

第六节

方向导数与梯度

一、方向导数

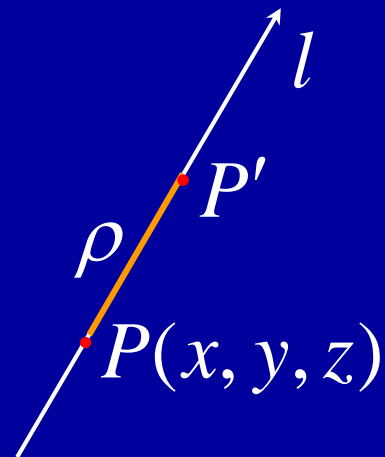
二、梯度

三、物理意义



一、方向导数

定义: 若函数 $f(x, y, z)$ 在点 $P(x, y, z)$ 处沿方向 l (方向角为 α, β, γ) 存在下列极限:



$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\rho}$$

$$= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\rho} \quad \text{记作} \underline{\underline{\frac{\partial f}{\partial l}}}$$

$$\left(\begin{array}{l} \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}, \\ \Delta x = \rho \cos \alpha, \Delta y = \rho \cos \beta, \Delta z = \rho \cos \gamma \end{array} \right)$$

则称 $\frac{\partial f}{\partial l}$ 为函数在点 P 处沿方向 l 的**方向导数**.



定理：若函数 $f(x, y, z)$ 在点 $P(x, y, z)$ 处可微，
则函数在该点**沿任意方向** l 的方向导数存在，且有

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma$$

其中 α, β, γ 为 l 的方向角.

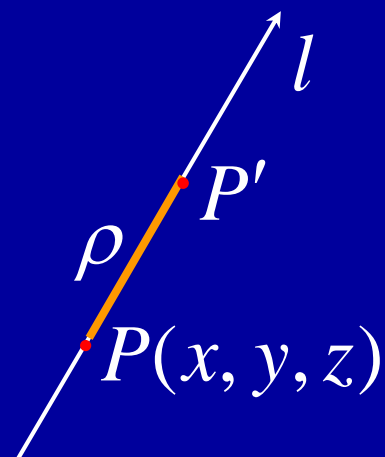
证明：由函数 $f(x, y, z)$ 在点 P 可微，得

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z + o(\rho)$$

$$= \rho \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma \right) + o(\rho)$$

故

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\rho} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma$$

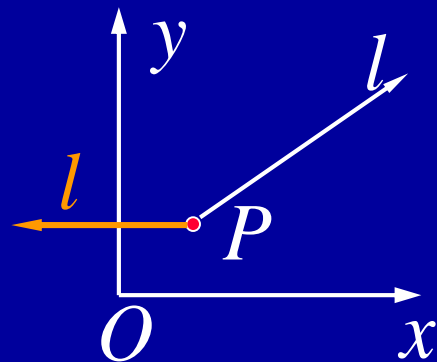


对于二元函数 $f(x, y)$, 在点 $P(x, y)$ 处沿方向 l (方向角为 α, β) 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\rho}$$

$$= f_x(x, y) \cos \alpha + f_y(x, y) \cos \beta$$

$$(\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, \Delta x = \rho \cos \alpha, \Delta y = \rho \cos \beta)$$



特别:

• 当 l 与 x 轴同向 ($\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}$) 时, 有 $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}$

• 当 l 与 x 轴反向 ($\alpha = \pi, \beta = \frac{\pi}{2}$) 时, 有 $\frac{\partial f}{\partial l} = -\frac{\partial f}{\partial x}$



例1. 求函数 $u = x^2 yz$ 在点 $P(1, 1, 1)$ 沿向量 $\vec{l} = (2, -1, 3)$ 的方向导数.

解: 向量 \vec{l} 的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{14}}, \quad \cos \beta = \frac{-1}{\sqrt{14}}, \quad \cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_P &= \left(2xyz \cdot \frac{2}{\sqrt{14}} - x^2 z \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} + x^2 y \cdot \frac{3}{\sqrt{14}} \right) \Big|_{(1, 1, 1)} \\ &= \frac{6}{\sqrt{14}} \end{aligned}$$



例2. 求函数 $z = 3x^2y - y^2$ 在点 $P(2, 3)$ 沿曲线 $y = x^2 - 1$ 朝 x 增大方向的方向导数.

