第四节

曲面及其方程

一、曲面方程的概念

二、旋转曲面

三、柱面

四、二次曲面

一、曲面方程的概念

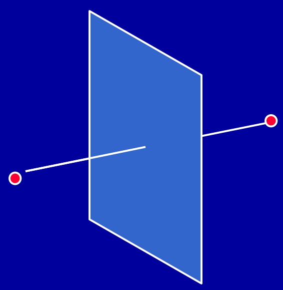
引例: 求到两定点$A(1,2,3)$ 和$B(2,-1,4)$等距离的点的轨迹方程.

解: 设轨迹上的动点为$M(x,y,z)$, 则$|AM|=|BM|$, 即

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}$$
$$=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2}$$

化简得 $2x-6y+2z-7=0$

说明: 动点轨迹为线段 AB 的垂直平分面.



显然在此平面上的点的坐标都满足此方程, 不在此平面上的点的坐标不满足此方程.

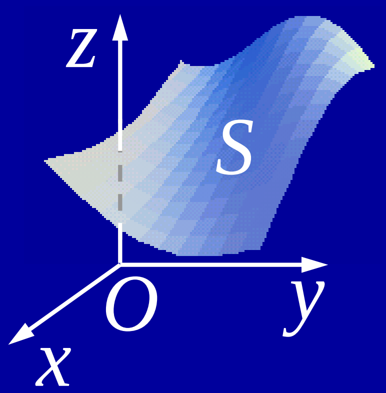
定义1. 如果曲面 S 与方程 $F(x, y, z) = 0$ 有下述关系:

(1) 曲面 S 上的任意点的坐标都满足此方程

(2) 不在曲面 S 上的点的坐标不满足此方程

则 $F(x, y, z) = 0$ 叫做**曲面 S 的方程**,

曲面 S 叫做方程 $F(x, y, z) = 0$ 的**图形**.



两个基本问题 :

(1) 已知一曲面作为点的几何轨迹时, 求曲面方程.

(2) 已知方程时 , 研究它所表示的几何形状 (必要时需作图).

例1. 求动点到定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 距离为 R 的轨迹方程.

解: 设轨迹上动点为 $M(x, y, z)$, 依题意 $|M_0M| = R$

即 $$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = R$$

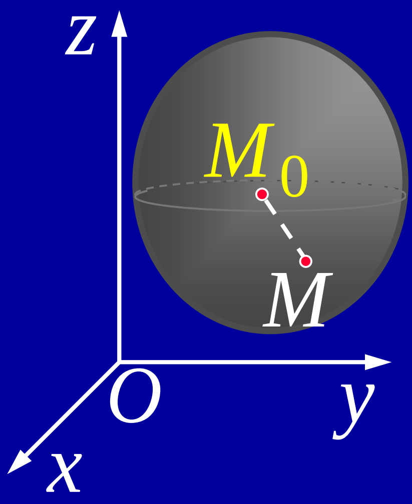
故所求方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2$$

特别, 当 M_0 在原点时, 球面方程为

$$x^2+y^2+z^2 = R^2$$

$z = \pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 表示上(下)球面 .



例2. 研究方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y=0$ 表示怎样的曲面.

