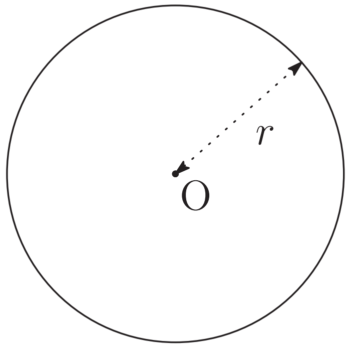
9 円の数学

多元数理科学研究科 D2 足立真訓

この文書は「名古屋大学理学部 新歓サイエンスカフェ 2011」での展示に用いたものです。
学部に入学したばかりの 1 年生に、高校の数学とのつながりを意識しながら、
大学の数学の勉強が始められるように、話題と本の紹介をすることを目指しました。

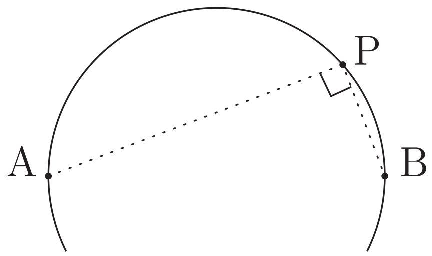
1° 円の定義

(1) 円は「平面上で、ある 1 点から等しい距離にある点の集まり」として定義されます。



(2) この説明に満足せずに、他の方法で定義 (特徴付け) はできないでしょうか。例えば、次の定理は中学校で習うものです。

定理. 平面上に相異なる 2 点 A, B をとる。$\angle \mathrm{APB} = \pi/2$ となる点 P の集まり (に点 A, B を合わせて考えた集合) は円をなす。



(3) 他にどのような定義が可能でしょうか？例えば、「円の周長と囲む面積」「円の幅」「円の曲がり具合」に注目してみて下さい。

参考. ラーデマッヘル、テープッツ『数と図形』(ちくま学芸文庫) にいくつか解説があります。このように図形の特徴付けを探す問題は、幾何学の基本的な問題です。有名なポアンカレ–ペレルマンの定理は、3 次元球面

$$\{(x,y,z,w)\,|\,x,y,z,w \text{ は実数}.\ x^2+y^2+z^2+w^2=1\}$$

の位相的な特徴づけの問題です。

2° 円と有理数

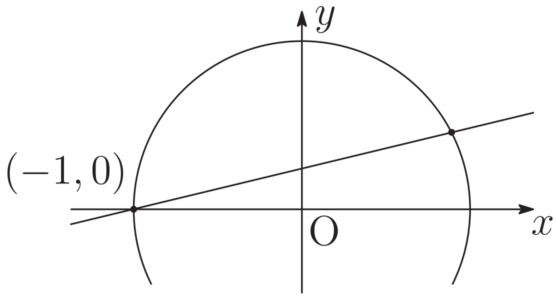
(1)　座標平面で考えると、単位円は次のように定義されます。

$$\{(x,y)\,|\,x,y \text{ は実数}.\, x^2+y^2=1\}$$

(2)　2 つの実数の組で円の上の点を指し示すことができますが、2 つの座標が同時に有理数になる点はどのくらいあるでしょうか？

$$\{(x,y)\,|\,x,y \text{ は有理数}.\, x^2+y^2=1\}$$

ヒント.　直線を引くと、円と直線は一般に 2 つの交点をもつ。交点の性質を考えよ。



(3)　それでは半径を例えば $\sqrt{3}$ に変えてみるとどうなるだろう？

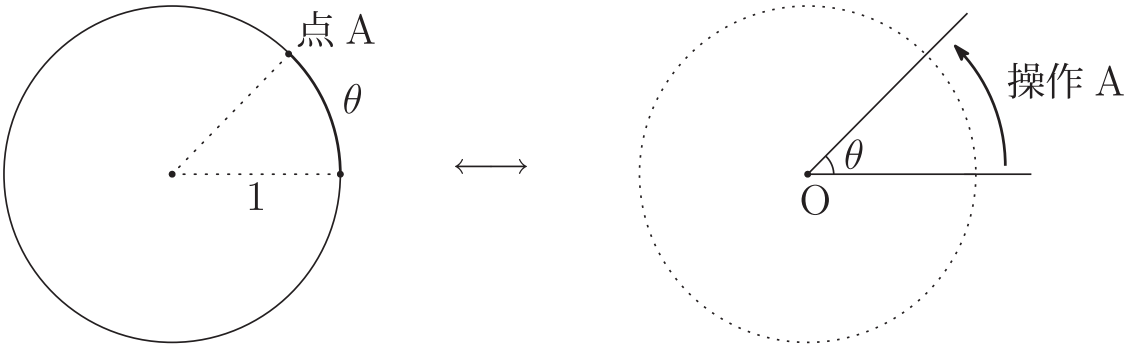
$$\{(x,y)\,|\,x,y \text{ は有理数}.\, x^2+y^2=3\}$$

