习题课

中值定理及导数的应用

一、 微分中值定理及其应用

二、 导数应用

一、 微分中值定理及其应用

1. 微分中值定理及其相互关系

罗尔定理 $\xleftarrow{f(a)=f(b)}$ 拉格朗日中值定理

$f'(\xi)=0$

$F(x)=x$

$f(a)=f(b)$

$F(x)=x$

$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$n=0$

柯西中值定理 泰勒中值定理

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$
$$+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

2. 微分中值定理的主要应用

(1) 研究函数或导数的性态

(2) 证明恒等式或不等式

(3) 证明有关中值问题的结论

3. 有关中值问题的解题方法

利用**逆向思维**, 设辅助函数 . 一般解题方法:

(1) 证明含一个中值的等式或根的存在，多用**罗尔定理**, 可用原函数法找辅助函数 .

(2) 若结论中涉及含中值的两个不同函数 , 可考虑用**柯西中值定理** .

(3) 若结论中含两个或两个以上的中值，必须**多次应用中值定理** .

(4) 若已知条件中含高阶导数 , 多考虑用**泰勒公式** , 有时也可考虑**对导数用中值定理** .

(5) 若结论为不等式 , 要注意**适当放大**或**缩小**的技巧.

例1. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导, 且 $|f'(x)| \le M$, 证明 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

证: 取点 $x_0 \in (a,b)$, 再取异于 x_0 的点 $x \in (a,b)$, 对 $f(x)$ 在以 x_0, x 为端点的区间上用拉氏中值定理, 得

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) \quad (\xi \text{ 界于 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad |f(x)| &= |f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)| \\ &\le |f(x_0)| + |f'(\xi)||x - x_0| \\ &\le |f(x_0)| + M(b-a) = K \quad \text{(定数)} \end{aligned}$$

可见对任意 $x \in (a,b)$, $|f(x)| \le K$, 即得所证 .

例2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(1)=0$, 证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使

$$f'(\xi)=-\frac{2f(\xi)}{\xi}$$

证: 问题转化为证 $\xi f'(\xi)+2f(\xi)=0.$

设辅助函数 $\varphi(x)=x^2 f(x)$

显然 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理条件, 故至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使

$$\varphi'(\xi)=2\xi f(\xi)+\xi^2 f'(\xi)=0$$

即有 $$f'(\xi)=-\frac{2f(\xi)}{\xi}$$

例3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $0<a<b$, 试证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$.

证: 欲证 $\dfrac{f'(\xi)}{a+b}=\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}$, 即要证 $\dfrac{f'(\xi)(b-a)}{b^2-a^2}=\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}$.

因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉氏中值定理条件, 故有

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\quad \xi\in(a,b) \qquad ①$$

又因 $f(x)$ 及 x^2 在 $[a,b]$ 上满足柯西定理条件, 故有

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta},\quad \eta\in(a,b) \qquad ②$$

将①代入②, 化简得 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta),\quad \xi,\eta\in(a,b)$

例4. 设实数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 满足下述等式

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0$$

证明方程 $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个实根 .

证: 令 $F'(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, 则可设

$$F(x) = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

显然, $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $F(0) = F(1) = 0$, 由罗尔定理知存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使 $F'(\xi) = 0$, 即 $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个实根 ξ.

例5. 设函数 $f(x)$ 在[0, 3]上连续, 在(0, 3)内可导, 且 $f(0)+f(1)+f(2)=3,\ f(3)=1$, 试证必存在 $\xi\in(0,3)$, 使 $f'(\xi)=0$.

证: 因 $f(x)$ 在[0, 3]上连续, 所以在[0, 2]上连续, 且在[0, 2]上有最大值 M 与最小值 m, 故

$$m\le f(0),\ f(1),\ f(2)\le M \longrightarrow m\le\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}\le M$$

由介值定理, 至少存在一点 $c\in[0,2]$, 使

$$f(c)=\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1$$

$\because\ f(c)=f(3)=1$, 且 $f(x)$ 在$[c,3]$上连续, 在$(c,3)$内可导, 由罗尔定理知, 必存在 $\xi\in(c,3)\subset(0,3)$, 使 $f'(\xi)=0$.

