

第三节

全微分

一元函数 $y = f(x)$ 的微分

$$\Delta y = \underline{A\Delta x + o(\Delta x)}$$

$$dy = f'(x)\Delta x \xrightarrow{* \text{应用}} \begin{cases} \text{近似计算} \\ \text{估计误差} \end{cases}$$

本节内容：

- 一、全微分的定义
- *二、全微分在近似计算中的应用



一、全微分的定义

定义：如果函数 $z = f(x, y)$ 在定义域 D 的内点 (x, y) 处全增量 $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ 可表示成

$$\Delta z = A \Delta x + B \Delta y + o(\rho), \quad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

其中 A, B 不依赖于 $\Delta x, \Delta y$, 仅与 x, y 有关, 则称函数 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微, $A \Delta x + B \Delta y$ 称为函数 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 的全微分, 记作

$$dz = df = A \Delta x + B \Delta y$$

若函数在域 D 内各点都可微, 则称此函数在 D 内可微.



全微分的几何意义

$$z = f(x, y)$$

$$M(x_0, y_0, z_0)$$

$$N(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$$

$\Delta z = AN$ ：曲面坐标的增量

过点 M 的切平面：

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0 \quad \text{即:}$$

$$\begin{aligned} dz &= f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y \\ &= z - z_0 = AB \end{aligned}$$

