第4节

可降阶高阶微分方程

一、$y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

二、$y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

三、$y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

一、$y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程

令 $z=y^{(n-1)}$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=y^{(n)}=f(x)$, 因此

$$z=\int f(x)\,\mathrm{d}x+C_1$$

即
$$y^{(n-1)}=\int f(x)\,\mathrm{d}x+C_1$$

同理可得
$$y^{(n-2)}=\int\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x+C_1\right]\mathrm{d}x+C_2$$

$$=\int\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x+C_1x+C_2$$

依次通过 n 次积分, 可得含 n 个任意常数的通解 .

例1. 求解 $y''' = \mathrm{e}^{2x} - \cos x$.

解: $y'' = \int \left(\mathrm{e}^{2x} - \cos x\right) \mathrm{d}x + C_1'$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - \sin x + C_1'$$

$$y' = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x} + \cos x + C_1' x + C_2$$

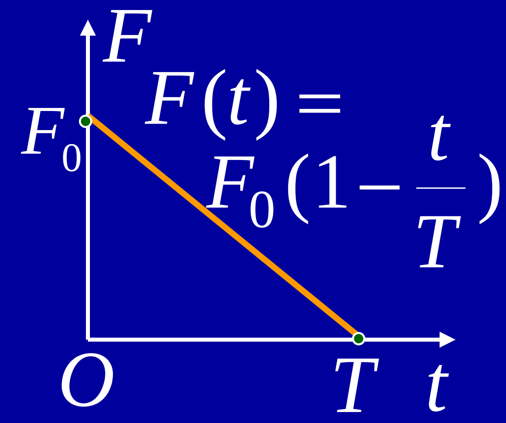
$$y = \frac{1}{8}\mathrm{e}^{2x} + \sin x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

（此处 $C_1 = \frac{1}{2} C_1'$）

例2. 质量为 m 的质点受力F 的作用沿 Ox 轴作直线运动, 设力 F 仅是时间 t 的函数: $F = F\,(t)$. 在开始时刻 $t = 0$ 时 $F(0) = F_0$, 随着时间的增大 , 此力 F 均匀地减小, 直到 $t = T$ 时 $F(T) = 0$. 如果开始时质点在原点, 且初速度为0, 求质点的运动规律.

解: 据题意有

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\,t^2} = \dfrac{F_0}{m}\left(1 - \dfrac{t}{T}\right) \\ x\big|_{t=0} = 0\,, \quad \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\,t}\Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$



对方程两边积分, 得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{F_0}{m}(t-\frac{t^2}{2T})+C_1$$

利用初始条件 $\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=0$ 得 $C_1=0$, 于是

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{F_0}{m}(t-\frac{t^2}{2T})$$

两边再积分得 $x=\frac{F_0}{m}(\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6T})+C_2$

再利用 $\left.x\right|_{t=0}=0$ 得 $C_2=0$, 故所求质点运动规律为

$$x=\frac{F_0}{2m}(t^2-\frac{t^3}{3T})$$

二、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

设 $y' = p(x)$, 则 $y'' = p'$, 原方程化为一阶方程

$$p' = f(x, p)$$

设其通解为 $p = \varphi(x, C_1)$

则得 $y' = \varphi(x, C_1)$

再一次积分, 得原方程的通解

$$y = \int \varphi(x, C_1)\,\mathrm{d}x + C_2$$

例3. 求解 $\begin{cases}(1+x^2)y''=2xy' \\ y\big|_{x=0}=1,\quad y'\big|_{x=0}=3\end{cases}$

解: 设 $y'=p(x)$, 则 $y''=p'$, 代入方程得

$$(1+x^2)p'=2xp \xrightarrow{\text{分离变量}} \frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{2x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)}$$

