

第五节

函数的微分

一、微分的概念

二、微分运算法则

三、微分在近似计算中的应用

*四、微分在估计误差中的应用



一、微分的概念

引例：一块正方形金属薄片受温度变化的影响，其边长由 x_0 变到 $x_0 + \Delta x$ ，问此薄片面积改变了多少？

设薄片边长为 x ，面积为 A ，则 $A = x^2$ ，当 x 在 x_0 取得增量 Δx 时，面积的增量为

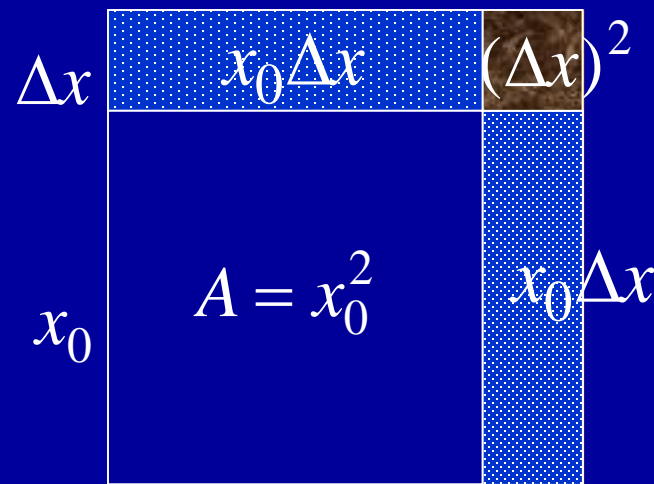
$$\begin{aligned}\Delta A &= (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 \\ &= \underbrace{2x_0\Delta x}_{\text{关于}\Delta x\text{的线性主部}} + \underbrace{(\Delta x)^2}_{\Delta x \rightarrow 0\text{时为高阶无穷小}}\end{aligned}$$

关于 Δx 的
线性主部

$\Delta x \rightarrow 0$ 时为
高阶无穷小

故 $\Delta A \approx \underline{2x_0\Delta x}$

称为函数在 x_0 的微分



定义: 若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的增量可表示为

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$$

(A 为不依赖于 Δx 的常数)

则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 **可微**, 而 $A\Delta x$ 称为 $f(x)$ 在点 x_0 的**微分**, 记作 dy 或 df , 即

$$dy = A\Delta x$$

定理: 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 可微的**充要条件**是

$y = f(x)$ 在点 x_0 处可导, 且 $A = f'(x_0)$, 即

$$dy = f'(x_0)\Delta x$$



定理：函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 可微的**充要条件**是
 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导, 且 $A = f'(x_0)$, 即

$$dy = f'(x_0)\Delta x$$

证：“必要性”

已知 $y = f(x)$ 在点 x_0 可微, 则

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \right) = A$$

故 $y = f(x)$ 在点 x_0 可导, 且 $f'(x_0) = A$



定理：函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 可微的**充要条件**是
 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导, 且 $A = f'(x_0)$, 即

$$dy = f'(x_0)\Delta x$$

“充分性” 已知 $y = f(x)$ 在点 x_0 可导, 则

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha \quad \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0 \right)$$

故 $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x = \underbrace{f'(x_0)\Delta x}_{f'(x_0) \neq 0 \text{ 时}}$

此项为 Δy 的
线性主部

即 $dy = f'(x_0)\Delta x$



说明: $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$

$$dy = f'(x_0)\Delta x$$

当 $f'(x_0) \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{dy} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{f'(x_0)\Delta x} \\ &= \frac{1}{f'(x_0)} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1\end{aligned}$$

