习题课

不定积分的计算方法

一、 求不定积分的基本方法

二、几种特殊类型的积分

一、 求不定积分的基本方法

1. 直接积分法

通过简单变形, 利用基本积分公式和运算法则求不定积分的方法 .

2. 换元积分法

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \;\underset{\text{第二类换元法}}{\overset{\text{第一类换元法}}{\rightleftarrows}}\; \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

(代换: $x=\varphi(t)$)

注意常见的换元积分类型, 如掌握 P207公式(6) ~(10)的推导方法

3. 分部积分法

$$\int u\,v'\,\mathrm{d}x = u\,v - \int u'v\,\mathrm{d}x$$

使用原则:

1) 由 v' 易求出 v ;

2) $\int u'\,v\,\mathrm{d}x$ 比 $\int u\,v'\,\mathrm{d}x$ 好求 .

一般经验: 按 "反, 对, 幂, 指 , 三" 的顺序,

排前者取为 u , 排后者取为 v' .

计算格式: 列表计算

多次分部积分的规律

$$\int u v^{(n+1)}\,\mathrm{d}x = u v^{(n)} - \int u' v^{(n)}\,\mathrm{d}x$$

$$= u v^{(n)} - u' v^{(n-1)} + \int u'' v^{(n-1)}\,\mathrm{d}x$$

$$= u v^{(n)} - u' v^{(n-1)} + u'' v^{(n-2)} - \int u''' v^{(n-2)}\,\mathrm{d}x$$

$$= \cdots$$

$$= u v^{(n)} - u' v^{(n-1)} + u'' v^{(n-2)} - \cdots + (-1)^{n+1} \int u^{(n+1)} v\,\mathrm{d}x$$

特别: 当 u 为 n 次多项式时, $u^{(n+1)} = 0$, 计算大为简便 .

例1. 求 $\int \frac{2^x 3^x}{9^x + 4^x} \mathrm{d}x$.

$$\mathrm{d}\, a^x = a^x \ln a \,\mathrm{d}x$$

解: 原式 $= \int \frac{2^x 3^x}{3^{2x} + 2^{2x}} \mathrm{d}x = \int \frac{(\frac{2}{3})^x}{1 + (\frac{2}{3})^{2x}} \mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{\ln \frac{2}{3}} \int \frac{\mathrm{d}\,(\frac{2}{3})^x}{1 + (\frac{2}{3})^{2x}}$$

$$= \frac{\arctan(\frac{2}{3})^x}{\ln 2 - \ln 3} + C$$

例2. 求 $\int \frac{\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5}}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$.

解:

$$原式 = \int [\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5]^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}[\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5]$$

$$= \frac{2}{3}[\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5]^{\frac{3}{2}} + C$$

分析:

$$\mathrm{d}[\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5] = \frac{(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}})\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$$

例3. 求 $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$.

解：

$$原式 = \int \frac{x+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$$

$$= \underline{\int x\,\mathrm{d}\tan\frac{x}{2}} + \int \tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x$$

分部积分

$$= x\tan\frac{x}{2} + C$$

例4. 设 $y(x-y)^2 = x$, 求积分 $\int \frac{1}{x-3y}\,\mathrm{d}x$.

解: $y(x-y)^2 = x$

令 $x-y=t$, 即 $y=x-t$

$$x=\frac{t^3}{t^2-1},\quad y=\frac{t}{t^2-1},\quad \text{而 } \mathrm{d}x=\frac{t^2(t^2-3)}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\therefore\quad \text{原式}=\int \frac{1}{\frac{t^3}{t^2-1}-\frac{3t}{t^2-1}}\cdot\frac{t^2(t^2-3)}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t=\int\frac{t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$$

$$=\tfrac{1}{2}\ln\left|t^2-1\right|+C=\tfrac{1}{2}\ln\left|(x-y)^2-1\right|+C$$

例5. 求 $\int \frac{\arctan e^x}{e^x} dx$.