积分得 $\ln|p|=\ln(1+x^2)+\ln|C_1|$, 即 $p=C_1(1+x^2)$

利用 $y'\big|_{x=0}=3$, 得 $C_1=3$, 于是有 $y'=3(1+x^2)$

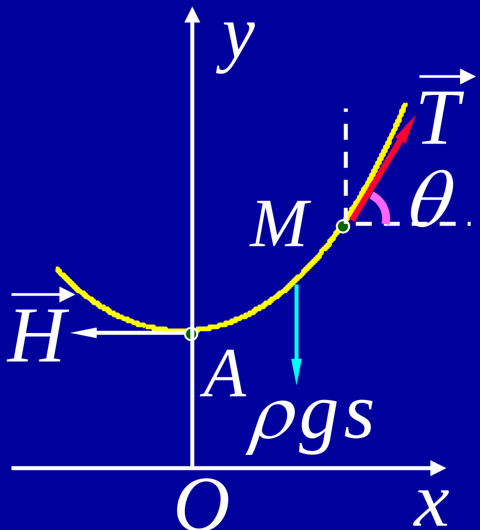
两端再积分得 $y=x^3+3x+C_2$

利用 $y\big|_{x=0}=1$, 得 $C_2=1$, 因此所求特解为

$$y=x^3+3x+1$$

例4. 设有一均匀, 柔软的绳索, 两端固定, 绳索仅受重力作用而下垂, 问该绳索的平衡状态是怎样的曲线?

解: 取坐标系如图. 考察最低点 A 到任意点 $M(x, y)$ 弧段的受力情况:



A 点受水平张力 $\vec{H}$

M 点受切向张力 $\vec{T}$

弧段重力大小 $\rho g s$ (ρ: 密度, s: 弧长)

按静力平衡条件, 有 $T\cos\theta = H,\ T\sin\theta = \rho g s$

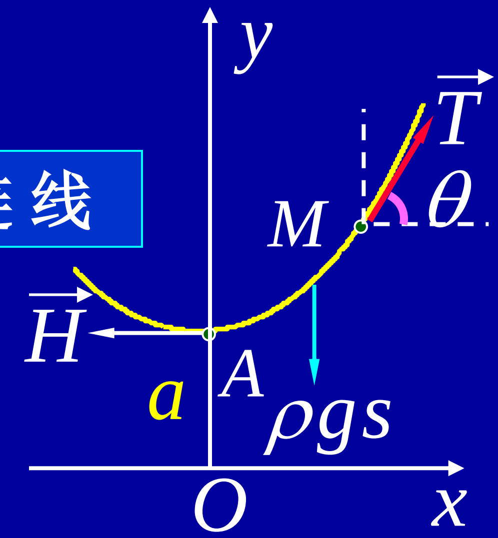
两式相除得 $\tan\theta = \frac{1}{a}s$ (其中 $a = \frac{H}{\rho g}$)

故有 $y' = \frac{1}{a}\int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x \longrightarrow y'' = \frac{1}{a}\sqrt{1+y'^2}$

设 $|OA| = a$, 则得定解问题:

$$\begin{cases} y'' = \dfrac{1}{a}\sqrt{1+y'^2} \\ y\big|_{x=0} = a, \quad y'\big|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

悬链线



令 $y' = p(x)$, 则 $y'' = \dfrac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,x}$, 原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}\,p}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{a}\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{Arsh}\,p = \ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)$$

两端积分得 $\mathrm{Arsh}\,p = \dfrac{x}{a} + C_1$, 由 $y'\big|_{x=0} = 0$ 得 $C_1 = 0$,

则有 $$y' = \mathrm{sh}\,\frac{x}{a}$$

两端积分得 $y = a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{a} + C_2$, 由 $y\big|_{x=0} = a$, 得 $C_2 = 0$

故所求绳索的形状为 $y = a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{a} = \dfrac{a}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}\right)$

三、$y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

令 $y' = p(y)$, 则 $y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

故方程化为 $$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y, p)$$

设其通解为 $p = \varphi(y, C_1)$, 即得

$$y' = \varphi(y, C_1)$$

分离变量后积分, 得原方程的通解

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2$$

例5. 求解 $yy'' - y'^2 = 0$.

