习题课

多元函数微分法

一、 基本概念

二、多元函数微分法

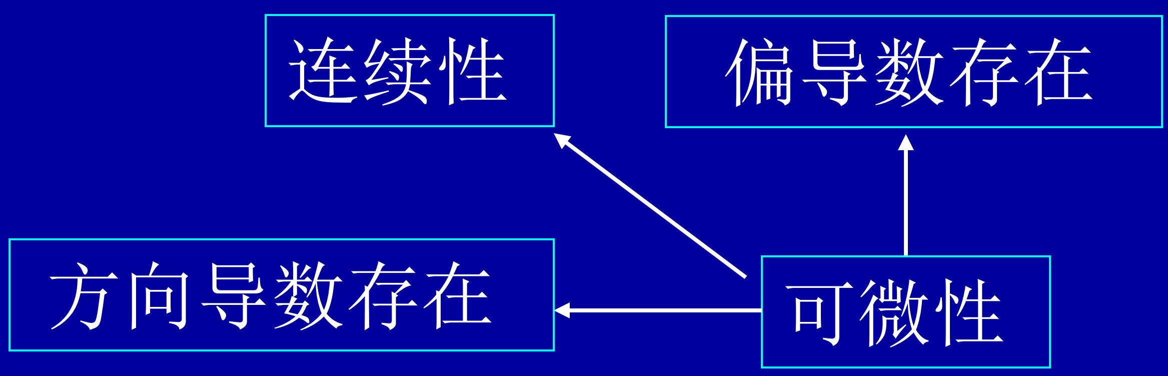
三、多元函数微分法的应用

一、 基本概念

1. 多元函数的定义、极限 、连续

- 定义域及对应规律
- 判断极限不存在及求极限的方法
- 函数的连续性及其性质

2. 几个基本概念的关系



思考与练习

1. 讨论二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x+y}$ 时, 下列算法**是否正确**?

解法1 原式 $= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}} = 0$

解法2 令 $y = kx$, 原式 $= \lim\limits_{x\to 0} x\dfrac{k}{1+k} = 0$

解法3 令 $x = r\cos\theta\,, y = r\sin\theta,$

$$原式 = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta} = 0$$

分析:

解~~法~~1 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x+y} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}} = 0$

此法第一步排除了沿坐标轴趋于原点的情况,第二步未考虑分母变化的所有情况，例如, $y=\dfrac{x}{x-1}$时, $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}=1,$ 此时极限为 1 .

解~~法~~2 令 $y=kx$，原式 $=\lim\limits_{x\to 0} x\dfrac{k}{1+k}=0$

此法排除了沿曲线趋于原点的情况. 例如 $y=x^2-x$时

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3-x^2}{x^2} = -1$$

解法3 令 $x = r\cos\theta\,,\, y = r\sin\theta,$

$$\text{原式} = \lim_{r\to 0}\frac{r\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta} = 0$$

此法忽略了 θ 的任意性, 当 $r\to 0,\ \theta\to -\frac{\pi}{4}$ 时

$$\frac{r\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta} = \frac{r\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+\theta)}$$ 极限不存在！

由以上分析可见, 三种解法都不对, 因为都不能保证自变量在定义域内以任意方式趋于原点 . 同时还可看到, 本题极限实际上不存在 .

特别要注意, 在某些情况下可以利用极坐标求极限, 但要注意在定义域内 r , θ 的变化应该是任意的.

2. 证明: $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0\quad, & x^2+y^2=0\end{cases}$

在点(0,0) 处连续且偏导数存在，但不可微.

提示: 利用 $2xy\le x^2+y^2$, 知

$$|f(x,y)|\le\frac{1}{4}(x^2+y^2)^{1/2}$$

$$\therefore\quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0=f(0,0)$$

故 f 在 (0,0) 连续;

又因 $f(x,0)=f(0,y)=0$, 所以 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$

而 $\quad \Delta f\big|_{(0,0)} = \dfrac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{3/2}}$

当$\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$时,

$$\frac{\Delta f\big|_{(0,0)}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = \frac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^2}$$

$$\not\longrightarrow 0$$

所以 f 在点(0,0)不可微！

例1. 已知 $f(x+y,x-y)=x^2-y^2+\varphi(x+y)$, 且 $f(x,0)=x$, 求出 $f(x,y)$的表达式.

解法1 令 $u=x+y, v=x-y$, 则

$$x=\tfrac{1}{2}(u+v), \quad y=\tfrac{1}{2}(u-v)$$

$$\therefore \quad f(u,v)=\tfrac{1}{4}(u+v)^2-\tfrac{1}{4}(u-v)^2+\varphi(u)=uv+\varphi(u)$$

即 $$f(x,y)=xy+\varphi(x)$$

$$\Big\downarrow \because f(x,0)=x, \therefore \varphi(x)=x$$

$$f(x,y)=x(y+1)$$

解法2 $\because f(x+y,x-y)=(x+y)(x-y)+\varphi(x+y)$

$\therefore \quad f(x,y)=xy+\varphi(x)$ 以下与解法1 相同.

