万華鏡の幾何学

(天使と悪魔の幾何学)

060801867 中村泰之
060801620 谷口裕明

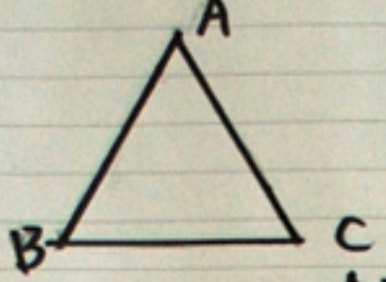
・目標設定

・私たちは、「群と幾何学」(難波誠著)を題材に、セミナーを進めていて、この天使と悪魔の幾何学という章が一番インパクトが強く、興味深かったので、このテーマを発表することに決めました。当初は、ガロア理論の幾何学モデルという章を目標にしていましたが発表時間や、掲示されたときの見やすさなどから、よりわかりやすく、見た目で興味をもってもらえそうだったので、変更しました。内容は非常に簡単ですが、エッシャーのトリックアートなどに関連した内容なので、興味のある人は読んでみてください。

No. 3

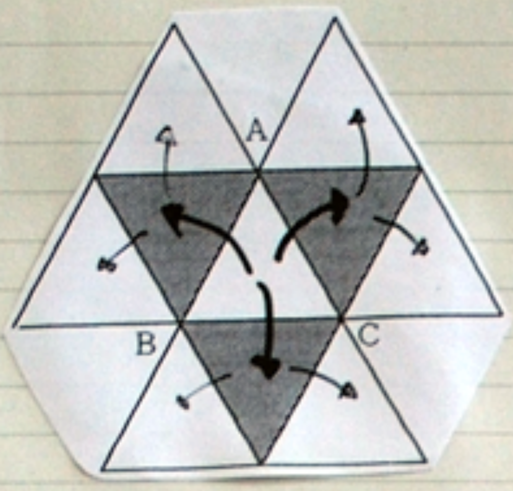
・万華鏡（カレイドスコープ）

・一般的にいう万華鏡の構造を、2次元的に考える。

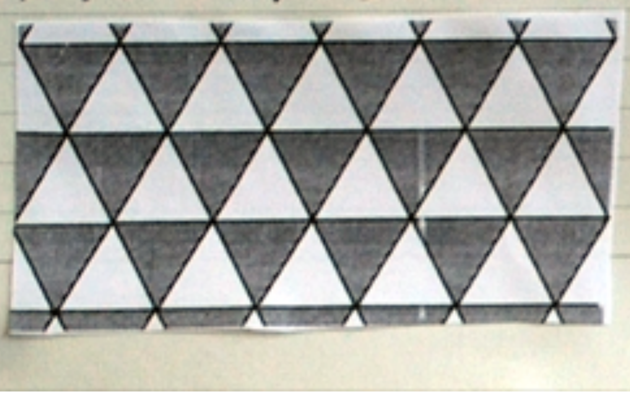


⊿ABC：正三角形

△ABCの形に鏡が貼り合わせてあるとする。
このとき、辺BC、CA、ABに対する鏡映を考える。



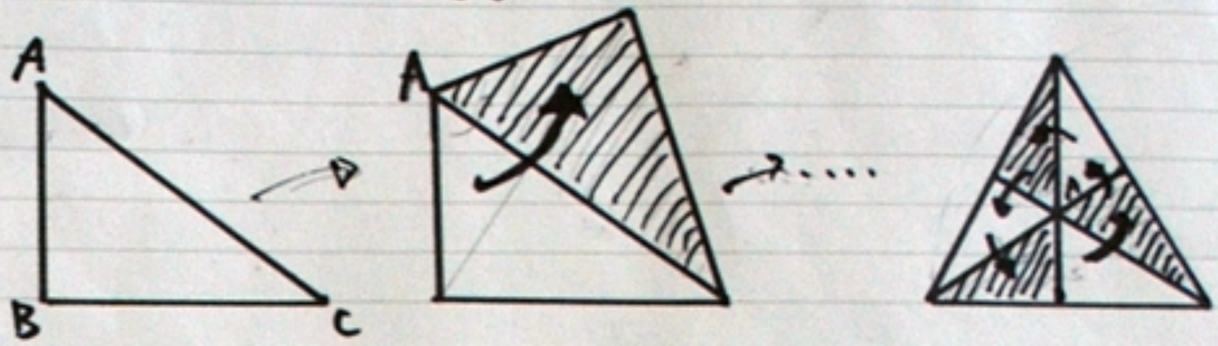
鏡映は図形を裏返しにする。裏返しになった三角形に斜線をほどこしていくと、このように



