

第六节

函数图形的描绘

一、曲线的渐近线

二、函数图形的描绘



一、曲线的渐近线

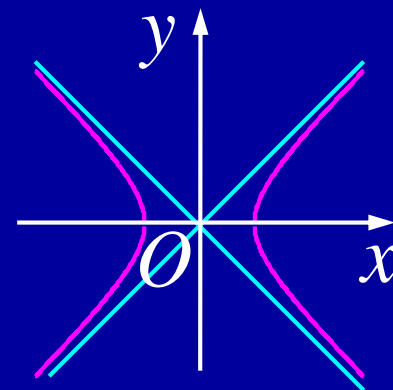
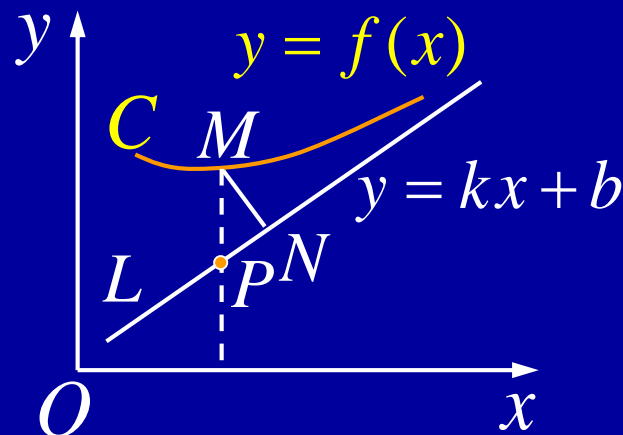
定义. 若曲线 C 上的点 M 沿着曲线无限地远离原点时, 点 M 与某一直线 L 的 距离 趋于 0, 则称直线 L 为曲线 C 的 **渐近线**.

或为“纵坐标差”

例如, 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

有渐近线 $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$

但抛物线 $y = x^2$ 无渐近线.



1. 水平与垂直渐近线

若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$, 则曲线 $y = f(x)$ 有水平渐近线 $y = b$.
(或 $x \rightarrow -\infty$)

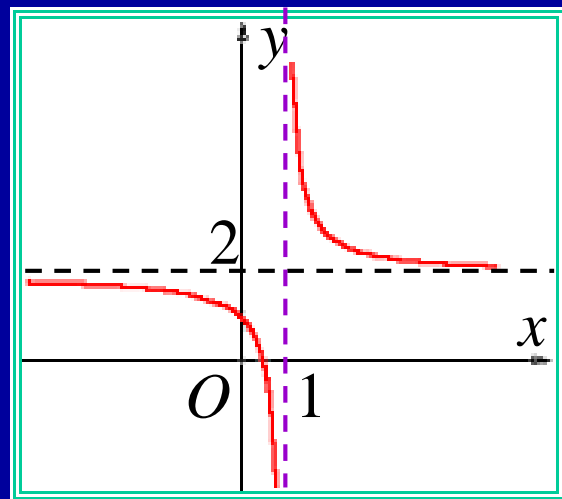
若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$, 则曲线 $y = f(x)$ 有垂直渐近线 $x = x_0$.
(或 $x \rightarrow x_0^-$)

例1. 求曲线 $y = \frac{1}{x-1} + 2$ 的渐近线.

解: $\because \lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{1}{x-1} + 2) = 2$

$\therefore y = 2$ 为水平渐近线;

$\because \lim_{x \rightarrow 1} (\frac{1}{x-1} + 2) = \infty$, $\therefore x = 1$ 为垂直渐近线.



2. 斜渐近线

若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$, 则曲线 $y = f(x)$ 有
(或 $x \rightarrow -\infty$) 斜渐近线 $y = kx + b$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0$$



$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - \frac{b}{x} \right]$$

\therefore

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

(或 $x \rightarrow -\infty$)

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx]$$

(或 $x \rightarrow -\infty$)



例2. 求曲线 $y = \frac{x^3}{x^2 + 2x - 3}$ 的渐近线.

