

第六节

常系数齐次线性微分方程

基本思路:

求解常系数线性齐次微分方程

转化

求特征方程(代数方程)之根



二阶常系数齐次线性微分方程:

$$y'' + p y' + q y = 0 \quad (p, q \text{ 为常数}) \quad ①$$

因为 r 为常数时, 函数 e^{rx} 和它的导数只差常数因子, 所以令①的解为 $y = e^{rx}$ (r 为待定常数), 代入①得

$$(r^2 + pr + q)e^{rx} = 0 \\ \implies r^2 + pr + q = 0 \quad ②$$

称②为微分方程①的**特征方程**, 其根称为**特征根**.

1. 当 $p^2 - 4q > 0$ 时, ②有两个相异实根 r_1, r_2 , 则微分方程有两个线性无关的特解: $y_1 = e^{r_1 x}$, $y_2 = e^{r_2 x}$,

因此方程的通解为 $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$



2. 当 $p^2 - 4q = 0$ 时, 特征方程有两个相等实根 $r_1 = r_2 = \frac{-p}{2}$, 则微分方程有一个特解 $y_1 = e^{r_1 x}$.

设另一特解 $y_2 = y_1 u(x) = e^{r_1 x} u(x)$ ($u(x)$ 待定)

代入方程得:

$$e^{r_1 x} [(u'' + 2r_1 u' + r_1^2 u) + p(u' + r_1 u) + qu] = 0$$

$$u'' + (2r_1 + p)u' + (r_1^2 + pr_1 + q)u = 0$$

↓ 注意 r_1 是特征方程的重根

$$u'' = 0$$

取 $u = x$, 则得 $y_2 = x e^{r_1 x}$, 因此原方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$$



3. 当 $p^2 - 4q < 0$ 时, 特征方程有一对共轭复根

$$r_1 = \alpha + i\beta, \quad r_2 = \alpha - i\beta$$

这时原方程有两个复数解:

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

$$y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x)$$

利用解的叠加原理, 得原方程的线性无关特解:

$$\overline{y_1} = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$\overline{y_2} = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

因此原方程的通解为

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$



小结:

$$y'' + p y' + q y = 0 \quad (p, q \text{ 为常数})$$

特征方程: $r^2 + pr + q = 0$, 特征根: r_1, r_2

特征根	通解
$r_1 \neq r_2$ 实根	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$
$r_{1,2} = \alpha \pm i \beta$	$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

以上结论可推广到高阶常系数线性微分方程.



推广:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (a_k \text{ 均为常数})$$

特征方程: $r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0$

若特征方程含 k 重实根 r , 则其通解中必含对应项

$$(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}) e^{r x}$$

若特征方程含 k 重复根 $r = \alpha \pm i \beta$, 则其通解中必含对应项

$$e^{\alpha x} [(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}) \cos \beta x + \\ + (D_1 + D_2 x + \cdots + D_k x^{k-1}) \sin \beta x]$$

(以上 C_i, D_i 均为任意常数)



例1. 求方程 $y'' - 2y' - 3y = 0$ 的通解.

解: 特征方程 $r^2 - 2r - 3 = 0$, 特征根: $r_1 = -1, r_2 = 3$,
因此原方程的通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$

例2. 求解初值问题
$$\begin{cases} \frac{d^2 s}{dt^2} + 2\frac{ds}{dt} + s = 0 \\ \underline{s|_{t=0} = 4}, \quad \underline{\frac{ds}{dt}|_{t=0} = -2} \end{cases}$$