解: 设 $y' = p(y)$, 则 $y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

代入方程得 $yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p^2 = 0$, 即 $\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}y}{y}$

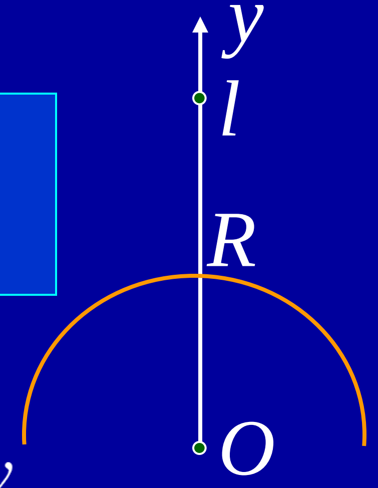
两端积分得 $\ln|p| = \ln|y| + \ln|C_1|$, 即 $p = C_1 y$,

$\therefore \quad y' = C_1 y$ (一阶线性齐次方程)

故所求通解为 $y = C_2 \mathrm{e}^{C_1 x}$

例6. 一个离地面很高的物体, 受地球引力的作用由静止开始落向地面, 求它落到地面时的速度和所需时间(不计空气阻力).

解: 如图所示选取坐标系. 则有定解问题:



$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -\dfrac{k\,m\,M}{y^2} \\ y\big|_{t=0} = l,\quad y'\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

M : 地球质量

m : 物体质量

设 $v(y)=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$

代入方程得 $v\,\mathrm{d}v=-\dfrac{kM}{y^2}\mathrm{d}y$, 积分得 $v^2=\dfrac{2kM}{y}+C_1$

利用$v\big|_{t=0}=y'\big|_{t=0}=0,\ y\big|_{t=0}=l$, 得$C_1=-\dfrac{2kM}{l}$

$$v^2=2kM\left[\frac{1}{y}-\frac{1}{l}\right],\ 即\ v=-\sqrt{\frac{2kM}{l}}\sqrt{\frac{l-y}{y}}$$

注意“—”号

$$\because\ v=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\quad \therefore\ \mathrm{d}t=-\sqrt{\frac{l}{2kM}}\sqrt{\frac{y}{l-y}}\,\mathrm{d}y$$

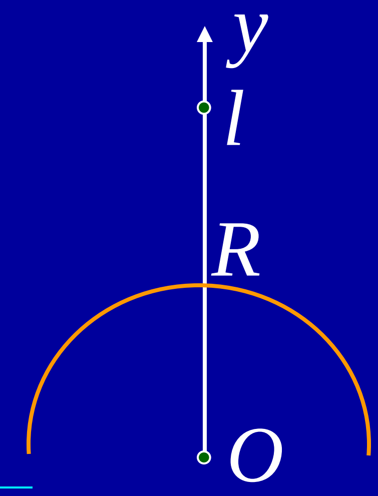
两端积分得 $t=\sqrt{\dfrac{l}{2kM}}\left[\sqrt{ly-y^2}+l\arccos\sqrt{\dfrac{y}{l}}\,\right]+C_2$

利用$y\big|_{t=0}=l$, 得$C_2=0$, 因此有

$$t=\sqrt{\frac{l}{2kM}}\left[\sqrt{ly-y^2}+l\arccos\sqrt{\frac{y}{l}}\,\right]$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k\,m\,M}{y^2}, \quad v = -\sqrt{\frac{2kM}{l}}\sqrt{\frac{l-y}{y}}$$

$$t = \sqrt{\frac{l}{2kM}}\left[\sqrt{ly-y^2} + l\arccos\sqrt{\frac{y}{l}}\,\right]$$



