第八章 多元函数微分法 及其应用

一元函数微分学

推广

多元函数微分学

注意: 善于类比, 区别异同

第一节 多元函数的基本概念

一、区域

二、多元函数的概念

三、多元函数的极限

四、多元函数的连续性

一、 区域

1. 邻域

点集 $U(P_0,\delta)=\{P\,|\,|PP_0|<\delta\}$, 称为点 P_0 的**δ 邻域**.

例如, 在平面上,

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y)\,|\,\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$ (圆邻域)

在空间中,

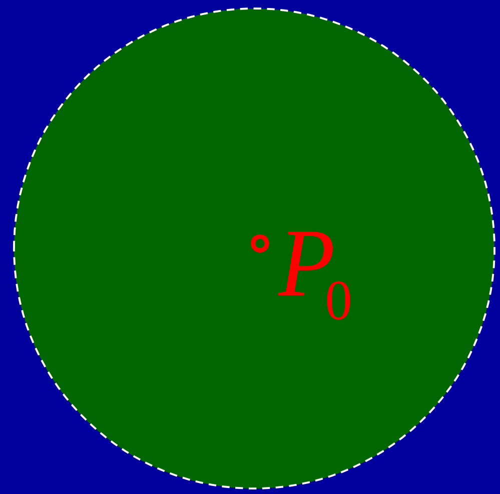
$$U(P_0,\delta)=\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta\}$$

(球邻域)

说明： 若不需要强调邻域半径δ , 也可写成 $U(P_0)$.

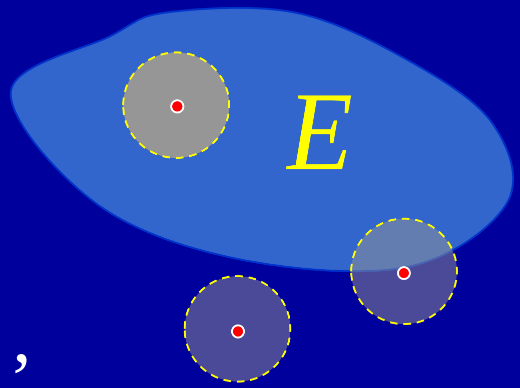
点 P_0 的**去心邻域**记为 $\overset{\circ}{U}(P_0)=\{P\,|\,0<|PP_0|<\delta\}$

$$U(P_0,\delta)=\left\{(x,y)\,\middle|\,\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$$



平面上的圆邻域

2. 区域



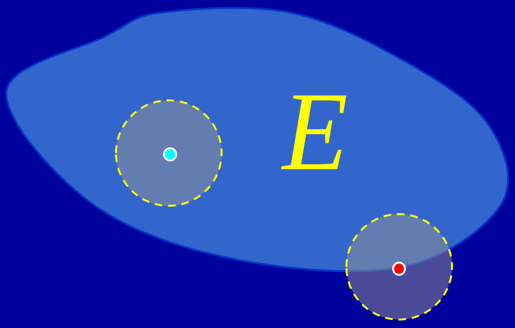
(1) 内点、外点、边界点

设有点集 E 及一点 P :

- 若存在点 P 的某邻域 $U(P)\subset E$,
  则称 P 为 E 的**内点**;
- 若存在点 P 的某邻域 $U(P)\cap E=\varnothing$,
  则称 P 为 E 的**外点** ;
- 若对点 P 的任一邻域 $U(P)$ 既含 E中的内点也含 E 的外点 , 则称 P 为 E 的**边界点** .

显然, E 的内点必属于 E , E 的外点必不属于 E , E 的边界点可能属于 E, 也可能不属于 E .

(2) **聚点**



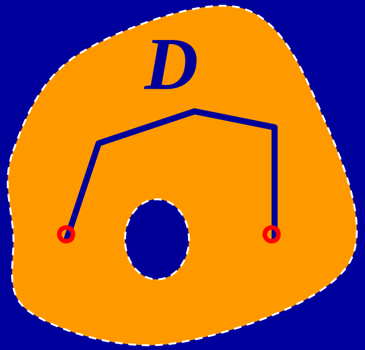
若对任意给定的δ，点P 的去心邻域 $\overset{\circ}{U}(P,\delta)$ 内总有E 中的点，则称 P 是 E 的**聚点**.

