

习题课

定积分及其相关问题

一、与定积分概念有关的问题的解法

二、有关定积分计算和证明的方法



一、与定积分概念有关的问题的解法

1. 用定积分概念与性质求极限
2. 用定积分性质估值
3. 与变限积分有关的问题

例1. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n e^x}{1+e^x} dx$.

解: 因为 $x \in [0, 1]$ 时, $0 \leq \frac{x^n e^x}{1+e^x} \leq x^n$, 所以

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n e^x}{1+e^x} dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

利用夹逼准则得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n e^x}{1+e^x} dx = 0$

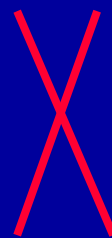


说明:

1) 思考例1下列做法对吗?

利用积分中值定理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n e^x}{1 + e^x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi^n e^\xi}{1 + e^\xi} = 0$$



不对! 因为 ξ 依赖于 n , 且 $0 \leq \xi \leq 1$, 故没理由认为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi^n = 0$$

2) 此类问题放大或缩小时一般应保留含参数的项.

如, P270 题7

$$1 - x^p \leq \frac{1}{1 + x^p} = 1 - \frac{x^p}{1 + x^p} \leq 1 \quad (0 \leq x \leq 1)$$



例2. 求 $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}} \right]$

解: 将数列适当放大和缩小, 以简化成积分和形式

$$\frac{n}{n+1} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n} \cdot \frac{1}{n} < \sum_{k=1}^n \frac{\sin \frac{k\pi}{n}}{n + \frac{1}{k}} < \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \sin \pi x \, dx = \frac{2}{\pi}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$

利用**夹逼准则**可知 $I = \frac{2}{\pi}.$



思考: $J = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n + \frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n + \frac{1}{n}} + \frac{\sin \frac{(n+1)\pi}{n}}{n + \frac{1}{n+1}} \right] = ?$

提示: 由上题

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n + \frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n + \frac{1}{n}} \right] = \frac{2}{\pi}$$

故 $J = I - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{(n+1)\pi}{n}}{n + \frac{1}{n+1}}$

$$= \frac{2}{\pi} - 0 + 0 = \frac{2}{\pi}$$



练习: 1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right)$.

解: 原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{i}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$

2. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1} + \frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}} \right)$.

提示: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n 2^{\frac{i}{n}} \leq \text{原式} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2^{\frac{i}{n}}$

左边 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \sum_{i=1}^n 2^{\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 2^x dx = \frac{1}{\ln 2} = \text{右边}$



例3. 估计下列积分值 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2+x^3}} dx$.

解: 因为 $\frac{1}{\sqrt{4}} \leq \frac{1}{\sqrt{4-x^2+x^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}, \quad x \in [0,1]$

$$\therefore \int_0^1 \frac{1}{2} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2+x^3}} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

即
$$\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2+x^3}} dx \leq \frac{\pi}{6}$$



例4. 证明 $\frac{2}{\sqrt[4]{e}} \leq \int_0^2 e^{x^2-x} dx \leq 2e^2$.

证: 令 $f(x) = e^{x^2-x}$, 则 $f'(x) = (2x-1)e^{x^2-x}$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{1}{2}$,

$$f(0) = 1, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}, \quad f(2) = e^2$$

$$\therefore \min_{[0,2]} f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}, \quad \max_{[0,2]} f(x) = e^2$$

故
$$\frac{2}{\sqrt[4]{e}} \leq \int_0^2 e^{x^2-x} dx \leq 2e^2$$



例5. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是单调递减的连续函数, 试证明对于任何 $q \in [0,1]$ 都有不等式

$$\int_0^q f(x) \mathrm{d} x \geq q \int_0^1 f(x) \mathrm{d} x$$

证明: 显然 $q=0, q=1$ 时结论成立. 当 $0 < q < 1$ 时,

$$\begin{aligned} & \int_0^q f(x) \mathrm{d} x - q \int_0^1 f(x) \mathrm{d} x \\ &= (1-q) \int_0^q f(x) \mathrm{d} x - q \int_q^1 f(x) \mathrm{d} x \quad (\text{用积分中值定理}) \\ &= (1-q) \cdot q \cdot f(\xi_1) - q \cdot (1-q) \cdot f(\xi_2) \quad \begin{array}{l} \xi_1 \in [0, q] \\ \xi_2 \in [q, 1] \end{array} \\ &= q(1-q)[f(\xi_1) - f(\xi_2)] \geq 0 \end{aligned}$$

故所给不等式成立.



