フラクタルとジュリア集合

参考文献: Kenneth Falconer 著
フラクタル幾何学

060500484

小澤あゆみ

フラクタルとは、とても不規則で古典的な幾何学の枠組みにおさまらない図形を表す。

集合Fをフラクタルとよぶときは、以下の条件をみたすものとする。

(i) Fには微細構造がある。つまり、いくら小さいスケールで観察しても細部がある。

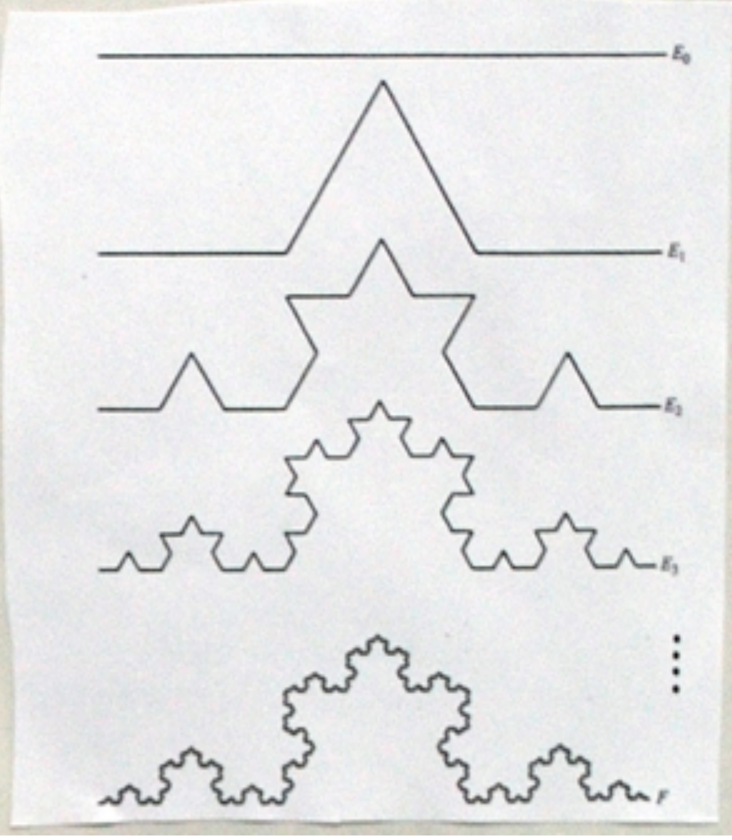
(ii) Fはとても不規則で局所的にも大域的にも伝統的な幾何学の用語では記述できない。

(iii) Fは何らかの自己相似性をもつことが多い。

(iv) 通常Fの(何らかの方法で定義される)「フラクタル次元」は位相次元より大きい。

(v) Fは、とても単純に定義される。

例として、コッホ曲線がある。コッホ曲線は自身の4つのコピーからなり、コピーの縮小率は$\frac{1}{3}$であるから、その相似次元は $-\log 4/\log\frac{1}{3}=1.262\cdots$ である。



〈コッホ曲線のつくり方〉

E_0を単位長の線分とする。

集合E_1は4つの線分からなり、E_0を3等分して中央の区間を取り除き、その取り除いた所を一辺とする正三角形の残りの2つの辺を加える。

E_1のそれぞれの線分に同じ処理を行うことでE_2を構成する。

以下同様の操作を行う。

ジュリア集合の定義をする.

$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を $n\geq 2$ 次以上の複素係数多項式 $f(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0$ とする. 関数 f の k 回合成 $f\circ\cdots\circ f$ を f^k とかく. $f^k(w)$ は w に f を k 回反復合成して得られる値 $f(f(\cdots f(w)))$ を表す.

多項式 f の充填ジュリア集合を $K(f)=\{z\in\mathbb{C}: f^k(z)\not\to\infty\}$ と定義する.

f のジュリア集合は充填ジュリア集合の境界 $J(f)=\partial K(f)$ である.

すなわち z の任意の近傍に点 w と v がとれて, $f^k(w)\to\infty$, $f^k(v)\not\to\infty$ となるならば $z\in J(f)$ である.

ジュリア集合の補集合をファトゥー集合とよぶ.

$J(f)$ はたいていの場合フラクタルになる.