解: 配方得 $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=5$

可见此方程表示一个球面

球心为 $M_0(1,-2,0)$, 半径为 $\sqrt{5}$

说明: 如下形式的三元二次方程 $(A\neq 0)$

$$A(x^2+y^2+z^2)+Dx+Ey+Fz+G=0$$

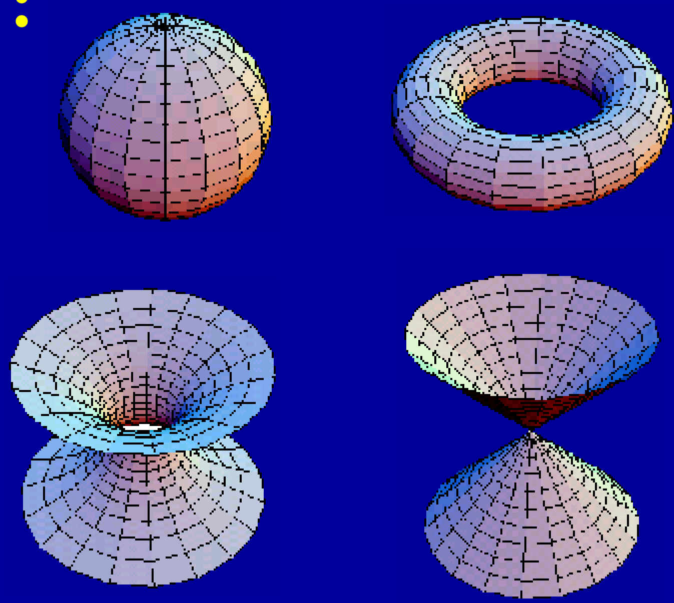
都可通过配方研究它的图形. 其图形可能是

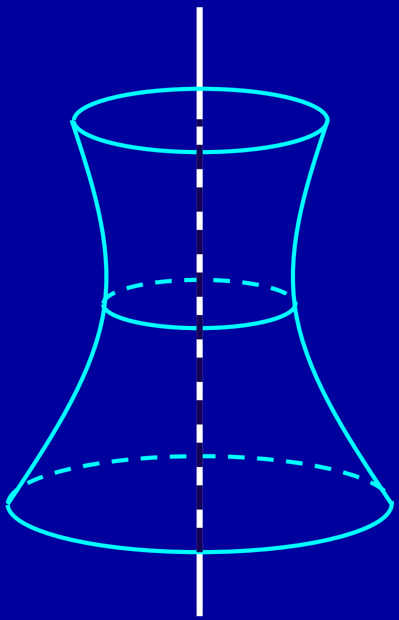
一个**球面**， 或**点**， 或**虚轨迹**.

二、旋转曲面

定义2. 一条平面曲线 绕其平面上一条**定直线**旋转一周 所形成的曲面叫做**旋转曲面**. 该定直线称为**旋转轴** ，该平面曲线称为**母线**。

例如：





建立yOz面上曲线C绕 z 轴旋转所成曲面的方程:

给定 yOz 面上曲线 C: $f(y,z)=0$

若点 $M_1(0,y_1,z_1)\in C$, 则有

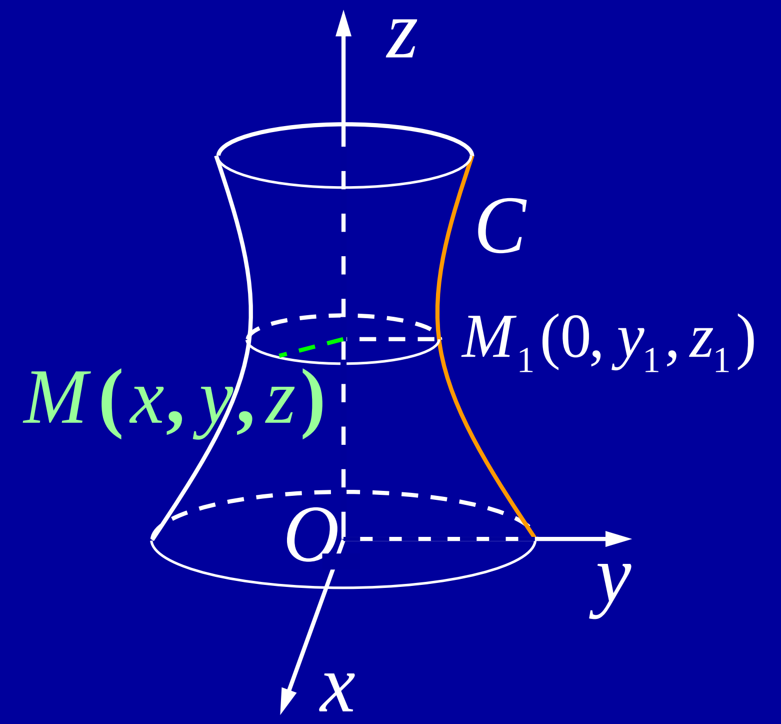
$$f(y_1,z_1)=0$$

当绕 z 轴旋转时，该点转到 $M(x,y,z)$, 则有

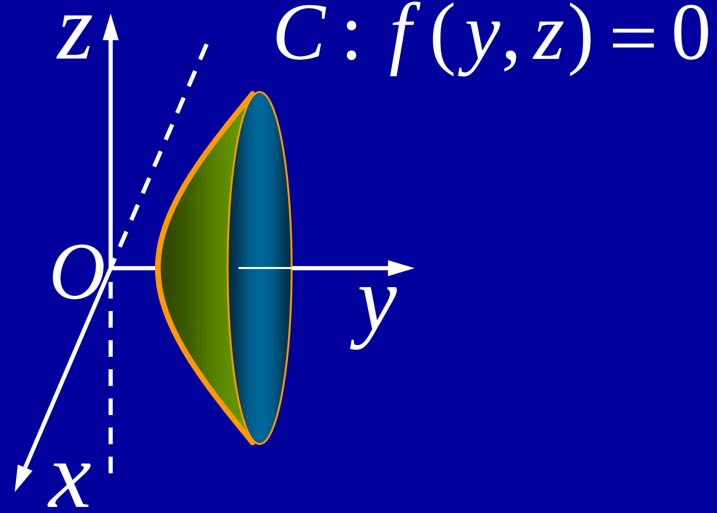
$$z=z_1,\quad \sqrt{x^2+y^2}=|y_1|$$

故旋转曲面方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$$



思考：当曲线 C 绕 y 轴旋转时，方程如何？



$$f(y, \pm\sqrt{x^2+z^2})=0$$

例3. 试建立顶点在原点, 旋转轴为z 轴, 半顶角为α的圆锥面方程.