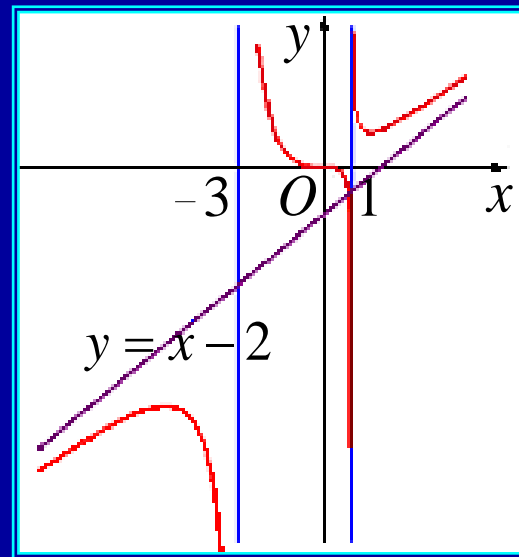
解: $\because y = \frac{x^3}{(x+3)(x-1)}, \lim_{x \rightarrow -3} y = \infty,$
(或 $x \rightarrow 1$)

所以有垂直渐近线 $x = -3$ 及 $x = 1$

$$\text{又因 } k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + 2x - 3} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 + 3x}{x^2 + 2x - 3} = -2$$

$\therefore y = x - 2$ 为曲线的斜渐近线.



二、函数图形的描绘

步骤：

1. 确定函数 $y = f(x)$ 的定义域，并考察其对称性及周期性,奇偶性，连续性；
2. 求 $f'(x)$, $f''(x)$, 并求出 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 为 0 和不存在的点；
3. 列表判别增减及凹凸区间，求出极值和拐点；
4. 求渐近线；
5. 确定某些特殊点，描绘函数图形。



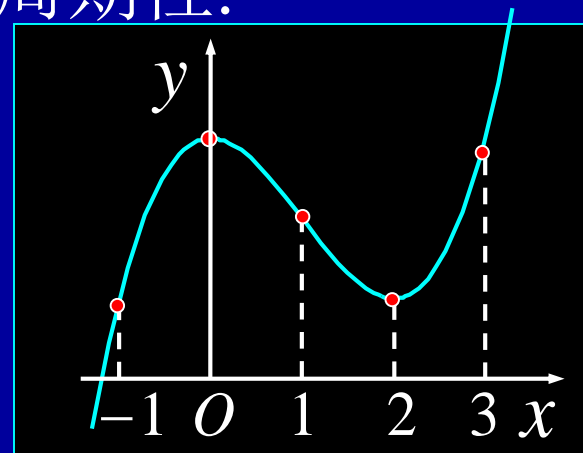
例3. 描绘 $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2$ 的图形.

解: 1) 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 无对称性及周期性.

2) $y' = x^2 - 2x$, $y'' = 2x - 2$,

令 $y' = 0$, 得 $x = 0, 2$

令 $y'' = 0$, 得 $x = 1$



3)	x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
	y'	+	0	-		-	0	+
	y''	-		-	0	+		+
	y		2		$\frac{4}{3}$		$\frac{2}{3}$	
			(极大)		(拐点)		(极小)	

4)	x	-1	3
	y	$\frac{2}{3}$	2



例4. 描绘方程 $(x-3)^2 + 4y - 4xy = 0$ 的图形.

解: 1) $y = \frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$, 定义域为 $(-\infty, 1), (1, +\infty)$

2) 求关键点. 原方程两边对 x 求导得

$$2(x-3) + 4y' - 4y - 4xy' = 0 \quad \text{①}$$

$$\therefore y' = \frac{x-3-2y}{2(x-1)} = \frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2}$$

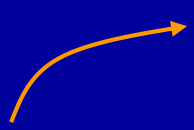
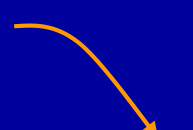
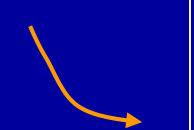
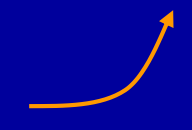
①两边对 x 求导得 $2 + 4y'' - 8y' - 4xy'' = 0$

$$\therefore y'' = \frac{1-4y'}{2(x-1)} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

令 $y' = 0$ 得 $x = -1, 3$;



3) 判别曲线形态

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y'	+	0	-	无定义	-	0	+
y''	-		-		+		+
y		-2				0	
		(极大)				(极小)	

4) 求渐近线

$\because \lim_{x \rightarrow 1} y = \infty, \therefore x = 1$ 为铅直渐近线

$$y = \frac{(x-3)^2}{4(x-1)}, \quad y' = \frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2}, \quad y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$$



