

习题课

重积分的计算及应用

- 一、重积分计算的基本方法
- 二、重积分计算的基本技巧
- 三、重积分的应用



一、重积分计算的基本方法 — 累次积分法

1. 选择合适的坐标系

使积分域多为坐标面(线)围成;

被积函数用此坐标表示简洁或变量分离.

2. 选择易计算的积分序

积分域分块要少, 累次积分易算为妙.

3. 掌握确定积分限的方法

{ 图示法
列不等式法 (从内到外: 面、线、点)



二、重积分计算的基本技巧

1. 交换积分顺序的方法
2. 利用对称性或质心公式简化计算
3. 消去被积函数绝对值符号 $\left\{ \begin{array}{l} \text{分块积分法} \\ \text{利用对称性} \end{array} \right.$
4. 利用扩展积分域进行计算
- *5. 利用重积分换元公式



三、重积分的应用

1. 几何方面

面积 (平面域或曲面域), 体积, 形心

2. 物理方面

质量, 转动惯量, 质心, 引力

3. 其它方面

证明某些结论等



练习题:

1 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \, d\sigma,$

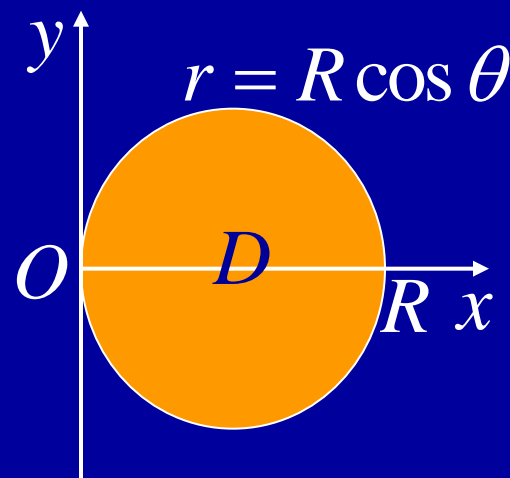
其中 D 为圆周 $x^2 + y^2 = Rx$ 所围成的闭区域.

提示: 利用极坐标

$$D: \begin{cases} 0 \leq r \leq R \cos \theta \\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{原式} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R \cos \theta} r \sqrt{R^2 - r^2} \, dr$$

$$= \frac{2}{3} R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \theta) \, d\theta = \frac{1}{3} R^3 \left(\pi - \frac{4}{3} \right)$$

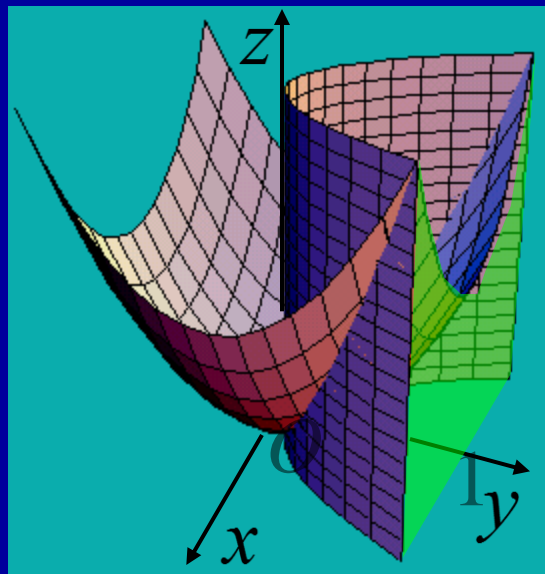


2. 把积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ 化为三次积分,
其中 Ω 由曲面 $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$ 及平面 $y = 1, z = 0$
所围成的闭区域.

提示: 积分域为

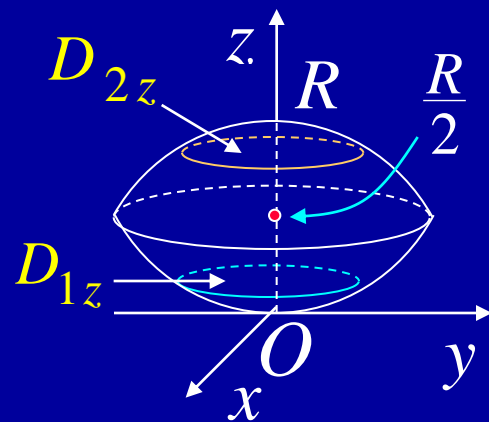
$$\Omega: \begin{cases} 0 \leq z \leq x^2 + y^2 \\ x^2 \leq y \leq 1 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{原式} = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz$$



3. 计算积分 $\iiint_{\Omega} z^2 \, dx dy dz$, 其中 Ω 是两个球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 及 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$ ($R > 0$) 的公共部分.

