第1节

傅里叶级数

一、三角级数及三角函数系的正交性

二、函数展开成傅里叶级数

三、正弦级数和余弦级数

一、三角级数及三角函数系的正交性

简单的周期运动：$y = A\sin(\omega t + \varphi)$ (谐波函数)

(A为振幅，ω为角频率，φ为初相)

复杂的周期运动：$y = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)}$

(谐波迭加)

$$\underline{A_n \sin\varphi_n} \cos n\underline{\omega t} + \underline{A_n \cos\varphi_n} \sin n\underline{\omega t}$$

令 $\frac{a_0}{2} = A_0$，$a_n = A_n \sin\varphi_n$，$b_n = A_n \cos\varphi_n$，$\omega t = x$

得函数项级数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

称上述形式的级数为三角级数.

定理 1. 组成三角级数的函数系

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cdots,\ \cos nx,\ \sin nx,\cdots$$

在 $[-\pi,\pi]$ 上正交，即其中任意两个不同的函数之积在 $[-\pi,\pi]$ 上的积分等于 0 .

证: $\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x = 0 \quad (n=1,2,\cdots)$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$\cos kx\cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(k+n)x + \cos(k-n)x\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(k+n)x + \cos(k-n)x\right]\mathrm{d}x = 0 \quad (k \neq n)$$

同理可证： $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin nx\,\mathbf{d}x = 0 \quad (k \neq n)$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin nx\,\mathbf{d}x = 0$$

但是在三角函数系中两个相同的函数的乘积在 $[-\pi,\pi]$ 上的积分不等于 0． 且有

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot 1\,\mathrm{d}x = 2\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,\mathrm{d}x = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,\mathrm{d}x = \pi \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$\boxed{\cos^2 nx = \frac{1+\cos 2nx}{2}, \quad \sin^2 nx = \frac{1-\cos 2nx}{2}}$$

二、函数展开成傅里叶级数

定理 2 . 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数 , 且

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad ①$$

右端级数可逐项积分, 则有

$$\begin{cases} a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x & (n=0,1,\cdots) \\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x & (n=1,2,\cdots) \end{cases} \qquad ②$$

证: 由定理条件, 对①在 $[-\pi,\pi]$ 逐项积分, 得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x\right)$$

$$=a_0\pi$$

$$\therefore \quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,\mathrm{d}x +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,\mathrm{d}x + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin nx\,\mathrm{d}x\right]$$

$$= a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,\mathrm{d}x = a_k\,\pi$$ （利用正交性）

$$\therefore \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

类似地, 用 $\sin kx$ 乘 ① 式两边, 再逐项积分可得

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad ①$$

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad (n=0,1,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots) \end{cases} \qquad ②$$

由公式 ② 确定的 a_n , b_n称为函数 $f(x)$的**傅里叶系数；** 以 $f(x)$ 的傅里叶系数为系数的三角级数 ① 称为 $f(x)$ 的**傅里叶级数** .

傅里叶，J.-B.-J.

定理3 (收敛定理, 展开定理)　设 $f(x)$ 是周期为2π 的周期函数, 并满足**狄利克雷**(Dirichlet)**条件**:

1) 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点;

2) 在一个周期内只有有限个极值点,

则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛 , 且有

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$=\begin{cases} f(x), & x\text{ 为连续点}\\ \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}, & x\text{ 为间断点}\end{cases}$$

其中 a_n, b_n 为 $f(x)$ 的傅里叶系数 . **(证明略)**

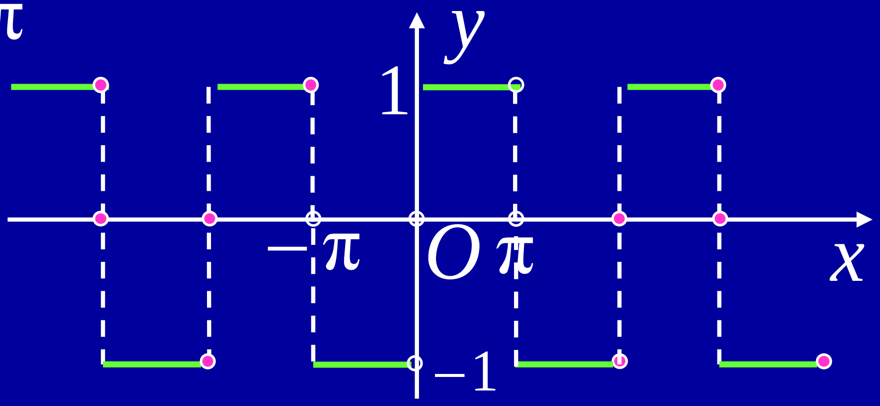
注意: 函数展成傅里叶级数的条件比展成幂级数的条件低得多.


