# 折り紙と２次方程式

＜メンバー＞

数理学科３年　060801514　高橋駿

数理学科３年　060802189　藤田健太郎

数理学科３年　060802529　三輪晃生

数理学科３年　060802669　矢野健太郎

【参考文献】

・折り紙の数理と科学　川崎敏和　森北出版
・折り紙の幾何学　伏見康治　伏見満枝　日本評論社
・折り紙で学ぶ数学１・２　Yoshita 星の環会
・オリガミクスⅠ　芳賀和夫　日本評論会
・折紙数学　-折紙で作図を楽しむ-　畠山一平

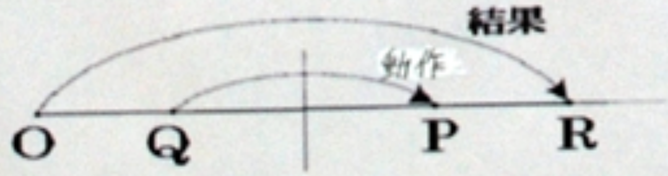
## ＜加減乗除の方法＞

＜加法＞

まず、一つの線分 OP およびその上の点 Q がある。$\overline{OP}=a$ , $\overline{OQ}=b$ の和 $c=a+b$ を線長とする線分を OP の延長線上に OR として作図することを考える。

折り方は簡単で、点 P と Q とを重ねたとき、OP の延長上で O の重なる点が R になる。

**＜加法＞**




＜減法＞

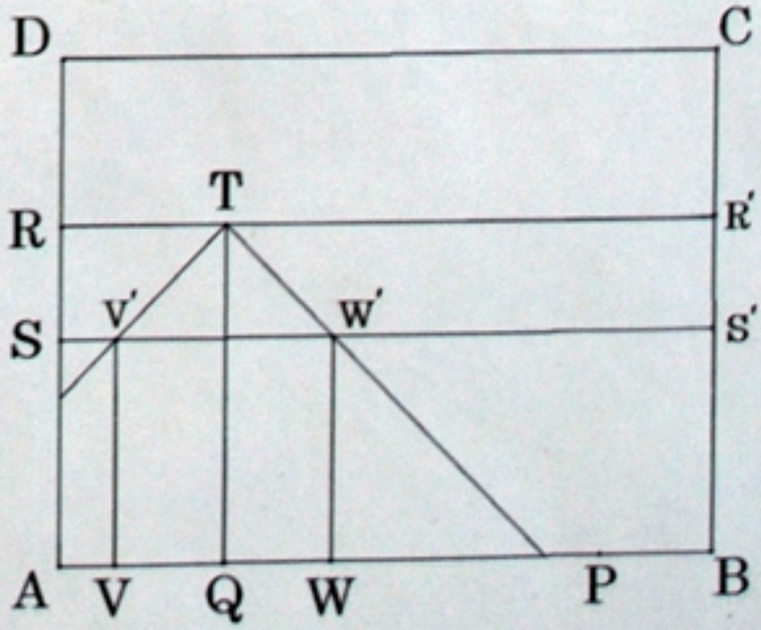
そして、$a-b=\overline{AS}$ なる点 S を線分 OP 上に求める動作も簡単にでき、点 O と P が重ねたとき、Q の OP に重なる点が S になる。

**＜減法＞**

<加法減法応用>

次に、図のように点PとQとRとSを取る。それらの点について、$\overline{PQ}+\overline{RS}$ および $\overline{PQ}-\overline{RS}$（ただし $\overline{PQ}\geq\overline{RS}$）を求めることを考える。RおよびSを通りそれぞれABに平行な線RR´およびSS´を引き、点QからRR´に下ろした垂線との交点をTとする。TQをTRおよびTR´と重ねるときに生じる折り目とSS´との交点をそれぞれV'およびW'とする。そのVおよびWからABに下ろした垂線との交点をそれぞれVおよびWとすると、

$\overline{PV}=\overline{PQ}+\overline{RS}$、$\overline{PW}=\overline{PQ}-\overline{RS}$ となる。