No. 4

平面全体が、正三角形の市松模様でタイル張りされる。では、この操作を他の三角形にほどこし、きれいにタイル張りできるのは、どのようなときであろうか。

今、△ABCが、上のようなことができたとする。このとき、頂点Aの周りをひと回りするような鏡映を考えることができる。



このとき、次々と鏡映されていく三角形の頂点Aの角は常に等しく、また表と裏の図が交互に現れていく。∠BACをα、現れた三角形の個数を2aとすると、$2a \cdot \alpha = 360° \iff \alpha = \frac{180°}{a}$ とできる。

同様に、角B、角Cを β、γ とおくと、

$$\beta = \frac{180°}{b}, \quad \gamma = \frac{180°}{c}$$ とできる。

これらを足すと

$$\frac{180°}{a}+\frac{180°}{b}+\frac{180°}{c}=\alpha+\beta+\gamma=180°$$ となり

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$$ が得られる。

今、$a \geq b \geq c$ とすれば、$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq \frac{3}{c} \Rightarrow c \leq 3$

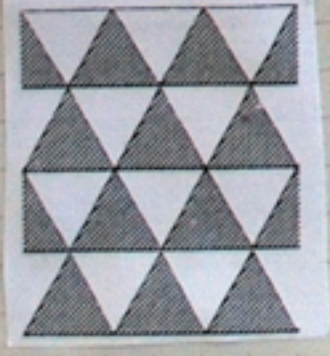
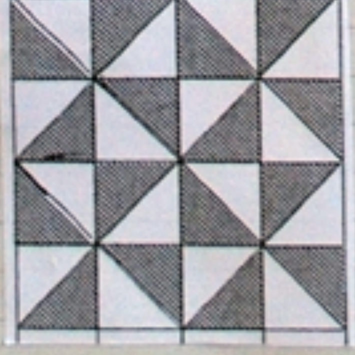
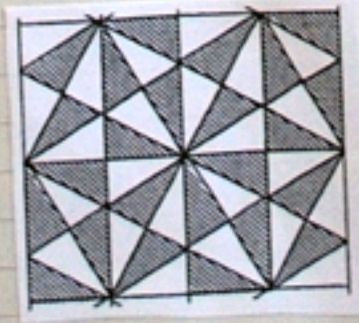
$c=2$、3のとき、a、bを同様に考えれば、

	a	b	c	形
(イ)	3	3	3	正三角形
(ロ)	4	4	2	直角二等辺三角形
(ハ)	6	3	2	30°60°90°の直角三角形

上のような表にまとめることができる。

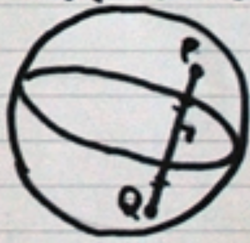
これら三種の三角形を用いて、鏡映を行うと、

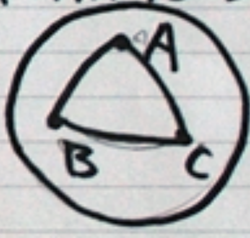
平面が三角形の市松模様に、きれいにタイル張りできる。

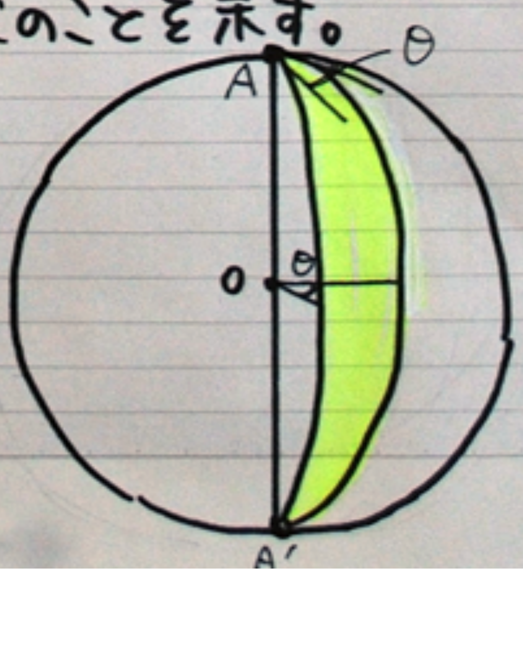
No.

