第三节 定积分的换元法和分部积分法

不定积分 $\left\{\begin{array}{l}\text{换元积分法}\\ \text{分部积分法}\end{array}\right. \longrightarrow$ 定积分 $\left\{\begin{array}{l}\text{换元积分法}\\ \text{分部积分法}\end{array}\right.$

一、定积分的换元法

二、定积分的分部积分法

一、定积分的换元法

定理1. 设函数 $f(x)\in C[a,b]$, 单值函数 $x=\varphi(t)$ 满足:

1) $\varphi(t)\in C^1[\alpha,\beta]$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$;

2) 在 $[\alpha,\beta]$ 上 $a\le\varphi(t)\le b$,

则
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

证: 所证等式两边被积函数都连续, 因此积分都存在, 且它们的原函数也存在. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $F[\varphi(t)]$ 是 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的原函数, 因此有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]$$
$$=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

说明:

1) 当$\beta < \alpha$, 即区间换为$[\beta, \alpha]$时, 定理 1 仍成立 .

2) 必需注意**换元必换限**, 原函数中的变量不必代回 .

3) 换元公式也可反过来使用, 即

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad (令 x = \varphi(t))$$

或配元 $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\underline{\varphi'(t)\,\mathrm{d}t} = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\mathrm{d}\varphi(t)$

配元不换限

例1. 计算 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \quad (a > 0)$.

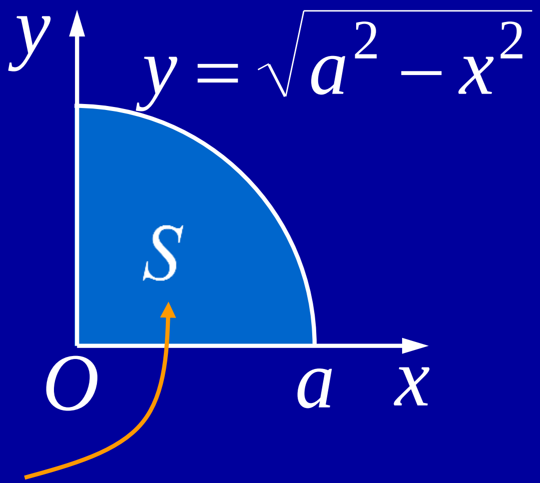
解: 令 $x = a\sin t$, 则 $\mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t$, 且

当 $x = 0$ 时, $t = 0$; $\quad x = a$ 时, $t = \frac{\pi}{2}$.

$$\therefore \quad 原式 = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}$$



例2. 计算 $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$.

解: 令 $t=\sqrt{2x+1}$, 则 $x=\frac{t^2-1}{2}$, $\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t$, 且

当 $x=0$ 时, $t=1$; $x=4$ 时, $t=3$.

$$\therefore \quad 原式 = \int_1^3 \frac{\frac{t^2-1}{2}+2}{t}\,t\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^3 (t^2+3)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}t^3+3t\right)\Big|_1^3=\frac{22}{3}$$

例3. 设 $f(x)\in C[-a,a]$,

偶倍奇零

(1) 若 $f(-x)=f(x)$, 则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$

(2) 若 $f(-x)=-f(x)$, 则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

证: $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x} + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$

令 $x=-t$

$$= \int_{0}^{a} f(-t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{0}^{a} [\, f(-x) + f(x)\,]\,\mathrm{d}x$$

$$= \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x, & f(-x)=f(x)\text{时} \\ 0, & f(-x)=-f(x)\text{时} \end{cases}$$

例4. 设 $f(x)$ 是连续的周期函数, 周期为T, 证明:

(1) $\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$

(2) $\int_a^{a+nT} f(x)\,\mathrm{d}x = n\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x \quad (n \in \mathbf{N})$, 并由此计算

$$I = \int_0^{n\pi} \sqrt{1+\sin 2x}\,\mathrm{d}x$$

解: (1) 记 $\Phi(a) = \int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x$, 则

$$\Phi'(a) = f(a+T) - f(a) = 0$$

可见$\Phi(a)$与a无关, 因此$\Phi(a) = \Phi(0)$, 即

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$(2)\ \int_a^{a+nT} f(x)\,\mathrm{d}x = n\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x\quad (n\in\mathbf{N})$$，并由此计算

$$\int_0^{n\pi}\sqrt{1+\sin 2x}\,\mathrm{d}x$$

$$(2)\quad \int_a^{a+nT} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a+kT}^{a+kT+T} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$(1)\ \int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$$

将$a+kT$看作(1)中的a，则有

$$\int_{a+kT}^{a+kT+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= n\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x\quad (n\in\mathbf{N})$$

$$\int_0^{n\pi}\sqrt{1+\sin 2x}\,\mathrm{d}x = n\int_0^{\pi}\sqrt{1+\sin 2x}\,\mathrm{d}x$$

