习题课

线面积分的计算

一、 曲线积分的计算法

二、曲面积分的计算法

HIGHER EDUCATION PRESS

一、曲线积分的计算法

1. 基本方法

曲线积分 $\left\{\begin{array}{l}\text{第一类 (对弧长)} \\ \text{第二类 (对坐标)}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{转化}}$ 定积分

(1) 选择积分变量 $\left\{\begin{array}{l}\text{用参数方程} \\ \text{用直角坐标方程} \\ \text{用极坐标方程}\end{array}\right.$

(2) 确定积分上下限 $\left\{\begin{array}{l}\text{第一类: 下小上大} \\ \text{第二类: 下始上终}\end{array}\right.$

练习题:

解答提示:

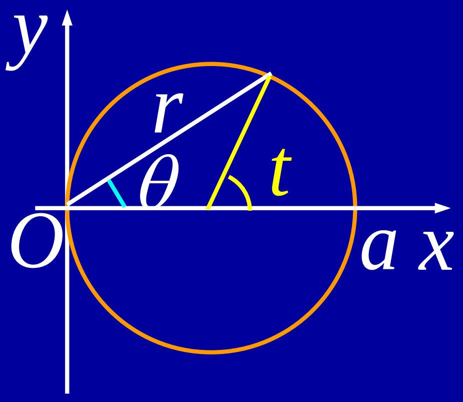
1计算 $\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$, 其中$L$为圆周 $x^2+y^2=ax$.

提示: 利用极坐标， $L: r=a\cos\theta\ \ (-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2})$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{r^2+r'^2}\,\mathrm{d}\theta=a\,\mathrm{d}\theta$$

$$原式=\int_L\sqrt{ax}\,\mathrm{d}s=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos\theta}\cdot a\,\mathrm{d}\theta\ \ =2a^2$$

说明: 若用参数方程计算, 则



$$L:\begin{cases} x=\frac{a}{2}(1+\cos t)\\ y=\frac{a}{2}\sin t\end{cases}\quad (0\le t\le 2\pi)$$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}t=\frac{a}{2}\mathrm{d}t$$

2. 计算 $\int_L (2a-y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$, 其中$L$为摆线

$$x = a(t-\sin t)\,,\quad y = a(1-\cos t)$$

上对应 t 从 0 到 2π 的一段弧.

提示: $$(2a-y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = a(1+\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,\mathrm{d}t + a(t-\sin t)\cdot a\sin t\,\mathrm{d}t$$

$$= a^2 t\sin t\,\mathrm{d}t$$

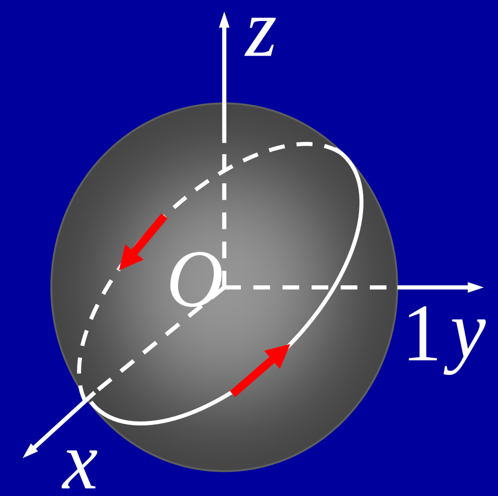
$$\therefore \quad 原式 = a^2\int_0^{2\pi} t\sin t\,\mathrm{d}t$$

$$= a^2\left[-t\cos t - \sin t\,\right]_0^{2\pi} = -2\pi a^2$$

3. 计算 $\int_\Gamma xyz\mathrm{d}z$, 其中 Γ 由平面 $y=z$ 截球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所得, 从 z 轴正向看沿逆时针方向.

