第五节 空间曲线及其方程

一、空间曲线的一般方程

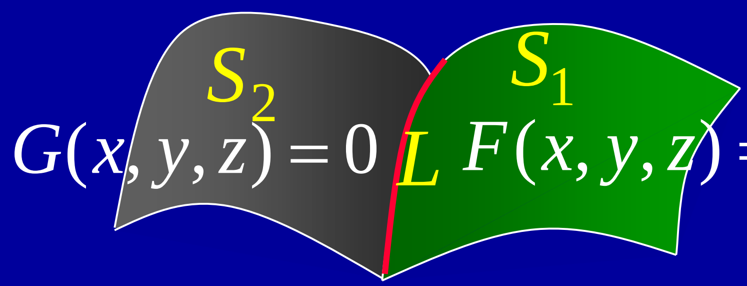
二、空间曲线的参数方程

三、空间曲线在坐标面上的投影

一、空间曲线的一般方程

空间曲线可视为两曲面的交线, 其一般方程为方程组

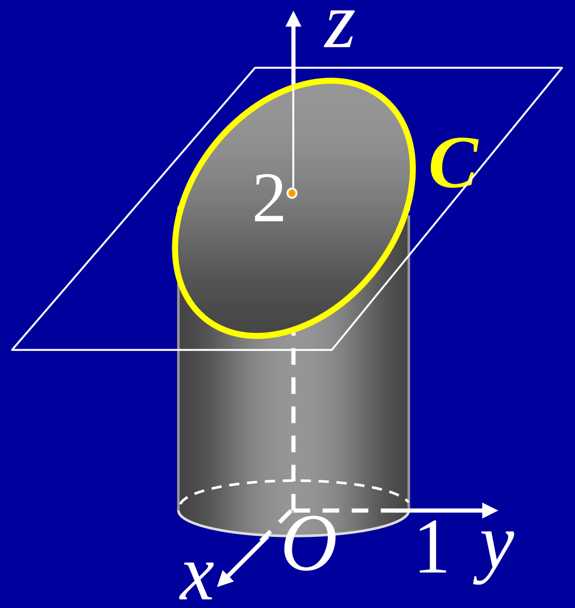
$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$



例如, 方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3z=6 \end{cases}$$

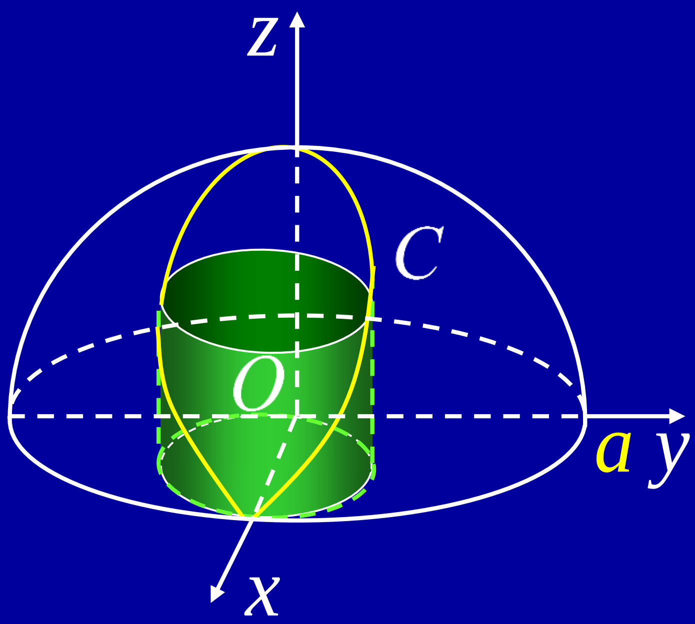
表示圆柱面与平面的交线 C.