二、多元函数微分法

1. 分析复合结构 $\begin{cases}\text{显示结构}\\\text{隐式结构}\end{cases}$ (画变量关系图)

自变量个数 = 变量总个数 – 方程总个数

自变量与因变量由所求对象判定

2. 正确使用求导法则

“分段用乘,分叉用加,单路全导,叉路偏导”

注意正确使用求导符号

3. 利用一阶微分形式不变性

例2. 设 $z = x f(x+y)$, $F(x,y,z)=0$, 其中 f 与F分别具有一阶导数或偏导数, 求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

解法1 方程两边对 x 求导, 得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = f + x f' \cdot (1 + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}) \\ F_1' + F_2' \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + F_3' \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -x f' \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = f + x f' \\ F_2' \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + F_3' \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -F_1' \end{cases}$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\begin{vmatrix} -x f' & f + x f' \\ F_2' & -F_1' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -x f' & 1 \\ F_2' & F_3' \end{vmatrix}} = \frac{x F_1' f' - x F_2' f' - f F_2'}{-x f' F_3' - F_2'}$$

$$(x f' F_3' + F_2' \neq 0)$$

$$z = xf(x+y),\ F(x,y,z)=0$$

解法2 方程两边求微分，得

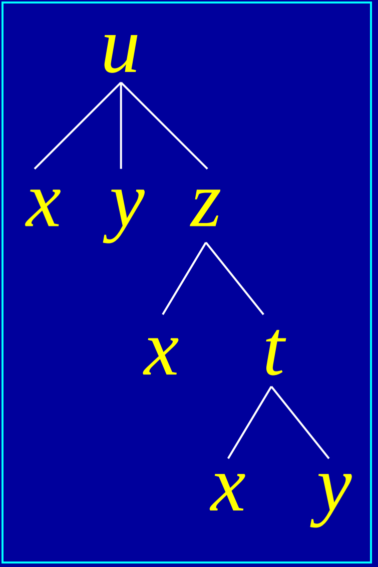
$$\begin{cases} \mathrm{d}z = f\,\mathrm{d}x + xf'\cdot(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y) \\ F_1'\mathrm{d}x + F_2'\mathrm{d}y + F_3'\mathrm{d}z = 0 \end{cases}$$

$$\Big\downarrow \text{化简}$$

$$\begin{cases} (f+xf')\mathrm{d}x + x f'\mathrm{d}y - \mathrm{d}z = 0 \\ F_1'\,\mathrm{d}x + F_2'\,\mathrm{d}y + F_3'\mathrm{d}z = 0 \end{cases}$$

消去 $\mathrm{d}y$ 即可得 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

例3. 设 $u=f(x,y,z)$ 有二阶连续偏导数, 且 $z=x^2\sin t$, $t=\ln(x+y)$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.



解:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'+f_3'\cdot\left(2x\sin t+x^2\cos t\cdot\frac{1}{x+y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f_{12}''+f_{13}''\cdot\left(x^2\cos t\cdot\frac{1}{x+y}\right)$$

$$+\left[f_{32}''+f_{33}''\cdot\left(x^2\cos t\cdot\frac{1}{x+y}\right)\right]\left(2x\sin t+\frac{x^2\cos t}{x+y}\right)$$

$$+f_3'\cdot\left[2x\cos t\cdot\frac{1}{x+y}+x^2\,\frac{-\sin t\cdot\frac{1}{x+y}(x+y)-\cos t\cdot 1}{(x+y)^2}\right]$$

$$=\cdots$$

练习题

1. 设函数 f 二阶连续可微, 求下列函数的二阶偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

(1) $z = x f(\dfrac{y^2}{x})$

(2) $z = f(x + \dfrac{y^2}{x})$

(3) $z = f(x, \dfrac{y^2}{x})$

解答提示: 第 1 题

(1) $z = x f(\frac{y^2}{x})$:　$\frac{\partial z}{\partial y} = x f'(\frac{y^2}{x}) \cdot \frac{2y}{x} = 2y f'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2y f'' \cdot (-\frac{y^2}{x^2}) = -\frac{2y^3}{x^2} f''$$

(2) $z = f(x + \frac{y^2}{x})$:　$\frac{\partial z}{\partial y} = f' \cdot \frac{2y}{x}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{2y}{x^2} f' + \frac{2y}{x} f'' \cdot (1 - \frac{y^2}{x^2})$$

$$= -\frac{2y}{x^2} f' + \frac{2y}{x}(1 - \frac{y^2}{x^2}) f''$$

$$(3) \quad z = f(x, \frac{y^2}{x}):$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x} f_2'$$

