第四节 高阶导数

一、高阶导数的概念

二、高阶导数的运算法则

一、高阶导数的概念

引例： 变速直线运动 $s = s(t)$

速度 $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$， 即 $v = s'$

加速度 $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)$

即 $a = (s')'$

定义. 若函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 可导, 则称 $f'(x)$ 的导数为 $f(x)$ 的**二阶导数**, 记作 y'' 或 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$, 即

$$y''=(y')' \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$$

类似地, 二阶导数的导数称为三阶导数, 依次类推, $n-1$ 阶导数的导数称为 n 阶导数, 分别记作

$$y''', \quad y^{(4)}, \quad \cdots, \quad y^{(n)}$$

或 $$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}, \quad \frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4}, \quad \cdots, \quad \frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$$

例1. 设 $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, 求 $y^{(n)}$.

解: $$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = 2\cdot 1 a_2 + 3\cdot 2 a_3 x + \cdots + n(n-1) a_n x^{n-2}$$

依次类推，可得

$$y^{(n)} = n!\, a_n$$

思考: 设 $y = x^{\mu}$ (μ为任意常数), 问 $y^{(n)} = ?$

$$(x^{\mu})^{(n)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}$$

例2. 设 $y = \mathrm{e}^{ax}$, 求 $y^{(n)}$.

解: $y' = a\mathrm{e}^{ax}$, $y'' = a^2\mathrm{e}^{ax}$, $y''' = a^3\mathrm{e}^{ax}$, $\cdots$,

$$y^{(n)} = a^n \mathrm{e}^{ax}$$

特别有: $\boxed{(\mathrm{e}^x)^{(n)} = \mathrm{e}^x}$

$$y' = -\frac{1}{1-x}$$

$$y'' = -\frac{1}{(1-x)^2}$$

例3. 设 $y = \ln(1+x)$, 求 $y^{(n)}$.

解: $y' = \dfrac{1}{1+x}$, $y'' = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$, $y''' = (-1)^2\dfrac{1\cdot 2}{(1+x)^3}$,

$$\cdots,\quad y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

规定 $0\,! = 1$

思考: $y = \ln(1-x)$, $y^{(n)} = \underline{-\dfrac{(n-1)!}{(1-x)^n}}$

例4. 设 $y=\sin x$，求 $y^{(n)}$.

解: $y' = \cos x = \sin(x+\frac{\pi}{2})$

$$y'' = \cos(x+\frac{\pi}{2}) = \sin(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})$$

$$= \sin(x+2\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$y''' = \cos(x+2\cdot\frac{\pi}{2}) = \sin(x+3\cdot\frac{\pi}{2})$$

一般地， $(\sin x)^{(n)} = \sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$

类似可证:

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$$

例5. 设 $y = \mathrm{e}^{ax}\sin bx$ (a, b 为常数), 求 $y^{(n)}$.

解: $y' = a\,\mathrm{e}^{ax}\sin bx + b\,\mathrm{e}^{ax}\cos bx$

$= \mathrm{e}^{ax}(a\sin bx + b\cos bx)$

$= \mathrm{e}^{ax}\sqrt{a^2+b^2}\sin(bx+\varphi) \quad (\varphi = \arctan\frac{b}{a})$

$y'' = \sqrt{a^2+b^2}\,[a\,\mathrm{e}^{ax}\sin(bx+\varphi) + b\,\mathrm{e}^{ax}\cos(bx+\varphi)]$

$= \sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{e}^{ax}\sqrt{a^2+b^2}\sin(bx+2\varphi)$

……

$y^{(n)} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\,\mathrm{e}^{ax}\sin(bx+n\varphi) \quad (\varphi = \arctan\frac{b}{a})$

例6. 设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$，求使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 $n=$ **2** .

分析:

$$f(x)=\begin{cases}4x^3, & x\ge 0\\ 2x^3, & x<0\end{cases}$$

$$\because\ f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x^3-0}{x}=0$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{4x^3-0}{x}=0$$

$$\therefore\ f'(x)=\begin{cases}12x^2, & x\ge 0\\ 6x^2, & x<0\end{cases}$$

$$\text{又}\ f''_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{6x^2-0}{x}=0$$

$$f''_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{12x^2-0}{x}=0$$

$$\therefore\ f''(x)=\begin{cases}24x, & x\ge 0\\ 12x, & x<0\end{cases}$$

但是 $f'''_-(0)=12$，$f'''_+(0)=24$，$\therefore\ f'''(0)$ 不存在 .

二、高阶导数的运算法则

设函数 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 都有 n 阶导数，则

1. $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$

2. $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$ （C为常数）

3. $$(u\,v)^{(n)} = u^{(n)}v + n\,u^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)}$$

规律

莱布尼茨(Leibniz) 公式

例7. $y = x^2 e^{2x}$, 求 $y^{(20)}$.

