

第9节

多元函数的极值及其求法

一、多元函数的极值

二、最值应用问题

三、条件极值



一、多元函数的极值

定义: 若函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内有
 $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ (或 $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$)

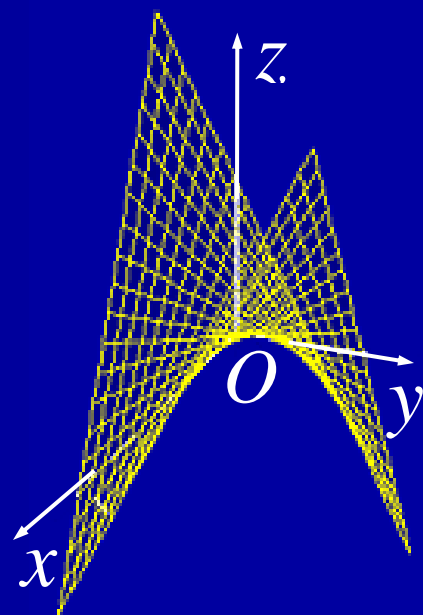
则称函数在该点取得**极大值(极小值)**. 极大值和极小值统称为**极值**, 使函数取得极值的点称为**极值点**.

例如:

$z = 3x^2 + 4y^2$ 在点 $(0, 0)$ 有极小值;

$z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 在点 $(0, 0)$ 有极大值;

$z = xy$ 在点 $(0, 0)$ 无极值.



例1. 已知函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某个邻域内连续, 且

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1, \text{ 则(A)}$$

- (A) 点 $(0, 0)$ 不是 $f(x, y)$ 的极值点.
- (B) 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极大值点.
- (C) 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极小值点.
- (D) 根据条件无法判断点 $(0, 0)$ 是否为 $f(x, y)$ 的极值点.

提示: 由题设 $\frac{f(x, y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1 + \alpha$, 其中 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \alpha = 0$

$$\Rightarrow f(x, y) = xy + (x^2 + y^2)^2 + \alpha \cdot (x^2 + y^2)^2$$

\Rightarrow 在 $(0, 0)$ 的邻近 $f(x, y)$ 的正负由 xy 确定



定理1 (必要条件) 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 存在偏导数, 且在该点取得极值, 则有

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$$

证: 因 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取得极值, 故

$z = f(x, y_0)$ 在 $x = x_0$ 取得极值

$z = f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 取得极值

据一元函数极值的必要条件可知定理结论成立.

说明: 使偏导数都为 0 的点称为**驻点**.

但驻点不一定是极值点.

例如, $z = xy$ 有驻点 $(0, 0)$, 但在该点不取极值.



定理2 (充分条件) 若函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内具有一阶和二阶连续偏导数, 且

$$f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$$

令 $A = f_{xx}(x_0, y_0), B = f_{xy}(x_0, y_0), C = f_{yy}(x_0, y_0)$

则: 1) 当 $AC - B^2 > 0$ 时, 具有极值 $\begin{cases} A < 0 \text{ 时取极大值;} \\ A > 0 \text{ 时取极小值.} \end{cases}$

2) 当 $AC - B^2 < 0$ 时, 没有极值.

3) 当 $AC - B^2 = 0$ 时, 不能确定, 需另行讨论.

证明见 第九节(P121).



例2. 求函数 $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值.

解: 第一步 求驻点.

解方程组
$$\begin{cases} f_x(x, y) = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ f_y(x, y) = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases}$$

得驻点: $(1, 0)$, $(1, 2)$, $(-3, 0)$, $(-3, 2)$.

