

# 第十二章 微分方程

已知  $y' = f(x)$ , 求  $y$  — 积分问题

↓ 推广

已知含  $y$  及其若干阶导数的方程, 求  $y$   
— 微分方程问题

# 第一节

## 微分方程的基本概念

引例 { 几何问题  
物理问题



微分方程的基本概念



**引例1.** 一曲线通过点 $(1,2)$ , 在该曲线上任意点处的切线斜率为 $2x$ , 求该曲线的方程.

**解:** 设所求曲线方程为 $y = y(x)$ , 则有如下关系式:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2x & ① \\ y|_{x=1} = 2 & ② \end{cases}$$

由 ① 得  $y = \int 2x \, dx = x^2 + C$  ( $C$ 为任意常数)

由 ② 得  $C = 1$ , 因此所求曲线方程为  $y = x^2 + 1$ .



**引例2.** 列车在平直路上以  $20 \text{ m/s}$  的速度行驶, 制动时获得加速度  $a = -0.4 \text{ m/s}^2$ , 求制动后列车的运动规律.

**解:** 设列车在制动后  $t$  秒行驶了  $s$  米, 即求  $s = s(t)$ .

已知 
$$\begin{cases} \frac{d^2 s}{dt^2} = -0.4 \\ s|_{t=0} = 0, \quad \frac{ds}{dt}|_{t=0} = 20 \end{cases}$$

由前一式两次积分, 可得  $s = -0.2t^2 + C_1 t + C_2$

利用后两式可得  $C_1 = 20, C_2 = 0$

因此所求运动规律为  $s = -0.2t^2 + 20t$

**说明:** 利用这一规律可求出制动后多少时间列车才能停住, 以及制动后行驶了多少路程.



# 微分方程的基本概念

含未知函数及其导数的方程叫做**微分方程**.

分类  $\begin{cases} \text{常微分方程 (本章内容)} \\ \text{偏微分方程} \end{cases}$

方程中所含未知函数导数的最高阶数叫做微分方程的**阶**.

一般地,  $n$  阶常微分方程的形式是

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

或  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  ( $n$  阶显式微分方程)



微分方程的解 — 使方程成为恒等式的函数.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{通解} — \text{解中所含独立的任意常数的个数与方程} \\ \text{的阶数相同. 图形称为积分曲线族.} \\ \text{特解} — \text{不含任意常数的解, 其图形称为积分曲线.} \end{array} \right.$

定解条件 — 确定通解中任意常数的条件.

$n$  阶方程的初始条件(或初值条件):

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

---

引例1 
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2x \\ y|_{x=1} = 2 \end{cases}$$

通解:  $y = x^2 + C$

特解:  $y = x^2 + 1$

引例2 
$$\begin{cases} \frac{d^2s}{dt^2} = -0.4 \\ s|_{t=0} = 0, \quad \frac{ds}{dt}|_{t=0} = 20 \end{cases}$$

$s = -0.2t^2 + C_1t + C_2$

$s = -0.2t^2 + 20t$



**例1.** 验证函数  $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$  ( $C_1, C_2$  为常数)

是微分方程  $\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0$  的通解, 并求满足初始条件

$x|_{t=0} = A, \frac{dx}{dt}|_{t=0} = 0$  的特解 .

解: 
$$\begin{aligned}\frac{d^2 x}{dt^2} &= -C_1 k^2 \cos kt - C_2 k^2 \sin kt \\ &= -k^2(C_1 \cos kt + C_2 \sin kt) = -k^2 x\end{aligned}$$

这说明  $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$  是方程的解 .

$C_1, C_2$  是两个独立的任意常数, 故它是方程的通解.

利用初始条件易得:  $C_1 = A, C_2 = 0$ , 故所求特解为

$$x = A \cos kt$$



**例2.** 已知曲线上点  $P(x, y)$  处的法线与  $x$  轴交点为  $Q$  且线段  $PQ$  被  $y$  轴平分, 求所满足的微分方程 .

**解:** 如图所示, 点  $P(x, y)$  处的法线方程为

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$$

令  $Y = 0$ , 得  $Q$  点的横坐标

$$X = x + yy'$$

$$\therefore x + yy' = -x, \text{ 即 } yy' + 2x = 0$$

