第四节

对面积的曲面积分

一、对面积的曲面积分的概念与性质

二、对面积的曲面积分的计算法

一、对面积的曲面积分的概念与性质

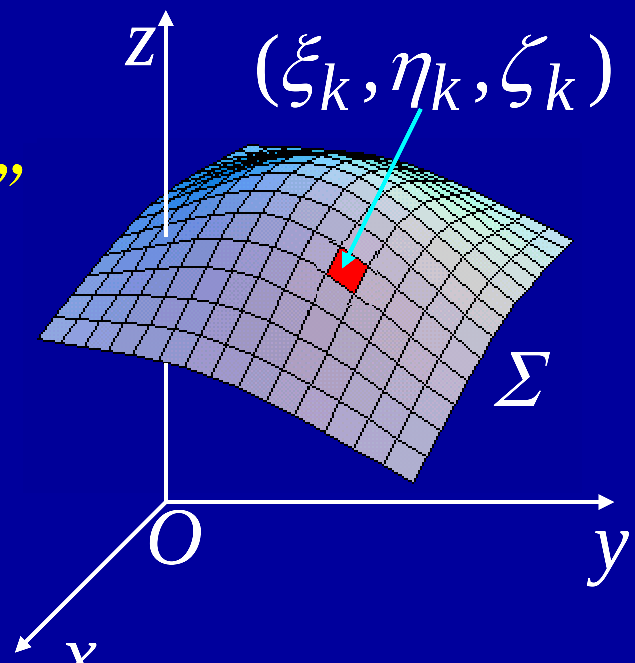
引例: 设曲面形构件具有连续面密度 $\rho(x,y,z)$, 求质量 M.

类似求平面薄板质量的思想, 采用

“大化小, 常代变, 近似和, 求极限”

的方法, 可得

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k$$



其中, λ 表示 n 小块曲面的直径的最大值 (曲面的直径为其上任意两点间距离的最大者).

定义: 设 Σ 为光滑曲面, $f(x,y,z)$ 是定义在 Σ 上的一个有界函数, 若对 Σ 做任意分割和局部区域任意取点, "乘积和式极限"

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k \xlongequal{\text{记作}} \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

都存在, 则称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在曲面 Σ 上对面积的曲面积分或第一类曲面积分. 其中 $f(x,y,z)$ 叫做被积函数, Σ 叫做积分曲面.

据此定义, 曲面形构件的质量为 $M=\iint_{\Sigma}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S$

曲面面积为 $S=\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S$

对面积的曲面积分与对弧长的曲线积分性质类似.

- 积分的存在性. 若 $f(x,y,z)$ 在光滑曲面 Σ 上连续, 则对面积的曲面积分存在.
- 对积分域的可加性. 若 Σ 是分片光滑的, 例如分成两片光滑曲面 Σ_1, Σ_2, 则有

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

- 线性性质. 设 k_1, k_2 为常数, 则

$$\iint_{\Sigma} [k_1 f(x,y,z) \pm k_2 g(x,y,z)]\,\mathrm{d}S = k_1 \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S \pm k_2 \iint_{\Sigma} g(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

二、对面积的曲面积分的计算法

定理: 设有光滑曲面

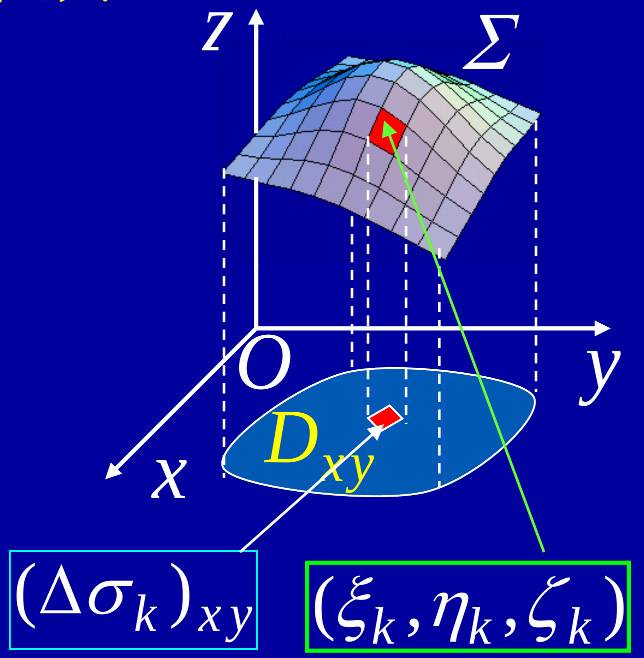
$$\Sigma : z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$$