第二步 判别. 求二阶偏导数

$$\underline{f_{xx}(x, y) = 6x + 6, \quad f_{xy}(x, y) = 0, \quad f_{yy}(x, y) = -6y + 6}$$

A

在点 $(1, 0)$ 处 $A = 12$, $B = 0$, $C = 6$,

$$AC - B^2 = 12 \times 6 > 0, \quad A > 0,$$

$\therefore f(1, 0) = -5$ 为极小值;

B

C



在点(1,2)处 $A=12, B=0, C=-6$

$AC - B^2 = 12 \times (-6) < 0, \therefore f(1,2)$ 不是极值;

在点(-3,0)处 $A=-12, B=0, C=6$,

$AC - B^2 = -12 \times 6 < 0, \therefore f(-3,0)$ 不是极值;

在点(-3,2)处 $A=-12, B=0, C=-6$

$AC - B^2 = -12 \times (-6) > 0, A < 0,$

$\therefore f(-3,2) = 31$ 为极大值.

$$f_{xx}(x, y) = 6x + 6, \quad f_{xy}(x, y) = 0, \quad f_{yy}(x, y) = -6y + 6$$

A

B

C



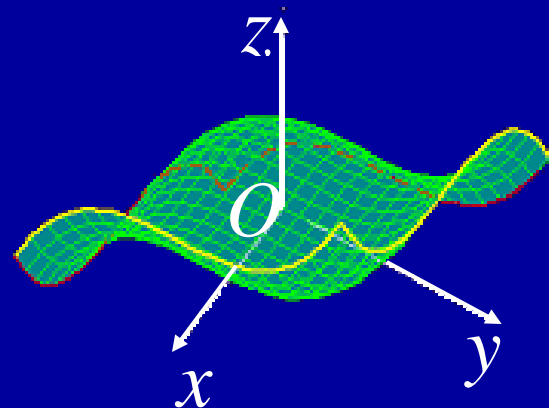
例3.讨论函数 $z = x^3 + y^3$ 及 $z = (x^2 + y^2)^2$ 在点 $(0,0)$ 是否取得极值.

解: 显然 $(0,0)$ 都是它们的驻点, 并且在 $(0,0)$ 都有

$$AC - B^2 = 0$$

$z = x^3 + y^3$ 在 $(0,0)$ 点邻域内的取值

可能为 $\begin{cases} \text{正} \\ \text{负} \\ 0 \end{cases}$, 因此 $z(0,0)$ 不是极值.



当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时, $z = (x^2 + y^2)^2 > z|_{(0,0)} = 0$

因此 $z(0,0) = (x^2 + y^2)^2|_{(0,0)} = 0$ 为极小值.



二、最值应用问题

依据

函数 f 在闭域上连续



函数 f 在闭域上可达到最值

最值可疑点 $\begin{cases} \text{驻点} \\ \text{边界上的最值点} \end{cases}$

特别, 当区域内部最值存在, 且 **只有一个** 极值点 P 时,

$f(P)$ 为极小值 $\implies f(P)$ 为最小值
(大) (大)



例4. 某厂要用铁板做一个体积为 2 m^3 的有盖长方体水箱,问当长、宽、高各取怎样的尺寸时,才能使用料最省?

解: 设水箱长,宽分别为 $x, y\text{ m}$,则高为 $\frac{2}{xy}\text{ m}$,
则水箱所用材料的面积为

$$A = 2\left(xy + y \cdot \frac{2}{xy} + x \cdot \frac{2}{xy}\right) = 2\left(xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}\right) \quad \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\text{令} \begin{cases} A_x = 2\left(y - \frac{2}{x^2}\right) = 0 \\ A_y = 2\left(x - \frac{2}{y^2}\right) = 0 \end{cases} \quad \text{得驻点 } (\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$$

根据实际问题可知最小值在定义域内应存在,因此可断定此唯一驻点就是最小值点. 即当长、宽均为 $\sqrt[3]{2}$ 高为 $\frac{2}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{2}$ 时,水箱所用材料最省.