$f(w)=w$ のとき w を f の不動点とよぶ.

ある整数 $p\geq 1$ に対して $f^p(w)=w$ となるとき w を f の周期点とよび, このような p の最小値を w の周期とよぶ. $w, f(w), \cdots, f^p(w)$ を p 周期軌道とよぶ.

w を周期 p の周期点とし, $(f^p)'(w)=\lambda$ とする (ダッシュは複素微分).

点 w は $0\leq|\lambda|<1$ のとき吸引的であるといい, このとき f の反復によって軌道近くの点は引き寄せられる. $|\lambda|>1$ のとき反発的であるといい, 軌道近くの点は押しやられる.

吸引域とは, w を f の吸引不動点とするときの $A(w)=\{z\in\mathbb{C}: k\to\infty$ のとき $f^k(z)\to\infty\}$ のことである.

ジュリア集合の特徴として, 以下のことがわかっている.

補題1. $a_n\neq 0$ である多項式 $f(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0$ が与えられたとき, ある数 r が存在して, $|z|\geq r$ ならば $|f(z)|\geq 2|z|$ となる. 特にある $m\geq 0$ に対して $|f^m(z)|\geq r$ ならば, $k\to\infty$ のとき $f^k(z)\to\infty$ となる. よって起こりうることは, $f^k(z)\to\infty$ か, $\{f^k(z): k=0,1,2,\cdots\}$ が有界であるかのどちらかである.

補題1は, ある点が充填ジュリア集合の外部にあるかどうかを決めるのに役立つ.

補題1から命題2が導かれる.

・命題2. $f(z)$を多項式とする。このとき充填ジュリア集合$K(f)$およびジュリア集合$J(f)$は、空でないコンパクト集合で、$J(f) \subset K(f)$をみたす。さらに、$J(f)$は内点をもたない。

・命題3. ジュリア集合$J(f)$はfのもとで前方および後方不変、すなわち$J(f) = f(J(f)) = f^{-1}(J(f))$である。

・命題4. すべての正の整数pに対して$J(f^p) = J(f)$が成り立つ。

複素関数論の視点を加えると、まとめて次のことがいえる。

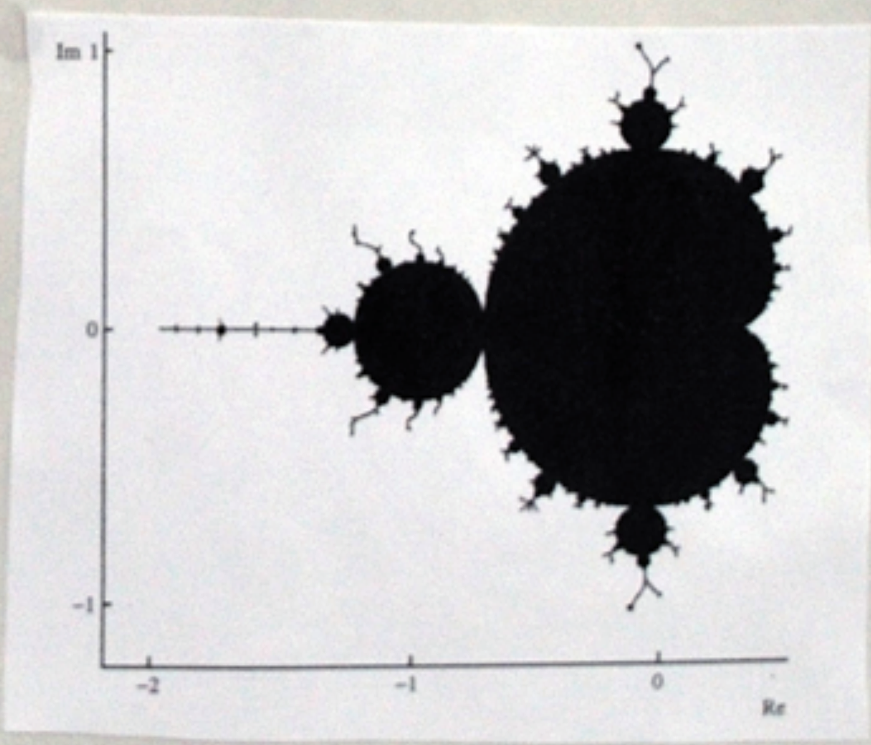
・定理5. 多項式fのジュリア集合$J(f)$は、$f^k(z) \to \infty$となる点$z \in \mathbb{C}$の境界である。それは孤立点を含まない非可算コンパクト集合であり、fおよびf^{-1}のもとで不変であり、各正整数pに対し$J(f) = J(f^p)$が成り立つ。$z \in J(f)$ならば、$J(f)$は$\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)$の閉包である。

