Furstenbergs

小久保 貴正
荻野 理咲
藤野 弘基
山口 航平

$\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$を素数列($\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}=\{2,3,5,7,\cdots\}$)とし、

$$a_n=\left(\prod_{i=1}^{n}p_i\right)^n$$

として数列$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$を定義すると、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$は0に収束する。

Def (開集合基)

$(X,\mathcal{O}_X)$を位相空間とする。

$\mathcal{B}_X\subset\mathcal{O}_X$が$(X,\mathcal{O}_X)$の開集合基であるとは

$\Leftrightarrow$ $\forall U\in\mathcal{O}_X$, $\exists\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\subset\mathcal{B}_X$, $U=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$

このとき、$\mathcal{B}_X$の元を基本開集合と呼ぶ。

[フルシュテンベルク位相]

以下では、整数の集合$\mathbb{Z}$にある一つの位相を定める。

$a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{Z}_+$に対して

$$N_{a,b}:=\{a+nb\mid n\in\mathbb{Z}\}$$

とする。これは正、負に無限に続く等差数列のこと。

ex) $N_{0,3}=\{\cdots,-6,-3,0,3,6,\cdots\}$

$N_{4,6}=\{\cdots,-8,-2,4,10,16,\cdots\}$

Def (フルシュテンベルク位相、開集合)

$O\subset\mathbb{Z}$が$\mathbb{Z}$の開集合である

$\Leftrightarrow$ $\forall n\in O$, $\exists b\in\mathbb{Z}_+$, $N_{n,b}\subset O$

Prop (フルシュテンベルク位相、開集合基)

フルシュテンベルク位相空間$(\mathbb{Z},\mathcal{F})$において

$\mathcal{B}_{\mathbb{Z}}=\{N_{a,b}\mid a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{Z}_+\}$ $\cdots$ ①

つまり等差数列の全体と定めると$\mathcal{B}_{\mathbb{Z}}$は$(\mathbb{Z},\mathcal{F})$の開集合基となる。

[位相の概念とフルシュテンベルク位相]

位相とは集合の各元に対して位置関係を与えるものであると言われる。それは、位相を定義することによって点列の収束や連続性を定義することができるからである。そういう意味でも、位相空間と距離空間は密接に関係している。(距離空間では位置関係を具体的に定める距離が与えられていた。)

従って集合に対して一つ位相を定めた時、点同士に おおざっぱに"近さ"の概念が生まれるといえる。

ここで便宜的に次のように定義する。

(これは数学的な定義ではない。)

Def

$(X,\mathcal{O}_X)$を位相空間とし、開集合基$\mathcal{B}_X$が一つ定まっているとする。

$y\in X$が、より"多く"の「$x\in X$を含む基本開集合」に含まれるほどyはxに近いとする

※ この定義の根拠は、点列の収束の定義や開集合基の定め方による。しかし、一般には、上の"多く"の部分を上手く定義できない。しかも、"近さ"は開集合基のとり方による。この意味でおおざっぱという言葉を用いた。

上の考え方によると、

フルシュテンベルグ位相空間$(\mathbb{Z},\mathcal{F})$に、①の開集合基を指定したとき、0と他の点との位置関係は以下のようになる。

基本開集合の数	……	4	3	2	1	……
0	近い	⋮ ±6 ±8 ±10 ⋮	⋮ ±4 ±9 ±25 ⋮	⋮ ±2 ±3 ±5 ⋮	1 −1	遠い

$a_n=\left(\prod_{i=1}^{n}p_i\right)^n$が0に収束する

pf 0を含む任意の開集合Uをとる

開集合の定義から、あるbで$(b>0)$

$$N_{0,b}\subset U$$

となるものが存在する。

bを素因数分解して、

$$b=\prod_{i=1}^{n}p_i^{m_i}=p_1^{m_1}\cdots p_n^{m_n}$$

としたとき、

$$N=\max\{m_1,\cdots,m_n,n\}$$

とおけば、任意の$n\geqq N$に対し

$b\mid a_N$, $a_N\mid a_n$ $\quad\therefore b\mid a_n$

従って $a_n=bc\in N_{0,b}\subset U$

よって

$\exists N\in\mathbb{N}$ $\forall n\geqq N$ $a_n\in U$

が成り立つ