

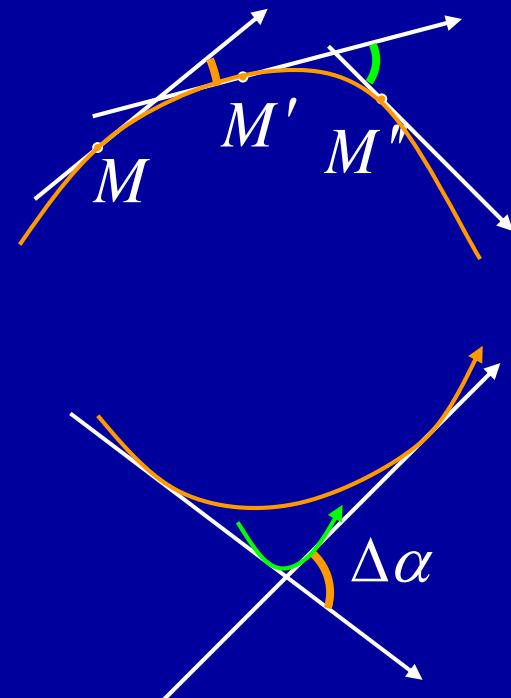
第七节

平面曲线的曲率

曲线的弯曲程度 $\left\{ \begin{array}{l} \text{与切线的转角有关} \\ \text{与曲线的弧长有关} \end{array} \right.$

主要内容：

- 一、 弧微分
- 二、 曲率及其计算公式
- 三、 曲率圆与曲率半径



一、弧微分

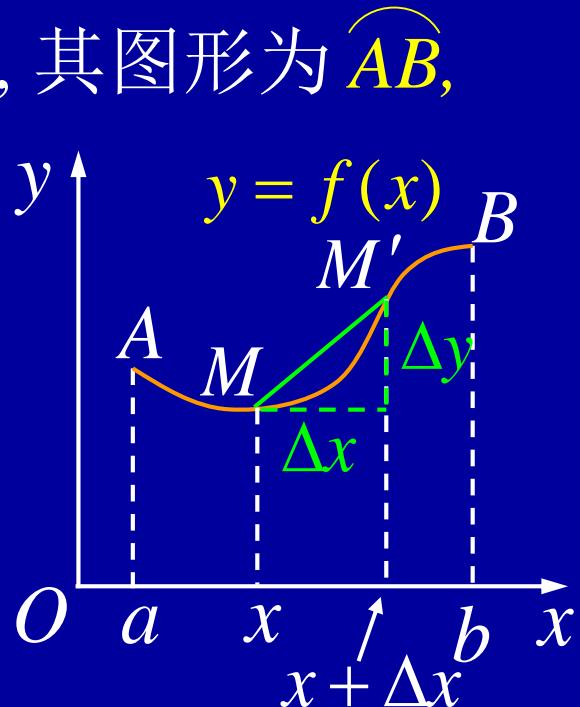
设 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内有连续导数, 其图形为 \widehat{AB} ,

弧长 $s = \widehat{AM} = s(x)$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta s}{\Delta x} &= \frac{\widehat{MM'}}{|MM'|} \cdot \frac{|MM'|}{\Delta x} \\ &= \frac{\widehat{MM'}}{|MM'|} \cdot \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta x}\end{aligned}$$

$$= \pm \frac{\widehat{MM'}}{|MM'|} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

$$\therefore s'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + (y')^2}$$



$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\widehat{MM'}}{|MM'|} = \pm 1$$



$$s'(x) = \sqrt{1 + (y')^2}$$

$$\therefore ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad \text{或} \quad ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

