

## 第五节

# 函数的微分

一、微分的概念

二、微分运算法则

三、微分在近似计算中的应用

\*四、微分在估计误差中的应用

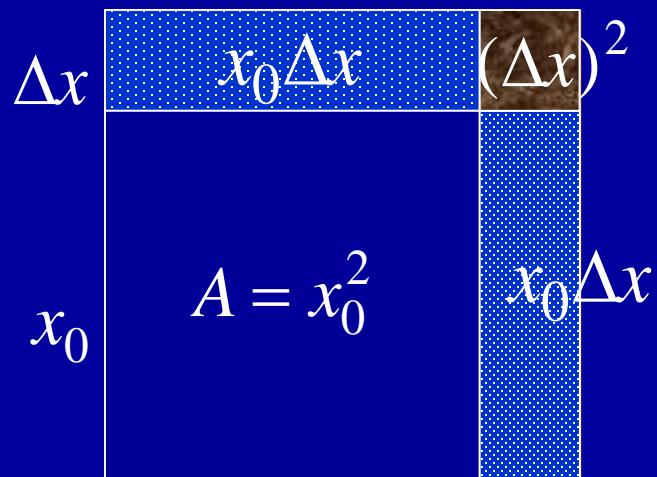


# 一、微分的概念

引例：一块正方形金属薄片受温度变化的影响，其边长由  $x_0$  变到  $x_0 + \Delta x$ ，问此薄片面积改变了多少？

设薄片边长为  $x$ ，面积为  $A$ ，则  $A = x^2$ ，当  $x$  在  $x_0$  取得增量  $\Delta x$  时，面积的增量为

$$\begin{aligned}\Delta A &= (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 \\ &= \underbrace{2x_0 \Delta x}_{\text{关于 } \Delta x \text{ 的线性主部}} + \underbrace{(\Delta x)^2}_{\text{高阶无穷小}}\end{aligned}$$



故  $\Delta A \approx \underline{2x_0 \Delta x}$

称为函数在  $x_0$  的微分



定义: 若函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  的增量可表示为

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$$

( $A$  为不依赖于  $\Delta x$  的常数)

则称函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  可微, 而  $A\Delta x$  称为  $f(x)$  在点  $x_0$  的微分, 记作  $dy$  或  $df$ , 即

$$dy = A\Delta x$$

定理: 函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  可微的充要条件是

$y = f(x)$  在点  $x_0$  处可导, 且  $A = f'(x_0)$ , 即

$$dy = f'(x_0)\Delta x$$



**定理：**函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  可微的充要条件是  
 $y = f(x)$  在点  $x_0$  处可导，且  $A = f'(x_0)$ ，即

$$dy = f'(x_0)\Delta x$$

---

**证：“必要性”**

已知  $y = f(x)$  在点  $x_0$  可微，则

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \right) = A$$

故  $y = f(x)$  在点  $x_0$  可导，且  $f'(x_0) = A$



**定理：**函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  可微的充要条件是  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处可导，且  $A = f'(x_0)$ ，即

$$dy = f'(x_0)\Delta x$$

**“充分性”** 已知  $y = f(x)$  在点  $x_0$  可导，则

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha \quad (\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0)$$

故  $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x = \underbrace{f'(x_0)\Delta x}_{f'(x_0) \neq 0 \text{ 时}} + o(\Delta x)$

此项为  $\Delta y$  的  
线性主部

即  $dy = f'(x_0)\Delta x$



说明:  $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$

$$dy = f'(x_0)\Delta x$$

当  $f'(x_0) \neq 0$  时,

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{dy} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{f'(x_0)\Delta x} \\ &= \frac{1}{f'(x_0)} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1\end{aligned}$$