狄利克雷, P.G.L.

例1. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi \le x < 0\\ 1, & 0 \le x < \pi\end{cases}$$

将 $f(x)$ 展成傅里叶级数.



解: 先求傅里叶系数

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nx\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$= 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}\,x$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nx\,\mathrm{d}\,x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cdot\sin nx\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{0}^{\pi} = \frac{2}{n\pi}\left[1-\cos n\pi\right]$$

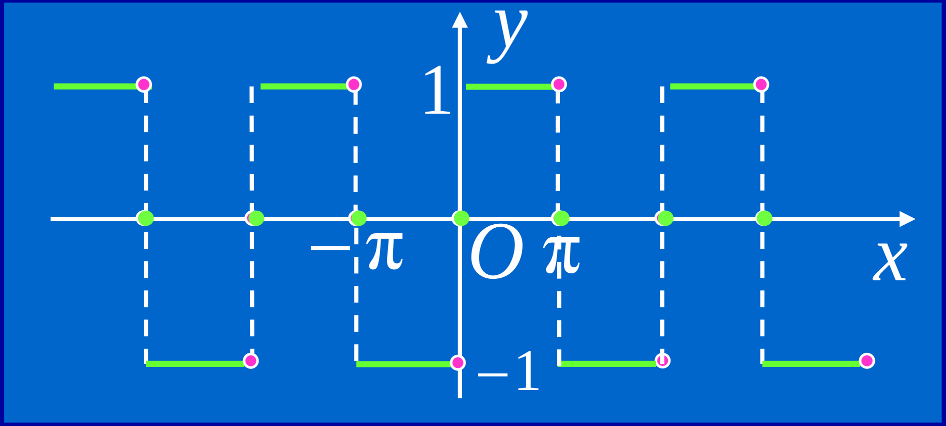
$$= \frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right] = \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi}, & \text{当} n = 1,3,5,\cdots \\ 0, & \text{当} n = 2,4,6,\cdots \end{cases}$$

$$\therefore f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots + \frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x + \cdots\right]$$

$$(-\infty < x < +\infty,\ x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots)$$

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left[\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\frac{\sin 7x}{7}+\frac{\sin 9x}{9}+\cdots\right]$$

$$(-\infty<x<+\infty\,,\,x\neq 0\,,\pm\pi\,,\pm 2\pi\,,\cdots)$$

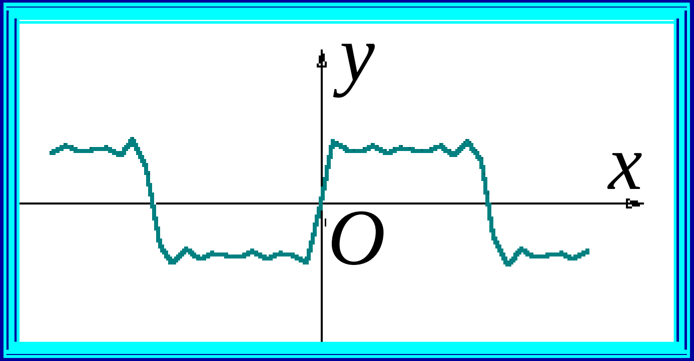


说明:

1) 根据收敛定理可知,

当$x=k\pi\ \ (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$

时, 级数收敛于 $\dfrac{-1+1}{2}=0$

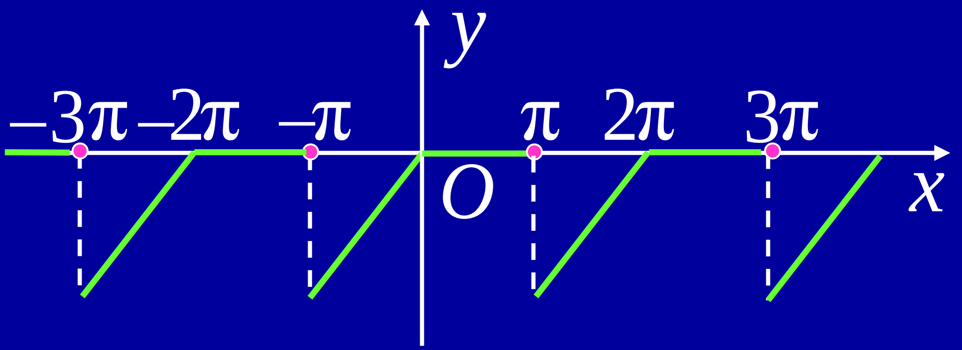


2) 傅氏级数的部分和逼近

$f(x)$ 的情况见右图.

例2. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases} x, & -\pi\le x<0 \\ 0, & 0\le x<\pi \end{cases}$$



将 $f(x)$ 展成傅里叶级数.

解:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0}=-\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0}=\frac{1-\cos n\pi}{n^2\pi}$$

$$a_n = \frac{1-\cos n\pi}{n^2\pi} = \begin{cases} \dfrac{2}{(2k-1)^2\pi}, & n = 2k-1 \\ 0, & n = 2k \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$(n = 1, 2, \cdots)$$

$$f(x) = \frac{-\pi}{4} + \left(\frac{2}{\pi}\cos x + \sin x\right) - \frac{1}{2}\sin 2x +$$

$$+\left(\frac{2}{3^2\pi}\cos 3x + \frac{1}{3}\sin 3x\right) - \frac{1}{4}\sin 4x +$$

$$+\left(\frac{2}{5^2\pi}\cos 5x + \frac{1}{5}\sin 5x\right) - \cdots$$

$$(-\infty < x < +\infty,\ x \neq (2k-1)\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

说明: 当 $x = (2k-1)\pi$ 时, 级数收敛于 $\dfrac{0+(-\pi)}{2} = -\dfrac{\pi}{2}$

定义在[–π ,π]上的函数 *f* (*x*)的傅氏级数展开法

$$f(x), \quad x \in [-\pi, \pi]$$

周期延拓

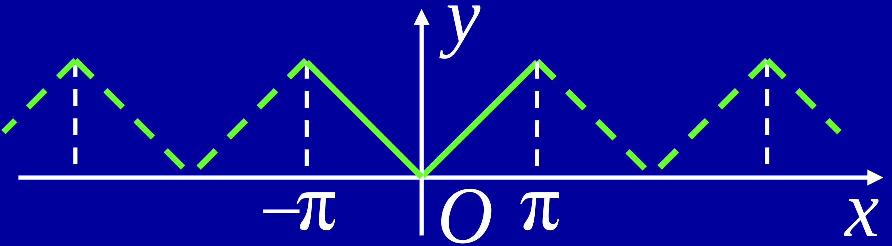
$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [-\pi, \pi) \\ f(x - 2k\pi), & \text{其它} \end{cases}$$

傅里叶展开

$f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的傅里叶级数

例3. 将函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\le x<0\\ x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$ 展成傅里叶级数.

解: 将 $f(x)$延拓成以



2π为周期的函数 $F(x)$, 则

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}=\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} -\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi}, & n = 2k-1 \\ 0, & n = 2k \end{cases}$$

$$(k = 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\therefore f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right)$$

$$(-\pi \le x \le \pi)$$

说明: 利用此展式可求出几个特殊的级数的和.

当 $x = 0$ 时, $f(0) = 0$, 得

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \cdots$$

设 $\sigma = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$, $\sigma_1 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$

$\sigma_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots$, $\sigma_3 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$

已知 $\sigma_1 = \frac{\pi^2}{8}$

$$\because \ \sigma_2 = \frac{\sigma}{4} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{4}, \quad \therefore \ \sigma_2 = \frac{\sigma_1}{3} = \frac{\pi^2}{24}$$

又 $$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sigma_3 = \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12}$$

