

常系数非齐次线性微分方程

一、 $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 型

二、 $f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x$
 $+ \tilde{P}_n(x) \sin \omega x]$ 型



二阶常系数线性非齐次微分方程：

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (p, q \text{ 为常数}) \quad \textcircled{1}$$

根据解的结构定理，其通解为

$$y = Y + y^*$$

齐次方程通解 非齐次方程特解

求特解的方法 — 待定系数法

根据 $f(x)$ 的特殊形式，给出特解 y^* 的待定形式，
代入原方程比较两端表达式以确定待定系数。



一、 $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 型

λ 为实数, $P_m(x)$ 为 m 次多项式.

设特解为 $y^* = e^{\lambda x} Q(x)$, 其中 $Q(x)$ 为待定多项式,

$$y^{*'} = e^{\lambda x} [\lambda Q(x) + Q'(x)]$$

$$y^{*''} = e^{\lambda x} [\lambda^2 Q(x) + 2\lambda Q'(x) + Q''(x)]$$

代入原方程, 得

$$Q''(x) + (2\lambda + p)Q'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q(x) = P_m(x)$$

(1) 若 λ 不是特征方程的根, 即 $\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$, 则取 $Q(x)$ 为 m 次待定系数多项式 $Q_m(x)$, 从而得到特解形式为 $y^* = e^{\lambda x} Q_m(x)$.



$$Q''(x) + (2\lambda + p)Q'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q(x) = P_m(x)$$

(2) 若 λ 是特征方程的**单根**，即

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \quad 2\lambda + p \neq 0,$$

则 $Q'(x)$ 为 m 次多项式，故特解形式为 $y^* = xQ_m(x)e^{\lambda x}$

(3) 若 λ 是特征方程的**重根**，即

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \quad 2\lambda + p = 0,$$

则 $Q''(x)$ 是 m 次多项式，故特解形式为 $y^* = x^2Q_m(x)e^{\lambda x}$

小结 对方程①，当 λ 是特征方程的 k 重根 时，可设

$$\text{特解 } y^* = x^k Q_m(x)e^{\lambda x} \quad (k = 0, 1, 2)$$

此结论可推广到高阶常系数线性微分方程.



例1. 求方程 $y'' - 2y' - 3y = 3x + 1$ 的一个特解.

解: 本题 $\lambda = 0$, 而特征方程为 $r^2 - 2r - 3 = 0$,

$\lambda = 0$ 不是特征方程的根.

设所求特解为 $y^* = b_0x + b_1$, 代入方程:

$$-3b_0x - 3b_1 - 2b_0 = 3x + 1$$

比较系数, 得

$$\begin{cases} -3b_0 = 3 \\ -2b_0 - 3b_1 = 1 \end{cases} \longrightarrow b_0 = -1, b_1 = \frac{1}{3}$$

于是所求特解为 $y^* = -x + \frac{1}{3}$.



例2. 求方程 $y'' - 5y' + 6y = \underline{x}e^{2x}$ 的通解.

解: 本题 $\lambda = 2$, 特征方程为 $r^2 - 5r + 6 = 0$, 其根为

$$\underline{r_1 = 2}, \quad r_2 = 3$$

对应齐次方程的通解为 $Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

设非齐次方程特解为 $y^* = x(b_0 x + b_1)e^{2x}$

代入方程得 $-2b_0 x - b_1 + 2b_0 = x$

比较系数, 得 $\begin{cases} -2b_0 = 1 \\ 2b_0 - b_1 = 0 \end{cases} \implies b_0 = -\frac{1}{2}, b_1 = -1$

因此特解为 $y^* = x(-\frac{1}{2}x - 1)e^{2x}$.

所求通解为 $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - (\frac{1}{2}x^2 + x)e^{2x}$.



例3. 求解定解问题 $\begin{cases} y''' + 3y'' + 2y' = \underline{1} \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$

解: 本题 $\lambda = 0$, 特征方程为 $r^3 + 3r^2 + 2r = 0$, 其根为

$$\underline{r_1 = 0}, \quad r_2 = -1, \quad r_3 = -2$$

故对应齐次方程通解为 $Y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x}$

设非齐次方程特解为 $y^* = bx$, 代入方程得 $2b = 1$, 故 $y^* = \frac{1}{2}x$, 原方程通解为

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x} + \frac{1}{2}x$$

由初始条件得
$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0 \\ -C_2 - 2C_3 = -\frac{1}{2} \\ C_2 + 4C_3 = 0 \end{cases}$$



解得

$$\begin{cases} C_1 = -\frac{3}{4} \\ C_2 = 1 \\ C_3 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

