ベルトランの仮説

060801093 斎藤 弘晃

半年間、整数に関する定理や命題について調べた. その中でも自分が特に興味を持ち. 証明が非常に技巧的であると感じたベルトランの仮説について分かりやすく解説する. その内容は次のようである.

あらゆる $n \ge 1$ に対して、$n < p \le 2n$ をみたす素数 p が存在する

以下この証明を与える. 証明は5つのステップに分かれる.

STEP 1

$n < 4000$ の場合の証明をする. 素数列

$2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631, 1259, 2503, 4001$

を考えると、全ての項がそれぞれ1つ前の項の2倍よりも小さくなっている.

STEP 2

$\prod_{p \le x} p \le 4^{x-1}$ ($^{\forall}x \ge 2$, $x \in \mathbb{R}$) を示す. ……(1)

上式の総積は、$p \le x$ をみたす全ての素数にわたってとることとする.

(例 $\prod_{p \le 10} p = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$)

q が $q \le x$ をみたす最大の素数であるとき

$$\prod_{p \le x} p = \prod_{p \le q} p \quad \text{かつ} \quad 4^{q-1} \le 4^{x-1}$$

よって $x = q$ が素数の場合だけ考えればよい. $q = 2$ のとき $2 \le 4^{2-1} = 4$ より成り立つ.

奇素数 $q = 2m+1$ のとき、帰納法を用いて

$$\prod_{p \le 2m+1} p = \left(\prod_{p \le m+1} p\right) \times \left(\prod_{m+1 < p \le 2m+1} p\right) \underset{①}{\le} 4^m \binom{2m+1}{m} \underset{②}{\le} 4^m \cdot 2^{2m} = 4^{2m}$$

① ・ $\prod_{p \le m+1} p \le 4^m$ は $q = m+1$ の時の帰納法の仮定

・ $\binom{2m+1}{m} = \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!}$ は整数であり、$m+1 < p \le 2m+1$ をみたす素因数 p は分子には現れるが、分母には現れないので $\prod_{m+1 < p \le 2m+1} p \le \binom{2m+1}{m}$

② ・ 二項定理 $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ に $n = 2m+1$ を代入して

$\sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} = 2^{2m+1}$, $\binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m+1}$ は和の中に現れる2つの項. よって

$$\binom{2m+1}{m} \le \frac{1}{2} \cdot 2^{2m+1} = 2^{2m}$$

STEP 3

ルジャンドルの定理: $n!$ は素因数 p をちょうど $\sum_{k \ge 1} \left[\frac{n}{p^k}\right]$ 回含む ($[x]$ = x以下の最大の整数)

を用いると、$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$ は素因数 p をちょうど $\sum_{k \ge 1} \left(\left[\frac{2n}{p^k}\right] - 2\left[\frac{n}{p^k}\right]\right)$ 回含む.

$\left[\frac{2n}{p^k}\right] - 2\left[\frac{n}{p^k}\right] < \frac{2n}{p^k} - 2\left(\frac{n}{p^k} - 1\right) = 2$ より、和の各項は高々 1 である.

また $\frac{2n}{p^k} < 1$、つまり $2n < p^k$ のときは各項は 0 になる. よって

$$\sum_{k \ge 1} \left(\left[\frac{2n}{p^k}\right] - 2\left[\frac{n}{p^k}\right]\right) \le \max\{r : p^r \le 2n\} \quad \text{……(2)}$$

このことから

ⓐ $\binom{2n}{n}$ を割る最大のべきは $2n$ より大きくない

ⓑ $\sqrt{2n} < p$ をみたす $\binom{2n}{n}$ の素因数 p は高々1回しか現れない

ⓒ $\frac{2}{3}n < p \le n$ をみたす素数 p は $\binom{2n}{n}$ の素因数にはならない

ⓒ: $\frac{2}{3}n < p \le n$ より

$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$ の分子に p の倍数が $p, 2p$ の2つ現れるのに対し

分母にも p, p の2つが現れるため.

STEP 4

($\binom{2n}{0} + \binom{2n}{2n}, \binom{2n}{1}, \binom{2n}{2}, \cdots, \binom{2n}{2n-1}$ の列を考えると

$\binom{2n}{n}$ は最大のものであり、列の平均が $\frac{4^n}{2n}$ であるから.)

$$1 = \underbrace{\binom{2n}{0} < \binom{2n}{1} < \cdots\cdots < \binom{2n}{n} > \cdots\cdots > \binom{2n}{2n-1} > \binom{2n}{2n}}_{2n+1\text{コ}} = 1$$

上式より $\frac{4^n}{2n} \le \binom{2n}{n}$ (二項定理から $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 4^n$) 等号が成り立つのは $n=1$ のとき.

これを用いて

$$\frac{4^n}{2n} \le \binom{2n}{n} \le \underbrace{\left(\prod_{p \le \sqrt{2n}} 2n\right)}_{ⓐより} \times \underbrace{\left(\prod_{\sqrt{2n} < p \le \frac{2}{3}n} p\right)}_{ⓑより} \times \underbrace{\left(\prod_{\frac{2}{3}n < p \le n} p\right)}_{ⓒより1} \times \underbrace{\left(\prod_{n < p \le 2n} p\right)}_{ⓑより}$$

が成り立つ.

また (2) より $p \le \sqrt{2n}$ をみたす素数 p は $\sqrt{2n}$ 個より多くないので

$$\frac{4^n}{2n} \le (2n)^{\sqrt{2n}} \cdot \left(\prod_{\sqrt{2n} < p \le \frac{2}{3}n} p\right) \times \left(\prod_{n < p \le 2n} p\right)$$

$$\therefore\ 4^n \le (2n)^{1+\sqrt{2n}} \cdot \left(\prod_{\sqrt{2n} < p \le \frac{2}{3}n} p\right) \cdot \left(\prod_{n < p \le 2n} p\right) \quad \text{……(3)}$$

STEP 5

$n < p \le 2n$ をみたす素数 p が存在しない、つまり本題が成立しないと仮定する.

このとき (3) の最後の積は 1 となる. (1) を (3) に代入すると

$$4^n \le (2n)^{1+\sqrt{2n}} \cdot 4^{\frac{2}{3}n} \qquad \therefore\ 4^{\frac{1}{3}n} \le (2n)^{1+\sqrt{2n}} \quad \text{……(I)}$$

これは n が十分大きくなると成立しない. 実際、$a+1 < 2^a$ を使えば

(すべての $a \ge 2$ に対して成立. 帰納法による)

$$2n = \left(\sqrt[6]{2n}\right)^6 < \left(\left[\sqrt[6]{2n}\right]+1\right)^6 < 2^{6\left[\sqrt[6]{2n}\right]} \le 2^{6\sqrt[6]{2n}} \quad \text{……(II)}$$

$n \ge 50$ のとき. (このとき $18 < 2\sqrt{2n}$) (I) と (II) より

$$4^n = 2^{2n} \le (2n)^{3(1+\sqrt{2n})} < 2^{\sqrt[6]{2n}(18+18\sqrt{2n})} < 2^{20\sqrt[6]{2n} \cdot \sqrt{2n}} = 2^{20(2n)^{\frac{2}{3}}}$$

指数を比較すれば $2n < 20(2n)^{\frac{2}{3}}$

$$\therefore\ (2n)^{\frac{1}{3}} < 20 \longrightarrow n < 4000$$

STEP 5 の対偶をとれば

$n \ge 4000 \Longrightarrow n < p \le 2n$ をみたす素数 p が存在.

$n < 4000$ の場合は STEP 1 より成り立つ. 以上で題意が示せた.