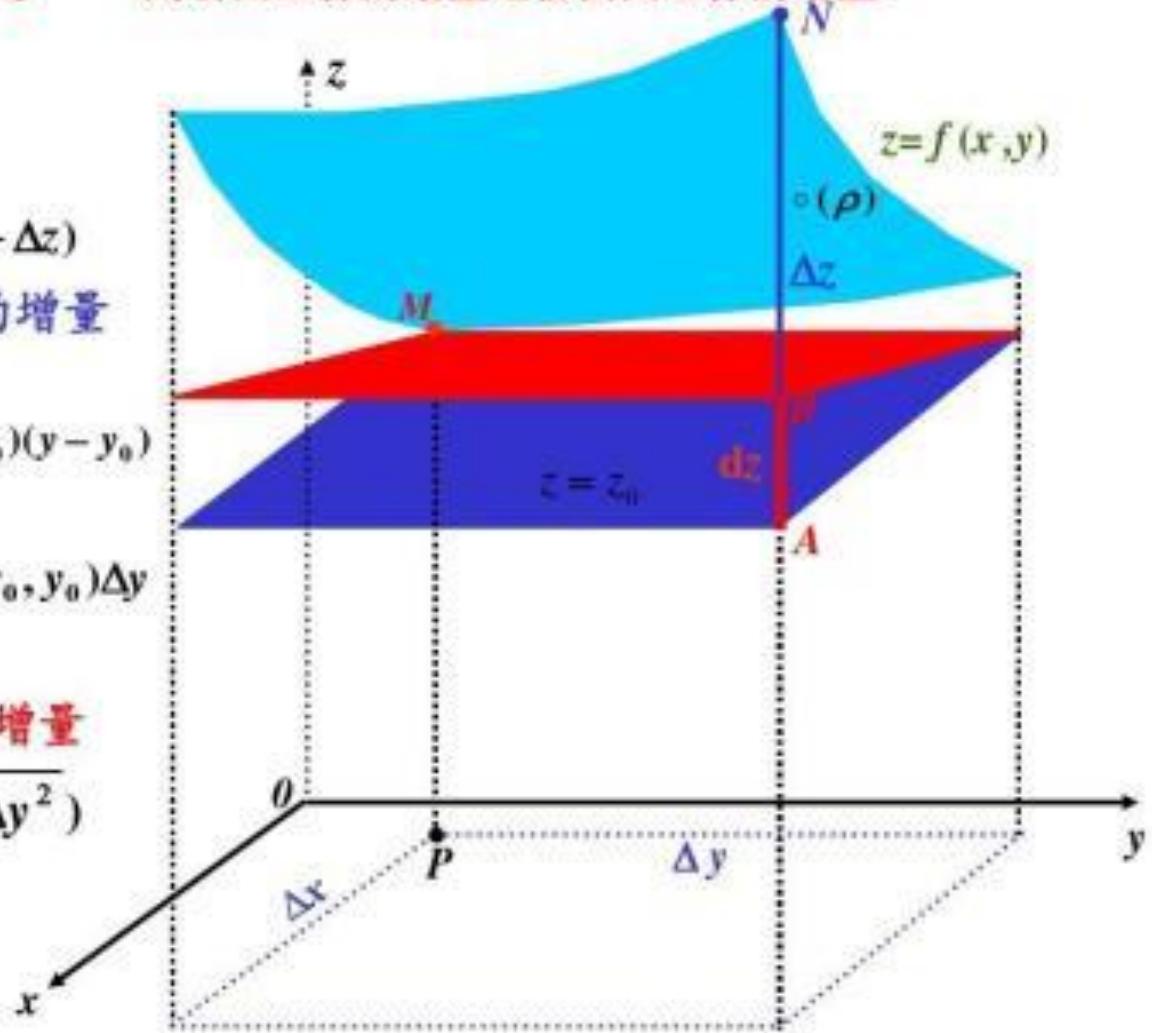
$dz = AB$ ：切面坐标的增量

$$\begin{aligned} \Delta z &= dz + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \\ &= AB + BN \end{aligned}$$

当 $\Delta x, \Delta y$ 很小时

$$\Delta z \approx dz$$

用切面坐标的增量近似曲面坐标的增量



当函数可微时：

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = \lim_{\rho \rightarrow 0} [(A\Delta x + B\Delta y) + o(\rho)] = 0$$

得

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y)$$

即

函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微

→ 函数在该点连续

下面两个定理给出了可微与偏导数的关系：

(1) 函数可微 → 偏导数存在（定理1 必要条件）

(2) 偏导数连续 → 函数可微（定理2 充分条件）



定理1(必要条件) 若函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微,

则该函数在该点的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 必存在, 且有

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$$

***证:** 因函数在点 (x, y) 可微, 故 $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$,
令 $\Delta y = 0$, 得到对 x 的偏增量

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = A\Delta x + o(|\Delta x|)$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A$$

同样可证 $\frac{\partial z}{\partial y} = B$, 因此有 $dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$



注意：定理1的逆定理不成立. 即：
偏导数存在函数不一定可微！

反例：函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

易知 $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, 但

$$\Delta z - [f_x(0, 0)\Delta x + f_y(0, 0)\Delta y] = \frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

$$\left| \frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \right| / \rho = \frac{\Delta x \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \not\rightarrow 0$$

$\neq o(\rho)$ 因此, 函数在点 $(0, 0)$ 不可微.



定理2 (充分条件) 若函数 $z = f(x, y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x, y) 连续, 则函数在该点可微分.

*证: $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$

$$= [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)]$$

$$+ [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]$$

$$= f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) \Delta x + f_y(x, y + \theta_2 \Delta y) \Delta y$$

$$(0 < \theta_1, \theta_2 < 1)$$

$$= [f_x(x, y) + \alpha] \Delta x + [f_y(x, y) + \beta] \Delta y$$

$$\left(\begin{array}{l} \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \alpha = 0, \quad \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \beta = 0 \end{array} \right)$$



$$\Delta z = \dots$$

$$= f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y$$

$$\left(\begin{array}{l} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \beta = 0 \\ \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \end{array} \right)$$

注意到 $\left| \frac{\alpha \Delta x + \beta \Delta y}{\rho} \right| \leq |\alpha| + |\beta|$, 故有

$$\Delta z = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + o(\rho)$$

所以函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微.



推广：类似可讨论三元及三元以上函数的可微性问题。
例如，三元函数 $u = f(x, y, z)$ 的全微分为

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z$$

习惯上把自变量的增量用微分表示，于是

$$du = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} dx}_{d_x u} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y} dy}_{d_y u} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial z} dz}_{d_z u}$$

$d_x u, d_y u, d_z u$ 称为**偏微分**. 故有下述叠加原理

$$du = d_x u + d_y u + d_z u$$



例1. 计算函数 $z = e^{xy}$ 在点 $(2,1)$ 处的全微分.

解: $\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy}$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(2,1)} = e^2, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(2,1)} = 2e^2$$

$$\therefore \left. dz \right|_{(2,1)} = e^2 dx + 2e^2 dy = e^2 (dx + 2dy)$$

例2. 计算函数 $u = x + \sin \frac{y}{2} + e^{yz}$ 的全微分.

