2\cos t - \sin t)\cos t \\ &\quad + (\cos t - \sin t)(\cos t + \sin t)] dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - 4\cos^2 t) dt = -2\pi \end{aligned}$$



三、两类曲线积分之间的联系

设有向光滑弧 L 以弧长为参数 的参数方程为

$$x = x(s), y = y(s) \quad (0 \leq s \leq l)$$

已知 L 切向量的方向余弦为 $\cos \alpha = \frac{dx}{ds}$, $\cos \beta = \frac{dy}{ds}$

则两类曲线积分有如下联系

$$\begin{aligned} & \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy \\ &= \int_0^l \left\{ P[x(s), y(s)] \frac{dx}{ds} + Q[x(s), y(s)] \frac{dy}{ds} \right\} ds \\ &= \int_0^l \{ P[x(s), y(s)] \cos \alpha + Q[x(s), y(s)] \cos \beta \} ds \\ &= \int_L \{ P(x, y) \cos \alpha + Q(x, y) \cos \beta \} ds \end{aligned}$$



类似地, 在空间曲线 Γ 上的两类曲线积分的联系是

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz \\ = \int_{\Gamma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds \end{aligned}$$

令 $\vec{A} = (P, Q, R), \vec{ds} = (dx, dy, dz)$
 $\vec{t} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$

$$\int_{\Gamma} \vec{A} \cdot \vec{ds} = \int_{\Gamma} \vec{A} \cdot \vec{t} ds$$

记 \vec{A} 在 \vec{t} 上的投影为 A_t

$$\int_{\Gamma} \vec{A} \cdot \vec{ds} = \int_{\Gamma} A_t ds$$



例6. 设 $M = \max \sqrt{P^2 + Q^2}$, $P(x, y), Q(x, y)$ 在 L 上连续, 曲线段 L 的长度为 s , 证明

$$\left| \int_L P dx + Q dy \right| \leq M s$$

证: $\left| \int_L P dx + Q dy \right| = \left| \int_L (P \cos \alpha + Q \cos \beta) ds \right|$
 $\leq \int_L |P \cos \alpha + Q \cos \beta| ds$

设 $\vec{A} = (P, Q), \vec{t} = (\cos \alpha, \cos \beta)$

二者夹角为 θ

$$= \int_L |\vec{A} \cdot \vec{t}| ds = \int_L |\vec{A}| |\cos \theta| ds \leq M s$$

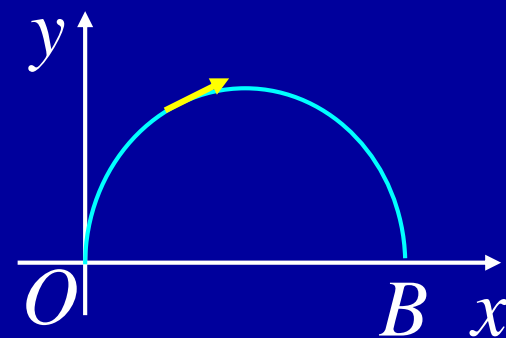
说明: 上述证法可推广到三维的第二类曲线积分.



例7. 将积分 $\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ 化为对弧长的积分, 其中 L 沿上半圆周 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 从 $O(0,0)$ 到 $B(2,0)$.

解: $y = \sqrt{2x - x^2}, dy = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} dx$

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} dx$$



$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds} = \sqrt{2x-x^2}, \quad \cos \beta = \frac{dy}{ds} = 1-x$$

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy =$$

$$\int_L [P(x, y)\sqrt{2x-x^2} + Q(x, y)(1-x)] ds$$



内容小结

1. 定义 $\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k]$$

2. 性质

(1) L 可分成 k 条有向光滑曲线弧 L_i ($i=1, \dots, k$)

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \sum_{i=1}^k \int_{L_i} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

(2) L^- 表示 L 的反向弧

$$\int_{L^-} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = -\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