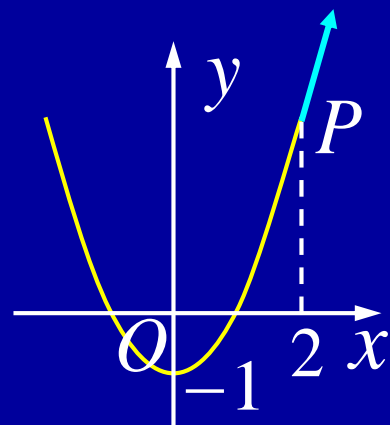
解: 将已知曲线用参数方程表示为

$$\begin{cases} x = x \\ y = x^2 - 1 \end{cases}$$

它在点 P 的切向量为 $(1, 2x)|_{x=2} = (1, 4)$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}, \quad \cos \beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial l} \right|_P = \left[6xy \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} + (3x^2 - 2y) \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} \right] \Big|_{(2,3)} = \frac{60}{\sqrt{17}}$$



例3. 设 \vec{n} 是曲面 $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$ 在点 $P(1, 1, 1)$ 处指向外侧的法向量, 求函数 $u = \frac{\sqrt{6x^2 + 8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿方向 \vec{n} 的方向导数.

解: $\vec{n} = (4x, 6y, 2z)|_P = 2(2, 3, 1)$
方向余弦为 $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{14}}, \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{14}}, \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{14}}$

而 $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_P = \left. \frac{6x}{z\sqrt{6x^2 + 8y^2}} \right|_P = \frac{6}{\sqrt{14}}$

同理得 $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_P = \frac{8}{\sqrt{14}}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_P = -\sqrt{14}$

$$\therefore \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_P = \frac{1}{14} (6 \times 2 + 8 \times 3 - 14 \times 1) = \frac{11}{7}$$



二、梯度

方向导数公式 $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma$

令向量 $\vec{G} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$

$$\vec{l} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \vec{G} \cdot \vec{l} = |\vec{G}| \cos(\widehat{\vec{G}, \vec{l}}) \quad (|\vec{l}| = 1)$$

当 \vec{l} 与 \vec{G} 方向一致时, 方向导数取最大值:

$$\max \left(\frac{\partial f}{\partial l} \right) = |\vec{G}|$$

这说明 \vec{G} : $\begin{cases} \text{方向: } f \text{ 变化率最大的方向} \\ \text{模: } f \text{ 的最大变化率之值} \end{cases}$



1. 定义

$$\vec{G} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

向量 \vec{G} 称为函数 $f(P)$ 在点 P 处的梯度 (gradient), 记作 **grad** $f(P)$, 或 $\nabla f(P)$, 即

$$\mathbf{grad} f(P) = \nabla f(P) = (f_x(P), f_y(P), f_z(P))$$

其中 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ 称为**向量微分算子**或 **Nabla算子**.

同样可定义二元函数 $f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 处的梯度

$$\mathbf{grad} f = \nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y))$$

说明: 函数的**方向导数**为梯度在该方向上的投影:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \mathbf{grad} f \cdot \vec{e}_l \quad (\vec{e}_l \text{ 为方向 } \vec{l} \text{ 上的单位向量})$$



2. 梯度的几何意义

对函数 $z = f(x, y)$, 曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ z = c \end{cases}$ 在 xOy 面上的投影

$L^* : f(x, y) = c$ 称为函数 f 的**等值线**或**等高线**. 举例

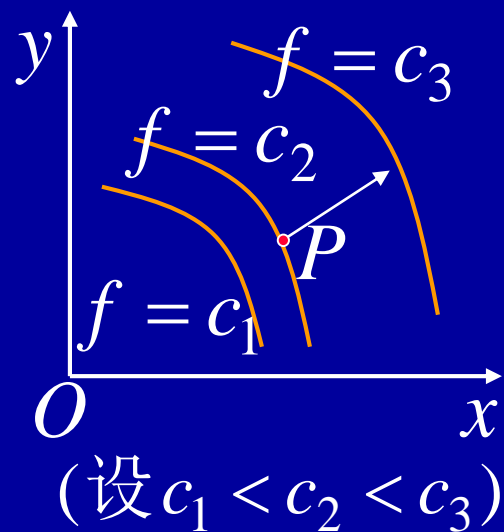
设 f_x, f_y 不同时为零, 则 L^* 上点 P 处的**法向量**为

$$(f_x, f_y)|_P = \mathbf{grad} f|_P = \nabla f|_P$$

函数在一点的梯度垂直于该点等值线, 指向函数增大的方向.

