

第三节 泰勒公式

目的一用多项式近似表示函数. 应用 $\begin{cases} \text{理论分析} \\ \text{近似计算} \end{cases}$

一、泰勒公式的建立

二、几个初等函数的麦克劳林公式

三、泰勒公式的应用



一、泰勒公式的建立

在微分应用中已知近似公式：

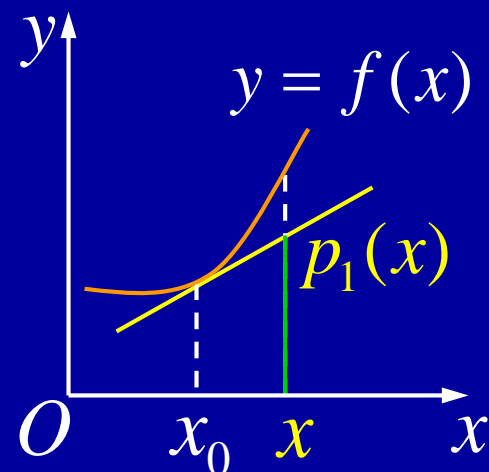
$$f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{p_1(x)}$$

x 的一次多项式

特点: $p_1(x_0) = f(x_0)$

$$p_1'(x_0) = f'(x_0)$$

需要解决的问题 { 如何提高精度？
如何估计误差？



以直代曲



1. 求 n 次近似多项式 $p_n(x)$, 要求:

$$p_n(x_0) = f(x_0), p'_n(x_0) = f'(x_0), \cdots, p_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

令 $p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n$

则 $p'_n(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + \cdots + na_n(x-x_0)^{n-1}$

$$p''_n(x) = 2!a_2 + \cdots + n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$$

.....

$$p_n^{(n)}(x) = n!a_n$$

$$a_0 = p_n(x_0) = f(x_0), \quad a_1 = p'_n(x_0) = f'(x_0),$$

$$a_2 = \frac{1}{2!} p''_n(x_0) = \frac{1}{2!} f''(x_0), \cdots, a_n = \frac{1}{n!} p_n^{(n)}(x_0) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

故
$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$



2. 余项估计

令 $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$ (称为余项), 则有

$$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} \\ &= \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1} - 0} = \frac{R'_n(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1 - x_0)^n} \quad (\xi_1 \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}) \\ &= \frac{R'_n(\xi_1) - R'_n(x_0)}{(n+1)(\xi_1 - x_0)^n - 0} = \frac{R''_n(\xi_2)}{(n+1)n(\xi_2 - x_0)^{n-1}} \quad (\xi_2 \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } \xi_1 \text{ 之间}) \\ &= \cdots \\ &= \frac{R_n^{(n)}(\xi_n) - R_n^{(n)}(x_0)}{(n+1) \cdots 2(\xi_n - x_0) - 0} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}) \end{aligned}$$



$$R_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

$$\frac{R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

$$\downarrow \because p_n^{(n+1)}(x) = 0, \therefore R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

当在 x_0 的某邻域内 $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ 时

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}$$

$$\therefore R_n(x) = o((x - x_0)^n) \quad (x \rightarrow x_0)$$



泰勒(Taylor)中值定理：

若 $f(x)$ 在包含 x_0 的某开区间 (a, b) 内具有直到 $n+1$ 阶的导数，则当 $x \in (a, b)$ 时，有



$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x) \quad (1)$$

$$\text{其中 } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}) \quad (2)$$

公式 ① 称为 $f(x)$ 的 n 阶泰勒公式。

公式 ② 称为 n 阶泰勒公式的拉格朗日余项。



注意到 $R_n(x) = o[(x - x_0)^n]$ ③

在不需要余项的精确表达式时，泰勒公式可写为

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o[(x - x_0)^n] \quad \text{④}$$

公式 ③ 称为 n 阶泰勒公式的佩亚诺(Peano) 余项.