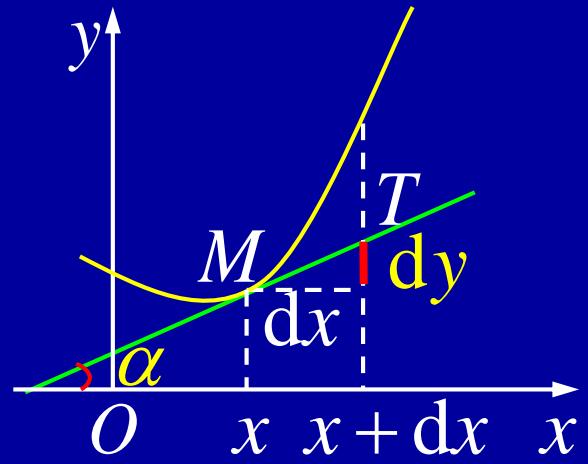
若曲线由参数方程表示: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

则弧长微分公式为 $ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$

\dot{x} 表示对参数 t 的导数

几何意义: $ds = |MT|$

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha; \quad \frac{dy}{ds} = \sin \alpha$$



二、曲率及其计算公式

在光滑弧上自点 M 开始取弧段, 其长为 Δs , 对应切线转角为 $\Delta\alpha$, 定义

弧段 Δs 上的平均曲率

$$\bar{K} = \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right|$$

点 M 处的曲率

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right|$$



注意: 直线上任意点处的曲率为 0 !

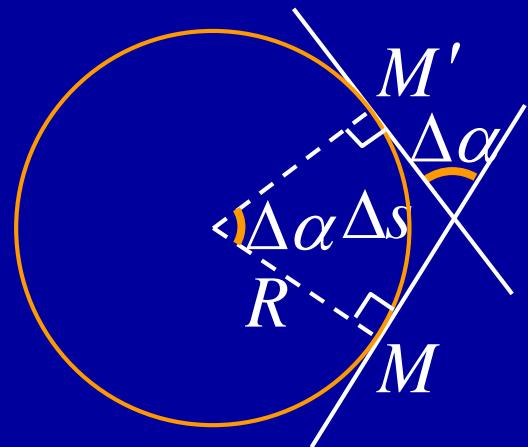


例1. 求半径为 R 的圆上任意点处的曲率 .

解: 如图所示 ,

$$\Delta s = R\Delta\alpha$$

$$\therefore K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right| = \frac{1}{R}$$



可见: R 愈小, 则 K 愈大, 圆弧弯曲得愈厉害 ;

R 愈大, 则 K 愈小, 圆弧弯曲得愈小 .



曲率K的计算公式

设曲线弧 $y = f(x)$ 二阶可导, 则由

$$\tan \alpha = y' \quad (\text{设 } -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2})$$

得 $\alpha = \arctan y'$

$$d\alpha = (\arctan y')' dx = \frac{y''}{1 + y'^2} dx$$

又 $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$

故曲率计算公式为 $K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}$

当 $|y'| \ll 1$ 时, 有曲率近似计算公式 $K \approx |y''|$

$$K = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right|$$



说明:

(1) 若曲线由参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ 给出, 则

$$K = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{x}\ddot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