所以 $\Delta x \rightarrow 0$ 时 Δy 与 dy 是等价无穷小, 故当 $|\Delta x|$ 很小时, 有近似公式

$$\Delta y \approx dy$$



微分的几何意义——切线纵坐标的增量

$$dy = f'(x_0)\Delta x = \tan \alpha \cdot \Delta x$$

当 Δx 很小时, $\Delta y \approx dy$

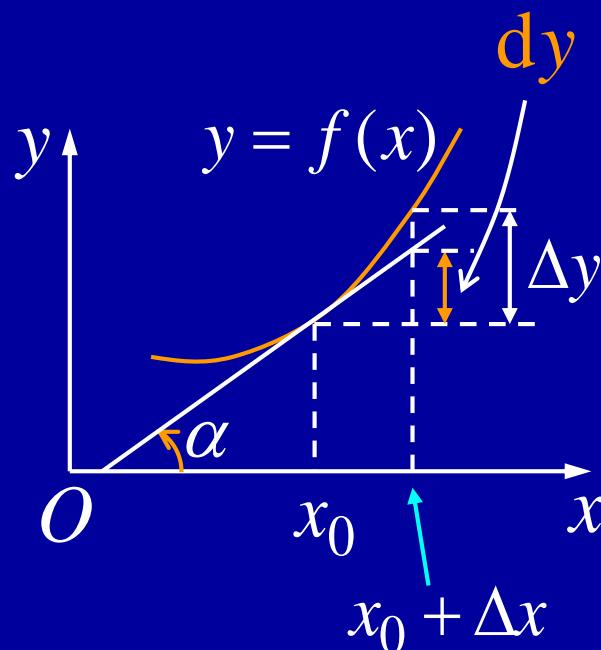
当 $y = x$ 时,

$$\Delta y = \Delta x \stackrel{\text{记}}{=} dx$$

称 Δx 为自变量的微分, 记作 dx

则有 $dy = f'(x)dx$

从而 $\frac{dy}{dx} = f'(x)$



导数也叫作微商



例如, $y = x^3$,

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\substack{x=2 \\ dx=0.02}} = 3x^2 \cdot \left. dx \right|_{\substack{x=2 \\ dx=0.02}} = 0.24$$

又如, $y = \arctan x$,

$$dy = \frac{1}{1+x^2} dx$$

基本初等函数的微分公式 (见 P120表)



二、微分运算法则

设 $u(x)$, $v(x)$ 均可微, 则

$$1. d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$2. d(Cu) = Cdu \quad (C \text{ 为常数})$$

$$3. d(uv) = vdu + u dv$$

$$4. d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

5. 复合函数的微分

$y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ 分别可微,

则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的微分为

$$dy = y'_x dx = f'(u) \boxed{\varphi'(x) dx} \longrightarrow \boxed{du}$$

$$dy = f'(u) du$$

微分形式不变



例1. $y = \ln(1 + e^{x^2})$, 求 dy .

解: $dy = \frac{1}{1 + e^{x^2}} d(1 + e^{x^2})$

$$= \frac{1}{1 + e^{x^2}} \cdot e^{x^2} d(x^2)$$

$$= \frac{1}{1 + e^{x^2}} \cdot e^{x^2} \cdot 2x dx$$

$$= \frac{2xe^{x^2}}{1 + e^{x^2}} dx$$



例2. 设 $y \sin x - \cos(x - y) = 0$, 求 dy .

解: 利用一阶微分形式不变性, 有

$$d(y \sin x) - d(\cos(x - y)) = 0$$

$$\sin x dy + y \cos x dx + \sin(x - y) (dx - dy) = 0$$

$$dy = \frac{y \cos x + \sin(x - y)}{\sin(x - y) - \sin x} dx$$

例3. 在下列括号中填入适当的函数使等式成立:

$$(1) \quad d\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right) = x dx \quad (C \text{ 为任意常数})$$

$$(2) \quad d\left(\frac{1}{\omega} \sin \omega t + C\right) = \cos \omega t dt$$

说明: 上述微分的反问题是不定积分要研究的内容.

注意: 数学中的反问题往往出现多值性.



三、微分在近似计算中的应用

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

当 $|\Delta x|$ 很小时, 得近似等式:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$



令 $x = x_0 + \Delta x$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

使用原则: 1) $f(x_0), f'(x_0)$ 好算;
2) x 与 x_0 靠近.



特别当 $x_0 = 0$, $|x|$ 很小时,
$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x$$

常用近似公式: ($|x|$ 很小)

$$(1) (1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$$

证明: 令 $f(x) = (1+x)^\alpha$

$$\text{得 } f(0) = 1, f'(0) = \alpha$$

$$\therefore \text{当 } |x| \text{ 很小时, } (1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$$

$$(2) \sin x \approx x$$

$$(3) e^x \approx 1 + x$$

$$(4) \tan x \approx x$$

$$(5) \ln(1+x) \approx x$$



例4. 求 $\sin 29^\circ$ 的近似值.