$f(x, y, z)$ 在 Σ 上连续, 则曲面积分

$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$ 存在, 且有

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^{\ 2}(x,y)+z_y^{\ 2}(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



证明: 由定义知

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta S_k$$

而 $\Delta S_k = \iint_{(\Delta\sigma_k)_{xy}} \sqrt{1+z_x{}^2(x,y)+z_y{}^2(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\,y$

$$= \sqrt{1+z_x{}^2(\xi_k',\eta_k')+z_y{}^2(\xi_k',\eta_k')}\,(\Delta\sigma_k)_{xy}$$

$$\therefore \iint_\Sigma f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,z(\underline{\xi_k,\eta_k}))\cdot \sqrt{1+z_x{}^2(\underline{\xi_k',\eta_k'})+z_y{}^2(\underline{\xi_k',\eta_k'})}\,(\Delta\sigma_k)_{xy}$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,z(\xi_k,\eta_k))\cdot \sqrt{1+z_x{}^2(\xi_k,\eta_k)+z_y{}^2(\xi_k,\eta_k)}\,(\Delta\sigma_k)_{xy}$$

(Σ光滑)

$$= \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x{}^2(x,y)+z_y{}^2(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

说明:

1) 如果曲面方程为

$$x = x(y,z),\ (y,z) \in D_{yz}$$

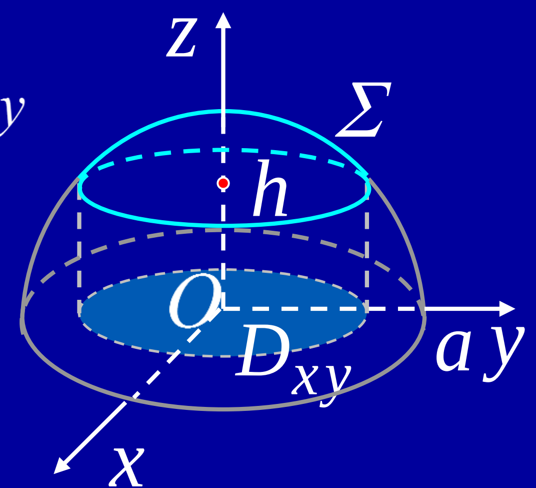
或 $$y = y(x,z),\ (x,z) \in D_{xz}$$

可有类似的公式.

2) 若曲面为参数方程, 只要求出在参数意义下$\mathrm{d}S$的表达式 , 也可将对面积的曲面积分转化为对参数的二重积分. (见本节后面的例4, 例5)

例1. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}S}{z}$, 其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h\ (0<h<a)$ 截出的顶部.

解: $\Sigma: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,,\ (x,y)\in D_{xy}$



$$D_{xy}: x^2+y^2 \le a^2-h^2$$

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$\therefore \iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}=\iint_{D_{xy}}\frac{a\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{a^2-x^2-y^2}=a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{r\,\mathrm{d}r}{a^2-r^2}$$