例6. 已知 $f(x)$ 在 $x > 0$ 处连续, $f(1) = 3$, 且由方程

$$\int_1^{xy} f(t) \mathrm{d} t = x \int_1^y f(t) \mathrm{d} t + y \int_1^x f(t) \mathrm{d} t$$

确定 y 是 x 的函数, 求 $f(x)$.

解: 方程两端对 x 求导, 得

$$\begin{aligned} \underline{f(xy)} \cdot (y + \underline{xy'}) &= \int_1^y f(t) \mathrm{d} t + \underline{x \cdot f(y) \cdot y'} \\ &\quad + \underline{y' \int_1^x f(t) \mathrm{d} t} + y \cdot f(x) \end{aligned}$$

令 $x = 1$, 得 $f(y)y = \int_1^y f(t) \mathrm{d} t + yf(1) \quad \rightarrow = 0$

再对 y 求导, 得 $f'(y) = \frac{1}{y} f(1) = \frac{3}{y} \implies f(y) = 3 \ln y + C$

令 $y = 1$, 得 $C = 3$, 故 $f(x) = 3 \ln x + 3$



例7. 求可微函数 $f(x)$ 使满足

$$f^2(x) = \int_0^x f(t) \frac{\sin t}{2 + \cos t} dt$$

解: 等式两边对 x 求导, 得

$$2f(x)f'(x) = f(x) \frac{\sin x}{2 + \cos x}$$

不妨设 $f(x) \neq 0$, 则

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{2 + \cos x}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \frac{1}{2} \int \frac{\sin x}{2 + \cos x} dx \\ &= -\frac{1}{2} \ln(2 + \cos x) + C \end{aligned}$$



$$f^2(x) = \int_0^x f(t) \frac{\sin t}{2 + \cos t} dt$$

$$f(x) = -\frac{1}{2} \ln(2 + \cos x) + C$$

注意 $f(0) = 0$, 得 $C = \frac{1}{2} \ln 3$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= -\frac{1}{2} \ln(2 + \cos x) + \frac{1}{2} \ln 3 \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2 + \cos x} \end{aligned}$$



例8. 求多项式 $f(x)$ 使它满足方程

$$\int_0^1 f(xt) dt + \int_0^x f(t-1) dt = x^3 + 2x$$

解: 令 $u = xt$, 则 $\int_0^1 f(xt) dt = \frac{1}{x} \int_0^x f(u) du$

代入原方程得 $\int_0^x f(u) du + x \int_0^x f(t-1) dt = x^4 + 2x^2$

两边求导: $f(x) + \int_0^x f(t-1) dt + x f(x-1) = 4x^3 + 4x$

再求导: $f'(x) + 2f(x-1) + x f'(x-1) = 12x^2 + 4$ ①

可见 $f(x)$ 应为二次多项式, 设 $f(x) = ax^2 + bx + c$

代入①式比较同次幂系数, 得 $a = 3, b = 4, c = 1$.

故 $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$



二、有关定积分计算和证明的方法

1. 熟练掌握定积分计算的常用公式和方法

思考: 下列作法是否正确?

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx \neq -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -2$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x^2}} dx \neq \int_1^1 \frac{1}{1+t} \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}} dt = 0 \quad (\text{令 } t = \sqrt[3]{x^2})$$

2. 注意特殊形式定积分的计算

3. 利用各种积分技巧计算定积分

4. 有关定积分命题的证明方法



例9. 求 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{1 - e^{-2x}} \, dx$.

解: 令 $e^{-x} = \sin t$, 则 $x = -\ln \sin t$, $dx = -\frac{\cos t}{\sin t} dt$,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \cos t \left(-\frac{\cos t}{\sin t} \right) dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 t}{\sin t} dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\csc t - \sin t) dt \\ &= [\ln |\csc t - \cot t| + \cos t] \bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



例10. 选择一个常数 c , 使

$$\int_a^b (x+c) \cos^{99}(x+c) dx = 0$$

解: 令 $t = x+c$, 则

$$\int_a^b (x+c) \cos^{99}(x+c) dx = \int_{a+c}^{b+c} t \cos^{99} t dt$$

因为被积函数为奇函数, 故选择 c 使

$$a+c = -(b+c)$$

即
$$c = -\frac{a+b}{2}$$

可使原式为 0.



例11. 设 $f(x) = \int_0^x e^{-y^2+2y} dy$, 求 $\int_0^1 (x-1)^2 f(x) dx$.

