第2节-2
齐次方程与全微分方程

一、齐次方程

*二、可化为齐次方程的方程

三、全微分方程

HIGHER EDUCATION PRESS

一、齐次方程

形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(\frac{y}{x})$ 的方程叫做**齐次方程**.

解法: 令 $u=\frac{y}{x}$, 则 $y=ux$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,

代入原方程得 $u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)$

分离变量: $\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$

两边积分, 得 $\int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$

积分后再用 $\frac{y}{x}$ 代替 u, 便得原方程的通解.

例1. 解微分方程 $y' = \dfrac{y}{x} + \tan\dfrac{y}{x}$.

解: 令 $u = \dfrac{y}{x}$, 则 $y' = u + x u'$, 代入原方程得

$$u + x u' = u + \tan u$$

分离变量 $$\frac{\cos u}{\sin u}\,\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

两边积分 $$\int\frac{\cos u}{\sin u}\,\mathrm{d}u = \int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

此处 $C \neq 0$

得 $$\ln|\sin u| = \ln|x| + \ln|C|,$$ 即 $\sin u = C\,x$

故原方程的通解为 $\sin\dfrac{y}{x} = C\,x$ （C 为任意常数）

（当 $C = 0$ 时, $y = 0$ 也是方程的解）

例2. 解微分方程 $(y^2 - 2xy)\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = 0.$

解: 方程变形为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\dfrac{y}{x} - \left(\dfrac{y}{x}\right)^2$, 令 $u = \dfrac{y}{x}$,

则有 $$u + xu' = 2u - u^2$$

分离变量 $\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2 - u} = -\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ 即 $\left(\dfrac{1}{u-1} - \dfrac{1}{u}\right)\mathrm{d}u = -\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$

积分得 $\ln\left|\dfrac{u-1}{u}\right| = -\ln|x| + \ln|C|$, 即 $\dfrac{x(u-1)}{u} = C$

代回原变量得通解 $x(y-x) = Cy$ (C 为任意常数)

说明: 显然 $x = 0$, $y = 0$, $y = x$ 也是原方程的解, 但在求解过程中丢失了.

*二、可化为齐次方程的方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\qquad (c^2+c_1^2\neq 0)$$

1. 当 $\frac{a_1}{a}\neq\frac{b_1}{b}$ 时, 作变换 $x=X+h,\ y=Y+k$ (h, k 为待定常数), 则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}X$, $\mathrm{d}y=\mathrm{d}Y$, 原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{aX+bY+ah+bk+c}{a_1X+b_1Y+a_1h+b_1k+c_1}$$

令 $\begin{cases} ah+bk+c=0 \\ a_1h+b_1k+c_1=0 \end{cases}$, 解出 h , k

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{aX+bY}{a_1X+b_1Y}$$ (齐次方程)

求出其解后, 将 $X = x - h, Y = y - k$ 代入, 即得原方程的解.

2. 当 $\dfrac{a_1}{a} = \dfrac{b_1}{b} = \lambda$ 时, 原方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a\,x + by + c}{\lambda(a\,x + by) + c_1}$$

令 $v = a\,x + by$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = a + b\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = a + b\,\frac{v + c}{\lambda v + c_1}$$ (可分离变量方程)

注: 上述方法可适用于下述更一般的方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{a\,x + b\,y + c}{a_1 x + b_1 y + c_1}\right) \quad (c^2 + c_1^2 \neq 0)$$

例4. 求解 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x+y+4}{x-y-6} \\ y\big|_{x=2} = -5 \end{cases}$

解: 令 $\begin{cases} h+k+4=0 \\ h-k-6=0 \end{cases}$ 得 $h=1, k=-5$

令 $x = X+1, y = Y-5$, 得 $\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \dfrac{X+Y}{X-Y}$

再令 $Y = Xu$, 得

$$\frac{1-u}{1+u^2}\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}X}{X}$$

积分得 $\arctan u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln|CX|$

代回原变量, 得原方程的通解:

$$\arctan\frac{y+5}{x-1}-\frac{1}{2}\ln\left[1+\left(\frac{y+5}{x-1}\right)^2\right]=\ln\left|C(x-1)\right|$$

利用 $y\big|_{x=2}=-5$ 得 $C=1$，故所求特解为

$$\arctan\frac{y+5}{x-1}=\frac{1}{2}\ln\left[(x-1)^2+(y+5)^2\right]$$

思考: 若方程改为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x+y+4}{x+y-6}$,如何求解?

