

第六节

平面及其方程

一、平面的点法式方程

二、平面的一般方程

三、两平面的夹角



一、平面的点法式方程

设一平面通过已知点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且垂直于非零向量 $\vec{n} = (A, B, C)$, 求该平面 Π 的方程.

任取点 $M(x, y, z) \in \Pi$, 则有

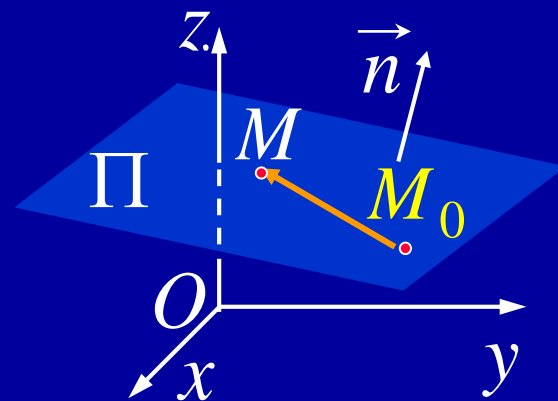
$$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$$

故
$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\downarrow \overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad ①$$

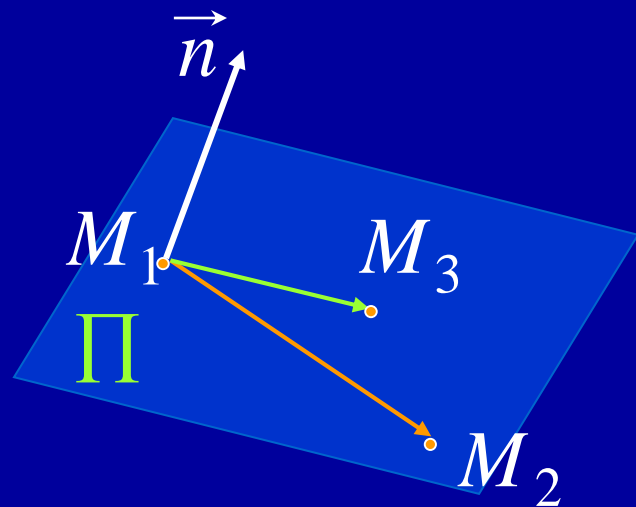
称①式为平面 Π 的**点法式方程**, 称 \vec{n} 为平面 Π 的**法向量**.



例1. 求过三点 $M_1(2, -1, 4)$, $M_2(-1, 3, -2)$, $M_3(0, 2, 3)$ 的平面 Π 的方程.

解: 取该平面 Π 的法向量为

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (14, 9, -1)\end{aligned}$$



又 $M_1 \in \Pi$, 利用点法式得平面 Π 的方程

$$14(x-2) + 9(y+1) - (z-4) = 0$$

即

$$14x + 9y - z - 15 = 0$$



说明：此平面的三点式方程也可写成

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-4 \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

一般情况：过三点 $M_k(x_k, y_k, z_k)$ ($k=1, 2, 3$) 的平面方程为

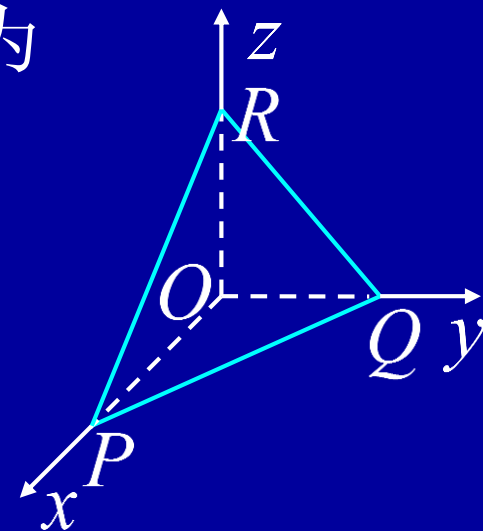
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$



特别, 当平面与三坐标轴的交点分别为
 $P(a,0,0)$, $Q(0,b,0)$, $R(0,0,c)$

时, 平面方程为

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (a, b, c \neq 0)$$



此式称为平面的**截距式方程**.

分析:

利用三点式

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

按第一行展开得 $(x-a)bc - y(-a)c + zab = 0$

$$\text{即} \quad bcx + acy + abz = abc$$



二、平面的一般方程

设有三元一次方程

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0) \quad \textcircled{2}$$

任取一组满足上述方程的数 x_0, y_0, z_0 , 则

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

以上两式相减, 得平面的点法式方程

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

显然方程②与此点法式方程等价, 因此方程②的图形是法向量为 $\vec{n} = (A, B, C)$ 的平面, 此方程称为**平面的一般方程**.