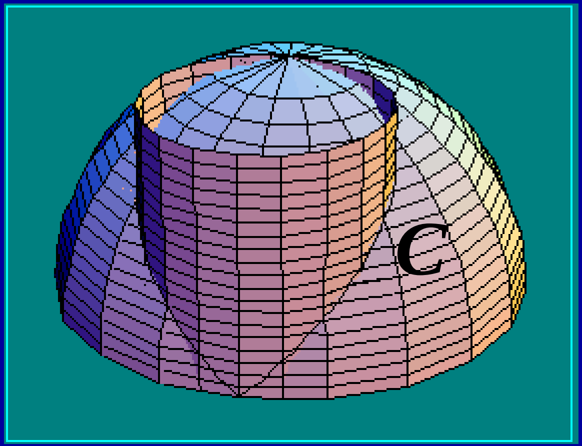


又如, 方程组

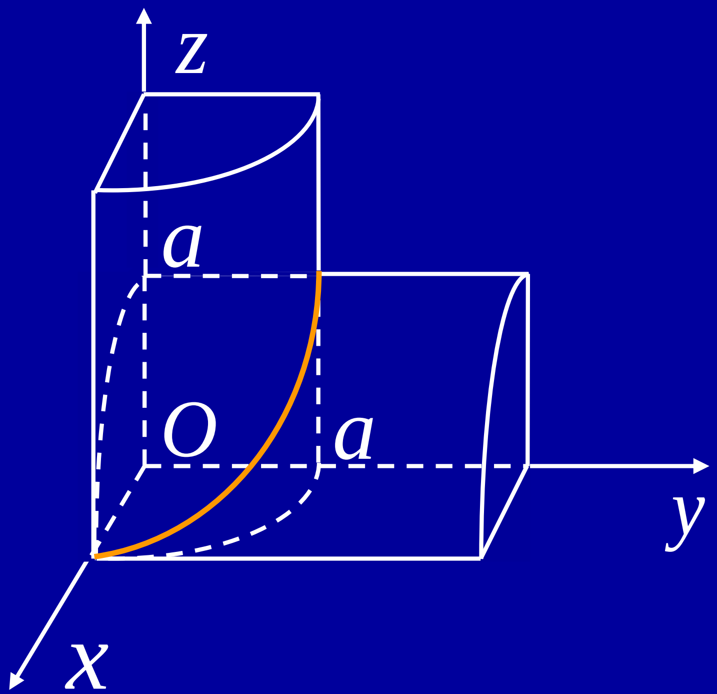
$$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 - ax = 0 \end{cases}$$

表示上半球面与圆柱面的交线C.





例2 $\begin{cases} x^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$



二、空间曲线的参数方程

将空间曲线*C*上的动点坐标 x, y, z表示成参数 t 的函数:

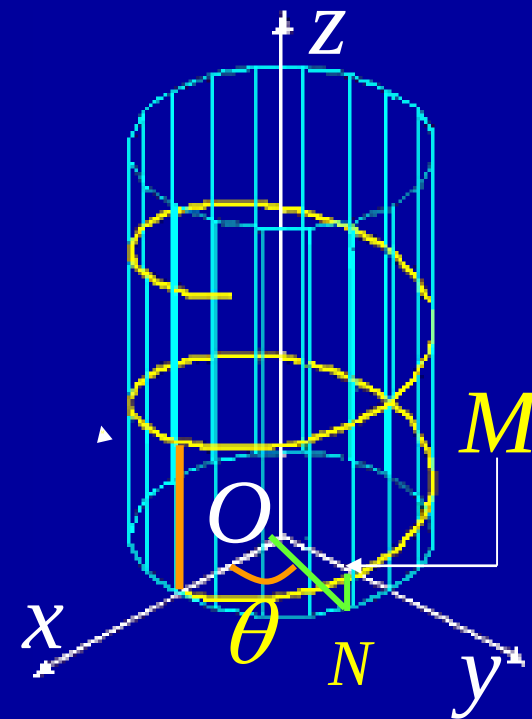
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad (2)$$

当给定 $t = t_1$ 时，就得到上的一个点 (x_1, y_1, z_1); 随着 t

的变动便可得曲线C上的全部点。

称方程组（2）为空间曲线的C参数方程.