$\mathbb{C}$上の2次関数の場合を考える.
$f_c(z) = z^2 + c$
の形の多項式のジュリア集合を調べる.
$h(z) = \alpha z + \beta$ $(\alpha \neq 0)$ とすると,
$h^{-1}(f_c(h(z))) = (\alpha^2 z^2 + 2\alpha\beta z + \beta^2 + c - \beta)/\alpha$
となるので, α, β, c の値を適当に選ぶことにより, この形で任意の2次関数 f をつくることができる.
$f^k(z) \to \infty$ は $f_c^k(z) \to \infty$ と同値であるから, f のジュリア集合は f_c のジュリア集合の h^{-1} による像である.
h は f と f_c の間の共役変換とよばれる.
任意の2次関数はある $c \in \mathbb{C}$ に対して f_c と共役である. よって, $c \in \mathbb{C}$ に対して f_c のジュリア集合を調べれば, すべての2次関数のジュリア集合が効率的に調べられる.
h は相似変換なので, 任意の2次関数のジュリア集合はある $c \in \mathbb{C}$ に対する f_c のジュリア集合と幾何学的に相似である.

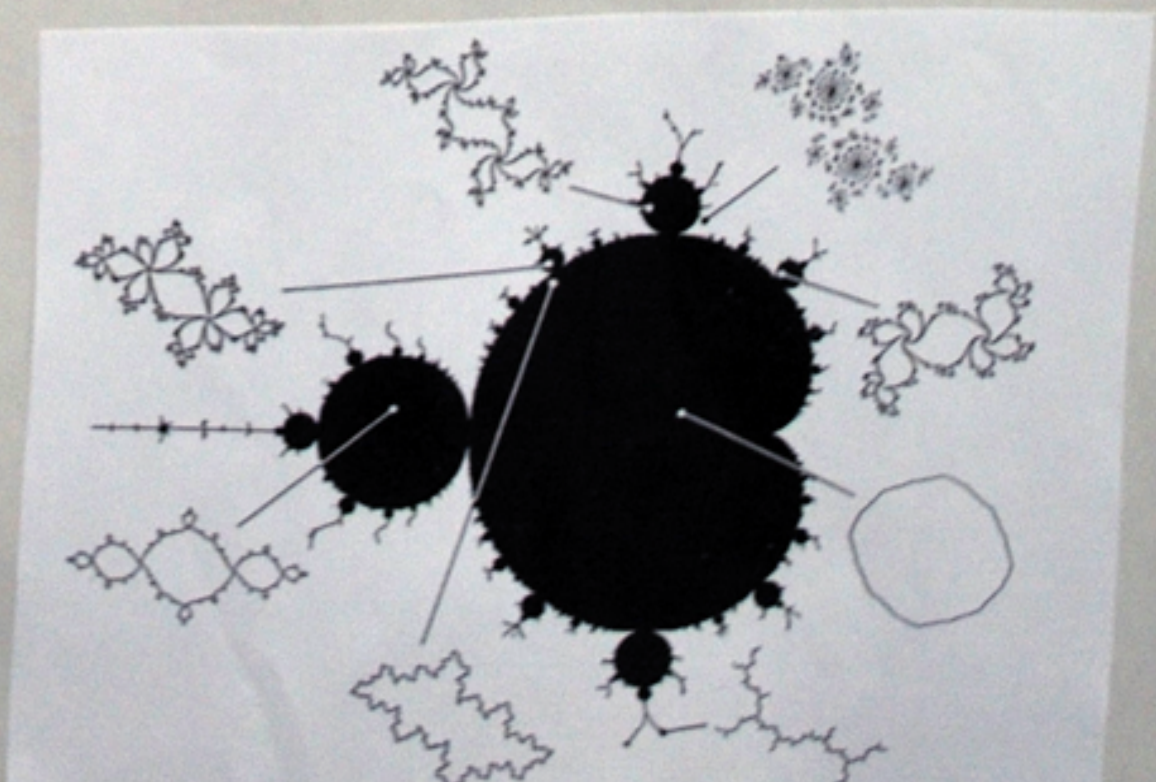
ここで, マンデルブロー集合 M を考える.
マンデルブロー集合 M は, $M = \{c \in \mathbb{C} : k \to \infty$ のとき $J(f_c)$ が連結$\}$ と定義されるものである.
重要なのは次の「マンデルブロー集合の基本定理」である.