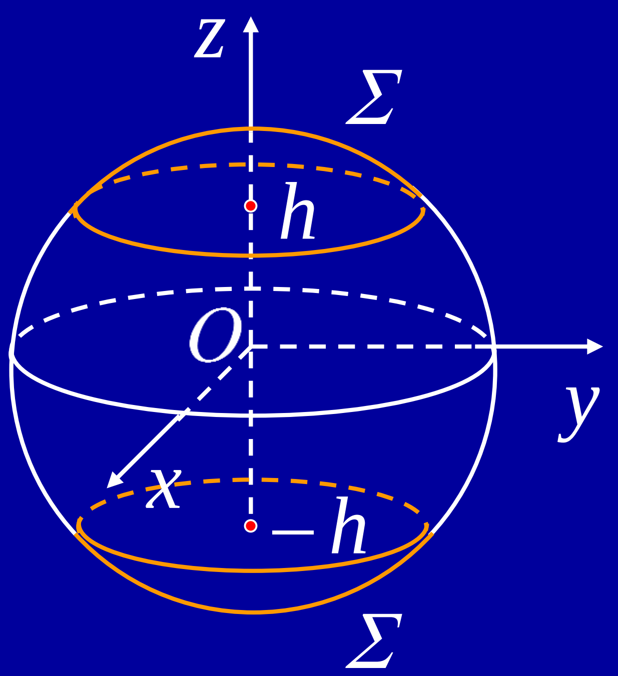
$$=2\pi a\left[-\frac{1}{2}\ln(a^2-r^2)\right]_0^{\sqrt{a^2-h^2}}=2\pi a\ln\frac{a}{h}$$

思考:

若 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平行平面 $z=\pm h$ 截出的上下两部分, 则

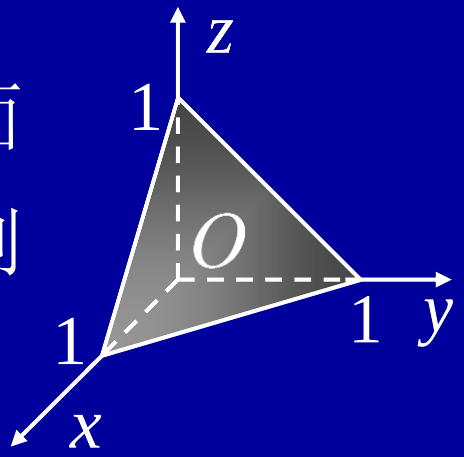
$$\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}=(\quad 0 \quad)$$

$$\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{|z|}=(\quad 4\pi a\ln\frac{a}{h}\quad)$$



例2. 计算 $\iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是由平面 $x+y+z=1$ 与坐标面所围成的四面体的表面.

解: 设 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ 分别表示 Σ 在平面 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ 上的部分, 则



$$\text{原式} = \left(\iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_2} + \iint_{\Sigma_3} + \iint_{\Sigma_4}\right) xyz\,\mathrm{d}S$$

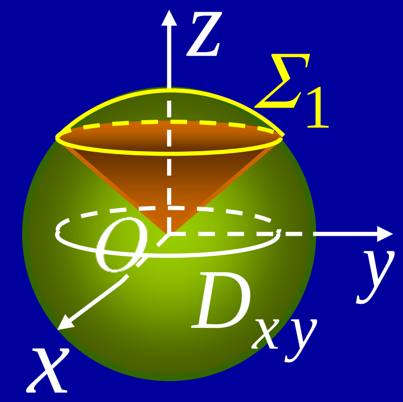
$$= \iint_{\Sigma_4} xyz\,\mathrm{d}S$$

$$\Sigma_4 : z = 1-x-y,\quad (x,y) \in D_{xy} : \begin{cases} 0 \le y \le 1-x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 x\,\mathrm{d}x \int_0^{1-x} y(1-x-y)\,\mathrm{d}y = \sqrt{3}\big/120$$

例3. 设 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2$

$$f(x,y,z)=\begin{cases} x^2+y^2, & \text{当} z\ge\sqrt{x^2+y^2} \\ 0, & \text{当} z<\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$



计算 $I=\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$.