(2) 若曲线方程为 $x = \varphi(y)$, 则

$$K = \frac{|x''|}{(1+x'^2)^{3/2}}$$

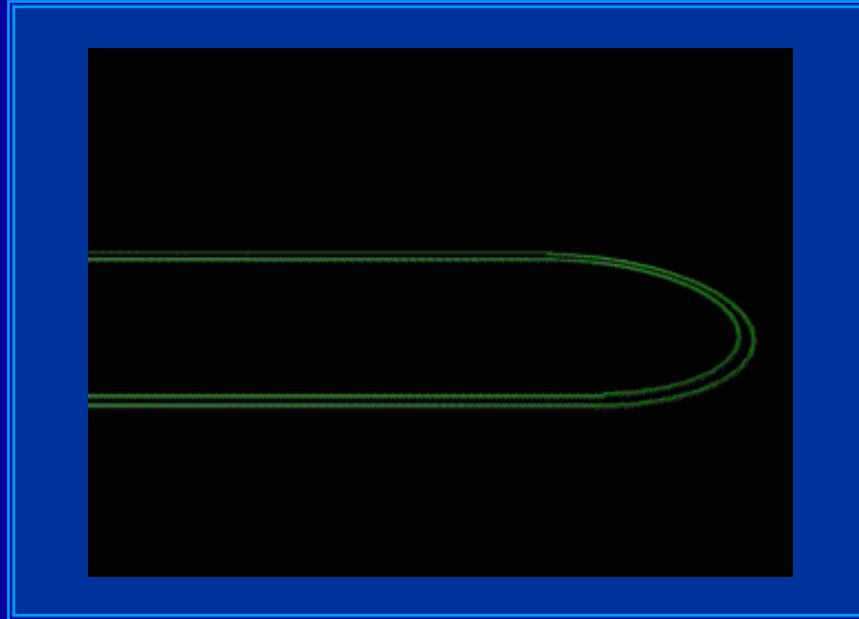
$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$$



例2. 我国铁路常用立方抛物线 $y = \frac{1}{6Rl}x^3$ 作缓和曲线,

其中 R 是圆弧弯道的半径, l 是缓和曲线的长度, 且 $l \ll R$.

求此缓和曲线在其两个端点 $O(0, 0), B(l, \frac{l^2}{6R})$ 处的曲率.



说明:

铁路转弯时为保证行车
平稳安全, 离心力必须
连续变化, 因此铁道的
曲率应连续变化 .

点击图片任意处播放\暂停



HIGHER EDUCATION PRESS



目录



上页



下页



返回



结束

例2. 我国铁路常用立方抛物线 $y = \frac{1}{6Rl}x^3$ 作缓和曲线,

其中 R 是圆弧弯道的半径, l 是缓和曲线的长度, 且 $l \ll R$.

求此缓和曲线在其两个端点 $O(0, 0), B(l, \frac{l^2}{6R})$ 处的曲率.

解: 当 $x \in [0, l]$ 时,

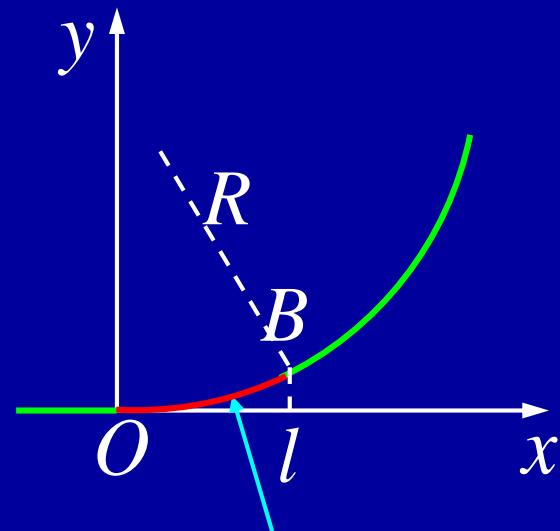
$$\because y' = \frac{1}{2Rl}x^2 \leq \frac{l}{2R} \approx 0$$

$$y'' = \frac{1}{Rl}x$$

$$\therefore K \approx |y''| = \frac{1}{Rl}x$$

显然

$$K|_{x=0} = 0; \quad K|_{x=l} \approx \frac{1}{R}$$



$$y = \frac{1}{6Rl}x^3$$



例3. 求椭圆 $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 在何处曲率最大?

