

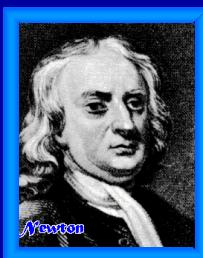
# 第二章

# 导数与微分

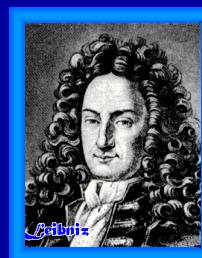
导数思想最早由法国数学家 Fermat 在研究极值问题中提出.

微积分学的创始人：

英国数学家 Newton



德国数学家 Leibniz



微分学 { 导数 —— 描述函数变化快慢  
                { 微分 —— 描述函数变化程度

都是描述物质运动的工具(从微观上研究函数)



HIGHER EDUCATION PRESS

# 第一节 导数的概念

- 一、引例
- 二、导数的定义
- 三、导数的几何意义
- 四、函数的可导性与连续性的关系
- 五、单侧导数



# 一、引例

## 1. 变速直线运动的速度

设描述质点运动位置的函数为

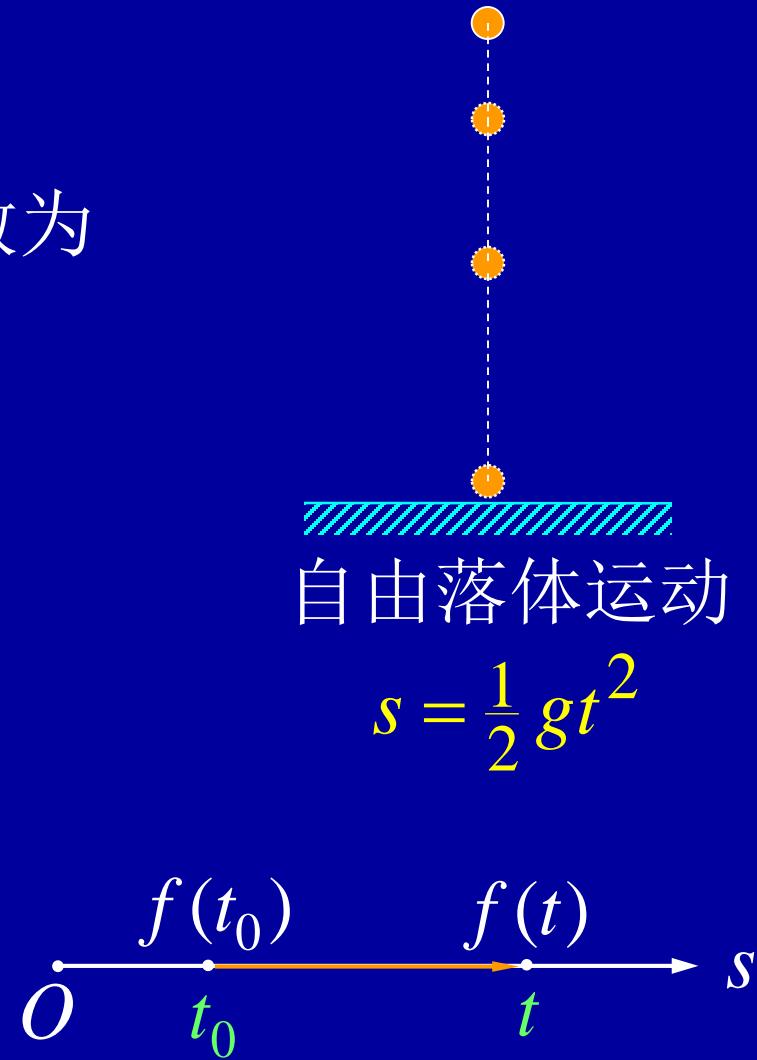
$$s = f(t)$$

则  $t_0$  到  $t$  的平均速度为

$$\bar{v} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

而在  $t_0$  时刻的瞬时速度为

$$v = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$



## 2. 曲线的切线斜率

曲线  $C: y = f(x)$  在  $M$  点处的切线

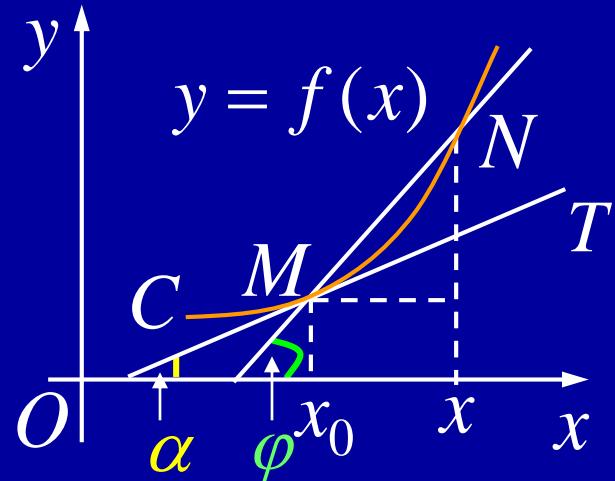
——割线  $MN$  的极限位置  $MT$   
(当  $\varphi \rightarrow \alpha$  时)

切线  $MT$  的斜率

$$k = \tan \alpha = \lim_{\varphi \rightarrow \alpha} \tan \varphi$$

↓ 割线  $MN$  的斜率  $\tan \varphi = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$$k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



瞬时速度  $v = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$

切线斜率  $k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