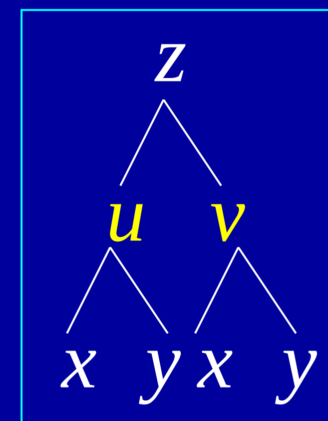
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{2y}{x^2} f_2' + \frac{2y}{x} (f_{21}'' - \frac{y^2}{x^2} f_{22}'')$$

作业册习题 设 $x=\mathrm{e}^{u}\cos v,\ y=\mathrm{e}^{u}\sin v,\ z=uv$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$

提示: 由 $z=uv$, 得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=v\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial x} \qquad ①$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=v\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial v}{\partial y} \qquad ②$$



由 $x=\mathrm{e}^{u}\cos v,\ \ y=\mathrm{e}^{u}\sin v$, 得

$$\begin{cases} \mathrm{d}\,x=\mathrm{e}^{u}\cos v\,\mathrm{d}\,u-\mathrm{e}^{u}\sin v\,\mathrm{d}\,v \\ \mathrm{d}\,y=\mathrm{e}^{u}\sin v\,\mathrm{d}\,u+\mathrm{e}^{u}\cos v\,\mathrm{d}\,v \end{cases}$$

利用行列式解出 $\mathrm{d}u,\ \mathrm{d}v$:

$$\mathrm{d}u = \frac{\begin{vmatrix} \mathrm{d}x & -\mathrm{e}^u \sin v \\ \mathrm{d}y & \mathrm{e}^u \cos v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathrm{e}^u \cos v & -\mathrm{e}^u \sin v \\ \mathrm{e}^u \sin v & \mathrm{e}^u \cos v \end{vmatrix}} = \underbrace{\mathrm{e}^{-u} \cos v}_{\frac{\partial u}{\partial x}}\, \mathrm{d}x + \underbrace{\mathrm{e}^{-u} \sin v}_{\frac{\partial u}{\partial y}}\, \mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}v = -\underbrace{\mathrm{e}^{-u} \sin v}_{\frac{\partial v}{\partial x}}\, \mathrm{d}x + \underbrace{\mathrm{e}^{-u} \cos v}_{\frac{\partial v}{\partial y}}\, \mathrm{d}y$$

将 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial v}{\partial x}$ 代入①即得 $\frac{\partial z}{\partial x}$;

将 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial v}{\partial y}$ 代入②即得 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

3. 设 $u = f(x, y, z)$ 有连续的一阶偏导数，又函数 $y = y(x)$ 及 $z = z(x)$ 分别由下两式确定

$$\mathrm{e}^{xy} - xy = 2, \qquad \mathrm{e}^{x} = \int_0^{x-z} \frac{\sin t}{t} dt$$

求 $\dfrac{\mathrm{d} u}{\mathrm{d} x}$.

答案: $$\frac{\mathrm{d} u}{\mathrm{d} x} = f_1' - \frac{y}{x} f_2' + \left[1 - \frac{\mathrm{e}^{x}(x-z)}{\sin(x-z)}\right] f_3'$$

三、多元函数微分法的应用

1. 在几何中的应用

求曲线在切线及法平面 (关键: 抓住切向量)

求曲面的切平面及法线 (关键: 抓住法向量)

2. 极值与最值问题

- 极值的必要条件与充分条件
- 求条件极值的方法 (消元法, 拉格朗日乘数法)
- 求解最值问题
- 最小二乘法

3. 在微分方程变形等中的应用

例4. 在第一卦限作椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面, 使其在三坐标轴上的截距的平方和最小, 并求切点.

解: 设 $F(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1$, 切点为 $M(x_0,y_0,z_0)$, 则切平面的法向量为

$$\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)\Big|_M=\left(\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2},\frac{2z_0}{c^2}\right)$$

切平面方程

$$\frac{\cancel{2}x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{\cancel{2}y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{\cancel{2}z_0}{c^2}(z-z_0)=0$$

即
$$\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z=1$$

切平面在三坐标轴上的截距为 $\frac{a^2}{x_0}, \frac{b^2}{y_0}, \frac{c^2}{z_0}$

问题归结为求 $s = (\frac{a^2}{x})^2 + (\frac{b^2}{y})^2 + (\frac{c^2}{z})^2$

在条件 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 下的条件极值问题 .

