第二节

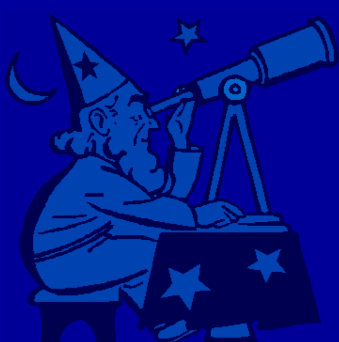
函数的求导法则

一、四则运算求导法则

二、反函数的求导法则

三、复合函数求导法则

四、初等函数的求导问题



解决求导问题的思路:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$ （构造性定义）

$\Downarrow$

$$\left\{\begin{array}{l}(C)'=0\\ (\sin x)'=\cos x\\ (\ln x)'=\dfrac{1}{x}\end{array}\right.$$

证明中利用了两个重要极限

本节内容 $\Downarrow$

求导法则

$\Downarrow$

其他基本初等函数求导公式

初等函数求导问题

一、四则运算求导法则

定理1. 函数 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 都在点 x 可导

$\Longrightarrow$ $u(x)$ 及 $v(x)$ 的和、差、积、商 (除分母为 0的点外) 都在点 x 可导，且

(1) $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$

(2) $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

(3) $$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}\quad (v(x)\neq 0)$$

下面分三部分加以证明，并同时给出相应的推论和例题 .

$(1)\ \ (u \pm v)' = u' \pm v'$

证: 设 $f(x) = u(x) \pm v(x)$, 则

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[u(x+h) \pm v(x+h)] - [u(x) \pm v(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \pm \lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h}$$

$$= u'(x) \pm v'(x)$$

故结论成立.

此法则可推广到任意有限项的情形. 例如,

$$(u + v - w)' = u' + v' - w'$$

$$(2)\quad (uv)' = u'v + uv'$$

证: 设 $f(x) = u(x)v(x)$, 则有

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h) - u(x)}{h}v(x+h) + u(x)\frac{v(x+h) - v(x)}{h}\right]$$

$$= u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$ 故结论成立.

推论: 1) $(Cu)' = Cu'$ (C为常数)

2) $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$

3) $(\log_a x)' = \left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}$

例1. $y=\sqrt{x}\,(x^3-4\cos x-\sin 1)$，求 y' 及 $y'\big|_{x=1}$.

解: $y'=(\sqrt{x})'(x^3-4\cos x-\sin 1)$

$$+\sqrt{x}\,(x^3-4\cos x-\sin 1)'$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^3-4\cos x-\sin 1)+\sqrt{x}\,(3x^2+4\sin x)$$

$$y'\big|_{x=1}=\frac{1}{2}(1-4\cos 1-\sin 1)+(3+4\sin 1)$$

$$=\frac{7}{2}+\frac{7}{2}\sin 1-2\cos 1$$

$$(3)\quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

证: 设 $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, 则有

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{u(x+h)}{v(x+h)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\dfrac{u(x+h) - u(x)}{h}v(x) - u(x)\dfrac{v(x+h) - v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)}\right]$$

$$= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

故结论成立.

推论: $\left(\dfrac{C}{v}\right)' = \dfrac{-Cv'}{v^2}$ （C为常数）

例2. 求证 $(\tan x)' = \sec^2 x$, $(\csc x)' = -\csc x \cot x$.

证: $$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$(\csc x)' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = \frac{-(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= -\csc x \cot x$$

类似可证: $(\cot x)' = -\csc^2 x$, $(\sec x)' = \sec x \tan x$.

二、反函数的求导法则

定理2. 设 $y=f(x)$ 为 $x=f^{-1}(y)$ 的反函数, $f^{-1}(y)$ 在 y 的某邻域内单调可导, 且 $[f^{-1}(y)]'\neq 0 \Longrightarrow$

$$f'(x)=\frac{1}{[f^{-1}(y)]'} \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$$

证: 在 x 处给增量 $\Delta x\neq 0$, 由反函数的单调性知

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\neq 0, \ \therefore \ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$$

且由反函数的连续性知 $\Delta x\to 0$ 时必有 $\Delta y\to 0$, 因此

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{[f^{-1}(y)]'}$$

例3. 求反三角函数及指数函数的导数.