又因 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \frac{1}{4}$, 即 $k = \frac{1}{4}$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(y - \frac{1}{4}x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{(x-3)^2}{4(x-1)} - \frac{1}{4}x \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x+9}{4(x-1)} = -\frac{5}{4}$$

$\therefore y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$ 为斜渐近线

5) 求特殊点

x	0	2
y	$-\frac{9}{4}$	$\frac{1}{4}$

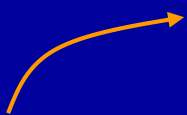
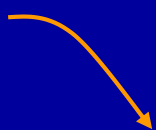
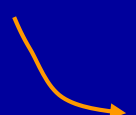
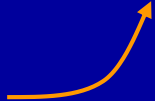
$$y = \frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$$

$$y' = \frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2}$$

$$y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$$



6) 绘图

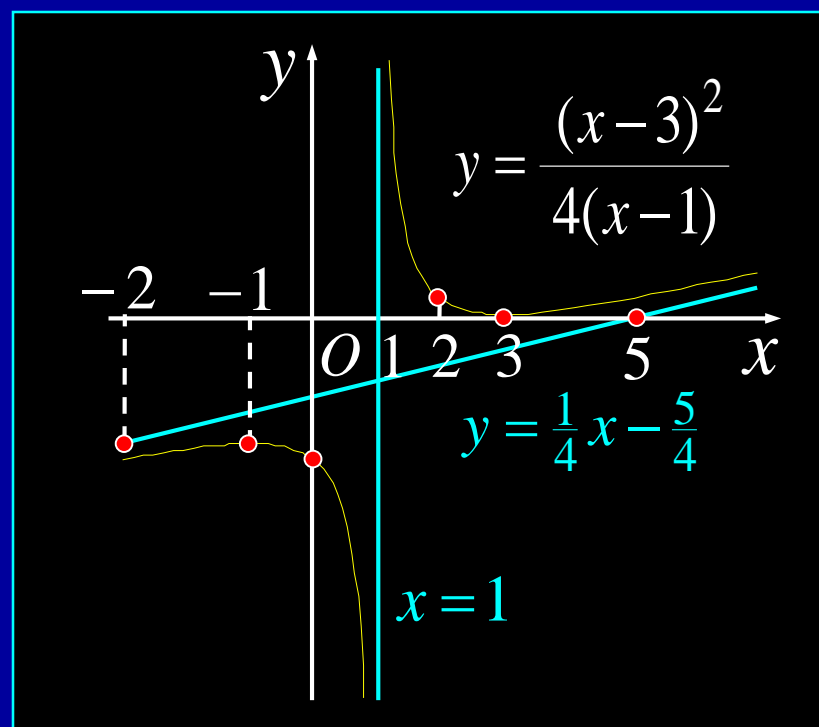
x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y		-2 (极大)		无定义		0 (极小)	

铅直渐近线 $x = 1$

斜渐近线 $y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$

特殊点

x	0	2
y	$-\frac{9}{4}$	$\frac{1}{4}$



例5. 描绘函数 $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的图形.

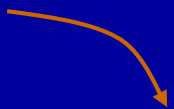
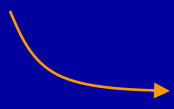
解: 1) 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 图形对称于 y 轴.

2) 求关键点

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad y'' = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (1 - x^2)$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 0$; 令 $y'' = 0$ 得 $x = \pm 1$

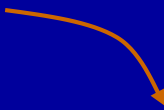
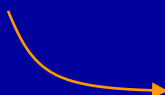
3) 判别曲线形态

x	0	(0, 1)	1	(1, +∞)
y'	0	—		—
y''		—	0	+
y	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$		$\frac{1}{\sqrt{2\pi}e}$	

(极大)

(拐点)



x	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	0	—		—
y''		—	0	+
y	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$		$\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$	

(极大)