解: 原式 $= -\int \arctan e^x \, d\, e^{-x}$

$$= -e^{-x} \arctan e^x + \int e^{-x} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$$

$$= -e^{-x} \arctan e^x + \int \frac{(1+e^{2x}) - e^{2x}}{1+e^{2x}} dx$$

$$= -e^{-x} \arctan e^x + x - \tfrac{1}{2} \ln(1+e^{2x}) + C$$

例6. 求 $\int (x^3 - x + 2)\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

解: 取 $u = x^3 - x + 2,\quad v^{(4)} = \mathrm{e}^{2x}$

$$\therefore \text{原式} = \mathrm{e}^{2x}\left[\tfrac{1}{2}(x^3 - x + 2) - \tfrac{1}{4}(3x^2 - 1) + \tfrac{1}{8}\cdot 6x - \tfrac{1}{16}\cdot 6\right] + C$$

$$= \tfrac{1}{8}\mathrm{e}^{2x}(4x^3 - 6x^2 + 2x + 7) + C$$

说明: 此法特别适用于如下类型的积分: $\int P_n(x)\begin{Bmatrix}\mathrm{e}^{kx}\\ \sin ax\\ \cos ax\end{Bmatrix}\mathrm{d}x$

例7. 证明递推公式

$$I_n = \int \tan^n x \,\mathrm{d}x = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2} \quad (n \ge 2)$$

证: $$I_n = \int \tan^{n-2} x\,(\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \tan^{n-2} x \,\mathrm{d}(\tan x) - I_{n-2}$$

$$= \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}$$

注: $I_n \to \cdots \to I_0$ 或 I_1

$$I_0 = x + C, \quad I_1 = -\ln|\cos x| + C$$

例8. 求 $\int |x-1| \mathrm{d}x$.

解: 设 $F'(x)=|x-1|=\begin{cases} x-1, & x\ge 1 \\ 1-x, & x<1 \end{cases}$

则 $F(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2-x+C_1, & x\ge 1 \\ x-\frac{1}{2}x^2+C_2, & x<1 \end{cases}$

因 $F(x)$ 连续 , 利用 $F(1^+)=F(1^-)=F(1)$, 得

$$-\frac{1}{2}+C_1=\frac{1}{2}+C_2 \xlongequal{\text{记作}} C$$

得 $\int |x-1| \mathrm{d}x = F(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}(x-1)^2+C, & x\ge 1 \\ -\frac{1}{2}(x-1)^2+C, & x<1 \end{cases}$

例9. 设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数, 且 $F(0)=1$, 当 $x\ge 0$ 时有 $f(x)F(x)=\sin^2 2x$, $F(x)\ge 0$, 求 $f(x)$.

解: 由题设 $F'(x)=f(x)$, 则 $F(x)F'(x)=\sin^2 2x$,

故 $$\int F(x)F'(x)\mathrm{d}x=\int \sin^2 2x\mathrm{d}x=\int \frac{1-\cos 4x}{2}\mathrm{d}x$$