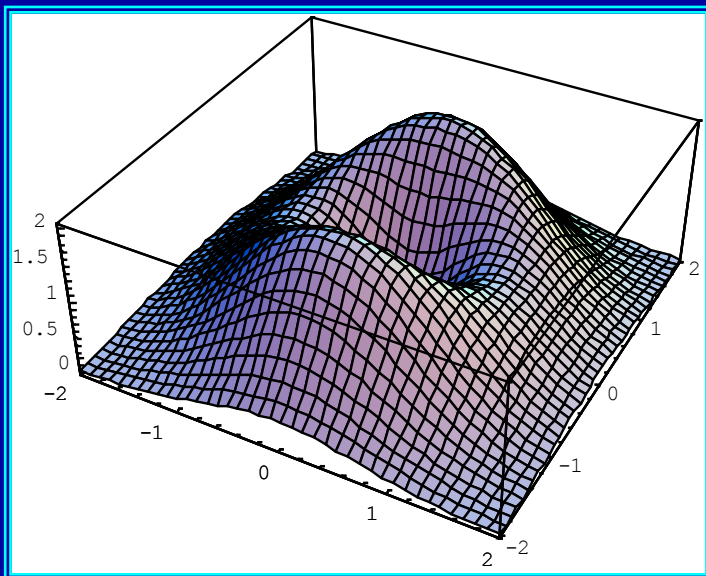
同样, $f(x, y, z) = c$ 称为 $u = f(x, y, z)$ 的等值面(等量面). 当其各偏导数不同

时为零时, 其上点 P 处的法向量为 $\mathbf{grad} f|_P = \nabla f|_P$.