提示: 令 $v=x+y$.

三、全微分方程

若存在 $u(x,y)$ 使 $\mathrm{d}u(x,y)=P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$

则称

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0 \qquad ③$$

为全微分方程.

判别: P, Q 在某单连通域D内有连续一阶偏导数, 则

$$③\text{为全微分方程} \Longleftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\ (x,y)\in D$$

求解步骤:

1. 求原函数 $u(x,y)$

   方法1　凑微分法;

   方法2　利用积分与路径无关的条件.

2. 由 $\mathrm{d}u=0$ 知通解为 $u(x,y)=C$.

例1. 求解 $(x+\frac{y}{x^2})\,\mathrm{d}x-\frac{1}{x}\,\mathrm{d}y=0$

解: $\because \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{x^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\therefore$ 这是一个全微分方程 .

用凑微分法求通解. 将方程改写为

$$x\,\mathrm{d}x-\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2}=0$$

即 $\mathrm{d}(\frac{1}{2}x^2)-\mathrm{d}(\frac{y}{x})=0$, 或 $\mathrm{d}(\frac{1}{2}x^2-\frac{y}{x})=0$

故原方程的通解为 $\frac{1}{2}x^2-\frac{y}{x}=C$

思考: 如何解方程 $(x^3+y)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0$?

这不是一个全微分方程, 但若在方程两边同乘 $\dfrac{1}{x^2}$, 就化成例1 的方程 .

注:若存在连续可微函数 $\mu=\mu(x,y)\neq 0$, 使

$$\mu(x,y)P(x,y)\,\mathrm{d}x+\mu(x,y)Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0$$

为全微分方程, 则称 $\mu(x,y)$为原方程的积分因子.

在简单情况下, 可凭观察和经验根据微分倒推式得到积分因子.

例2. 求解

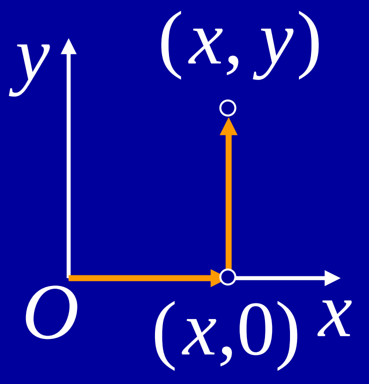
$$(5x^4+3xy^2-y^3)\,\mathrm{d}x+(3x^2y-3xy^2+y^2)\,\mathrm{d}y=0$$

解: 因为 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=6xy-3y^2=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, 故这是全微分方程.

法1 取 $x_0=0,\ y_0=0$, 则有

$$u(x,y)=\int_0^x 5x^4\,\mathrm{d}x+\int_0^y(3x^2y-3xy^2+y^2)\,\mathrm{d}y$$

$$=x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3$$



因此方程的通解为

$$x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3=C$$

法2 此全微分方程的通解为 $u(x,y)=C$，则有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=5x^4+3xy^2-y^3 \qquad ④$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2y-3xy^2+y^2 \qquad ⑤$$

由④得 $u(x,y)=\int(5x^4+3xy^2-y^3)\,\mathrm{d}x+\varphi(y)$

$$=x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\varphi(y),\quad \varphi(y)\text{待定}$$

两边对 y 求导得 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=3x^2y-3xy^2+\varphi'(y)$

与⑤比较得 $\varphi'(y)=y^2$，取 $\varphi(y)=\dfrac{1}{3}y^3$

因此方程的通解为 $x^5+\dfrac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\dfrac{1}{3}y^3=C$

练习 设 $\operatorname{grad} u(x,y) = (x^4 + 4xy^3, 6x^2y^2 - 5y^4)$, 求 $u(x,y)$.

提示: $\mathrm{d}\,u(x,y) = (x^4 + 4xy^3)\,\mathrm{d}x + (6x^2y^2 - 5y^4)\,\mathrm{d}y$

$$u(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (x^4 + 4xy^3)\,\mathrm{d}x + (6x^2y^2 - 5y^4)\mathrm{d}y + C$$

$$= \int_0^x x^4\,\mathrm{d}x + \int_0^y (6x^2y^2 - 5y^4)\,\mathrm{d}y + C$$

$$= \frac{1}{5}x^5 + 2x^2y^3 - y^5 + C$$