解: 特征方程 $r^2 + 2r + 1 = 0$ 有重根 $r_1 = r_2 = -1$,

因此原方程的通解为 $s = (C_1 + C_2 t) e^{-t}$

利用初始条件得 $C_1 = 4, C_2 = 2$

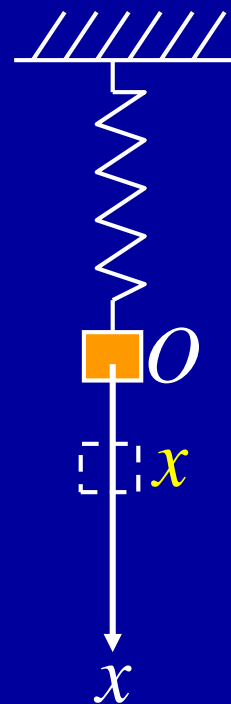
于是所求初值问题的解为 $s = (4 + 2t) e^{-t}$



***例2.**质量为 m 的物体自由悬挂在一端固定的弹簧上, 在无外力作用下做自由运动, 取其平衡位置为原点建立坐标系如图, 设 $t=0$ 时物体的位置为 $x=x_0$, 初始速度为 v_0 , 求物体的运动规律 $x=x(t)$.

解: 由第六节例1 知, 位移满足
因此定解问题为

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2 x = 0 \\ x|_{t=0} = x_0, \quad \frac{dx}{dt}|_{t=0} = v_0 \end{cases}$$



1) 无阻尼自由振动情况 ($n = 0$)

方程: $\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0$

特征方程: $r^2 + k^2 = 0$, 特征根: $r_{1,2} = \pm i k$

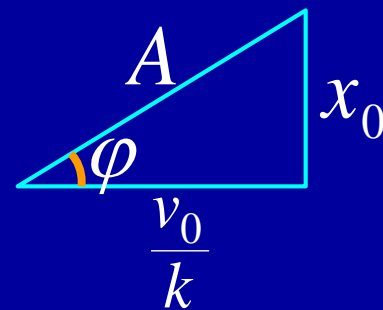
方程通解: $x = C_1 \cos k t + C_2 \sin k t$

利用初始条件得: $C_1 = x_0$, $C_2 = \frac{v_0}{k}$

故所求特解:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos k t + \frac{v_0}{k} \sin k t \\ &= A \sin(k t + \varphi) \end{aligned}$$

$$\left(A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}, \tan \varphi = \frac{k x_0}{v_0} \right)$$



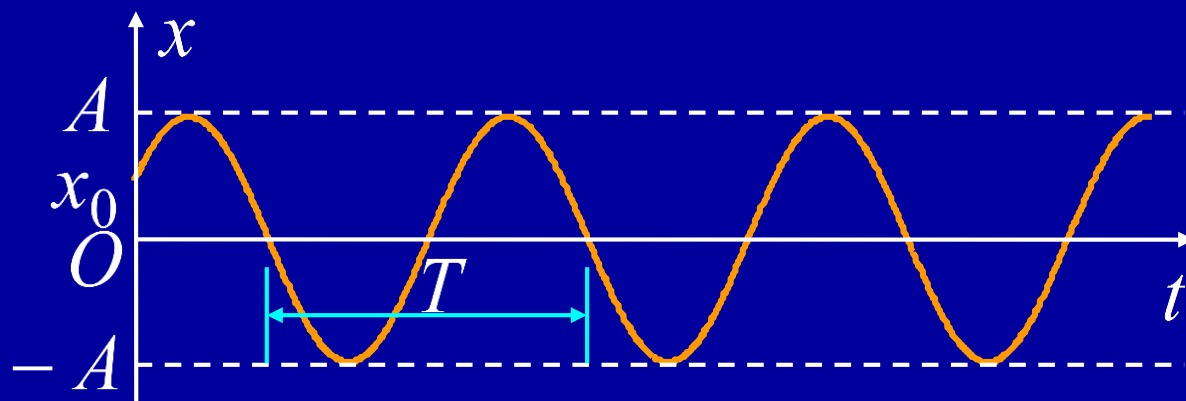
解的特征:

$$x = A \sin(kt + \varphi) \quad \text{简谐振动}$$

$$A: \text{振幅}, \quad \varphi: \text{初相}, \quad \text{周期: } T = \frac{2\pi}{k}$$

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}: \text{固有频率 (仅由系统特性确定)}$$

(下图中假设 $x|_{t=0} = x_0 > 0$, $\frac{dx}{dt}|_{t=0} = v_0 > 0$)



2) 有阻尼自由振动情况

方程: $\frac{d^2 x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2 x = 0$

特征方程: $r^2 + 2nr + k^2 = 0$

特征根: $r_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$

这时需分如下三种情况进行讨论:

小阻尼: $n < k \longrightarrow x = e^{-nt} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t)$
($\omega = \sqrt{k^2 - n^2}$)

解的特征

大阻尼: $n > k \longrightarrow x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$

解的特征

临界阻尼: $n = k \longrightarrow x = (C_1 + C_2 t) e^{-nt}$

解的特征



例3. 求方程 $y^{(4)} - 2y''' + 5y'' = 0$ 的通解.