例6. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, $f(0)=f(1)$,

且 $|f''(x)|\le 2$, 证明 $|f'(x)|\le 1$.

证: $\forall x\in[0,1]$, 由泰勒公式得

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\tfrac{1}{2}f''(\eta)(1-x)^2 \quad (0<\eta<1)$$

$$f(0)=f(x)-f'(x)\,x+\tfrac{1}{2}f''(\xi)\,x^2 \quad (0<\xi<1)$$

两式相减得 $0=f'(x)+\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x)^2-\frac{1}{2}f''(\xi)x^2$

$$\therefore \quad |f'(x)|=\left|\tfrac{1}{2}f''(\eta)(1-x)^2-\tfrac{1}{2}f''(\xi)x^2\right|$$

$$\le \tfrac{1}{2}|f''(\eta)|(1-x)^2+\tfrac{1}{2}|f''(\xi)|x^2$$

$$\le (1-x)^2+x^2=1-2x(1-x)\le 1, \quad x\in[0,1]$$

二、 导数应用

1. 研究函数的性态:

增减， 极值， 凹凸，拐点，渐近线， 曲率

2. 解决最值问题

- 目标函数的建立与简化
- 最值的判别问题

3. 其他应用： 求不定式极限； 几何应用；

相关变化率; 证明不等式； 研究方程实根等.

**4. 补充定理 (见下页)

定理. 设函数 $f(x), g(x)$在 $(a, +\infty)$上具有n 阶导数,

且 (1) $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a) \ (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$

(2) $f^{(n)}(x) > g^{(n)}(x) \ (x > a)$

则当 $x > a$ 时 $f(x) > g(x)$.

证: 令 $\varphi(x) = f(x) - g(x)$, 则

$$\varphi^{(k)}(a) = 0 \ (k = 0, 1, \cdots, n-1); \quad \varphi^{(n)}(x) > 0 \ (x > a)$$

利用$\varphi(x)$ 在 $x = a$ 处的 n 一1 阶泰勒公式得

$$\varphi(x) = \frac{\varphi^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n > 0 \quad (a < \xi < x)$$

因此 $x > a$ 时 $f(x) > g(x)$.

例7. 填空题

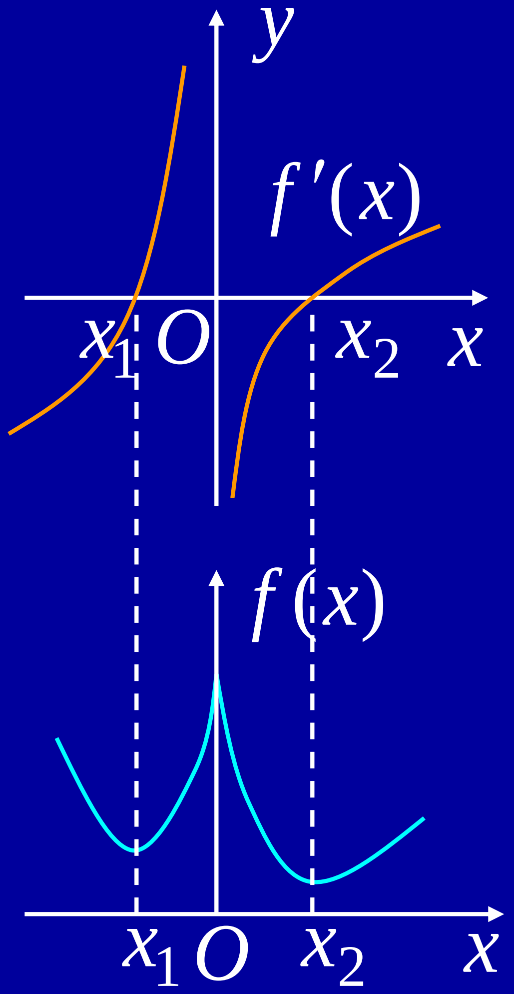
(1) 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，其导数图形如图所示，则$f(x)$的

单调减区间为 $\underline{(-\infty, x_1), (0, x_2)}$;

单调增区间为 $\underline{(x_1, 0), (x_2, +\infty)}$;

极小值点为 $\underline{x_1,\ x_2}$;

极大值点为 $\underline{x = 0}$.



