

第四节

有理函数的积分

- 基本积分法：直接积分法；换元积分法；分部积分法



本节内容：

- 一、有理函数的积分
- 二、可化为有理函数的积分举例



一、有理函数的积分

有理函数:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m}$$

$m \leq n$ 时, $R(x)$ 为假分式; $m > n$ 时, $R(x)$ 为真分式

有理函数 $\xlongequal[\text{相除}]{}$ 多项式 + 真分式
分解 ↓

若干部分分式之和

其中部分分式的形式为

$$\frac{A}{(x-a)^k}; \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} \quad (k \in \mathbf{N}^+, p^2 - 4q < 0)$$



例1. 将下列真分式分解为部分分式：

$$(1) \frac{1}{x(x-1)^2}; \quad (2) \frac{x+3}{x^2-5x+6}; \quad (3) \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}.$$

解：(1) 用拼凑法

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(x-1)^2} &= \frac{x-(x-1)}{x(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x(x-1)} \\&= \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{x-(x-1)}{x(x-1)} \\&= \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x}\end{aligned}$$



(2) 用赋值法

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6} = \frac{x+3}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

$$\therefore A = (x-2) \cdot \text{原式} \Big|_{x=2} = \frac{x+3}{x-3} \Big|_{x=2} = -5$$

$$B = (x-3) \cdot \text{原式} \Big|_{x=3} = \frac{x+3}{x-2} \Big|_{x=3} = 6$$

故 原式 = $\frac{-5}{x-2} + \frac{6}{x-3}$



(3) 混合法

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} = \frac{A}{1+2x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$$

$$A = (1+2x) \cdot \text{原式} \Big|_{x=-\frac{1}{2}} = \frac{4}{5}$$

↓ 分别令 $x=0, 1$ 代入等式两端

$$\begin{cases} 1 = \frac{4}{5} + C \\ \frac{1}{6} = \frac{4}{15} + \frac{B+C}{2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} B = -\frac{2}{5} \\ C = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\text{原式} = \frac{1}{5} \left[\frac{4}{1+2x} - \frac{2x-1}{1+x^2} \right]$$



四种典型部分分式的积分：

$$1. \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C$$

$$2. \int \frac{A}{(x-a)^n} dx = \frac{A}{1-n} (x-a)^{1-n} + C \quad (n \neq 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} 3. \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx \\ 4. \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} dx \end{array} \right\}$$

$$(p^2 - 4q < 0, n \neq 1)$$

$$\boxed{(x^2 + px + q)' = 2x + p}$$

变分子为

$$\frac{M}{2}(2x+p) + N - \frac{Mp}{2}$$

再分项积分



例2. 求 $\int \frac{dx}{(1+2x)(1+x^2)}.$

解: 已知

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} = \frac{1}{5} \left[\frac{4}{1+2x} - \frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} \right]$$

例1(3)

$$\begin{aligned}\therefore \text{原式} &= \frac{2}{5} \int \frac{d(1+2x)}{1+2x} - \frac{1}{5} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} + \frac{1}{5} \int \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \frac{2}{5} \ln|1+2x| - \frac{1}{5} \ln(1+x^2) + \frac{1}{5} \arctan x + C\end{aligned}$$



HIGHER EDUCATION PRESS

例3. 求 $\int \frac{x-2}{x^2+2x+3} dx$.

解: 原式 = $\int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)-3}{x^2+2x+3} dx$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3} - 3 \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}$$
$$= \frac{1}{2} \ln|x^2+2x+3| - \frac{3}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$$

思考: 如何求 $\int \frac{x-2}{(x^2+2x+3)^2} dx$?

提示: 变形方法同例3, 并利用书 P211例7.



说明: 将有理函数分解为部分分式进行积分虽可行, 但不一定简便, 因此要注意根据被积函数的结构寻求简便的方法.

例4. 求 $I = \int \frac{2x^3 + 2x^2 + 5x + 5}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$.

解: $I = \int \frac{2x^3 + 5x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx + \int \frac{2x^2 + 5}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^4 + 5x^2 + 5)}{x^4 + 5x^2 + 4} + \int \frac{(x^2 + 1) + (x^2 + 4)}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$$
$$= \frac{1}{2} \ln|x^4 + 5x^2 + 4| + \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + \arctan x + C$$



例5. 求 $\int \frac{x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx$.

