第二节

洛必达法则

一、$\frac{0}{0}$ 型未定式

二、$\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式

三、其他未定式

微分中值定理 $\left\{ \begin{array}{l} \text{函数的性态} \\ \quad \downarrow\uparrow \\ \text{导数的性态} \end{array} \right.$

本节研究:

函数之商的极限 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\left(\dfrac{0}{0}\text{ 或 }\dfrac{\infty}{\infty}\text{ 型}\right)$

$\big\downarrow$ 转化

洛必达法则

导数之商的极限 $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$


洛必达，G.-F.-A. de

一、$\dfrac{0}{0}$型未定式

定理 1.

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} F(x)=0$

2) $f(x)$与$F(x)$ 在$\overset{\circ}{U}(a)$内可导,且 $F'(x)\neq 0$

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在 (或为∞)

$$\Longrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$$ (洛必达法则)

定理条件: 1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} F(x)=0$

2) $f(x)$与$F(x)$在$\mathring{U}(a)$内可导, 且 $F'(x)\neq 0$

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在 (或为∞)

证: 无妨假设 $f(a)=F(a)=0$, 在指出的邻域内任取 $x\neq a$, 则 $f(x), F(x)$在以 x, a 为端点的区间上满足柯西定理条件, 故

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{F(x)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} \quad (\,\xi\text{在}\,x\,,\,a\,\text{之间})$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}\overset{3)}{=\!=\!=}\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

洛必达法则 $\boxed{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}}$

推论1. 定理 1 中 $x\to a$ 换为下列过程之一:

$$x\to a^{+},\ \ x\to a^{-},\ \ x\to\infty,\ \ x\to+\infty,\ \ x\to-\infty$$

条件 2) 作相应的修改 , 定理 1 仍然成立.

推论 2. 若 $\lim\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 仍属 $\dfrac{0}{0}$ 型, 且 $f'(x),F'(x)$满足定理1条件, 则

$$\lim\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\frac{f'(x)}{F'(x)}=\lim\frac{f''(x)}{F''(x)}$$

例1. 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

$\dfrac{0}{0}$ 型

解: 原式 $\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}$

$\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x}{6x-2}=\dfrac{3}{2}$

注意: 不是未定式不能用洛必达法则！

$$\lim_{x\to 1}\frac{6x}{6x-2}\neq\lim_{x\to 1}\frac{6}{6}=1$$

例2. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}$.

$\dfrac{0}{0}$ 型

解: 原式 $\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$

$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型

$=\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{x^2}+1}=1$

思考: 如何求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan n}{\frac{1}{n}}$ (n 为正整数) ?

二、$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式

定理 2.

1) $\lim\limits_{x\to a}|f(x)| = \lim\limits_{x\to a}|F(x)| = \infty$

2) $f(x)$ 与 $F(x)$ 在 $\overset{\circ}{U}(a)$ 内可导, 且 $F'(x) \neq 0$

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在 (或为∞)

$$\Longrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)} \qquad \text{(洛必达法则)}$$

证: 仅就极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}$ 存在的情形加以证明 .

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}\neq 0$的情形

$\dfrac{0}{0}$型

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\boxed{\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{F(x)}}{\frac{1}{f(x)}}}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{-1}{F^2(x)}F'(x)}{\frac{-1}{f^2(x)}f'(x)}$$

$$=\lim_{x\to a}\left[\left(\frac{f(x)}{F(x)}\right)^2\frac{F'(x)}{f'(x)}\right]=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{F(x)}\right)^2\lim_{x\to a}\frac{F'(x)}{f'(x)}$$

$$\therefore\quad 1=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{F'(x)}{f'(x)}$$

从而 $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}=0$ 的情形. 取常数 $k\neq 0$,

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{F(x)}+k\right)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)+kF(x)}{F(x)}$$

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)+kF(x)}{F(x)}=k\neq 0$, 可用 1) 中结论

$$=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)+kF'(x)}{F'(x)}=\lim_{x\to a}\left[\frac{f'(x)}{F'(x)}+k\right]$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

3) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{F(x)} = \infty$ 时, 结论仍然成立. (证明略)

说明: 定理中 $x \to a$ 换为

$$x \to a^{+}, \qquad x \to a^{-}, \qquad x \to \infty,$$

$$x \to +\infty, \qquad x \to -\infty$$

之一，条件 2) 作相应的修改 , 定理仍然成立.