即 $$F^2(x)=x-\tfrac{1}{4}\sin 4x+C$$

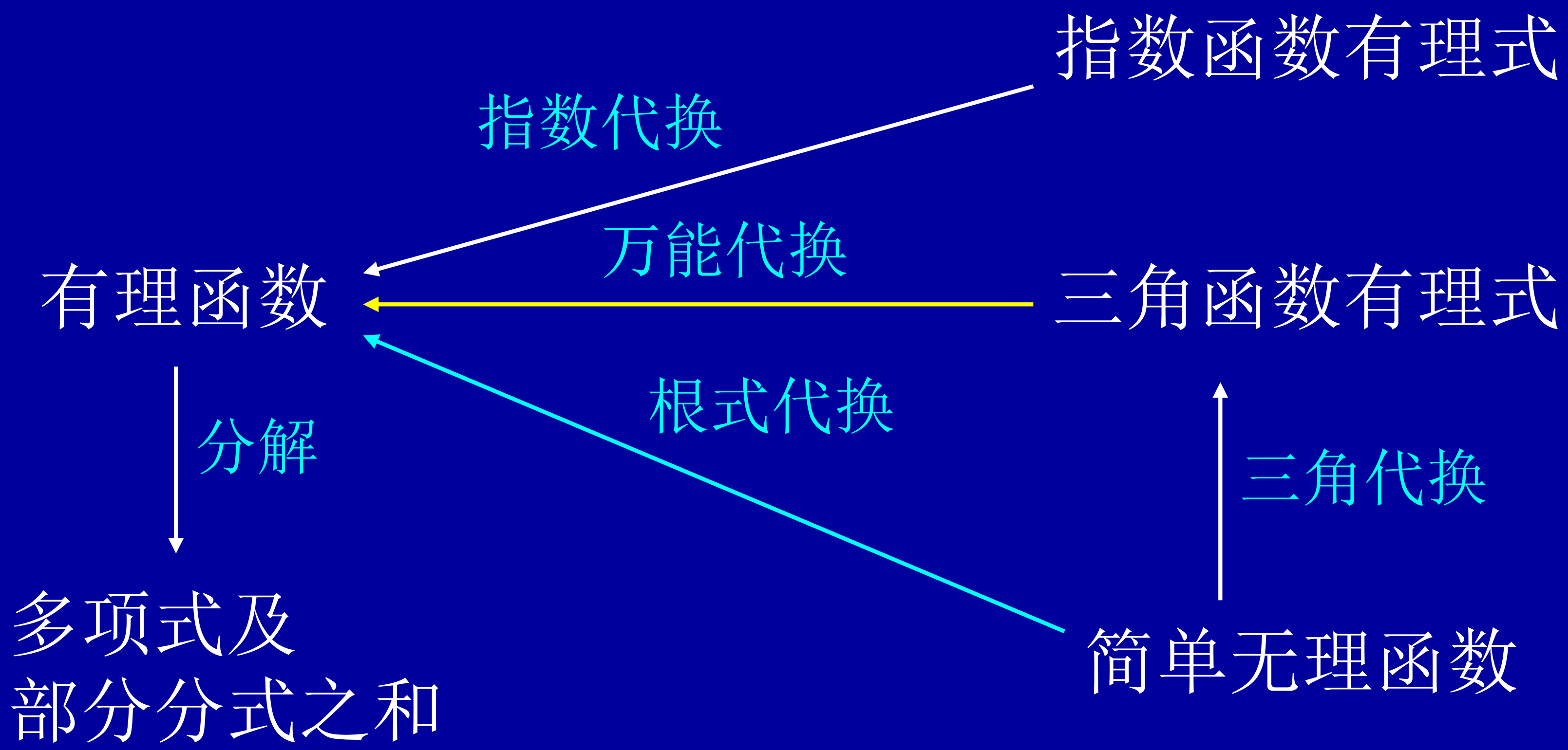
$\because F(0)=1$, $\therefore C=F^2(0)=1$, 又 $F(x)\ge 0$, 因此

$$F(x)=\sqrt{x-\tfrac{1}{4}\sin 4x+1}$$

故 $$f(x)=F'(x)=\frac{\sin^2 2x}{\sqrt{x-\tfrac{1}{4}\sin 4x+1}}$$

二、几种特殊类型的积分

1. 一般积分方法



2. 需要注意的问题

(1) 一般方法不一定是最简便的方法, 要注意综合使用各种基本积分法, 简便计算 .

(2) 初等函数的原函数不一定是初等函数 , 因此不一定都能积出.

例如 , $\int e^{-x^2}\,dx$, $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$, $\int \sin x^2\,dx$,

$\int \frac{1}{\ln x}\,dx$, $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$, $\int \sqrt{1+x^3}\,dx$,

$\int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx \ (0<k<1)$, ……

例10. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}+\mathrm{e}^{\frac{x}{6}}}$.

解: 令 $t=\mathrm{e}^{\frac{x}{6}}$, 则 $x=6\ln t$, $\mathrm{d}x=\frac{6}{t}\mathrm{d}t$

$$\text{原式}=6\int\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3+t^2+t)t}=6\int\frac{\mathrm{d}\,t}{(t+1)(t^2+1)t}$$

$$=\int\left(\frac{6}{t}-\frac{3}{t+1}-\frac{3t+3}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t$$

$$=6\ln|t|-3\ln|t+1|-\frac{3}{2}\ln(t^2+1)-3\arctan t+C$$

$$=x-3\ln(\mathrm{e}^{\frac{x}{6}}+1)-\frac{3}{2}\ln(\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}+1)-3\arctan\mathrm{e}^{\frac{x}{6}}+C$$

例11. 求 $\int \frac{3\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\mathrm{d}x$.

