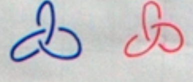
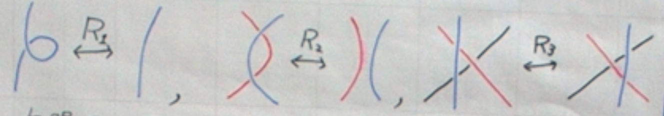
<結び目、絡み目の不変量> メンバー:清井、中野、前村、吉田

目標　右手系，左手系の三葉結び目を区別しよう!



§0. 導入

Def ライデマイスター移動



有限回のライデマイスター移動で一方を他方に変形できることを"同値"であるという。

§1. 絡み数

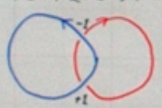
向きのついた絡み目の交点を、右巻きの交点、左巻きの交点とする。

Def. 絡み数

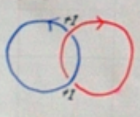
異なる成分が交わる交点において、右巻き交点に+1、左巻き交点に−1を対応させ、それらを足し合わせて2で割った数を絡み数とする。交点がない場合は0。

Thm. 絡み数の絶対値は不変量になる。

Ex.



絡み数0,



絡み数1

§2 コンウェイ多項式

向きの付いた絡み目Lから交点を適当に1つ選ぶと、それは右巻き交点か左巻き交点のいずれかであり、交点の上下を入れ換えると、左右が逆転する。

Def

選んだ交点が（右巻き）の時

$L_+ = $, $L_- = $, $L_0 = $

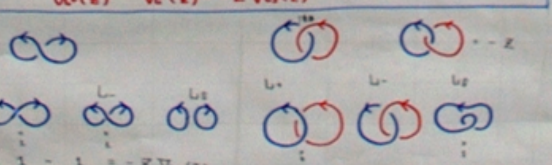
Def コンウェイ多項式

① 単位円周と同値な絡み目Ｖのコンウェイ多項式を $\nabla_V(z) = 1$ とする。

② 上の L_+, L_-, L_0 に対して、それらのコンウェイ多項式は次の関係を満たす。

$$\nabla_{L_+}(z) - \nabla_{L_-}(z) = -z\nabla_{L_0}(z)$$

Ex



$1 - 1 = -z\nabla_{L_0}(z)$

$\nabla_{L_0}(z) = 0$

$0 - \nabla_{L_-}(z) = -z$

$\nabla_{L_-}(z) = z$

§3. カウフマンのブラケット多項式

Def (平滑化)

向きの付いていない絡み目の交点をなす2本のひもをそれぞれ切り、ひもの端点でつないで左右に分ける方法(A型)と上下に分ける方法(B型)の2通りを平滑化という。

╳ のとき A型は)(, B型は

Def (カウフマンのブラケット)

D：向きの付いていない絡み目Lの交点を╳としたもの。

Dのステイト：Dの各交点をA型又はB型に平滑化したもの。

t：変数とし、Dの各ステイトSにおいて $\langle D|S\rangle = t^{a-b}$ とする。

ただし、a：A型の個数、b：B型の個数とし、$|S|$：Sの円周の個数とする。

この時、$\langle D\rangle := \sum_S \langle D|S\rangle(-t^2-t^{-2})^{|S|-1}$ をカウフマンのブラケットという。

Ex

$D_1 = $ ○ $D_2 = $ ∞ の時 $\langle D_1\rangle, \langle D_2\rangle$ を求めよ。

解) D_1は交点がないので、$a=b=0$, $|S_1|=1$ より $\langle D_1\rangle = t^0(-t^2-t^{-2})^{1-1} = 1$

D_2を平滑化すると、$S_{2A} = $ ○○ $(a=1, b=0)$, $S_{2B} = $ ⊂⊃ $(a=0, b=1)$

$|S_{2A}| = 2$, $|S_{2B}| = 1$ より、$\langle D_2\rangle = t^{1-0}(-t^2-t^{-2})^{2-1} + t^{0-1}(-t^2-t^{-2})^{1-1} = -t^{3}$

Def (カウフマンのブラケット多項式)

L：向きの付いた絡み目(結び目)、r：右巻き交点数、l：左巻き交点数

この時、$F_L(t) := (-t)^{3(r-l)}\langle D\rangle$ をカウフマンのブラケット多項式という。

Ex

上のD_1に向きを付け $L_1 = $ ○ とすると $r=l=0$ より $F_{L_1}(t) = (-t)^{3(0-0)} \cdot 1 = 1$

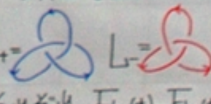
上のD_2に向きを付け $L_2 = $ ∞ とすると $r=1, l=0$ より $F_{L_2}(t) = (-t)^{3(1-0)}(-t)^{3} = 1$

Thm

L：結び目の時、$F_L(t)$はLの向きの選び方に依らない。

即ち、$F_L(t)$は向きの付いていない結び目の不変量である。

以上を踏まえ、右手系と左手系の三葉結び目の$F_L(t)$を求める。



$L_+ = $, $L_- = $ の平滑化は $2^3 = 8$ パターン考えられ、

それぞれ $F_{L_+}(t)$, $F_{L_-}(t)$ を計算すると、

$F_{L_+}(t) = -t^{16} + t^{12} + t^{4}$, $F_{L_-}(t) = -t^{-16} + t^{-12} + t^{-4}$

となり、$F_{L_+}(t) \neq F_{L_-}(t)$ ゆえ、三葉結び目の左手系と右手系が同値でないことが分かった。