例3. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}\ (n>0).$

$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{nx^n}=0$

例4. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{\mathrm{e}^{\lambda x}}\ (n>0,\lambda>0).$

$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型

解: (1) n 为正整数的情形.

$$原式=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{\lambda\mathrm{e}^{\lambda x}}\overset{洛}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda x}}$$

$$\overset{洛}{=}\cdots\overset{洛}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{\lambda^n\mathrm{e}^{\lambda x}}=0$$

例4. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{\mathrm{e}^{\lambda x}}\quad(n>\mathbf{0},\lambda>0).$

(2) n 不为正整数的情形.

存在正整数 k, 使当 $x>1$ 时,

$$x^k<x^n<x^{k+1}$$

从而

$$\frac{x^k}{\mathrm{e}^{\lambda x}}<\frac{x^n}{\mathrm{e}^{\lambda x}}<\frac{x^{k+1}}{\mathrm{e}^{\lambda x}}$$

用夹逼准则

由(1)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{\mathrm{e}^{\lambda x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{k+1}}{\mathrm{e}^{\lambda x}}=0$$

$$\therefore\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{\mathrm{e}^{\lambda x}}=0$$

说明:

1) 例3 , 例4 表明 $x \to +\infty$ 时,

$$\ln x, \qquad x^n\ (n>0), \qquad e^{\lambda x}\ (\lambda>0)$$

后者比前者趋于 $+\infty$ 更快 .

2) 在满足定理条件的某些情况下洛必达法则不能解决计算问题 . 例如,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \overset{\text{用洛必达法则}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

事实上 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = 1$

3) 若 $\lim \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 不存在 $(\neq \infty)$ 时, 不能用洛必达法则！

即 $$\lim \frac{f(x)}{F(x)} \neq \lim \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

例如, $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x} \neq \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\cos x}{1}$$

极限不存在

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

三、其他未定式: $0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0$型

解决方法:

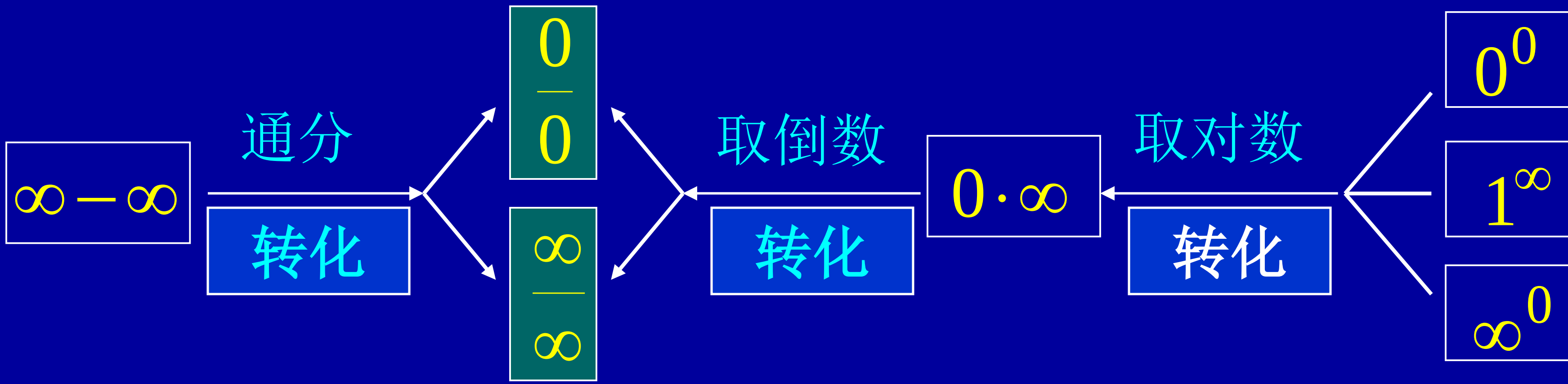
$$\infty-\infty \xrightarrow[\text{转化}]{\text{通分}} \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty} \xleftarrow[\text{转化}]{\text{取倒数}} 0\cdot\infty \xleftarrow[\text{转化}]{\text{取对数}} 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0$$

例5. 求 $\lim\limits_{x\to0^+} x^n\ln x\ (n>0)$.