解: 在yOz面上直线L 的方程为

$$z = y\cot\alpha$$

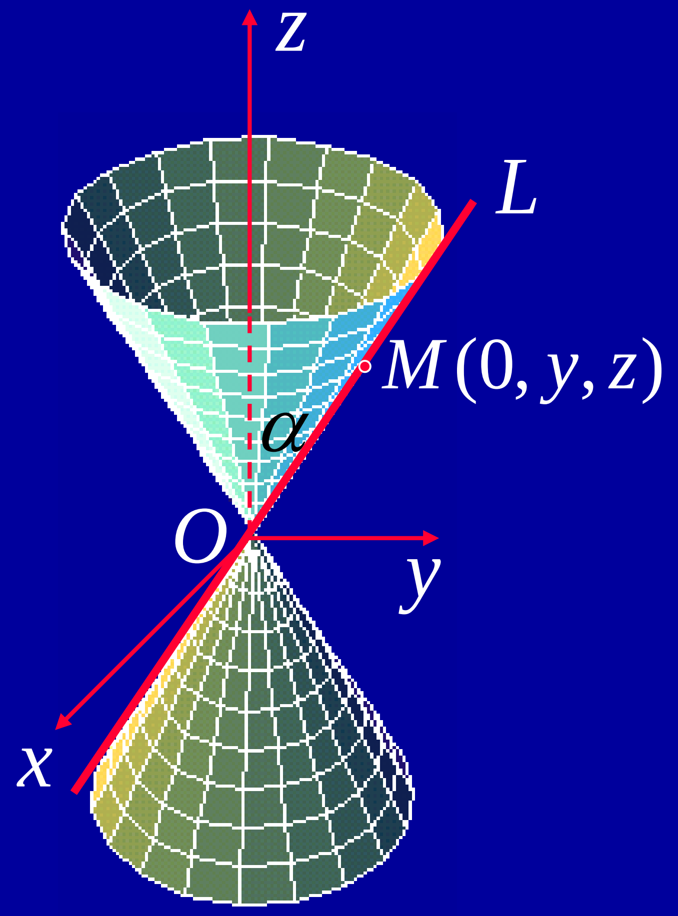
绕z 轴旋转时, 圆锥面的方程为

$$z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}\cot\alpha$$

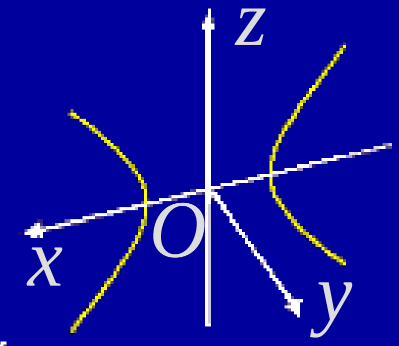
令 $a = \cot\alpha$

两边平方

$$z^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

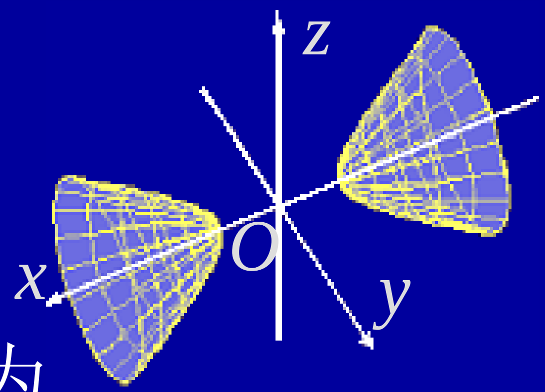


例4. 求坐标面 xOz 上的双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 分别绕 x 轴和 z 轴旋转一周所生成的旋转曲面方程.



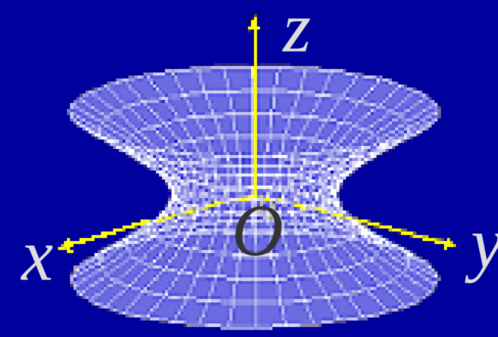
解: 绕 x 轴旋转所成曲面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$$



绕 z 轴旋转所成曲面方程为

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



这两种曲面都叫做旋转双曲面.

三、柱面

引例. 分析方程 $x^2+y^2=R^2$

表示怎样的曲面 .

解: 在 xOy 面上, $x^2+y^2=R^2$ 表示圆C,

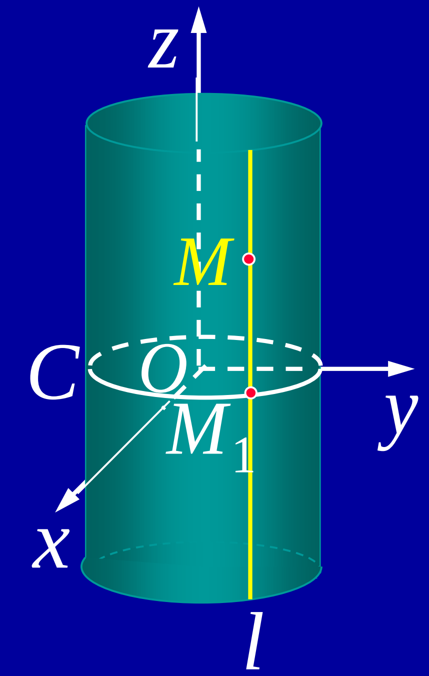
在圆C上任取一点$M_1(x,y,0)$, 过此点作

平行 z 轴的直线 l , 对任意 z , 点$M(x,y,z)$

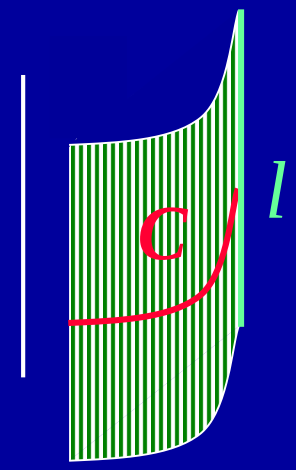
的坐标也满足方程 $x^2+y^2=R^2$

沿圆周C平行于 z 轴的一切直线所形成的曲面称为**圆柱面.** 其上所有点的坐标都满足此方程, 故在空间

$x^2+y^2=R^2$ 表示**圆柱面**



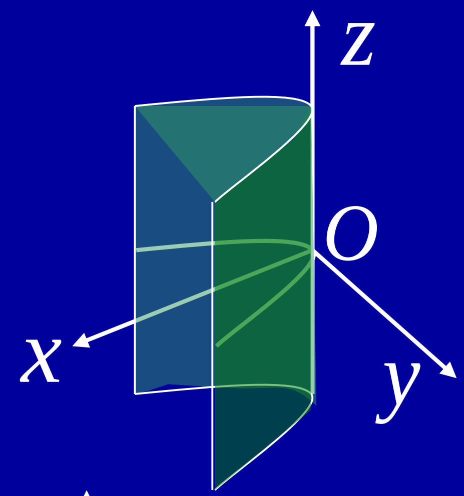
定义3. 平行定直线并沿定曲线 C 移动的直线 l 形成的轨迹叫做**柱面**. C 叫做**准线**, l 叫做**母线**.