解: 原式 = $\int \frac{(x^2 + 2x + 2) - (2x + 2)}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx$
= $\int \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} - \int \frac{d(x^2 + 2x + 2)}{(x^2 + 2x + 2)^2}$
= $\arctan(x+1) + \frac{1}{x^2 + 2x + 2} + C$



例6. 求 $\int \frac{dx}{x^4 + 1}$

本题用常规方法解很繁

解: 原式 = $\frac{1}{2} \int \frac{(x^2 + 1) - (x^2 - 1)}{x^4 + 1} dx$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx$$

注意本题技巧

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d(x - \frac{1}{x})}{(x - \frac{1}{x})^2 + 2} - \frac{1}{2} \int \frac{d(x + \frac{1}{x})}{(x + \frac{1}{x})^2 - 2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x^2 - 1}{\sqrt{2}x} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2 - \sqrt{2}x + 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \right| + C \quad (x \neq 0)$$



按常规方法解 $\int \frac{dx}{x^4 + 1}$

第一步 令 $x^4 + 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$

比较系数定 a, b, c, d . 得

$$x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$$

第二步 化为部分分式. 即令

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^4 + 1} &= \frac{1}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} \\ &= \frac{Ax + B}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}\end{aligned}$$

比较系数定 A, B, C, D .

第三步 分项积分.

此解法较繁!



HIGHER EDUCATION PRESS

目录

上页

下页

返回

结束

二、可化为有理函数的积分举例

1. 三角函数有理式的积分

设 $R(\sin x, \cos x)$ 表示三角函数有理式，则

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

令 $t = \tan \frac{x}{2}$

万能代换
(参考下页例7)

t 的有理函数的积分



例7. 求 $\int \frac{1 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)} dx$.

解: 令 $t = \tan \frac{x}{2}$, 则

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$



$$\int \frac{1 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)} dx$$

$$= \int \frac{1 + \frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}(1 + \frac{1-t^2}{1+t^2})} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \int \left(t + 2 + \frac{1}{t} \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} t^2 + 2t + \ln|t| \right) + C$$

$$= \frac{1}{4} \tan^2 \frac{x}{2} + \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$



例8. 求 $\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$ ($a, b \neq 0$) .

解： 原式 = $\int \frac{\frac{1}{\cos^2 x} dx}{a^2 \tan^2 x + b^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{d \tan x}{\tan^2 x + (\frac{b}{a})^2}$

$$= \frac{1}{ab} \arctan\left(\frac{a}{b} \tan x\right) + C$$

说明：通常求含 $\sin^2 x, \cos^2 x$ 及 $\sin x \cos x$ 的有理式的积分时，用代换 $t = \tan x$ 往往更方便 .



例9. 求 $\int \frac{1}{(a \sin x + b \cos x)^2} dx$ ($ab \neq 0$).

解法 1

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \frac{dx}{(a \tan x + b)^2 \cos^2 x} \\&\quad \left| \begin{array}{l} \text{令 } t = \tan x \\ \downarrow \end{array} \right. \\&= \int \frac{dt}{(at + b)^2} = -\frac{1}{a(at + b)} + C \\&= -\frac{\cos x}{a(a \sin x + b \cos x)} + C\end{aligned}$$



例9. 求 $\int \frac{1}{(a \sin x + b \cos x)^2} dx \quad (ab \neq 0)$

解法 2 令 $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin \varphi, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos \varphi$

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{1}{a^2+b^2} \int \frac{dx}{\cos^2(x-\varphi)} \\ &= \frac{1}{a^2+b^2} \tan(x-\varphi) + C \\ &\quad \left| \begin{array}{l} \varphi = \arctan \frac{a}{b} \\ \downarrow \end{array} \right. \\ &= \frac{1}{a^2+b^2} \tan\left(x - \arctan \frac{a}{b}\right) + C\end{aligned}$$



例10. 求 $\int \frac{\cos^3 x - 2\cos x}{1 + \sin^2 x + \sin^4 x} dx$.