## ＜乗法＞

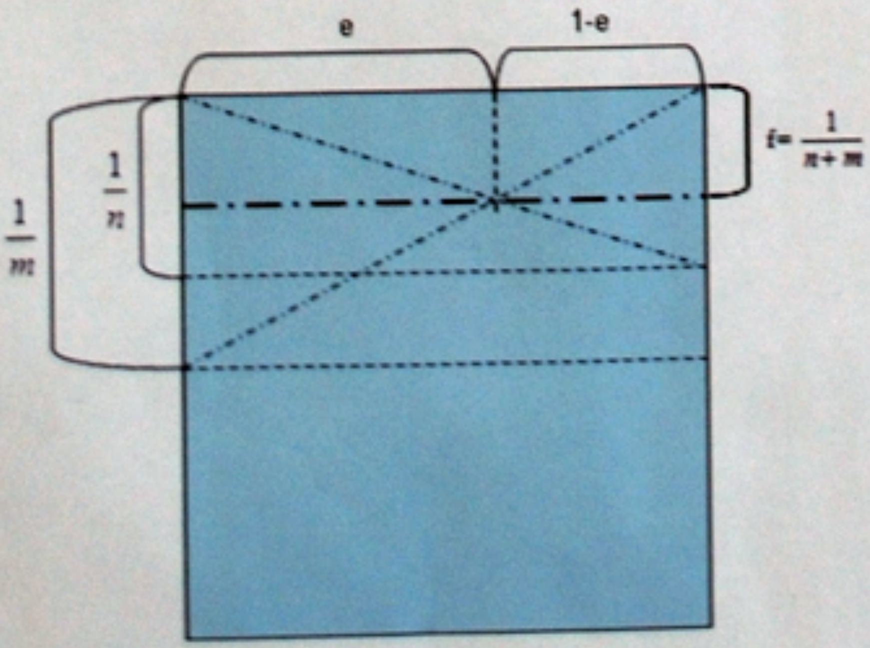
まずは、最も簡単な長さ $a$ の線分が与えられた時、自然数 $k$ について $a$ の $k$ 倍の長さ $ka$ の線分を引くことを考える。これは先ほどの加法の繰り返しで容易に求めることが可能である。