・今度は、これを球面上で考えてみる。
球と球の中心を通る平面との交わりの曲線を大円という。この平面に関する鏡映を、球面から自身への写像と考え、これを、この大円に関する鏡映という。

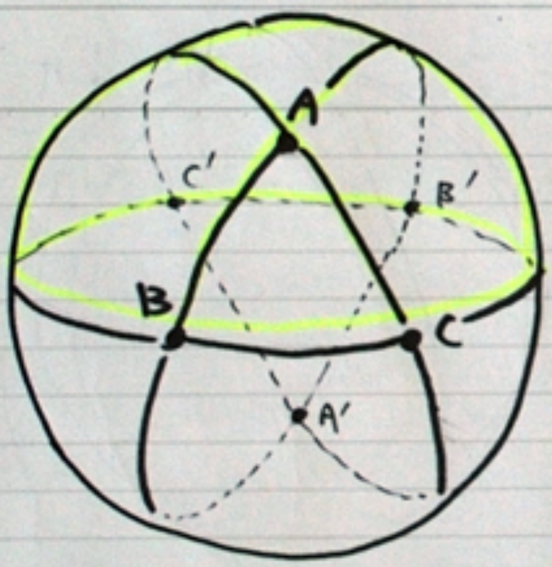




球面上で、大円の作る三角形（球面三角形）$\triangle ABC$を考える。角$\alpha = \angle BAC$とは、頂点Aにおける辺AB、辺ACの接線間の角と定義する。
$\beta = \angle ABC$、$\gamma = \angle ACB$も同様に定義すると、平面のときとは違い、$\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ$が成り立つ。
このことを示す。



点Aを通る2つの大円の角θは、球の中心に関する中心角に等しい。
ゆえに、2つの大円にはさまれている「二角形」の面積は、
$4\pi R^2 \times \frac{\theta}{2\pi} = 2R^2\theta$



この図において、∠AをAと、$\triangle ABC$の面積を$\triangle ABC$と表すとする。

このとき、

$$\begin{cases} \triangle ABC + \triangle A'BC = 2R^2 A \\ \triangle ABC + \triangle B'AC = 2R^2 B \\ \triangle ABC + \triangle C'AB = 2R^2 C \end{cases}$$

となる

$\triangle A'BC$と$\triangle AB'C'$は合同ゆえ $\triangle A'BC = \triangle AB'C'$

これらの式より

$$2\triangle ABC + \underbrace{\triangle ABC + \triangle AB'C' + \triangle B'AC + \triangle C'AB}_{\text{上半球}}$$

$$= 2R^2(A+B+C)$$

$$\Longrightarrow \triangle ABC + \pi R^2 = R^2(A+B+C)$$

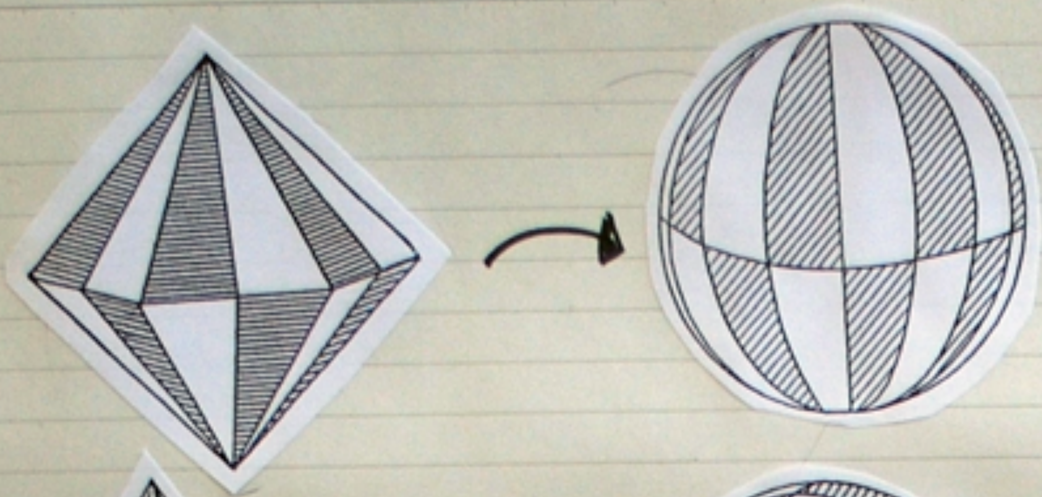
$$\Longrightarrow A+B+C = \frac{1}{R^2}\triangle ABC + \pi > \pi$$