三、正弦级数和余弦级数

1. 周期为2π 的奇、偶函数的傅里叶级数

定理4. 对周期为 2π 的奇函数 $f(x)$, 其傅里叶级数为正弦级数,它的傅里叶系数为

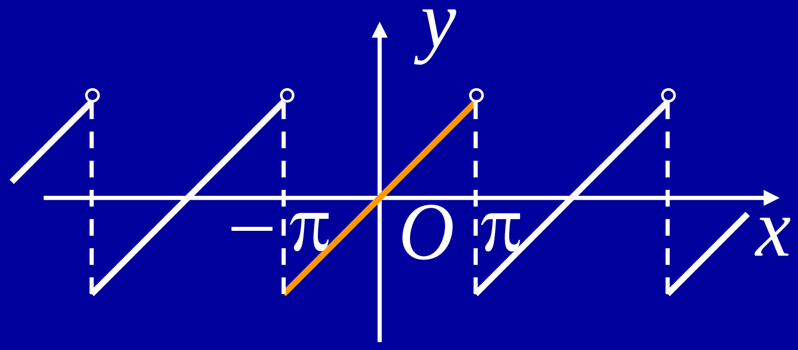
$$\begin{cases} a_n = 0 & (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

周期为2π的偶函数 $f(x)$, 其傅里叶级数为余弦级数,它的傅里叶系数为

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x & (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ b_n = 0 & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

例4. 设 $f(x)$ 是周期为2π 的周期函数,它在 $[-\pi,\pi)$上的表达式为 $f(x)=x$, 将 $f(x)$ 展成傅里叶级数.

解: 若不计 $x=(2k+1)\pi\ \ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$, 则$f(x)$是周期为 2π 的奇函数, 因此



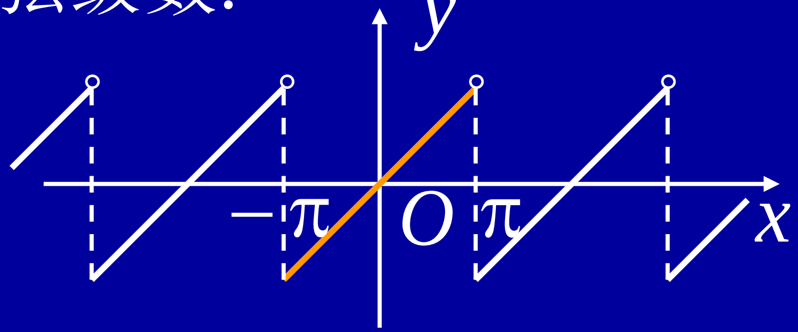
$$a_n=0\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=-\frac{2}{n}\cos n\pi=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\qquad(n=1,2,3,\cdots)$$

根据收敛定理可得 $f(x)$ 的正弦级数:

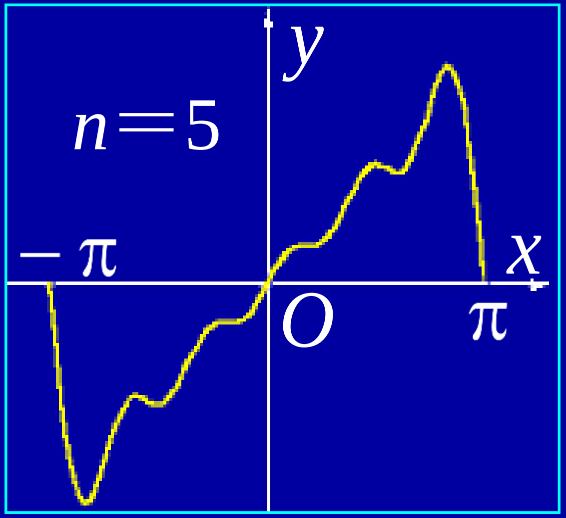


$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

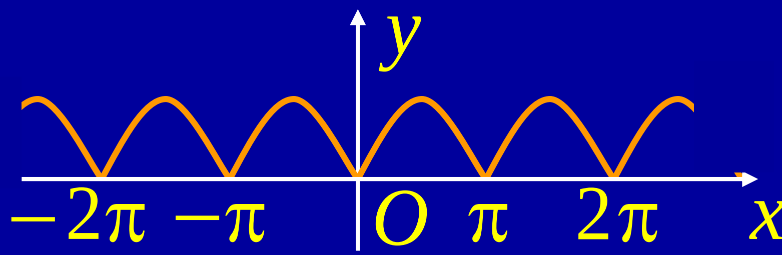
$$= 2(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots)$$

$$(-\infty < x < +\infty\,,\ x \neq (2k+1)\pi\,, k = 0, \pm 1\,, \cdots)$$

在 $[-\pi, \pi)$ 上级数的部分和逼近 $f(x)$ 的情况见右图.