提示: 由于被积函数缺 x, y , 利用“**先二后一**”计算方便.



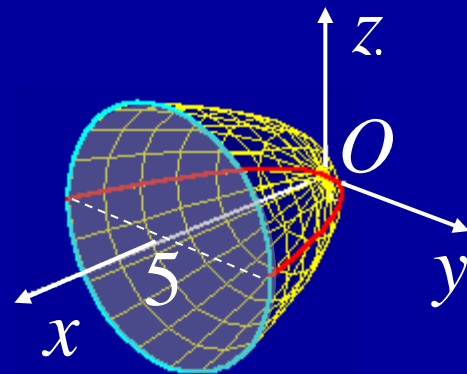
$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int_0^{R/2} z^2 \, dz \iint_{D_{1z}} dx dy + \int_{R/2}^R z^2 \, dz \iint_{D_{2z}} dx dy \\
 &= \int_0^{R/2} z^2 \cdot \pi(2Rz - z^2) \, dz + \int_{R/2}^R z^2 \cdot \pi(R^2 - z^2) \, dz \\
 &= \frac{59}{480} \pi R^5
 \end{aligned}$$



4. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) dv$, 其中 Ω 是由 xOy 平面上曲线 $y^2 = 2x$ 绕 x 轴旋转而成的曲面与平面 $x = 5$ 所围成的闭区域.

提示: 利用柱坐标
$$\begin{cases} x = x \\ y = r \cos \theta \\ z = r \sin \theta \end{cases}$$

$$\Omega: \begin{cases} \frac{1}{2}r^2 \leq x \leq 5 \\ 0 \leq r \leq \sqrt{10} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$



$$\text{原式} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{10}} r^3 dr \int_{\frac{r^2}{2}}^5 dx = \frac{250}{3} \pi$$



5(1). 设 Ω_1 由 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0$ 确定, Ω_2 由 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 所确定, 则 **C**

$$(A) \iiint_{\Omega_1} x \, dv = 4 \iiint_{\Omega_2} x \, dv$$

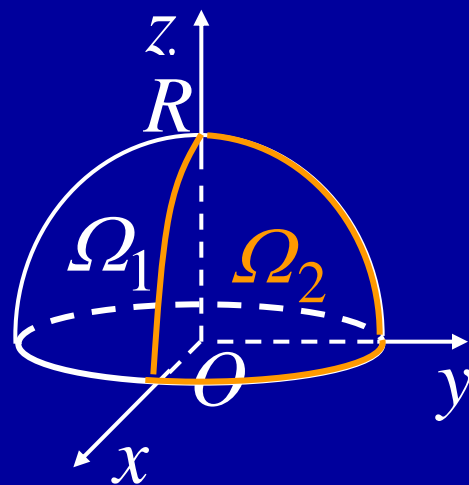
$$(B) \iiint_{\Omega_1} y \, dv = 4 \iiint_{\Omega_2} y \, dv$$

$$(C) \iiint_{\Omega_1} z \, dv = 4 \iiint_{\Omega_2} z \, dv$$

$$(D) \iiint_{\Omega_1} xyz \, dv = 4 \iiint_{\Omega_2} xyz \, dv$$

Ω_1 : 上半球

Ω_2 : 第一卦
限部分



提示: 利用对称性可知, (A), (B), (D) 左边为 0, 右边为正, 显然不对, 故选 (C)



5(2). $D = \{(x, y) \mid -a \leq x \leq a, x \leq y \leq a\}$, $D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, x \leq y \leq a\}$, 则

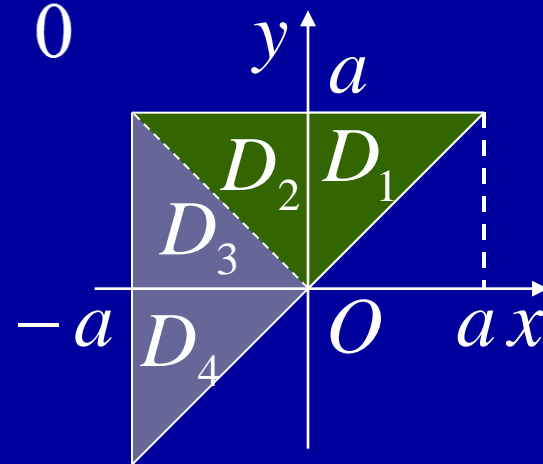
$$\iint_D (xy + \cos x \sin y) dx dy = \underline{\text{A}}$$