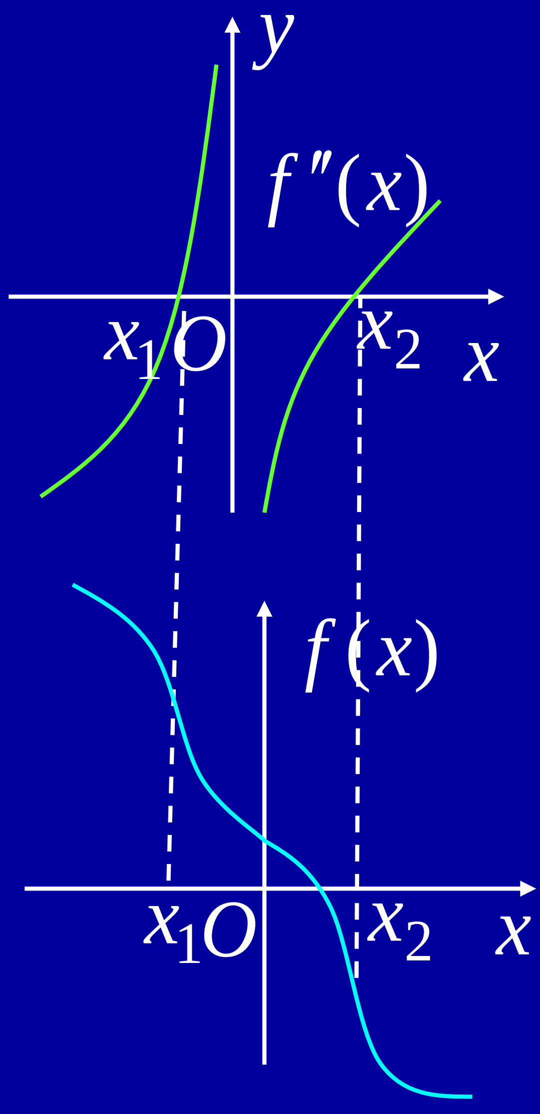
提示: 根据$f(x)$的连续性及导函数的正负作$f(x)$的示意图.

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，$f''(x)$ 的图形如图所示，则函数 $f(x)$ 的图形在区间 $\underline{(x_1, 0), (x_2, +\infty)}$ 上是凹弧；

在区间 $\underline{(-\infty, x_1), (0, x_2)}$ 上是凸弧；

拐点为

$\underline{(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), (0, f(0))}$.



提示: 根据 $f(x)$ 的可导性及 $f''(x)$ 的正负作 $f(x)$ 的示意图.

例8. 证明 $f(x)=(1+\frac{1}{x})^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加.

证: $\ln f(x)=x\ln(1+\frac{1}{x})$

$$=x[\ln(1+x)-\ln x]$$

$$\therefore \quad f'(x)=(1+\frac{1}{x})^x[\ln(1+x)-\ln x-\frac{1}{1+x}]$$

令 $F(t)=\ln t$, 在 $[x, x+1]$上利用拉氏中值定理, 得

$$\ln(1+x)-\ln x=\frac{1}{\xi}>\frac{1}{1+x} \quad (0<x<\xi<x+1)$$

故当 $x>0$ 时, $f'(x)>0$, 从而 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增.

例9. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导, 且 $f(x)+f'(x)>0$, 证明 $f(x)$ 至多只有一个零点 .