聚点可以属于 E，也可以不属于 E (因为聚点可以为 E 的边界点)

所有聚点所成的点集成为 E 的**导集** .

(3) 开区域及闭区域

- 若点集 E 的点都是内点，则称 E 为开集；
- E 的边界点的全体称为 E 的边界, 记作∂E ;
- 若点集 $E \supset \partial E$, 则称 E 为闭集；
- 若集 D 中任意两点都可用一完全属于 D 的折线相连 , 则称 D 是连通的 ;
- 连通的开集称为开区域



- 开区域连同它的边界一起称为闭区域.
- 开区域、闭区域，或开区域连同其部分边界构成的点集统称区域.

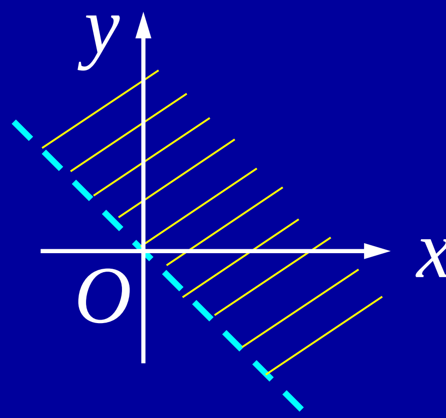
例如， 在平面上

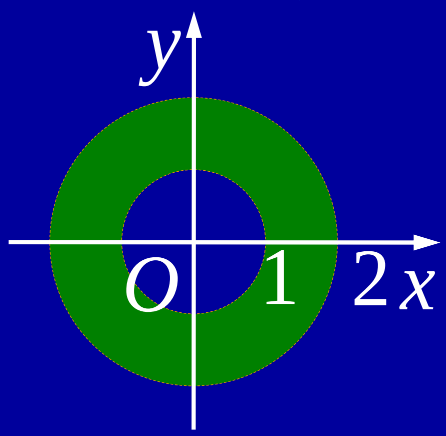
- $\{(x,y) \mid x+y>0\}$
- $\{(x,y) \mid 1<x^2+y^2<4\}$

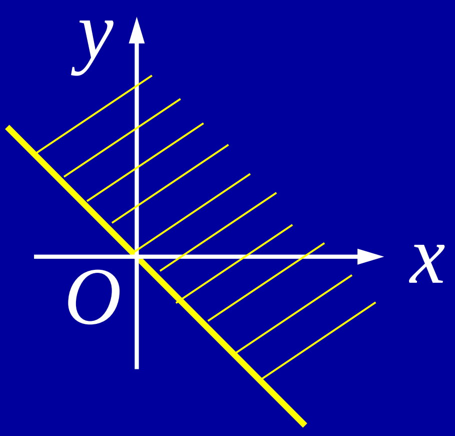
开区域

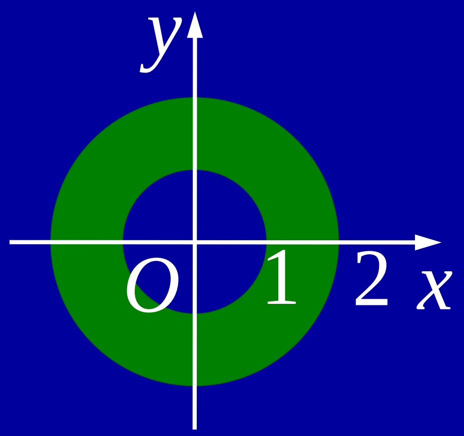
- $\{(x,y) \mid x+y\geq 0\}$
- $\{(x,y) \mid 1\leq x^2+y^2\leq 4\}$

闭区域



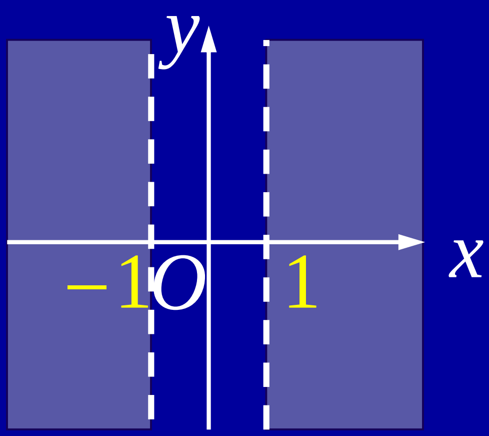






♣ 整个平面 是最大的开域，也是最大的闭域；

♣ 点集 $\{(x,y)\,|\,|x|>1\}$ 是开集，但非区域 .