提示: 因在 Γ 上有 $x^2+2y^2=1$, 故

$$\Gamma:\begin{cases} x=\cos t \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \\ z=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \end{cases} \quad (0\le t\le 2\pi)$$



$$\text{原式}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot 4\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,(1-\cos^2 t)\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{16}$$

2. 基本技巧

(1) 利用对称性及重心公式简化计算 ;

(2) 利用积分与路径无关的等价条件;

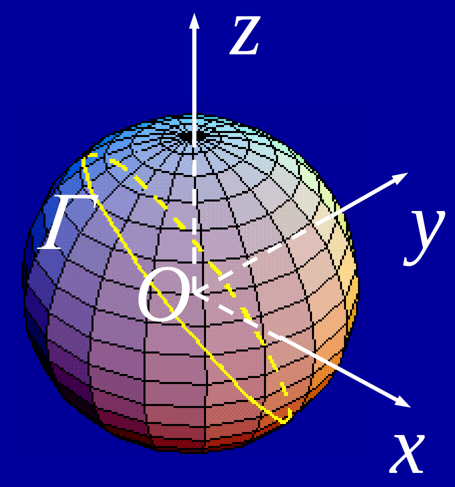
(3) 利用格林公式 (注意**加辅助线的技巧**) ;

(4) 利用斯托克斯公式 ;

(5) 利用两类曲线积分的联系公式 .

例1. 计算 $I=\int_\Gamma (x^2+y+z^2)\,\mathrm{d}s$，其中 Γ 为曲线

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$



解: 利用轮换对称性，有

$$\int_\Gamma x^2\,\mathrm{d}s=\int_\Gamma y^2\,\mathrm{d}s=\int_\Gamma z^2\,\mathrm{d}s$$

利用重心公式知 $\int_\Gamma y\,\mathrm{d}s=\bar{y}\int_\Gamma \mathrm{d}s=0$ （Γ 的重心在原点）

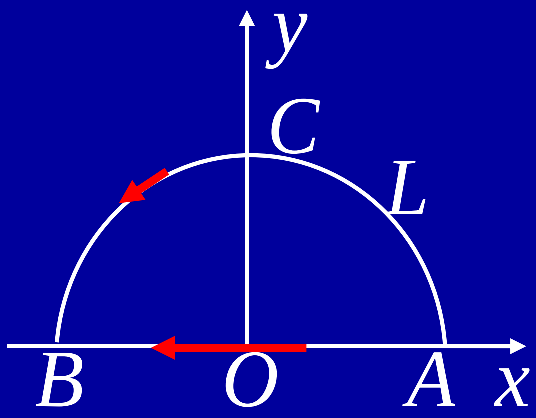
$$\therefore\quad I=\frac{2}{3}\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$$

$$=\frac{2}{3}a^2\int_\Gamma \mathrm{d}s=\frac{4}{3}\pi a^3$$

例2. 计算 $I=\int_L (x^2-y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\mathrm{d}y$，其中$L$ 是沿逆时针方向以原点为中心、a 为半径的上半圆周.

解法1 令 $P=x^2-y,\ Q=y^2-x,$ 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-1=\frac{\partial P}{\partial y}$$



这说明积分与路径无关, 故

$$I=\int_{\overline{AB}}(x^2-y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\mathrm{d}y$$

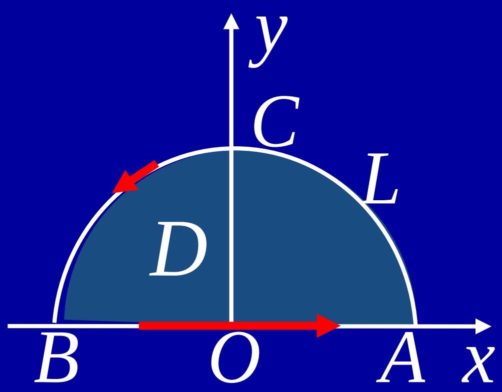
$$=\int_a^{-a} x^2\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}a^3$$