解: 1) 设 $y=\arcsin x$, 则 $x=\sin y$, $y\in(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2})$,

$\therefore\ \cos y>0$, 则

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

利用

$$\arccos x=\frac{\pi}{2}-\arcsin x$$

类似可求得

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2},\qquad (\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

2) 设 $y=a^x\ (a>0, a\neq 1)$, 则 $x=\log_a y,\ y\in(0,+\infty)$

$$\therefore\quad (a^x)'=\frac{1}{(\log_a y)'}\overset{\text{推论3)}}{=}\frac{1}{\frac{1}{y\ln a}}=y\ln a=a^x\ln a$$

特别当 $a=\mathrm{e}$ 时, $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$

小结:

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\qquad (\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}\qquad (\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

$$(a^x)'=a^x\ln a\qquad (\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$$

三、复合函数求导法则

定理3. $u=g(x)$ 在点 x 可导, $y=f(u)$ 在点 $u=g(x)$ 可导 $\Longrightarrow$ 复合函数 $y=f[g(x)]$ 在点 x 可导, 且

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=f'(u)g'(x)$$

证: $\because$ $y=f(u)$ 在点 u 可导, 故 $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)$

$\therefore \Delta y=f'(u)\Delta u+\alpha\Delta u$ （当 $\Delta u\to 0$ 时 $\alpha\to 0$ ）

故有 $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}\quad(\Delta x\neq 0)$$

$$\therefore\ \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]=f'(u)g'(x)$$

推广： 此法则可推广到多个中间变量的情形.

例如， $y = f(u)\,, u = \varphi(v)\,, v = \psi(x)$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

$$= f'(u) \cdot \varphi'(v) \cdot \psi'(x)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} y \\ | \\ u \\ | \\ v \\ | \\ x \end{array}}$$

关键： 搞清复合函数结构, 由外向内逐层求导.

例4. 求下列导数: (1) $(x^{\mu})'$; (2) $(x^{x})'$; (3) $(\operatorname{sh} x)'$.

解: (1) $(x^{\mu})' = (\mathrm{e}^{\mu \ln x})' = \mathrm{e}^{\mu \ln x} \cdot (\mu \ln x)' = x^{\mu} \cdot \dfrac{\mu}{x}$

$$= \mu x^{\mu-1}$$

(2) $(x^{x})' = (\mathrm{e}^{x \ln x})' = \mathrm{e}^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' = x^{x}(\ln x + 1)$

(3) $(\operatorname{sh} x)' = \left(\dfrac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$

说明: 类似可得

$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$; $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^{2} x}$; $(a^{x})' = a^{x} \ln a$.

$\operatorname{sh} x = \dfrac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ $a^{x} = \mathrm{e}^{x \ln a}$

例5. 设 $y=\ln\cos(\mathrm{e}^x)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\cos(\mathrm{e}^x)}\cdot(-\sin(\mathrm{e}^x))\cdot\mathrm{e}^x$$

$$=-\mathrm{e}^x\tan(\mathrm{e}^x)$$

思考: 若 $f'(u)$ 存在，如何求 $f(\ln\cos(\mathrm{e}^x))$ 的导数?

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\underbrace{f'(\ln\cos(\mathrm{e}^x))}_{f'(u)\big|_{u=\ln\cos(\mathrm{e}^x)}}\cdot(\ln\cos(\mathrm{e}^x))'=\cdots$$

这两个记号含义不同

例6. 设 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, 求 y'.

解: $$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

双曲正弦

$$\operatorname{sh} x=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$$

的反函数

记 $\operatorname{arsh} x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, 则

(反双曲正弦)

$$(\operatorname{arsh} x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

其他反双曲函数的导数看参考书自推.

四、初等函数的求导问题

1. 常数和基本初等函数的导数

$$(C)' = 0 \qquad (x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x \qquad (\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x \qquad (\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

2. 有限次四则运算的求导法则

$$(u \pm v)' = u' \pm v' \qquad (Cu)' = Cu' \quad (C\text{为常数})$$

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

3. 复合函数求导法则

$$y = f(u), u = \varphi(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f'(u) \cdot \varphi'(x)$$

4. 初等函数在定义区间内可导, 且导数仍为初等函数

说明: 最基本的公式

$$(C)' = 0$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

由定义证，其他公式用求导法则推出.