解: $\dot{x} = -a \sin t$; $\ddot{x} = -a \cos t$

$\dot{y} = b \cos t$; $\ddot{y} = -b \sin t$

故曲率为

$$K = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

$$K \text{ 最大} \iff f(t) = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t \text{ 最小}$$

求驻点:

$$f'(t) = 2a^2 \sin t \cos t - 2b^2 \cos t \sin t = (a^2 - b^2) \sin 2t$$

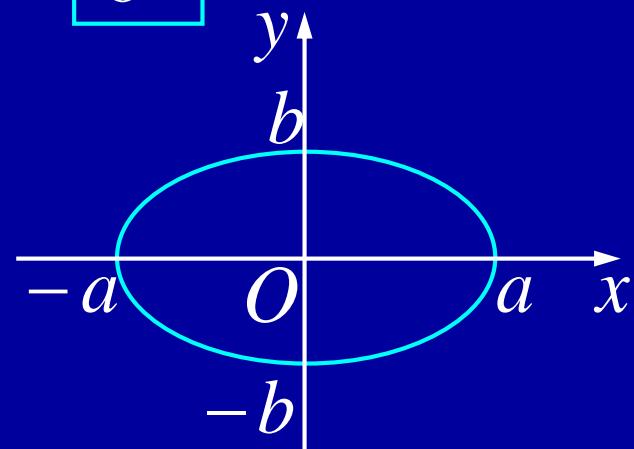


令 $f'(t)=0$, 得 $t=0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$

计算驻点处的函数值:

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(t)$	b^2	a^2	b^2	a^2	b^2

设 $0 < b < a$, 则 $t=0, \pi, 2\pi$ 时
 $f(t)$ 取最小值, 从而 K 取最大值.
这说明椭圆在点 $(\pm a, 0)$ 处曲率
最大.



K 最大 $\iff f(t) = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t$ 最小

$$f'(t) = (a^2 - b^2) \sin 2t$$



三、曲率圆与曲率半径

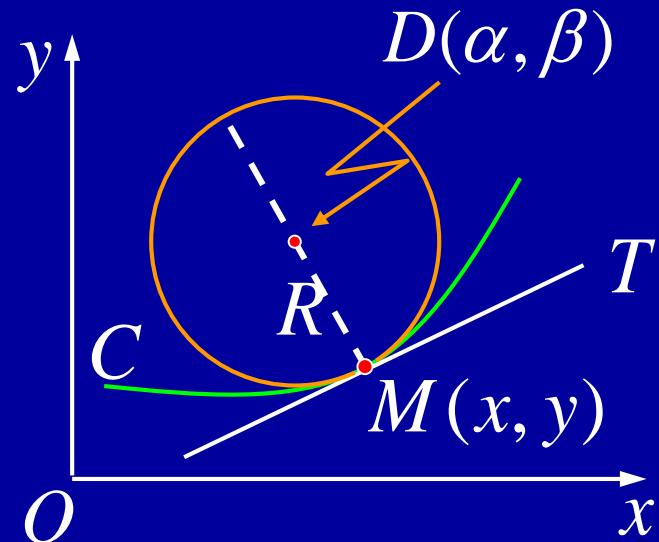
设 M 为曲线 C 上任一点，在点 M 处作曲线的切线和法线，在曲线的凹向一侧法线上取点 D 使

$$|DM| = R = \frac{1}{K}$$

把以 D 为中心, R 为半径的圆叫做曲线在点 M 处的曲率圆(密切圆), R 叫做曲率半径, D 叫做曲率中心.

在点 M 处曲率圆与曲线有下列密切关系:

- (1) 有公切线;
- (2) 凹向一致;
- (3) 曲率相同.



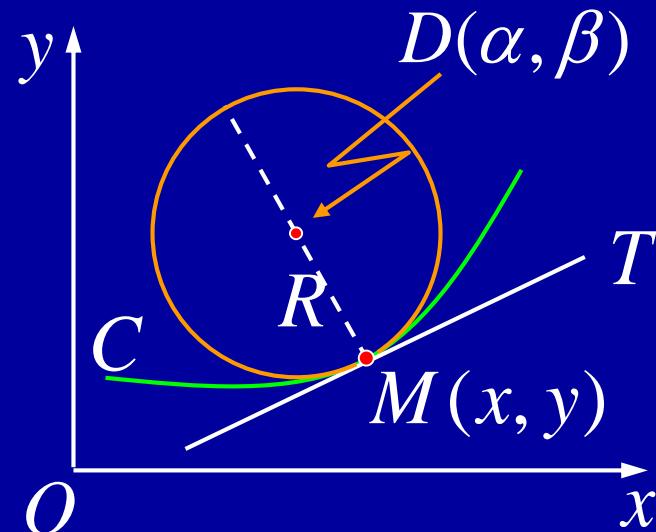
设曲线方程为 $y = f(x)$, 且 $y'' \neq 0$, 求曲线上点 M 处的曲率半径及曲率中心 $D(\alpha, \beta)$ 的坐标公式.