解法2 添加辅助线段 $\overline{BA}$,它与L所围区域为D, 则

$$I=\oint_{L\cup\overline{BA}}(x^2-y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$$

$$-\int_{\overline{BA}}(x^2-y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D 0\cdot\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\int_{-a}^{a}x^2\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}a^3$$



(利用格林公式)

思考:

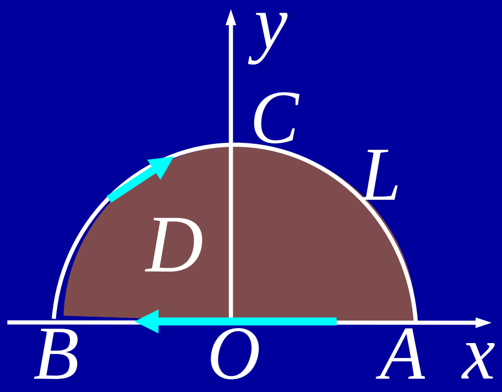
(1) 若L 改为顺时针方向,如何计算下述积分:

$$I_1=\int_L(x^2-3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$$

(2) 若 L 同例2 , 如何计算下述积分:

$$I_2=\int_L(x^2-y+y^2)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$$

思考题解答:



(1) $I_1 = \int_L (x^2 - 3y)\,\mathrm{d}x + (y^2 - x)\,\mathrm{d}y$

$= \oint_{L+\overline{AB}} - \int_{\overline{AB}}$

$= -2\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{2}{3}a^3 = a^2(\frac{2}{3}a - \pi)$

(2) $I_2 = \int_L (x^2 - y + y^2)\,\mathrm{d}x + (y^2 - x)\,\mathrm{d}y$

$= \int_L (x^2 - y)\,\mathrm{d}x + (y^2 - x)\mathrm{d}y + \int_L y^2\,\mathrm{d}x$

$L: x = a\cos t,\ \ y = a\sin t,\ \ t: 0 \to \pi$

$= I - \int_0^{\pi} a^3 \sin^3 t\,\mathrm{d}t = -\frac{2}{3}a^3 - 2a^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = -2a^3$

例3. 设在上半平面 $D=\{(x,y)\mid y>0\}$ 内函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数, 且对任意 $t>0$ 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$, 证明对D内任意分段光滑的闭曲线L, 都有

$$\oint_L y f(x,y)\,\mathrm{d}x - x f(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

证: 把 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$ 两边对t求导, 得:

$$x f_1'(tx,ty)+y f_2'(tx,ty)=-2t^{-3}f(x,y)$$

令 $t=1$, 得

$$x f_1'(x,y)+y f_2'(x,y)=-2f(x,y)$$

再令 $P=y f(x,y),\ Q=-x f(x,y)$, 则有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-2f(x,y)-x f_1'(x,y)-y f_2'(x,y)=0$$

即 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$, 因此结论成立.

练习题

4 计算 $I=\int_L (e^x \sin y - 2y)\,dx + (e^x \cos y - 2)\,dy$,

其中L为上半圆周 $(x-a)^2+y^2=a^2, y\ge 0$,沿逆时针方向.

提示: $P=e^x \sin y - 2y, \quad Q=e^x \cos y - 2$

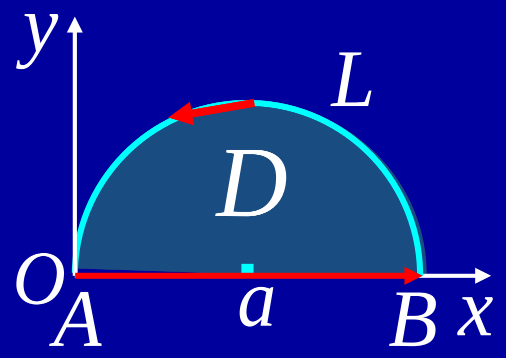
$$\frac{\partial P}{\partial y}=e^x \cos y - 2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=e^x \cos y$$

用格林公式:

$$I=\oint_{L\cup\overline{AB}} - \int_{\overline{AB}}$$

$$=\iint_D 2\,dx\,dy + 0$$

$$=\pi a^2$$



5. 设在右半平面 $x>0$ 内, 力 $\vec{F}=-\frac{k}{\rho^3}(x,y)$ 构成力场, 其中k 为常数, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, 证明在此力场中场力所作的功与所取的路径无关.