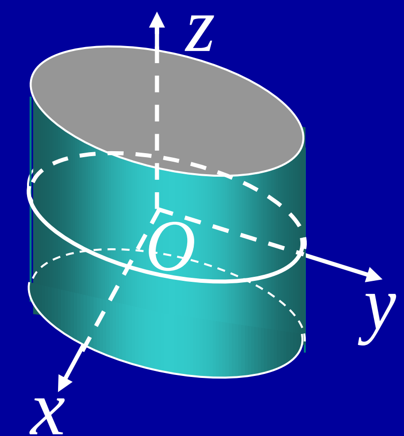
- $y^2 = 2x$ 表示**抛物柱面**,

  母线平行于 z 轴;

  准线为 xOy 面上的抛物线.

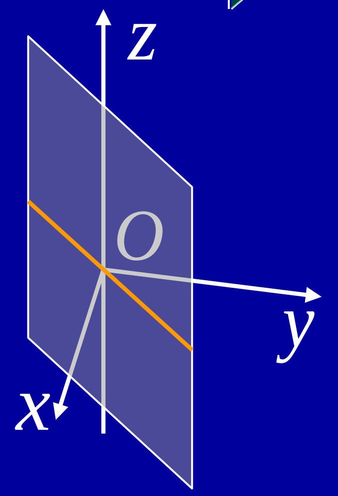


- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 表示母线平行于 z 轴的**椭圆柱面**.



- $x - y = 0$ 表示母线平行于 z 轴的**平面**.

  (且 z 轴在平面上)



一般地, 在三维空间

方程 $F(x,y)=0$ 表示柱面,

母线 平行于 z 轴;

准线 xOy 面上的曲线 l_1.

方程 $G(y,z)=0$ 表示 柱面,

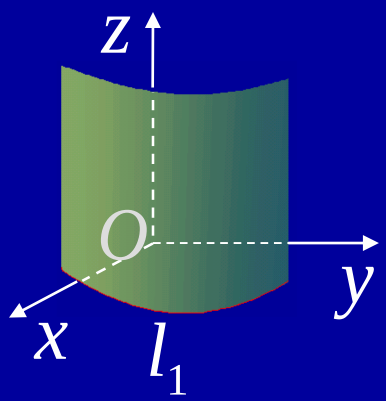
母线 平行于 x 轴;

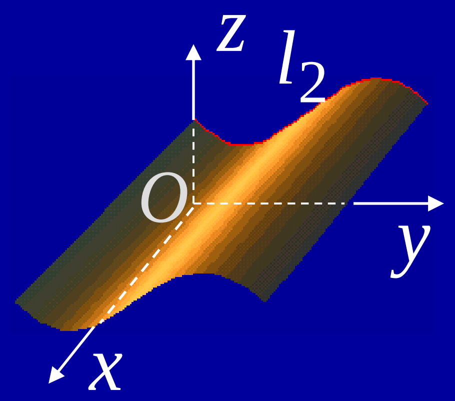
准线 yOz 面上的曲线 l_2.

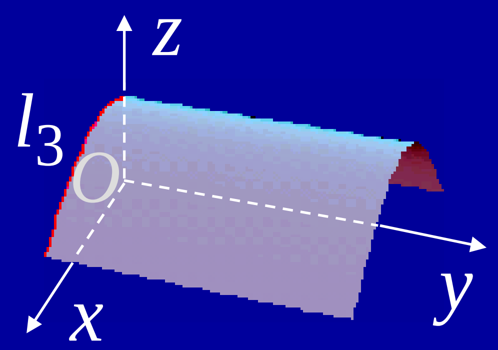
方程 $H(z,x)=0$ 表示柱面,

母线 平行于 y 轴;

准线 xOz 面上的曲线 l_3.