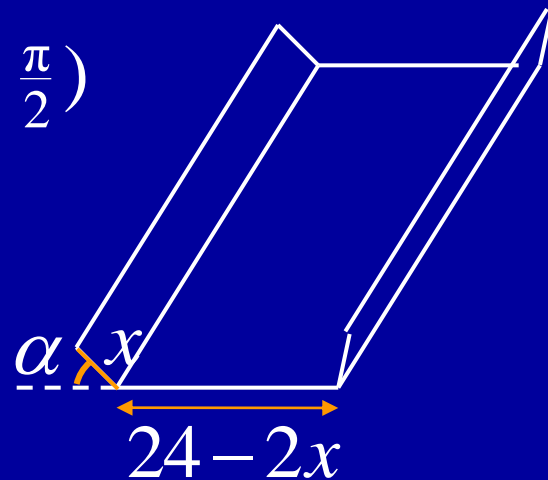
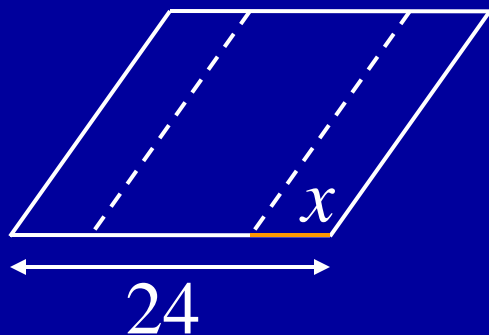


例5. 有一宽为 24cm 的长方形铁板，把它折起来做成一个断面为等腰梯形的水槽，问怎样折法才能使断面面积最大.

解： 设折起来的边长为 x cm，倾角为 α ，则断面面积为

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(24 - 2x + 2x \cos \alpha + 24 - 2x) \cdot x \sin \alpha \\ &= 24x \sin \alpha - 2x^2 \sin \alpha + x^2 \cos \alpha \sin \alpha \end{aligned}$$

$$(D: 0 < x < 12, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$$



$$A = 24x \sin \alpha - 2x^2 \sin \alpha + x^2 \cos \alpha \sin \alpha$$
$$(D: 0 < x < 12, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$$

$$\text{令 } \begin{cases} A_x = 24 \sin \alpha - 4x \sin \alpha + 2x \sin \alpha \cos \alpha = 0 \\ A_\alpha = 24x \cos \alpha - 2x^2 \cos \alpha + x^2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0 \end{cases}$$

$$\downarrow \sin \alpha \neq 0, x \neq 0$$

$$\begin{cases} 12 - 2x + x \cos \alpha = 0 \\ 24 \cos \alpha - 2x \cos \alpha + x (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \alpha = \frac{\pi}{3} = 60^\circ, x = 8 \text{ (cm)}$$

由题意知, 最大值在定义域 D 内达到, 而在域 D 内只有一个驻点, 故此点即为所求.



三、条件极值

极值问题 $\left\{ \begin{array}{l} \text{无条件极值: 对自变量只有定义域限制} \\ \text{条件极值: 对自变量除定义域限制外,} \\ \qquad \qquad \qquad \text{还有其他条件限制} \end{array} \right.$

条件极值的求法:

方法1 代入法. 例如,

在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下, 求函数 $z = f(x, y)$ 的极值

转化 \downarrow 从条件 $\varphi(x, y) = 0$ 中解出 $y = \psi(x)$

求一元函数 $z = f(x, \psi(x))$ 的无条件极值问题



方法2 拉格朗日乘数法. 例如,

在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下, 求函数 $z = f(x, y)$ 的极值.

分析: 如方法 1 所述, 设 $\varphi(x, y) = 0$ 可确定隐函数 $y = \psi(x)$, 则问题等价于一元函数 $z = f(x, \psi(x))$ 的极值问题, 故极值点必满足

$$\frac{dz}{dx} = f_x + f_y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\text{因 } \frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}, \text{ 故有 } f_x - f_y \frac{\varphi_x}{\varphi_y} = 0$$

$$\text{记 } \frac{f_x}{\varphi_x} = \frac{f_y}{\varphi_y} = -\lambda$$



极值点必满足
$$\begin{cases} f_x + \lambda \varphi_x = 0 \\ f_y + \lambda \varphi_y = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

引入辅助函数 $F = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$

则极值点满足:
$$\begin{cases} F_x = f_x + \lambda \varphi_x = 0 \\ F_y = f_y + \lambda \varphi_y = 0 \\ F_\lambda = \varphi = 0 \end{cases}$$

辅助函数 F 称为拉格朗日 (Lagrange) 函数. 利用拉格朗日函数求极值的方法称为拉格朗日乘数法.