- 对区域 D，若存在正数 K，使一切点 $P\in D$ 与某定点 A 的距离 $|AP|\le K$，则称 D 为**有界域**，否则称为**无界域**.

3. n 维空间

n 元有序数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的全体所构成的集合记作 $\mathbf{R}^n$, 即 $\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R}$

$$= \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_k \in \mathbf{R}, k = 1, 2, \cdots, n\}$$

$\mathbf{R}^n$ 中的每一个元素用单个粗体字母 $\boldsymbol{x}$ 表示, 即

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

任给 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathrm{R}^n$, $\lambda \in \mathrm{R}$

定义:
$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} &= (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2, \cdots,\ x_n + y_n) \\ \lambda\boldsymbol{x} &= (\lambda x_1,\ \lambda x_2,\ \cdots,\ \lambda x_n) \end{aligned}\right\} \text{线性运算}$$

定义了线性运算的 R^n 称为 n 维空间, 其元素称为点或 n 维向量. x_i 称为 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个坐标 或 第 i 个分量.

零元 $\boldsymbol{0} = (0, 0, \cdots, 0)$ 称为 R^n 中的坐标原点或零向量.

R^n中两点$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n)$ 的**距离**定义为

$$\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2} \xlongequal{\text{记作}} \rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \text{ 或 } \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$$

特别, 点 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与零元 $\mathbf{0}$ 的距离为

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$$

当$n=1,2,3$时, $\|\boldsymbol{x}\|$通常记作$|\boldsymbol{x}|$.

R^n中的变元 $\boldsymbol{x}$ 与定元 a 满足 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|\to 0$, 则称 $\boldsymbol{x}$ 趋于$\boldsymbol{a}$, 记作 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}$. 设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$

显然 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a} \Leftrightarrow x_k\to a_k \quad (k=1,2,\cdots,n)$

$\mathbf{R}^n$ 中点 a 的 **δ邻域**为

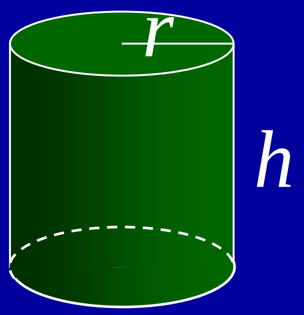
$$U(\boldsymbol{a},\delta)=\{\,\boldsymbol{x}\mid x\in\mathrm{R}^n, \rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})<\delta\,\}$$

二、多元函数的概念

引例:

- 圆柱体的体积

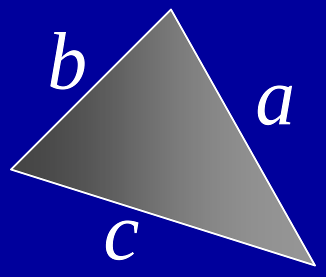
$$V=\pi r^2 h,\quad \{(r,h)\,|\, r>0, h>0\}$$



- 定量理想气体的压强

$$p=\frac{RT}{V}\ (R\text{为常数}),\quad \{(V,T)\,|\,V>0, T>T_0\}$$

- 三角形面积的海伦公式 $\left(p=\dfrac{a+b+c}{2}\right)$



$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\{(a,b,c)\,|\; a>0, b>0, c>0, a+b>c\}$$

定义1. 设非空点集 $D \subset \mathbf{R}^n$, 映射 $f: D \mapsto \mathbf{R}$ 称为定义在 D 上的 ***n* 元函数**，记作

$$u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \text{ 或 } u = f(P), P \in D$$

点集 D 称为函数的**定义域**；数集 $\{u \mid u = f(P), P \in D\}$ 称为函数的**值域**.

