

第三节

一阶线性微分方程

一、一阶线性微分方程

二、伯努利方程



一、一阶线性微分方程

一阶线性微分方程标准形式: $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

若 $Q(x) \equiv 0$, 称为**齐次方程**;

若 $Q(x) \neq 0$, 称为**非齐次方程**.

1. 解齐次方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$

分离变量 $\frac{dy}{y} = -P(x)dx$

两边积分得 $\ln|y| = -\int P(x)dx + \ln|C|$

故通解为 $y = Ce^{-\int P(x)dx}$



2. 解非齐次方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

用**常数变易法**: 作变换 $y(x) = u(x)e^{-\int P(x)dx}$, 则

$$u'e^{-\int P(x)dx} - \cancel{P(x)ue^{-\int P(x)dx}} + \cancel{P(x)ue^{-\int P(x)dx}} = Q(x)$$

即
$$\frac{du}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

两端积分得
$$u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C$$

故原方程的通解
$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right]$$

即
$$y = \underbrace{Ce^{-\int P(x)dx}}_{\text{齐次方程通解}} + \underbrace{e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx}_{\text{非齐次方程特解}}$$



例1. 解方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{5/2}$.

解: 先解 $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = 0$, 即 $\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x+1}$

积分得 $\ln|y| = 2\ln|x+1| + \ln|C|$, 即 $y = C(x+1)^2$

用**常数变易法**求特解. 令 $y = u(x) \cdot (x+1)^2$, 则

$$y' = u' \cdot (x+1)^2 + 2u \cdot (x+1)$$

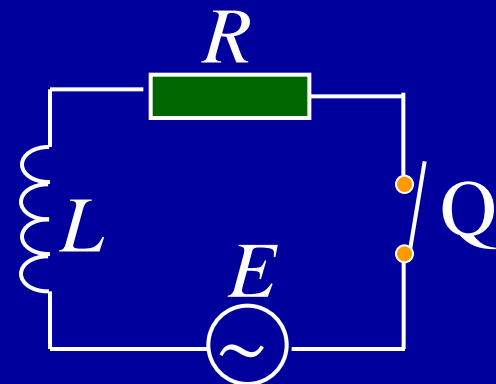
代入非齐次方程得 $u' = (x+1)^{1/2}$

解得 $u = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C$

故原方程通解为 $y = (x+1)^2 \left[\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C \right]$



***例2.** 有一电路如图所示,其中电源电动势为 $E = E_m \sin \omega t$, 电阻 R 和电感 L 都是常量, 求电流 $i(t)$.



解: 列方程. 由回路电压定律:

在闭合回路中, 所有支路上的电压降为 0

已知经过电阻 R 的电压降为 Ri

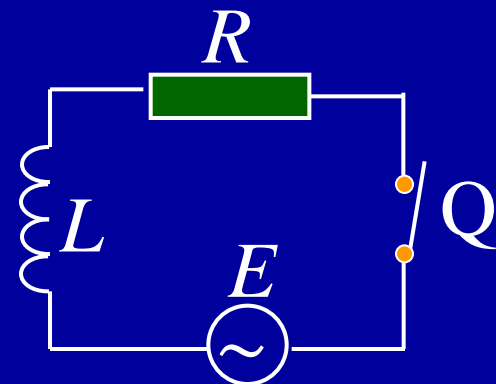
经过 L 的电压降为 $L \frac{di}{dt}$

因此有 $E - L \frac{di}{dt} - Ri = 0$, 即 $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E_m \sin \omega t}{L}$

初始条件: $i|_{t=0} = 0$



$$\begin{cases} \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E_m \sin \omega t}{L} \\ i|_{t=0} = 0 \end{cases}$$



解方程:

利用一阶线性方程解的公式可得

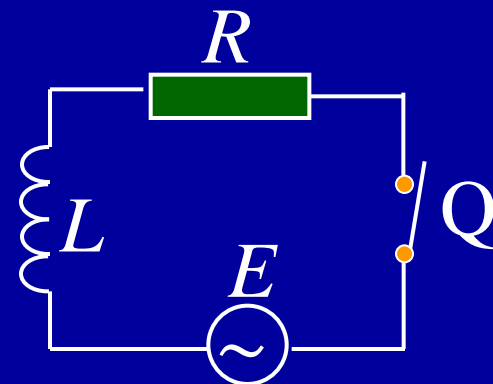
$$\begin{aligned} i(t) &= e^{-\int \frac{R}{L} dt} \left[\int \frac{E_m}{L} \sin \omega t \cdot e^{\int \frac{R}{L} dt} dt + C \right] \\ &= \frac{E_m}{R^2 + \omega^2 L^2} (R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t) + C e^{-\frac{R}{L} t} \end{aligned}$$

由初始条件: $i|_{t=0} = 0$ 得 $C = \frac{\omega L E_m}{R^2 + \omega^2 L^2}$



因此所求电流函数为

$$i(t) = \frac{\omega L E_m}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_m}{R^2 + \omega^2 L^2} (\underline{R \sin \omega t} - \underline{\omega L \cos \omega t})$$



解的意义: 令 $\varphi = \arctan \frac{\omega L}{R}$, 则

$$i(t) = \underbrace{\frac{\omega L E_m}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-\frac{R}{L}t}}_{\text{暂态电流}} + \underbrace{\frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \varphi)}_{\text{稳态电流}}$$

暂态电流

稳态电流



例3. 求方程 $\frac{dx}{\sqrt{xy}} + \left[\frac{2}{y} - \sqrt{\frac{x}{y^3}} \right] dy = 0$ 的通解.

