

第五节

高阶线性微分方程

一、二阶线性微分方程举例

二、线性齐次方程解的结构

三、线性非齐次方程解的结构

*四、常数变易法



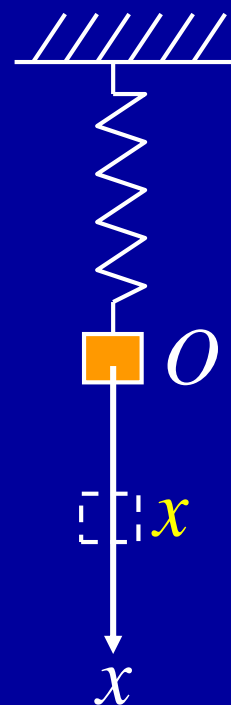
一、二阶线性微分方程举例

例1. 质量为 m 的物体自由悬挂在一端固定的弹簧上, 当重力与弹性力抵消时, 物体处于平衡状态, 若用手向下拉物体使它离开平衡位置后放开, 物体在弹性力与阻力作用下作往复运动, 阻力的大小与运动速度成正比, 方向相反. 建立位移满足的微分方程.

解: 取平衡时物体的位置为坐标原点, 建立坐标系如图. 设时刻 t 物位移为 $x(t)$.

(1) 自由振动情况. 物体所受的力有:

弹性恢复力 $f = -c x$ (虎克定律)



$$\text{阻力 } R = -\mu \frac{dx}{dt}$$

$$\text{据牛顿第二定律得 } m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx - \mu \frac{dx}{dt}$$

令 $2n = \frac{\mu}{m}$, $k^2 = \frac{c}{m}$, 则得有阻尼自由振动方程:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2 x = 0$$

(2) 强迫振动情况. 若物体在运动过程中还受铅直外力

$F = H \sin pt$ 作用, 令 $h = \frac{H}{m}$, 则得强迫振动方程:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2 x = h \sin pt$$



例1

方程的共性 — 可归结为同一形式:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad (\text{二阶线性微分方程})$$

n 阶线性微分方程的一般形式为

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

$$\begin{cases} f(x) \neq 0 \text{ 时, 称为非齐次方程;} \\ f(x) \equiv 0 \text{ 时, 称为齐次方程.} \end{cases}$$

复习: 一阶线性方程 $y' + P(x)y = Q(x)$

$$\text{通解: } y = \underbrace{C e^{-\int P(x) dx}}_{\text{齐次方程通解}} + \underbrace{e^{-\int P(x) dx} \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx}_{\text{非齐次方程特解}}$$

齐次方程通解 Y

非齐次方程特解 y^*



二、线性齐次方程解的结构

定理1. 若函数 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是二阶线性齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个解, 则 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ (C_1, C_2 为任意常数) 也是该方程的解. (叠加原理)

证: 将 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 代入方程左边, 得

$$\begin{aligned} & [C_1y_1'' + C_2y_2''] + P(x)[C_1y_1' + C_2y_2'] \\ & \quad + Q(x)[C_1y_1 + C_2y_2] \\ &= C_1[y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1] \\ & \quad + C_2[y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2] = 0 \end{aligned} \quad \text{证毕}$$



说明:

$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 不一定是所给二阶方程的通解.

例如, $y_1(x)$ 是某二阶齐次方程的解, 则

$y_2(x) = 2 y_1(x)$ 也是齐次方程的解

但是 $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = (C_1 + 2 C_2) y_1(x)$

并不是通解

为解决通解的判别问题, 下面引入函数的线性相关与线性无关概念.



定义: 设 $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ 是定义在区间 I 上的 n 个函数, 若存在**不全为 0** 的常数 k_1, k_2, \dots, k_n , 使得

$$k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \dots + k_n y_n(x) \equiv 0, \quad x \in I$$

则称这 n 个函数在 I 上**线性相关**, 否则称为**线性无关**.

例如, $1, \cos^2 x, \sin^2 x$, 在 $(-\infty, +\infty)$ 上都有

$$1 - \cos^2 x - \sin^2 x \equiv 0$$

故它们在任何区间 I 上都线性相关;

又如, $1, x, x^2$, 若在某区间 I 上 $k_1 + k_2 x + k_3 x^2 \equiv 0$, 则根据二次多项式至多只有两个零点, 可见 k_1, k_2, k_3 必需全为 0, 故 $1, x, x^2$ 在任何区间 I 上都线性无关.