设点 M 处的曲率圆方程为

$$(\xi - \alpha)^2 + (\eta - \beta)^2 = R^2$$

故曲率半径公式为

$$R = \frac{1}{K} = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$$



α, β 满足方程组

$$\begin{cases} (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 & (M(x, y) \text{ 在曲率圆上}) \\ y' = -\frac{x-\alpha}{y-\beta} & (DM \perp MT) \end{cases}$$



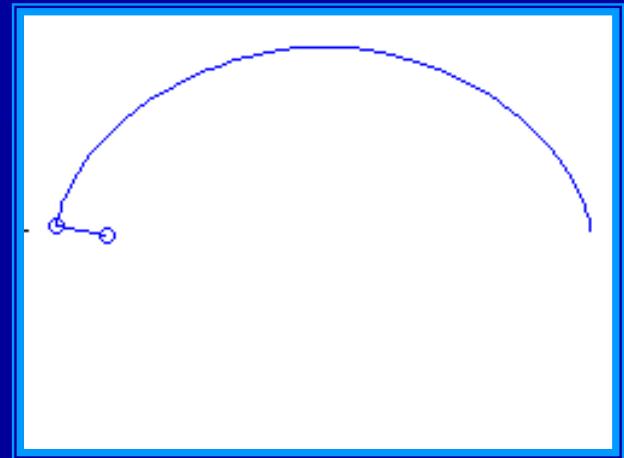
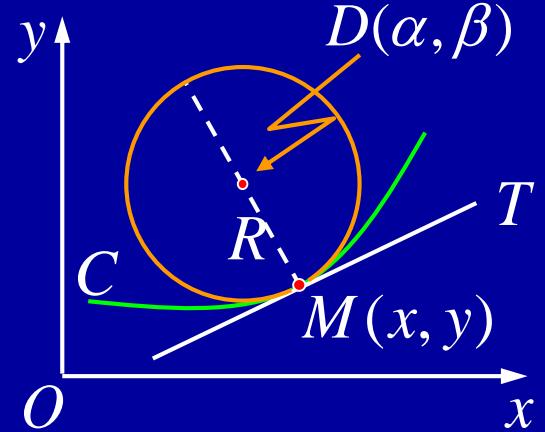
由此可得曲率中心公式

$$\begin{cases} \alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} \\ \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''} \end{cases}$$

(注意 $y - \beta$ 与 y'' 异号)

当点 $M(x, y)$ 沿曲线 $y = f(x)$ 移动时, 相应的曲率中心的轨迹 G 称为曲线 C 的渐屈线, 曲线 C 称为曲线 G 的渐伸线.

曲率中心公式可看成渐屈线的参数方程(参数为 x).



点击图中任意点动画开始或暂停



HIGHER EDUCATION PRESS

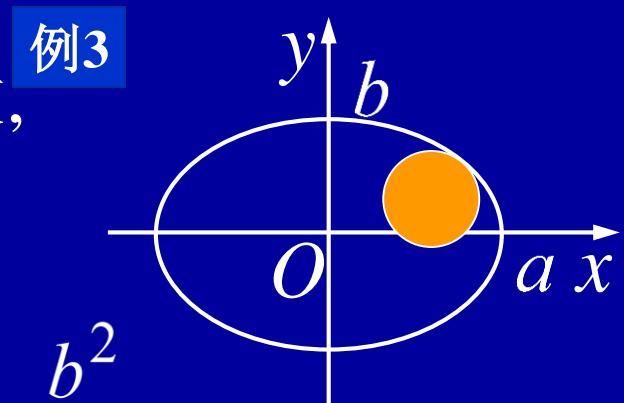
例4. 设一工件内表面的截痕为一椭圆, 现要用砂轮磨削其内表面, 问选择多大的砂轮比较合适?