・定理6. $M = \{c \in \mathbb{C} : \{f_c^k(0)\}_{k \geq 1}$ が有界$\}$
$= \{c \in \mathbb{C} : k \to \infty$ のとき $f_c^k(0) \not\to \infty\}$

この定理から, マンデルブロー集合を調べることで様々な2次関数のジュリア集合の情報を得ることができることがわかる.



複素平面内のマンデルブロー集合M



マンデルブロー集合内の様々なcに対するジュリア集合$J(f_c)$

0 は f_c の臨界点（$f_c'(z)=0$ となる点）である．f_c の唯一の臨界点は 0 であるから、f_c は高々ひとつの吸引周期軌道しかもたないことがわかっている．

f_c を有限な吸引周期軌道の周期 p によって分類するとき、異なる p に対応する c の値は M の異なる領域に対応する．

$p=1$ の場合を考える．

・定理7．$c=0$ のとき $J(f_c)$ は単位円 $|z|=1$ である．

∵ $f_c(z)=z^2$ を考えると $f_c^k(z)=z^{2^k}$ である．
$|z|<1$ ならば $k\to\infty$ のとき $f_c^k(z)\to 0$ となり、$|z|>1$ ならば $k\to\infty$ のとき $f_c^k(z)\to\infty$ となる．$|z|=1$ ならば $f_c^k(z)$ は円 $|z|=1$ 上に留まる．
よって充填ジュリア集合 $K(f_c)$ は単位円板 $|z|\leq 1$ であり、$J(f_c)$ はその境界 $|z|=1$ である． //

