

## 第二节

# 微积分的基本公式

一、引例

二、积分上限的函数及其导数

三、牛顿－莱布尼茨公式



# 一、引例

在变速直线运动中, 已知位置函数  $s(t)$  与速度函数  $v(t)$  之间有关系:

$$s'(t) = v(t)$$

物体在时间间隔  $[T_1, T_2]$  内经过的路程为

$$\int_{T_1}^{T_2} v(t) dt = s(T_2) - s(T_1)$$

这里  $s(t)$  是  $v(t)$  的原函数 .

这种积分与原函数的关系在一定条件下具有普遍性 .



## 二、积分上限的函数及其导数

**定理1.** 若  $f(x) \in C[a, b]$ , 则变上限函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

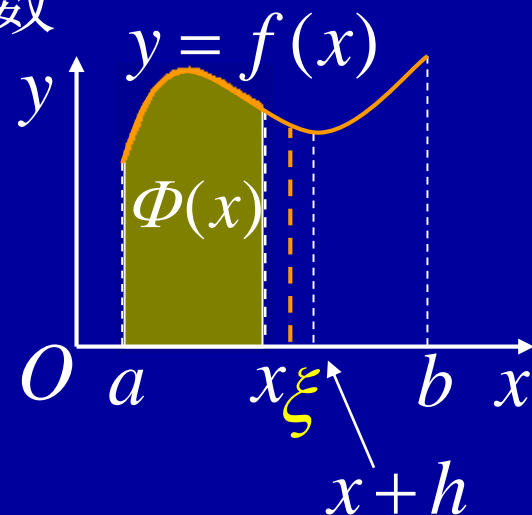
是  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的一个原函数.

**证:**  $\forall x, x+h \in [a, b]$ , 则有

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} &= \frac{1}{h} \left[ \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(\xi) \quad (x < \xi < x+h) \end{aligned}$$

$\because f(x) \in C[a, b]$

$$\therefore \Phi'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi) = f(x)$$



## 说明:

1) 定理 1 证明了连续函数的原函数是存在的. 同时为通过原函数计算定积分开辟了道路.

2) 其他变限积分求导:

$$\frac{d}{dx} \int_x^b f(t) dt = -f(x)$$

$$\frac{d}{dx} \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt = f[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t) dt &= \frac{d}{dx} \left[ \int_{\psi(x)}^a f(t) dt + \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt \right] \\ &= f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\psi(x)]\psi'(x) \end{aligned}$$



例1. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2} dt}{x^2}$

$$\frac{0}{0}$$

解: 原式  $\stackrel{\text{洛}}{=} -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\cos^2 x} \cdot (-\sin x)}{2x} = \frac{1}{2e}$

例2. 确定常数  $a, b, c$  的值, 使

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\int_b^x \ln(1+t^2) dt} = c \quad (c \neq 0).$$

$$\frac{0}{0}$$

解:  $\because x \rightarrow 0$  时,  $ax - \sin x \rightarrow 0, c \neq 0, \therefore b = 0.$

原式  $\stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \cos x}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \cos x}{x^2} = c$

$c \neq 0$ , 故  $a = 1$ . 又由  $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ , 得  $c = \frac{1}{2}.$



**例3.** 设  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  内连续, 且  $f(x) > 0$ , 证明

$$F(x) = \frac{\int_0^x t f(t) dt}{\int_0^x f(t) dt}$$

只要证  
 $F'(x) > 0$

在  $(0, +\infty)$  内为单调递增函数.

$$\begin{aligned} \text{证: } F'(x) &= \frac{x f(x) \int_0^x f(t) dt - f(x) \int_0^x t f(t) dt}{\left( \int_0^x f(t) dt \right)^2} \\ &= \frac{f(x) \int_0^x (x-t) f(t) dt}{\left( \int_0^x f(t) dt \right)^2} = \frac{f(x) \cdot (x-\xi) f(\xi) x}{\left( \int_0^x f(t) dt \right)^2} > 0 \\ &\quad (0 < \xi < x) \end{aligned}$$

$\therefore F(x)$  在  $(0, +\infty)$  内为单调增函数.