解: 设椭圆方程为 $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad (0 \leq x \leq 2\pi, b \leq a)$

由例3可知, 椭圆在 $(\pm a, 0)$ 处曲率最大,
即曲率半径最小, 且为

$$R = \left. \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}{ab} \right|_{t=0} = \frac{b^2}{a}$$

显然, 砂轮半径不超过 $\frac{b^2}{a}$ 时, 才不会产生过量磨损,
或有的地方磨不到的问题.



例5. 求摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 的渐屈线方程. 摆线

$$\text{解: } y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}, \quad y'' = \frac{\frac{d}{dt}(y')}{\dot{x}} = \frac{-1}{a(1 - \cos t)^2}$$

代入曲率中心公式, 得渐屈线方程

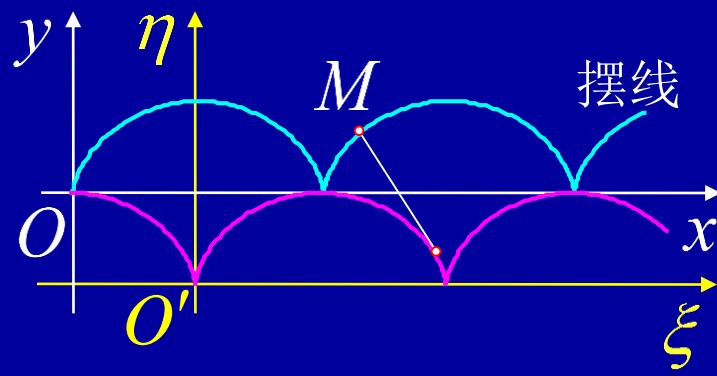
$$\begin{cases} \alpha = a(t + \sin t) \\ \beta = a(\cos t - 1) \end{cases}$$

↓

$$\left| \begin{array}{l} \text{令 } t = \pi + \tau, \begin{cases} \xi = \alpha - \pi a \\ \eta = \beta + 2a \end{cases} \\ \begin{cases} \xi = a(\tau - \sin \tau) \\ \eta = a(1 - \cos \tau) \end{cases} \end{array} \right.$$

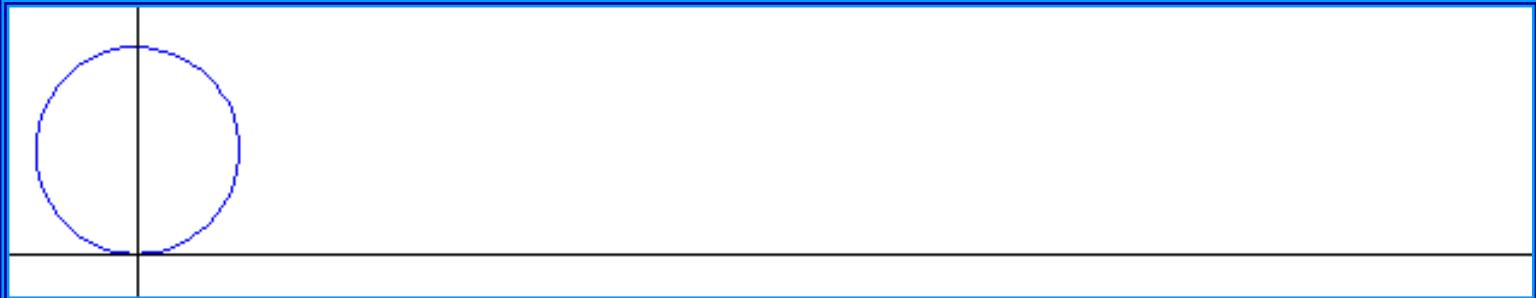
(仍为摆线)

$$\begin{cases} \alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} \\ \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''} \end{cases}$$