所以  $\Delta x \rightarrow 0$  时  $\Delta y$  与  $dy$  是等价无穷小, 故当  $|\Delta x|$  很小时, 有近似公式

$$\Delta y \approx dy$$

# 微分的几何意义——切线纵坐标的增量

$$dy = f'(x_0)\Delta x = \tan \alpha \cdot \Delta x$$

当  $\Delta x$  很小时,  $\Delta y \approx dy$

当  $y = x$  时,

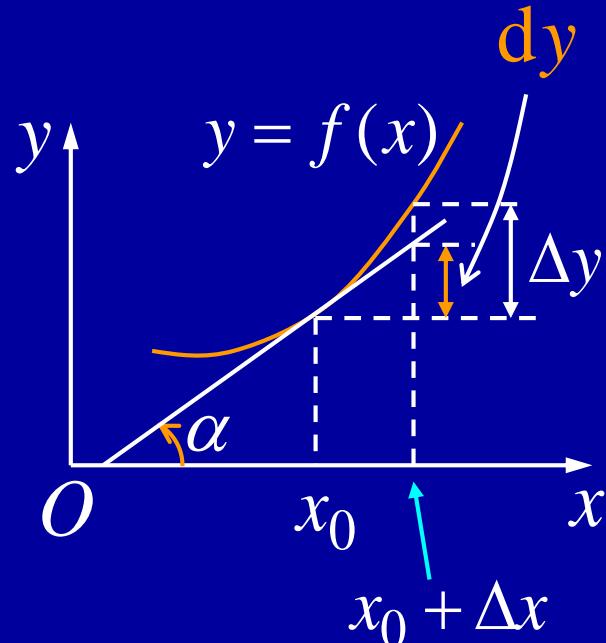
$$\Delta y = \Delta x \underset{\text{记}}{=} dx$$

称  $\Delta x$  为自变量的微分, 记作  $dx$

则有  $dy = f'(x)dx$

从而  $\frac{dy}{dx} = f'(x)$

导数也叫作微商



例如,  $y = x^3$ ,

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{\begin{array}{l}x=2 \\ dx=0.02\end{array}} = 3x^2 \cdot dx \Big|_{\begin{array}{l}x=2 \\ dx=0.02\end{array}} = 0.24$$

又如,  $y = \arctan x$ ,

$$dy = \frac{1}{1+x^2} dx$$

基本初等函数的微分公式 (见 P120表)



## 二、微分运算法则

设  $u(x), v(x)$  均可微，则

$$1. \mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$$

$$2. \mathrm{d}(Cu) = C\mathrm{d}u \quad (C \text{ 为常数})$$

$$3. \mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v$$

$$4. \mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

### 5. 复合函数的微分

$y = f(u), u = \varphi(x)$  分别可微，

则复合函数  $y = f[\varphi(x)]$  的微分为

$$\mathrm{d}y = y'_x \mathrm{d}x = f'(u) \boxed{\varphi'(x) \mathrm{d}x} \longrightarrow \boxed{\mathrm{d}u}$$

$$\mathrm{d}y = f'(u) \mathrm{d}u$$

微分形式不变



例1.  $y = \ln(1 + e^{x^2})$ , 求  $dy$ .

解:  $dy = \frac{1}{1 + e^{x^2}} d(1 + e^{x^2})$

$$= \frac{1}{1 + e^{x^2}} \cdot e^{x^2} d(x^2)$$

$$= \frac{1}{1 + e^{x^2}} \cdot e^{x^2} \cdot 2x dx$$

$$= \frac{2x e^{x^2}}{1 + e^{x^2}} dx$$



**例2.** 设  $y \sin x - \cos(x - y) = 0$ , 求  $dy$ .

**解:** 利用一阶微分形式不变性, 有

$$d(y \sin x) - d(\cos(x - y)) = 0$$

$$\sin x dy + y \cos x dx + \sin(x - y) (dx - dy) = 0$$

$$dy = \frac{y \cos x + \sin(x - y)}{\sin(x - y) - \sin x} dx$$

**例3.** 在下列括号中填入适当的函数使等式成立:

(1)  $d\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right) = x dx$  ( $C$ 为任意常数)

(2)  $d\left(\frac{1}{\omega} \sin \omega t + C\right) = \cos \omega t dt$

**说明:** 上述微分的反问题是不定积分要研究的内容.

**注意:** 数学中的反问题往往出现多值性.



### 三、 微分在近似计算中的应用

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

当 $|\Delta x|$ 很小时, 得近似等式:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

↓ 令  $x = x_0 + \Delta x$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

- 使用原则:
- 1)  $f(x_0), f'(x_0)$  好算;
  - 2)  $x$  与  $x_0$  靠近.