推广

拉格朗日乘数法可推广到多个自变量和多个约束条件的情形.

例如, 求函数 $u = f(x, y, z)$ 在条件 $\varphi(x, y, z) = 0$, $\psi(x, y, z) = 0$ 下的极值.

设 $F = f(x, y, z) + \lambda_1 \varphi(x, y, z) + \lambda_2 \psi(x, y, z)$

$$\text{解方程组} \begin{cases} F_x = f_x + \lambda_1 \varphi_x + \lambda_2 \psi_x = 0 \\ F_y = f_y + \lambda_1 \varphi_y + \lambda_2 \psi_y = 0 \\ F_z = f_z + \lambda_1 \varphi_z + \lambda_2 \psi_z = 0 \\ F_{\lambda_1} = \varphi = 0 \\ F_{\lambda_2} = \psi = 0 \end{cases}$$

可得到条件极值的可疑点.

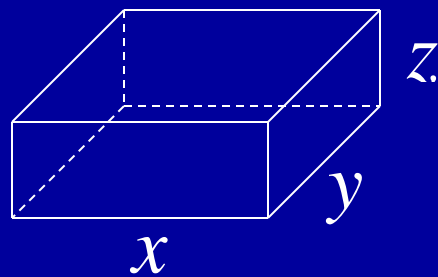


例6. 要设计一个容量为 V_0 的长方体开口水箱, 试问水箱长、宽、高等于多少时所用材料最省?

解: 设 x, y, z 分别表示长、宽、高, 则问题为求 x, y, z 使在条件 $xyz = V_0$ 下水箱表面积 $S = 2(xz + yz) + xy$ 最小.

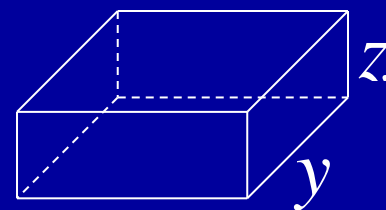
令 $F = 2(xz + yz) + xy + \lambda(xyz - V_0)$

解方程组
$$\begin{cases} F_x = 2z + y + \lambda yz = 0 \\ F_y = 2z + x + \lambda xz = 0 \\ F_z = 2(x + y) + \lambda xy = 0 \\ F_\lambda = xyz - V_0 = 0 \end{cases}$$



得唯一驻点 $x = y = 2z = \sqrt[3]{2V_0}$, $\lambda = \frac{-4}{\sqrt[3]{2V_0}}$

由题意可知合理的设计是存在的, 因此, 当高为 $\sqrt[3]{\frac{V_0}{4}}$, 长、宽为高的 2 倍时, 所用材料最省.



思考:

1) 当水箱封闭时, 长、宽、高的尺寸如何? x

提示: 利用对称性可知, $x = y = z = \sqrt[3]{V_0}$

2) 当开口水箱底部的造价为侧面的二倍时, 欲使造价最省, 应如何设拉格朗日函数? 长、宽、高尺寸如何?

提示: $F = 2(xz + yz) + 2xy + \lambda(xyz - V_0)$

长、宽、高尺寸相等.



内容小结

1. 函数的极值问题

第一步 利用必要条件在定义域内找驻点.

如对二元函数 $z = f(x, y)$, 即解方程组

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

第二步 利用充分条件 判别驻点是否为极值点.

