第3节

齐次方程

一、齐次方程

*二、可化为齐次方程的方程

一、齐次方程

形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(\dfrac{y}{x})$ 的方程叫做**齐次方程** .

解法: 令 $u=\dfrac{y}{x}$, 则 $y=ux$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,

代入原方程得 $$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)$$

分离变量: $$\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

两边积分, 得 $$\int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

积分后再用 $\dfrac{y}{x}$ 代替 u, 便得原方程的通解.

例1. 解微分方程 $y' = \dfrac{y}{x} + \tan\dfrac{y}{x}$.

解: 令 $u = \dfrac{y}{x}$, 则 $y' = u + x u'$, 代入原方程得

$$u + x u' = u + \tan u$$

分离变量 $$\frac{\cos u}{\sin u}\,\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

两边积分 $$\int \frac{\cos u}{\sin u}\,\mathrm{d}u = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

此处 $C \neq 0$

得 $\ln\left|\sin u\right| = \ln\left|x\right| + \ln\left|C\right|$, 即 $\sin u = C\,x$

故原方程的通解为 $\sin\dfrac{y}{x} = C\,x$ （C 为任意常数）

（当 $C = 0$ 时, $y = 0$ 也是方程的解）

例2. 解微分方程 $(y^2-2xy)\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = 0.$

解: 方程变形为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\dfrac{y}{x} - \left(\dfrac{y}{x}\right)^2$, 令 $u = \dfrac{y}{x}$,

则有 $$u + xu' = 2u - u^2$$

分离变量 $\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2-u} = -\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ 即 $\left(\dfrac{1}{u-1} - \dfrac{1}{u}\right)\mathrm{d}u = -\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$

积分得 $\ln\left|\dfrac{u-1}{u}\right| = -\ln|x| + \ln|C|$, 即 $\dfrac{x(u-1)}{u} = C$

代回原变量得通解 $x(y-x) = Cy$ (C 为任意常数)

说明: 显然 $x = 0$, $y = 0$, $y = x$ 也是原方程的解, 但在求解过程中丢失了.

*二、可化为齐次方程的方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\qquad (c^2+c_1^2\neq 0)$$

1. 当 $\frac{a_1}{a}\neq\frac{b_1}{b}$ 时, 作变换 $x=X+h,\ y=Y+k$ (h, k 为待定常数), 则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}X$, $\mathrm{d}y=\mathrm{d}Y$, 原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{aX+bY+ah+bk+c}{a_1X+b_1Y+a_1h+b_1k+c_1}$$

令 $\begin{cases} ah+bk+c=0 \\ a_1h+b_1k+c_1=0 \end{cases}$, 解出 h , k

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{aX+bY}{a_1X+b_1Y}\qquad \text{(齐次方程)}$$

求出其解后, 将 $X = x - h, Y = y - k$ 代入, 即得原方程的解.

2. 当 $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$ 时, 原方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{ax + by + c}{\lambda(ax + by) + c_1}$$

令 $v = ax + by$, 则 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = a + b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = a + b\,\frac{v + c}{\lambda v + c_1}$$ (可分离变量方程)

注: 上述方法可适用于下述更一般的方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1 x + b_1 y + c_1}\right) \quad (c^2 + c_1^2 \neq 0)$$

例4. 求解 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x+y+4}{x-y-6} \\ y\big|_{x=2} = -5 \end{cases}$

解: 令 $\begin{cases} h+k+4=0 \\ h-k-6=0 \end{cases}$ 得 $h=1, k=-5$

令 $x = X+1, y = Y-5$, 得 $\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \dfrac{X+Y}{X-Y}$

再令 $Y = Xu$, 得

$$\frac{1-u}{1+u^2}\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}X}{X}$$

积分得 $\arctan u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln|CX|$

代回原变量, 得原方程的通解:

$$\arctan\frac{y+5}{x-1}-\frac{1}{2}\ln\left[1+\left(\frac{y+5}{x-1}\right)^2\right]=\ln\left|C(x-1)\right|$$

利用 $y\big|_{x=2}=-5$ 得 $C=1$，故所求特解为

$$\arctan\frac{y+5}{x-1}=\frac{1}{2}\ln\left[(x-1)^2+(y+5)^2\right]$$

思考: 若方程改为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x+y+4}{x+y-6}$,如何求解?

提示: 令 $v=x+y$.