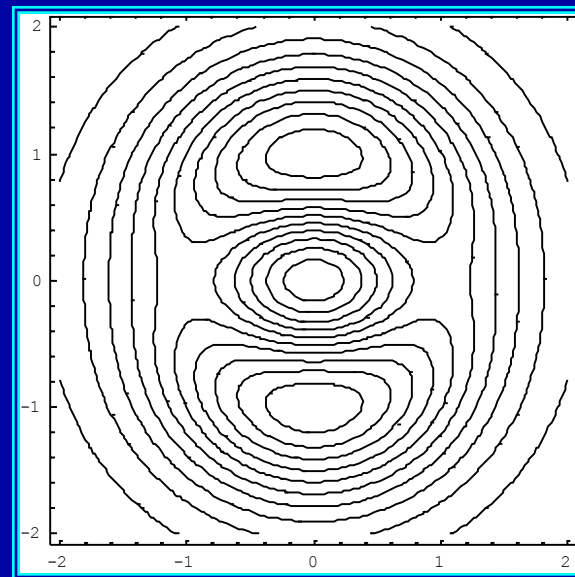


等高线图举例

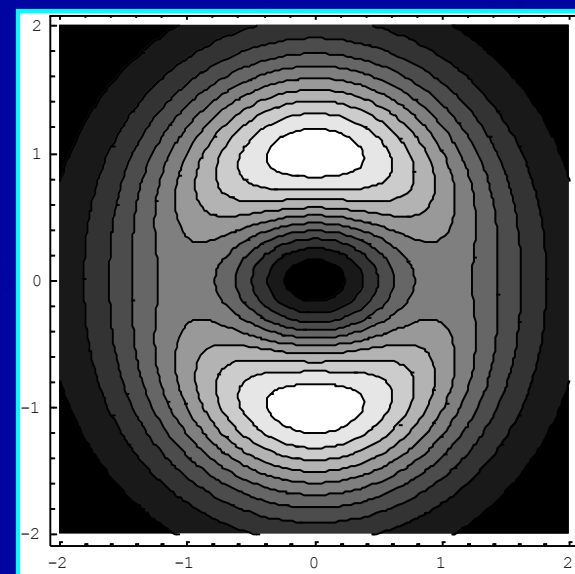
$$z = (x^2 + 2y^2)e^{1-x^2-y^2}$$



这是利用数学软件 $Mathematica$ 绘制的曲面及其等高线图，带阴影的等高线图中，亮度越大对应曲面上点的位置越高



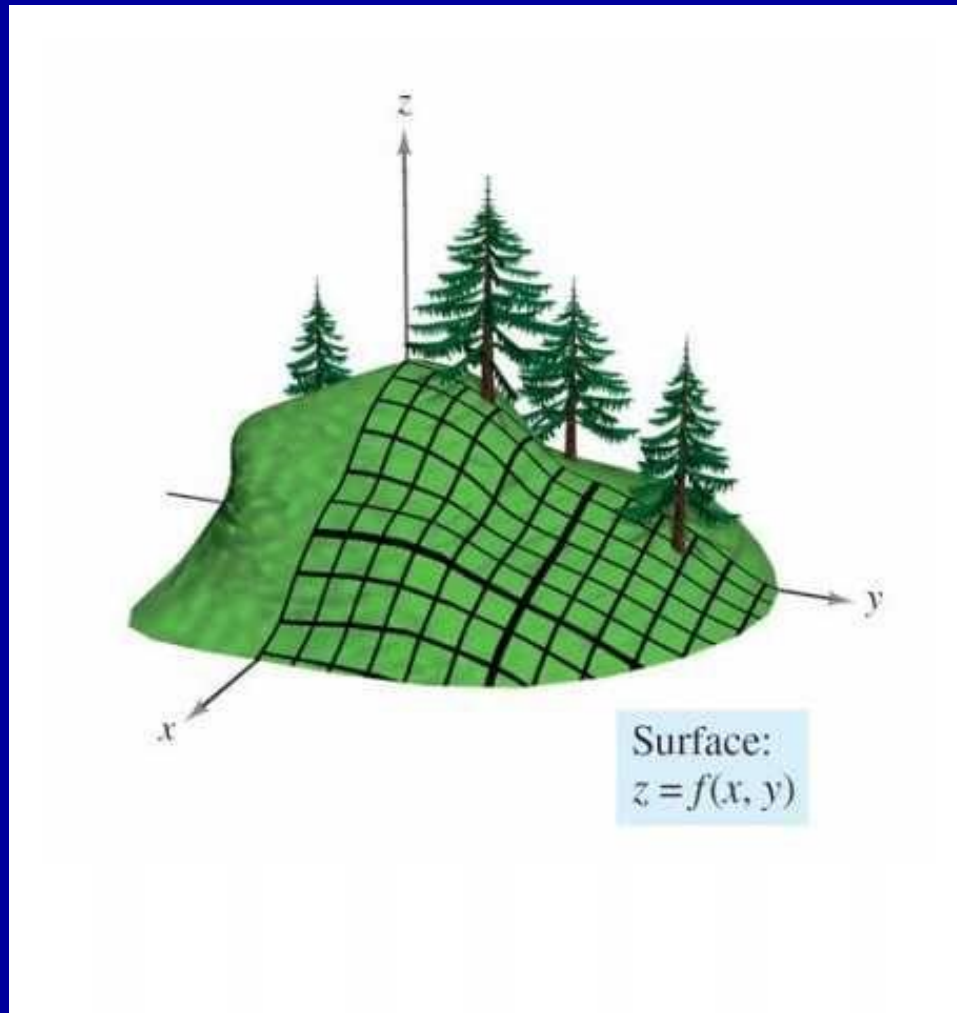
等高线图



带阴影的等高线图



梯度速降



例4. 设函数 $f(x, y, z) = x^2 + y^z$

- (1) 求等值面 $f(x, y, z) = 2$ 在点 $P(1, 1, 1)$ 处的切平面方程.
(2) 求函数 f 在点 $P(1, 1, 1)$ 沿增加最快方向的方向导数.

解: (1) 点 P 处切平面的法向量为

$$\vec{n} = \nabla f(P) = (2x, zy^{z-1}, y^z \ln y)|_P = (2, 1, 0)$$

故所求切平面方程为 $2(x-1) + (y-1) + 0 \cdot (z-1) = 0$
即 $2x + y - 3 = 0$

(2) 函数 f 在点 P 处增加最快的方向为

$$\vec{n} = \nabla f(P) = (2, 1, 0)$$

沿此方向的方向导数为 $\left. \frac{\partial f}{\partial n} \right|_P = |\nabla f(P)| = \sqrt{5}$

思考: f 在点 P 处沿什么方向变化率为0?

注意:

对三元函数,
与 $\nabla f(P)$
垂直的方向
有无穷多



3. 梯度的基本运算公式

$$(1) \text{grad } c = \vec{0} \text{ 或 } \nabla c = \vec{0} \quad (c \text{ 为常数})$$

$$(2) \text{grad}(cu) = c \text{grad } u \text{ 或 } \nabla(cu) = c \nabla u$$

$$(3) \text{grad}(u \pm v) = \text{grad } u \pm \text{grad } v \text{ 或 } \nabla(u \pm v) = \nabla u \pm \nabla v$$

$$(4) \text{grad}(uv) = u \text{grad } v + v \text{grad } u$$

$$\text{或 } \nabla(uv) = u \nabla v + v \nabla u$$

$$(5) \text{grad}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \text{grad } u - u \text{grad } v}{v^2} \text{ 或 } \nabla\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \nabla u - u \nabla v}{v^2}$$

$$(6) \text{grad } f(u) = f'(u) \text{grad } u \text{ 或 } \nabla f(u) = f'(u) \nabla u$$



例5. 设 $f(r)$ 可导, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 为点 $P(x, y, z)$ 处矢径 \vec{r} 的模, 试证 $\mathbf{grad} f(r) = f'(r) \vec{e}_r$.