例5. 将周期函数 $u(t)=|E\sin t|$ 展成傅里叶级数, 其中 E 为正常数 .



解: $u(t)$ 是周期为2π 的周期偶函数 , 因此

为便于计算, 将周期取为2π

$$b_n=0\quad(n=1,2,\cdots);$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u(t)\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}E\sin t\,\mathrm{d}t=\frac{4E}{\pi}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u(t)\cos nt\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}E\sin t\cos nt\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{E}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin(n+1)t-\sin(n-1)t\right)\mathrm{d}t$$

$$a_n = \frac{E}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin(n+1)t - \sin(n-1)t\right)\mathrm{d}\,t$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{4E}{(4k^2-1)\pi}, & n = 2k \\ 0, & n = 2k+1 \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$a_1 = \frac{E}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2\,t\,\mathrm{d}\,t = 0$$

$$\therefore\ u(t) = \frac{2E}{\pi} - \frac{4E}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos 2k\,x$$

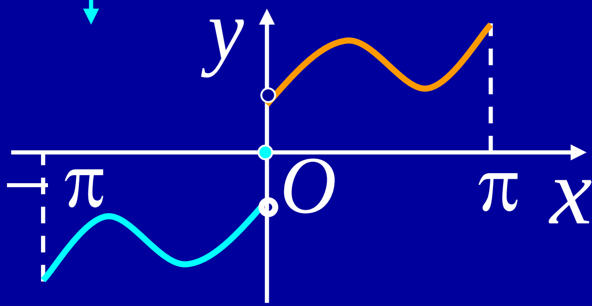
$$= \frac{4E}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cos 2t - \frac{1}{15}\cos 4t - \frac{1}{35}\cos 6t - \cdots\right)$$

$$(-\infty < t < +\infty)$$

2. 定义在[0,π]上的函数展成正弦级数与余弦级数

$f(x),\ x\in[0,\pi]$

奇延拓

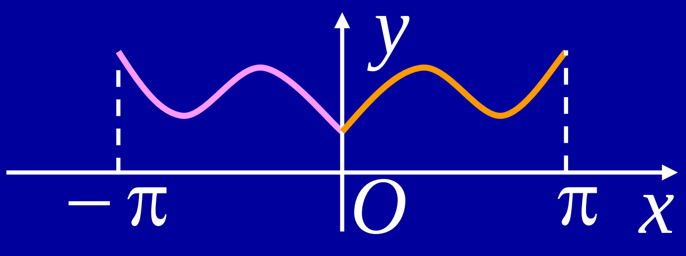


$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\pi] \\ 0, & x=0 \\ -f(-x), & x\in(-\pi,0) \end{cases}$$

周期延拓 $F(x)$

$f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上展成正弦级数

偶延拓



$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[0,\pi] \\ f(-x), & x\in(-\pi,0) \end{cases}$$

周期延拓 $F(x)$

$f(x)$ 在 $[0,\pi]$上展成余弦级数

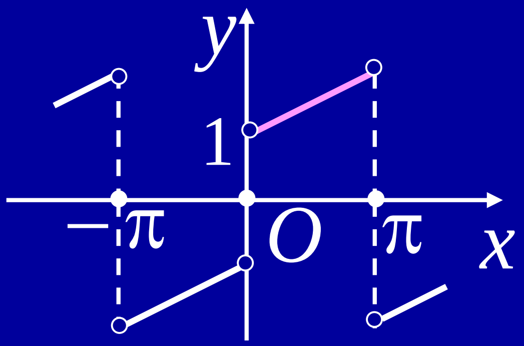
例6. 将函数 $f(x)=x+1\ (0\le x\le \pi\ )$ 分别展成正弦级数与余弦级数 .