两个问题的共性：

所求量为函数增量与自变量增量之比的极限.

类似问题还有：

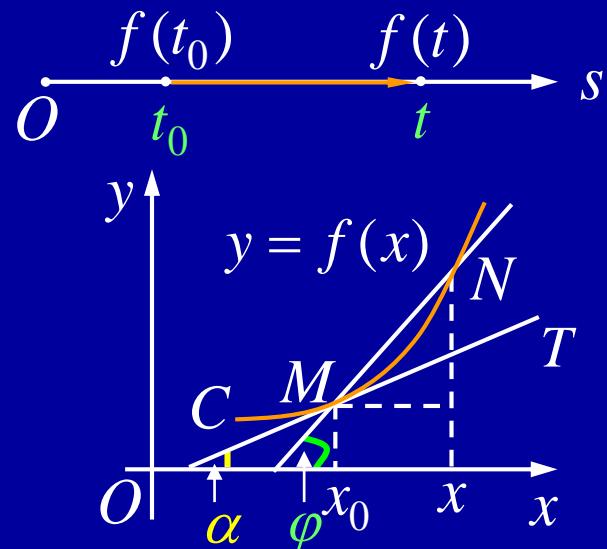
加速度 是速度增量与时间增量之比的极限

角速度 是转角增量与时间增量之比的极限

线密度 是质量增量与长度增量之比的极限

电流强度 是电量增量与时间增量之比的极限

变化率问题



## 二、导数的定义

定义1. 设函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  的某邻域内有定义,

若

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta y &= f(x) - f(x_0) \\ \Delta x &= x - x_0\end{aligned}}$$

存在, 则称函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处可导, 并称此极限为

$y = f(x)$  在点  $x_0$  的导数. 记作:

$$y' \Big|_{x=x_0}; \quad f'(x_0); \quad \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0}; \quad \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$$

即  $y' \Big|_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



运动质点的位置函数  $s = f(t)$

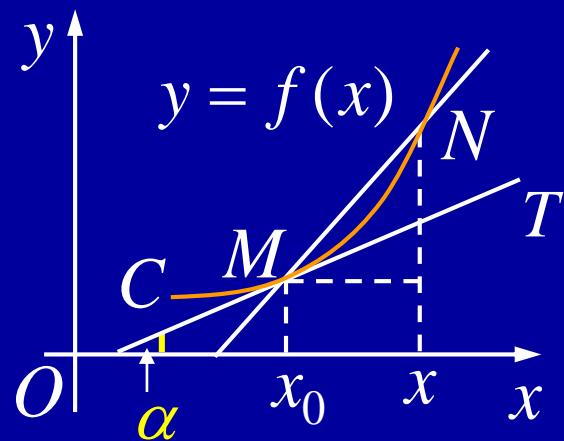
在  $t_0$  时刻的瞬时速度



$$v = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0)$$

曲线  $C: y = f(x)$  在  $M$  点处的切线斜率

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0) \end{aligned}$$



若极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta y &= f(x) - f(x_0) \\ \Delta x &= x - x_0\end{aligned}}$$

不存在, 就说函数在点  $x_0$  不可导.

