

第四节

函数的单调性与

曲线的凹凸性

一、函数单调性的判定法

二、曲线的凹凸与拐点



一、函数单调性的判定法

定理 1. 设函数 $f(x)$ 在开区间 I 内可导, 若 $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), 则 $f(x)$ 在 I 内单调递增 (递减).

证: 无妨设 $f'(x) > 0$, $x \in I$, 任取 $x_1, x_2 \in I$ ($x_1 < x_2$)
由拉格朗日中值定理得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0$$

$$\xi \in (x_1, x_2) \subset I$$

故 $f(x_1) < f(x_2)$. 这说明 $f(x)$ 在 I 内单调递增.

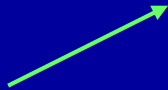
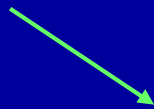
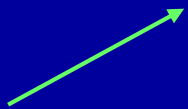
证毕



例1. 确定函数 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ 的单调区间.

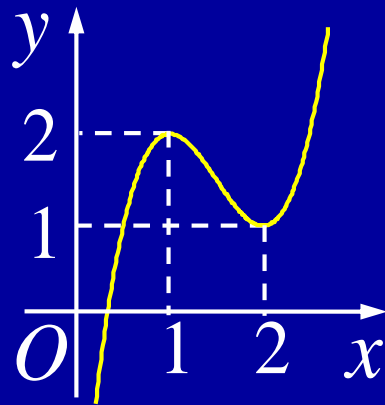
解: $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 1, x = 2$

| x | $(-\infty, 1)$ | 1 | $(1, 2)$ | 2 | $(2, +\infty)$ |
|---------|---|---|--|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | - | 0 | + |
| $f(x)$ |  | 2 |  | 1 |  |

故 $f(x)$ 的**单调增**区间为 $(-\infty, 1), (2, +\infty)$;

$f(x)$ 的**单调减**区间为 $(1, 2)$.



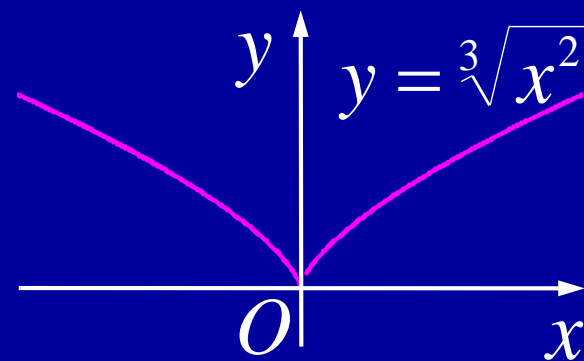
说明:

1) 单调区间的分界点除驻点外,也可是导数不存在的点.

例如, $y = \sqrt[3]{x^2}, x \in (-\infty, +\infty)$

$$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$y'|_{x=0} = \infty$$

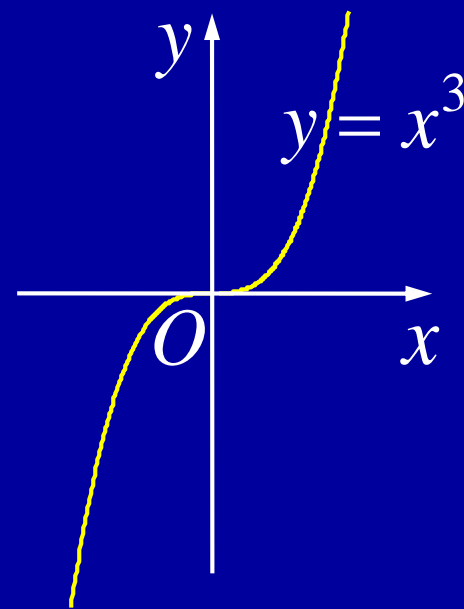


2) 如果函数在某驻点两边导数同号,则不改变函数的单调性.

例如, $y = x^3, x \in (-\infty, +\infty)$

$$y' = 3x^2$$

$$y'|_{x=0} = 0$$



例2. 证明 $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ 时, 成立不等式 $\frac{\sin x}{x} \geq \frac{2}{\pi}$.