$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$$

特殊情形

- 当 $D = 0$ 时, $Ax + By + Cz = 0$ 表示 **通过原点** 的平面;
- 当 $A = 0$ 时, $By + Cz + D = 0$ 的法向量
 $\vec{n} = (0, B, C) \perp \vec{i}$, 平面平行于 x 轴;
- $Ax + Cz + D = 0$ 表示 **平行于 y 轴** 的平面;
- $Ax + By + D = 0$ 表示 **平行于 z 轴** 的平面;
- $Cz + D = 0$ 表示平行于 xOy 面的平面;
- $Ax + D = 0$ 表示平行于 yOz 面的平面;
- $By + D = 0$ 表示平行于 zOx 面的平面.



例2. 求通过 x 轴和点 $(4, -3, -1)$ 的平面方程.

解: 因平面通过 x 轴, 故 $A = D = 0$

设所求平面方程为

$$By + Cz = 0$$

代入已知点 $(4, -3, -1)$ 得 $C = -3B$

化简, 得所求平面方程

$$y - 3z = 0$$

例3. 用平面的一般式方程导出平面的截距式方程.

(自己练习)



三、两平面的夹角

两平面法向量的夹角(常指锐角)称为两平面的夹角.

设平面 Π_1 的法向量为 $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$

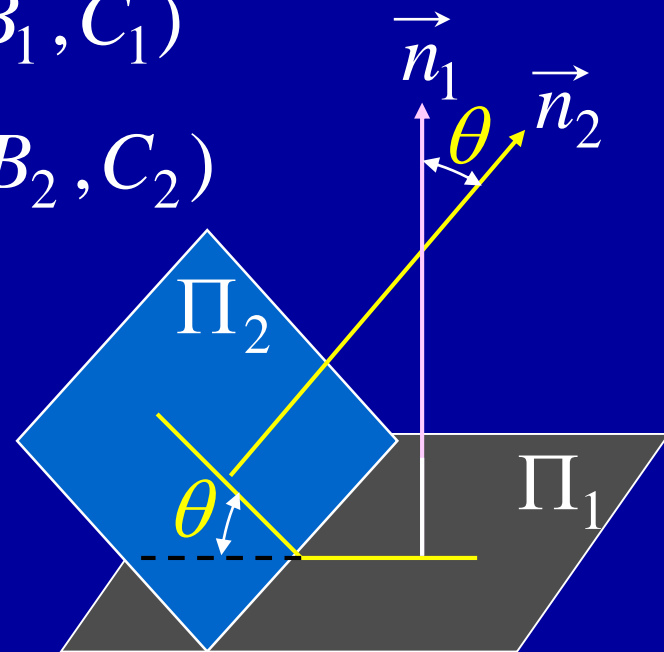
平面 Π_2 的法向量为 $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$

则两平面夹角 θ 的余弦为

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

即

$$\cos \theta = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

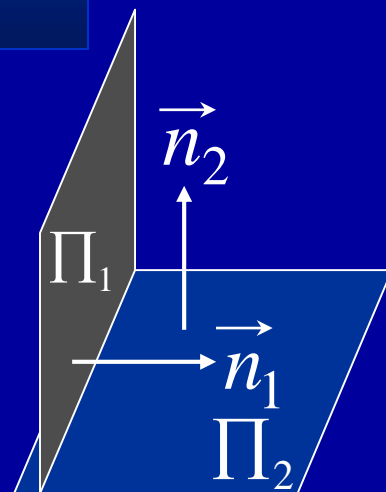


$$\begin{aligned} \Pi_1 : \vec{n}_1 &= (A_1, B_1, C_1) \\ \Pi_2 : \vec{n}_2 &= (A_2, B_2, C_2) \end{aligned} \quad \cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

特别有下列结论:

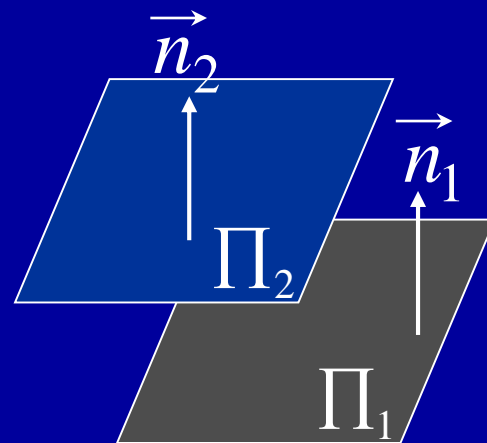
$$(1) \quad \Pi_1 \perp \Pi_2 \iff \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$$

$$\iff A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$$



$$(2) \quad \Pi_1 // \Pi_2 \iff \vec{n}_1 // \vec{n}_2$$

$$\iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$



例4. 一平面通过两点 $M_1(1,1,1)$ 和 $M_2(0,1,-1)$, 且垂直于平面 $\Pi: x + y + z = 0$, 求其方程.