(A) $2 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy$ (B) $2 \iint_{D_1} xy dx dy$

(C) $4 \iint_{D_1} (xy + \cos x \sin y) dx dy$ (D) 0

提示: 如图, $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$

由对称性知 $\iint_D xy dx dy = 0$



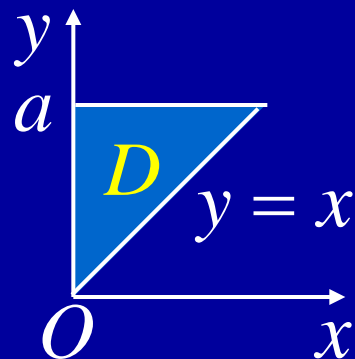
$\cos x \sin y \begin{cases} \text{在 } D_3 \cup D_4 \text{ 上是关于 } y \text{ 的奇函数} \\ \text{在 } D_1 \cup D_2 \text{ 上是关于 } x \text{ 的偶函数} \end{cases}$



6 . 证明:

$$\int_0^a dy \int_0^y e^{m(a-x)} f(x) dx = \int_0^a (a-x) e^{m(a-x)} f(x) dx$$

提示: 左端积分区域如图,
交换积分顺序即可证得.



7. 求 $\iiint_{\Omega} \frac{z \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1)}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} dv$, 其中 Ω 是

由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 所围成的闭区域.

提示: 被积函数在对称域 Ω 上关于 z 为奇函数, 利用对称性可知原式为 0.

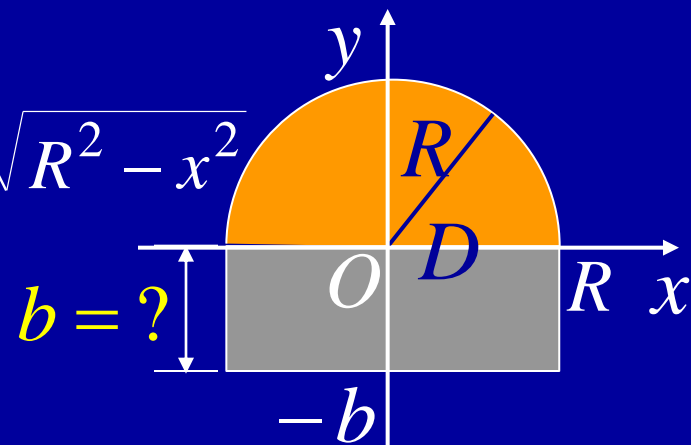


8. 在均匀的半径为 R 的圆形薄片的直径上, 要接上一个一边与直径等长的同样材料的均匀矩形薄片, 使整个薄片的重心恰好落在圆心上, 问接上去的均匀矩形薄片的另一边长度应为多少?

提示: 建立坐标系如图. 由已知可知 $\bar{y} = 0$, 即有

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_D y \, dx \, dy = \int_{-R}^R dx \int_{-b}^{\sqrt{R^2-x^2}} y \, dy \\ &= \frac{2}{3} R^3 - R b^2 \end{aligned}$$

由此解得 $b = \sqrt{\frac{2}{3}} R$



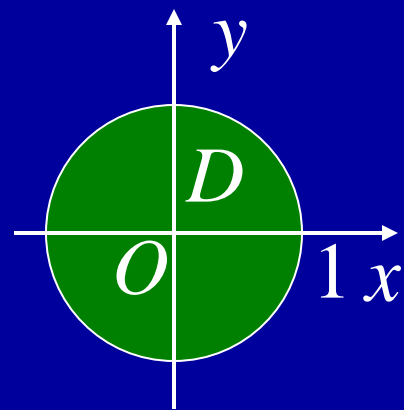
9. 计算二重积分 $I = \iint_D (x^2 + xye^{x^2+y^2}) dx dy$, 其中:

(1) D 为圆域 $x^2 + y^2 \leq 1$;

(2) D 由直线 $y = x$, $y = -1$, $x = 1$ 围成.

解: (1) 利用对称性.