解: $du = 1 \cdot dx + (\frac{1}{2} \cos \frac{y}{2} + ze^{yz}) dy + ye^{yz} dz$



*二、全微分在近似计算中的应用

1. 近似计算

由全微分定义

$$\Delta z = \underbrace{f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y}_{d z} + o(\rho)$$

可知当 $|\Delta x|$ 及 $|\Delta y|$ 较小时, 有近似等式:

$$\Delta z \approx d z = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y$$

(可用于误差分析或近似计算)

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y$$

(可用于近似计算)



例3. 有一圆柱体受压后发生形变, 半径由 20cm 增大到 20.05cm , 高度由100cm 减少到 99cm , 求此圆柱体体积的近似改变量.

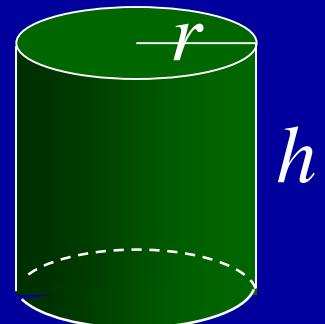
解: 已知 $V = \pi r^2 h$, 则

$$\Delta V \approx 2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h$$

$$\left| \begin{array}{l} r = 20, \quad h = 100, \\ \Delta r = 0.05, \quad \Delta h = -1 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}\Delta V &\approx 2\pi \times 20 \times 100 \times 0.05 + \pi \times 20^2 \times (-1) \\ &= -200\pi (\text{cm}^3)\end{aligned}$$

即受压后圆柱体体积减少了 $200\pi \text{ cm}^3$.



例4. 计算 $1.04^{2.02}$ 的近似值.

解: 设 $f(x, y) = x^y$, 则

$$f_x(x, y) = yx^{y-1}, \quad f_y(x, y) = x^y \ln x$$

取 $x = 1, y = 2, \Delta x = 0.04, \Delta y = 0.02$

则 $1.04^{2.02} = f(1.04, 2.02)$

$$\approx f(1, 2) + f_x(1, 2)\Delta x + f_y(1, 2)\Delta y$$

$$= 1 + 2 \times 0.04 + 0 \times 0.02 = 1.08$$



2. 误差估计

利用 $\Delta z \approx f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y$

令 $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ 分别表示 x, y, z 的绝对误差界, 则
 z 的绝对误差界约为

$$\delta_z = |f_x(x, y)|\delta_x + |f_y(x, y)|\delta_y$$

z 的相对误差界约为

$$\frac{\delta_z}{|z|} = \left| \frac{f_x(x, y)}{f(x, y)} \right| \delta_x + \left| \frac{f_y(x, y)}{f(x, y)} \right| \delta_y$$



特别注意

$$(1) \ z = x y \text{ 时, } \frac{\delta_z}{|z|} = \frac{\delta_x}{|x|} + \frac{\delta_y}{|y|}$$

$$(2) \ z = \frac{y}{x} \text{ 时,}$$

$$\frac{\delta_z}{|z|} = \left| \left(-\frac{y}{x^2} \right) \cdot \frac{x}{y} \right| \delta_x + \left| \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{y} \right| \delta_y = \frac{\delta_x}{|x|} + \frac{\delta_y}{|y|}$$

- 乘除后的结果相对误差变大
- 很小的数不能做除数

类似可以推广到三元及三元以上的情形.



例5. 利用公式 $S = \frac{1}{2}ab\sin C$ 计算三角形面积. 现测得

$$a = 12.5 \pm 0.01, b = 8.3 \pm 0.01, C = 30^\circ \pm 0.1^\circ$$

求计算面积时的绝对误差与相对误差.

$$\begin{aligned}\text{解: } \delta_S &= \left| \frac{\partial S}{\partial a} \right| \delta_a + \left| \frac{\partial S}{\partial b} \right| \delta_b + \left| \frac{\partial S}{\partial C} \right| \delta_C \\ &= \frac{1}{2} |b \sin C| \delta_a + \frac{1}{2} |a \sin C| \delta_b + \frac{1}{2} |abc \cos C| \delta_C\end{aligned}$$

$$a = 12.5, b = 8.3, C = 30^\circ, \delta_a = \delta_b = 0.01, \delta_C = \frac{\pi}{1800}$$

故绝对误差约为 $\delta_S = 0.13$

$$\text{又 } S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2} \times 12.5 \times 8.3 \times \sin 30^\circ \approx 25.94$$

$$\text{所以 } S \text{ 的相对误差约为 } \frac{\delta_S}{|S|} = \frac{0.13}{25.94} \approx 0.5\%$$



例6. 在直流电路中, 测得电压 $U = 24 \text{ V}$, 相对误差为 0.3% ; 测得电流 $I = 6 \text{ A}$, 相对误差为 0.5% , 求用欧姆定律计算电阻为 R 时产生的相对误差和绝对误差.