* 可以证明:

$f(x)$ 在点 x_0 有直到 n 阶的导数

\implies ④ 式成立



$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

特例:

(1) 当 $n = 0$ 时, 泰勒公式给出拉格朗日中值定理

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

(2) 当 $n = 1$ 时, 泰勒公式变为

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2$$

可见 $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (ξ 在 x_0 与 x 之间)

误差 $R_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2$ (ξ 在 x_0 与 x 之间)

df



在泰勒公式中若取 $x_0 = 0$, 记 $\xi = \theta x$ ($0 < \theta < 1$), 则有

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$



称为**麦克劳林 (Maclaurin) 公式**.

由此得近似公式

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

若在公式成立的区间上 $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$, 则有误差估计式

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$



二、几个初等函数的麦克劳林公式

$$(1) f(x) = e^x$$

$$\because f^{(k)}(x) = e^x, \quad f^{(k)}(0) = 1 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$\therefore e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

$$\text{其中 } R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$



$$(2) f(x) = \sin x$$

$$\therefore f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(k)}(0) = \sin k \frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0, & k = 2m \\ (-1)^{m-1}, & k = 2m-1 \end{cases} \quad (m=1, 2, \dots)$$

$$\therefore \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{2m}(x)$$

$$\text{其中 } R_{2m}(x) = \frac{(-1)^m \cos(\theta x)}{(2m+1)!} x^{2m+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$



$$(3) f(x) = \cos x$$

类似可得

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + R_{2m+1}(x)$$

其中

$$R_{2m+1}(x) = \frac{(-1)^{m+1} \cos(\theta x)}{(2m+2)!} x^{2m+2} \quad (0 < \theta < 1)$$

麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$



$$(4) \quad f(x) = (1+x)^\alpha, \quad (x > -1)$$

$$\therefore f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

$$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1) \quad (k=1,2,\cdots)$$

$$\therefore (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + R_n(x)$$

$$\text{其中 } R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!} (1+\theta x)^{\alpha-n-1} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$



$$(5) \quad f(x) = \ln(1+x) \quad (x > -1)$$

$$\text{已知 } f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k} \quad (k=1, 2, \dots)$$

因此可得

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x)$$

$$\text{其中 } R_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} \quad (0 < \theta < 1)$$

麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \\ (0 < \theta < 1)$$



三、泰勒公式的应用

1. 在近似计算中的应用

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$\text{误差 } |R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

M 为 $|f^{(n+1)}(x)|$ 在包含 $0, x$ 的某区间上的上界.

需解问题的类型:

- 1) 已知 x 和误差限, 要求确定项数 n ;
- 2) 已知项数 n 和 x , 计算近似值并估计误差;
- 3) 已知项数 n 和误差限, 确定公式中 x 的适用范围.



例1. 计算无理数 e 的近似值, 使误差不超过 10^{-6} .

解: 已知 e^x 的麦克劳林公式为

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

令 $x = 1$, 得

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!} \quad (0 < \theta < 1)$$

由于 $0 < e^{\theta} < e < 3$, 欲使

$$|R_n(1)| < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-6}$$

由计算可知当 $n = 9$ 时上式成立, 因此

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{9!} \approx 2.718282$$



说明: 注意舍入误差对计算结果的影响.

本例 $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{9!}$

若每项四舍五入到小数点后 6 位, 则

各项舍入误差之和不超过约 $7 \times 0.5 \times 10^{-6}$,

总误差限为 $7 \times 0.5 \times 10^{-6} + 10^{-6} < 5 \times 10^{-6}$

这时得到的近似值**不能保证**误差不超过 10^{-6} .

因此计算时中间结果应比精度要求多取一位 .



例2. 用近似公式 $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!}$ 计算 $\cos x$ 的近似值, 使其精确到 **0.005**, 试确定 x 的适用范围.

解: 近似公式的误差

$$|R_3(x)| = \left| \frac{x^4}{4!} \cos(\theta x) \right| \leq \frac{|x|^4}{24}$$

令 $\frac{|x|^4}{24} \leq 0.005$

解得 $|x| \leq \mathbf{0.588}$

即当 $|x| \leq \mathbf{0.588}$ 时, 由给定的近似公式计算的结果能准确到 **0.005**.



2. 利用泰勒公式求极限

例3. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x+4} + \sqrt{4-3x} - 4}{x^2}$.