2. 函数的条件极值问题

(1) 简单问题用代入法

(2) 一般问题用拉格朗日乘数法



如求二元函数 $z = f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的极值,
设拉格朗日函数 $F = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$

解方程组
$$\begin{cases} F_x = f_x + \lambda \varphi_x = 0 \\ F_y = f_y + \lambda \varphi_y = 0 \\ F_\lambda = \varphi = 0 \end{cases}$$
 求驻点 .

3. 函数的最值问题

第一步 找目标函数, 确定定义域 (及约束条件)

第二步 判别

- 比较驻点及边界点上函数值的大小
- 根据问题的实际意义确定最值



思考与练习

已知平面上两定点 $A(1, 3)$, $B(4, 2)$,

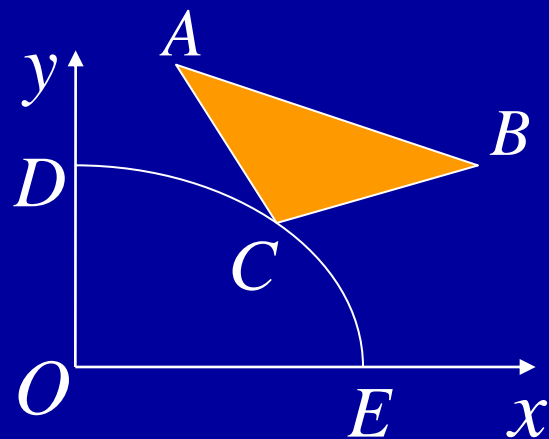
试在椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ($x > 0, y > 0$) 圆周上求一点 C , 使 $\triangle ABC$ 面积 S_{\triangle} 最大.

解答提示: 设 C 点坐标为 (x, y) ,

$$\text{则 } S_{\triangle} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

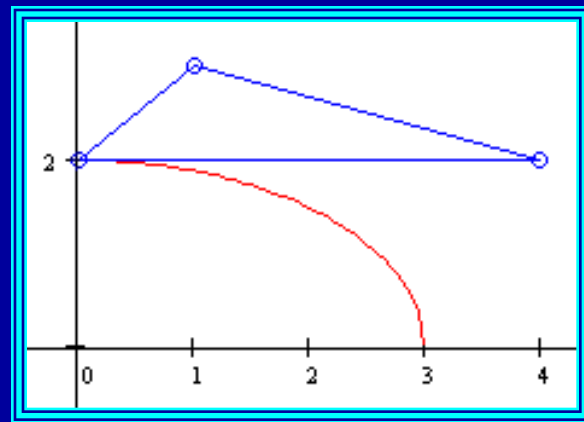
$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 0 \\ x-1 & y-3 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |(0, 0, x+3y-10)|$$

$$= \frac{1}{2} |x+3y-10|$$



设拉格朗日函数 $F = (x + 3y - 10)^2 + \lambda(1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4})$

解方程组
$$\begin{cases} 2(x + 3y - 10) - \frac{2\lambda}{9}x = 0 \\ 6(x + 3y - 10) - \frac{2\lambda}{4}y = 0 \\ 1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 0 \end{cases}$$



点击图中任意点
动画开始或暂停

得驻点 $x = \frac{3}{\sqrt{5}}, y = \frac{4}{\sqrt{5}}$, 对应面积 $S \approx 1.646$

而 $S_D = 2, S_E = 3.5$, 比较可知, 点 C 与 E 重合时, 三角形面积最大.



备用题 1. 求半径为 R 的圆的内接三角形中面积最大者.