### 三、牛顿－莱布尼茨公式

**定理2.** 设  $F(x)$  是连续函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的一个原函数，则  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$  (牛顿 - 莱布尼茨公式)

**证:** 根据定理 1,  $\int_a^x f(x) dx$  是  $f(x)$  的一个原函数，故

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx + C$$

令  $x = a$ , 得  $C = F(a)$ , 因此  $\int_a^x f(x) dx = F(x) - F(a)$

再令  $x = b$ , 得

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \stackrel{\text{记作}}{=} [F(x)]_a^b \stackrel{\text{或}}{=} F(x) \Big|_a^b$$

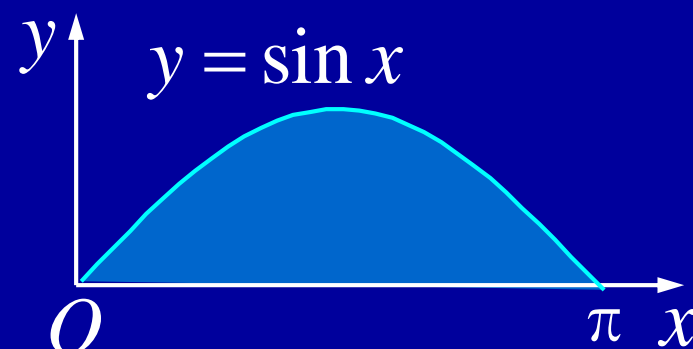


**例4.** 计算  $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$ .

**解:** 
$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_{-1}^{\sqrt{3}} = \arctan \sqrt{3} - \arctan(-1)$$
$$= \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{7}{12}\pi$$

**例5.** 计算正弦曲线  $y = \sin x$  在  $[0, \pi]$  上与  $x$  轴所围成的面积.

**解:** 
$$A = \int_0^{\pi} \sin x \, dx$$
$$= -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(-1-1) = 2$$





**例6.** 汽车以每小时 36 km 的速度行驶，到某处需要减速停车，设汽车以等加速度  $a = -5 \text{ m/s}^2$  刹车，问从开始刹车到停车走了多少距离？

**解：** 设开始刹车时刻为  $t = 0$ ，则此时刻汽车速度

$$v_0 = 36 (\text{km/h}) = \frac{36 \times 1000}{3600} (\text{m/s}) = 10 (\text{m/s})$$

刹车后汽车减速行驶，其速度为

$$v(t) = v_0 + at = 10 - 5t$$

当汽车停住时， $v(t) = 0$ ，即  $10 - 5t = 0$ ，得  $t = 2 (\text{s})$

故在这段时间内汽车所走的距离为

$$s = \int_0^2 v(t) dt = \int_0^2 (10 - 5t) dt = \left[ 10t - \frac{5}{2}t^2 \right]_0^2 = 10 (\text{m})$$



# 内容小结

## 1. 微积分基本公式

设  $f(x) \in C[a, b]$ , 且  $F'(x) = f(x)$ , 则有

$$\int_a^b f(x) dx = \underbrace{f(\xi)(b-a)}_{\text{积分中值定理}} = \underbrace{F'(\xi)(b-a)}_{\text{微分中值定理}} = F(b) - F(a)$$

牛顿－莱布尼茨公式

## 2. 变限积分求导公式



## 备用题

1. 设  $f(x) = x^2 - x \int_0^2 f(x) dx + 2 \int_0^1 f(x) dx$ , 求  $f(x)$ .

**解:** 定积分为常数, 故应用积分法定此常数.

设  $\int_0^1 f(x) dx = a$ ,  $\int_0^2 f(x) dx = b$ , 则

$$f(x) = x^2 - bx + 2a$$

$$a = \int_0^1 f(x) dx = \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{bx^2}{2} + 2ax \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{b}{2} + 2a$$

$$b = \int_0^2 f(x) dx = \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{bx^2}{2} + 2ax \right]_0^2 = \frac{8}{3} - 2b + 4a$$

$$\implies a = \frac{1}{3}, b = \frac{4}{3} \implies f(x) = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$$



2. 设  $\alpha = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} \, dt$ ,  $\beta = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 \, dt$ , 试证: 当  $x \rightarrow 0^+$  时,  $\alpha = o(\beta)$ .

证:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\alpha}{\beta} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x \cdot 2x}{\sin x^{3/2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cdot 2x}{x^{3/2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2}{\frac{1}{2}x} = 0$$

所以  $\alpha = o(\beta)$ .

$x \rightarrow 0$  时  
 $\tan x \sim x$   
 $\sin x \sim x$



3. 求  $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2nx}{\sin x} dx$  的递推公式( $n$ 为正整数).

解: 由于  $I_{n-1} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2(n-1)x}{\sin x} dx$ , 因此

$$\begin{aligned} I_n - I_{n-1} &= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2n-1)x \sin x}{\sin x} dx \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \cos(2n-1)x dx = \frac{2(-1)^{n-1}}{2n-1} \end{aligned}$$

所以 
$$I_n = I_{n-1} + \frac{2(-1)^{n-1}}{2n-1} \quad (n=2,3,\cdots)$$

其中 
$$I_1 = \int_0^{\pi/2} 2 \cos x dx = 2$$