提示: $\vec{F}$沿右半平面内任意有向路径 L 所作的功为

$$W=\int_L -\frac{k}{\rho^3}(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y)$$

令 $P=-\frac{kx}{\rho^3},\ Q=-\frac{ky}{\rho^3}$

易证 $$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{3kxy}{\rho^5}=\frac{\partial Q}{\partial x}\qquad (x>0)$$

6. 求力 $\vec{F}=(y,z,x)$ 沿有向闭曲线 Γ 所作的功, 其中 Γ 为平面 $x+y+z=1$ 被三个坐标面所截成三角形的整个边界, 从 z 轴正向看去沿顺时针方向.

提示: 方法1

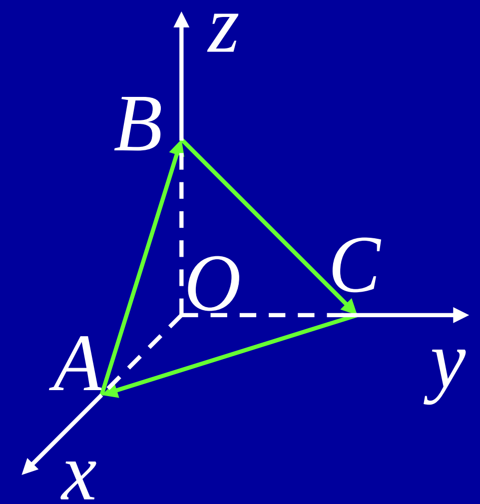
$$W=\oint_{\Gamma} y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z$$

利用对称性

$$=3\int_{\overline{AB}} y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$$

$$=3\int_{\overline{AB}} x\,\mathrm{d}z$$

$$=3\int_{0}^{1}(1-z)\mathrm{d}z=\frac{3}{2}$$



方法2 利用 斯托克斯公式

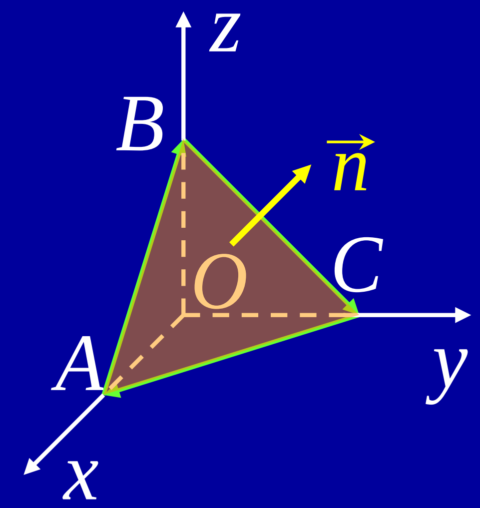
设三角形区域为Σ, 方向向下, 则

$$W=\oint_{\Gamma} y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z$$

$$=-\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(-3)\,\mathrm{d}S$$

$$=\sqrt{3}\iint_{D_{xy}}\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{3}{2}$$



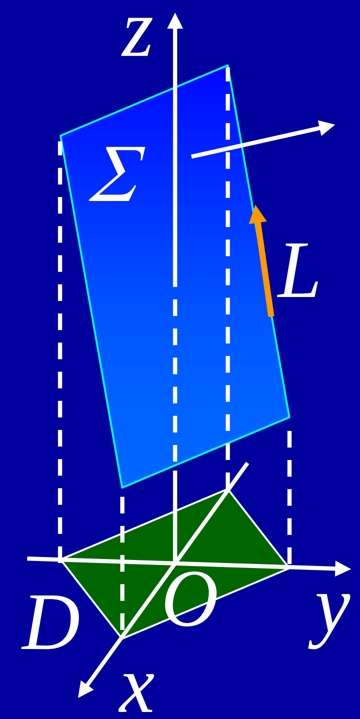
$\Sigma: x+y+z=1$

$\vec{n}=-\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$

例4. 设L 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$的交线从 z 轴正向看去, L 为逆时针方向, 计算