$\boxed{0\cdot\infty\text{型}}$

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x^{-n}} \overset{\text{洛}}{=} \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-n\,x^{-n-1}}$

$$=\lim_{x\to0^+}\left(-\frac{x^n}{n}\right)=0$$



例6. 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$. $\boxed{\infty-\infty\text{型}}$

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$

$$\overset{洛}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0$$

$\infty-\infty$ $\xrightarrow[\text{转化}]{\text{通分}}$ $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ $\xleftarrow[\text{转化}]{\text{取倒数}}$ $0\cdot\infty$ $\xleftarrow[\text{转化}]{\text{取对数}}$ 0^0, 1^∞, ∞^0

例7. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x.$ $\boxed{0^0\text{型}}$

解: $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{x\ln x}$

利用 例5

$= \mathrm{e}^0 = 1$

例8. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^2 \sin x}$.

$\boxed{\dfrac{0}{0}\text{型}}$

解: 注意到 $\sin x \sim x$

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3} \overset{\text{洛}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}$$

$\boxed{\sec^2 x = 1 + \tan^2 x}$

$$= \frac{1}{3}$$

例9. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\,(\sqrt[n]{n}-1)$.

$\boxed{\infty\cdot 0\text{型}}$

法1. 直接用洛必达法则.

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{x}}-1}{x^{-\frac{1}{2}}}$$

下一步计算很繁！

法2. 利用例3结果.

$$\boxed{n^{\frac{1}{n}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln n}\xrightarrow{\text{例3}}1}$$

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{2}}(n^{\frac{1}{n}}-1)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln n}-1}{n^{-\frac{1}{2}}}$$

$$\boxed{\mathrm{e}^{u}-1\sim u}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\ln n}{n^{-\frac{1}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}}\overset{\text{例3}}{=}0$$

内容小结

洛必达法则

$0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型

$f^g = \mathrm{e}^{g \ln f}$

$\frac{0}{0}$ 型

$\frac{\infty}{\infty}$ 型

$\infty - \infty$ 型

$0 \cdot \infty$ 型

$$f - g = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{g} \cdot \frac{1}{f}}$$

$$f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}}$$

思考与练习

1. 设 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 是未定式极限，如果 $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 极限不存在，是否 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的极限也不存在？举例说明. 说明3)

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x + x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)} = \underline{\quad \frac{3}{2} \quad}$

$x \to 0$ 时，
$\ln(1+x) \sim x$
$1+\cos x \to 2$

分析： 原式 $\displaystyle = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x + x^2\cos\frac{1}{x}}{x} = \frac{1}{2}(3+0)$

3. $\lim\limits_{x\to0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=$ $\underline{\quad\dfrac{1}{6}\quad}$

分析: 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x\,(x-\sin x)}{x\sin^2 x}$

$\boxed{\sin x\sim x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to0}\cos x=1}$

$\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$

$\boxed{1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{6}$

4. 求 $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)$

解: 令 $t=\dfrac{1}{x}$, 则

$$\text{原式}=\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{1+2t}-2\sqrt{1+t}+1}{t^2}$$

$$\overset{洛}{=}\lim_{t\to0}\frac{(1+2t)^{-\frac{1}{2}}-(1+t)^{-\frac{1}{2}}}{2t}$$

$$\overset{洛}{=}\lim_{t\to0}\frac{-(1+2t)^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}(1+t)^{-\frac{3}{2}}}{2}=-\frac{1}{4}$$

备用题 求下列极限：

1) $\lim\limits_{x\to\infty}[x^2\ln(1+\frac{1}{x})-x]$;　　2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^{100}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{\sec x-\cos x}$.

解： 1) $\lim\limits_{x\to\infty}[x^2\ln(1+\frac{1}{x})-x]$　　(令 $t=\frac{1}{x}$)

$$=\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t^2}\ln(1+t)-\frac{1}{t}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}$$

$$\overset{洛}{=}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{-t}{2t(1+t)}=-\frac{1}{2}$$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{100}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$

解: 令 $t=\dfrac{1}{x^2}$, 则

$$\text{原式}=\lim_{t\to+\infty}t^{50}\,\mathrm{e}^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{50}}{\mathrm{e}^t}$$

(用洛必达法则)

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{50t^{49}}{\mathrm{e}^t}$$

(继续用洛必达法则)

$$=\cdots=\lim_{t\to+\infty}\frac{50!}{\mathrm{e}^t}=0$$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{\sec x-\cos x}$

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[(1+x^2)^2-x^2]}{\sec x-\cos x}$

$\boxed{\begin{array}{l} u\to 0\text{时} \\ \ln(1+u)\sim u \end{array}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2+x^4)}{\sec x-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^4}{\sec x-\cos x}$$

$$\overset{\text{洛}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x+4x^3}{\sec x\tan x-(-\sin x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{2+4x^2}{\sec^2 x+1}\right]=1$$