第四章

不定积分

$$\left.\begin{array}{l}\text{微分法: } F'(x) = (\ ?\ ) \\ \text{积分法: } (\ ?\ )' = f(x)\end{array}\right\}\text{互逆运算}$$

第一节 不定积分的概念与性质

一、 原函数与不定积分的概念

二、 基本积分表

三、不定积分的性质

一、 原函数与不定积分的概念

引例: 一个质量为 m 的质点, 在变力 $F=A\sin t$ 的作下沿直线运动 , 试求质点的运动速度 $v(t)$.

根据牛顿第二定律, 加速度 $a(t)=\frac{F}{m}=\frac{A}{m}\sin t$

因此问题转化为: 已知 $v'(t)=\frac{A}{m}\sin t$, 求 $v(t)=?$

定义 1 . 若在区间 I 上定义的两个函数 $F(x)$ 及 $f(x)$ 满足 $F'(x)=f(x)$ 或 $\mathrm{d}F(x)=f(x)\,\mathrm{d}x$, 则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数 .

如引例中, $\frac{A}{m}\sin t$ 的原函数有 $-\frac{A}{m}\cos t,\ -\frac{A}{m}\cos t+3,\cdots$

问题:

1. 在什么条件下, 一个函数的原函数存在 ?

2. 若原函数存在, 它如何表示 ?

定理1. 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 则 $f(x)$ 在 I 上存在原函数 . **(下章证明)**

初等函数在定义区间上连续

$\Downarrow$

初等函数在定义区间上有原函数

定理 2. 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 的所有原函数都在函数族 $F(x)+C$（C 为任意常数）内 .

证: 1) $\because\ (F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$

$\therefore F(x)+C$ 是 $f(x)$ 的原函数

2) 设 $\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 的任一原函数，即

$$\Phi'(x) = f(x)$$

又知 $$F'(x) = f(x)$$

$$\therefore\ [\Phi(x)-F(x)]' = \Phi'(x)-F'(x) = f(x)-f(x) = 0$$

故 $$\Phi(x) = F(x)+C_0 \quad (C_0\text{ 为某个常数})$$

它属于函数族 $F(x)+C$.

定义 2. $f(x)$ 在区间 I 上的原函数全体称为 $f(x)$ 在 I 上的不定积分, 记作 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, 其中

$\int$ — **积分号;** $f(x)$ — **被积函数;**

x — **积分变量;** $f(x)\mathrm{d}x$ — **被积表达式.**

(P194)

若 $F'(x) = f(x)$, 则

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C \quad (\,C\text{ 为任意常数}\,)$$

C 称为**积分常数,**
不可丢!

例如,
$$\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$$

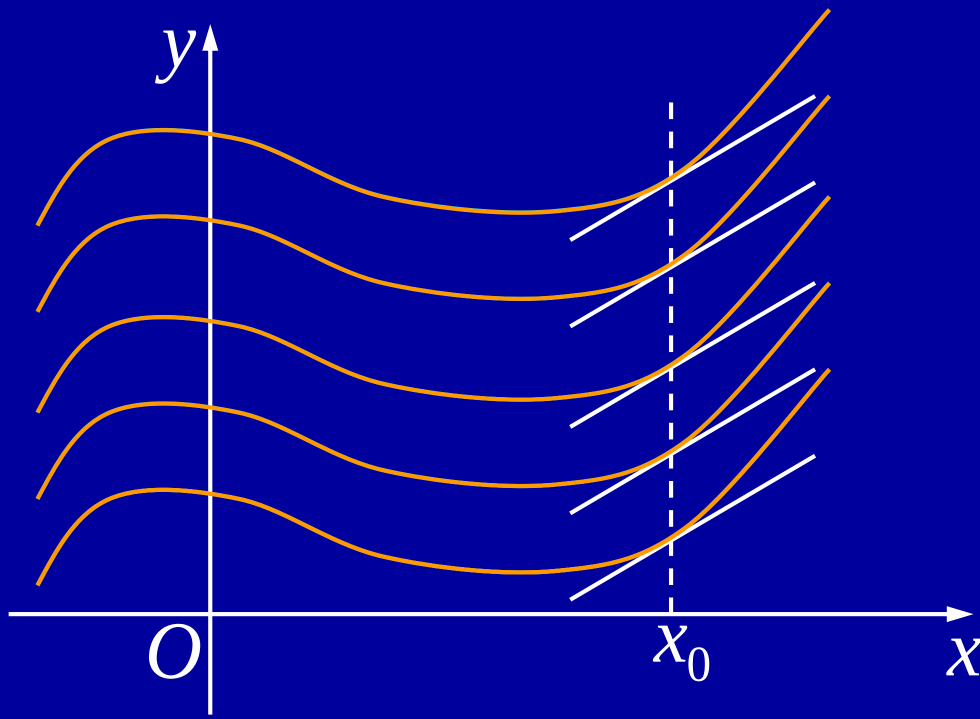
$$\int x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$$

不定积分的几何意义:

$f(x)$ 的原函数的图形称为 $f(x)$ 的**积分曲线**.