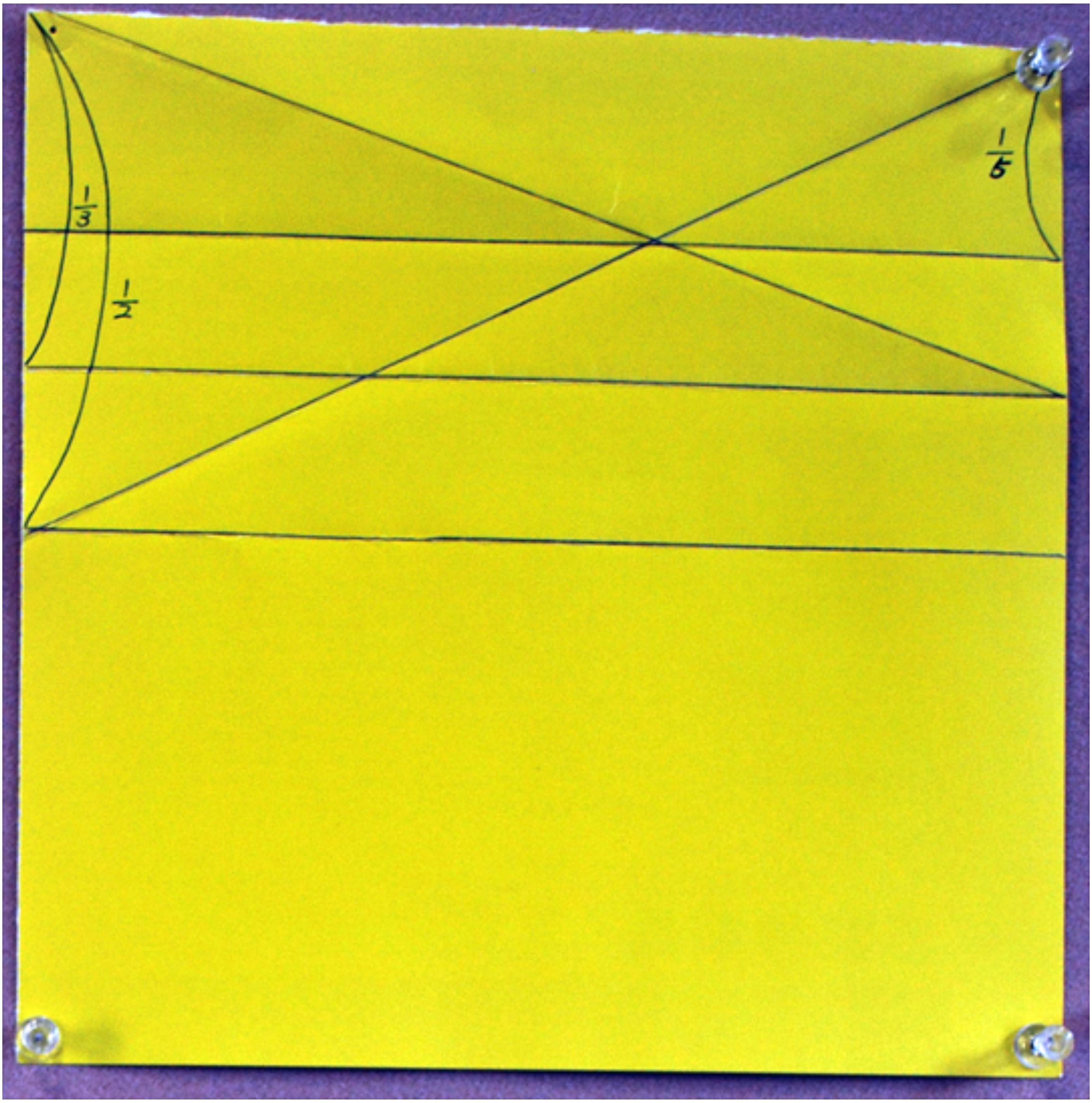
## ＜除法＞

紙を n 等分することを考える。下図について考えると、

$\frac{1}{m}:e=\frac{1}{n}:1-e$　より　$\frac{e}{n}=\frac{1-e}{m}$

$f: 1-e=\frac{1}{m}:1$　より　$f=\frac{1-e}{m}$





1/3
1/2
1/5

よって、$f=\frac{e}{n}=\frac{1-e}{m}$ が成り立ち、$e=\frac{n}{n+m}$、$f=\frac{1}{n+m}$ となる。

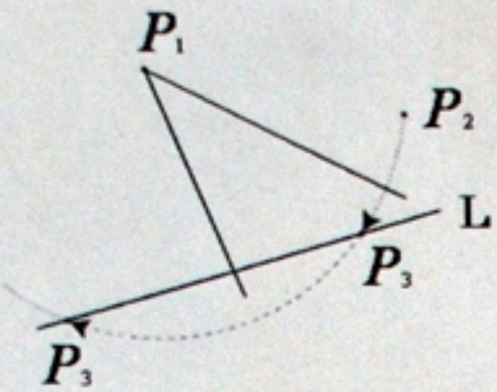
したがって、紙を n 等分及び m 等分さえできれば、n+m 等分ができることが分かる。

そこで、m＝1とし、n に対して数学的帰納法を用いれば、あらゆる等分が可能であることが証明できる。故に、紙は n 等分できる。

## ＜コンパス折り＞

一つの点 $P_1$ が一つの直線Ｌ上の１点に重なるように折る動作は無限に存在する。また、そのときに作られる折り目はすべて一つの同じ放物線の接線になっている。そこで、さらにもう一つの点 $P_2$ を与え、$P_2$ とＬとが重なる点を $P_3$ とするとき、$P_1P_2=P_1P_3$ となるように折ることを考える。$P_3$ は $P_1$ を中心とする半径 $P_1P_2$ の円弧と直線Ｌとの交点となる。この折り動作はコンパスによる作図動作に相当するので、「コンパス折り」と呼ぶ。

〈コンパス折りの図〉




## <$\sqrt{n}$の折り方>

nを自然数とする。正方形用紙ABCDの一辺AB上に座標（0，$\sqrt{n}$）なる点Pを求めることを考える。nをn=i×j（ただしi>j）と二つの自然数i、jの積に分解する。この分解ではj=1でもかまわない。i、jの組はnが素数ならば一つしかなく、i=n、j=1となるが、そのほかの場合は複数個存在する。

$v=\frac{i+j}{2}$、$w=\frac{i-j}{2}$とし、用紙幅がv以上となるように単位を定める。つまり、kを自然数としたときにvが$2^k$以下になるようにする。次に、辺AD上にDV=v、DW=wなる点V、Wを求める。

