

第十章

无穷级数

无穷级数 $\left\{ \begin{array}{l} \text{数项级数} \\ \text{幂级数} \\ \text{傅氏级数} \end{array} \right.$

无穷级数是研究函数的工具 $\left\{ \begin{array}{l} \text{表示函数} \\ \text{研究性质} \\ \text{数值计算} \end{array} \right.$

第一节

常数项级数的概念和性质

一、常数项级数的概念

二、无穷级数的基本性质

三、级数收敛的必要条件

*四、柯西审敛原理



一、常数项级数的概念

引例1. 用圆内接正多边形面积逼近圆面积.

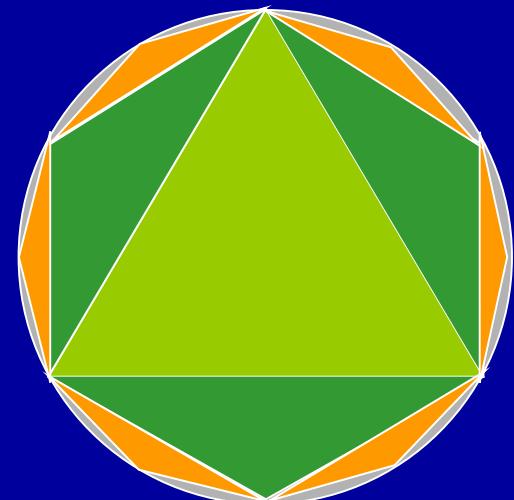
依次作圆内接正 3×2^n ($n = 0, 1, 2, \dots$) 边形, 设 a_0 表示内接正三角形面积, a_k 表示边数增加时增加的面积, 则圆内接正 3×2^n 边形面积为

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$n \rightarrow \infty$ 时, 这个和逼近于圆的面积 A .

即

$$A = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$



引例2. (神秘的康托尔尘集) 把 $[0,1]$ 区间三等分, 舍弃中间的开区间 $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, 将剩下的两个子区间分别三等分, 并舍弃在中间的开区间, 如此反复进行这种“弃中”操作, 问丢弃部分的总长和剩下部分的总长各是多少?

丢弃的各开区间长依次为 $\frac{1}{3}, \frac{2}{3^2}, \frac{2^2}{3^3}, \frac{2^3}{3^4}, \dots, \frac{2^{n-1}}{3^n}, \dots$

故丢弃部分总长

$$l_{\text{丢}} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \frac{2^3}{3^4} + \dots + \frac{2^{n-1}}{3^n} + \dots$$

$$= \frac{1}{3} \left[1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \dots \right] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1$$

剩余部分总长

$$l_{\text{剩}} = l_{\text{丢}} = 0$$



(此式计算用到后面的例1)

剩余部分总长虽然为0, 但康托尔证明了其成员和实数“一样多”, 它们象尘埃一样散落在 $[0, 1]$ 区间上, 人们称其为康托尔尘集.



引例3. 小球从 1 m 高处自由落下, 每次跳起的高度减少一半, 问小球是否会在某时刻停止运动? 说明道理.

由自由落体运动方程 $s = \frac{1}{2} g t^2$ 知 $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$

设 t_k 表示第 k 次小球落地的时间, 则小球运动的时间为

$$T = t_1 + 2t_2 + 2t_3 + \dots$$

$$= \sqrt{\frac{2}{g}} \left[1 + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{(\sqrt{2})^2} + \dots \right) \right] \quad (\text{此式计算用到后面的例1})$$

$$= \sqrt{\frac{2}{g}} [1 + 2(\sqrt{2} + 1)] \approx 2.63 \text{ (s)}$$



定义: 给定一个数列 $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ 将各项依次相加, 简记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

称上式为无穷级数, 其中第 n 项 u_n 叫做级数的一般项, 级数的前 n 项和

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

称为级数的部分和. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ 存在, 则称无穷级数收敛, 并称 S 为级数的和, 记作



$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在, 则称无穷级数发散.