证: 令 $f(x) = \frac{\sin x}{x} - \frac{2}{\pi}$,

则 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 上连续, 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上可导, 且

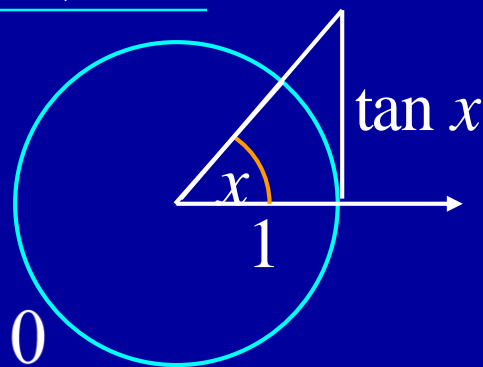
$$f'(x) = \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2} (x - \tan x) < 0$$

证

因此 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内单调递减,

又 $f(x)$ 在 $\frac{\pi}{2}$ 处左连续, 因此 $f(x) \geq f(\frac{\pi}{2}) = 0$

从而 $\frac{\sin x}{x} \geq \frac{2}{\pi}, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}]$



二、曲线的凹凸与拐点

定义. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, $\forall x_1, x_2 \in I$,

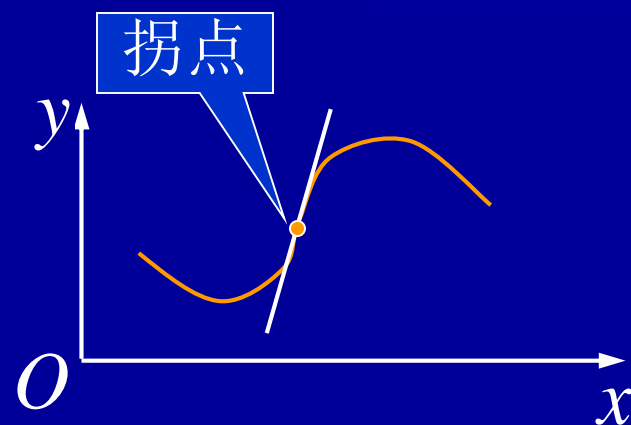
(1) 若恒有 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 则称 $f(x)$ 的

图形是**凹**的;


(2) 若恒有 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 则称 $f(x)$ 的

图形是**凸**的.

连续曲线上有切线的凹凸分界点
称为**拐点**.



定理2.(凹凸判定法) 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有二阶导数

(1) 在 I 内 $f''(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 I 内图形是凹的; 

(2) 在 I 内 $f''(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 I 内图形是凸的. 

证: $\forall x_1, x_2 \in I$, 记 $\xi = \frac{x_1+x_2}{2}$, 利用一阶泰勒公式可得

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(\xi) + \cancel{f'(\xi)(x_1 - \xi)} + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(x_1 - \xi)^2 \\ f(x_2) &= f(\xi) + \cancel{f'(\xi)(x_2 - \xi)} + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(x_2 - \xi)^2 \end{aligned}$$

两式相加

$$f(x_1) + f(x_2) = 2f(\xi) + \frac{1}{2!} \left(\frac{x_2 - x_1}{2} \right)^2 [f''(\xi_1) + f''(\xi_2)]$$

当 $f''(x) > 0$ 时, $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f(\xi)$, 说明 (1) 成立;

<

<

(2) 证毕

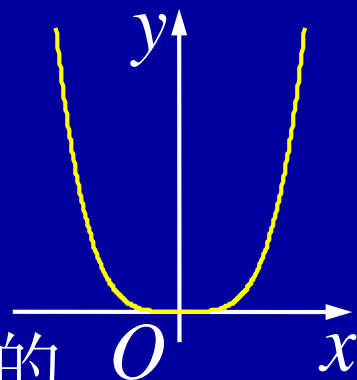


例3. 判断曲线 $y = x^4$ 的凹凸性.

解: $y' = 4x^3$, $y'' = 12x^2$

当 $x \neq 0$ 时, $y'' > 0$; $x = 0$ 时, $y'' = 0$,

故曲线 $y = x^4$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是向上凹的.



说明:

- 1) 若在某点二阶导数为 0, 在其两侧二阶导数不变号, 则曲线的凹凸性不变.
- 2) 根据拐点的定义及上述定理, 可得拐点的判别法如下:

若曲线 $y = f(x)$ 在点 x_0 连续, $f''(x_0) = 0$ 或不存在, 但 $f''(x)$ 在 x_0 两侧异号, 则点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一个拐点.