解: 注意 x, y 同号, 不妨设 $x, y > 0$, 此时 $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d\sqrt{x}$,
故方程可变形为 $2\frac{d\sqrt{x}}{dy} - \frac{\sqrt{x}}{y} = -\frac{2}{\sqrt{y}}$

由一阶线性方程**通解公式**, 得

这是以 \sqrt{x} 为因变量
 y 为自变量的一阶
线性方程

$$\sqrt{x} = \underline{e^{\int \frac{dy}{2y}}} \left[\int \left(-\frac{1}{\sqrt{y}} \underline{e^{-\int \frac{dy}{2y}}} \right) dy + \ln C \right] \quad (C > 0)$$

$$= \sqrt{y} \left[-\int \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} dy + \ln C \right] = \sqrt{y} \ln \frac{C}{y}$$

所求通解为 $ye^{\sqrt{\frac{x}{y}}} = C \quad (C > 0)$



二、伯努利 (Bernoulli) 方程

伯努利方程的标准形式:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0, 1)$$

解法: 以 y^n 除方程两边, 得

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$$

↓ 令 $z = y^{1-n}$, 则 $\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx}$

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x) \quad (\text{线性方程})$$

求出此方程通解后, 换回原变量即得伯努利方程的通解.



雅各布第一·伯努利



例4. 求方程 $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = a(\ln x)y^2$ 的通解.

解: 令 $z = y^{-1}$, 则方程变形为

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = -a \ln x$$

其通解为
$$z = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left[\int (-a \ln x) e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right]$$
$$= x \left[C - \frac{a}{2} (\ln x)^2 \right]$$

将 $z = y^{-1}$ 代入, 得原方程通解:

$$y x \left[C - \frac{a}{2} (\ln x)^2 \right] = 1$$



内容小结

1. 一阶线性方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

方法1 先解齐次方程, 再用常数变易法.

方法2 用通解公式

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C \right]$$

2. 伯努利方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0, 1)$

令 $u = y^{1-n}$, 化为线性方程求解.



3. 注意用变量代换将方程化为已知类型的方程

例如, 解方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y}$

法1. 取 y 作自变量: $\frac{dx}{dy} = x + y$ 线性方程

法2. 作变换 $u = x + y$, 则 $y = u - x$, $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$

代入原方程得 $\frac{du}{dx} - 1 = \frac{1}{u},$

$$\frac{du}{dx} = \frac{u+1}{u}$$

可分离变量方程



思考与练习

判别下列方程类型:

$$(1) \quad x \frac{dy}{dx} + y = xy \frac{dy}{dx}$$

$$\longrightarrow \frac{y-1}{y} dy = \frac{dx}{x}$$

可分离
变量方程

$$(2) \quad x \frac{dy}{dx} = y (\ln y - \ln x)$$

$$\longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$$

齐次方程

$$(3) \quad (y - x^3) dx - 2x dy = 0$$

$$\longrightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x} y = -\frac{x^2}{2}$$

线性方程

$$(4) \quad 2y dx + (y^3 - x) dy = 0$$

$$\longrightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{1}{2y} x = -\frac{y^2}{2}$$

线性方程

$$(5) \quad (y \ln x - 2) y dx = x dy$$

$$\longrightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y = \frac{\ln x}{x} y^2$$

伯努利
方程



备用题

1. 求一连续可导函数 $f(x)$ 使其满足下列方程:

$$f(x) = \sin x - \int_0^x f(x-t) dt$$

令 $u = x - t$

提示: $f(x) = \sin x - \int_0^x f(u) du$

则有 $\begin{cases} f'(x) + f(x) = \cos x \\ f(0) = 0 \end{cases}$ 线性方程

利用公式可求出

$$f(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x - e^{-x})$$



2. 设有微分方程 $y' + y = f(x)$, 其中

$$f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

试求此方程满足初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 的连续解.

解: 1) 先解定解问题 $\begin{cases} y' + y = 2, & 0 \leq x \leq 1 \\ y|_{x=0} = 0 \end{cases}$

利用通解公式, 得

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int dx} \left(\int 2e^{\int dx} dx + C_1 \right) \\ &= e^{-x} (2e^x + C_1) = 2 + C_1 e^{-x} \end{aligned}$$

利用 $y|_{x=0} = 0$ 得 $C_1 = -2$

故有 $y = 2 - 2e^{-x} \quad (0 \leq x \leq 1)$



2) 再解定解问题
$$\begin{cases} y' + y = 0, & x > 1 \\ y|_{x=1} = y(1) = 2 - 2e^{-1} \end{cases}$$

此齐次线性方程的通解为 $y = C_2 e^{-x} \quad (x \geq 1)$

利用衔接条件得 $C_2 = 2(e-1)$

因此有 $y = 2(e-1)e^{-x} \quad (x \geq 1)$

3) 原问题的解为

$$y = \begin{cases} 2(1-e^{-x}), & 0 \leq x \leq 1 \\ 2(e-1)e^{-x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$y = 2 - 2e^{-x} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