半径 3 をもっと他の整数に変えるとどうなるだろう？

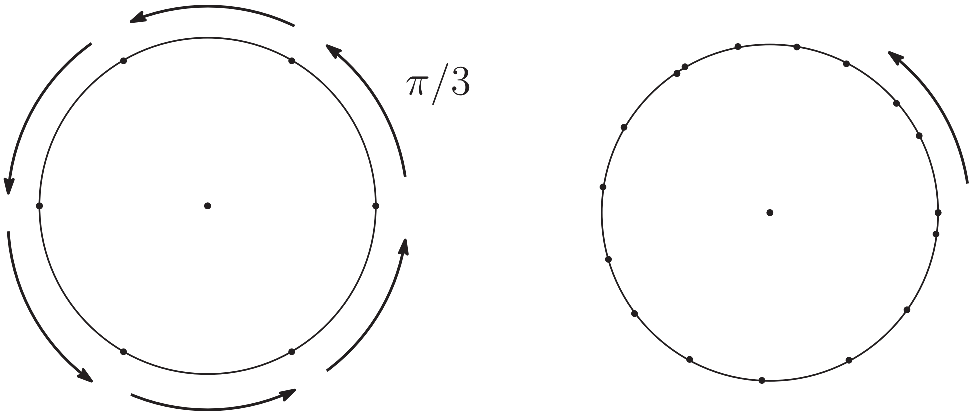
参考.　数理学科 3 年生の数学演習の問題を参考にしました。加藤、黒川、斎藤『数論 I 』(岩波書店) に本格的な解説があります。有名なフェルマー予想はワイルズの定理として解決されましたが、この手の曲線に有理点が存在するかの問題はまだまだ未解決なものが多くあり、活発に研究が行われています。

3° 円と回転

(1)　ラジアンの定義を思い出すと、角度とは円そのもののことだったと気付きます。つまり、ある角度回転する操作の集まりとして円を定義することもできます。



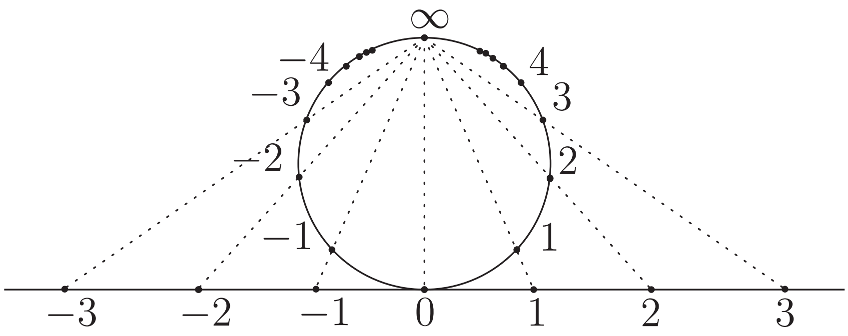
(2)　図形としての円から 1 点を、操作の集まりとしての円からも 1 点をとりましょう。すると、図形としての円の 1 点に対して 1 つ選んだ回転を繰り返し適用できます。左図のように有限回で元に戻ってくることもあります。常にそうなるでしょうか？そうならない時は、どのように軌跡は分布するでしょうか？



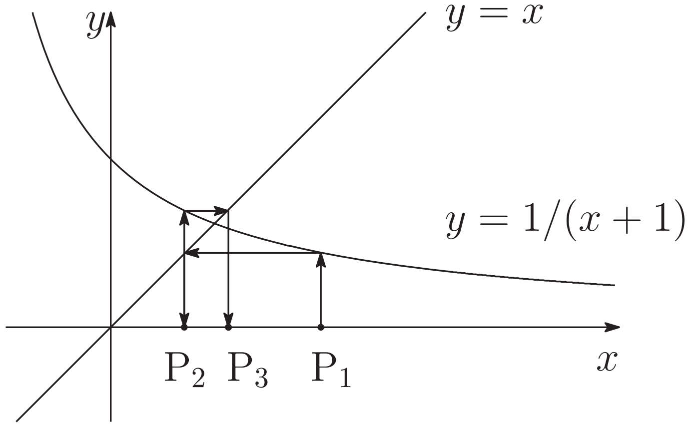
参考.　「何かを保つような操作の集まり」の集合を群 (ぐん) と呼びます。このページでは、円の合同変換の群を考えました。素粒子物理学では方程式の対称性を記述する連続群が、化学では分子や結晶の対称性を記述する離散群がよく使われます。杉浦、山内『連続群論入門』(培風館)、原田『群の発見』(岩波書店) などで群論に入門することができます。