设拉格朗日函数

$$F = (\frac{a^2}{x})^2 + (\frac{b^2}{y})^2 + (\frac{c^2}{z})^2 + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)$$

$$(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$$

令

$$\begin{cases} F_x = -2\left(\dfrac{a^2}{x}\right)\dfrac{a^2}{x^2} + 2\lambda\dfrac{x}{a^2} = 0 \\ F_y = -2\left(\dfrac{b^2}{y}\right)\dfrac{b^2}{y^2} + 2\lambda\dfrac{y}{b^2} = 0 \\ F_z = -2\left(\dfrac{c^2}{z}\right)\dfrac{c^2}{z^2} + 2\lambda\dfrac{z}{c^2} = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \text{唯一驻点} \\ x = \dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b+c}} \\ y = \dfrac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+b+c}} \\ z = \dfrac{c\sqrt{c}}{\sqrt{a+b+c}} \end{cases}$$

由实际意义可知 $M\left(\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b+c}}, \dfrac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+b+c}}, \dfrac{c\sqrt{c}}{\sqrt{a+b+c}}\right)$

为所求切点 .

例5. 求旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $x + y - 2z = 2$ 之间的最短距离.

解: 设 $P(x, y, z)$为抛物面 $z = x^2 + y^2$ 上任一点,则 P 到平面 $x + y - 2z - 2 = 0$ 的距离为

$$d = \frac{1}{\sqrt{6}}\left|x + y - 2z - 2\right|$$

问题归结为

$$\begin{cases} \text{目标函数:} \ (x + y - 2z - 2)^2 \ \ (\min) \\ \text{约束条件:} \ x^2 + y^2 - z = 0 \end{cases}$$

作拉氏函数

$$F(x, y, z) = (x + y - 2z - 2)^2 + \lambda(z - x^2 - y^2)$$

$$F(x,y,z)=(x+y-2z-2)^2+\lambda(z-x^2-y^2)$$

令 $\begin{cases} F_x' = 2(x+y-2z-2)-2\lambda x = 0 \\ F_y' = 2(x+y-2z-2)-2\lambda y = 0 \\ F_z' = 2(x+y-2z-2)(-2)+\lambda = 0 \\ z = x^2+y^2 \end{cases}$

解此方程组得唯一驻点 $x=\frac{1}{4}, y=\frac{1}{4}, z=\frac{1}{8}.$

由实际意义最小值存在，故

$$d_{\min} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left|\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-2\right| = \frac{7}{4\sqrt{6}}$$

练习题:

1. 在曲面 $z = xy$ 上求一点, 使该点处的法线垂直于平面 $x + 3y + z + 9 = 0$, 并写出该法线方程 .

提示: 设所求点为 (x_0, y_0, z_0), 则法线方程为

$$\frac{x - x_0}{y_0} = \frac{y - y_0}{x_0} = \frac{z - z_0}{-1}$$

利用
$$\begin{cases} \dfrac{y_0}{1} = \dfrac{x_0}{3} = \dfrac{-1}{1} & \text{法线垂直于平面} \\ z_0 = x_0 y_0 & \text{点在曲面上} \end{cases}$$

得 $x_0 = -3$, $y_0 = -1$, $z_0 = 3$

2. 在第一卦限内作椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面使与三坐标面围成的四面体体积最小,并求此体积.

提示: 设切点为(x_0, y_0, z_0), 则切平面为 **(见例4)**

$$\frac{x_0 x}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}+\frac{z_0 z}{c^2}=1$$

所指四面体体积 $V=\dfrac{1}{6}\dfrac{a^2b^2c^2}{x_0 y_0 z_0}$

V 最小等价于 $f(x, y, z)=x\,y\,z$ 最大, 故取拉格朗日函数

$$F=xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$$

用拉格朗日乘数法可求出(x_0, y_0, z_0).

3. 设 $f(x,y),\ \varphi(x,y)$ 均可微, 且 $\varphi'_y(x,y)\neq 0$, 已知 (x_0, y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是(D)

(A) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)=0$

(B) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$

(C) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)=0$

(D) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$

提示: 设 $F=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$,

$$F'_x=f'_x(x,y)+\lambda\varphi'_x(x,y)=0 \qquad (*)$$

$$F'_y=f'_y(x,y)+\lambda\varphi'_y(x,y)=0$$

$\because \varphi'_y(x_0,y_0)\neq 0$, $\therefore \lambda=-\dfrac{f'_y(x_0,y_0)}{\varphi'_y(x_0,y_0)}$, 代入$(*)$得

$$f'_x(x_0,y_0)=\frac{f'_y(x_0,y_0)\varphi'_x(x_0,y_0)}{\varphi'_y(x_0,y_0)}$$