特别当  $x_0 = 0$ ,  $|x|$  很小时,

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x$$

常用近似公式: ( $|x|$  很小)

(1)  $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$

证明: 令  $f(x) = (1+x)^\alpha$

得  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = \alpha$

$\therefore$  当  $|x|$  很小时,  $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$

(2)  $\sin x \approx x$

(3)  $e^x \approx 1 + x$

(4)  $\tan x \approx x$

(5)  $\ln(1+x) \approx x$



**例4.** 求  $\sin 29^\circ$  的近似值 .

**解:** 设  $f(x) = \sin x$ ,

$$\text{取 } x_0 = 30^\circ = \frac{\pi}{6}, \quad x = 29^\circ = \frac{29}{180}\pi$$

$$\text{则 } dx = -\frac{\pi}{180}$$

$$\sin 29^\circ = \sin \frac{29}{180}\pi \approx \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} \cdot \left(-\frac{\pi}{180}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-0.0175)$$

$$\approx 0.485$$

$$\boxed{\sin 29^\circ \approx 0.4848\dots}$$



**例5.** 计算 $\sqrt[5]{245}$ 的近似值 .

$$3^5 = 243$$

解:  $\sqrt[5]{245} = (243+2)^{\frac{1}{5}}$

$$= 3 \left(1 + \frac{2}{243}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$$

$$\approx 3 \left(1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{243}\right)$$

$$\approx 3.004938$$

$$\sqrt[5]{245} = 3.004942\cdots$$



HIGHER EDUCATION PRESS

**例6.**有一批半径为1cm 的球 ,为了提高球面的光洁度,要镀上一层铜 , 厚度定为 0.01cm , 估计一下, 每只球需用铜多少克 .(铜的密度 : $8.9\text{ g}/\text{cm}^3$ )

**解:** 已知球体体积为  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

镀铜体积为  $V$  在  $R = 1, \Delta R = 0.01$  时体积的增量  $\Delta V$ ,

$$\Delta V \approx dV \Big|_{\begin{array}{l} R=1 \\ \Delta R=0.01 \end{array}} = 4\pi R^2 \Delta R \Big|_{\begin{array}{l} R=1 \\ \Delta R=0.01 \end{array}}$$

$$\approx 0.13 (\text{cm}^3)$$

因此每只球需用铜约为

$$8.9 \times 0.13 = 1.16 (\text{g})$$



## \*四、微分在估计误差中的应用

某量的精确值为  $A$ ，其近似值为  $a$ ，

$|A - a|$  称为  $a$  的绝对误差

$\frac{|A-a|}{|a|}$  称为  $a$  的相对误差

若  $|A - a| \leq \delta_A$

$\delta_A$  称为测量  $A$  的绝对误差限

$\frac{\delta_A}{|a|}$  称为测量  $A$  的相对误差限



## 误差传递公式：

若直接测量某量得  $x$  , 已知测量误差限为  $\delta_x$  ,

按公式  $y = f(x)$  计算  $y$  值时的误差

$$|\Delta y| \approx |dy| = |f'(x)| \cdot |\Delta x|$$

$$\leq |f'(x)| \cdot \delta_x$$

故  $y$  的绝对误差限约为  $\delta_y \approx |f'(x)| \cdot \delta_x$

相对误差限约为  $\frac{\delta_y}{|y|} \approx \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \right| \cdot \delta_x$



**例7.** 设测得圆钢截面的直径  $D = 60.03 \text{ mm}$ , 测量  $D$  的绝对误差限  $\delta_D = 0.05 \text{ mm}$ , 欲利用公式  $A = \frac{\pi}{4} D^2$  计算圆钢截面积, 试估计面积的误差.

**解:**计算  $A$  的绝对误差限约为

$$\begin{aligned}\delta_A &= |A'| \cdot \delta_D = \frac{\pi}{2} D \cdot \delta_D = \frac{\pi}{2} \times 60.0 \times 0.05 \\ &\approx 4.715 \text{ (mm}^2\text{)}\end{aligned}$$

$A$  的相对误差限约为

$$\frac{\delta_A}{|A|} = \frac{\frac{\pi}{2} D \delta_D}{\frac{\pi}{4} D^2} = 2 \frac{\delta_D}{D} = 2 \times \frac{0.05}{60.0} = 0.17 \%$$



# 内容小结

## 1. 微分概念

- 微分的定义及几何意义
- 可微  $\longleftrightarrow$  可导

## 2. 微分运算法则

微分形式不变性： $df(u) = f'(u)du$   
( $u$  是自变量或中间变量)