例7. $y=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$，求 y'.

先化简后求导

解: $\because \quad y=\dfrac{2x-2\sqrt{x^2-1}}{2}=x-\sqrt{x^2-1}$

$\therefore \quad y'=1-\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot(2x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

例8. 设 $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}\ (a>0)$，求 y'.

解: $y'=a^a x^{a^a-1}+a^{x^a}\ln a\cdot ax^{a-1}$

$+a^{a^x}\ln a\cdot a^x\ln a$

例9. $y=\mathrm{e}^{\sin x^2}\arctan\sqrt{x^2-1}$, 求 y'.

解:

$$y'=\left(\mathrm{e}^{\sin x^2}\cdot\cos x^2\cdot 2x\right)\arctan\sqrt{x^2-1}$$

$$+\mathrm{e}^{\sin x^2}\left(\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot 2x\right)$$

$$=2x\cos x^2\,\mathrm{e}^{\sin x^2}\arctan\sqrt{x^2-1}$$

$$+\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{e}^{\sin x^2}$$

关键: 搞清复合函数结构
由外向内逐层求导

例10. 设 $y=\frac{1}{2}\arctan\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1}$, 求 y'.

解: $y'=\frac{1}{2}\frac{1}{1+(\sqrt{1+x^2})^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-1}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$=\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\left(\frac{1}{2+x^2}-\frac{1}{x^2}\right)$

$=\frac{-1}{(2x+x^3)\sqrt{1+x^2}}$

内容小结

求导公式及求导法则

注意: 1) $(uv)' \neq u'v'$, $\left(\dfrac{u}{v}\right)' \neq \dfrac{u'}{v'}$

2) 搞清复合函数结构，由外向内逐层求导.

思考与练习

1. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}}}\right)' = \left(\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{3}{4}}\right)' \cancel{=} \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{4}}$ 对吗?

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{4}} \cdot \frac{-1}{x^2}$$

2. 设 $f(x)=(x-a)\varphi(x)$，其中 $\underline{\varphi(x)\text{ 在 } x=a \text{ 处连续}}$，在求 $f'(a)$ 时，下列做法是否正确？

因 $f'(x)\cancel{=}\varphi(x)+(x-a)\underline{\varphi'(x)}$

故 $f'(a)=\varphi(a)$

正确解法: 由于 $f(a)=0$，故

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)\varphi(x)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\varphi(x)=\varphi(a)$$

3. 求下列函数的导数

$$(1)\ \ y=\left(\frac{a}{x}\right)^{b};\qquad (2)\ \ y=\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}.$$

解: $(1)\ \ y'=b\left(\frac{a}{x}\right)^{b-1}\cdot\left(-\frac{a}{x^2}\right)=-\frac{a^b b}{x^{b+1}}$

$$(2)\ \ y'=\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}\ln\frac{a}{b}\cdot(-x)'=-\left(\frac{b}{a}\right)^{x}\ln\frac{a}{b}$$

或 $\ \ y'=\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{x}\right)'=\left(\frac{b}{a}\right)^{x}\ln\frac{b}{a}$

4. 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-99)$, 求 $f'(0)$.

解: 方法1 利用导数定义.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}(x-1)(x-2)\cdots(x-99)=-99!$$

方法2 利用求导公式.

$$f'(x)=(x)'\cdot[(x-1)(x-2)\cdots(x-99)]$$

$$+x\cdot[(x-1)(x-2)\cdots(x-99)]'$$

$\therefore\quad f'(0)=-99!$

备用题 **1.** 设 $y=\cot\frac{\sqrt{x}}{2}+\tan\frac{2}{\sqrt{x}}$, 求 y'.

解: $$y'=-\csc^2\frac{\sqrt{x}}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{2\sqrt{x}}+\sec^2\frac{2}{\sqrt{x}}\cdot 2\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)$$

$$=-\frac{1}{4\sqrt{x}}\csc^2\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{\sqrt{x^3}}\sec^2\frac{2}{\sqrt{x}}$$

2 . 设 $y=f(f(f(x)))$, 其中 $f(x)$ 可导, 求 y'.

解: $y'=f'(f(f(x)))\cdot f'(f(x))\cdot f'(x)$