若  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$ , 也称  $f(x)$  在  $x_0$  的导数为无穷大 .

若函数在开区间  $I$  内每点都可导, 就称函数在  $I$  内可导.

此时导数值构成的新函数称为导函数.

记作:  $y'$ ;  $f'(x)$ ;  $\frac{dy}{dx}$ ;  $\frac{df(x)}{dx}$ .

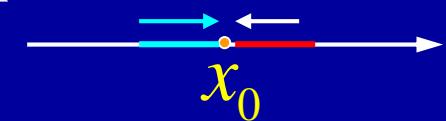
注意:  $f'(x_0) = f'(x)|_{x=x_0} \neq \frac{df(x_0)}{dx}$



# 单侧导数

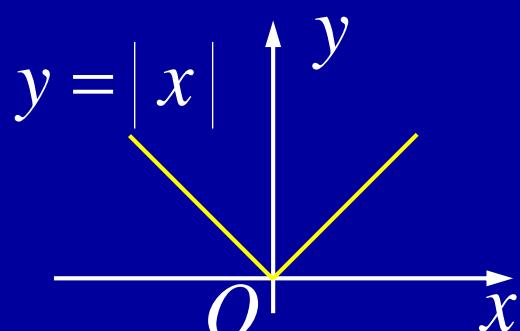
**定义2.** 设函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  的某个右(左)邻域内有定义, 若极限

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0^+ \\ (\Delta x \rightarrow 0^-)}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0^+ \\ (\Delta x \rightarrow 0^-)}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



存在, 则称此极限值为  $f(x)$  在  $x_0$  处的右(左) 导数, 记作  $f'_+(x_0)$  ( $f'_-(x_0)$ )

即  $f'_\pm(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^\pm} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$



例如,  $f(x) = |x|$  在  $x = 0$  处有

$$f'_+(0) = +1, \quad f'_-(0) = -1$$



**例1.** 证明函数  $f(x) = |x|$  在  $x=0$  不可导.

证:  $\because \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1, & h>0 \\ -1, & h<0 \end{cases}$

$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$  不存在, 即  $|x|$  在  $x=0$  不可导.

**例2.** 设  $f'(x_0)$  存在, 求极限  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ .

解: 原式  $= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{2h} + \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{2(-h)} \right]$   
 $= \frac{1}{2} f'(x_0) + \frac{1}{2} f'(x_0) = f'(x_0)$



**例3.** 求函数  $f(x) = C$  ( $C$  为常数) 的导数.

解:  $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C - C}{\Delta x} = 0$

即  $(C)' = 0$

**例4.** 求函数  $f(x) = x^n$  ( $n \in \mathbf{N}^+$ ) 在  $x = a$  处的导数.

解:  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$

$$= \lim_{x \rightarrow a} (x^{n-1} + a x^{n-2} + a^2 x^{n-3} + \cdots + a^{n-1})$$
$$= n a^{n-1}$$



## 说明:

对一般幂函数  $y = x^\mu$  ( $\mu$ 为常数)

$$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$$

(以后将证明)

例如,  $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-1-1} = \frac{-1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt[4]{x}}\right)' = (x^{-\frac{3}{4}})' = \frac{-3}{4}x^{-\frac{7}{4}}$$



**例5.** 求函数  $f(x) = \sin x$  的导数.

**解:** 令  $h = \Delta x$ , 则

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x+\frac{h}{2}) \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x\end{aligned}$$

即

$$(\sin x)' = \cos x$$

类似可证得

$$(\cos x)' = -\sin x$$



**例6.** 求函数  $f(x) = \ln x$  的导数.

$$\begin{aligned} \text{解: } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left[\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{1}{x}} \\ &= \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

即

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$



HIGHER EDUCATION PRESS

### 三、导数的几何意义

曲线  $y = f(x)$  在点  $(x_0, y_0)$  的切线斜率为

$$\tan \alpha = f'(x_0)$$

若  $f'(x_0) > 0$ , 曲线过  $(x_0, y_0)$  上升;

若  $f'(x_0) < 0$ , 曲线过  $(x_0, y_0)$  下降;