n が奇数のとき、v、w は整数なので、V 点および W 点は

それぞれ $\frac{v}{2^k}$ および $\frac{w}{2^k}$ 分割点として k 回の折り動作で導く

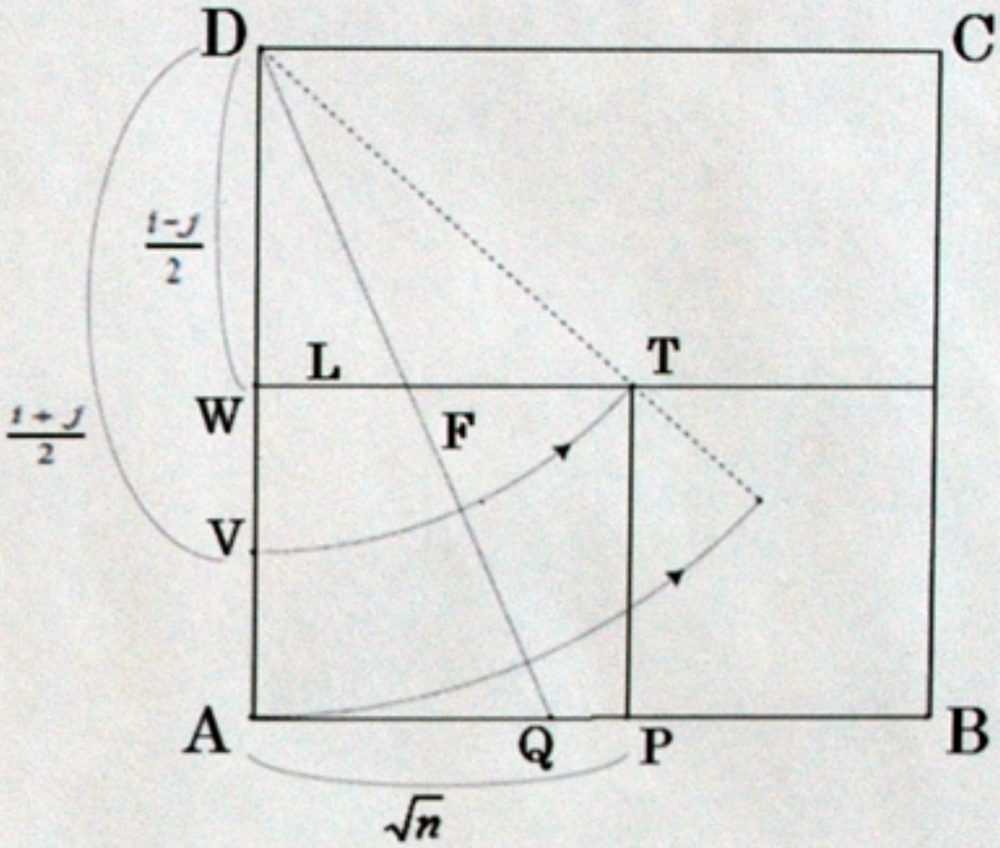
ことができるが、偶数のときはさらに線分の $\frac{1}{2}$ 分割操作が