$$I=\oint_L (y^2-z^2)\,\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z$$

解: 记 Σ 为平面 $x+y+z=2$ 上 L 所围部分的上侧, D为Σ在 xOy 面上的投影. 由斯托克斯公式



$$I=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & 2z^2-x^2 & 3x^2-y^2 \end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=-\frac{2}{\sqrt3}\iint_\Sigma (4x+2y+3z)\,\mathrm{d}S$$

$$I = \cdots = -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (4x + 2y + 3z)\,\mathrm{d}S$$

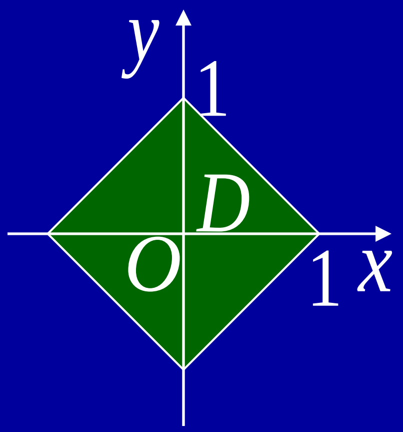
$$\Sigma : x + y + z = 2, \quad (x, y) \in D$$

$$D : |x| + |y| \le 1$$

$$= -2 \iint_{D} (x - y + 6)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -12 \iint_{D} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -24$$



D 的形心

$\bar{x} = \bar{y} = 0$

二、曲面积分的计算法

1. 基本方法

$$\text{曲面积分}\left\{\begin{array}{l}\text{第一类(对面积)}\\ \text{第二类(对坐标)}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{转化}}\text{二重积分}$$

(1) 选择积分变量 — 代入曲面方程

$$\text{(2) 积分元素投影}\left\{\begin{array}{l}\text{第一类: 始终非负}\\ \text{第二类: 有向投影}\end{array}\right.$$

(3) 确定二重积分域

— 把曲面积分域投影到相关坐标面

思考题

1) 二重积分是哪一类积分?

答: 第一类曲面积分的特例.

2) 设曲面 $\Sigma: z=0$, $(x,y)\in D$, 问下列等式是否成立?

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\iint_{D} f(x,y,0)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \checkmark$$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D} f(x,y,0)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \times$$

不对! 对坐标的积分与 Σ 的侧有关

2. 基本技巧

(1) 利用对称性及重心公式简化计算

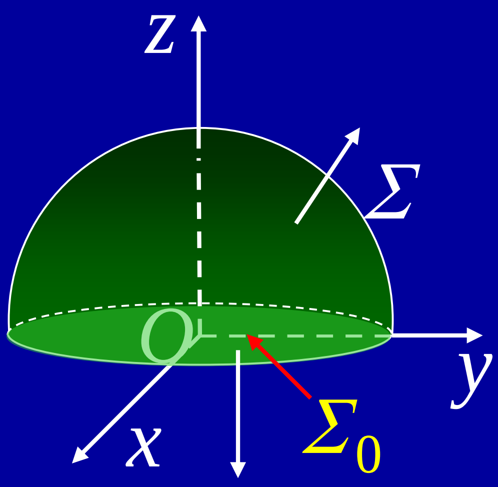
(2) 利用高斯公式 $\begin{cases} \text{注意公式使用条件} \\ \text{添加辅助面的技巧} \end{cases}$

(辅助面一般取平行坐标面的平面)

(3) 两类曲面积分的转化

练习：1

计算 $\iint_{\Sigma} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 Σ 为半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的上侧.