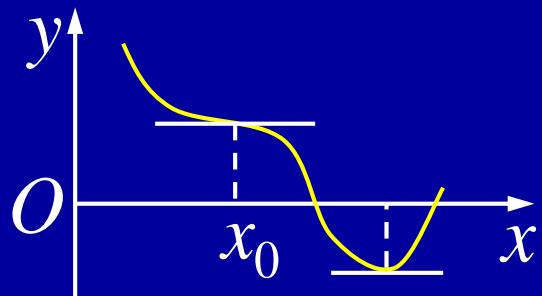
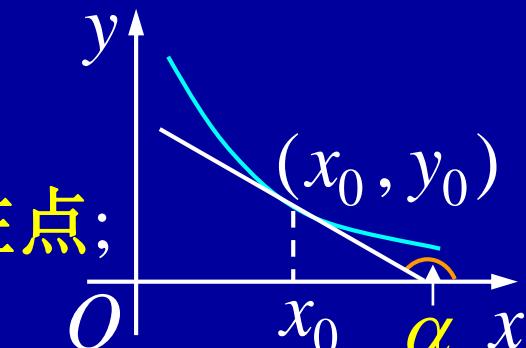
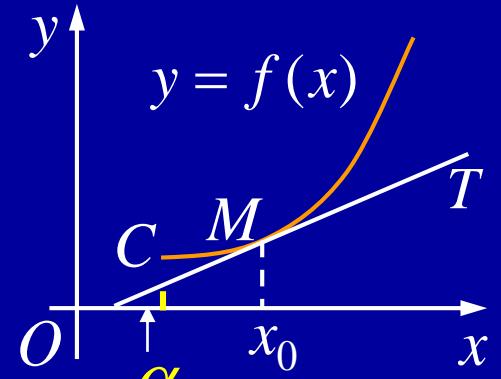
若  $f'(x_0) = 0$ , 切线与  $x$  轴平行,  $x_0$  称为驻点;

若  $f'(x_0) = \infty$ , 切线与  $x$  轴垂直.

$f'(x_0) \neq \infty$  时, 曲线在点  $(x_0, y_0)$  处的

切线方程:  $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

法线方程:  $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$  ( $f'(x_0) \neq 0$ )



**例7.** 问曲线  $y = \sqrt[3]{x}$  哪一点有铅直切线？哪一点处的切线与直线  $y = \frac{1}{3}x - 1$  平行？写出其切线方程.

$$\text{解: } \because y' = (\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, \quad \therefore y'|_{x=0} = \infty,$$

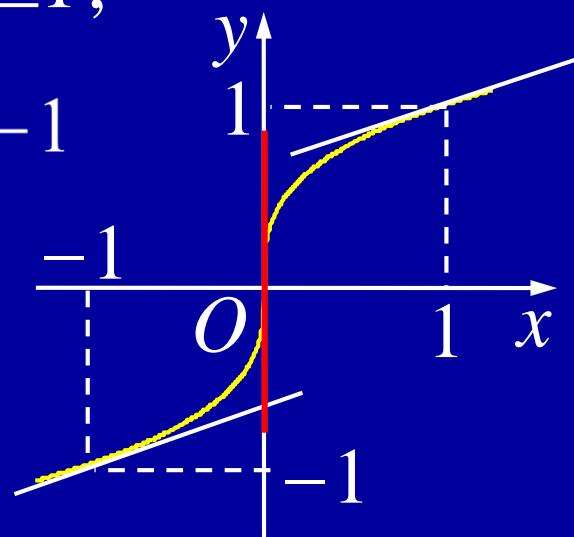
故在原点  $(0, 0)$  有铅直切线  $x = 0$

$$\text{令 } \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3}, \text{ 得 } x = \pm 1, \text{ 对应 } y = \pm 1,$$