解: 因被积函数关于 $\cos x$ 为奇函数, 可令 $t = \sin x$,

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \frac{(\cos^2 x - 2)\cos x dx}{1 + \sin^2 x + \sin^4 x} = - \int \frac{(\sin^2 x + 1) d\sin x}{1 + \sin^2 x + \sin^4 x} \\&= - \int \frac{(t^2 + 1) dt}{1 + t^2 + t^4} = - \int \frac{1 + \frac{1}{t^2}}{t^2 + 1 + \frac{1}{t^2}} dt = - \int \frac{d(t - \frac{1}{t})}{(t - \frac{1}{t})^2 + 3} \\&= - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{t - \frac{1}{t}}{\sqrt{3}} + C \\&= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\cos^2 x}{\sqrt{3} \sin x} + C\end{aligned}$$



2. 简单无理函数的积分

被积函数为简单根式的有理式, 可通过根式代换化为有理函数的积分. 例如:

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx, \quad \text{令 } t = \sqrt[n]{ax+b}$$

$$\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx, \quad \text{令 } t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[m]{ax+b}) dx,$$

令 $t = \sqrt[p]{ax+b}$, p 为 m, n 的最小公倍数.



例11. 求 $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}$.

解: 令 $u = \sqrt[3]{x+2}$, 则 $x = u^3 - 2$, $dx = 3u^2 du$

$$\text{原式} = \int \frac{3u^2}{1+u} du = 3 \int \frac{(u^2 - 1) + 1}{1+u} du$$

$$= 3 \int \left(u - 1 + \frac{1}{1+u} \right) du$$

$$= 3 \left[\frac{1}{2}u^2 - u + \ln|1+u| \right] + C$$

$$= \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x+2)^2} - 3 \sqrt[3]{x+2} + 3 \ln|1+\sqrt[3]{x+2}| + C$$



例12. 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$.

解: 为去掉被积函数分母中的根式, 取根指数 2, 3 的最小公倍数 6, 令 $x = t^6$, 则有

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} \\&= 6 \int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t} \right) dt \\&= 6 \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t - \ln|1+t| \right] + C \\&= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(1 + \sqrt[6]{x}) + C\end{aligned}$$



例13. 求 $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx$.

解: 令 $t = \sqrt{\frac{1+x}{x}}$, 则 $x = \frac{1}{t^2 - 1}$, $dx = \frac{-2t dt}{(t^2 - 1)^2}$

$$\text{原式} = \int (t^2 - 1) \cdot t \cdot \frac{-2t}{(t^2 - 1)^2} dt$$

$$= -2 \int \frac{t^2}{t^2 - 1} dt = -2t - \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C$$

$$= -2 \sqrt{\frac{1+x}{x}} + \ln |2x + 2x\sqrt{x+1} + 1| + C$$



内容小结

1. 可积函数的特殊类型



2. 特殊类型的积分按上述方法虽然可以积出, 但不一定简便, 要注意综合使用基本积分法, 简便计算.



思考与练习

如何求下列积分更简便？

$$1. \int \frac{x^2}{a^6 - x^6} dx \quad (a > 0)$$

$$2. \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$$

解：1. 原式 = $\frac{1}{3} \int \frac{dx^3}{(a^3)^2 - (x^3)^2} = \frac{1}{6a^3} \ln \left| \frac{x^3 + a^3}{x^3 - a^3} \right| + C$

2. 原式 = $\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x \cos x} dx = \int \frac{dx}{\sin x \cos x} + \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$
 $= \int \frac{d \tan x}{\tan x} + \int \frac{d \sin x}{\sin^3 x} = \ln |\tan x| - \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 x} + C$



备用题 1. 求不定积分 $\int \frac{1}{x^6(1+x^2)} dx$.

分母次数较高,
宜使用倒代换.

解: 令 $t = \frac{1}{x}$, 则 $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{1}{t^2} dt$, 故

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^6(1+x^2)} dx &= \int \frac{1}{\frac{1}{t^6}(1+\frac{1}{t^2})} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = -\int \frac{t^6}{1+t^2} dt \\&= -\int \left(t^4 - t^2 + 1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt \\&= -\frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3 - t + \arctan t + C \\&= -\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x} + \arctan \frac{1}{x} + C\end{aligned}$$



2. 求不定积分 $\int \frac{1 + \sin x}{3 + \cos x} dx$.

解: 原式 = $\int \frac{1}{3 + \cos x} dx + \int \frac{\sin x}{3 + \cos x} dx$
↓ 前式令 $u = \tan \frac{x}{2}$; 后式配元

$$\begin{aligned}&= \int \frac{1}{3 + \frac{1-u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2} du - \int \frac{1}{3 + \cos x} d(3 + \cos x) \\&= \int \frac{1}{u^2 + 2} du - \ln|3 + \cos x| \\&= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{u}{\sqrt{2}} - \ln|3 + \cos x| + C \\&= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \tan \frac{x}{2} \right) - \ln|3 + \cos x| + C\end{aligned}$$