この定理7の場合は特別な場合で、$J(f_c)$ はフラクタルにならない．

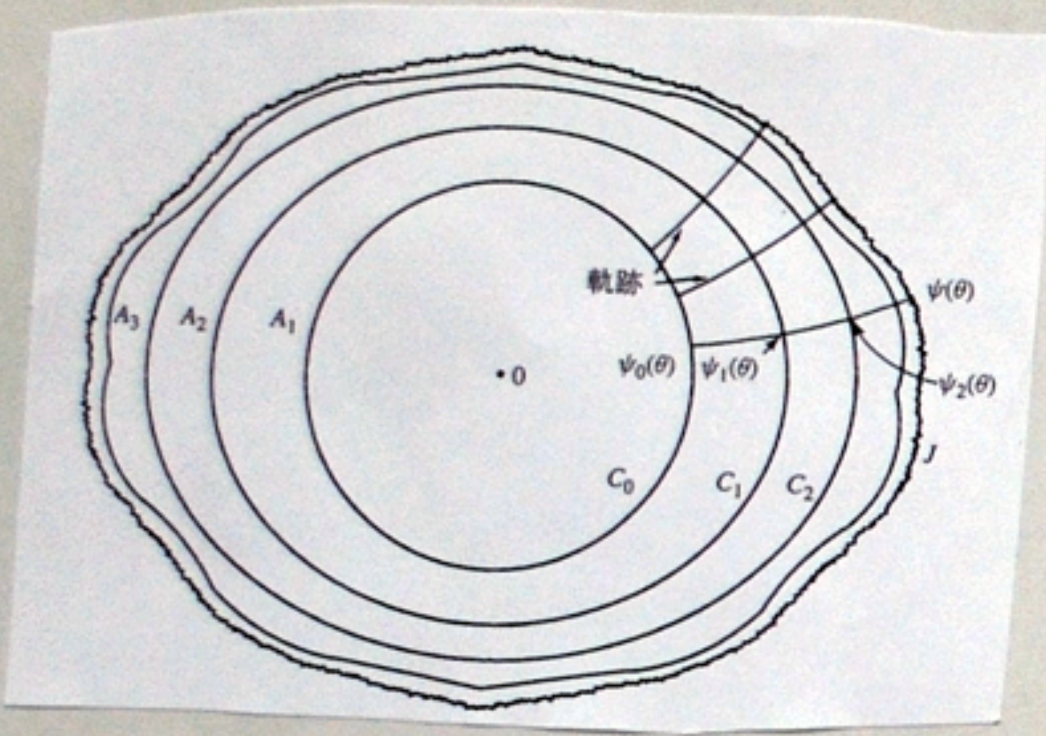
複素平面内の滑らかで閉じた曲線を輪とよぶ．輪は単純な曲線とする．

・定理8．$|c|<\frac{1}{4}$ ならば、$J(f_c)$ は単純閉曲線である．

∵ C_0 を曲線 $|z|<\frac{1}{2}$ とする．
この曲線は c と f_c の吸引不動点 w を中に含む．
直接計算することにより逆像 $f_c^{-1}(C_0)$ は C_0 を囲む輪 C_1 であることが分かる．
C_0 と C_1 の間の円環状の領域 A_1 を、C_0 を出発点として垂直に C_1 に達する曲線（軌跡とよぶ）の連続集合で埋めることができる．
各 θ に対して、C_0 上の $\psi_0(\theta)=\frac{1}{2}e^{i\theta}$ から出発した軌跡が C_1 に達する点を $\psi_1(\theta)$ とする．
逆像 $f_c^{-1}(A_1)$ は、外側の境界を $C_2=f_c^{-1}(C_1)$、内側の境界を C_1 とする

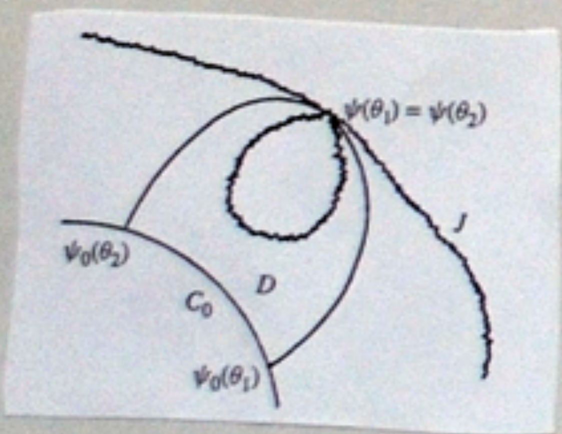
円環状の領域A_2で、f_cはA_2をA_1に2対1に写す。
C_0とC_1を結ぶ軌跡の逆像はC_1とC_2を結ぶ軌跡の族である。
C_1上の点$\psi_1(\theta)$から出発する軌跡がC_2に達する点を$\psi_2(\theta)$とする。
このように続けていくと、各kに対して、C_{k-1}を囲む輪C_kの列および
C_k上の点$\psi_k(\theta)$とC_{k+1}上の点$\psi_{k+1}(\theta)$を結ぶ軌跡の族を得る。
$k\to\infty$とすると、曲線C_kはwの吸引域の境界に近づく。
定理5より、この境界がジュリア集合$J(f_c)$である。
C_1の外ではある$\gamma>1$に対して$|f_c'(z)|>\gamma$となるからf_c^{-1}は$J(f_c)$の近くで縮小写像である。
よって、$\psi_k(\theta)$と$\psi_{k+1}(\theta)$を結ぶ軌跡の長さは$k\to\infty$のとき等比数列的に0に収束する。
その結果、$k\to\infty$のとき$\psi_k(\theta)$は連続関数$\psi(\theta)$に一様収束し、$J(f_c)$は$\psi(\theta)$ $(0\leq\theta\leq 2\pi)$で表される閉曲線である。

ψが単純曲線であることを示す。
$\psi(\theta_1)=\psi(\theta_2)$と仮定する。
C_0上の$\psi_0(\theta_1)$および$\psi_0(\theta_2)$をこの共通点とを結ぶ2本の軌跡、それとC_0を境界とする領域をDとする。
Dの境界はf_cの反復によって有界に留まるので最大値の定理により
Dはf_cの反復で有界に留まる。
したがってDは充填ジュリア集合の部分集合であるから、Dの内部は$J(f_c)$のいかなる点も含むことができない。
よって、図(b)のようにはならず、θ_1とθ_2の間のすべてのθに対して、
$\psi(\theta)=\psi(\theta_1)=\psi(\theta_2)$となる。
よって$\psi(\theta)$は自己交差点をもたない。
//