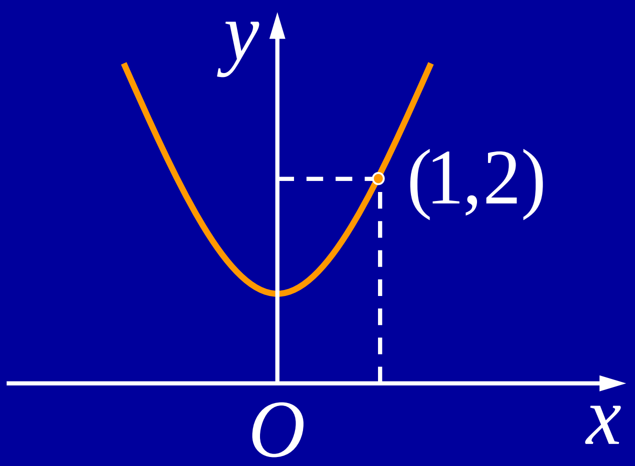
$\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 的图形 —— $f(x)$ 的所有积分曲线组成的平行曲线族.



例1. 设曲线通过点(1, 2), 且其上任一点处的切线斜率等于该点横坐标的两倍, 求此曲线的方程.

解: $\because \quad y' = 2x$

$$\therefore \quad y = \int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + C$$



所求曲线过点 (1, 2) , 故有

$$2 = 1^2 + C$$

$$\therefore \quad C = 1$$

因此所求曲线为 $y = x^2 + 1$

例2. 质点在距地面 x_0 处以初速 v_0 垂直上抛，不计阻力，求它的运动规律.

解: 取质点运动轨迹为坐标轴，原点在地面，指向朝上，质点抛出时刻为 $t=0$，此时质点位置为 x_0，初速为 v_0.

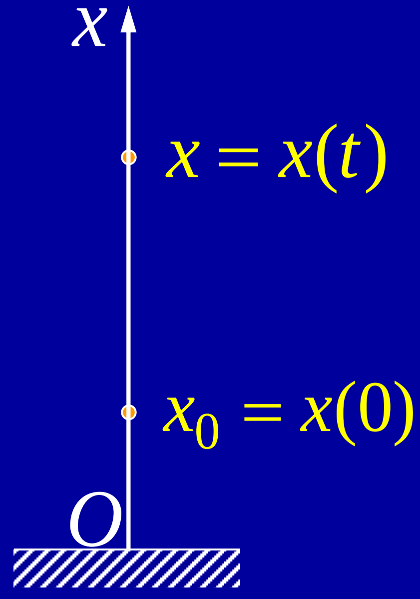
设时刻 t 质点所在位置为 $x = x(t)$，则

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v(t) \qquad \text{(运动速度)}$$

再由此求 $x(t)$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -g \qquad \text{(加速度)}$$

先由此求 $v(t)$

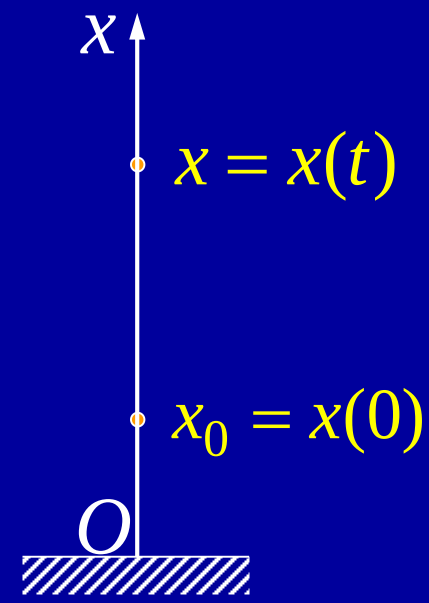


先求 $v(t)$. 由 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-g$, 知

$$v(t)=\int(-g)\,\mathrm{d}t=-g\,t+C_1$$

由 $v(0)=v_0$, 得 $C_1=v_0$, 故

$$v(t)=-g\,t+v_0$$



再求 $x(t)$. 由 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-g\,t+v_0$, 知

$$x(t)=\int(-g\,t+v_0)\,\mathrm{d}t=-\tfrac{1}{2}g\,t^2+v_0t+C_2$$

由 $x(0)=x_0$, 得 $C_2=x_0$, 于是所求运动规律为

$$x(t)=-\tfrac{1}{2}g\,t^2+v_0t+x_0$$

从不定积分定义可知:

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)$ 或 $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)\mathrm{d}x$

(2) $\int F'(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C$ 或 $\int \mathrm{d}F(x)=F(x)+C$

二、基本积分表 (P196)

$\boxed{\text{利用逆向思维}}$

(1) $\int k\mathrm{d}x=kx+C$ (k 为常数)

(2) $\int x^{\mu}\mathrm{d}x=\frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1}+C$ $(\mu\neq-1)$

(3) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|+C$

$x<0$时

$(\ln|x|)'=[\ln(-x)]'=\frac{1}{x}$

(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$ 或 $-\operatorname{arccot} x + C$

(5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ 或 $-\arccos x + C$

(6) $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$

(7) $\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$

(8) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x \mathrm{d}x = \tan x + C$

(9) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x \mathrm{d}x = -\cot x + C$

(10) $\int \sec x \tan x \mathrm{d}x = \sec x + C$

(11) $\int \csc x \cot x \mathrm{d}x = -\csc x + C$

(12) $\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$

(13) $\int a^x \mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

例3. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{x}}$.