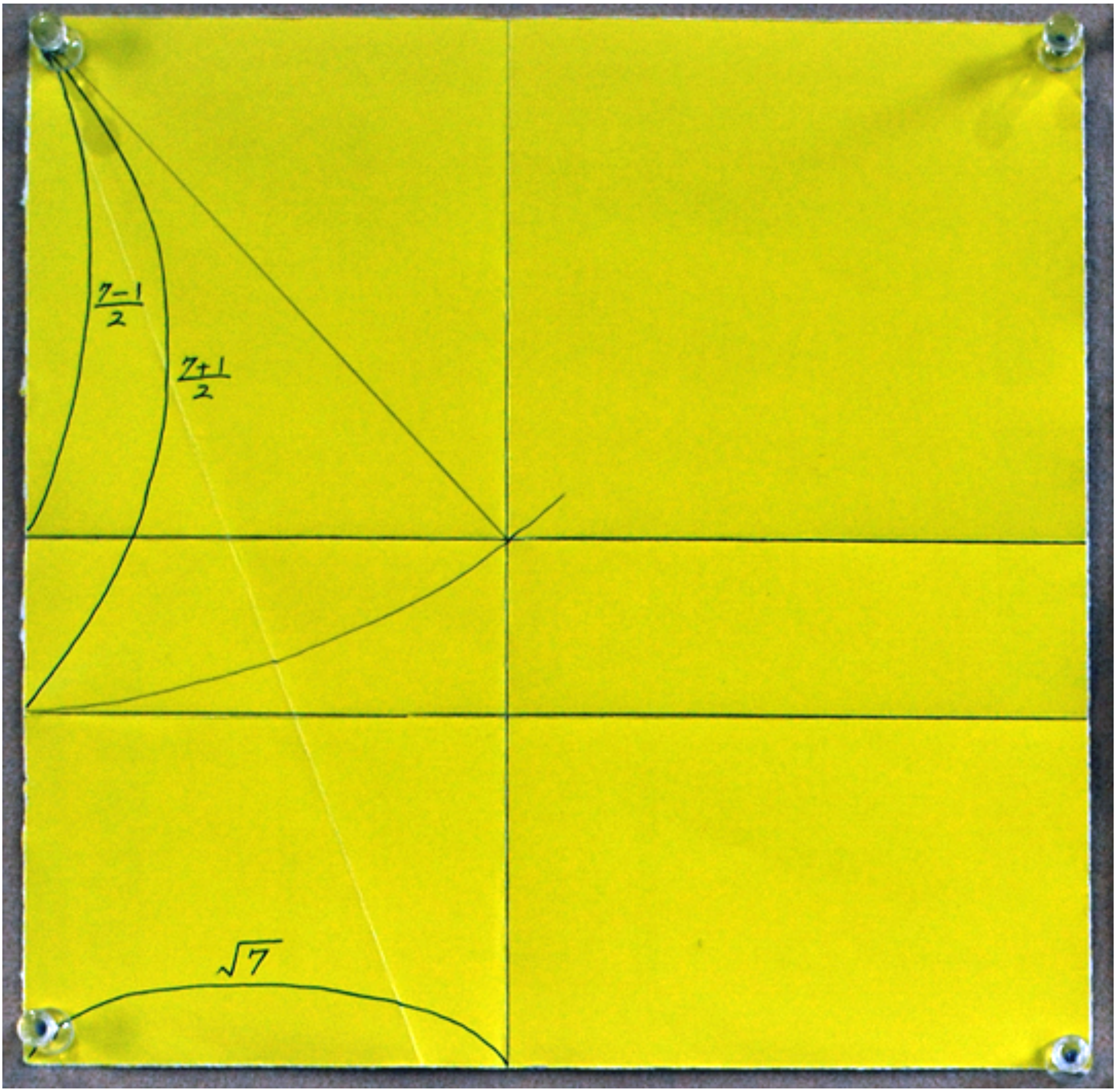
１回加わる。そして、D を軸とするコンパス折りで W 点を

V を通る折り目 L に重ね、重なり点 T から AB へ垂線を

下ろすと、それと AB との交点が AP＝$\sqrt{n}$ なる点 P となる。

この折り方は n がどのような自然数でも可能。





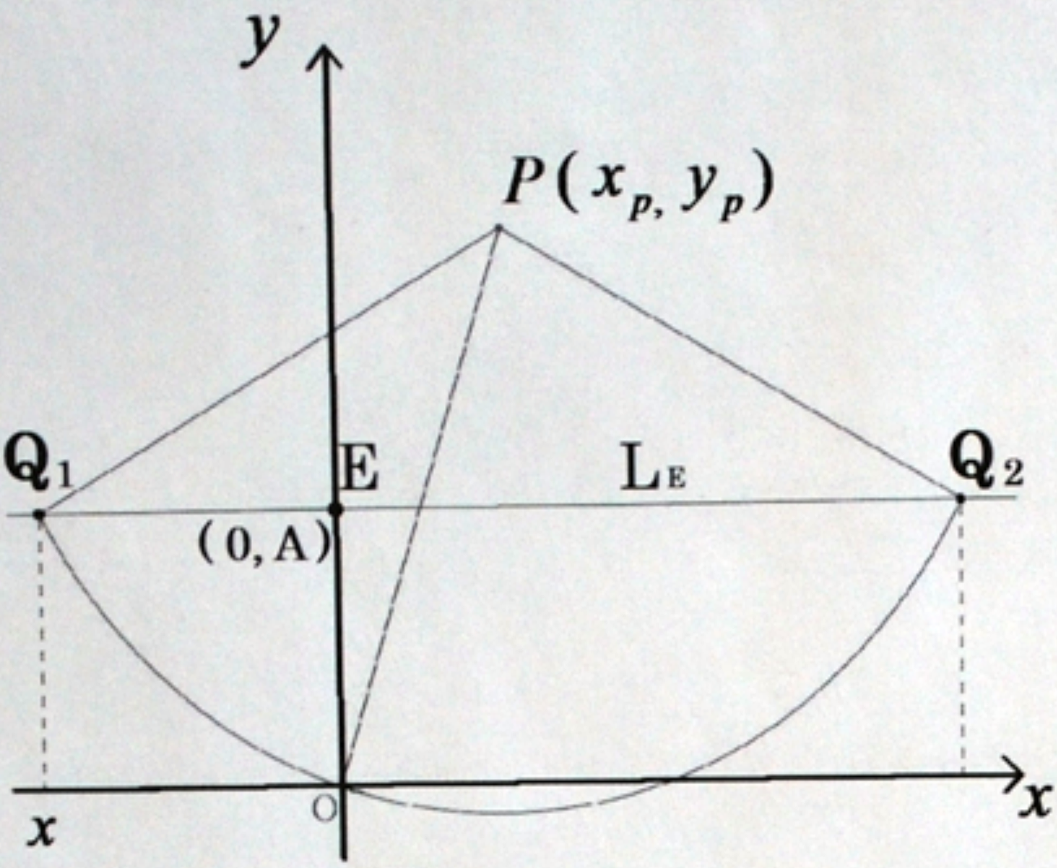
$\frac{7-1}{2}$
$\frac{7+1}{2}$
$\sqrt{7}$