提示: 以半球底面 Σ_0 为辅助面，且取下侧，记半球域为 Ω，利用高斯公式有

$$\text{原式} = \iiint_{\Omega} 3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \iint_{\Sigma_0} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 3\cdot\frac{2}{3}\pi R^3 - 0 = 2\pi R^3$$

例6. 计算曲面积分

$$I=\oiint_{\Sigma}\frac{x}{r^3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\frac{y}{r^3}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\frac{z}{r^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2$ 取外侧.

解: $I=\dfrac{1}{R^3}\oiint_{\Sigma}x\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{R^3}\iiint_{\Omega}3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=4\pi$$

思考: 本题 Σ 改为椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 时, 应如何计算?

提示: 在椭球面内作辅助小球面 $x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$ 取内侧, 然后用高斯公式.

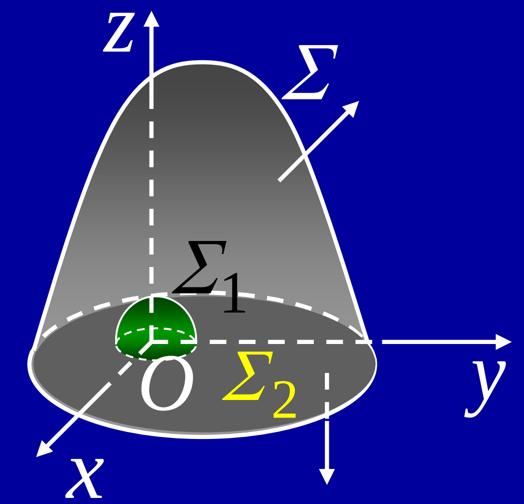
例7. 设 Σ 是曲面 $1-\frac{z}{5}=\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{9}\quad (z\ge 0)$,

取上侧, 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

解: 取足够小的正数 ε, 作曲面

$$\Sigma_1 : z=\sqrt{\varepsilon^2-x^2-y^2} \text{ 取下侧}$$

使其包在 Σ 内, Σ_2为 xOy 平面上夹于 Σ与Σ_1之间的部分, 且取下侧 , 则

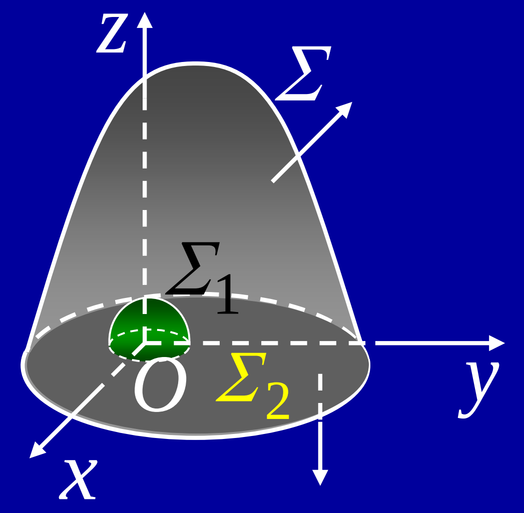


$$I=\oiint_{\Sigma\cup\Sigma_1\cup\Sigma_2}-\iint_{\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_2}$$

$$I=\oiint_{\Sigma\cup\Sigma_1\cup\Sigma_2}-\iint_{\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_2}$$

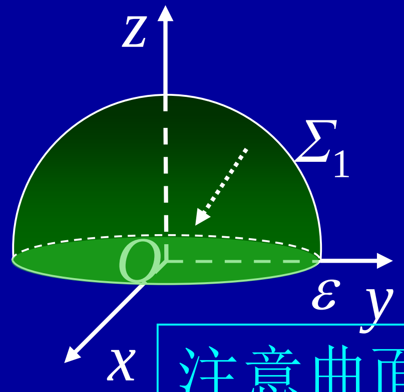
$$=\iiint_{\Omega}0\cdot \mathrm{d}v-\frac{1}{\varepsilon^3}\iint_{\Sigma_1}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$-\iint_{\Sigma_2}\frac{0\cdot\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$



第二项添加辅助面, 再用高斯公式, 得

$$I=-\frac{1}{\varepsilon^3}(-2\pi\varepsilon^3)=2\pi$$



注意曲面的方向 !

$$\boxed{I=\iint_{\Sigma}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}}$$

例8. 计算曲面积分 $I=\oiint_{\Sigma}[(x+y)^2+z^2+2yz]\,\mathrm{d}S$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=2x+2z$.