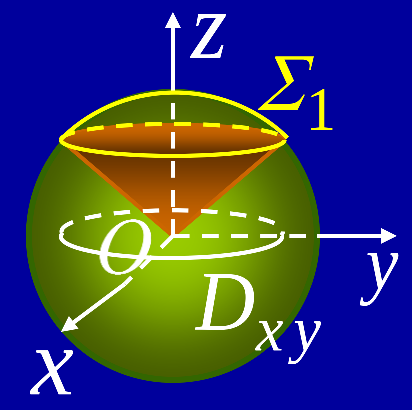
解: 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的交线为 $x^2+y^2=\frac{1}{2}a^2,\ z=\frac{1}{\sqrt{2}}a.$

设 Σ_1 为上半球面夹于锥面间的部分,它在 xOy 面上的投影域为 $D_{xy}=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\le\frac{1}{2}a^2\right\}$, 则

$$I=\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$$

$$I=\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}\,a}\frac{a\,r^2}{\sqrt{a^2-r^2}}\,r\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{6}\pi a^4(8-5\sqrt{2})$$

思考: 若例3 中被积函数改为

$$f(x,y,z)=\begin{cases}x^2+y^2, & 当\,|z|\ge\sqrt{x^2+y^2}\\ 0, & 当\,|z|<\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$$

计算结果如何？

例4. 求半径为R 的均匀半球壳 Σ 的形心.

解: 设 Σ 的方程为 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}, (x,y)\in D_{xy}$

利用对称性可知重心的坐标 $\bar{x}=\bar{y}=0$,而

$$\bar{z}=\frac{\iint_\Sigma z\,\mathrm{d}S}{\iint_\Sigma \mathrm{d}S}$$

用球面坐标

$z=R\cos\varphi$

$\mathrm{d}S=R^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$

$$=\frac{R^3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{R\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi}=\frac{\pi R^3}{2\pi R^2}=\frac{R}{2}$$

思考题: 例 3 是否可用球面坐标计算 ?

回顾： 计算半径为 a 的球的表面积.

解：方法1 利用球坐标方程.

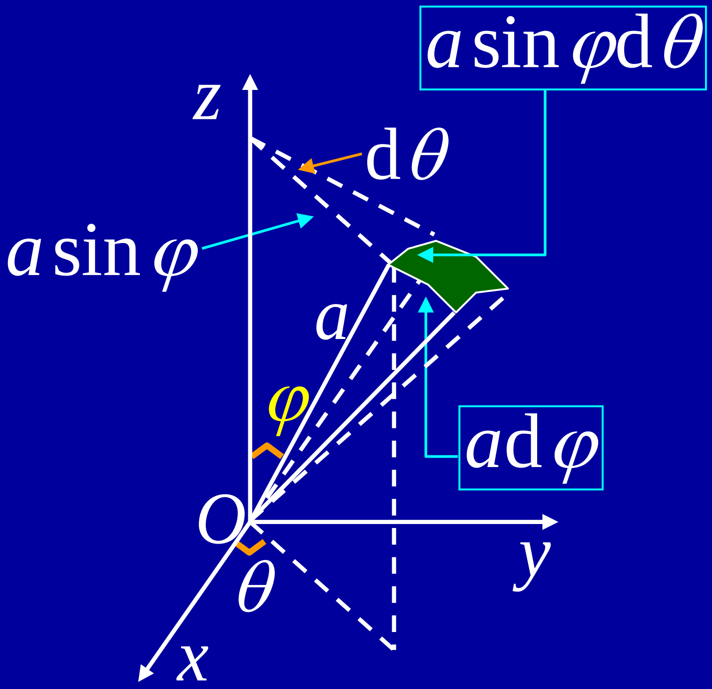
设球面方程为 $r=a$

球面面积元素为

$$\mathrm{d}A = a^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\theta$$

$$\therefore \quad A = a^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi$$

$$= 4\pi a^2$$



方法2 利用直角坐标方程. (略)

例5. 计算$I=\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{\lambda-z}\ (\lambda>R)$, $\Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2$.

