习题课

导数与微分

一、导数和微分的概念及应用

二、导数和微分的求法

一、 导数和微分的概念及应用

- 导数： $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

  当 $\Delta x\to 0^+$ 时，为右导数 $f'_+(x)$

  当 $\Delta x\to 0^-$ 时，为左导数 $f'_-(x)$

- 微分： $\mathrm{d}f(x)=f'(x)\mathrm{d}x$

- 关系： 可导 $\Longleftrightarrow$ 可微

- 应用：

(1) 利用导数定义解决的问题

1) 推出三个最基本的导数公式及求导法则

$$(C)'=0;\quad (\ln x)'=\frac{1}{x};\quad (\sin x)'=\cos x$$

其他求导公式都可由它们及求导法则推出;

2) 求分段函数在分界点处的导数，及某些特殊函数在特殊点处的导数;

3) 由导数定义证明一些命题.

(2) 用导数定义求极限

(3) 微分在近似计算与误差估计中的应用

例1. 设 $f'(x_0)$存在, 求

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x+(\Delta x)^2)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

解:

$$原式=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x_0+\Delta x+(\Delta x)^2)-f(x_0)}{\Delta x+(\Delta x)^2}\cdot\frac{\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}\right]$$

$$=f'(x_0)$$

例2. 若 $f(1)=0$ 且 $f'(1)$ 存在，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{(\mathrm{e}^x-1)\tan x}$.

$\sim x$

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0}(\sin^2 x+\cos x)=1$ 且 $f(1)=0$

联想到凑导数的定义式

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin^2 x+\cos x-1)-f(1)}{\sin^2 x+\cos x-1}\cdot\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2}$$

$$=f'(1)\cdot(1-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}f'(1)$$

例3. 设 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续, 且 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=3$, 求 $f'(2)$.

解: $$f(2)=\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}[(x-2)\cdot\frac{f(x)}{(x-2)}]=0$$

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=3$$

例4. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2\,\mathrm{e}^{n(x-1)}+ax+b}{\mathrm{e}^{n(x-1)}+1}$，试确定常数$a$，$b$

使 $f(x)$ 处处可导, 并求 $f'(x)$.

解: $$f(x)=\begin{cases} ax+b, & x<1 \\ \frac{1}{2}(a+b+1), & x=1 \\ x^2, & x>1 \end{cases}$$

$x<1$时, $f'(x)=a$;　$x>1$时, $f'(x)=2x$.

利用 $f(x)$在 $x=1$处可导，得

$$\begin{cases} f(1^-)=f(1^+)=f(1) \\ f'_-(1)=f'_+(1) \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} a+b=1=\frac{1}{2}(a+b+1) \\ a=2 \end{cases}$$

$x<1$时，$f'(x)=a$，　$x>1$时，$f'(x)=2x$

$$f'(1)\text{存在}\Rightarrow\begin{cases} a+b=1=\frac{1}{2}(a+b+1) \\ a=2 \end{cases}$$

$$\therefore\quad a=2,\ b=-1,\quad f'(1)=2$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2, & x\le 1 \\ 2x, & x>1 \end{cases}$$

判别： $f'(x)$ 是否为连续函数？

例5. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性及可导性.

解: $$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x} = 0 = f(0)$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

又 $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0 \Longrightarrow f'(0)=0$$

即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导 .

二、 导数和微分的求法

1. 正确使用导数及微分公式和法则

2. 熟练掌握求导方法和技巧

(1) 求分段函数的导数

注意讨论**界点**处左右导数是否存在和相等

(2) 隐函数求导法 $\xrightarrow{\text{导出}}$ 对数微分法

(3) 参数方程求导法 $\xleftarrow{\text{转化}}$ 极坐标方程求导

(4) 复合函数求导法 (可利用微分形式不变性)

(5) 高阶导数的求法

逐次求导归纳; 间接求导法; 利用莱布尼茨公式.

例6. 设 $y=\mathrm{e}^{\sin x}\sin\mathrm{e}^{x}+f(\arctan\frac{1}{x})$, 其中 $f(x)$ 可微 , 求 y'.

解: $\mathrm{d}y=\sin\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{\sin x})+\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}(\sin\mathrm{e}^{x})$

$$+f'(\arctan\frac{1}{x})\,\mathrm{d}(\arctan\frac{1}{x})$$

$$=\sin\mathrm{e}^{x}\cdot\underline{\mathrm{e}^{\sin x}}\mathrm{d}(\sin x)+\underline{\mathrm{e}^{\sin x}}\cdot\cos\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{x})$$

$$+f'(\arctan\frac{1}{x})\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}(\frac{1}{x})$$

$$=\mathrm{e}^{\sin x}(\cos x\sin\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{x}\cos\mathrm{e}^{x})\,\mathbf{d}x$$

$$-\frac{1}{1+x^2}f'(\arctan\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x$$

$$\therefore\quad y'=\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\cdots$$

HIGHER EDUCATION PRESS

例7. 设 $x \le 0$ 时 $g(x)$ 有定义，且 $g''(x)$ 存在, 问怎样选择 a, b, c 可使下述函数在 $x=0$ 处有二阶导数

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c, & x>0 \\ g(x), & x \le 0 \end{cases}$$

解: 由题设 $f''(0)$ 存在, 因此

1) 利用 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续, 即 $f(0^+)=f(0^-)=f(0)$,

得 $c=g(0)$

2) 利用 $f'_+(0)=f'_-(0)$, 而

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'_-(0)$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{(ax^2+bx+c)-g(0)}{x-0}=b$$

得 $b=g'_-(0)$

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c, & x>0 \\ g(x), & x\le 0 \end{cases}$$

$c=g(0)$ $\qquad$ $b=g'_-(0)$

3） 利用 $f''_-(0)=f''_+(0)$，而

$$f''_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{g'(x)-g'_-(0)}{x-0}=g''_-(0)$$

$$f''_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{(2ax+b)-b}{x-0}=2a$$

得 $a=\dfrac{1}{2}g''_-(0)$