解: $\int_0^1 (x-1)^2 f(x) dx$

$$= \frac{1}{3} (x-1)^3 f(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 (x-1)^3 f'(x) dx$$

$$= -\frac{1}{3} \int_0^1 (x-1)^3 e^{-x^2+2x} dx$$

$$\begin{aligned} & -x^2 + 2x \\ & = -(x^2 - 2x + 1) + 1 \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{6} \int_0^1 (x-1)^2 e^{-(x-1)^2+1} d(x-1)^2 \quad (\text{令 } u = (x-1)^2)$$

$$= \frac{e}{6} \int_0^1 u e^{-u} du = -\frac{e}{6} (u+1) e^{-u} \Big|_0^1 = \frac{1}{6} (e-2)$$



例12. 如图, 曲线 C 的方程为 $y = f(x)$, 点 $(3, 2)$ 是它的一个拐点, 直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点 $(0, 0)$ 与 $(3, 2)$ 处的切线, 其交点为 $(2, 4)$, 设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数, 计算定积分 $\int_0^3 (x^2 + x) f'''(x) dx$. (2005 考研)

解: $\int_0^3 (x^2 + x) f'''(x) dx$

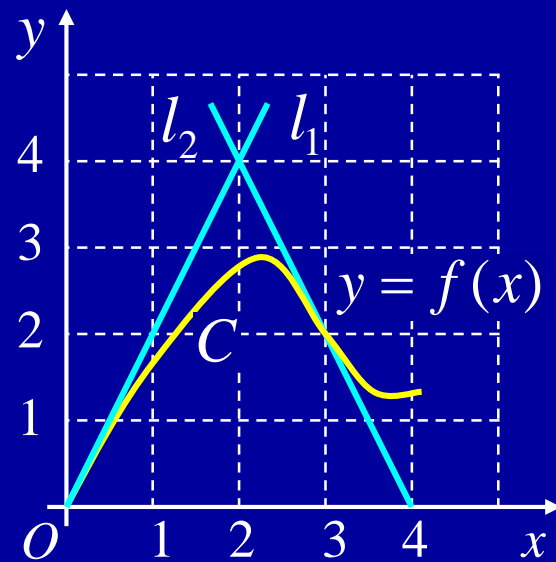
$$= (x^2 + x) f''(x) \Big|_0^3 - \int_0^3 (2x + 1) f''(x) dx$$

$=0$

$$= -(2x + 1) f'(x) \Big|_0^3 + \int_0^3 f'(x) dx$$

$$= -(7 \times (-2) - 2) + 2 f(x) \Big|_0^3$$

$$= 16 + 2[f(3) - f(0)] = 16 + 4 = 20$$



$$f''(3) = 0$$

$$f'(0) = 2; f'(3) = -2$$



HIGHER EDUCATION PRESS



目录



上页



下页



返回



结束

例13. 若 $f(x) \in C[0, 1]$, 试证 :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x f(\sin x) \mathrm{d} x &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) \mathrm{d} x \quad \checkmark \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \mathrm{d} x\end{aligned}$$

解: 令 $t = \pi - x$, 则

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x f(\sin x) \mathrm{d} x &= -\int_{\pi}^0 (\pi - t) f(\sin t) \mathrm{d} t \\ &= \pi \int_0^{\pi} f(\sin t) \mathrm{d} t - \int_0^{\pi} t f(\sin t) \mathrm{d} t\end{aligned}$$

$$\therefore \int_0^{\pi} x f(\sin x) \mathrm{d} x = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) \mathrm{d} x$$



因为

$$\int_0^{\pi} f(\sin x) \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x) \mathrm{d}x$$

↓ 对右端第二个积分令 $t = \pi - x$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \mathrm{d}x$$

综上所述

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x f(\sin x) \mathrm{d}x &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) \mathrm{d}x \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \mathrm{d}x \end{aligned}$$



例14. 证明恒等式

$$\int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t} \, dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t} \, dt = \frac{\pi}{4} \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$$

证: 令 $f(x) = \int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t} \, dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t} \, dt$

则 $f'(x) = 2x \sin x \cos x - 2x \sin x \cos x = 0$

因此 $f(x) = c \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$, 又

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin \sqrt{t} \, dt + \int_0^{\frac{1}{2}} \arccos \sqrt{t} \, dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (\arcsin \sqrt{t} + \arccos \sqrt{t}) \, dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{2} \, dt = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

故所证等式成立.