解: 设内接三角形各边所对的圆心角为 x, y, z , 则

$$x + y + z = 2\pi, \quad x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$$

注

它们所对应的三个三角形面积分别为

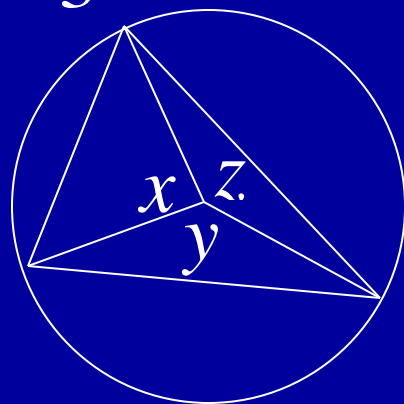
$$S_1 = \frac{1}{2} R^2 \sin x, \quad S_2 = \frac{1}{2} R^2 \sin y, \quad S_3 = \frac{1}{2} R^2 \sin z$$

设拉氏函数 $F = \sin x + \sin y + \sin z + \lambda(x + y + z - 2\pi)$

$$\text{解方程组} \begin{cases} \cos x + \lambda = 0 \\ \cos y + \lambda = 0 \\ \cos z + \lambda = 0 \\ x + y + z - 2\pi = 0 \end{cases}, \text{得 } x = y = z = \frac{2\pi}{3}$$

故圆内接正三角形面积最大, 最大面积为

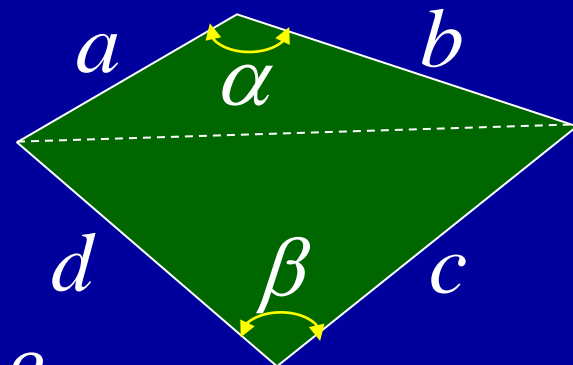
$$S_{\max} = \frac{R^2}{2} \cdot 3 \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2.$$



2. 求平面上以 a, b, c, d 为边的面积最大的四边形，
试列出其目标函数和约束条件？

提示：

目标函数： $S = \frac{1}{2}ab \sin \alpha + \frac{1}{2}cd \sin \beta$
 $(0 < \alpha < \pi, 0 < \beta < \pi)$



约束条件： $a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha = c^2 + d^2 - 2cd \cos \beta$

答案： $\alpha + \beta = \pi$ ，即四边形内接于圆时面积最大。



3. 设某电视机厂生产一台电视机的成本为 c , 每台电视机的销售价格为 p , 销售量为 x , 假设该厂的生产处于平衡状态, 即生产量等于销售量. 根据市场预测, x 与 p 满足关系:

$$x = M e^{-ap} \quad (M > 0, a > 0) \quad ①$$

其中 M 是最大市场需求量, a 是价格系数. 又据对生产环节的分析, 预测每台电视机的生产成本满足:

$$c = c_0 - k \ln x \quad (k > 0, x > 1) \quad ②$$

其中 c_0 是生产一台电视机的成本, k 是规模系数. 问应如何确定每台电视机的售价 p , 才能使该厂获得最大利润?

解: 生产 x 台获得利润 $u = (p - c)x$

问题化为在条件①, ②下求 $u = (p - c)x$ 的最大值点.



作拉格朗日函数

$$L(x, p, c) = (p - c)x + \lambda(x - Me^{-ap}) + \mu(c - c_0 + k \ln x)$$

令 $L_x = (p - c) + \lambda + k \frac{\mu}{x} = 0 \quad \textcircled{3}$

$$L_p = x + \lambda a M e^{-ap} = 0 \quad \textcircled{4}$$

$$L_c = -x + \mu = 0 \quad \textcircled{5}$$

将①代入④得 $\lambda = -\frac{1}{a}$, 由⑤得 $\frac{\mu}{x} = 1$

将以上结果及①, ②代入③, 得

$$p - c_0 + k(\ln M - ap) - \frac{1}{a} + k = 0$$

解得 $p = p^* = \frac{c_0 - k \ln M + \frac{1}{a} - k}{1 - ak}$

因问题本身最优价格必定存在, 故此 p^* 即为所求.