解: 取球面坐标系, 则 $z=R\cos\varphi$,

$$\mathrm{d}S=R^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\frac{R^2\sin\varphi}{\lambda-R\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi$$

$$=2\pi R\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}(\lambda-R\cos\varphi)}{\lambda-R\cos\varphi}$$

$$=2\pi R\ln\frac{\lambda+R}{\lambda-R}$$

例6. 计算 $I=\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=2(x+y+z)$.

解: 显然球心为(1,1,1), 半径为$\sqrt{3}$

利用对称性可知 $\oiint_{\Sigma}x^2\,\mathrm{d}S=\oiint_{\Sigma}y^2\,\mathrm{d}S=\oiint_{\Sigma}z^2\,\mathrm{d}S$

$$\therefore\quad I=\frac{2}{3}\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S=\frac{4}{3}\oiint_{\Sigma}(x+y+z)\,\mathrm{d}S$$

$$\oiint_{\Sigma}x\,\mathrm{d}S=\oiint_{\Sigma}y\,\mathrm{d}S=\oiint_{\Sigma}z\,\mathrm{d}S$$

$$=4\oiint_{\Sigma}x\,\mathrm{d}S=4\cdot\bar{x}\cdot\oiint_{\Sigma}\mathrm{d}S$$

$$=4\cdot1\cdot4\pi(\sqrt{3})^2=48\pi$$

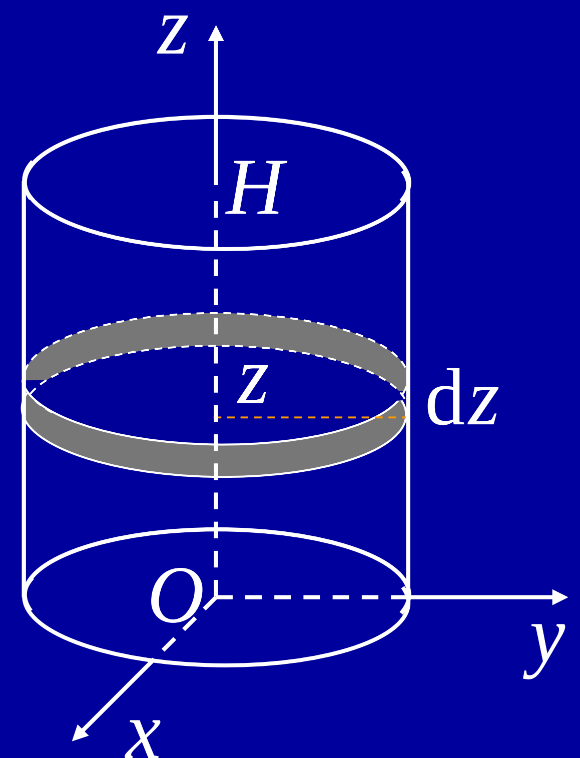
利用形心公式

$$\bar{x}=\oiint_{\Sigma}x\,\mathrm{d}S\Big/\oiint_{\Sigma}\mathrm{d}S$$

HIGHER EDUCATION PRESS

例7. 计算 $I=\iint_{\Sigma}\dfrac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}$, 其中 Σ 是介于平面 $z=0, z=H$ 之间的圆柱面 $x^2+y^2=R^2$.

分析: 若将曲面分为前后(或左右)两片, 则计算较繁.



解: 取曲面面积元素

$$\mathrm{d}S=2\pi R\mathrm{d}z$$

则

$$I=\int_0^H\frac{2\pi R\,\mathrm{d}z}{R^2+z^2}$$

$$=2\pi\arctan\frac{H}{R}$$

例8. 求椭圆柱面 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 位于 xOy 面上方及平面 $z=y$ 下方那部分柱面 Σ 的侧面积 S.