例1 如果空间一点M在圆柱 $x^2+y^2=a^2$ 上以角速度 ω 绕 z 轴旋转，同时又以线速度v沿平行于Z轴的正方向上升，那么点M构成的图形叫螺旋线。试求其参数方程。



解得方程为：

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t \\ y = a\sin\omega t \\ z = vt \end{cases} \xrightarrow{\text{令}\theta=\omega t,\, b=\frac{v}{\omega}} \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = b\theta \end{cases}$$

当 $\theta = 2\pi$ 时，上升高度 $h = 2\pi b$，称为**螺距**．

例2. 将下列曲线化为参数方程表示:

$$(1)\ \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3z=6 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ x^2+y^2-ax=0 \end{cases}$$

解: (1) 根据第一方程引入参数 , 得所求为

$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=\frac{1}{3}(6-2\cos t) \end{cases} \qquad (0\le t\le 2\pi)$$

(2) 将第二方程变形为 $(x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4}$, 故所求为

$$\begin{cases} x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t \\ y=\frac{a}{2}\sin t \\ z=a\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos t} \end{cases} \qquad (0\le t\le 2\pi)$$

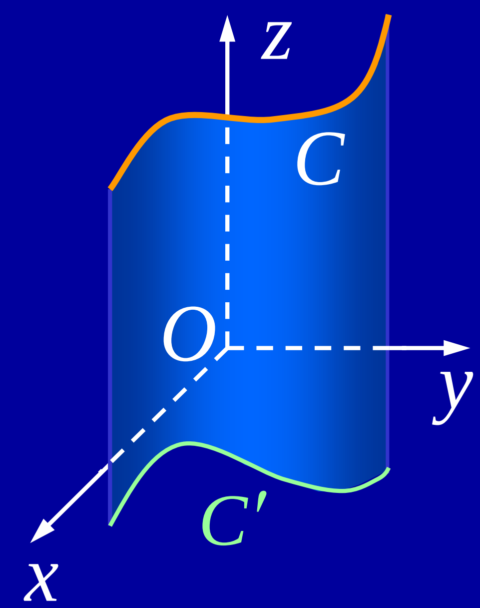
三、空间曲线在坐标面上的投影

设空间曲线C的一般方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

消去 z 得投影柱面方程 $H(x,y)=0,$

则方程 $\begin{cases} H(x,y)=0 \\ \quad z=0 \end{cases}$

包含C在xOy 面上的投影曲线 C'



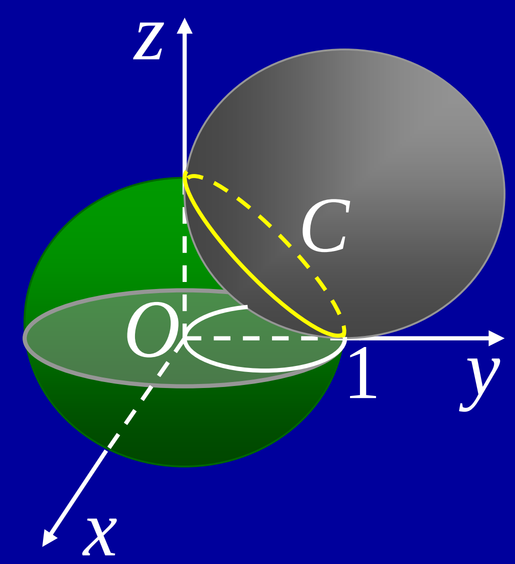
消去 x 得包含C 在yOz 面上的投影曲线

的方程 $\begin{cases} R(y,z)=0 \\ \quad x=0 \end{cases}$

消去y 得包含C在zOx 面上的投影曲线的方程$\begin{cases} T(x,z)=0 \\ \quad y=0 \end{cases}$

例如,

$$C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1 \end{cases}$$



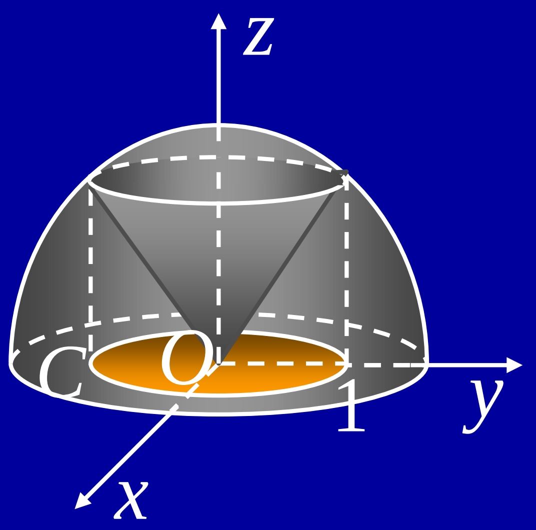
在xOy 面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} x^2+2y^2-2y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

又如,

上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围的立体在 xOy 面上的投影区域为: 二者交线在 xOy 面上的投影曲线所围之域.