当级数收敛时, 称差值

$$r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

为级数的余项. 显然

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$$



例1. 讨论等比级数(又称几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots \quad (a \neq 0)$$

(q 称为公比) 的敛散性.

解: 1) 若 $q \neq 1$, 则部分和

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1 - q}$$

当 $|q| < 1$ 时, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1 - q}$

因此级数收敛, 其和为 $\frac{a}{1 - q}$;

当 $|q| > 1$ 时, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$,

因此级数发散.



$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n, (a \neq 0)$$

2). 若 $|q|=1$, 则

当 $q=1$ 时, $S_n = na \rightarrow \infty$, 因此级数发散;

当 $q=-1$ 时, 级数成为

$$a - a + a - a + \cdots + (-1)^{n-1}a + \cdots$$

因此 $S_n = \begin{cases} a, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$

从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在, 因此级数发散.

综合 1)、2) 可知, $|q|<1$ 时, 等比级数收敛;

$|q|\geq 1$ 时, 等比级数发散.



例2. 判别下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

解: (1)

$$S_n = \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n}$$

$$= (\cancel{\ln 2 - \ln 1}) + (\cancel{\ln 3 - \ln 2}) + \cdots + (\cancel{\ln(n+1) - \ln n})$$

$$= \ln(n+1) \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

所以级数 (1) 发散;

技巧:
利用“**拆项相消**”求和



$$\begin{aligned}
 (2) \quad S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \\
 &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
 &= 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

所以级数 (2) 收敛, 其和为 1 .

技巧:

利用 “拆项相消” 求
和



例3. 判别级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ 的敛散性 .

解:

$$\because \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln \frac{n^2 - 1}{n^2} = \ln(n+1) + \ln(n-1) - 2\ln n$$

$$\therefore S_n = \sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

$$\begin{aligned} &= [\ln 3 + \cancel{\ln 1} - \cancel{2 \ln 2}] + [\ln 4 + \cancel{\ln 2} - \cancel{2 \ln 3}] + [\ln 5 + \\ &\quad + \cancel{\ln 3} - \cancel{2 \ln 4}] + \cdots + [\cancel{\ln(n+1)} + \ln(n-1) - \cancel{2 \ln n}] \end{aligned}$$

$$= -\ln 2 + \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln 2$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\ln 2, \text{ 故原级数收敛, 其和为 } -\ln 2.$$



二、无穷级数的基本性质

性质1. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S , 即 $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 则各项

乘以常数 c 所得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c u_n$ 也收敛, 其和为 $c S$.

证: 令 $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$, 则 $\sigma_n = \sum_{k=1}^n c u_k = c S_n$,

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = c S$$

这说明 $\sum_{n=1}^{\infty} c u_n$ 收敛, 其和为 $c S$.

说明: 级数各项乘以非零常数后其敛散性不变.



性质2. 设有两个收敛级数

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad \sigma = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛, 其和为 $S \pm \sigma$.

证: 令 $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$, $\sigma_n = \sum_{k=1}^n v_k$, 则

$$\tau_n = \sum_{k=1}^n (u_k \pm v_k) = S_n \pm \sigma_n \rightarrow S \pm \sigma \quad (n \rightarrow \infty)$$

这说明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛, 其和为 $S \pm \sigma$.



说明:

(1) 性质2 表明收敛级数可逐项相加或相减 .

(2) 若两级数中一个收敛一个发散 , 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 必发散 . (用反证法可证)

但若二级数都发散 , $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 不一定发散.

例如, 取 $u_n = (-1)^{2n}$, $v_n = (-1)^{2n+1}$,

而 $u_n + v_n = 0$



性质3. 在级数前面加上或去掉有限项, 不会影响级数的敛散性.