解: 特征方程 $r^4 - 2r^3 + 5r^2 = 0$, 特征根:

$$r_1 = r_2 = 0, \quad r_{3,4} = 1 \pm 2i$$

因此原方程通解为

$$y = C_1 + C_2x + e^x (C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x)$$

例5. 解方程 $y^{(5)} - y^{(4)} = 0$.

解: 特征方程: $r^5 - r^4 = 0$, 特征根:

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 0, \quad r_5 = 1$$

原方程通解: $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + C_5e^x$

(不难看出, 原方程有特解 $1, x, x^2, x^3, e^x$)



例4. 解方程 $\frac{d^4 w}{dx^4} + \beta^4 w = 0 \quad (\beta > 0).$

解: 特征方程: $r^4 + \beta^4 = (r^2 + \beta^2)^2 - 2\beta^2 r^2 = 0$

即 $(r^2 + \sqrt{2}\beta r + \beta^2)(r^2 - \sqrt{2}\beta r + \beta^2) = 0$

其根为 $r_{1,2} = \frac{\beta}{\sqrt{2}}(1 \pm i), \quad r_{3,4} = -\frac{\beta}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$

方程通解:

$$w = e^{\frac{\beta}{\sqrt{2}}x} \left(C_1 \cos \frac{\beta}{\sqrt{2}}x + C_2 \sin \frac{\beta}{\sqrt{2}}x \right) \\ + e^{-\frac{\beta}{\sqrt{2}}x} \left(C_3 \cos \frac{\beta}{\sqrt{2}}x + C_4 \sin \frac{\beta}{\sqrt{2}}x \right)$$



例5. 解方程 $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

解: 特征方程: $r^4 + 2r^2 + 1 = 0$

$$\text{即 } (r^2 + 1)^2 = 0$$

特征根为 $r_{1,2} = \pm i, \quad r_{3,4} = \pm i$

则方程通解:

$$y = (C_1 + C_3 x) \cos x + (C_2 + C_4 x) \sin x$$



内容小结

$$y'' + p y' + q y = 0 \quad (p, q \text{ 为常数})$$

特征根: r_1, r_2

(1) 当 $r_1 \neq r_2$ 时, 通解为 $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

(2) 当 $r_1 = r_2$ 时, 通解为 $y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$

(3) 当 $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ 时, 通解为

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

可推广到高阶常系数线性齐次方程求通解.



思考与练习

求方程 $y'' + a y = 0$ 的通解 .

答案: $a = 0$: 通解为 $y = C_1 + C_2 x$

$a > 0$: 通解为 $y = C_1 \cos \sqrt{a} x + C_2 \sin \sqrt{a} x$

$a < 0$: 通解为 $y = C_1 e^{\sqrt{-a} x} + C_2 e^{-\sqrt{-a} x}$

作业



备用题 求一个以 $y_1 = e^x$, $y_2 = 2xe^x$, $y_3 = \cos 2x$, $y_4 = 3\sin 2x$ 为特解的 4 阶常系数线性齐次微分方程, 并求其通解.

解: 根据给定的特解知特征方程有根:

$$r_1 = r_2 = 1, \quad r_{3,4} = \pm 2i$$

因此特征方程为 $(r-1)^2 (r^2 + 4) = 0$

即 $r^4 - 2r^3 + 5r^2 - 8r + 4 = 0$

故所求方程为 $y^{(4)} - 2y''' + 5y'' - 8y' + 4y = 0$

其通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$