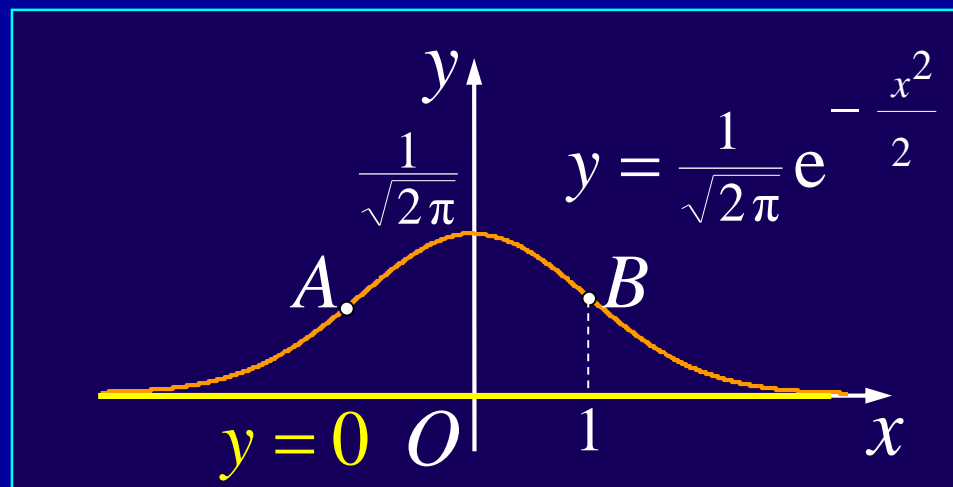
(拐点)

4) 求渐近线

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$$

$\therefore y = 0$ 为水平渐近线

5) 作图



内容小结

1. 曲线渐近线的求法

水平渐近线； 垂直渐近线；
斜渐近线

2. 函数图形的描绘 —— 按作图步骤进行



思考与练习

1. 曲线 $y = \frac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}$ (***D***)

(A) 没有渐近线;

(B) 仅有水平渐近线;

(C) 仅有铅直渐近线;

(D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线.

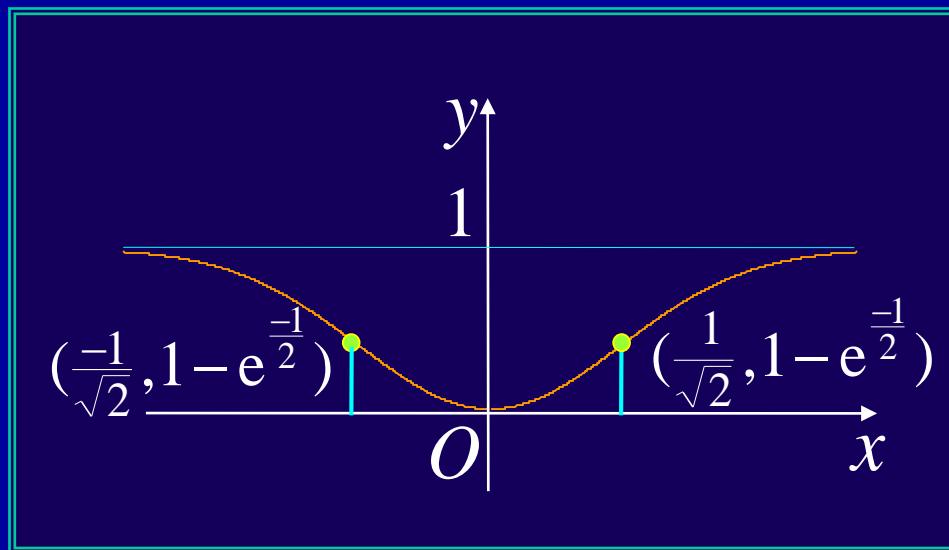
提示: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}} = 1;$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}} = \infty$



2. 曲线 $y = 1 - e^{-x^2}$ 的凹区间是 $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$,
凸区间是 $(-\infty, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ 及 $(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$,
拐点为 $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 - e^{-\frac{1}{2}})$, 渐近线 $y = 1$.

提示:

$$y'' = 2e^{-x^2} (1 - 2x^2)$$



备用题 求笛卡儿叶形线 $x^3 + y^3 = 3axy$ 的渐近线.

解: 令 $y = tx$, 代入原方程得曲线的参数方程:

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}, \quad t \neq -1$$

当 $x \rightarrow \infty$ 时 $t \rightarrow -1$, 因

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{\frac{3at^2}{1+t^3}}{\frac{3at}{1+t^3}} = -1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} [y - (-x)] &= \lim_{t \rightarrow -1} \left[\frac{3at^2}{1+t^3} + \frac{3at}{1+t^3} \right] = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{3at(1+t)}{(1+t)(1-t+t^2)} \\ &= -a \end{aligned}$$

所以笛卡儿叶形线有斜渐近线 $y = -x - a$

笛卡儿
叶形线

