南京信息工程大学 2016-2017 线性代数 期末试卷 A 加强解析版

一．填空题 3’*5

1.设A是4×3矩阵，且秩$R(A)=2$,而$B=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}$则秩$R(AB)=$

根据性质，B满秩的条件下，$R(AB)=\min(R(A),R(B))$那么有$R(AB)=\min(2,3)=2$

其中函数$\min(x,y)$是指取x,y最小的那个，同时显然矩阵B是非奇异的【非奇异是指矩阵的行列式的值不等于零】

2.设 3 阶可逆矩阵A满足$27|A|=|kA|$,则$k=$

根据性质$|aA|=a^n|A|$,其中n为矩阵A的行数或者列数，那么有$27|A|=|kA|=k^n|A|\Rightarrow k^3=27\Rightarrow k=3$

3.设$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{pmatrix}$, A^*是A的伴随矩阵，则$(A^*)^{-1}=$

显然矩阵A非奇异，那么必然可逆，因而有$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*\Rightarrow A^{-1}|A|=A^*\Rightarrow (A^*)^{-1}=(A^{-1}|A|)^{-1}=\frac{1}{|A|}A$

显然本题是需要计算行列式的值的，用行列式符号表示那么有$(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A=\frac{A}{\det A}=\frac{1}{10}A$

同时本题也需要记住，下三角矩阵或者上三角矩阵的行列式的值直接将对角线的数相乘即可

4.设A是三阶矩阵，已知$|A+iE|=0(i=1,2,3)$，则$|A+4E|=$

根据矩阵特征值的性质$|A+iE|=|A-(-i)E|=0$，那么$-1,-2,-3$为矩阵A的特征值，那么矩阵$A+4E$的特征值为

$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3=(4-1,4-2,4-3)=3,2,1$那么该矩阵的行列式的值由行列式与特征值的性质可以得到: $|A+4E|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=3\times 2\times 1=6$

5.二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+tx_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$是正定的，则$t$的取值范围是

首先将二次型转为矩阵，那么,且每一个小的分割都是正的，有

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&3&0\\1&0&t\end{pmatrix}\Rightarrow (2)>0,\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}>0,\begin{pmatrix}2&1&1\\1&3&0\\1&0&i\end{pmatrix}>0\Rightarrow 1\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&1\\3&0\end{vmatrix}+t\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2&1\\1&3\end{vmatrix}=-3+5t>0\Rightarrow i>0.6$$

二、选择题 3’*5

1.设A,B都是n阶矩阵，且$AB=0$则下列一定成立的是【 】

(A)$A=0\ or\ B=0$(B)A,B都不可逆(C) A,B中至少有一个不可逆(D) $A+B=0$

反例 AD:A: $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, B: $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$,反例 B: A: $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, B: $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

需要注意的是$A=0$不是行列式的值，而是零矩阵

2.已知n阶行列式$|A|=2$, m阶行列式$|B|=-2$,则$m+n$阶行列式$\begin{vmatrix}A&0\\0&B\end{vmatrix}$的值为【 】

(A)0 (B)-1 (C)4 (D)-4

根据行列式的性质有：$\det\begin{vmatrix}A&0\\0&B\end{vmatrix}=|A||B|=2\times(-2)=-4$

3.设A为n阶方阵，A的秩$r<n$,那么在A的n个列向量中【 】

(A) 必有r个列向量线性无关 (B) 任意r个列向量线性无关

(C) 任意r个列向量都构成最大线性无关组

(D) 任何一个列向量都可以由其他r个列向量线性表出

矩阵秩小于矩阵的维度n,那么必然有$n-r$个零行或者列即这些是相关的。显然 BC 不能成立，同样D也不能表示。

4.设A是 3 阶方阵，将A的第一列与第二列交换得到B,再把B的第二列加到第三列得到C，则满足$AQ=C$的可逆矩阵Q为【 】

$$(A)\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}(B)\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}(C)\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}(D)\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

本题是左乘右乘的例子，那么根据左行右列，那么两步分别有：$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0&1&1+0\\1&0&0+0\\0&0&0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

5.A,B是同阶方阵，如果他们具有相同的特征值，则【 】

(A)A,B相似(B)A,B合同(C) $|A|=|B|$(D) $A=B$

特征值相同，显然有相同的行列式的值，选 C。反例：A: $\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}$, B: $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$ABD 均不符合，

三、计算行列式 10’

$$D=\begin{vmatrix} x+1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+n \end{vmatrix}$$

第一步：从最后一行开始，依次减去第一行。第二步：将所有列加到第一列：

$$=\begin{vmatrix} x+1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -x & x & 0 & \cdots & 0 \\ -x & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -x & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} x+\dfrac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} = \left[x+\frac{n(n+1)}{2}\right]x^{n-1}$$

四、10’已知$AB-B=A$,其中$B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$求$A$

$$AB-B=A\Rightarrow A(B-E)=B\Rightarrow A=B(B-E)^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-2&0\\2&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&-2&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\dfrac{2}{4}&0\\ \dfrac{-2}{4}&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0.5&0\\-0.5&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0.5&0\\-0.5&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

五、10‘已知向量组$\alpha_1=(1,-1,2,4)^T,\alpha_2=(0,3,1,2)^T,\alpha_3=(1,-1,2,0)^T,\alpha_4=(2,1,5,6)^T$,求它的秩及一个最大线性无关组，并将其余向量用此最大线性无关组线性表示