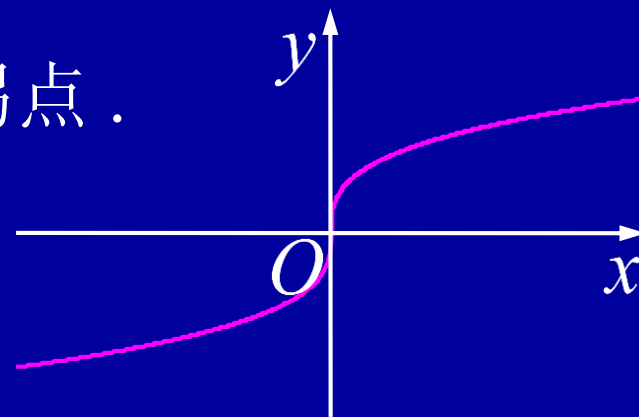


例4. 求曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 的拐点.

解: $y' = \frac{1}{3}x^{-2/3}$, $y'' = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$

| x | $(-\infty, 0)$ | 0 | $(0, +\infty)$ |
|-------|----------------|-----|----------------|
| y'' | + | 不存在 | - |
| y | 凹 | 0 | 凸 |

因此点 $(0, 0)$ 为曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 的拐点.



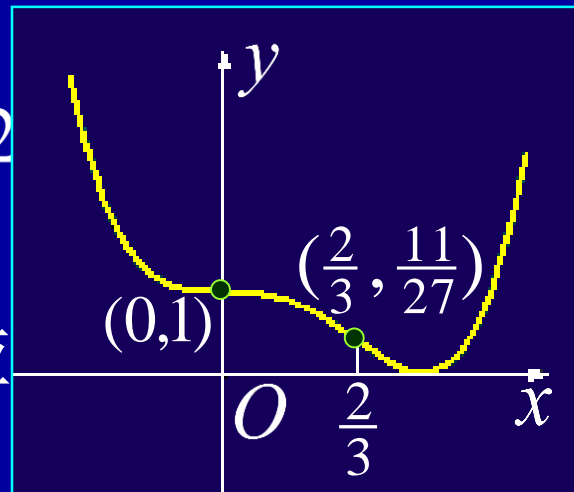
例5. 求曲线 $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$ 的凹凸区间及拐点.

解: 1) 求 y''

$$y' = 12x^3 - 12x^2, \quad y'' = 36x^2 - 24x$$

2) 求拐点可疑点坐标

令 $y'' = 0$ 得 $x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{3}$, 对应



3) 列表判别

| x | $(-\infty, 0)$ | 0 | $(0, \frac{2}{3})$ | $\frac{2}{3}$ | $(\frac{2}{3}, +\infty)$ |
|-------|----------------|-----|--------------------|-----------------|--------------------------|
| y'' | + | 0 | - | 0 | + |
| y | 凹 | 1 | 凸 | $\frac{11}{27}$ | 凹 |

故该曲线在 $(-\infty, 0)$ 及 $(\frac{2}{3}, +\infty)$ 上向上凹, 在 $(0, \frac{2}{3})$ 上向上凸, 点 $(0, 1)$ 及 $(\frac{2}{3}, \frac{11}{27})$ 均为拐点.



内容小结

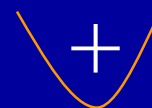
1. 可导函数单调性判别

$f'(x) > 0, x \in I \implies f(x)$ 在 I 上单调递增

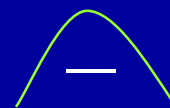
$f'(x) < 0, x \in I \implies f(x)$ 在 I 上单调递减

2. 曲线凹凸与拐点的判别

$f''(x) > 0, x \in I \implies$ 曲线 $y = f(x)$
在 I 上向上凹



$f''(x) < 0, x \in I \implies$ 曲线 $y = f(x)$
在 I 上向上凸



拐点 — 连续曲线上有切线的凹凸分界点



思考与练习

1. 设在 $[0,1]$ 上 $f''(x) > 0$, 则 $f'(0), f'(1), f(1) - f(0)$ 或 $f(0) - f(1)$ 的大小顺序是 (**B**)