解: 先求正弦级数. 去掉端点, 将 $f(x)$ 作奇周期延拓,

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}\,x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\sin nx\,\mathrm{d}\,x$$

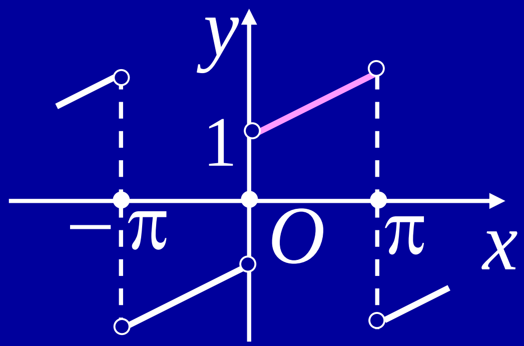
$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}-\frac{\cos nx}{n}\ \right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left(1-\pi\cos n\pi-\cos n\pi\ \right)$$



$$=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi+2}{2k-1}, & n=2k-1\\[2ex] -\dfrac{1}{k}, & n=2k\end{cases}\qquad (k=1,2,\cdots)$$

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} \cdot \dfrac{\pi + 2}{2k - 1}, & n = 2k - 1 \\ -\dfrac{1}{k}, & n = 2k \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$



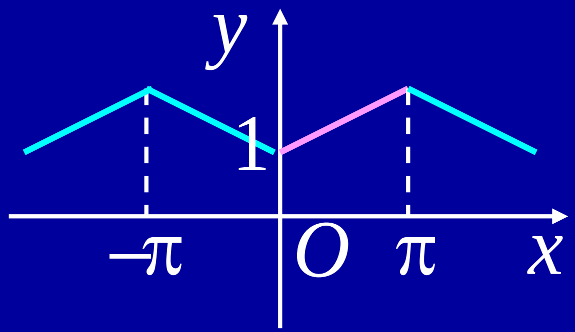
因此得

$$x + 1 = \frac{2}{\pi}\left[(\pi + 2)\sin x - \frac{\pi}{2}\sin 2x + \frac{\pi + 2}{3}\sin 3x - \frac{\pi}{4}\sin 4x + \cdots\right] \quad (0 < x < \pi)$$

注意: 在端点 $x = 0, \pi$, 级数的和为0 , 与给定函数 $f(x) = x + 1$ 的值不同 .

再求余弦级数. 将 $f(x)$ 作偶周期延拓，则有

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^{\pi} = \pi + 2$$



$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}+\frac{\sin nx}{n}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1)$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi}, & n = 2k-1 \\ 0, & n = 2k \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$x+1=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x$$

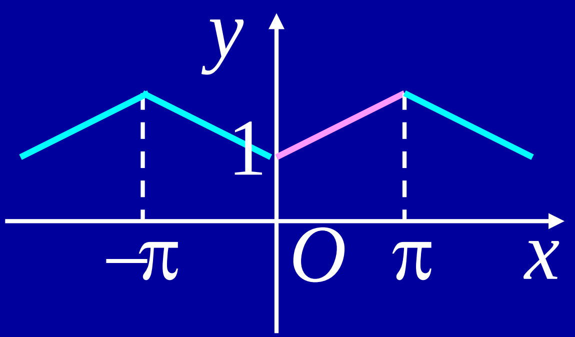
$$=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\left[\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right]$$

$$(0\le x\le\pi)$$

说明: 令 $x=0$ 可得

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$$

即 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$



内容小结

1. 周期为 2π 的函数的傅里叶级数及收敛定理

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\quad (x\neq\text{间断点})$$

其中
$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x & (n=0,1,2,\cdots)\\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x & (n=1,2,\cdots)\end{cases}$$

注意: 若 x_0为间断点, 则级数收敛于 $\dfrac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}$

2. 周期为 2π 的奇、偶函数的傅里叶级数

- 奇函数 $\longrightarrow$ 正弦级数
- 偶函数 $\longrightarrow$ 余弦级数

3. 在 $[0, \pi]$ 上函数的傅里叶展开法

- 作奇周期延拓，展开为正弦级数
- 作偶周期延拓，展开为余弦级数

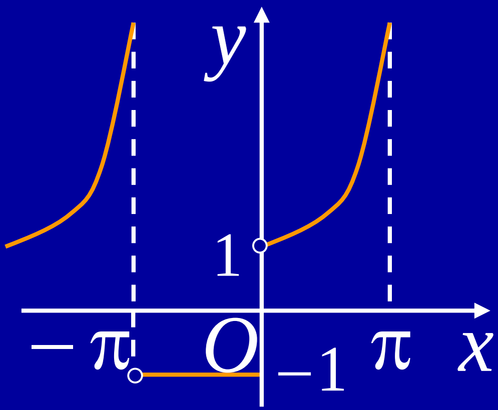
思考与练习

1. 在 $[0, \pi]$ 上的函数的傅里叶展开法唯一吗？

答: 不唯一，延拓方式不同级数就不同.