于是所求解为

$$\begin{aligned} y &= -\frac{3}{4} + e^{-x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{2}x \\ &= \frac{1}{4}(-3 + 2x + 4e^{-x} - e^{-2x}) \end{aligned}$$



二、 $f(x) = e^{\alpha x} [P_l(x) \cos \beta x + P_n(x) \sin \beta x]$ 型

分析思路:

第一步 将 $f(x)$ 转化为

$$f(x) = P_m(x) e^{(\alpha + i\beta)x} + \overline{P_m(x) e^{(\alpha + i\beta)x}}$$

第二步 求出如下两个方程的特解

$$y'' + py' + qy = P_m(x) e^{(\alpha + i\beta)x}$$

$$y'' + py' + qy = \overline{P_m(x) e^{(\alpha + i\beta)x}}$$

第三步 利用叠加原理求出原方程的特解

第四步 分析原方程特解的特点



第一步 利用欧拉公式将 $f(x)$ 变形

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\alpha x} \left[P_l(x) \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} + P_n(x) \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i} \right] \\ &= \left[\frac{P_l(x)}{2} + \frac{P_n(x)}{2i} \right] e^{(\alpha+i\beta)x} \\ &\quad + \left[\frac{P_l(x)}{2} - \frac{P_n(x)}{2i} \right] e^{(\alpha-i\beta)x} \end{aligned}$$

令 $m = \max\{n, l\}$, 则

$$\begin{aligned} f(x) &= P_m(x) e^{(\alpha+i\beta)x} + \overline{P_m(x)} e^{(\alpha-i\beta)x} \\ &= P_m(x) e^{(\alpha+i\beta)x} + \overline{P_m(x) e^{(\alpha+i\beta)x}} \end{aligned}$$



第二步 求如下两方程的特解

$$y'' + p y' + q y = P_m(x) e^{(\alpha + i\beta)x} \quad (2)$$

$$y'' + p y' + q y = \overline{P_m(x) e^{(\alpha + i\beta)x}} \quad (3)$$

设 $\alpha + i\beta$ 是特征方程的 k 重根 ($k = 0, 1$), 则 (2) 有特解:

$$y_1^* = x^k Q_m(x) e^{(\alpha + i\beta)x} \quad (Q_m(x) \text{ 为 } m \text{ 次多项式})$$

故 $(y_1^*)'' + p (y_1^*)' + q y_1^* \equiv P_m(x) e^{(\alpha + i\beta)x}$

等式两边取共轭:

$$\overline{y_1^*}'' + p \overline{y_1^*}' + q \overline{y_1^*} \equiv \overline{P_m(x) e^{(\alpha + i\beta)x}}$$

这说明 $\overline{y_1^*}$ 为方程 (3) 的特解.



第三步 求原方程的特解

$$\begin{aligned}\text{原方程 } y'' + py' + qy &= e^{\alpha x} \left[P_l(x) \cos \beta x + P_n(x) \sin \beta x \right] \\ &= P_m(x) e^{(\alpha+i\beta)x} + \overline{P_m(x)} e^{(\alpha-i\beta)x}\end{aligned}$$

利用第二步的结果, 根据叠加原理, 原方程有特解:

$$\begin{aligned}y^* &= y_1^* + \overline{y_1^*} \\ &= x^k e^{\alpha x} \left[Q_m e^{i\beta x} + \overline{Q_m} e^{-i\beta x} \right] \\ &= x^k e^{\alpha x} \left[Q_m (\cos \beta x + i \sin \beta x) \right. \\ &\quad \left. + \overline{Q_m} (\cos \beta x - i \sin \beta x) \right] \\ &= x^k e^{\alpha x} \left[A_m(x) \cos \beta x + B_m(x) \sin \beta x \right]\end{aligned}$$

其中 A_m, B_m 均为 m 次多项式.



第四步 分析 y^* 的特点

$$\begin{aligned} y^* &= y_1^* + \overline{y_1^*} \\ &= x^k e^{\alpha x} [A_m \cos \beta x + B_m \sin \beta x] \end{aligned}$$

因

$$\begin{aligned} \overline{y^*} &= \overline{y_1^* + y_1^*} = \overline{y_1^*} + \overline{y_1^*} \\ &= \overline{y_1^*} + y_1^* \\ &= y^* \end{aligned}$$

所以 y^* 本质上为实函数，因此 A_m, B_m 均为 m 次实多项式。



小结:

对非齐次方程

$$y'' + py' + qy = e^{\alpha x} [P_l(x) \cos \beta x + P_n(x) \sin \beta x]$$

(p, q 为常数)

$\alpha + i\beta$ 为特征方程的 k 重根 ($k = 0, 1$), 则可设特解:

$$y^* = x^k e^{\alpha x} [A_m \cos \beta x + B_m \sin \beta x]$$

其中 $m = \max\{n, l\}$

上述结论也可推广到高阶方程的情形.