四、二次曲面

三元二次方程

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

(二次项系数不全为 0)

的图形统称为**二次曲面**. 其基本类型有:

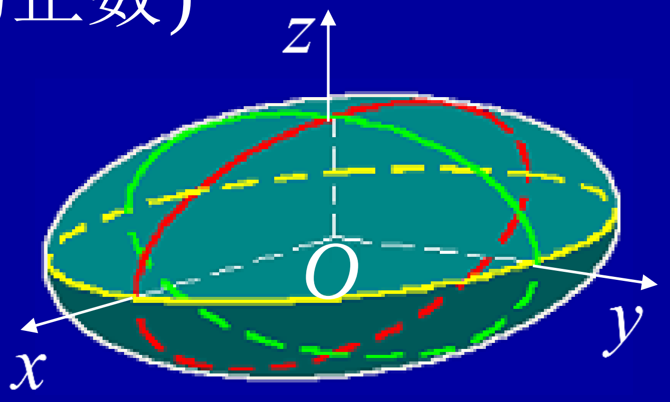
椭球面、抛物面、双曲面、锥面

适当选取直角坐标系可得它们的标准方程,下面仅就几种常见标准型的特点进行介绍 .

研究二次曲面特性的基本方法: **截痕法**

1. 椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,b,c\text{为正数})$$



(1)范围：

$$|x|\le a,\quad |y|\le b,\quad |z|\le c$$

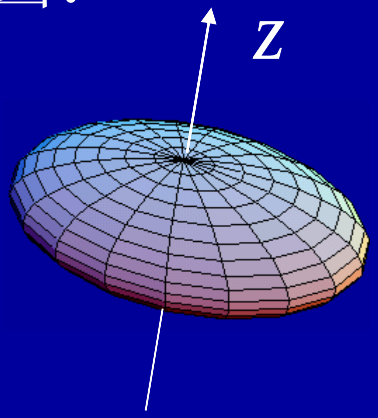
(2)与坐标面的交线：椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,b,c\text{为正数})$$

(3) 截痕：与 $z=z_1\ (|z_1|<c)$的交线为椭圆：

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2-z_1{}^2)}+\dfrac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(c^2-z_1{}^2)}=1 \\ z=z_1 \end{cases}$$



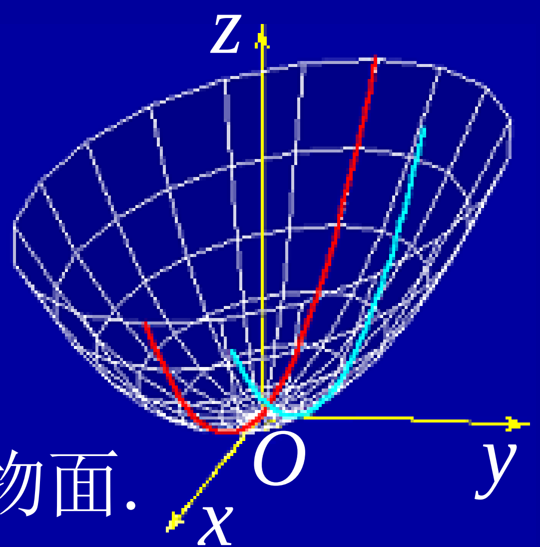
同样 $y=y_1\,(|y_1|\le b)$ 及 $x=x_1\,(|x_1|\le a)$的截痕也为椭圆.

(4) 当 $a=b$ 时为旋转椭球面; 当$a=b=c$ 时为球面.