两个函数在区间 I 上线性相关与线性无关的**充要条件**:

$y_1(x), y_2(x)$ 线性相关 \iff 存在不全为 0 的 k_1, k_2 使
 $k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) \equiv 0$

$$\iff \frac{y_1(x)}{y_2(x)} \equiv -\frac{k_2}{k_1} \quad \left(\text{不妨设 } k_1 \neq 0 \right)$$

$y_1(x), y_2(x)$ 线性无关 $\iff \frac{y_1(x)}{y_2(x)} \not\equiv \text{常数}$

可微函数 y_1, y_2 线性无关

$$\iff \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (\text{证明略})$$

思考: 若 $y_1(x), y_2(x)$ 中有一个恒为 0, 则 $y_1(x), y_2(x)$
必线性 **相关**



定理 2. 若 $y_1(x), y_2(x)$ 是二阶线性齐次方程的两个线性无关特解, 则 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ (C_1, C_2 为任意常数) 是该方程的通解. (自证)

例如, 方程 $y'' + y = 0$ 有特解 $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$, 且 $\frac{y_2}{y_1} = \tan x \neq$ 常数, 故方程的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

定理 3. 若 y_1, y_2, \dots, y_n 是 n 阶齐次方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

的 n 个线性无关解, 则方程的通解为

$$y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n \quad (C_k \text{ 为任意常数})$$



三、线性非齐次方程解的结构

定理 4. 设 $y^*(x)$ 是二阶非齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad ①$$

的一个特解, $Y(x)$ 是相应齐次方程的通解, 则

$$y = Y(x) + y^*(x) \quad ②$$

是非齐次方程的通解.

证: 将 $y = Y(x) + y^*(x)$ 代入方程①左端, 得

$$\begin{aligned} & (Y'' + \underline{y^{*''}}) + P(x)(Y' + \underline{y^{*'}}) + Q(x)(Y + \underline{y^*}) \\ &= (y^{*''} + P(x)y^{*'} + Q(x)y^*) + (Y'' + P(x)Y' + Q(x)Y) \\ &= f(x) + 0 = f(x) \end{aligned}$$



故 $y = Y(x) + y^*(x)$ 是非齐次方程的解, 又 Y 中含有两个独立任意常数, 因而 ② 也是通解. 证毕

例如, 方程 $y'' + y = x$ 有特解 $y^* = x$

对应齐次方程 $y'' + y = 0$ 有通解

$$Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

因此该方程的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x$$



定理 5. 设 $y_k^*(x)$ ($k = 1, 2, \dots, m$) 分别是方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_k(x) \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

的特解, 则 $y = \sum_{k=1}^m y_k^*$ 是方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = \sum_{k=1}^m f_k(x)$$

的特解. (非齐次方程之解的叠加原理)

定理4, 定理5 均可推广到 n 阶线性非齐次方程.



定理 6. 给定 n 阶非齐次线性方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x)$$

设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是对应齐次方程的 n 个线性无关特解, $y^*(x)$ 是非齐次方程的特解, 则非齐次方程的通解为

$$y = \underline{C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)} + y^*(x)$$

$$= Y(x) + y^*(x)$$

齐次方程通解

非齐次方程特解



例2. 设线性无关函数 y_1, y_2, y_3 都是二阶非齐次线性方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的解, C_1, C_2 是任意常数, 则该方程的通解是 (**D**).

~~(A)~~ $C_1y_1 + C_2y_2 + y_3;$

~~(B)~~ $C_1y_1 + C_2y_2 + (C_1 + C_2)y_3;$

(C) $C_1y_1 + C_2y_2 - (1 - C_1 - C_2)y_3;$

(D) $C_1y_1 + C_2y_2 + (1 - C_1 - C_2)y_3.$

提示: (C) $C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_2 - y_3) - y_3$

(D) $C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_2 - y_3) + y_3$

$y_1 - y_3, y_2 - y_3$ 都是对应齐次方程的解,
二者线性无关. (反证法可证)



例3. 已知微分方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 有三个解 $y_1 = x$, $y_2 = e^x$, $y_3 = e^{2x}$, 求此方程满足初始条件 $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$ 的特解.

解: $y_2 - y_1$ 与 $y_3 - y_1$ 是对应齐次方程的解, 且

$$\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{e^x - x}{e^{2x} - x} \neq \text{常数}$$

因而线性无关, 故原方程通解为

$$y = C_1(e^x - x) + C_2(e^{2x} - x) + x$$

代入初始条件 $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$, 得 $C_1 = -1$, $C_2 = 2$,
故所求特解为 $y = 2e^{2x} - e^x$.