由于 $y = R$ 时 $y'' = -g$, 由原方程可得 $k = \dfrac{gR^2}{M}$

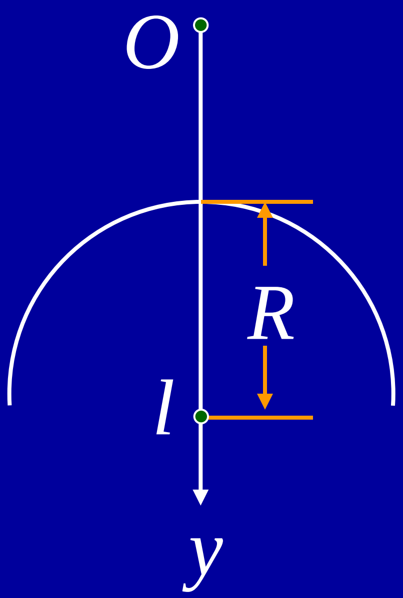
因此落到地面($y = R$)时的速度和所需时间分别为

$$v\big|_{y=R} = -\sqrt{\frac{2gR(l-R)}{l}}$$

$$t\big|_{y=R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{l}{2g}}\left[\sqrt{lR-R^2} + l\arccos\sqrt{\frac{R}{l}}\,\right]$$

说明: 若此例改为如图所示的坐标系, 则定解问题为

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}=\dfrac{k\,m\,M}{(l-y)^2} \\ y\big|_{t=0}=0\,,\ y'\big|_{t=0}=0 \end{cases}$$



令 $v=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, 解方程可得

$$v^2=2kM\left(\frac{1}{l-y}-\frac{1}{l}\right)$$

问: 此时开方根号前应取什么符号? 说明道理 .

例7. 解初值问题 $\begin{cases} y'' - \mathrm{e}^{2y} = 0 \\ y\big|_{x=0} = 0, \quad y'\big|_{x=0} = 1 \end{cases}$

解: 令 $y' = p(y)$, 则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$, 代入方程得

$$p\,\mathrm{d}p = \mathrm{e}^{2y}\mathrm{d}y$$

积分得 $\frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2y} + C_1$

利用初始条件, 得 $C_1 = 0$, 根据 $p\big|_{y=0} = y'\big|_{x=0} = 1 > 0$, 得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p = \mathrm{e}^{y}$$

积分得 $-\mathrm{e}^{-y} = x + C_2$, 再由 $y\big|_{x=0} = 0$, 得 $C_2 = -1$

故所求特解为 $1 - \mathrm{e}^{-y} = x$

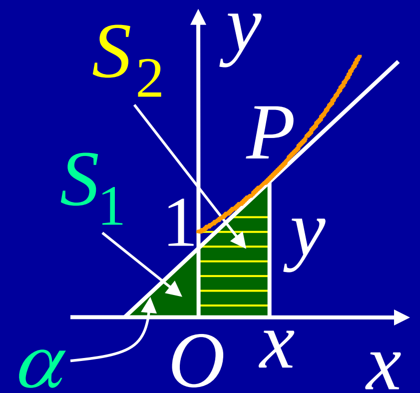
例8. 设函数 $y(x)\ (x\ge 0)$ 二阶可导, 且 $y'(x)>0$, $y(0)=1$, 过曲线 $y=y(x)$ 上任一点 $P(x,y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线, 上述两直线与 x 轴围成的三角形面积记为 S_1, 区间 $[\,0,x\,]$ 上以 $y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2, 且 $2S_1-S_2\equiv 1$, 求 $y=y(x)$ 满足的方程 .

解: 因为 $y(0)=1,\ y'(x)>0$, 所以 $y(x)>0$.

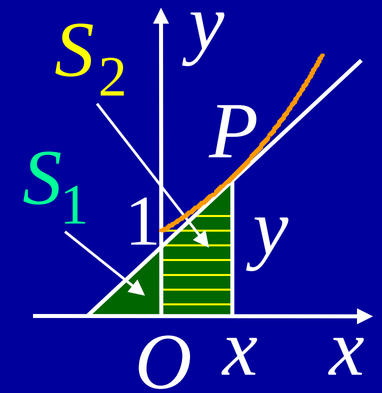
设曲线 $y=y(x)$ 在点 $P(x,y)$ 处的切线倾角为 α, 于是

$$S_1=\frac{1}{2}y^2\cot\alpha=\frac{y^2}{2y'}$$

$$S_2=\int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t$$



利用 $2S_1 - S_2 = 1$, 得 $\dfrac{y^2}{y'} - \int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t = 1$