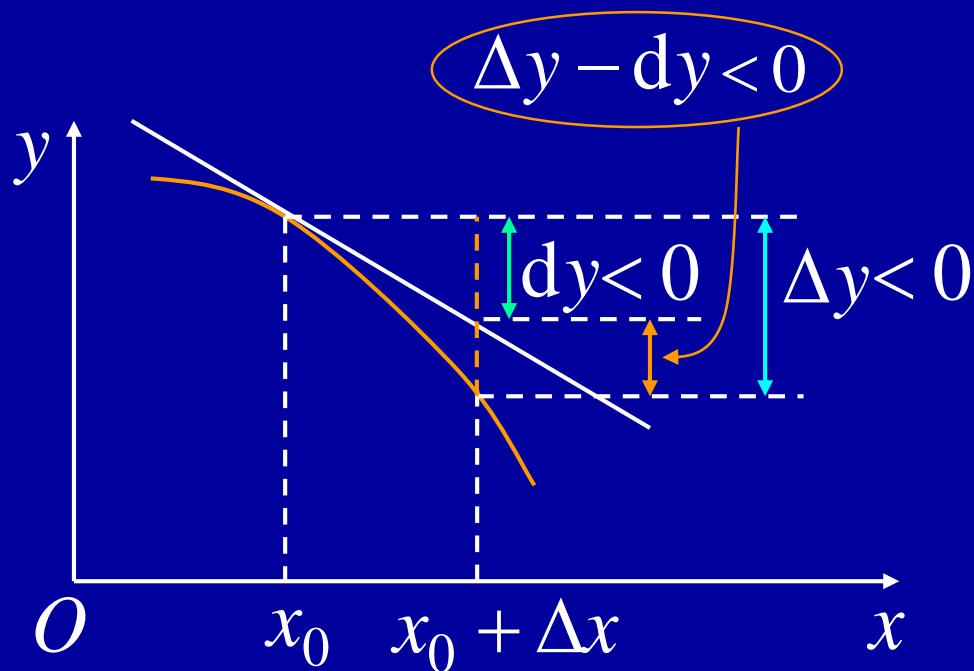
## 3. 微分的应用

$\left\{ \begin{array}{l} \text{近似计算} \\ \text{估计误差} \end{array} \right.$



## 思考与练习

1. 设函数  $y = f(x)$  的图形如下, 试在图中标出的点  $x_0$  处的  $dy$ ,  $\Delta y$  及  $\Delta y - dy$ , 并说明其正负.



$$2. \quad d(\arctan e^{-x}) = \frac{1}{1+e^{-2x}} de^{-x}$$

$$= \frac{-e^{-x}}{1+e^{-2x}} dx$$

$$3. \quad \frac{d \tan x}{d \sin x} = \frac{\sec^3 x}{\text{_____}}$$

$$4. \quad d \left( -\frac{1}{2} \cos 2x + C \right) = \sin 2x d x$$



5. 设  $y = y(x)$  由方程  $x^3 + y^3 - \sin 3x + 6y = 0$  确定,

求  $d y|_{x=0}$ .

解: 方程两边求微分, 得

$$3x^2 dx + 3y^2 dy - 3\cos 3x dx + 6dy = 0$$

当  $x=0$  时  $y=0$ , 由上式得  $d y|_{x=0} = \frac{1}{2} dx$

6. 设  $a > 0$ , 且  $|b| \ll a^n$ , 则

$$\sqrt[n]{a^n + b} \approx a + \frac{b}{na^{n-1}}$$



# 备用题

1. 已知  $y = \arcsin(\sin^2 \frac{1}{x})$ , 求  $dy$ .

解: 因为

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin^2 \frac{1}{x})^2}} \cdot 2 \sin \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

所以

$$dy = y' dx = -\frac{\sin \frac{2}{x}}{x^2 \sqrt{1 - (\sin^2 \frac{1}{x})^2}} dx$$



2. 已知  $xy = e^{x+y}$ , 求  $dy$ .

解: 方程两边求微分, 得

$$xdy + ydx = e^{x+y}(dx + dy)$$

$$\therefore d y = \frac{y - e^{x+y}}{e^{x+y} - x} dx$$