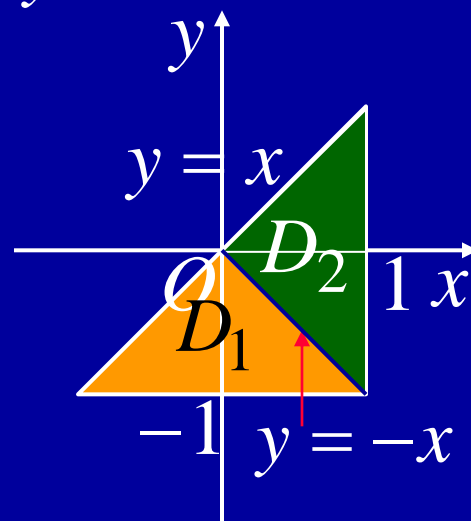
$$\begin{aligned} I &= \iint_D x^2 dx dy + \iint_D xye^{x^2+y^2} dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy + 0 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$



$$I = \iint_D (x^2 + xye^{x^2+y^2}) dx dy$$

(2) 积分域如图: 添加辅助线 $y = -x$, 将 D 分为 D_1, D_2 , 利用对称性, 得

$$\begin{aligned} I &= \iint_D x^2 dx dy + \iint_{D_1} xye^{x^2+y^2} dx dy \\ &\quad + \iint_{D_2} xye^{x^2+y^2} dx dy \\ &= \int_{-1}^1 x^2 dx \int_{-1}^x dy + 0 + 0 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$



10. 计算二重积分 $\iint_D (5x + 3y) dx dy$, 其中 D 是由曲线 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ 所围成的平面域.

解: $I = 5 \iint_D x dx dy + 3 \iint_D y dx dy$

积分区域 $(x+1)^2 + (y-2)^2 \leq 3^2$

其形心坐标为: $\bar{x} = -1, \bar{y} = 2$

面积为: $A = 9\pi$

$= 5 \cdot \bar{x} A + 3 \cdot \bar{y} A$

$= [5 \cdot (-1) + 3 \cdot 2] A = 9\pi$

形心坐标

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \iint_D x dx dy$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \iint_D y dx dy$$



11. 计算二重积分

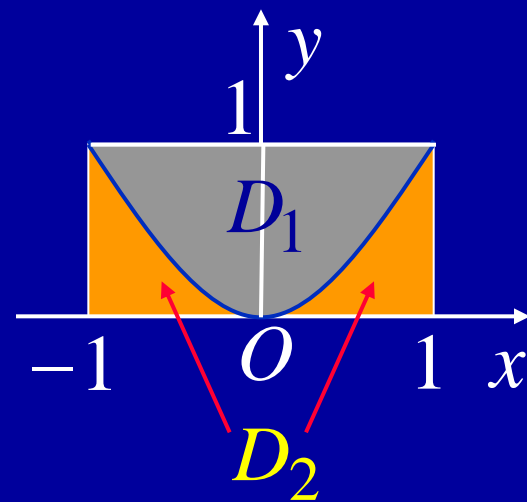
$$(1) I = \iint_D \operatorname{sgn}(y - x^2) dx dy, \quad D: -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1;$$

$$(2) I = \iint_D (\sqrt{x^2 + y^2} - 2xy + 2) dx dy, \text{ 其中 } D \text{ 为圆域 } x^2 + y^2 \leq 1 \text{ 在第一象限部分.}$$

解: (1) 作辅助线 $y = x^2$ 把 D 分成 D_1, D_2 两部分, 则

$$I = \iint_{D_1} dx dy - \iint_{D_2} dx dy$$

$$= \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 dy - \int_{-1}^1 dx \int_0^{x^2} dy = \frac{2}{3}$$



(2) 提示:

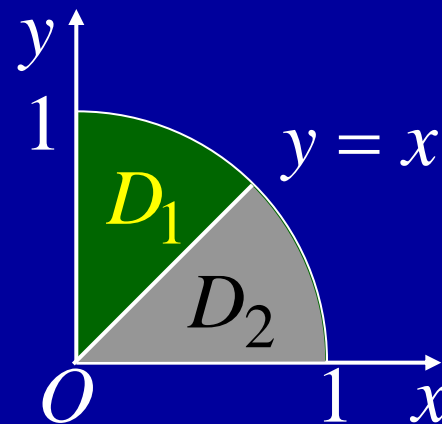
$$I = \iint_D (\sqrt{x^2 + y^2} - 2xy + 2) dx dy$$

$$= \iint_D (|x - y| + 2) dx dy$$

作辅助线 $y = x$ 将 D 分成
 D_1, D_2 两部分

$$= 2 \iint_{D_2} (x - y) dx dy + 2 \iint_D dx dy$$

$$= \cdots = \frac{2}{3}(\sqrt{2} - 1) + \frac{\pi}{2}$$



说明: 若不用对称性, 需分块积分以去掉绝对值符号.