两边对 x 求导, 得 $yy'' = (y')^2$

定解条件为 $y(0) = 1,\quad y'(0) = 1$

$$S_1 = \frac{y^2}{2y'}$$

$$S_2 = \int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t$$

令 $y' = p(y)$, 则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$, 方程化为

$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = p^2 \longrightarrow \frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}y}{y}$$

解得 $p = C_1 y$, 利用定解条件得 $C_1 = 1$, 再解 $y' = y$, 得 $y = C_2\,\mathrm{e}^x$, 再利用 $y(0) = 1$ 得 $C_2 = 1$, 故所求曲线方程为

$$y = \mathrm{e}^x$$

内容小结

可降阶微分方程的解法 —— 降阶法

1. $y^{(n)} = f(x)$

逐次积分

2. $y'' = f(x, y')$

令 $y' = p(x)$，则 $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$

3. $y'' = f(y, y')$

令 $y' = p(y)$，则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

思考与练习

1. 方程 $y'' = f(y')$ 如何代换求解？

答: 令 $y' = p(x)$ 或 $y' = p(y)$ 均可.

一般说, 用前者方便些.

有时用后者方便. 例如, $y'' = \mathrm{e}^{-(y')^2}$

2. 解二阶可降阶微分方程初值问题需注意哪些问题？

答: (1) 一般情况, 边解边定常数计算简便.

(2) 遇到开平方时, 要根据题意确定正负号.

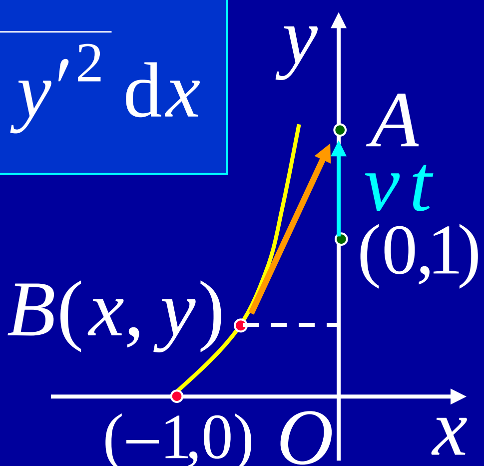
例6　例7

备用题 设物体 A 从点(0, 1)出发, 以大小为常数 v 的速度沿 y 轴正向运动, 物体 B 从 (–1, 0) 出发, 速度大小为 $2v$, 方向指向A , 试建立物体 B 的运动轨迹应满足的微分方程及初始条件.

提示: 设 t 时刻 B 位于 (x, y), 如图所示, 则有

$$y' = \frac{1 + vt - y}{-x}$$

$$\boxed{s = \int_{-1}^{x} \sqrt{1 + y'^2}\, \mathrm{d}x}$$

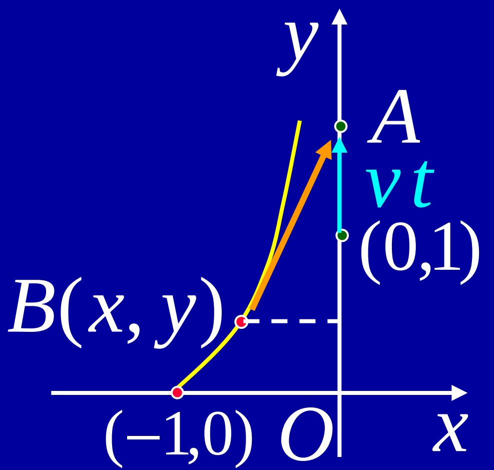


去分母后两边对 x 求导, 得

$$x \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = -v \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \qquad ①$$

又由于 $$2v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{-1}^{x} \sqrt{1 + y'^2}\, \mathrm{d}x = \sqrt{1 + y'^2}\, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2v}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$$



代入 ① 式得所求微分方程:

$$x\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+y'^2} = 0$$

即 $$xy'' + \frac{1}{2}\sqrt{1+y'^2} = 0$$

其初始条件为

$$y\big|_{x=-1} = 0,\ \ y'\big|_{x=-1} = 1$$

$$\boxed{x\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = -v\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \qquad ①}$$