解: 设所求平面的法向量为 $\vec{n} = (A, B, C)$, 则所求平面方程为 $A(x-1) + B(y-1) + C(z-1) = 0$

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{M_1M_2} \implies -A + 0 \cdot B - 2C = 0, \text{ 即 } A = -2C$$

$$\vec{n} \perp \Pi \text{ 的法向量} \implies A + B + C = 0, \text{ 故}$$

$$B = -(A + C) = C$$

$$\text{因此有 } -2\cancel{C}(x-1) + \cancel{C}(y-1) + \cancel{C}(z-1) = 0 \quad (C \neq 0)$$

$$\text{约去 } C, \text{ 得 } -2(x-1) + (y-1) + (z-1) = 0$$

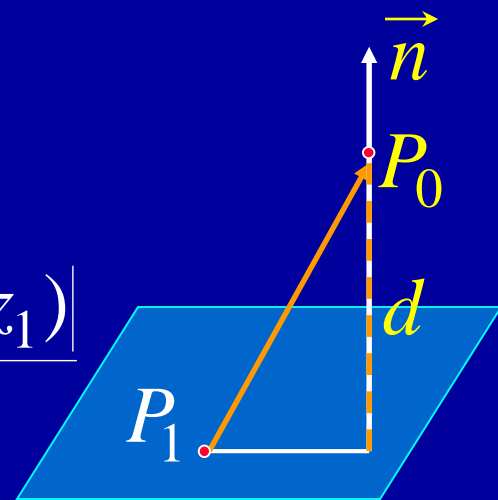
$$\text{即 } 2x - y - z = 0$$



例5. 设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 外一点, 求 P_0 到平面的距离 d .

解: 设平面法向量为 $\vec{n} = (A, B, C)$, 在平面上取一点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, 则 P_0 到平面的距离为

$$\begin{aligned} d &= \left| \text{Prj}_{\vec{n}} \overrightarrow{P_1 P_0} \right| = \frac{|\overrightarrow{P_1 P_0} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} \\ &= \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ &\quad \downarrow Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \\ d &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{aligned}$$



(点到平面的距离公式)



例6. 求内切于平面 $x + y + z = 1$ 与三个坐标面所构成四面体的球面方程.

解: 设球心为 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 则它位于第一卦限, 且

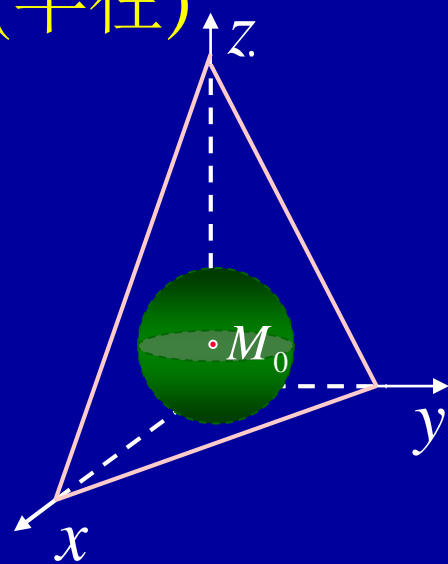
$$\frac{|x_0 + y_0 + z_0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = x_0 = y_0 = z_0 = R(\text{半径})$$

$$\because x_0 + y_0 + z_0 \leq 1, \therefore 1 - 3x_0 = \sqrt{3}x_0$$

$$\text{故 } R = y_0 = z_0 = x_0 = \frac{1}{3 + \sqrt{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}$$

因此所求球面方程为

$$\left(x - \frac{3 - \sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{3 - \sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(z - \frac{3 - \sqrt{3}}{6}\right)^2 = \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{6}\right)^2$$



内容小结

1. 平面基本方程:

一般式 $Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$

点法式 $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

截距式 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (abc \neq 0)$

三点式
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$



2. 平面与平面之间的关系

平面 $\Pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$

平面 $\Pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$

垂直: $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \iff A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

平行: $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0} \iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

夹角公式: $\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$



备用题

求过点 $(1,1,1)$ 且垂直于二平面 $x - y + z = 7$ 和 $3x + 2y - 12z + 5 = 0$ 的平面方程.

解: 已知二平面的法向量为

$$\vec{n}_1 = (1, -1, 1), \quad \vec{n}_2 = (3, 2, -12)$$

取所求平面的法向量

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (10, 15, 5)$$

则所求平面方程为

$$10(x-1) + 15(y-1) + 5(z-1) = 0$$

化简得
$$2x + 3y + z - 6 = 0$$