则在点  $(1, 1), (-1, -1)$  处与直线  $y = \frac{1}{3}x - 1$  平行的切线方程分别为

$$y - 1 = \frac{1}{3}(x - 1), \quad y + 1 = \frac{1}{3}(x + 1)$$

即  $x - 3y \pm 2 = 0$



## 四、函数的可导性与连续性的关系

**定理1.**  $f(x)$  在点  $x$  处可导  $\longrightarrow f(x)$  在点  $x$  处连续

**证:** 设  $y = f(x)$  在点  $x$  处可导, 即  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$

存在, 因此必有

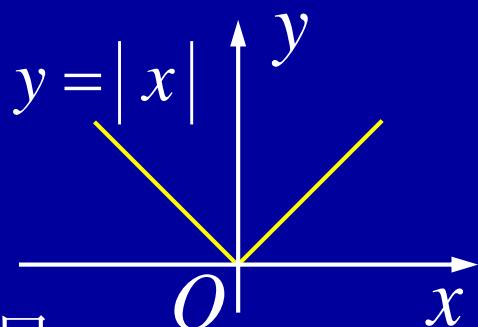
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha, \text{ 其中 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0$$

故  $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$

所以函数  $y = f(x)$  在点  $x$  连续.

**注意:** 函数在点  $x$  连续, 但在该点未必可导.

**反例:**  $y = |x|$  在  $x = 0$  处连续, 但不可导.



**定理2.** 函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  可导的充分必要条件

是  $f'_+(x_0)$  与  $f'_-(x_0)$  存在, 且  $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ .

简写为

$$f'(x_0) \text{ 存在} \iff f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$$

**定理3.** 函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处右(左) 导数存在  $\implies$

$f(x)$  在点  $x_0$  必右(左) 连续.

若函数  $f(x)$  在开区间  $(a, b)$  内可导, 且  $f'_+(a)$  与  $f'_-(b)$  都存在, 则称  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上可导.

显然:

$f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上可导  $\implies f(x) \in C[a, b]$



## 内容小结

1. 导数的实质: 增量比的极限;
2.  $f'(x_0) = a \iff f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = a$
3. 导数的几何意义: 切线的斜率;
4. 可导必连续, 但连续不一定可导;
5. 已学求导公式 :  
$$(C)' = 0; \quad (x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}; \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$
$$(\sin x)' = \cos x; \quad (\cos x)' = -\sin x;$$
6. 判断可导性  $\begin{cases} \text{不连续, 一定不可导.} \\ \text{直接用导数定义;} \\ \text{看左右导数是否存在且相等.} \end{cases}$



## 思考与练习

1. 函数  $f(x)$  在某点  $x_0$  处的导数  $f'(x_0)$  与导函数  $f'(x)$  有什么区别与联系？

区别:  $f'(x)$  是函数,  $f'(x_0)$  是数值;

联系:  $f'(x) \Big|_{x=x_0} = f'(x_0)$

注意:  $f'(x_0) \cancel{=} [f(x_0)]'$



2. 设  $f'(x_0)$  存在，则

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h} = \underline{-f'(x_0)}.$$

3. 已知  $f(0) = 0, f'(0) = k_0$ ，则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \underline{k_0}$ .

4. 若  $x \in (-\delta, \delta)$  时，恒有  $|f(x)| \leq x^2$ ，问  $f(x)$  是否在  $x = 0$  可导？

解：由题设  $f(0) = 0$

$$0 \leq \left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| \leq |x|$$

由夹逼准则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$

故  $f(x)$  在  $x = 0$  可导，且

$$f'(0) = 0$$



5. 设  $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0 \\ ax, & x \geq 0 \end{cases}$ , 问  $a$  取何值时,  $f'(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  都存在, 并求出  $f'(x)$ .

解: 显然该函数在  $x=0$  连续.

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x - 0}{x - 0} = 1$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax - 0}{x - 0} = a$$

故  $a=1$  时  $f'(0)=1$ , 此时  $f'(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  都存在,

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$



## 备用题

1. 设  $f'(x)$  存在, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = -1$ , 求  $f'(1)$ .

解: 因为

$$\begin{aligned}-1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-x) - f(1)}{-2x} \\&= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+(-x)) - f(1)}{(-x)} \\&= \frac{1}{2} f'(1)\end{aligned}$$

所以  $f'(1) = -2$ .



2. 设  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  存在, 证明:  
 $f(x)$  在  $x = 0$  处可导.

证: 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  存在, 则有  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

又  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续, 故  $f(0) = 0$

所以  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$

即  $f(x)$  在  $x = 0$  处可导.