解: $I=\oiint_{\Sigma}[(x^2+y^2+z^2)+2xy+2yz\ ]\,\mathrm{d}S$

$$=\underbrace{\oiint_{\Sigma}(2x+2z)\,\mathrm{d}S}_{\text{用重心公式}}+\underbrace{2\oiint_{\Sigma}(x+z)\,y\,\mathrm{d}S}_{\text{利用对称性}}$$

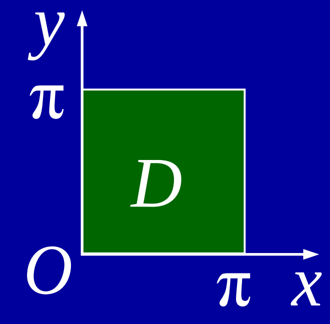
$$=2(\bar{x}+\bar{z})\oiint_{\Sigma}\mathrm{d}S+0$$

$$=32\pi$$

备用题 1. 已知平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le\pi, 0\le y\le\pi\}$, L为D 的边界, 试证

(1) $\oint_L x\,\mathrm{e}^{\sin y}\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{e}^{-\sin x}\,\mathrm{d}x = \oint_L x\,\mathrm{e}^{-\sin y}\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{e}^{\sin x}\,\mathrm{d}x$

(2) $\oint_L x\,\mathrm{e}^{\sin y}\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{e}^{-\sin x}\,\mathrm{d}x \ge 2\pi^2$



证: (1) 根据格林公式

$$\oint_L x\,\mathrm{e}^{\sin y}\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{e}^{-\sin x}\,\mathrm{d}x = \iint_D (\mathrm{e}^{\sin y}+\mathrm{e}^{-\sin x})\,\mathrm{d}\sigma \quad ①$$

$$\oint_L x\,\mathrm{e}^{-\sin y}\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{e}^{\sin x}\,\mathrm{d}x = \iint_D (\mathrm{e}^{-\sin y}+\mathrm{e}^{\sin x})\,\mathrm{d}\sigma \quad ②$$

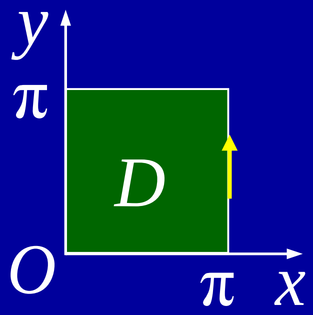
因①、②两式右端积分具有轮换对称性, 所以相等, 从而左端相等, 即(1)成立.

(2) 由①式

$$\oint_L x\,\mathrm{e}^{\sin y}\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{e}^{-\sin x}\,\mathrm{d}x = \iint_D (\mathrm{e}^{\sin y} + \mathrm{e}^{-\sin x})\,\mathrm{d}\sigma$$

由轮换对称性

$$\iint_D \mathrm{e}^{\sin y}\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D \mathrm{e}^{\sin x}\,\mathrm{d}\sigma$$



$$= \iint_D (\mathrm{e}^{-\sin x} + \mathrm{e}^{\sin x})\,\mathrm{d}\sigma$$

$$\geq \iint_D 2\,\mathrm{d}\sigma \qquad (\text{易证 } \mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t} \geq 2)$$

$$= 2\pi^2$$

斯托克斯(Stokes) 公式

$$\oint_{\Gamma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$$

$$= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}S$$