となる。

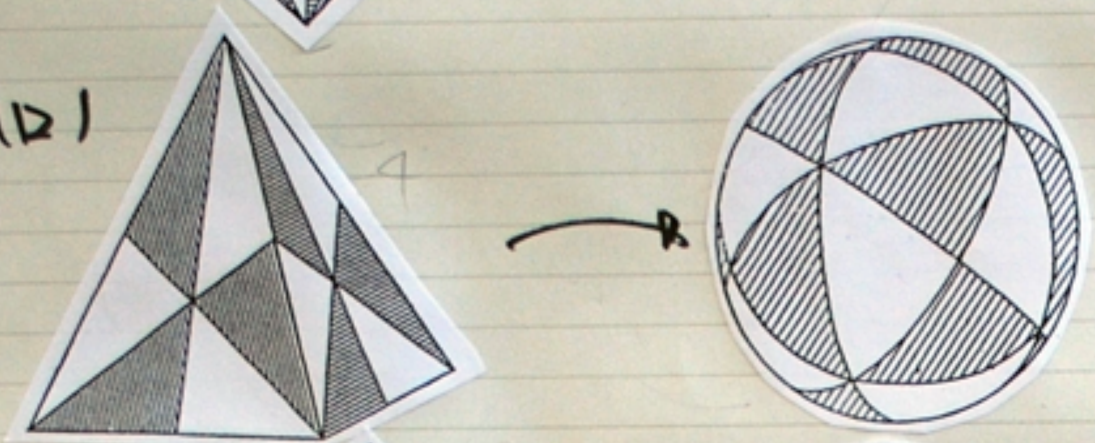
この球面三角形でも、平面と同様に考える。
辺BC、CA、ABに関するΔABCの鏡映を考えていく。
この操作によって、球面が球面三角形による市松模様のタイル張りになるためのΔABCの条件は、
平面のときと同様の考察より、
$\alpha=\frac{180^\circ}{a}$、$\beta=\frac{180^\circ}{b}$、$\gamma=\frac{180^\circ}{c}$ となる。
これを、先の不等式に代入すると、
$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>1$ を得る。
このとき、$a\geqq b\geqq c$ とすると、$1<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqq\frac{3}{c}$
$c<3$ より $c=2$.
$\frac{1}{2}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leqq\frac{2}{b}$ 、$b<4$ より $b=2,3$
$b=2$ のとき、a は2以上の任意の自然数
$b=3$ なら $a<6$
3、4、5
表のような結果になる。
(ロ)(ハ)(ニ)は
正多面体をふくらましたものとなる。

	a	b	c
(イ)	a	2	2
(ロ)	3	3	2
(ハ)	4	3	2
(ニ)	5	3	2

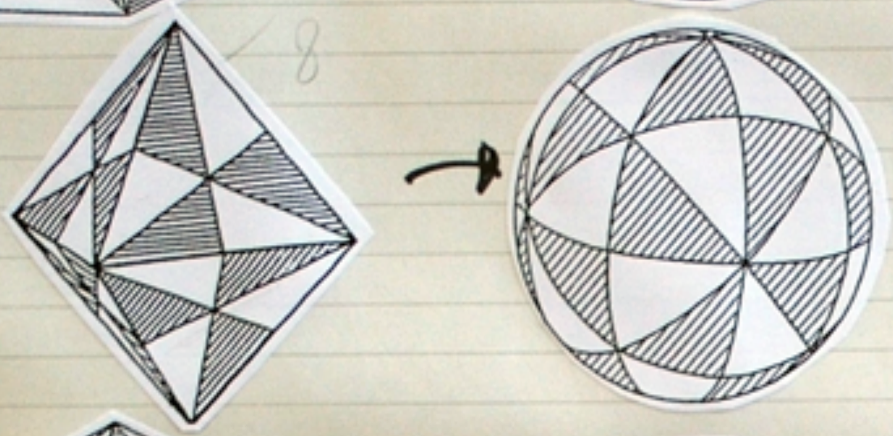
(イ)