解: $S=\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S$

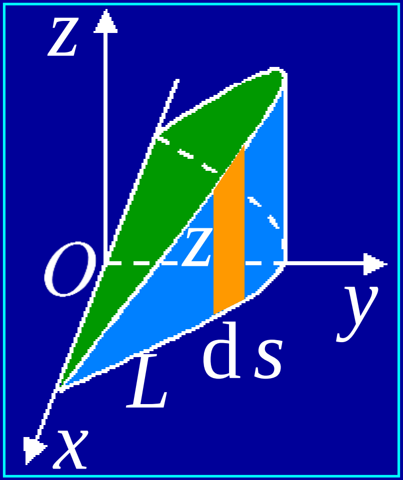
$L: x=\sqrt{5}\cos t\,,\ y=3\sin t\ \ (0\le t\le \pi)$

取 $\mathrm{d}S=z\,\mathrm{d}s$

$$=\int_L z\,\mathrm{d}s=\int_L y\,\mathrm{d}s$$

$$=\int_0^{\pi}3\sin t\sqrt{5\sin^2 t+9\cos^2 t}\ \mathrm{d}t$$

$$=-3\int_0^{\pi}\sqrt{5+4\cos^2 t}\,\mathrm{d}\cos t=9+\frac{15}{4}\ln 5$$



例9. 设有一颗地球同步轨道通讯卫星, 距地面高度 $h = 36000$ km, 运行的角速度与地球自转角速度相同, 试计算该通讯卫星的覆盖面积与地球表面积的比. (地球半径 $R = 6400$ km)

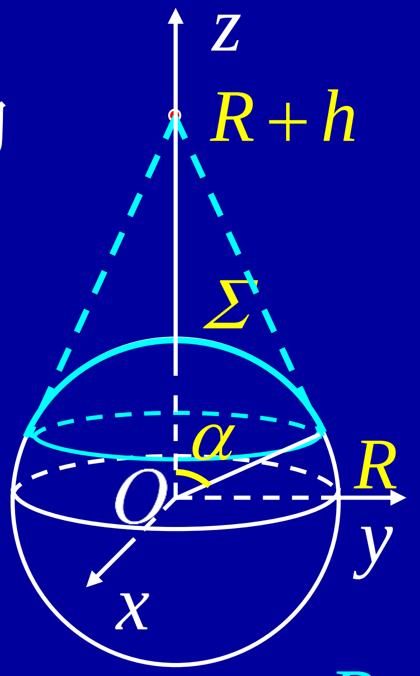
解: 建立坐标系如图, 记覆盖曲面Σ的半顶角为α, 利用球面坐标系, 则

$$\mathrm{d}S = R^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\theta$$

卫星覆盖面积为

$$A = \iint_\Sigma \mathrm{d}S = R^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^\alpha \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi$$

$$= 2\pi R^2 (1 - \cos\alpha) = 2\pi R^2 \frac{h}{R+h}$$

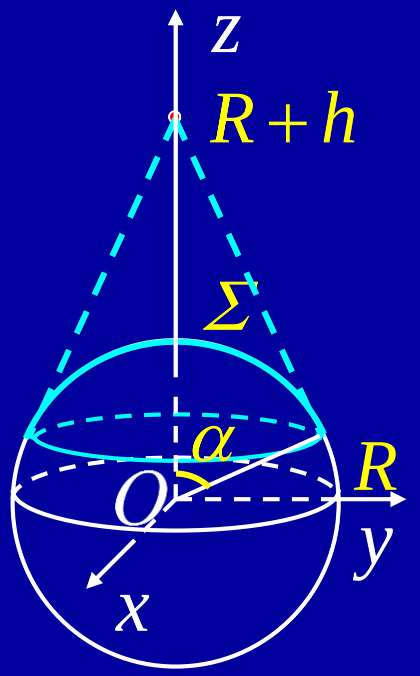


$$\cos\alpha = \frac{R}{R+h}$$

故通讯卫星的覆盖面积与地球表面积的比为

$$\frac{A}{4\pi R^2} = \frac{h}{2(R+h)}$$

$$= \frac{36\cdot 10^6}{2(36+6.4)\cdot 10^6} \approx 40.5\,\%$$



由以上结果可知, 卫星覆盖了地球 $1/3$ 以上的面积, 故使用三颗相隔 $2\pi/3$ 角度的通讯卫星就几乎可以覆盖地球全表面.