例4. 求方程 $y'' + y = x \cos 2x$ 的一个特解.

解: 本题 $\alpha = 0, \beta = 2, P_l(x) = x, P_n(x) = 0,$

特征方程 $r^2 + 1 = 0$

$\alpha \pm i\beta = \pm 2i$ 不是特征方程的根, 故设特解为

$$y^* = (ax + b)\cos 2x + (cx + d)\sin 2x$$

代入方程得

$$(\underline{-3ax - 3b + 4c})\cos 2x - (\underline{3cx + 3d + 4a})\sin 2x = \underline{x}\cos 2x$$

$$\text{比较系数, 得} \begin{cases} -3a = 1 \\ -3b + 4c = 0 \\ -3c = 0 \\ -3d + 4a = 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} a = -\frac{1}{3}, \\ d = \frac{4}{9} \\ b = c = 0 \end{cases}$$

于是求得一个特解 $y^* = -\frac{1}{3}x \cos 2x + \frac{4}{9} \sin 2x.$



例5. 求方程 $y'' + 9y = 18\cos 3x - 30\sin 3x$ 的通解.

解: 特征方程为 $r^2 + 9 = 0$, 其根为 $r_{1,2} = \pm 3i$

对应齐次方程的通解为 $Y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$
 $\pm 3i$ 为特征方程的单根, 因此设非齐次方程特解为

$$y^* = x(a \cos 3x + b \sin 3x)$$

代入方程: $\underline{6b \cos 3x} - \underline{6a \sin 3x} = \underline{18 \cos 3x} - \underline{30 \sin 3x}$

比较系数, 得 $a = 5, \quad b = 3,$

因此特解为 $y^* = x(5 \cos 3x + 3 \sin 3x)$

所求通解为

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + x(5 \cos 3x + 3 \sin 3x)$$



例6. 设下列高阶常系数线性非齐次方程的特解形式:

$$(1) \quad y^{(4)} + 2y'' + y = \sin x$$

$$(2) \quad y^{(4)} + y'' = \underline{x} + \underline{e^x} + \underline{3\sin x}$$

解: (1) 特征方程 $r^4 + 2r^2 + 1 = 0$, 即 $(r^2 + 1)^2 = 0$, 有二重根 $r = \pm i$, 所以设非齐次方程特解为

$$y^* = x^2(a \cos x + b \sin x)$$

(2) 特征方程 $r^4 + r^2 = 0$, 即 $r^2(r^2 + 1) = 0$ 有根

$$r_{1,2} = 0, \quad r_{3,4} = \pm i$$

利用叠加原理, 可设非齐次方程特解为

$$y^* = x^2(ax + b) + ce^x + x(d \cos x + k \sin x)$$



***例7.**第六节例1 中, 若设物体只受弹性恢复力 f 和铅直干扰力 $F = h \sin pt$ 的作用, 求物体的运动规律.

解: 问题归结为求解无阻尼强迫振动方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = h \sin pt \quad (4)$$

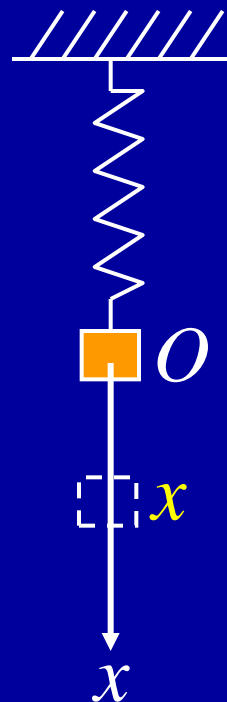
• 当 $p \neq k$ 时, 齐次通解:

$$X = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt = A \sin(kt + \varphi)$$

非齐次特解形式: $x^* = a \sin pt + b \cos pt$

$$\text{代入(4)可得: } a = \frac{h}{k^2 - p^2}, \quad b = 0$$

因此原方程(4)之解为



$$x = A \sin(k t + \varphi) + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin p t$$

自由振动

强迫振动

当干扰力的角频率 $p \approx$ 固有频率 k 时,

振幅 $\left| \frac{h}{k^2 - p^2} \right|$ 将很大!