证: 设 $\varphi(x)=\mathrm{e}^{x}f(x)$

则 $\varphi'(x)=\mathrm{e}^{x}[f(x)+f'(x)]>0$

故 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续单调递增, 从而至多只有一个零点 .

又因 $\mathrm{e}^{x}>0$, 因此 $f(x)$ 也至多只有一个零点 .

思考: 若题中 $f(x)+f'(x)>0$ 改为 $f(x)-f'(x)<0$, 其他不变时, 如何设辅助函数? $\boxed{\varphi(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)}$

例10. 求数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大项 .

证: 设 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}\ (x\geq 1)$, 用对数求导法得

$$f'(x)=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$$

$\boxed{\text{极大值}}$

令 $f'(x)=0$, 得 $x=\mathrm{e}$,

列表判别:

x	$[1,\mathrm{e})$	e	$(\mathrm{e},+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$	$\searrow$

因为 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 只有唯一的极大值点 $x=\mathrm{e}$, 因此在 $x=\mathrm{e}$ 处 $f(x)$ 也取最大值 .

又因 $2<\mathrm{e}<3$, 且 $\sqrt{2}=\sqrt[4]{4}<\sqrt[3]{3}$, 故 $\sqrt[3]{3}$ 为数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 中的最大项 .

例11. 证明 $\ln(1+x) > \dfrac{\arctan x}{1+x} \quad (x>0).$

证: 设 $\varphi(x) = (1+x)\ln(1+x) - \arctan x$, 则 $\varphi(0)=0$

$$\varphi'(x) = 1 + \ln(1+x) - \frac{1}{1+x^2} > 0 \qquad (x>0)$$

故 $x>0$ 时, $\varphi(x)$单调增加 , 从而 $\varphi(x) > \varphi(0) = 0$

即 $$\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x} \quad (x>0)$$

思考: 证明 $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} < \dfrac{\ln(1+x)}{\arcsin x}$ $(0<x<1)$ 时, 如何设辅助函数更好 ?

提示: $\varphi(x) = (1+x)\ln(1+x) - \sqrt{1-x^2}\arcsin x$

例12. 设 $f(0)=0$, 在 $[0,+\infty)$ 上 $f'(x)$ 存在，且单调递减，证明对一切 $a>0, b>0$ 有

$$f(a+b)<f(a)+f(b)$$

证: 设 $\varphi(x)=f(a+x)-f(a)-f(x)$, 则 $\varphi(0)=0$

$$\varphi'(x)=f'(a+x)-f'(x)<0 \quad (x>0)$$

所以当 $x>0$ 时, $\varphi(x)<\varphi(0)=0$

令 $x=b$, 得

$$\varphi(b)=f(a+b)-f(a)-f(b)<0$$

即所证不等式成立 .

例13. 证明:当$0<x<1$时, $\mathrm{e}^{2x}<\dfrac{1+x}{1-x}$.

证: 只要证 $(1-x)\mathrm{e}^{2x}-1-x<0 \quad (0<x<1)$

设 $f(x)=(1-x)\mathrm{e}^{2x}-1-x,$ 则 $f(0)=0$

$$f'(x)=(1-2x)\mathrm{e}^{2x}-1, \qquad f'(0)=0$$

$$f''(x)=-4x\mathrm{e}^{2x}<0 \quad (0<x<1)$$

利用一阶泰勒公式, 得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2$$

$$=-2\xi\mathrm{e}^{2\xi}x^2<0 \quad (0<\xi<x<1)$$

故原不等式成立.

例14. 证明当 $x>0$ 时, $(x^2-1)\ln x \ge (x-1)^2$.

证: 令 $f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2$, 则 $f(1)=0$

$$f'(x)=2x\ln x+x-\frac{1}{x}-2(x-1),\qquad f'(1)=0$$

$$f''(x)=2\ln x+1+\frac{1}{x^2},\qquad f''(1)=2>0$$

$$f'''(x)=\frac{2(x^2-1)}{x^3}$$

法1. 由 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的二阶泰勒公式 , 得

$$f(x)=\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-1)^3$$

$$=(x-1)^2+\frac{\xi^2-1}{3\xi^3}(x-1)^3\ \ge 0 \qquad (x>0,\xi \text{在} x \text{与} 1 \text{之间})$$

故所证不等式成立 .