2. 设周期函数在一个周期内的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi < x \le 0\\ 1+x^2, & 0 < x \le \pi\end{cases}$$



则它的傅里叶级数在 $x=\pi$ 处收敛于 $\underline{\ \pi^2/2\ }$，在 $x=4\pi$ 处收敛于 $\underline{\ \ 0\ \ }$.

提示:

$$\frac{f(\pi^-)+f(\pi^+)}{2}=\frac{f(\pi^-)+f(-\pi^+)}{2}=\frac{\pi^2}{2}$$

$$\frac{f(4\pi^-)+f(4\pi^+)}{2}=\frac{f(0^-)+f(0^+)}{2}=\frac{-1+1}{2}$$

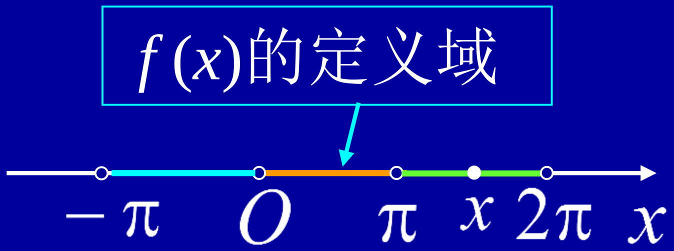
3. 设 $f(x)=\pi x-x^2,\ 0<x<\pi$，又设 $S(x)$ 是 $f(x)$ 在$(0,\pi)$ 内以 2π 为周期的正弦级数展开式的和函数，求当 $x\in(\pi,2\pi)$ 时 $S(x)$的表达式 .

解: 由题设可知应对 $f(x)$ 作奇延拓:

$$F(x)=\begin{cases}\pi x-x^2, & 0<x<\pi\\ 0, & x=0\\ \pi x+x^2, & -\pi<x<0\end{cases}$$

在 $(-\pi,\pi)$ 上，$S(x)=F(x)$；在 $(\pi,2\pi)$ 上，由周期性:

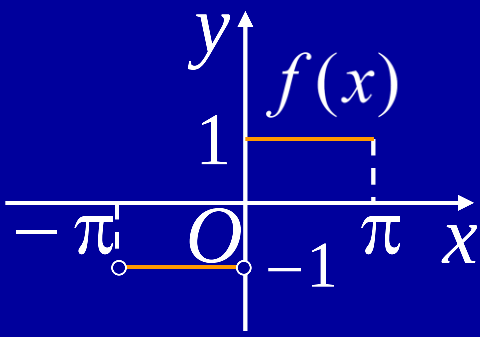
$$\begin{aligned}S(x)&=S(x-2\pi)\\&=\pi(x-2\pi)+(x-2\pi)^2\\&=x^2-3\pi x+2\pi^2\end{aligned}$$



$x-2\pi\in(-\pi,0)$

4. 写出函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 1, & 0\le x\le\pi\end{cases}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上傅氏级数的和函数 .

答案: $S(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 1, & 0<x<\pi\\ 0, & x=0\\ 0, & x=\pm\pi\end{cases}$



备用题 1. 函数 $f(x)=\pi x+x^2\ (-\pi<x<\pi)$ 的傅里叶级数展式为 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, 则其中系数

$b_3=$ $\underline{\quad\dfrac{2\pi}{3}\quad}$.

提示: $b_3=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin 3x\,\mathrm{d}\,x$

$=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(\pi x+x^2)\sin 3x\,\mathrm{d}\,x$

利用"偶倍奇零"

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi x}{3}\cos 3x+\frac{\pi}{9}\sin 3x\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{2}{3}\pi$$

2. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，其傅氏系数为 a_n，b_n，则 $f(x+h)$ (h为常数) 的傅氏系数

$a_n' = \underline{a_n\cos nh + b_n\sin nh}$，$b_n' = \underline{b_n\cos nh - a_n\sin nh}$.

提示: $a_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h)\cos nx\,\mathrm{d}x$ $\boxed{令\ t = x+h}$

$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)\cos n(t-h)\,\mathrm{d}t$

利用周期函数性质 $\int_{-\pi+h}^{\pi+h} = \int_{-\pi}^{\pi}$

$= \cos nh\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t + \sin nh\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t$

$= \cos nh\cdot a_n + \sin nh\cdot b_n$

类似可得 b_n'