例15. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $g(x) \neq 0$, 试证至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}$$

分析: 即证 $\underline{g(\xi)} \int_a^b f(x) dx - \underline{f(\xi)} \int_a^b g(x) dx = 0$

$$\text{即} \left[\int_a^x g(x) dx \int_a^b f(x) dx - \int_a^x f(x) dx \int_a^b g(x) dx \right]'_{x=\xi} = 0$$

故作辅助函数

$$F(x) = \int_a^x g(x) dx \int_a^b f(x) dx - \int_a^x f(x) dx \int_a^b g(x) dx$$



证明: 令

$$F(x) = \int_a^x g(x) dx \int_a^b f(x) dx - \int_a^x f(x) dx \int_a^b g(x) dx$$

因 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 故 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $F(a) = F(b) = 0$, 故由罗尔定理知, 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $F'(\xi) = 0$, 即

$$g(\xi) \int_a^b f(x) dx - f(\xi) \int_a^b g(x) dx = 0$$

因在 $[a, b]$ 上 $g(x)$ 连续且不为0, 从而不变号, 因此

$$\int_a^b g(x) dx \neq 0$$

故所证等式成立.



思考：本题能否用柯西中值定理证明？

如果能, 怎样设辅助函数？

$$\text{要证: } \frac{\int_a^b f(x) \mathrm{d} x}{\int_a^b g(x) \mathrm{d} x} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}, \quad \xi \in (a, b)$$

提示：设辅助函数 $F(x) = \int_a^x f(t) \mathrm{d} t$

$$G(x) = \int_a^x g(t) \mathrm{d} t$$



例16. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f'(x) > 0$. 若 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在, 证明:

(1) 在 (a, b) 内 $f(x) > 0$;

(2) 在 (a, b) 内存在点 ξ , 使

$$\frac{b^2 - a^2}{\int_a^b f(x) dx} = \frac{2\xi}{f(\xi)}$$

(3) 在 (a, b) 内存在与 ξ 相异的点 η , 使

$$f'(\eta)(b^2 - a^2) = \frac{2\xi}{\xi - a} \int_a^b f(x) dx$$



证: (1) $\because \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在, $\therefore \lim_{x \rightarrow a^+} f(2x-a) = 0$,

由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 知 $f(a) = 0$. 又 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调增, 因此

$$f(x) > f(a) = 0, \quad x \in (a, b)$$

(2) 设 $F(x) = x^2$, $g(x) = \int_a^x f(x) dx \quad (a \leq x \leq b)$

则 $g'(x) = f(x) > 0$, 故 $F(x), g(x)$ 满足柯西中值定理条件, 于是存在 $\xi \in (a, b)$, 使

$$\frac{F(b) - F(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{b^2 - a^2}{\int_a^b f(t) dt - \int_a^a f(t) dt} = \frac{(x^2)'}{\left(\int_a^x f(t) dt\right)'} \Big|_{x=\xi}$$



即

$$\frac{b^2 - a^2}{\int_a^b f(t) \mathrm{d}t} = \frac{2\xi}{f(\xi)}$$

$$(3) \text{ 因 } f(\xi) = f(\xi) - 0 = f(\xi) - f(a)$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \text{在 } [a, \xi] \text{ 上用拉格朗日中值定理} \\ = f'(\eta)(\xi - a), \quad \eta \in (a, \xi) \end{array}$$

代入(2)中结论得

$$\frac{b^2 - a^2}{\int_a^b f(t) \mathrm{d}t} = \frac{2\xi}{f'(\eta)(\xi - a)}$$

因此得

$$f'(\eta)(b^2 - a^2) = \frac{2\xi}{\xi - a} \int_a^b f(x) \mathrm{d}x$$



例17. 设 $f(x) \in C[a, b]$, 且 $f(x) > 0$, 试证:

$$\int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geq (b-a)^2 \quad \textcircled{2}$$

证: 设 $F(x) = \int_a^x f(t) dt \int_a^x \frac{dt}{f(t)} - (x-a)^2$

$$\begin{aligned} \text{则 } F'(x) &= f(x) \int_a^x \frac{dt}{f(t)} + \frac{1}{f(x)} \int_a^x f(t) dt - 2(x-a) \\ &= \int_a^x \left[\frac{f(x)}{f(t)} + \frac{f(t)}{f(x)} - 2 \right] dt = \int_a^x \frac{[f(x) - f(t)]^2}{f(x)f(t)} dt \\ &\geq 0 \quad x > a, f(x) > 0 \end{aligned}$$

故 $F(x)$ 单调不减, $\therefore F(b) \geq F(a) = 0$, 即 $\textcircled{2}$ 成立.