軌跡
$\psi(\theta)$
A_3
A_2
A_1
$\psi_0(\theta)$
$\psi_1(\theta)$
$\psi_2(\theta)$
$\cdot 0$
J
C_0
C_1
C_2

図(a)



$\psi(\theta_1) = \psi(\theta_2)$
J
$\psi_0(\theta_2)$
D
C_0
$\psi_0(\theta_1)$

図(b)

$p \geq 2$ のときや $p=1$ 以外のときはさらに複雑なジュリア集合が得られる.

(a) $c = -0.1 + 0.1i$

f_cは吸引不動点を1つもち、$J(f_c)$は擬円.

(b) $c = -0.5 + 0.5i$

f_cは吸引不動点を1つもち、$J(f_c)$は擬円.

(c) $c = -1 + 0.05i$

f_cは吸引2周期軌道をもつ.

(d) $c = -0.2 + 0.75i$

f_cは吸引3周期軌道をもつ.

(e) $c = 0.25 + 0.52i$

f_cは吸引4周期軌道をもつ.

(f) $c = -0.5 + 0.55i$

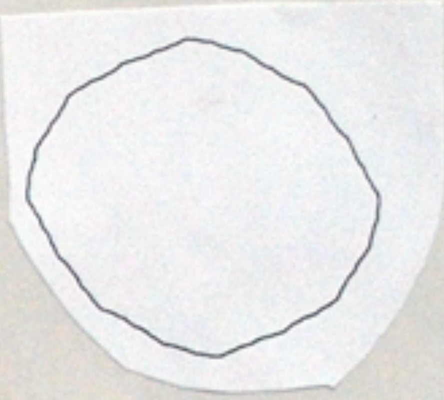
f_cは吸引5周期軌道をもつ.

(g) $c = 0.66i$

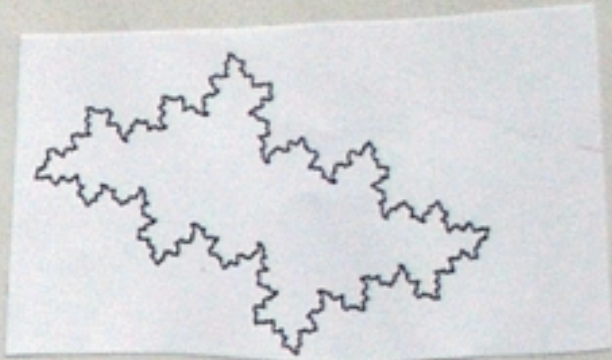
f_cは吸引軌道をもたず、$J(f_c)$は全不連結.

(h) $c = -i$

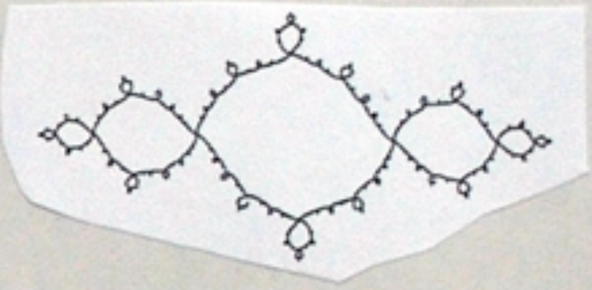
$f_c^2(0)$は周期点で$J(f_c)$は樹状形.



(a)



(b)



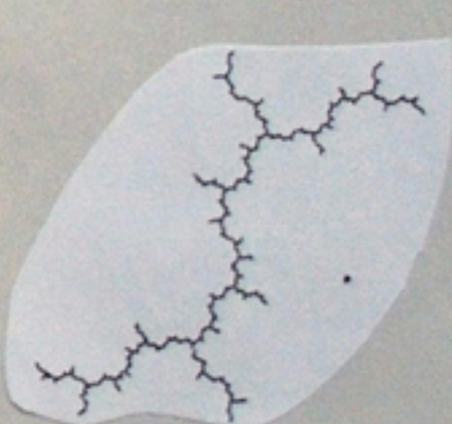
(c)

(d)

(e)

(f)

(g)



(h)