特别地，当 $n = 2$ 时，有二元函数

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D \subset \mathbf{R}^2$$

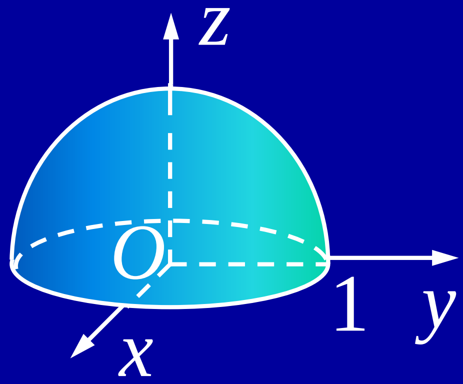
当 $n = 3$ 时，有三元函数

$$u = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in D \subset \mathbf{R}^3$$

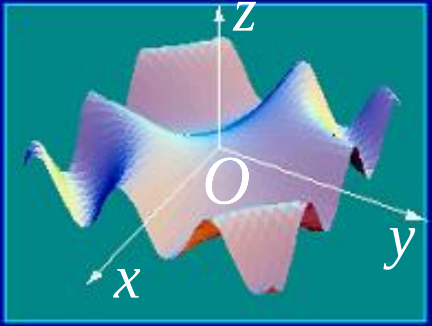
例如, 二元函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$

定义域为圆域 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$

图形为中心在原点的上半球面.



又如, $z=\sin(xy),(x,y)\in\mathbf{R}^2$



说明: 二元函数 $z=f(x,y),(x,y)\in D$

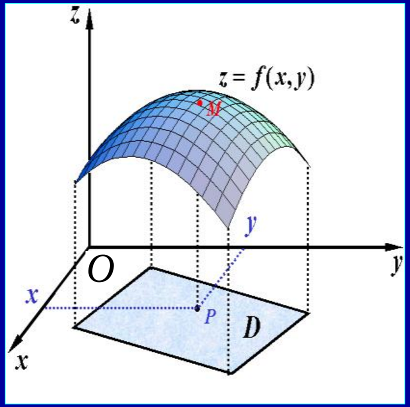
的图形一般为空间曲面 Σ.

三元函数 $u=\arcsin(x^2+y^2+z^2)$

定义域为单位闭球

$$\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1\}$$

图形为 $\mathbf{R}^4$ 空间中的超曲面.



三、多元函数的极限

定义2. 设 n 元函数 $f(P), P\in D\subset \mathbf{R}^n$, P_0 是 D 的聚点，若存在常数 A，对任意正数 ε，总存在正数δ，对一切 $P\in D\cap \overset{\circ}{U}(P_0,\delta)$，都有 $|f(P)-A|<\varepsilon$，则称 A 为函数 $f(P)$当$P\to P_0$时的极限，记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \quad (\text{也称为 } n \text{ 重极限})$$

当 $n=2$ 时，记 $\rho=|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

二元函数的极限可写作：

$$\lim_{\rho\to 0} f(x,y)=A=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

***例1.** 设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\quad (x^2+y^2\neq 0)$

求证: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0.$

证: $\because \left|(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-0\right| \le x^2+y^2$ 要证 $<\varepsilon$

$\therefore\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\sqrt{\varepsilon}$, 当 $0<\rho=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时, 总有

$$|f(x,y)-0|\le x^2+y^2<\delta^2=\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$

- 若当点 $P(x,y)$ 以不同方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时, 函数趋于不同值或有的极限不存在，则可以断定函数极限不存在 .

例2. 讨论函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在点 (0, 0) 的极限.

解: 设 $P(x\,,y)$ 沿直线 $y=k\,x$ 趋于点 (0, 0) , 则有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{k\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}+k^2\cancel{x^2}}=\frac{k}{1+k^2}$$

k 值不同极限不同 !

故 $f(x,y)$在 (0,0) 点极限不存在 .

四、 多元函数的连续性

定义3 . 设 n 元函数 $f(P)$ 定义在 D 上, 聚点 $P_0 \in D$, 如果存在

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$$

则称 n 元函数 $f(P)$ 在点 P_0 连续, 否则称为不连续, 此时 P_0 称为间断点 .

如果函数在 D 上各点处都连续, 则称此函数在 D 上连续.

例如, 函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0\quad\quad\;, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点(0 , 0) 极限不存在, 故 (0, 0)为其间断点.

又如, 函数

$$f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2-1}$$

在圆周 $x^2+y^2=1$ 上间断.

结论: 一切多元初等函数在定义区域内连续.