对坐标的曲线积分必须注意**积分弧段的方向!**



3. 计算

- 对有向光滑弧 $L: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, t: \alpha \rightarrow \beta$

$$\begin{aligned} & \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \{ P[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)]\psi'(t) \} dt \end{aligned}$$

- 对有向光滑弧 $L: y = \psi(x), x: a \rightarrow b$

$$\begin{aligned} & \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy \\ &= \int_a^b \{ P[x, \psi(x)] + Q[x, \psi(x)]\psi'(x) \} dx \end{aligned}$$



- 对空间有向光滑弧 Γ :
$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \quad t: \alpha \rightarrow \beta \\ z = \omega(t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \\ = \int_{\alpha}^{\beta} \{ P[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)] \varphi'(t) \\ + Q[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)] \psi'(t) \\ + R[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)] \omega'(t) \} dt \end{aligned}$$

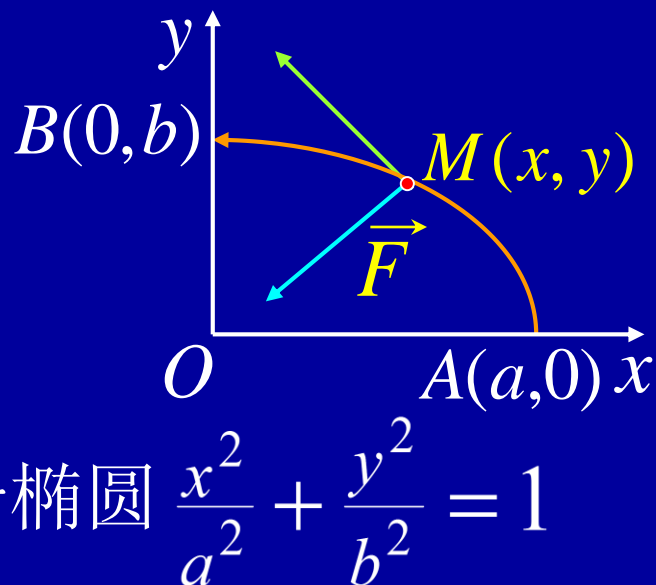
4. 两类曲线积分的联系

$$\begin{aligned} \int_L P dx + Q dy &= \int_L \{ P \cos \alpha + Q \cos \beta \} ds \\ \int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz \\ &= \int_{\Gamma} \{ P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma \} ds \end{aligned}$$



思考与练习

1. 设一个质点在 $M(x, y)$ 处受力 \vec{F} 的作用, \vec{F} 的大小与 M 到原点 O 的距离成正比, \vec{F} 的方向恒指向原点, 此质点由点 $A(a, 0)$ 沿椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 沿逆时针移动到 $B(0, b)$, 求力 \vec{F} 所作的功.



提示: $\overrightarrow{OM} = (x, y), \vec{F} = -k(x, y)$

$$W = \int_{\widehat{AB}} -kx dx - ky dy$$

$$\widehat{AB}: \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad t: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad (\text{解见 P196 例5})$$

思考: 若题中 \vec{F} 的方向改为与 \overrightarrow{OM} 垂直且与 y 轴夹锐角, 则 $\vec{F} = \underline{k(-y, x)}$