二者交线 $C:\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)} \end{cases}$



在 xOy 面上的投影曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$

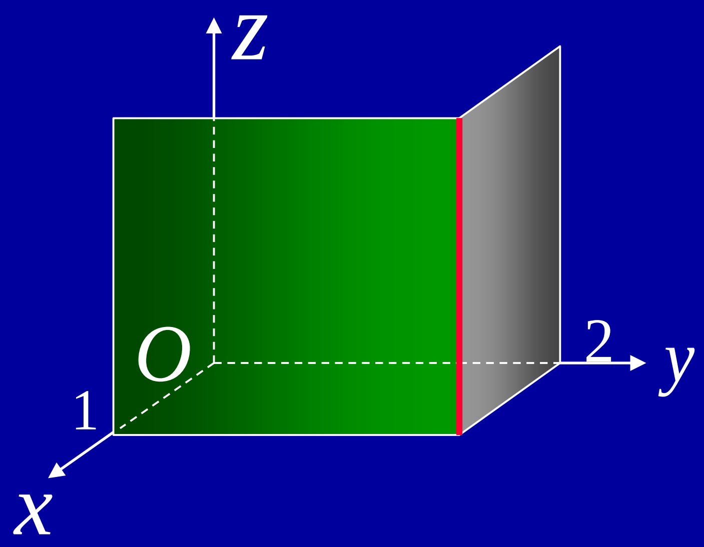
所围圆域: $x^2+y^2\le 1,\ z=0.$

内容小结

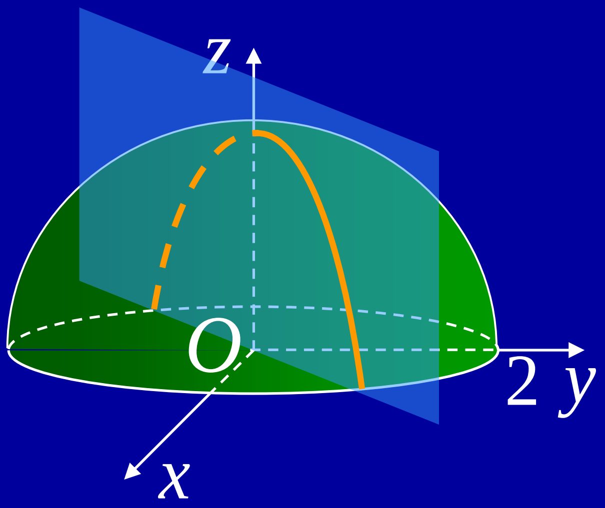
- 空间曲线 ⟷ 三元方程组
  或参数方程 (如, 圆柱螺线)
- 求投影曲线