用洛必达法则
不方便！

解：用泰勒公式将分子展到 x^2 项, 由于

$$\sqrt{3x+4} = 2(1 + \frac{3}{4}x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2 \left[1 + \frac{1}{2} \cdot (\frac{3}{4}x) + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2} (\frac{1}{2} - 1) (\frac{3}{4}x)^2 + o(x^2) \right]$$

$$= 2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{16}x^2 + o(x^2)$$

$$\sqrt{4-3x} = 2(1 - \frac{3}{4}x)^{\frac{1}{2}} = 2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{16}x^2 + o(x^2)$$

$$\therefore \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{16}x^2 + o(x^2)}{x^2} = -\frac{9}{32}$$



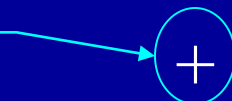
3. 利用泰勒公式证明不等式

例4. 证明 $\sqrt{1+x} > 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \quad (x > 0).$

证: $\because \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$

$$= 1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) x^2$$
$$+ \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - 2 \right) (1+\theta x)^{-\frac{5}{2}} x^3$$
$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{1}{16} (1+\theta x)^{-\frac{5}{2}} x^3 \quad (0 < \theta < 1)$$

$\therefore \sqrt{1+x} > 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \quad (x > 0)$





内容小结

1. 泰勒公式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

其中余项

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = o((x - x_0)^n)$$

(ξ 在 x_0 与 x 之间)

当 $x_0 = 0$ 时为**麦克劳林公式**.



2. 常用函数的麦克劳林公式 (P153 ~ P155)

$$e^x, \ln(1+x), \sin x, \cos x, (1+x)^\alpha$$

3. 泰勒公式的应用

(1) 近似计算

(2) 利用多项式逼近函数 例如 $\sin x$

(3) 其他应用 —— 求极限, 证明不等式 等.



思考与练习

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} + 2 \cos x - 3}{x^4}.$

解: $\because e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + o(x^4)$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$$

$$\therefore e^{x^2} + 2 \cos x - 3 = \left(\frac{1}{2!} + 2 \cdot \frac{1}{4!}\right)x^4 + o(x^4)$$

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{7}{12}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \frac{7}{12}$$



备用题 1. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有三阶连续导数, 且 $f(0)=1, f(1)=2, \underline{f'(\frac{1}{2})=0}$, 证明 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ , 使 $|f'''(\xi)| \geq 24$.

证: 由题设对 $x \in [0,1]$, 有

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{1}{2}\right) + \underline{f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{2!} f''\left(\frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!} f'''(\zeta) \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 \\ &= f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2!} f''\left(\frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!} f'''(\zeta) \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 \\ &\quad \text{(其中 } \zeta \text{ 在 } x \text{ 与 } \frac{1}{2} \text{ 之间)} \end{aligned}$$

分别令 $x=0,1$, 得



$$1 = f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{f''\left(\frac{1}{2}\right)}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{f'''(\zeta_1)}{3!}\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \quad (\zeta_1 \in (0, \frac{1}{2}))$$

$$2 = f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{f''\left(\frac{1}{2}\right)}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{f'''(\zeta_2)}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad (\zeta_2 \in (\frac{1}{2}, 1))$$

下式減上式，得

$$1 = \frac{1}{48} [f'''(\zeta_2) - f'''(\zeta_1)] \leq \frac{1}{48} [|f'''(\zeta_2)| + |f'''(\zeta_1)|]$$

$$\downarrow \text{令 } |f'''(\xi)| = \max(|f'''(\zeta_2)|, |f'''(\zeta_1)|)$$

$$\leq \frac{1}{24} |f'''(\xi)| \quad (0 < \xi < 1)$$

$$\implies |f'''(\xi)| \geq 24$$



2. 证明 e 为无理数.

证: $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!} \quad (0 < \theta < 1)$

↓ 两边同乘 $n!$

$$n!e = \text{整数} + \frac{e^\theta}{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

假设 e 为有理数 $\frac{p}{q}$ (p, q 为正整数),

则当 $n \geq q$ 时, 等式左边为整数;

当 $n \geq 2$ 时, 等式右边不可能为整数.

矛盾! 故 e 为无理数.