2. 抛物面

(1) 椭圆抛物面

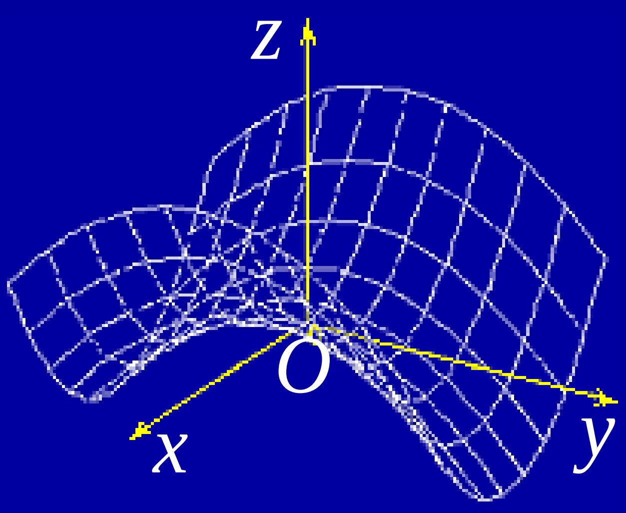
$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z \quad (p\,,q \text{ 同号})$$



特别, 当 $p=q$ 时为绕 z 轴的旋转抛物面.

(2) 双曲抛物面（鞍形曲面）

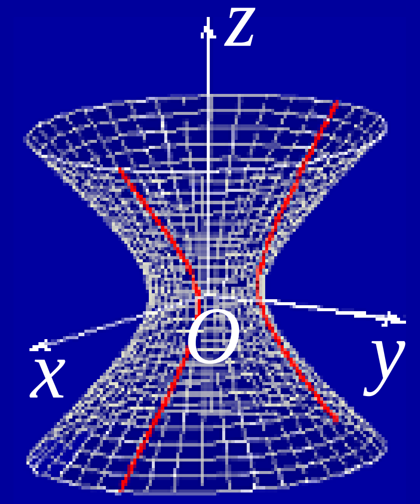
$$-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z \quad (p\,,q \text{ 同号})$$



3. 双曲面

(1) 单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,b,c\text{ 为正数})$$



平面 $z=z_1$ 上的截痕为 椭圆.

平面 $y=y_1$ 上的截痕情况:

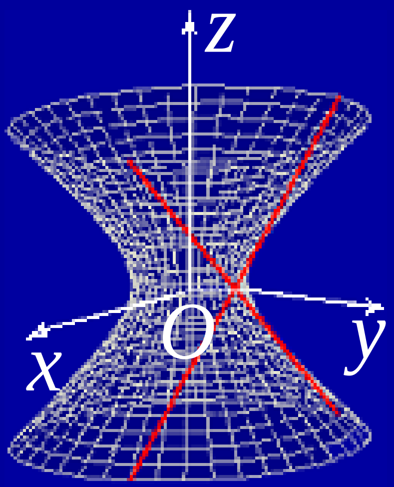
1) $|y_1|<b$ 时, 截痕为双曲线:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{y_1^{\,2}}{b^2} \\ y=y_1 \end{cases}$$

(实轴平行于x 轴;
虚轴平行于z 轴)

2) $|y_1| = b$ 时, 截痕为相交直线:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} \pm \dfrac{z}{c} = 0 \\ y = b\,(\text{或}\, -b) \end{cases}$$

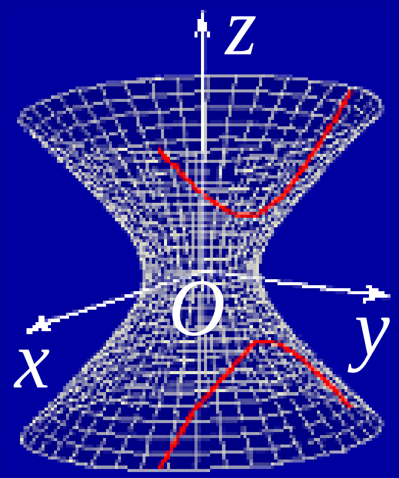


3) $|y_1| > b$时, 截痕为双曲线:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = \underline{1 - \dfrac{y_1^{\,2}}{b^2}} \quad < 0 \\ y = y_1 \end{cases}$$