4° 円と 1 次分数変換

(1) 次の対応で, 直線に ∞ を補ったものを円だとみなします。



(2) この ∞ を補った直線上で $x \longmapsto (ax+b)/(cx+d)$ という変換を考えます。このような操作の集まりは、群になっており、1 次分数変換群、あるいはメビウス群と呼ばれます。3° のように、操作の繰り返しを考えてみます。3° では 2 パターン生じましたが、今度はどのような現象が発生するでしょうか？

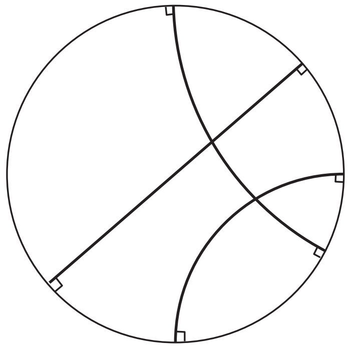


例. $x \longmapsto 1/(x+1)$ の場合.

参考. 1 次分数変換のうち $ad - bc > 0$ を満たす変換全体は、円の内部を「ポアンカレ円板」という空間とみなした時の合同変換群になっています。1 次分数変換群については、アールフォルス『複素解析』（現代数学社）に詳しい解説があります。

5° ポアンカレ円板と球面

(1) 円の内部をポアンカレ円板だとみなします。このように宣言すると、この空間内での「直線」という意味が変わります。「直線」とは普通のユークリッドの意味の直線ではなく、円周に直交するような円弧や直線のことになります。



(2) このように「直線」などの意味を我々は定義してから幾何学を始めることができます。球面上であれば、大円を直線だとみなして幾何学を行います。地球儀上で 2 点を結ぶ最短経路が大円となっていることから、この定義は直観的にも受け入れられるでしょう。

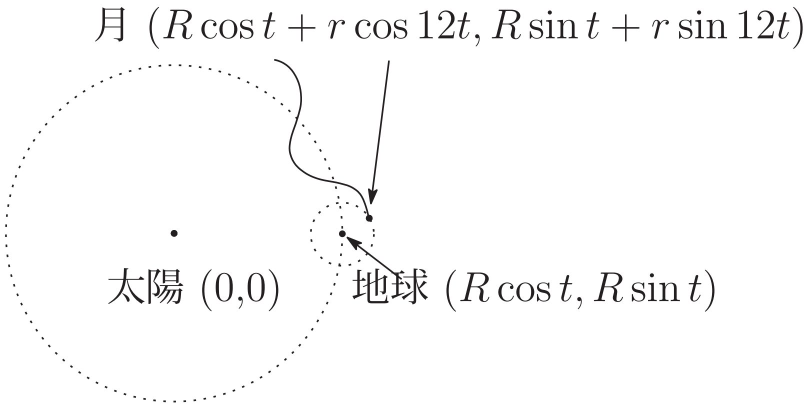
(3) 球面、ふつうの平面、ポアンカレ円板の 3 つの幾何学の例を上げました。この 3 つの幾何学はどう異なっているでしょうか？考えてみて下さい。

ヒント. それぞれの空間内での円や三角形に注目してみましょう。

参考. 正確には「計量」と呼ばれる空間内の曲線の長さの測り方を定めることで、直線などの幾何学が決まります。微分幾何学へは、梅原、山田『曲線と曲面』（裳華房）から入門することができます。

6° 円と関数の分解

(1)　ごく近似的に考えると、地球は太陽の周りを 1 年周期で円運動し、月は地球の周りを 1 カ月周期で円運動しています。このように月の運動は円運動の組合せで近似的に説明できますが、太陽を基準に考えると月は複雑な形状を描いて運動しています。



(2)　逆に複雑な運動がある時に、それを円運動に分解して説明することはできるでしょうか？円運動は三角関数を使って、

$$\{(\cos(\omega t+\alpha), \sin(\omega t+\alpha)) \mid t \text{ は時刻を表す実数 }\}$$

のように表せるので、数学的な問題としては関数を三角関数の和に分解する問題とみなせます。

(3)　周期 2π の関数 $f(x)$ が与えられ、三角関数 $\cos kx$ を使って、

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx$$

と表せたと仮定しましょう。この時、係数 a_k はどのように求められるでしょうか？

ヒント.　高校で習った積分公式を使います。

参考.　このように関数を分解することをフーリエ展開と呼びます。新井『フーリエ解析と関数解析学』(培風館) などで勉強することができます。月の軌道についてはロゲルギスト『第五 物理の散歩道』(岩波書店) も面白い。