12. 求抛物线 $y = x^2$ 与直线 $x + y - 2 = 0$ 及

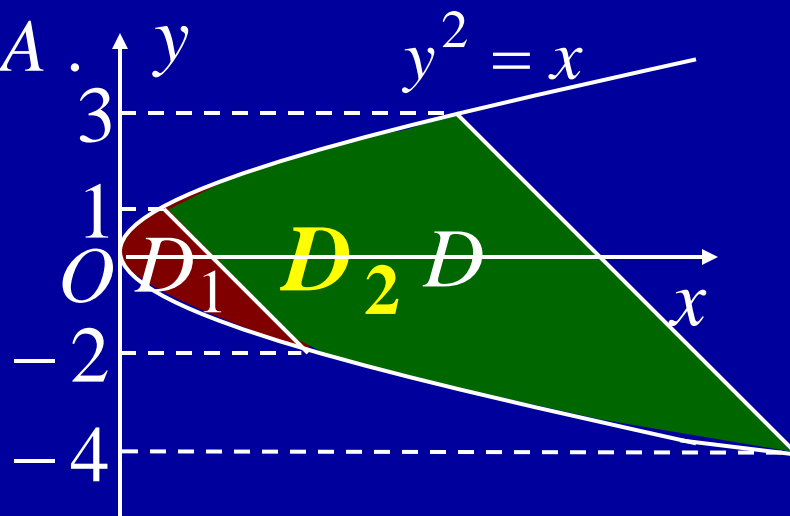
$x + y - 12 = 0$ 所围区域 D 的面积 A .

解: 如图所示 $D = D_2 \setminus D_1$,

$$A = \iint_{D_2} d\sigma - \iint_{D_1} d\sigma$$

$$= \int_{-4}^3 dy \int_{y^2}^{12-y} dx - \int_{-2}^1 dy \int_{y^2}^{2-y} dx$$

$$= \left[12y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 \right]_{-4}^3 - \left[2y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 \right]_{-2}^1 = 52\frac{2}{3}$$



注: 计算 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 时, 若 $f(x, y)$ 可扩展到 D_1

上可积, 则也可利用上述方法简化计算.



13. 交换积分顺序计算 $I = \int_0^1 dx \int_0^x e^y dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{3-x}{2}} e^y dy$

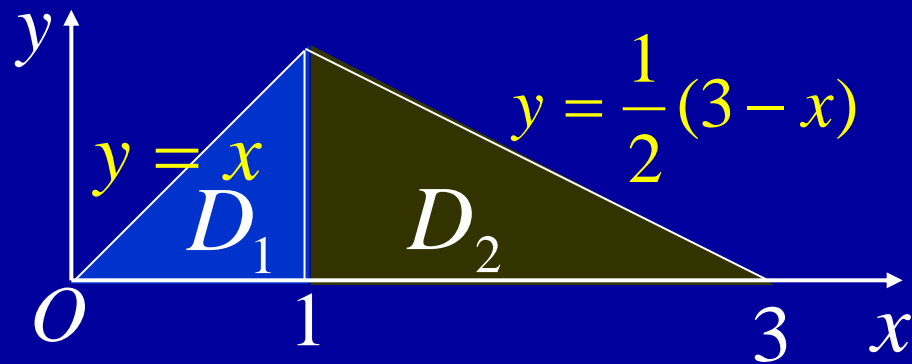
解. 积分域如图.

$$I = \iint_{D_1} e^y dx dy + \iint_{D_2} e^y dx dy$$

$$= \int_0^1 dy \int_y^{3-2y} e^y dx$$

$$= 3 \int_0^1 (1-y) e^y dy$$

$$= 3(e-2)$$



14. 设 $f(u) \in C, f(0) = 0, f'(0)$ 存在, 求 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\pi t^4} F(t)$,

其中 $F(t) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) dx dy dz$

解: 在球坐标系下

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^t f(r) r^2 dr \\ &= 4\pi \int_0^t f(r) r^2 dr \\ F(0) &= 0 \end{aligned}$$