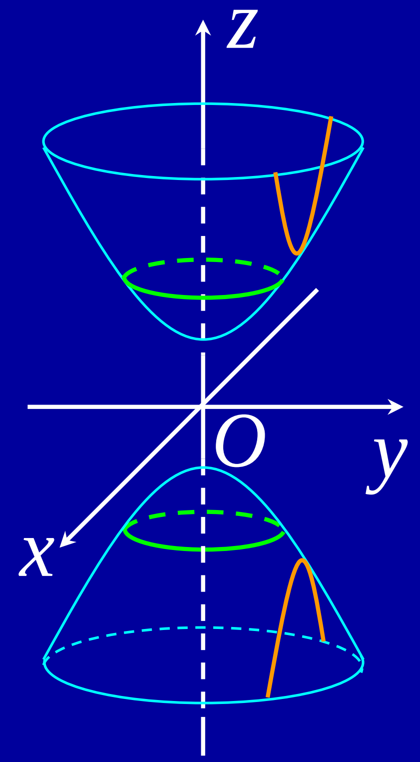
(实轴平行于z 轴;

虚轴平行于x 轴)



(2) 双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad (a,b,c\text{ 为正数})$$



平面 $y=y_1$ 上的截痕为 双曲线

平面 $x=x_1$ 上的截痕为 双曲线

平面 $z=z_1\ (|z_1|>c)$上的截痕为 椭圆

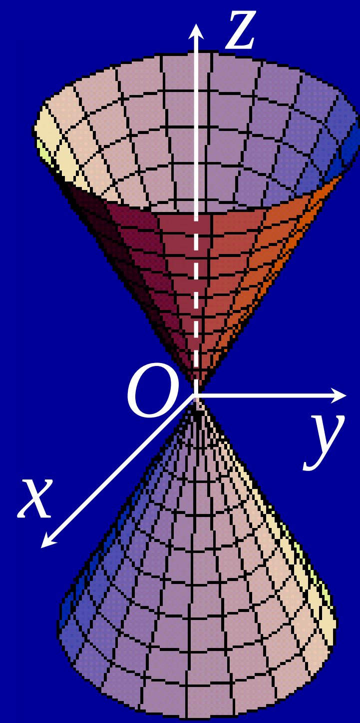
注意单叶双曲面与双叶双曲面的区别:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\begin{cases}1 & \text{单叶双曲面}\\ -1 & \text{双叶双曲面}\end{cases}$$

图形

4. 椭圆锥面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2 \quad (a, b \text{ 为正数})$$



在平面 $z=t$ 上的截痕为椭圆

$$\frac{x^2}{(at)^2}+\frac{y^2}{(bt)^2}=1,\ z=t \quad ①$$

在平面 $x=0$ 或 $y=0$ 上的截痕为过原点的两直线 .

可以证明, 椭圆①上任一点与原点的连线均在曲面上.

(椭圆锥面也可由圆锥面经 x 或 y 方向的伸缩变换得到)

内容小结

1. 空间曲面 $\longleftrightarrow$ 三元方程 $F(x, y, z)=0$

- 球面 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$
- 旋转曲面

如, 曲线 $\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴的旋转曲面:

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2}\ , z)=0$$

- 柱面

如,曲面 $F(x, y)=0$ 表示母线平行 z 轴的柱面.

又如,椭圆柱面, 双曲柱面, 抛物柱面等 .

2. 二次曲面 $\longleftrightarrow$ 三元二次方程

- 椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$
- 抛物面: $(p,q$同号$)$

椭圆抛物面 $\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z$

双曲抛物面 $-\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z$

- 双曲面: 单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

双叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$

- 椭圆锥面: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2$

思考与练习

1. 指出下列方程的图形:

方　程	平面解析几何中	空间解析几何中
$x=5$	平行于 y 轴的直线	平行于 yOz 面的平面
$x^2+y^2=9$	圆心在(0,0) 半径为 3 的圆	以 z 轴为中心轴的圆柱面
$y=x+1$	斜率为1的直线	平行于 z 轴的平面

2.课后P303第8题，答案

在 xOy 面上

$$\begin{cases} (1)\ \text{椭圆}\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1\ \text{绕}\ x\ \text{轴旋转一周;} \\ (2)\ \text{双曲线}\ x^2-\dfrac{y^2}{4}=1\ \text{绕}\ y\ \text{轴旋转一周;} \\ (3)\ \text{双曲线}\ x^2-y^2=1\ \text{绕}\ x\ \text{轴旋转一周;} \end{cases}$$

(4) 在 yOz 面上,直线 $z=y+a$ 绕 z 轴旋转一周.