说明: 此题也可用二重积分求 A .

内容小结

1. 定义: $\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$

2. 计算: 设 $\Sigma: z = z(x,y), (x,y)\in D_{xy}$, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$
$$= \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(曲面的其他两种情况类似)

- 注意利用球面坐标、柱面坐标、对称性、质心公式简化计算的技巧.

思考与练习

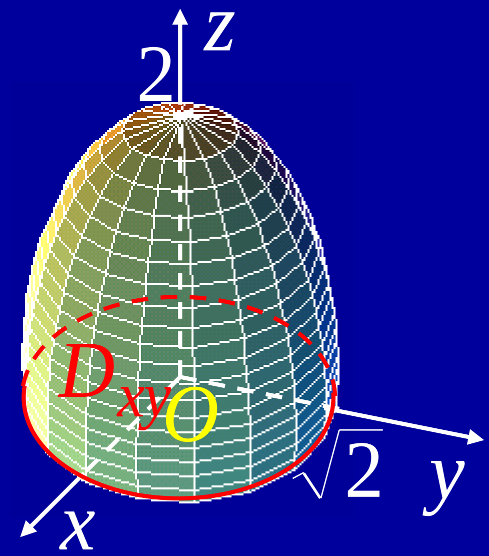
解答提示:

题1. $$I_x = \iint_{\Sigma} (y^2 + z^2)\mu(x, y, z)\,\mathrm{d}S$$

题2. 设 $\Sigma : z = 0\,,\,(x, y) \in D_{xy}\,,$ 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} f(x, y, 0)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

题3 . $\Sigma : z = 2-(x^2+y^2)$



Σ在 xOy 面上的投影域为

$$D_{xy}: x^2+y^2 \le 2$$

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\therefore \iint_S \mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}} r\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{13}{3}\pi$$

这是 Σ的面积 !

题4. 如图所示, 有

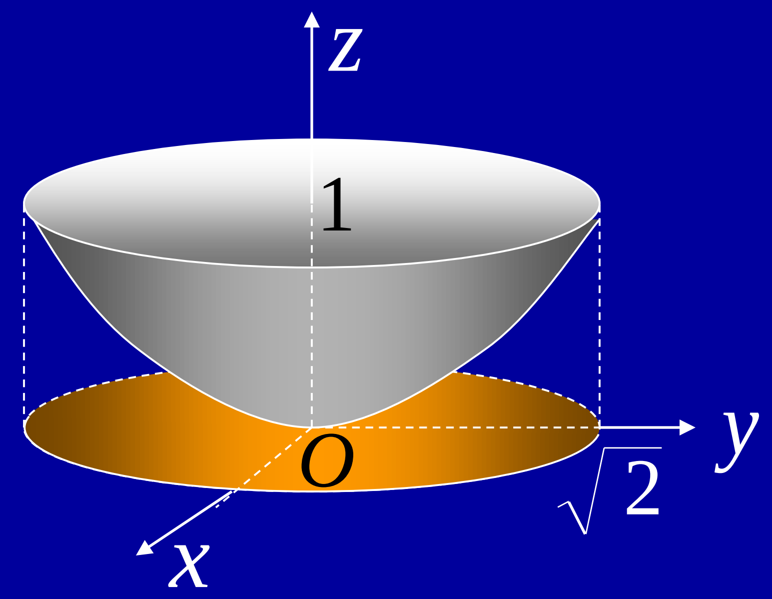
$$\iint_{\Sigma} z\,\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}} r^3\sqrt{1+r^2}\,\mathrm{d}r$$

令 $t=\sqrt{1+r^2}$

$$= \pi\int_0^{\sqrt{3}}(t^2-1)t^2\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{4\pi}{5}\sqrt{3}$$



题5. $\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\geq 0)$, Σ_1为Σ在第一卦限中的部分, 则有(C).