解: 原式 $= \int x^{-\frac{4}{3}}\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1} + C$

$= -3x^{-\frac{1}{3}} + C$

例4. 求 $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$.

解: 原式= $\int \frac{1}{2}\sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos x + C$

三、不定积分的性质

1. $\int k f(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x \quad (k \neq 0)$

2. $\int [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}\,x$

推论： 若 $f(x) = \sum_{i=1}^{n} k_i f_i(x)$，则

$$\boxed{\int f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} k_i \int f_i(x)\mathrm{d}x}$$

例5. 求 $\int 2^x(\mathrm{e}^x-5)\mathrm{d}x$.

解: 原式 $=\int[(2\mathrm{e})^x-5\cdot 2^x]\mathrm{d}x$

$$=\frac{(2\mathrm{e})^x}{\ln(2\mathrm{e})}-5\frac{2^x}{\ln 2}+C$$

$$=2^x\left[\frac{\mathrm{e}^x}{\ln 2+1}-\frac{5}{\ln 2}\right]+C$$

例6. 求 $\int \tan^2 x \mathrm{d}x$.

解: 原式 $= \int (\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x$

$$= \int \sec^2 x \mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x = \tan x - x + C$$

例7. 求 $\int \frac{1 + x + x^2}{x(1 + x^2)} \mathrm{d}x$.

解: 原式 $= \int \frac{x + (1 + x^2)}{x(1 + x^2)} \mathrm{d}x$

$$= \int \frac{1}{1 + x^2} \mathrm{d}x + \int \frac{1}{x} \mathrm{d}x$$

$$= \arctan x + \ln|x| + C$$

例8. 求 $\int \frac{x^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

解: 原式 $= \int \frac{(x^4-1)+1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{(x^2-1)(x^2+1)+1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int (x^2-1)\,\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - x + \arctan x + C$$

内容小结

1. 不定积分的概念

- 原函数与不定积分的定义
- 不定积分的性质
- 基本积分表 (见P196)

2. 直接积分法:

利用**恒等变形**, **积分性质** 及 **基本积分公式**进行积分 .

$$\text{常用恒等变形方法}\begin{cases}\text{分项积分}\\ \text{加项减项}\\ \text{利用三角公式，代数公式，}\cdots\end{cases}$$

思考与练习

1. 证明 $\arcsin(2x-1)$, $\arccos(1-2x)$ 和 $2\arctan\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$

都是 $\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ 的原函数.

2. 若 e^{-x} 是 $f(x)$ 的原函数，则

$$\int x^2 f(\ln x)\,\mathrm{d}x = \underline{\quad -\frac{1}{2}x^2 + C \quad}$$

提示: $f(x) = (\mathrm{e}^{-x})' = -\mathrm{e}^{-x}$

$$f(\ln x) = -\mathrm{e}^{-\ln x} = -\frac{1}{x}$$

3. 若 $f(x)$ 是 e^{-x} 的原函数，则

$$\int \frac{f(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x = \underline{\quad \frac{1}{x} + C_0 \ln|x| + C \quad}$$

提示: 已知 $f'(x) = e^{-x}$

$$\therefore \quad f(x) = -e^{-x} + C_0$$

$$f(\ln x) = -\frac{1}{x} + C_0$$

$$\frac{f(\ln x)}{x} = -\frac{1}{x^2} + \frac{C_0}{x}$$

4. 若 $f(x)$ 的导函数为 $\sin x$, 则 $f(x)$ 的一个原函数是 (**B**).

(A) $1+\sin x$; (B) $1-\sin x$;

(C) $1+\cos x$; (D) $1-\cos x$.

提示: 已知 $f'(x)=\sin x$

求 $(\ \textbf{?}\ )' = f(x)$

即 $(\ \textbf{?}\ )'' = \sin x$

或由题意 $f(x)=-\cos x+C_1$, 其原函数为

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\sin x + C_1 x + C_2$$

5. 求下列积分:

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+x^2)}$;　　(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

提示:

(1) $$\frac{1}{x^2(1+x^2)} = \frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

(2) $$\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

$$= \sec^2 x + \csc^2 x$$

6. 求不定积分 $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$.

解:

$$\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$$

$$=\int \frac{(e^x+1)(e^{2x}-e^x+1)}{e^x+1}dx$$

$$=\int (e^{2x}-e^x+1)dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x+C$$

7. 已知 $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = Ax\sqrt{1-x^2} + B\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

求 A , B .

解: 等式两边对 x 求导, 得

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = A\sqrt{1-x^2} - \frac{Ax^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{B}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{(A+B)-2Ax^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} A+B=0 \\ -2A=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2} \end{cases}$$