解: 设 $f(x) = \sin x$,

$$\text{取 } x_0 = 30^\circ = \frac{\pi}{6}, \quad x = 29^\circ = \frac{29}{180}\pi$$

$$\text{则 } dx = -\frac{\pi}{180}$$

$$\sin 29^\circ = \sin \frac{29}{180}\pi \approx \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} \cdot \left(-\frac{\pi}{180}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-0.0175)$$

$$\approx 0.485$$

$$\sin 29^\circ \approx 0.4848 \dots$$



例5. 计算 $\sqrt[5]{245}$ 的近似值.

$$3^5 = 243$$

解: $\sqrt[5]{245} = (243 + 2)^{\frac{1}{5}}$

$$= 3 \left(1 + \frac{2}{243}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$(1+x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha x$$

$$\approx 3 \left(1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{243}\right)$$

$$\approx 3.004938$$

$$\sqrt[5]{245} = 3.004942\cdots$$



例6. 有一批半径为1cm 的球 , 为了提高球面的光洁度, 要镀上一层铜 , 厚度定为 0.01cm , 估计一下, 每只球需用铜多少克 . (铜的密度 : 8.9 g/cm^3)

解: 已知球体体积为 $V = \frac{4}{3} \pi R^3$

镀铜体积为 V 在 $R=1, \Delta R=0.01$ 时体积的增量 ΔV ,

$$\begin{aligned} \Delta V &\approx dV \bigg|_{\substack{R=1 \\ \Delta R=0.01}} = 4\pi R^2 \Delta R \bigg|_{\substack{R=1 \\ \Delta R=0.01}} \\ &\approx 0.13 (\text{cm}^3) \end{aligned}$$

因此每只球需用铜约为

$$8.9 \times 0.13 = 1.16 \text{ (g)}$$



*四、 微分在估计误差中的应用

某量的精确值为 A ，其近似值为 a ，

$|A - a|$ 称为 a 的**绝对误差**

$\frac{|A - a|}{|a|}$ 称为 a 的**相对误差**

若 $|A - a| \leq \delta_A$

δ_A 称为测量 A 的**绝对误差限**

$\frac{\delta_A}{|a|}$ 称为测量 A 的**相对误差限**



误差传递公式：

若直接测量某量得 x ，已知测量误差限为 δ_x ，

按公式 $y = f(x)$ 计算 y 值时的误差

$$\begin{aligned} |\Delta y| &\approx |\mathrm{d}y| = |f'(x)| \cdot |\Delta x| \\ &\leq |f'(x)| \cdot \delta_x \end{aligned}$$

故 y 的绝对误差限约为 $\delta_y \approx |f'(x)| \cdot \delta_x$

$$\text{相对误差限约为 } \frac{\delta_y}{|y|} \approx \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \right| \cdot \delta_x$$



例7. 设测得圆钢截面的直径 $D = 60.03 \text{ mm}$, 测量 D 的绝对误差限 $\delta_D = 0.05 \text{ mm}$, 欲利用公式 $A = \frac{\pi}{4} D^2$ 计算圆钢截面积, 试估计面积的误差.

解: 计算 A 的绝对误差限约为

$$\begin{aligned}\delta_A &= |A'| \cdot \delta_D = \frac{\pi}{2} D \cdot \delta_D = \frac{\pi}{2} \times 60.0 \times 0.05 \\ &\approx 4.715 \text{ (mm}^2\text{)}\end{aligned}$$

A 的相对误差限约为

$$\frac{\delta_A}{|A|} = \frac{\frac{\pi}{2} D \delta_D}{\frac{\pi}{4} D^2} = 2 \frac{\delta_D}{D} = 2 \times \frac{0.05}{60.0} = 0.17 \%$$



内容小结

1. 微分概念

- 微分的定义及几何意义
- 可微 \iff 可导

2. 微分运算法则

微分形式不变性： $df(u) = f'(u)du$

(u 是自变量或中间变量)