## <解を求める理論>

二次方程式

$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ の解を求めたい。簡単のため $a$ で両辺を割った、

$x^2+px+q=0$ ・・・(1)　　で考える。




直交座標系に $y=A$ なる直線 $L_E$ と座標 $(x_p, y_p)$ なる点 P を考える。

P を中心とし、原点 O を通る円と $L_E$ との交点 $Q_1,Q_2$ が存在するとする。$Q_1,Q_2$ の $y$ 座標値は $A$ であるから、例えば $Q_1$ の $x$ 座標値を $x$ とすると

$$\left(\overline{PQ_1}\right)^2=\left(x_p-x\right)^2+\left(y_p-A\right)^2 \ , \quad \left(\overline{PO}\right)^2=x_p{}^2+y_p{}^2$$

である。$\overline{PQ_1}=\overline{PO}$ より 2 次方程式

$x^2-2x_px+A^2-2Ay_p=0\cdots(2)$　　　が導かれる。

○この事実に基づいて(1)の解を求める。ここで(1),(2)の係数を対応させて

$x_p=-\dfrac{p}{2},y_p=\dfrac{A^2-q}{2A}\cdots(3)$　　　を得る。

すなわち、適当な $A$ 値と $p,q$ 値を与えることにより

(3)にしたがって点 P の位置が定まり、P を中心とする円と

$L_E$ との交点の $x$ 座標値として式(1)の解が得られる。

この原理を折り紙作図の言葉を用いて言い換えてみると・・・

用紙上の適当な位置に直交座標系を置き、適当な単位を設定し、適当な $A$ 値を定めて線 $L_E$ を引き、式(3)に従って P 点の位置を定める。

次いで、P を軸とするコンパス折りで原点を $L_E$ に重ねるとその重なり点に解が得られる。

## <例>

| |
|---|
| $x^2-\sqrt{3}x-4=0$　の解を折り紙で求める |

まずは、準備として折り紙に必要な線と点を加えていく。

図1の様に正方形ABCDに線と点を加える。

辺AB, CDそれぞれの中点EとFとを結ぶ直線、ABに平行で、ABからそれぞれ辺長$\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{4}$の距離にある直線$L_{3/8}$, $L_{1/2}$, $L_{5/8}$, $L_{3/4}$を引く。今、辺長を4とすると、これらの線はそれぞれ、ABから1.5，2，2.5，3の距離にある。

次に、Fを軸とするコンパス折りでDを$L_{3/4}$に重ね、$L_{3/4}$上の重なる点をTとする。そしてその点TからCD上に垂線を下ろす。その垂線とCDおよび$L_{3/8}$との交点をそれぞれG, Rとし、FGの中点をHとする。

ここで、直角三角形GFTにおいてFT = 2GTなので、

FG = $\sqrt{3}$となる。

最後に、EF と$L_{3/8}$との交点を原点 O とし、$L_{3/8}$と EF をそれぞれ x 軸、y 軸に含む座標系とする。以上で準備完了なので、実際にこれを使って解いてみる。（図 1）

$(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2})$ は、図においては H の座標に相当する。

H を軸とするコンパス折りで O を$L_{5/8}$に重ねる。重なり点を Q とすると、その x 座標、すなわち EF と$L_{5/8}$との交点を S とするとき、$\overline{SO}$が式 (4.29) の解の一つ（負値）となる。