*四、常数变易法

复习: $y' + p(x)y = f(x)$

$$y_1(x) = e^{-\int p(x) dx}$$

对应齐次方程的通解: $y = C y_1(x)$

常数变易法: 设非齐次方程的解为 $y = y_1(x) u(x)$
代入原方程确定 $u(x)$.

对二阶非齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad (3)$$

情形1. 已知对应齐次方程通解: $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

设③的解为 $y = y_1(x) v_1(x) + y_2(x) v_2(x) \quad (4)$
($v_1(x), v_2(x)$ 待定)

由于有两个待定函数, 所以要建立两个方程:



$$y' = y_1' v_1 + y_2' v_2 + y_1 v_1' + y_2 v_2'$$

为使 y'' 中不含 v_1'', v_2'' , 令

$$y_1 v_1' + y_2 v_2' = 0 \quad (5)$$

于是 $y'' = y_1' v_1' + y_2' v_2' + y_1'' v_1 + y_2'' v_2$

将以上结果代入方程 (3):

y_1, y_2 是对应
齐次方程的解

$$y_1' v_1' + y_2' v_2' + \underline{(y_1'' + P y_1' + Q y_1)} v_1 + \underline{(y_2'' + P y_2' + Q y_2)} v_2 = f(x)$$

得 $y_1' v_1' + y_2' v_2' = f(x) \quad (6)$

因 y_1, y_2 线性无关, 故 (5), (6) 的系数行列式

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$



于是得 $v_1' = -\frac{1}{W} y_2 f, \quad v_2' = \frac{1}{W} y_1 f$

积分得: $v_1 = C_1 + g_1(x), \quad v_2 = C_2 + g_2(x)$

代入③ 即得非齐次方程的通解:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_1 g_1(x) + y_2 g_2(x)$$

说明: 将③的解设为

$$y = y_1(x) v_1(x) + y_2(x) v_2(x)$$

只有一个必须满足的条件即 方程③, 因此必需再附加一个条件, 方程⑤的引入是为了简化计算.



情形2. 仅知③的齐次方程的一个非零特解 $y_1(x)$.

令 $y = u(x)y_1(x)$, 代入 ③ 化简得

$$y_1 u'' + (2y_1' + P y_1)u' + \underbrace{(y_1'' + P y_1' + Q y_1)}_{\parallel 0} u = f$$

↓ 令 $z = u'$

$$y_1 z' + (2y_1' + P y_1)z = f \quad (\text{一阶线性方程})$$

设其通解为 $z = C_2 Z(x) + z^*(x)$

积分得 $u = C_1 + C_2 U(x) + u^*(x)$

由此得原方程③的通解:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 U(x) y_1(x) + u^*(x) y_1(x)$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad \text{③}$$



例4. 已知齐次方程 $(x-1)y'' - xy' + y = 0$ 的通解为 $Y = C_1x + C_2e^x$, 求 $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2$ 的通解.

解: 将所给方程化为: $y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = x-1$

令 $y = xv_1(x) + e^x v_2(x)$, 利用⑤,⑥建立方程组:

$$\begin{cases} xv_1' + e^x v_2' = 0 \\ v_1' + e^x v_2' = x-1 \end{cases}$$

解得 $v_1' = -1$, $v_2' = xe^{-x}$, 积分得

$$v_1 = C_1' - x, \quad v_2 = C_2' - (x+1)e^{-x}$$

故所求通解为 $y = C_1'x + C_2'e^x - (x^2 + x + 1)$
 $= C_1x + C_2e^x - (x^2 + 1)$



例5. 求方程 $x^2 y'' - (x+2)(x y' - y) = x^4$ 的通解.

解: 对应齐次方程为 $x^2 y'' - (x+2)(x y' - y) = 0$

由观察可知它有特解: $y_1 = x$,

令 $y = xu(x)$, 代入非齐次方程后化简得

$$u'' - u' = x$$

解上述可降阶微分方程, 可得通解:

$$u = C_1 + C_2 e^x - \left(\frac{1}{2} x^2 + x\right)$$

故原方程通解为

$$y = xu = C_1 x + C_2 x e^x - \left(\frac{1}{2} x^3 + x^2\right)$$