思考与练习

$$(2)\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

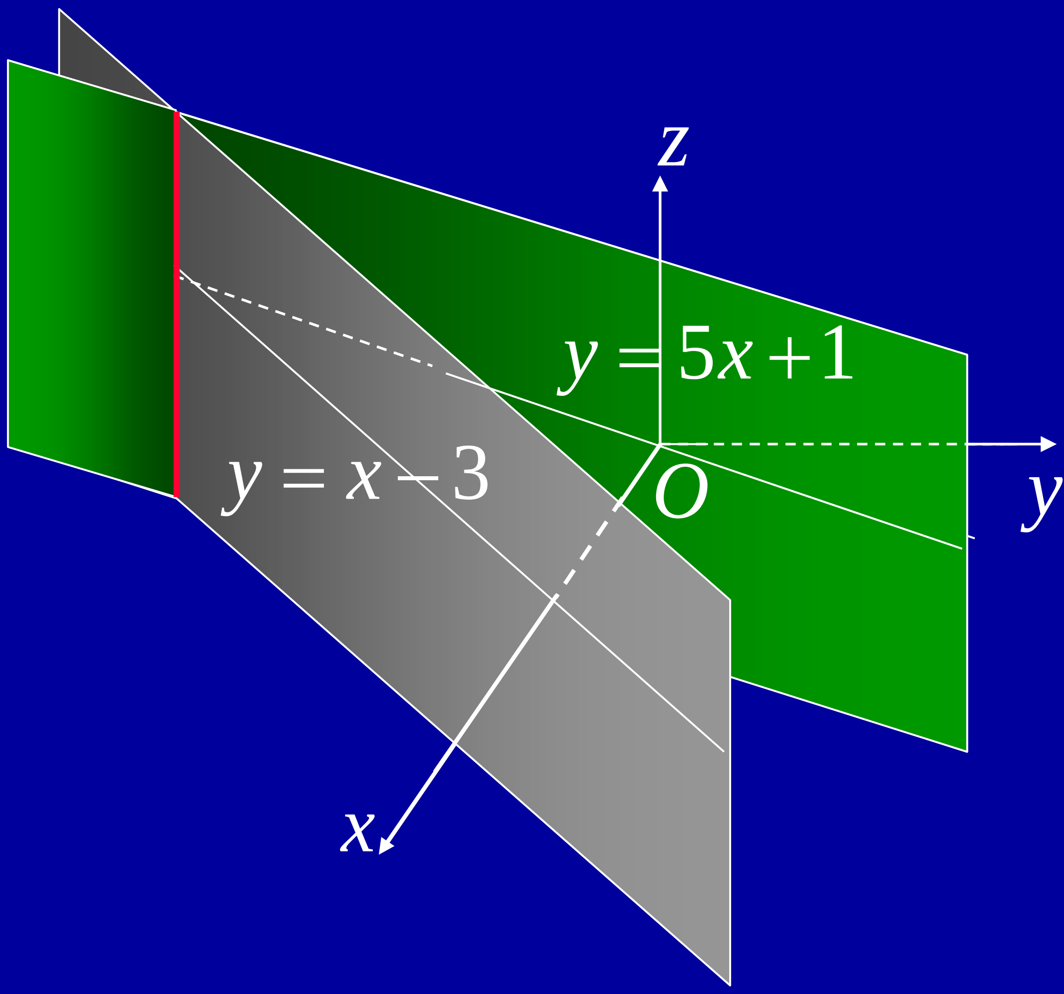


$$(4)\ \begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\ y - x = 0 \end{cases}$$



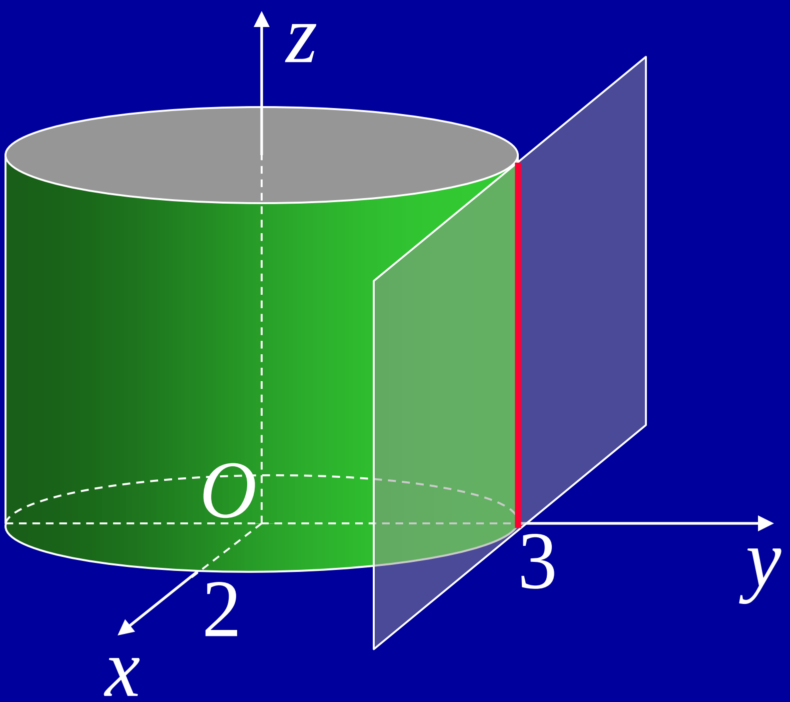
题2 (1)