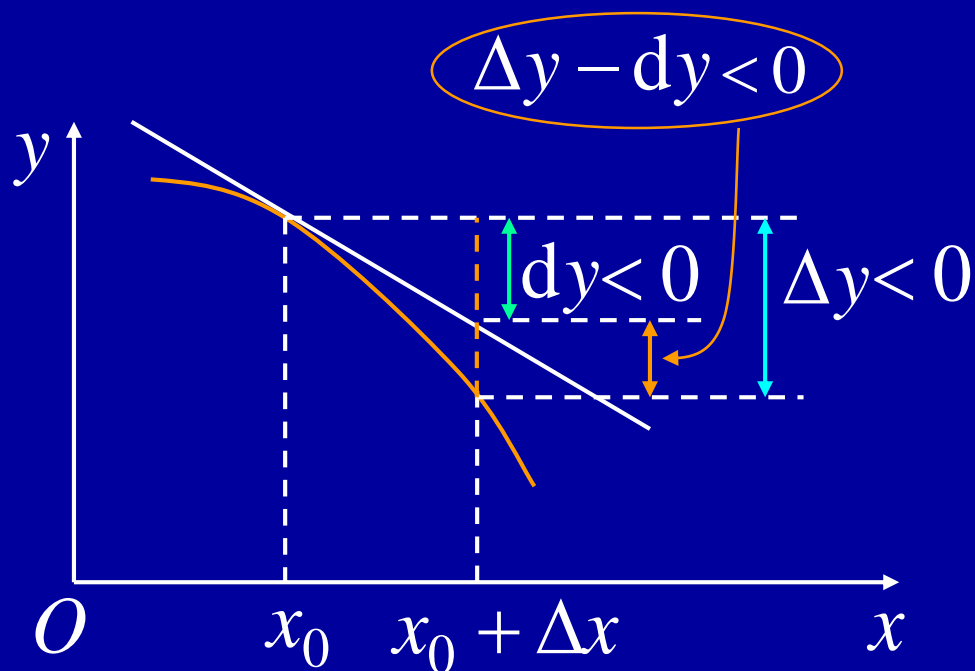
3. 微分的应用

- 近似计算
- 估计误差



思考与练习

1. 设函数 $y = f(x)$ 的图形如下, 试在图中标出的点 x_0 处的 dy , Δy 及 $\Delta y - dy$, 并说明其正负.



$$2. \quad d(\arctan e^{-x}) = \frac{1}{1+e^{-2x}} de^{-x}$$

$$= \frac{-e^{-x}}{1+e^{-2x}} dx$$

$$3. \quad \frac{d \tan x}{d \sin x} = \sec^3 x$$

$$4. \quad d\left(-\frac{1}{2}\cos 2x + C\right) = \sin 2x dx$$



5. 设 $y = y(x)$ 由方程 $x^3 + y^3 - \sin 3x + 6y = 0$ 确定,
求 $\mathrm{d} y|_{x=0}$.

解: 方程两边求微分, 得

$$3x^2 \mathrm{d} x + 3y^2 \mathrm{d} y - 3 \cos 3x \mathrm{d} x + 6 \mathrm{d} y = 0$$

当 $x=0$ 时 $y=0$, 由上式得 $\mathrm{d} y|_{x=0} = \frac{1}{2} \mathrm{d} x$

6. 设 $a > 0$, 且 $|b| \ll a^n$, 则

$$\sqrt[n]{a^n + b} \approx a + \frac{b}{na^{n-1}}$$



备用题

1. 已知 $y = \arcsin(\sin^2 \frac{1}{x})$, 求 dy .

解: 因为

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin^2 \frac{1}{x})^2}} \cdot 2 \sin \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

所以

$$dy = y' dx = -\frac{\sin \frac{2}{x}}{x^2 \sqrt{1 - (\sin^2 \frac{1}{x})^2}} dx$$



2. 已知 $xy = e^{x+y}$, 求 dy .

解: 方程两边求微分, 得

$$x dy + y dx = e^{x+y} (dx + dy)$$

$$\therefore dy = \frac{y - e^{x+y}}{e^{x+y} - x} dx$$