$\sqrt{1+\sin 2x}$ 是以π为周期的周期函数

$$\int_0^{n\pi}\sqrt{1+\sin 2x}\,\mathrm{d}x = n\int_0^{\pi}\sqrt{1+\sin 2x}\,\mathrm{d}x$$

$$= n\int_0^{\pi}\sqrt{(\cos x+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= n\int_0^{\pi}\left|\cos x+\sin x\right|\mathrm{d}x$$

$$= n\sqrt{2}\int_0^{\pi}\left|\sin(x+\tfrac{\pi}{4})\right|\mathrm{d}x$$

令 $t = x+\frac{\pi}{4}$

$$= n\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\left|\sin t\right|\mathrm{d}t$$

$$= n\sqrt{2}\int_0^{\pi}\left|\sin t\right|\mathrm{d}t$$

$$= n\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin t\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{2}\,n$$

$$\boxed{(1)\ \int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{T} f(x)\,\mathrm{d}x}$$

二、定积分的分部积分法

定理2. 设 $u(x), v(x) \in C^1[a, b]$, 则

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x$$

证: $\because\ [u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$$\Big\downarrow \text{两端在 } [a,b] \text{ 上积分}$$

$$u(x)v(x)\Big|_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x}$$

$$\therefore\quad \int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x$$

例5. 计算 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x \, \mathrm{d}x$.

解: 原式 $= x \arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2)^{\frac{-1}{2}} \mathrm{d}(1-x^2)$$

$$= \frac{\pi}{12} + (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$

例6. 证明 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x$

$$=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{ 为偶数}\\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$$

证: 令 $t=\frac{\pi}{2}-x$, 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^n\left(\tfrac{\pi}{2}-t\right)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x$$

令 $u=\sin^{n-1}x$, $v'=\sin x$, 则 $u'=(n-1)\sin^{n-2}x\cos x$,

$v=-\cos x$

$$\therefore\quad I_n=\underbrace{\left[-\cos x\cdot\sin^{n-1}x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$I_n = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x \,\mathrm{d}x$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1-\sin^2 x) \,\mathrm{d}x$$

$$= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

$$\boxed{I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x}$$

由此得递推公式 $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

于是 $$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \cdots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0$$

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \cdots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot I_1$$

而 $$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}, \qquad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \,\mathrm{d}x = 1$$

故所证结论成立 .

内容小结

基本积分法 $\begin{cases} \text{换元积分法} \\ \text{分部积分法} \end{cases}$

换元必换限
配元不换限
边积边代限

思考与练习

1. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^x \sin^{100}(x-t)\,\mathrm{d}t = \underline{\ \sin^{100} x\ }$

提示: 令 $u = x - t$, 则

$$\int_0^x \sin^{100}(x-t)\,\mathrm{d}t = -\int_x^0 \sin^{100} u\,\mathrm{d}u$$

2. 设 $f(t)\in C^1$, $f(1)=0$, $\int_1^{x^3} f'(t)\,\mathrm{d}t=\ln x$, 求 $f(\mathrm{e})$.

解法1. $\ln x=\int_1^{x^3} f'(t)\,\mathrm{d}t=f(x^3)-f(1)=f(x^3)$

令 $u=x^3$, 得 $f(u)=\ln\sqrt[3]{u}=\frac{1}{3}\ln u \Longrightarrow f(\mathrm{e})=\frac{1}{3}$

解法2. 对已知等式两边求导,

得 $3x^2 f'(x^3)=\frac{1}{x}$

令 $u=x^3$, 得 $f'(u)=\frac{1}{3u}$

$\therefore\quad f(\mathrm{e})=\int_1^{\mathrm{e}} f'(u)\,\mathrm{d}u+f(1)$

$=\frac{1}{3}\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{3}$

思考: 若改题为

$$\int_1^{x^3} f'(\sqrt[3]{t})\,\mathrm{d}t=\ln x$$

$$f(\mathrm{e})=?$$

提示: 两边求导, 得

$$f'(x)=\frac{1}{3x^3}$$

$$f(\mathrm{e})=\int_1^{\mathrm{e}} f'(x)\,\mathrm{d}x$$

3. 设 $f''(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 且 $f(0)=1, f(2)=3, f'(2)=5$, 求 $\int_0^1 x\,f''(2x)\,\mathrm{d}x$.

解: $\int_0^1 x\,\underline{f''(2x)\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\int_0^1 x\,\mathrm{d}f'(2x)$ **(分部积分)**

$$= \frac{1}{2}\left[\, x f'(2x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f'(2x)\,\mathrm{d}x \,\right]$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{1}{4} f(2x)\Big|_0^1$$

$$= 2$$

作业

课后题

备用题

1. 证明 $f(x)=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin x|\,\mathrm{d}x$ 是以 π 为周期的函数.

证： $f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\pi+\frac{\pi}{2}}|\sin u|\,\mathrm{d}u$

令 $u=t+\pi$

$$=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin(t+\pi)|\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,\mathrm{d}t=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin x|\,\mathrm{d}x$$

$$=f(x)$$

$\therefore f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0$，试证 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)\underline{f''(x)\,\mathrm{d}x}$

证： 右端 $=\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)\,\mathrm{d}f'(x)$ 　$\boxed{\text{分部积分}}$

$$=\frac{1}{2}\left[(x-a)(x-b)f'(x)\right]\Big|_a^b-\frac{1}{2}\int_a^b \underline{f'(x)}(2x-a-b)\,\underline{\mathrm{d}x}$$

$$=-\frac{1}{2}\int_a^b (2x-a-b)\,\mathrm{d}f(x)$$ 　$\boxed{\text{再次分部积分}}$

$$=-\frac{1}{2}\left[(2x-a-b)f(x)\right]\Big|_a^b+\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\text{左端}$$