法2. 列表判别.

$f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2,\qquad f(1)=0$

$f'(x)=2x\ln x-\frac{1}{x}+2\qquad f'(1)=0$

$f''(x)=2\ln x+\frac{1}{x^2}+1,\qquad f''(1)=2>0$

$f'''(x)=\frac{2(x^2-1)}{x^3}$

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'''(x)$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$\searrow\ +$	2	$\nearrow\ +$
$f'(x)$	$\nearrow\ -$	0	$\nearrow\ +$
$f(x)$	$\searrow\ +$	0	$\nearrow\ +$

故当$x>0$时 $f(x)\geq 0$, 即 $(x^2-1)\ln x\geq(x-1)^2$.

例15. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\arctan\dfrac{a}{n}-\arctan\dfrac{a}{n+1})\quad (a\neq 0)$

解法1 利用中值定理求极限

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty} n^2\frac{1}{1+\xi^2}(\frac{a}{n}-\frac{a}{n+1})\quad (\xi\text{在}\frac{a}{n}\text{与}\frac{a}{n+1}\text{之间})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n(n+1)}\cdot\frac{a}{1+\xi^2}$$

$$=a$$

解法2 利用泰勒公式

令 $f(x)=\arctan x$, 则

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2},\qquad f''(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$\therefore\quad f(x)=f(0)+f'(0)x+\tfrac{1}{2!}f''(0)x^2+o(x^2)$$

$$=x+o(x^2)$$

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}n^2\left\{\left[\frac{a}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-\left[\frac{a}{n+1}+o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right]\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{an^2}{n(n+1)}+\frac{+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}\right]=a$$

解法3 利用洛必达法则

$$\text{原式} = \lim_{x\to\infty} \frac{\arctan\frac{a}{x} - \arctan\frac{b}{x}}{\frac{1}{x^2}}$$

令 $t = \dfrac{1}{x}$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\arctan at - \arctan bt}{t^2}$$

$$= \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\frac{a}{n} - \arctan\frac{a}{n+1}\right) \quad (a \neq 0)$$

作业

备用题

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有二阶导数，且满足 $f''(x)>0$, $f(1)<f(2)$, 证明序列 $\{f(n)\}$ 发散.

(2007 考研）

证: $\because f''(x)>0$, $\therefore f'(x)$ 单调递增,

$\because f(1)<f(2)$, $\therefore f(2)-f(1)=f'(\xi_1)>0$, $\xi_1\in(1,2)$

$\therefore f'(x)>f'(\xi_1)>0$, $x>\xi_1$

$$f(n)=f(2)+f'(2)(n-2)+\frac{f''(\xi)}{2!}(n-2)^2 \quad \xi\in(2,n)$$

$$> f(2)+f'(2)(n-2)\xrightarrow{n\to\infty}\infty$$

故序列 $\{f(n)\}$ 发散.

2. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=f(b)=0$, $f'(a)\cdot f'(b)>0$, 试证存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $f(\xi)=0$.

证: 不妨设 $f'(a)>0$, $f'(b)>0$.

$$f'(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$$

$$\xrightarrow[\text{定理}]{\text{保号性}} \text{必有 } x_1\in(a,\frac{a+b}{2}),\ \text{使 } \frac{f(x_1)}{x_1-a}>0,\ \text{故 } f(x_1)>0$$

$$f'(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}>0$$

$$\xrightarrow[\text{定理}]{\text{保号性}} \text{必有 } x_2\in(\frac{a+b}{2},b),\ \text{使 } \frac{f(x_2)}{x_2-b}>0,\ \text{故 } f(x_2)<0$$

又在 $[x_1,x_2]\subset[a,b]$ 上 $f(x)$ 连续，由零点定理知，存在 $\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$, 使 $f(\xi)=0$.

3. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0,\ f(1)=1$, 证明

(1) 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f(\xi)=1-\xi$

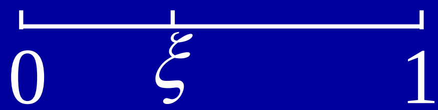
(2) 存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$, 使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$

(2005 考研）

证: (1) 令 $g(x)=f(x)+x-1$, 则 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且

$$g(0)=-1<0,\quad g(1)=1>0$$

故存在 $\xi\in(0,1)$ 使



$$g(\xi)=f(\xi)+\xi-1=0$$

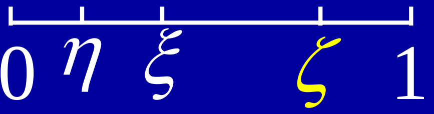
即 $$f(\xi)=1-\xi$$

3. 已知函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续, 在$(0,1)$内可导, 且 $f(0)=0,\ f(1)=1,$ 证明

(1) 存在$\xi\in(0,1)$, 使得 $f(\xi)=1-\xi$

(2) 存在两个不同的点$\eta,\zeta\in(0,1)$, 使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$

(2) 根据拉格朗日中值定理, 存在 $\eta\in(0,\xi)\subset(0,1)$, $\zeta\in(\xi,1)\subset(0,1)$, 使



$$f'(\eta)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}=\frac{1-\xi}{\xi}$$

$$f'(\zeta)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{\xi}{1-\xi}$$

$$\therefore\quad f'(\eta)f'(\zeta)=\frac{1-\xi}{\xi}\cdot\frac{\xi}{1-\xi}=1$$

4. 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a,b) 内具有二阶导数, 且存在相等的最大值, 并满足 $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$, 证明存在 $\xi \in (a,b)$, 使 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

(2007 考研)

证: 令 $F(x) = f(x) - g(x)$

情形1. $f(x), g(x)$ 在同一点 $c \in (a,b)$ 取得最大值,则有

$$F(a) = F(b) = F(c) = 0, \quad F'(c) = 0$$

据泰勒定理, 存在 $\xi \in (a,c) \subset (a,b)$, 使

$$F(a) = F(c) + F'(c)(a-c) + \frac{1}{2!}F''(\xi)(a-c)^2$$

由此得 $$F''(\xi) = 0$$

即有 $$f''(\xi) = g''(\xi), \xi \in (a,b)$$

4. 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a,b) 内具有二阶导数, 且存在相等的最大值, 并满足 $f(a)=g(a)$, $f(b)=g(b)$, 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

情形2. $f(x), g(x)$ 分别在点 $c, d\in(a,b)$ 取得最大值, 无妨设 $c<d$, 则有

$$F(c)=f(c)-g(c)>0,\quad F(d)=f(d)-g(d)<0$$

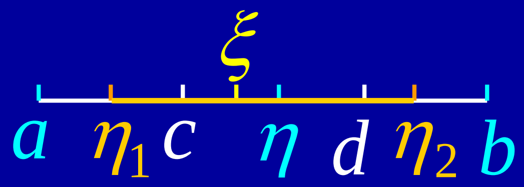
因此据零点定理, 存在 $\eta\in(c,d)\subset(a,b)$ 使 $F(\eta)=0$

又 $F(a)=F(b)=0$, 分别在 $(a,\eta), (\eta,b)$ 上对 $F(x)$ 应用罗尔定理得

$$F'(\eta_1)=0,\ \eta_1\in(a,\eta);\quad F'(\eta_2)=0,\ \eta_2\in(\eta,b)$$

再对 $F'(x)$ 在 (η_1,η_2) 上用罗尔定理得

$$F''(\xi)=0,\quad \xi\in(\eta_1,\eta_2)\subset(a,b)$$



即有 $f''(\xi)=g''(\xi)\qquad \xi\in(a,b)$