2. 已知 Γ 为折线 $ABCOA$ (如图), 计算

$$I = \oint_{\Gamma} dx - dy + y dz$$

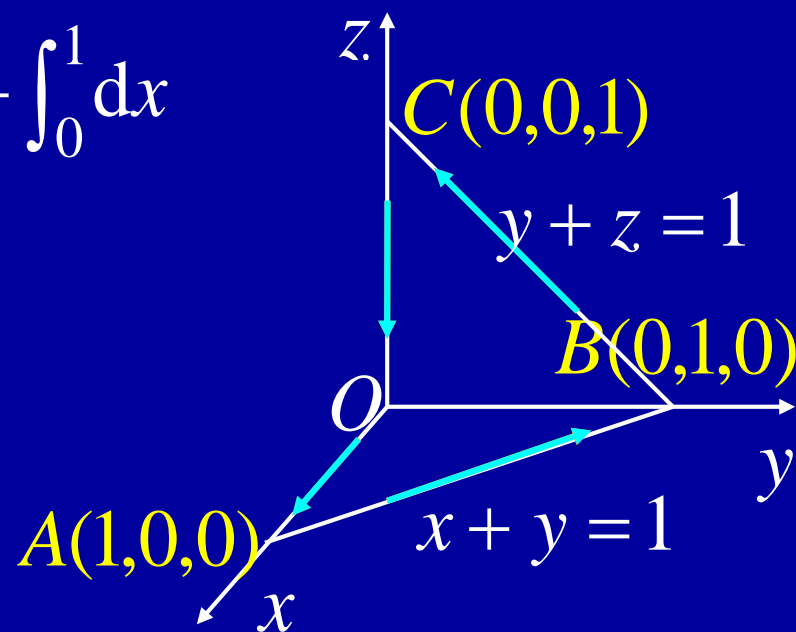
提示:

$$I = \int_{\overrightarrow{AB}} dx - dy + y dz + 0 + \int_{\overrightarrow{OA}} dx$$

$$= \int_1^0 2dx - \int_1^0 (1+y)dy + \int_0^1 dx$$

$$= -2 + \left(1 + \frac{1}{2}\right) + 1$$

$$= \frac{1}{2}$$



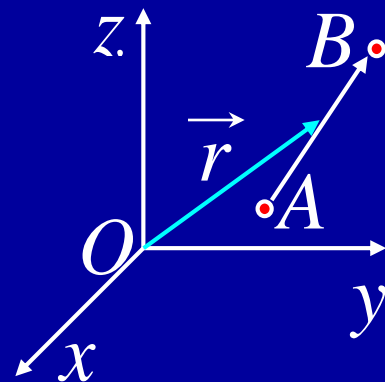
备用题 1. 一质点在力场 \vec{F} 作用下由点 $A(2,2,1)$ 沿直线移动到 $B(4,4,2)$, 求 \vec{F} 所作的功 W . 已知 \vec{F} 的方向指向坐标原点, 其大小与作用点到 xOy 面的距离成反比.

$$\text{解: } \vec{F} = \frac{k}{|z|} (-\vec{r}^0) = -\frac{k}{|z|} \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$W = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{s} = -k \int_L \frac{x dx + y dy + z dz}{|z| \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$L: \begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = 2t + 2 \\ z = t + 1 \end{cases} \quad (t: 0 \rightarrow 1)$$

$$= -k \int_0^1 \frac{3 dt}{t+1} = -3k \ln 2$$



$$\vec{AB} = (2, 2, 1)$$



2. 设曲线 C 为曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与曲面 $x^2 + y^2 = ax$ ($z \geq 0, a > 0$) 的交线, 从 Ox 轴正向看去为逆时针方向,

(1) 写出曲线 C 的参数方程;

(2) 计算曲线积分 $\int_C y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$.

解: (1)
$$\begin{cases} (x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = (\frac{a}{2})^2 \\ z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos t \\ y = \frac{a}{2} \sin t \\ z = a \sin \frac{t}{2} \end{cases} \quad t: 0 \rightarrow 2\pi$$



$$(2) \text{ 原式} = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{a^3}{8} \sin^3 t + \frac{a^3}{2} \sin^2 \frac{t}{2} \cos t + \frac{a^3}{8} (1 + \cos t)^2 \cos \frac{t}{2} \right] dt$$

令 $u = \pi - t$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left[-\frac{a^3}{8} \sin^3 u - \frac{a^3}{2} \cos^2 \frac{u}{2} \cos u + \frac{a^3}{8} (1 - \cos u)^2 \sin \frac{u}{2} \right] du$$

$$= -2 \cdot \frac{a^3}{2} \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos u}{2} \cos u \, du$$

利用“偶倍奇零”

$$= -\frac{\pi}{4} a^3$$