证: 将级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 k 项去掉, 所得新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{k+n}$ 的部分和为

$$\sigma_n = \sum_{l=1}^n u_{k+l} = S_{k+n} - S_k$$

由于 $n \rightarrow \infty$ 时, σ_n 与 S_{k+n} 极限状况相同, 故新旧两级数敛散性相同.

当级数收敛时, 其和的关系为 $\sigma = S - S_k$.

类似可证前面加上有限项的情况 .



性质4. 收敛级数加括弧后所成的级数仍收敛于原级数的和.

证: 设收敛级数 $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 若按某一规律加括弧, 例如
 $(u_1 + u_2) + (u_3 + u_4 + u_5) + \cdots$

则新级数的部分和序列 σ_m ($m = 1, 2, \dots$) 为原级数部分和序列 S_n ($n = 1, 2, \dots$) 的一个子序列, 因此必有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

用反证法可证

推论: 若加括弧后的级数发散, 则原级数必发散.

注意: 收敛级数去括弧后所成的级数不一定收敛.

例如, $(1 - 1) + (1 - 1) + \cdots = 0$, 但 $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ 发散.



三、级数收敛的必要条件

设收敛级数 $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 则必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

证: $u_n = S_n - S_{n-1}$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

可见: 若级数的一般项不趋于0, 则级数必发散.

例如, $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{n}{n+1} + \cdots$, 其一般项为

$$u_n = (-1)^{n-1} \frac{n}{n+1}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, u_n 不趋于0, 因此这个级数发散.



注意: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 并非级数收敛的充分条件.

例如, 调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$

虽然 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, 但此级数发散.

事实上, 假设调和级数收敛于 S , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} - S_n) = 0$$

但 $S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$

矛盾! 所以假设不真.



例4. 判断级数的敛散性:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{4}-1} - \frac{1}{\sqrt{4}+1} + \cdots$$

解: 考虑加括号后的级数

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{4}-1} - \frac{1}{\sqrt{4}+1}\right) + \cdots$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} = \frac{2}{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty} a_n = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{发散, 从而原级数发散.}$$



例5. 判断下列级数的敛散性, 若收敛求其和:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 3n^2 + 2n}; \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}.$$

解: (1) 令 $u_n = \frac{e^n n!}{n^n}$, 则

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{e^n n!}{n^n}} = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} > 1 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

故 $u_n > u_{n-1} > \dots > u_1 = e$

从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, 这说明级数(1)发散.



(2) 因

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^3 + 3n^2 + 2n} &= \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \frac{(n+2)-n}{n(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right] \quad (n=1, 2, \dots)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3 + 3k^2 + 2k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]\end{aligned}$$

进行拆项相消

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{4}$, 这说明原级数收敛, 其和为 $\frac{1}{4}$.



$$(3) \quad S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}$$

$$\begin{aligned} & S_n - \frac{1}{2}S_n \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} \right) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \cdots + \frac{2n-1}{2^{n+1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}} \\ \therefore \quad & S_n = 3 - \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n}, \text{ 故 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 3 \end{aligned}$$

这说明原级数收敛, 其和为 3 .



*四、柯西审敛原理

定理. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+$,

当 $n > N$ 时, 对任意 $p \in \mathbf{N}_+$, 有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon$$

证: 设所给级数部分和数列为 $S_n (n = 1, 2, \dots)$, 因为

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| = |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

所以利用数列 $S_n (n = 1, 2, \dots)$ 的柯西审敛原理(第一章第六节), 即得本定理的结论.



例6. 利用柯西审敛原理判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的敛散性.

解: 对任意 $p \in \mathbf{N}_+$, 有

$$\begin{aligned}& \left| u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} \right| \\&= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \\&< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\&= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \right) \\&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}\end{aligned}$$



$\therefore \forall \varepsilon > 0$, 取 $N \geq \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$, 当 $n > N$ 时, 对任意 $p \in \mathbf{N}_+$,
都有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

由柯西审敛原理可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛.