求它的秩，那么得到

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&0&1&2\\-1&3&-1&1\\2&1&2&5\\4&2&0&6\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-4r_1]{\substack{r_2+r_1\\ r_3-2r_1}}\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&3&0&3\\0&1&0&1\\0&2&-4&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{r_2\div 3\\ r_4\div 2}}\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&0&1\\0&1&0&1\\0&1&-2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{r_3-r_2\\ r_4-r_2}}\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&-2&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4\div(-2)}\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_4}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

显然三列对应是线性无关的，即选取$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$那么剩余的$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

六、10‘证明向量$\alpha_1=(1,1,0)^T,\alpha_2=(2,1,3)^T,\alpha_3=(0,0,1)^T$为$R^3$的一组基，并求向量$\alpha=(2,1,2)^T$在该基下的坐标

①证明：

$$D=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&0\\0&3&1\end{pmatrix}=-1\neq 0 \text{ 所以为}R^3\text{的 一组基，}$$

②求解坐标：

$$\text{设坐标为}(x_1,x_2,x_3)\text{那么有}\begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&0\\0&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$$

那么解扩展矩阵得到

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1&2&0&2\\1&1&0&1\\0&3&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&2&0&2\\0&-1&0&-1\\0&3&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{r_1+2r_2\\ r_3+3r_2}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&-1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\times(-1)}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

因而在该基下的坐标为$(0,1,-1)$

七、10‘求方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=2\\2x_1+3x_2+x_3+x_4=1\\x_1+2x_3+2x_4=5\end{cases}$的通解及对应的齐次方程组的基础解系

①首先得到扩展矩阵那么

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&2\\2&3&1&1&1\\1&0&2&2&5\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{r_2-2r_1\\ r_3-r_1}}\begin{pmatrix}1&1&1&1&2\\0&1&-1&-1&-3\\0&-1&1&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{r_1-r_2\\ r_3+r_2}}\begin{pmatrix}1&0&2&2&5\\0&1&-1&-1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1+2x_3+2x_4=5\\x_2-x_3-x_4=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-2x_3-2x_4+5\\x_2=x_3+x_4-3\end{cases}$$

②显然自由量为(x_3,x_4)那么设线性无关向量有$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$那么带入到紫色部分方程得到对应的齐次方程的两个线性无关

向量解:【同理得到绿色对应的向量解】因而得到

$$\begin{cases} x_1 = -2\cdot 1 - 2\cdot 0 = -2 \\ x_2 = 1 + 0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{y} = k_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

③因而非齐次线性方程组的特解只需要设$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2\cdot 0 - 2\cdot 0 + 5 = 1 \\ x_2 = 0 + 0 - 3 = -3 \end{cases}$因而得到非齐次方程组的通解:【$\bar{y}$为对应齐次方程组的基础解系】

$$y = \bar{y} + \eta = k_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

八、10‘设$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，求一个正交矩阵$P$，使得$P^{-1}AP$为对角矩阵

矩阵对角化那么首先需要求其对应的特征值，那么有

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 + r_2 + r_3} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3-\lambda & 3-\lambda \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 3,0,0$$

将特征值依次带入$(A - \lambda E)x = 0$得到$\lambda = 3$对应的特征向量:【令自由量为 1 或 0】

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 1 & 1 \\ 1 & 1-3 & 1 \\ 1 & 1 & 1-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_2]{r_1 + 2r_2} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 \div 3]{r_1 + r_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 + 2r_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow b_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

单位化为$p_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

同理$\lambda = 0,0$的对应特征向量为【不相关】: $x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = p_2: \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, p_3: \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

由于是二重根,因而需要正交化,利用施密特正交取:$b_2 = p_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b_3 = p_3 - \frac{[p_2, p_3]}{[p_2, p_2]}p_2 = p_3 - \frac{p_2^T p_3}{p_2^T p_2}p_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$

单位化后得到: $b_2 = \frac{b_2}{|b_2|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \frac{b_3}{|b_3|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

那么得到对应的

$$P = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \dfrac{2}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

九、10‘设η为非齐次线性方程组$Ax = b$的一个解，$\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_s$为对应齐次线性方程组的基础解系，试证：$\eta, \xi_1, \xi_2 \cdots \xi_s$线性无关。

证明:

因为η为非齐次的一个解，那么存在$A\eta = b$而$\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_s$为对应齐次线性方程组的基础解系，那么$A\xi_1 = 0, A\xi_2 = 0, \cdots, A\xi_s = 0$,且只存在零解数$k_i$使得$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots k_s\xi_s = 0$，即$k_i = 0$或$\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_s$线性无关

设k_η，那么证明线性无关会有$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots k_s\xi_s + k_\eta\eta = 0$，且$k_i = k_\eta = 0$那么:

$$A(k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots k_s\xi_s + k_\eta\eta) = Ak_1\xi_1 + Ak_2\xi_2 + \cdots Ak_s\xi_s + Ak_\eta\eta = k_1A\xi_1 + k_2A\xi_2 + \cdots k_sA\xi_s + k_\eta A\eta$$
$$= k_1\cdot 0 + k_2\cdot 0 + \cdots + k_s\cdot 0 + k_\eta b = k_\eta b = 0$$

由于$b \neq 0$所以只有$k_\eta = 0$,进而$k_i = k_\eta = 0$,那么显然他们是线性无关的