解: 令 $3\cos x - \sin x$

$$= A(\cos x + \sin x) + B(\cos x + \sin x)'$$

令 $a\cos x + b\sin x$

$$= A(c\cos x + d\sin x) + B(c\cos x + d\sin x)'$$

$\therefore$ 原式 $= \int \mathrm{d}x + 2\int \frac{\mathrm{d}(\cos x + \sin x)}{\cos x + \sin x}$

$$= x + 2\ln\left|\cos x + \sin x\right| + C$$

说明: 此技巧适用于形为 $\int \frac{a\cos x + b\sin x}{c\cos x + d\sin x}\mathrm{d}x$ 的积分.

例12. 求 $I_1=\int\frac{\sin x}{a\cos x+b\sin x}\,\mathrm{d}x$ 及 $I_2=\int\frac{\cos x}{a\cos x+b\sin x}\,\mathrm{d}x$.

解： 因为

$$\begin{cases} aI_2+bI_1=\int\frac{a\cos x+b\sin x}{a\cos x+b\sin x}\,\mathrm{d}x=x+C_1 \\ bI_2-aI_1=\int\frac{b\cos x-a\sin x}{a\cos x+b\sin x}\,\mathrm{d}x \end{cases}$$

$$\boxed{\mathrm{d}(a\cos x+b\sin x)}$$

$$=\ln\left|a\cos x+b\sin x\right|+C_2$$

$$\Longrightarrow\begin{cases} I_1=\frac{1}{a^2+b^2}\left(bx-a\ln\left|a\cos x+b\sin x\right|\right)+C \\ I_2=\frac{1}{a^2+b^2}\left(ax+b\ln\left|a\cos x+b\sin x\right|\right)+C \end{cases}$$

例13. 求不定积分 $\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\mathrm{d}x$.

解: 原式 $=\int \frac{\sin x}{(2+\cos x)\sin^2 x}\mathrm{d}x$ (令 $u=\cos x$)

$$=\int \frac{1}{(2+u)(u^2-1)}\mathrm{d}u$$

$$\frac{1}{(2+u)(u^2-1)}=\frac{A}{2+u}+\frac{B}{u-1}+\frac{C}{u+1} \Longrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{3} \\ B=\frac{1}{6} \\ C=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$=\frac{1}{3}\ln|u+2|+\frac{1}{6}\ln|u-1|-\frac{1}{2}\ln|u+1|+C$$

$$=\frac{1}{3}\ln(\cos x+2)+\frac{1}{6}\ln(1-\cos x)-\frac{1}{2}\ln(\cos x+1)+C$$

例14. 求 $I=\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sin(x+a)\cdot\sin(x+b)}\quad (a-b\neq k\pi)$

解: $I=\frac{1}{\sin(a-b)}\int \frac{\sin[(x+a)-(x+b)]}{\sin(x+a)\cdot\sin(x+b)}\mathrm{d}\,x$

$=\frac{1}{\sin(a-b)}\int \frac{\sin(x+a)\cos(x+b)-\cos(x+a)\sin(x+b)}{\sin(x+a)\cdot\sin(x+b)}\mathrm{d}\,x$

$=\frac{1}{\sin(a-b)}\left[\int \frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)}\mathrm{d}\,x-\int \frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)}\mathrm{d}x\right]$

$=\frac{1}{\sin(a-b)}\left[\ln\left|\sin(x+b)\right|-\ln\left|\sin(x+a)\right|\right]+C$

$=\frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)}\right|+C$

例15. 求 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}$ (n 为自然数)

解: $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)(x-b)\sqrt[n]{\frac{x-a}{x-b}}}$

令 $t=\sqrt[n]{\frac{x-a}{x-b}}$

则 $t^n=\frac{x-a}{x-b}$, $\boxed{n t^{n-1}\,\mathrm{d}t=\frac{a-b}{(x-b)^2}\mathrm{d}x}$

$$\frac{n}{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{t^n}\frac{a-b}{(x-b)^2}\mathrm{d}x$$

$$\frac{n}{(a-b)t}\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)(x-b)}$$

$$=\frac{n}{a-b}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2}=\frac{n}{b-a}\frac{1}{t}+C=\frac{n}{b-a}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}+C$$

作业

总复习题四