解: 由欧姆定律可知 $R = \frac{U}{I} = \frac{24}{6} = 4 (\Omega)$

所以 R 的相对误差约为

$$\frac{\delta_R}{|R|} = \frac{\delta_U}{|U|} + \frac{\delta_I}{|I|} = 0.3\% + 0.5\% = 0.8\%$$

R 的绝对误差约为

$$\delta_R = |R| \times 0.8\% = 0.032 (\Omega)$$

内容小结

1. 微分定义: (以 $z = f(x, y)$ 为例) 定义

$$\Delta z = \underline{f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y} + o(\rho)$$



$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

2. 重要关系:

函数连续

函数可导



函数可微



偏导数连续



*3. 微分应用

- 近似计算

$$\Delta z \approx f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y$$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y)$$

$$\approx f(x, y) + f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y$$

- 估计误差

绝对误差 $\delta_z = |f_x(x, y)|\delta_x + |f_y(x, y)|\delta_y$

相对误差 $\frac{\delta_z}{|z|} = \left| \frac{f_x(x, y)}{f(x, y)} \right| \delta_x + \left| \frac{f_y(x, y)}{f(x, y)} \right| \delta_y$



思考与练习

1. 选择题

函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 可微的充分条件是(D)

(A) $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续；

(B) $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的某邻域内存在；

(C) $\Delta z - f'_x(x, y)\Delta x - f'_y(x, y)\Delta y$

当 $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0$ 时是无穷小量；

(D)
$$\frac{\Delta z - f'_x(x, y)\Delta x - f'_y(x, y)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

当 $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0$ 时是无穷小量 .



2. 设 $f(x,y,z) = \frac{x \cos y + y \cos z + z \cos x}{1 + \cos x + \cos y + \cos z}$, 求 $df|_{(0,0,0)}$.

解: $\because f(x,0,0) = \frac{x}{3 + \cos x}$

注意: x, y, z 具有
轮换对称性

$$\therefore f_x(0,0,0) = \left(\frac{x}{3 + \cos x} \right)' \Big|_{x=0} = \frac{1}{4}$$

利用轮换对称性, 可得

$$f_y(0,0,0) = f_z(0,0,0) = \frac{1}{4}$$

$$\therefore df|_{(0,0,0)} = f_x(0,0,0)dx + f_y(0,0,0)dy + f_z(0,0,0)dz$$

$$= \frac{1}{4}(dx + dy + dz)$$



3. 已知 $z = \arctan \frac{x+y}{x-y}$, 求 dz .

答案: $dz = \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$



备用题

证明函数 $f(x,y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

在点 $(0,0)$ 连续且偏导数存在, 但偏导数在点 $(0,0)$ 不连续, 而 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微.

证: 1) 因 $\left| xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq |xy|$

所以 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x,y) = 0 = f(0,0)$

故函数在点 $(0,0)$ 连续;



2) $\because f(x,0) \equiv 0$, $\therefore f_x(0,0) = 0$; 同理 $f_y(0,0) = 0$.

3) 当 $(x,y) \neq (0,0)$ 时,

$$f_x(x,y) = y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x^2 y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

当点 $P(x,y)$ 沿射线 $y=|x|$ 趋于 $(0,0)$ 时,

$$\begin{aligned} & \lim_{(x,|x|) \rightarrow (0,0)} f_x(x,y) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(|x| \sin \frac{1}{\sqrt{2|x|}} - \frac{|x|^3}{2\sqrt{2|x|^3}} \cos \frac{1}{\sqrt{2|x|}} \right) \end{aligned}$$

极限不存在, $\therefore f_x(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不连续;

同理, $f_y(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 也不连续.



4) 下面证明 $f(x, y)$ 在点 $(0,0)$ 可微：

令 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, 则

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Delta f - f_x(0,0)\Delta x - f_y(0,0)\Delta y}{\rho} \right| \\ &= \left| \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\rho} \sin \frac{1}{\rho} \right| \leq |\Delta x| \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

$\therefore f(x, y)$ 在点 $(0,0)$ 可微.

说明：此题表明，偏导数连续只是可微的充分条件.