解: 设 $u = e^{2x}, v = x^2$, 则

$$u^{(k)} = 2^k e^{2x} \quad (k = 1, 2, \cdots, 20)$$

$$v' = 2x, \quad v'' = 2,$$

$$v^{(k)} = 0 \quad (k = 3, \cdots, 20)$$

代入莱布尼茨公式, 得

$$y^{(20)} = 2^{20} e^{2x} \cdot x^2 + 20 \cdot 2^{19} e^{2x} \cdot 2x + \frac{20 \cdot 19}{2!} 2^{18} e^{2x} \cdot 2$$

$$= 2^{20} e^{2x} (x^2 + 20x + 95)$$

例8. 设 $y=\arctan x$，求 $y^{(n)}(0)$.

解: $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$, 即 $(1+x^2)y'=1$

用莱布尼茨公式求 n 阶导数

$$(1+x^2)\,y^{(n+1)}+n\cdot 2x\,y^{(n)}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot 2\,y^{(n-1)}=0$$

令 $x=0$, 得 $y^{(n+1)}(0)=-n(n-1)\,y^{(n-1)}(0)\quad(n=1,2,\cdots)$

由 $y(0)=0$, 得 $y''(0)=0$, $y^{(4)}(0)=0$, $\cdots$, $y^{(2m)}(0)=0$

由 $y'(0)=1$, 得 $y^{(2m+1)}(0)=(-1)^m(2m)!\,y'(0)$

即 $y^{(n)}(0)=\begin{cases}0\,, & n=2m\\ (-1)^m(2m)!\,, & n=2m+1\end{cases}\qquad(m=0,1,2,\cdots)$

例9 $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$

提示: 令 $\dfrac{1}{(x-2)(x-1)} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x-1}$

$$A = (x-2)\cdot\frac{1}{(x-2)(x-1)}\bigg|_{x=2} = 1$$

$$B = (x-1)\cdot\frac{1}{(x-2)(x-1)}\bigg|_{x=1} = -1$$

$$\therefore \quad y = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

$$y^{(n)} = (-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$$

内容小结

高阶导数的求法

(1) 逐阶求导法

(2) 利用归纳法

(3) 间接法 —— 利用已知的高阶导数公式

如下列公式

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$\left(\frac{1}{a+x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(a+x)^{n+1}}$$

(4) 利用莱布尼茨公式

思考与练习

1. 如何求下列函数的 n 阶导数?

(1) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$

解: $y=-1+\dfrac{2}{1+x}$

$$y^{(n)}=2(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

(2) $y=\dfrac{x^3}{1-x}$

解: $y=-x^2-x-1+\dfrac{1}{1-x}$

$$y^{(n)}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}},\quad n\geq 3$$

(3) $y=\sin^6 x+\cos^6 x$

解: $y=(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3$

$$=\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x$$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x$$

$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$$

$$y^{(n)}=\frac{3}{8}\cdot 4^n\cos(4x+n\tfrac{\pi}{2})$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

2. (填空题) (1) 设 $f(x)=(\underline{x^2-3x+2})^n\cos\frac{\pi x^2}{16}$, 则

$f^{(n)}(2)=$ $\underline{n!\frac{\sqrt{2}}{2}}$

各项均含因子 $(x-2)$

提示: $f(x)=(x-2)^n(x-1)^n\cos\frac{\pi x^2}{16}$

$$f^{(n)}(x)=n!\,(x-1)^n\cos\frac{\pi x^2}{16}\boxed{+\cdots}$$

(2) 已知 $f(x)$ 任意阶可导, 且 $f'(x)=[f(x)]^2$, 则当

$n\geq 2$ 时 $f^{(n)}(x)=$ $\underline{n![f(x)]^{n+1}}$

提示: $f''(x)=2f(x)f'(x)=2![f(x)]^3$

$f'''(x)=2!\cdot 3[f(x)]^2 f'(x)=3![f(x)]^4$

……

3. 试从 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{y'}$ 导出 $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\,y^2}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$.

解: $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\,y^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y}\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)=\underline{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\dfrac{1}{y'}\right)}\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$

$$=-\frac{y''}{(y')^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3}$$

同样可求 $\dfrac{\mathrm{d}^3 x}{\mathrm{d}\,y^3}$

备用题

设 $y = x^2 f(\sin x)$ 求 y'', 其中 f 二阶可导.

解: $y' = 2x \cdot f(\sin x) + x^2 \cdot f'(\sin x) \cdot \cos x$

$$y'' = (2x f(\sin x))' + (x^2 f'(\sin x) \cos x)'$$

$$= 2 f(\sin x) + 2x \cdot f'(\sin x) \cdot \cos x$$

$$+ 2x f'(\sin x) \cos x + x^2 f''(\sin x) \cos^2 x$$

$$+ x^2 f'(\sin x)(-\sin x)$$

$$= 2 f(\sin x) + (4x \cos x - x^2 \sin x) f'(\sin x)$$

$$+ x^2 \cos^2 x\, f''(\sin x)$$