(A) $f'(1) > f'(0) > f(1) - f(0)$

(B) $f'(1) > f(1) - f(0) > f'(0)$

(C) $f(1) - f(0) > f'(1) > f'(0)$

(D) $f'(1) > f(0) - f(1) > f'(0)$

提示: 利用 $f''(x) > 0 \Rightarrow f'(x)$ 单调增加, 及

$$f(1) - f(0) = f'(\xi) \quad (0 < \xi < 1)$$

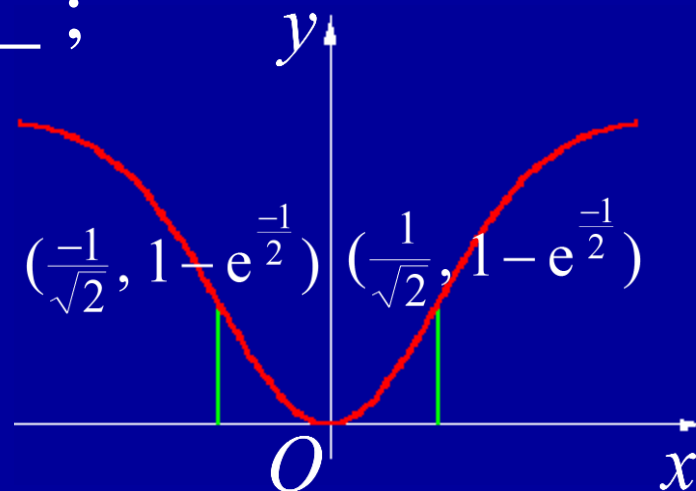


2. 曲线 $y = 1 - e^{-x^2}$ 的凹区间是 $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$;

凸区间是 $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ 及 $(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$;

拐点为 $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 - e^{-\frac{1}{2}})$.

提示: $y'' = 2e^{-x^2}(1 - 2x^2)$



备用题

1. 求证曲线 $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ 有位于一直线的三个拐点.

证明: $y' = \frac{(x^2+1)-(x+1)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2}$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(-2-2x)(x^2+1)^2 - (1-2x-x^2) \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{2(x^3+3x^2-3x-1)}{(x^2+1)^3} \\ &= \frac{2(x-1)(x+2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$



令 $y'' = 0$ 得

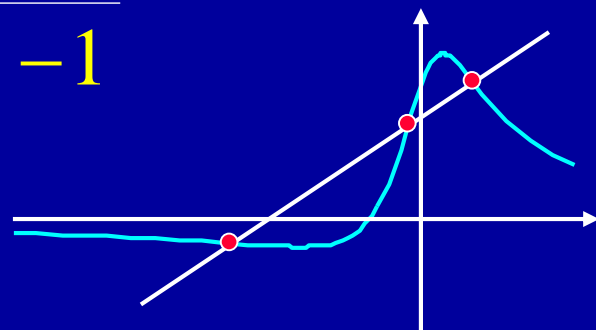
$$x_1 = 1, \quad x_2 = -2 - \sqrt{3}, \quad x_3 = -2 + \sqrt{3}$$

从而三个拐点为

$$(1, 1), \quad (-2 - \sqrt{3}, \frac{-1 - \sqrt{3}}{8 + 4\sqrt{3}}), \quad (-2 + \sqrt{3}, \frac{-1 + \sqrt{3}}{8 - 4\sqrt{3}})$$

因为
$$\frac{\frac{-1 - \sqrt{3}}{8 + 4\sqrt{3}} - 1}{-2 - \sqrt{3} - 1} = \frac{1}{4} = \frac{\frac{-1 + \sqrt{3}}{8 - 4\sqrt{3}} - 1}{-2 + \sqrt{3} - 1}$$

所以三个拐点共线.



$$y = \frac{x+1}{x^2+1}$$

$$y'' = \frac{2(x-1)(x+2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$$



2. 证明: 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, 有 $\sin x > \frac{2}{\pi}x$.

证明: 令 $F(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x$, 则 $F(0) = 0, F(\frac{\pi}{2}) = 0$

$$\because F'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$$

$$F''(x) = -\sin x < 0$$

$\therefore F(x)$ 是凸函数

$$\therefore F(x) \geq \min \left\{ F(0), F\left(\frac{\pi}{2}\right) \right\} = 0 \quad (\text{自证})$$

$$\text{即} \quad \sin x > \frac{2}{\pi}x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