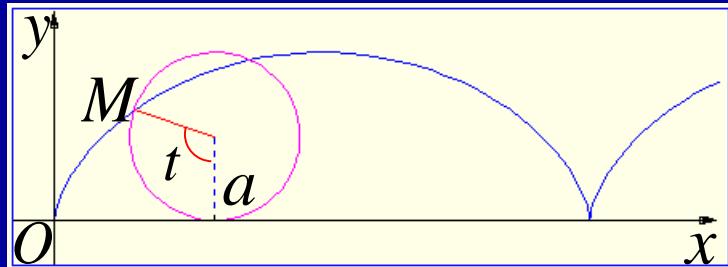
摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

半径为 a 的圆周沿直线无滑动地滚动时, 其上定点 M 的轨迹即为摆线.

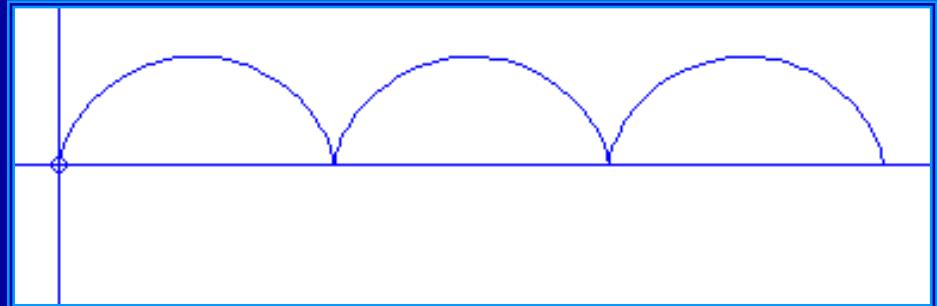


点击图中任意点动画开始或暂停

参数的几何意义



摆线的渐屈线



点击图中任意点动画开始或暂停



内容小结

1. 弧长微分 $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$ 或 $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$

2. 曲率公式 $K = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right| = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}$

3. 曲率圆

曲率半径 $R = \frac{1}{K} = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}$

曲率中心 $\begin{cases} \alpha = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''} \\ \beta = y + \frac{1 + y'^2}{y''} \end{cases}$



思考与练习

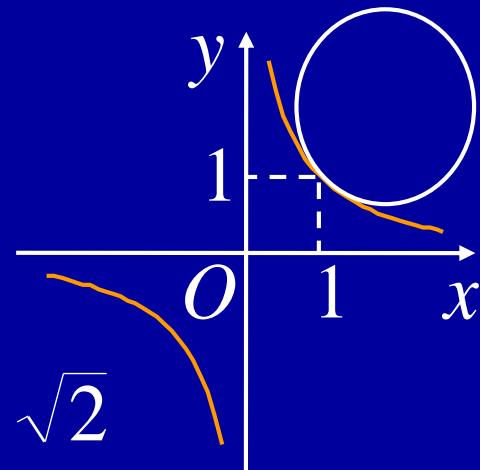
1. 曲线在一点处的曲率圆与曲线有何密切关系?

答: 有公切线; 凹向一致; 曲率相同.

2. 求双曲线 $xy=1$ 的曲率半径 R , 并分析何处 R 最小?

解: $y' = -\frac{1}{x^2}$, $y'' = \frac{2}{x^3}$, 则

$$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|} = \frac{(1+\frac{1}{x^4})^{3/2}}{\frac{2}{x^3}} = \frac{1}{2}(x^2 + \frac{1}{x^2})^{3/2} \geq \sqrt{2}$$



显然 $R|_{x=\pm 1} = \sqrt{2}$ 为最小值.

利用 $a^2 + b^2 \geq 2ab$