$(A)\quad \iint_{\Sigma} x\mathrm{d}S = 4\iint_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S;$

$(B)\quad \iint_{\Sigma} y\mathrm{d}S = 4\iint_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S;$

$(C)\quad \iint_{\Sigma} z\mathrm{d}S = 4\iint_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S;$

$(D)\quad \iint_{\Sigma} xyz\mathrm{d}S = 4\iint_{\Sigma_1} xyz\mathrm{d}S.$

备用题 1. 已知曲面壳 $z = 3-(x^2+y^2)$ 的面密度 $\mu = x^2+y^2+z$, 求此曲面壳在平面 z =1以上部分Σ的质量 M .

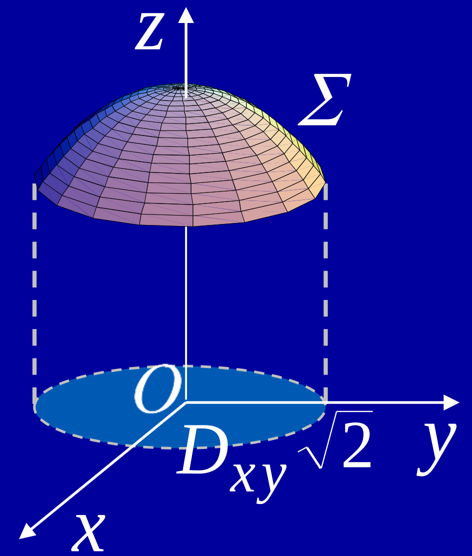
解: Σ在 xOy 面上的投影为 $D_{xy}: x^2+y^2 \le 2$, 故

$$M = \iint_\Sigma \mu \,\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} 3\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

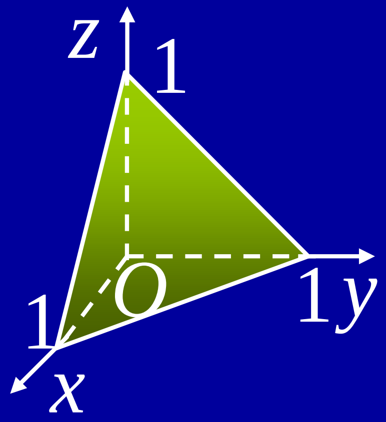
$$= 3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}} r\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r$$

$$= 6\pi\cdot\frac{1}{8}\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}(1+4r^2)$$

$$= 13\pi$$



2. 设 Σ 是四面体 $x+y+z\le 1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$ 的表面, 计算 $I=\oiint_{\Sigma}\frac{1}{(1+x+y)^2}\,\mathrm{d}S.$



解: 在四面体的四个面上

平面方程	$\mathrm{d}S$	投影域
$z=1-x-y$	$\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	$D_{xy}:0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x$
$z=0$	$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	同上
$y=0$	$\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$	$D_{zx}:0\le z\le 1, 0\le x\le 1-z$
$x=0$	$\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$	$D_{yz}:0\le z\le 1, 0\le y\le 1-z$

$$\therefore\ I=\oiint_{\Sigma}\frac{1}{(1+x+y)^2}\,\mathrm{d}S$$

$$=(\sqrt{3}+1)\int_0^1\mathrm{d}\,x\int_0^{1-x}\frac{1}{(1+x+y)^2}\,\mathrm{d}\,y+$$

$$+\int_0^1\mathrm{d}\,z\int_0^{1-z}\frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x+\int_0^1\mathrm{d}\,z\int_0^{1-z}\frac{1}{(1+y)^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\ln 2$$

平面方程	$\mathrm{d}S$	投影域
$z=1-x-y$	$\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	$D_{xy}:0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x$
$z=0$	$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	同上
$y=0$	$\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$	$D_{zx}:0\le z\le 1,\ 0\le x\le 1-z$
$x=0$	$\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$	$D_{yz}:0\le z\le 1,\ 0\le y\le 1-z$