利用洛必达法则与导数定义, 得

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{\pi t^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4\pi f(t)t^2}{4\pi t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = f'(0)$$



15. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 证明

$$\left(\int_a^b f(x) dx\right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx$$

证: 左端 $= \int_a^b f(x) dx \int_a^b f(y) dy$

$$= \iint_D f(x) f(y) dx dy$$

$$D: \begin{cases} a \leq x \leq b \\ a \leq y \leq b \end{cases}$$

$$\leq \frac{1}{2} \iint_D [f^2(x) + f^2(y)] dx dy$$

$$= \iint_D f^2(x) dx dy = \int_a^b dy \int_a^b f^2(x) dx$$

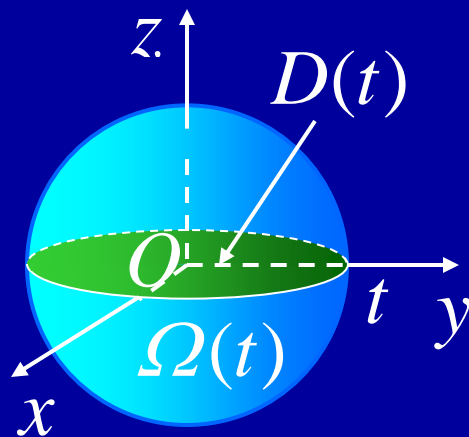
$$= (b-a) \int_a^b f^2(x) dx = \text{右端}$$



16. 设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零,

$$F(t) = \frac{\iiint_{\Omega(t)} f(x^2 + y^2 + z^2) dv}{\iint_{D(t)} f(x^2 + y^2) d\sigma}$$

$$G(t) = \frac{\iint_{D(t)} f(x^2 + y^2) d\sigma}{\int_{-t}^t f(x^2) dx}$$



其中 $\Omega(t) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2\},$

$D(t) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq t^2\}.$

(1) 讨论 $F(t)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内的单调性;

(2) 证明 $t > 0$ 时, $F(t) > \frac{2}{\pi} G(t).$

(2003考研)



解: (1) 因为

$$F(t) = \frac{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^t f(r^2) r^2 dr}{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t f(r^2) r dr} = \frac{2 \int_0^t f(r^2) r^2 dr}{\int_0^t f(r^2) r dr}$$

两边对 t 求导, 得

$$F'(t) = 2 \frac{t f(t^2) \int_0^t f(r^2) r(t-r) dr}{\left[\int_0^t f(r^2) r dr \right]^2}$$

$\because f(x)$ 恒大于零, \therefore 在 $(0, +\infty)$ 上 $F'(t) > 0$,

故 $F(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调增加.



(2) 问题转化为证 $t > 0$ 时, $F(t) - \frac{2}{\pi} G(t) > 0$

$$G(t) = \frac{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t f(r^2) r dr}{2 \int_0^t f(r^2) dr} = \frac{\pi \int_0^t f(r^2) r dr}{\int_0^t f(r^2) dr}$$

即证 $g(t) = \int_0^t f(r^2) r^2 dr \int_0^t f(r^2) dr - \left[\int_0^t f(r^2) r dr \right]^2 > 0$

因 $g'(t) = f(t^2) \int_0^t f(r^2) (t-r)^2 dr > 0$

故 $g(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调增, 又因 $g(t)$ 在 $t=0$ 连续, 故有

$$g(t) > g(0) = 0 \quad (t > 0)$$

因此 $t > 0$ 时, $F(t) - \frac{2}{\pi} G(t) > 0$.



17. 试计算椭球体 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ 的体积 V .

解法1 利用“先二后一”计算.

$$D_z : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{z^2}{c^2}$$

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = 2 \int_0^c dz \iint_{D_z} dx dy \\ &= \int_0^c \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz = \frac{4}{3} \pi abc \end{aligned}$$



***解法2** 利用三重积分换元法. 令

$$x = ar \sin \varphi \cos \theta, \quad y = br \sin \varphi \sin \theta, \quad z = cr \cos \varphi$$

则

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \theta)} = abcr^2 \sin \varphi, \quad \Omega' : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

$$V = \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iiint_{\Omega'} |J| d\theta d\varphi dr$$

$$= abc \iiint_{\Omega'} r^2 \sin \varphi d\theta d\varphi dr$$

$$= abc \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 r^2 dr = \frac{4}{3} \pi abc$$