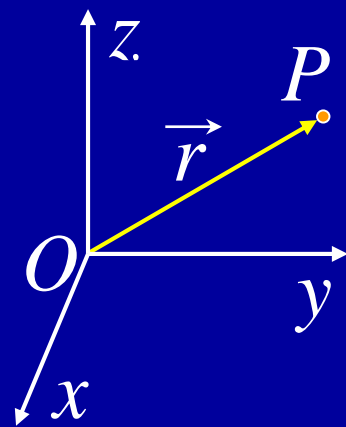
证: $\because \frac{\partial f(r)}{\partial x} = f'(r) \frac{\partial r}{\partial x} = f'(r) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = f'(r) \frac{x}{r}$

$$\frac{\partial f(r)}{\partial y} = f'(r) \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial f(r)}{\partial z} = f'(r) \frac{z}{r}$$

$$\therefore \mathbf{grad} f(r) = \frac{\partial f(r)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f(r)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f(r)}{\partial z} \vec{k}$$

$$= f'(r) \frac{1}{r} (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k})$$

$$= f'(r) \frac{1}{r} \vec{r} = f'(r) \vec{e}_r$$



*三、物理意义

函数 \longrightarrow 场
(物理量的分布)

数量场 (数性函数)
如: 温度场, 电势场等

向量场 (矢性函数)
如: 力场, 速度场等

可微函数 $f(P)$ \longrightarrow **梯度场** $\text{grad } f(P)$
(势) (向量场)

注意: 任意一个向量场不一定是梯度场.



例6. 已知位于坐标原点的点电荷 q 在任意点 $P(x, y, z)$ 处所产生的电势为 $u = \frac{q}{4\pi\epsilon r}$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$), 试证

$$\mathbf{grad} u = -\vec{E} \quad (\text{场强 } \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \vec{e}_r)$$

证: 利用例5的结果 $\mathbf{grad} f(r) = f'(r) \vec{e}_r$

$$\mathbf{grad} u = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon r} \right)' \vec{e}_r = -\frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \vec{e}_r = -\vec{E}$$

这说明场强: 垂直于等势面,
且指向电势减少的方向.



内容小结

1. 方向导数

- 三元函数 $f(x, y, z)$ 在点 $P(x, y, z)$ 沿方向 l (方向角为 α, β, γ) 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma$$

- 二元函数 $f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 沿方向 l (方向角为 α, β) 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \alpha$$



2. 梯度

- 三元函数 $f(x, y, z)$ 在点 $P(x, y, z)$ 处的梯度为

$$\text{grad } f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

- 二元函数 $f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 处的梯度为

$$\text{grad } f = \nabla f = (f_x(x, y), f_y(x, y))$$

- 梯度的特点 $\left\{ \begin{array}{l} \text{方向: } f \text{ 变化率最大的方向} \\ \text{模: } f \text{ 的最大变化率之值} \end{array} \right.$

3. 关系

- 可微 \longleftrightarrow 方向导数存在 \longleftrightarrow 偏导数存在

- $\frac{\partial f}{\partial l} = \text{grad } f \cdot \vec{e}_l$ —— 梯度在方向 \vec{l} 上的投影.



备用题 1. 函数 $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ 在点 $M(1, 2, -2)$ 处的梯度 $\text{grad } u|_M = \frac{2}{9}(1, 2, -2)$

解: $\text{grad } u|_M = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) \Big|_{(1, 2, -2)}$

令 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{r^2} \cdot 2x$

注意 x, y, z 具有轮换对称性

$= \left(\frac{2x}{r^2}, \frac{2y}{r^2}, \frac{2z}{r^2} \right) \Big|_{(1, 2, -2)} = \frac{2}{9}(1, 2, -2)$



2. 函数 $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$ 在点 $A(1, 0, 1)$ 处沿点 A 指向 $B(3, -2, 2)$ 方向的方向导数是 $\frac{1}{2}$.

提示: $\vec{AB} = (2, -2, 1)$, 其单位向量为

$$\vec{l} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_A = \left. \frac{d \ln(x+1)}{dx} \right|_{x=1} = \frac{1}{2},$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_A = \left. \frac{d \ln(1 + \sqrt{y^2 + 1})}{dy} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_A = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma = \frac{1}{2}$$