O と$L_{5/8}$との重なり点は正方向にももう一つ存在するが、用紙の外にその点ができてしまうため、用紙上に表すことができない。（図 2）

しかし、式 (4.29) のもう一つの解（正値）は、$\sqrt{3}$ + SQ

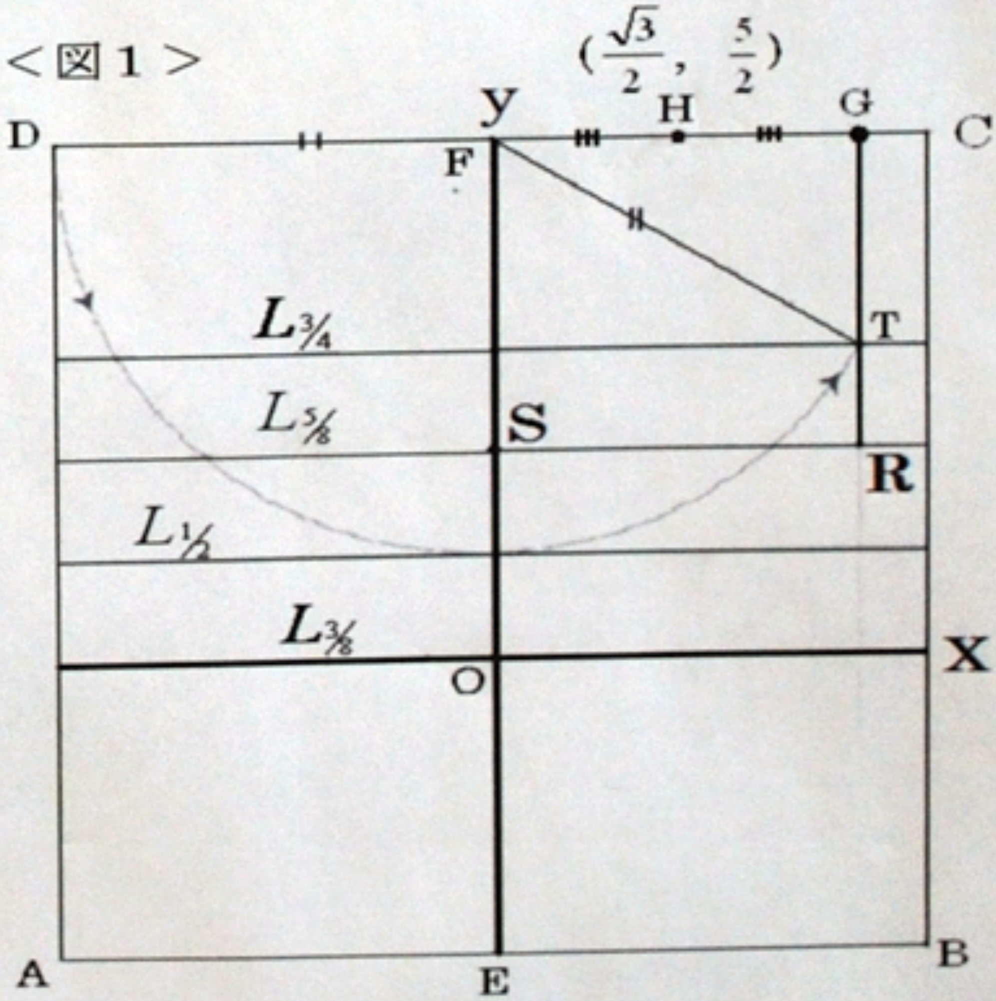
（解と係数の関係から、もう一つの解を $\alpha$ とすると、

$\alpha$ − SQ = $\sqrt{3}$　つまり、$\alpha = \sqrt{3}$ + SQ だから、用紙上に QR としてもとめることができる。）