闭域上多元连续函数有与一元函数类似的如下性质:

定理: 若 $f(P)$ 在有界闭域 D 上连续, 则

(1) $\exists K>0$, 使 $|f(P)|\le K$, $P\in D$; (有界性定理)

(2) $f(P)$ 在 D 上可取得最大值 M 及最小值 m;

(最值定理)

(3) 对任意 $\mu\in[m,M]$, $\exists Q\in D$, 使 $f(Q)=\mu$;

(介值定理)

* (4) $f(P)$ 必在 D 上一致连续. (一致连续性定理)

(证明略)

例5. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

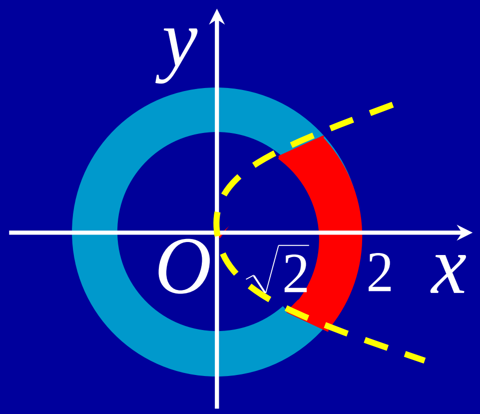
$$\cdot\boxed{\frac{\sqrt{xy+1}+1}{\sqrt{xy+1}+1}}$$

解: 原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{(\sqrt{xy+1})^2-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1}{\sqrt{xy+1}+1} = \dfrac{1}{2}$

例6. 求函数 $f(x,y)=\dfrac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$ 的连续域.

解: $\begin{cases} |3-x^2-y^2|\le 1 \\ x-y^2>0 \end{cases}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2\le x^2+y^2\le 4 \\ x>y^2 \end{cases}$$



内容小结

1. 区域

- 邻域：$U(P_0,\delta)$, $\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)$
- 区域 —— 连通的开集
- $\mathbf{R}^n$空间

2. 多元函数概念

n 元函数 $u = f(P) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$$P \in D \subset \mathbf{R}^n$$

常用 $\begin{cases} \text{二元函数 (图形一般为空间曲面)} \\ \text{三元函数} \end{cases}$

3. 多元函数的极限

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \text{当} 0<|PP_0|<\delta \text{时},$$
$$\text{有} |f(P)-A|<\varepsilon$$

4. 多元函数的连续性

1) 函数 $f(P)$ 在 P_0 连续 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$

2) 闭域上的多元连续函数的性质:

有界定理; 最值定理; 介值定理

3) 一切多元初等函数在定义区域内连续

思考与练习

1． 设 $f(xy, \frac{y^2}{x}) = x^2 + y^2$，求 $f(\frac{y^2}{x}, xy)$.

$$\boxed{f(\frac{v^2}{u}, uv)}$$

解法2 令 $\begin{cases} xy = \dfrac{v^2}{u} \\ \dfrac{y^2}{x} = uv \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = v \\ x = \dfrac{v}{u} \end{cases}$

$$\Longrightarrow f(\frac{v^2}{u}, uv) = f(xy, \frac{y^2}{x}) = (\frac{v}{u})^2 + v^2$$

即 $$f(\frac{y^2}{x}, xy) = \frac{y^2}{x^2} + y^2$$

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x\dfrac{\ln(1+xy)}{x+y}$ 是否存在？

解: 利用 $\ln(1+xy)\sim xy$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x\frac{\ln(1+xy)}{x+y}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x+y}\ \underline{\underline{\text{取 } y=x^{\alpha}-x}}\ \lim_{x\to 0}\frac{x^{\alpha+2}-x^3}{x^{\alpha}}$$

$$=\lim_{x\to 0}(x^2-x^{3-\alpha})=\begin{cases}-1, & \alpha=3\\ 0, & \alpha<3\\ \infty, & \alpha>3\end{cases}$$

所以极限不存在.

3. 证明 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

在全平面连续.

证: 在 $(x,y)\neq(0,0)$ 处, $f(x,y)$ 为初等函数 , 故连续.

又

$$0\le\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\boxed{x^2+y^2\ge 2|xy|}$$

由夹逼准则得

$$\lim_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0)$$

故函数在全平面连续 .