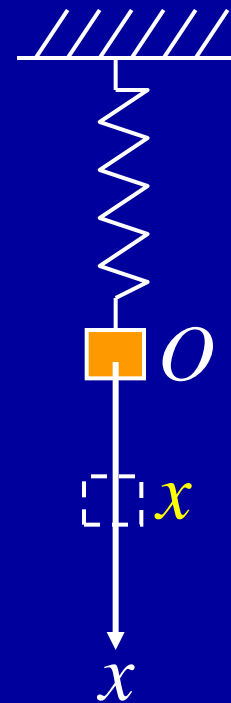
- 当 $p = k$ 时, 非齐次特解形式:

$$x^* = t(a \sin k t + b \cos k t)$$

代入④可得:

$$a = 0, \quad b = -\frac{h}{2k}$$

方程④的解为



$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = h \sin p t \quad (4)$$



$$x = A \sin(k t + \varphi) - \frac{h}{2k} t \cos k t$$

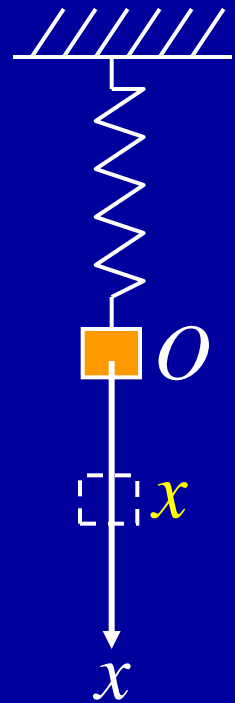
自由振动

强迫振动

随着 t 的增大, 强迫振动的振幅 $\frac{h}{2k} t$ 可无限增大, 这时产生共振现象.

若要避免共振现象, 应使 p 远离固有频率 k ;
若要利用共振现象, 应使 p 与 k 尽量靠近, 或使 $p = k$.

对机械来说, 共振可能引起破坏作用, 如桥梁被破坏, 电机机座被破坏等, 但对电磁振荡来说, 共振可能起有利作用, 如收音机的调频放大即是利用共振原理.



内容小结

1. $y'' + p y' + q y = P_m(x) e^{\lambda x}$

λ 为特征方程的 $k (=0, 1, 2)$ 重根, 则设特解为

$$y^* = x^k Q_m(x) e^{\lambda x}$$

2. $y'' + p y' + q y = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + \tilde{P}_n(x) \sin \omega x]$

$\lambda \pm i\omega$ 为特征方程的 $k (=0, 1)$ 重根, 则设特解为

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m(x) \cos \omega x + \tilde{R}_m(x) \sin \omega x]$$

$$m = \max \{ l, n \}$$

3. 上述结论也可推广到高阶方程的情形.



思考与练习

1. (填空) 设 $y'' + y = f(x)$

1) 当 $f(x) = x \cos x$ 时可设特解为

$$y^* = x[(ax + b)\cos x + (cx + d)\sin x]$$

2) 当 $f(x) = x \cos 2x + e^{2x}$ 时可设特解为

$$y^* = (ax + b)\cos 2x + (cx + d)\sin 2x + k e^{2x}$$

提示: $f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + \tilde{P}_n(x) \sin \omega x]$

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m(x) \cos \omega x + \tilde{R}_m(x) \sin \omega x]$$

$$m = \max\{n, l\}$$



2. 求微分方程 $y'' + 4y' + 4y = e^{\alpha x}$ 的通解 (其中 α 为实数).

解: 特征方程 $r^2 + 4r + 4 = 0$, 特征根: $r_1 = r_2 = -2$
对应齐次方程通解: $Y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$

$\alpha \neq -2$ 时, 令 $y^* = Ae^{\alpha x}$, 代入原方程得 $A = \frac{1}{(\alpha+2)^2}$,
故原方程通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x} + \frac{1}{(\alpha+2)^2} e^{\alpha x}$

$\alpha = -2$ 时, 令 $y^* = Bx^2 e^{\alpha x}$, 代入原方程得 $B = \frac{1}{2}$,
故原方程通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x} + \frac{1}{2} x^2 e^{\alpha x}$



3. 已知二阶常微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 有特解 $y = e^{-x}(1 + xe^{2x})$, 求微分方程的通解.

解: 将特解代入方程得恒等式

$$(1-a+b)e^{-x} + (2+a)e^x + (1+a+b)xe^x = ce^x$$

比较系数得
$$\begin{cases} 1-a+b=0 \\ 2+a=c \\ 1+a+b=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-1 \\ c=2 \end{cases}$$

故原方程为 $y'' - y = 2e^x$

对应齐次方程通解: $Y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

$$y = e^{-x} + xe^x$$

原方程通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + xe^x$

