# 南京信息工程大学 试卷

2015 一 2016 学年 第 二 学期 线性代数(?) 课程试卷( A 卷)

本试卷共 2 页；考试时间 120 分钟；任课教师_______；出卷时间 2016 年 6 月

____________系 ____________专业 ______班

学号____________ 姓名____________ 得分________

一、填空题(每题 3 分，共 15 分) 一、-3，-1，A-E，3,-1,5 1

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 4 & t & 3\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$，$B$ 为三阶非零矩阵，且 $AB=0$，则 $t=$____. -3

二、DBBBA

2. 行列式 $D=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1 & 7\\ 1 & 1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 3 & 5\\ 7 & 9 & -1 & 4\end{vmatrix}$，则 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=$______: -1

3. 若方阵 $A$ 满足 $A^*+A+E=O,|A|=-3$，则 $(A+2E)^{-1}=$ A-E ：$\cancel{A^2+2A}$

4 已知三阶矩阵 $A$ 的特征值为 $1,-1,2$，则矩阵 $B=2A+E$ 的特征值为______.

3，-1, 5

5 设 $A,B$ 为 4 阶方阵，且秩 $r(A)=4$，$r(B)=3$，$A$ 和 $B$ 的伴随矩阵为 $A^*$ 和 $B^*$，

则 $R(A^*B^*)=$______. 1 $R(A^*)=4$ $R(B^*)=1$

二、选择题(每题 3 分，共 15 分)

1．若 $A^2=0$，则（ D ）

(A) $A=0$ (B) $A$ 是正交阵 (C) $-A=0$ (D) $|A|=0$

2 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关, $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关命题中，不一定成立的是（ B ）

（A）$\alpha_1$ 不能被 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示； （B）不能被 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示；

（C）$\alpha_4$ 能被 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示； （D）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关.

3. 设 $A$ 为 3 阶方阵，数 $\lambda=-2$，$|A|=3$，则 $|\lambda A|=$（B ）

（A）24 （B）-24 （C）6 （D）-6

$(-2)^3\times 3=-24$

3 求方程组$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_4=2 \\ 2x_1+4x_2-2x_3+5x_4=1 \\ -x_1-2x_2+x_3-x_4=4 \end{cases}$ 的通解及对应的齐次方程组的基础解系.

解：$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 4 分

该方程的一个特解为$\eta^*=\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, 6 分

该方程对应齐次方程组的基础解系为$\xi_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; 8 分

所求通解为：$\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$， $k_1, k_2 \in R$ 10 分

4 已知二次型 $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$，通过正交变换化为标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求所用的正交变换矩阵.

解： 对应于特征值 $\lambda_1=1$ 的特征向量 $\xi_1=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，单位化，得 $p_1=\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}=\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$；

对应于特征值 $\lambda_2=2$ 的特征向量 $\xi_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，单位化，得 $p_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$； 5 分

对应于特征值$\lambda_3=5$的特征向量$\xi_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$,单位化,得$p_3=\frac{\xi_3}{\|\xi_3\|}=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

正交变换矩阵$P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$. 10 分

5 设 3 阶方阵$A,B$满足方程 $A^2B-A-B=E$，试求矩阵$B$以及行列式$|B|$，

其中$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

解： 根据题设$A,B$满足方程 $A^2B-A-B=E$，则 $(A^2-E)B=A+E$ 4 分

$$B=(A^2-E)^{-1}(A+E)=(A-E)^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$ 8 分

$$|B|=1/2$$ 10 分

6 设 $R^3$ 的两组基分别为： $\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(0,-1,1)^T,\alpha_3=(-2,1,0)^T$ 和 $\beta_1=(3,-2,-1)^T,\beta_2=(-2,1,3)^T,\beta_3=(-2,1,0)^T$.

(1) 求在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$下的过渡矩阵；

(2) 求向量$\gamma=(-5,1,3)^T$在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标；

**解：**(1) 设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，则基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$和 基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵$P$，$P=A^{-1}B$，利用初等变换计算矩阵$P$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & -2 & 3 & -2 & -2\\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & -1 & 3 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & -2 & 3 & -2 & -2\\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & -4 & 5 & 2\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&-2&3&-2&-2\\0&-1&1&-2&-1&-1\\0&0&3&-6&6&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&-2&3&-2&-2\\0&-1&1&-2&-1&-1\\0&0&1&-2&2&1\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-1&2&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&-2&2&1\end{array}\right)，\quad 则 P=\begin{pmatrix}-1&2&0\\0&1&0\\-2&2&1\end{pmatrix}.$$ 6 分

(3) 向量 $\gamma$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示的关系式为 $\gamma=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，则 $x=A^{-1}\gamma$，利用初等行变换计算坐标向量 $x$：

$$\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-2&-5\\0&-1&1&1\\1&1&0&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-2&-5\\0&-1&1&1\\0&1&2&8\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-2&-5\\0&1&-1&-1\\0&0&1&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{array}\right),$$

则 $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$. 10 分

7 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 为 $m+1$ 维列向量，$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m\ (m>1)$，证明若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，则向量组 $\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\cdots,\beta-\alpha_m$ 线性无关.

**证明** 令 $k_1(\beta-\alpha_1)+k_2(\beta-\alpha_2)+\cdots k_m(\beta-\alpha_m)=0$，因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，

$$所以\begin{cases}k_2+k_3+\cdots k_m=0\\k_1+k_3+\cdots k_m=0\\\vdots\\k_1+k_2+\cdots+k_{m-1}=0\end{cases},$$ 5 分

因为 $D=\begin{vmatrix}0&1&\cdots&1\\1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\vdots&0\end{vmatrix}=(-1)^{m-1}(m-1)$ 不等于 0，所以 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$，从而

$\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\cdots,\beta-\alpha_m$ 线性无关. 10 分