$$\begin{cases} y = 5x + 1 \\ y = x - 3 \end{cases}$$



题2(2)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1 \\ y=3 \end{cases}$$

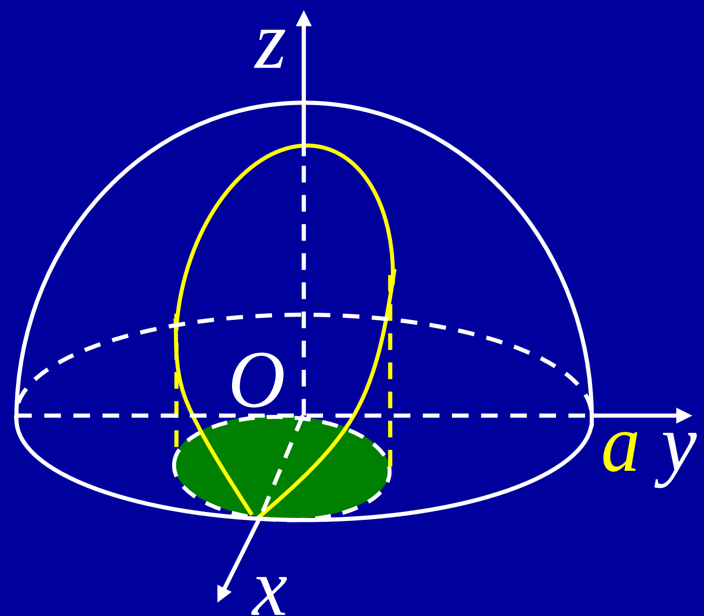


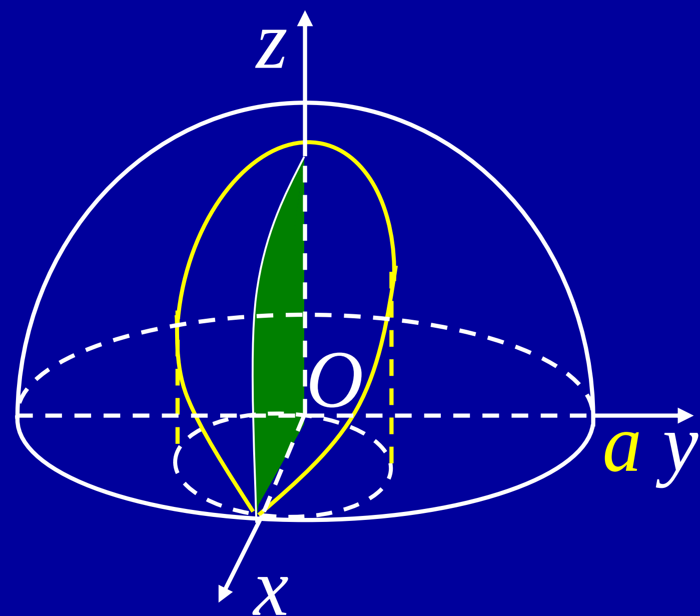
思考： 对平面 $y=b$

当 $|b|<3$ 时, 交线情况如何?

当 $|b|>3$ 时, 交线情况如何?

B组 题2





$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le ax \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + z^2 \le a^2 \quad (x \ge 0,\ z \ge 0) \\ y = 0 \end{cases}$$

备用题 求曲线 $\begin{cases} z = y^2 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转的曲面与平面 $x + y + z = 1$的交线在 xOy 平面的投影曲线方程.

解： $\because$ 旋转曲面方程为 $z = x^2 + y^2$,它与所给平面的

交线为

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

此曲线向 xOy 面的投影柱面方程为

$$x + y + x^2 + y^2 = 1$$

此曲线在 xOy 面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$