G の x 座標は$\sqrt{3}$なので、R の x 座標も$\sqrt{3}$。

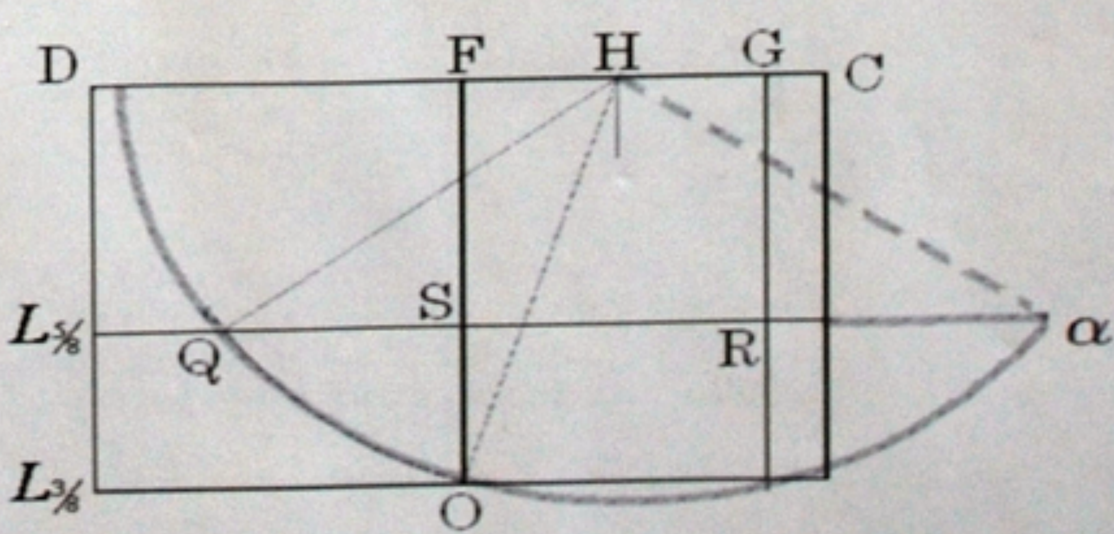
よって QR = $\sqrt{3}$ + SQ となり、QR が解となる。

＜図１＞

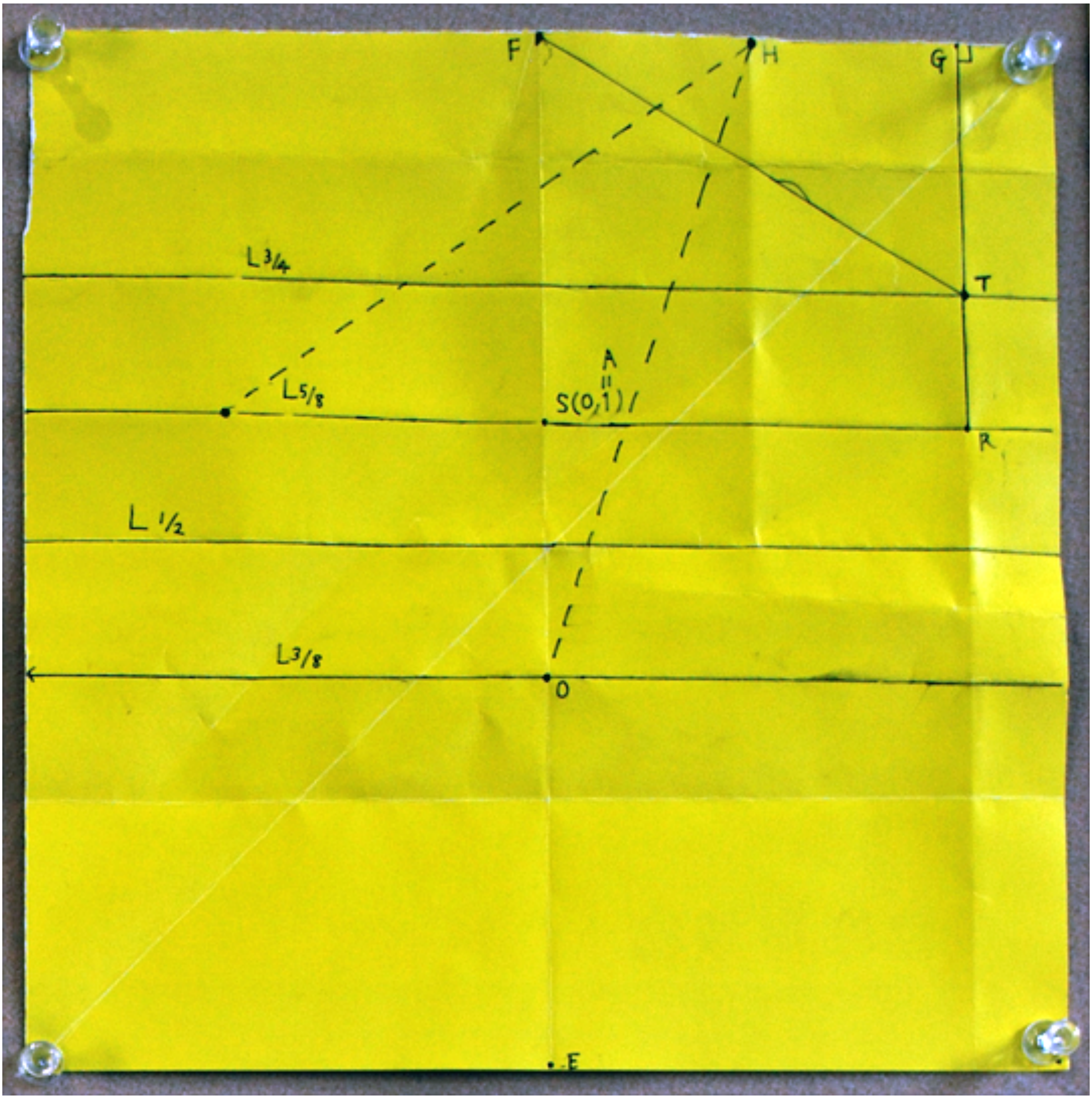


$(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2})$
y
H
G
D
C
F
$L_{3/4}$
T
$L_{5/8}$
S
R
$L_{1/2}$
$L_{3/8}$
X
O
A
E
B


＜図２＞



D
F
H
G
C
S
$L_{5/8}$
Q
R
$\alpha$
$L_{3/8}$
O



F
H
G
T
L3/4
A
L5/8
S(0,1)
R
L 1/2
L3/8
O
E