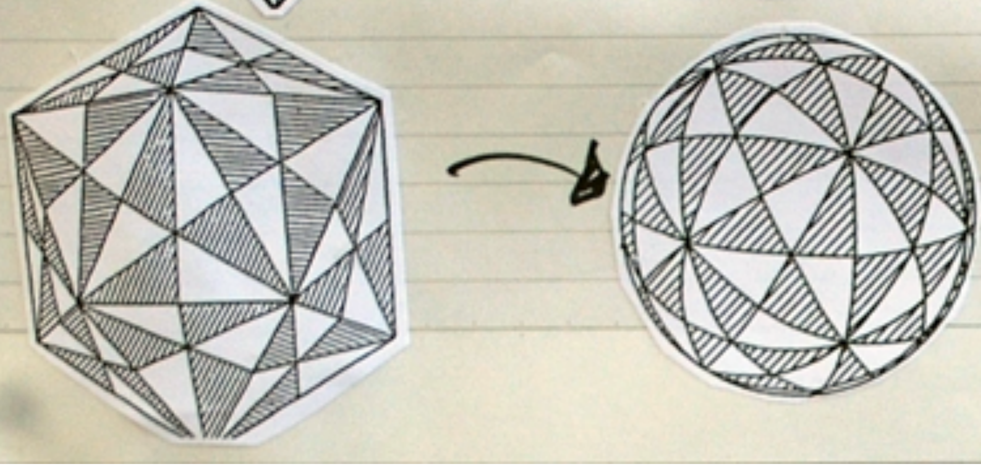
(ロ)



(ハ)



(ニ)



・平面と球面で

不等式 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<1$ のときを考えたい。

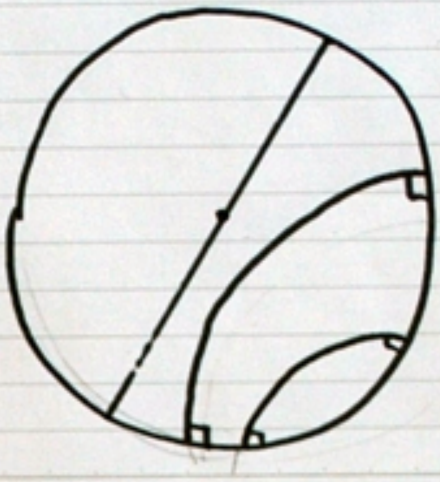
この条件をみたす2以上の自然数 a b c の組は無限に存在する。この条件に対応する市松模様タイル張りはどのようなものか。

この タイル張りは、非ユークリッド平面で考えられる

非ユークリッド平面とは、ユークリッド幾何学の「平行線公理」(第5公準)が成り立たない

つまり「一つの平面上で直線上にない1点を通って その直線と交わらない直線が無数に引ける」ような平面である。 これを観察するために、

ポアンカレのモデルを利用する



半径1の円Γの内部 D

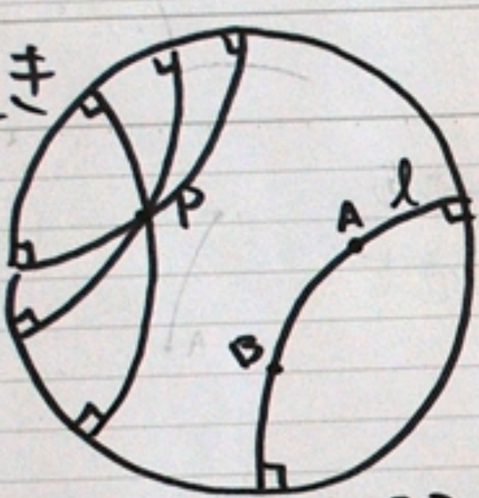
この内部で

直線 ⟷ Γと直交する円弧

平行 ⟺ 2つの直線が

D内で交わらない

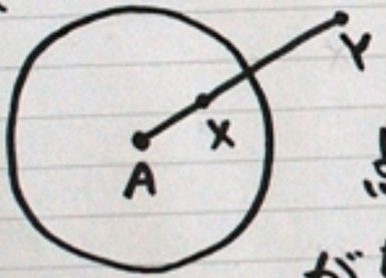
このとき



直線lに平行でPを通る直線は無数にひくことができる。

ここで円弧ABに関する鏡映とは円弧ABを含む円に関する反転のことをさす。

※反転

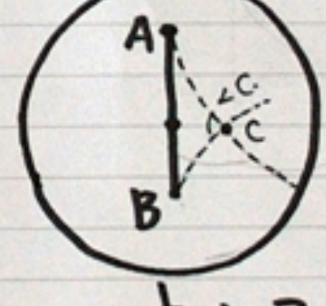


ユークリッド平面で考える
点Aを中心とし半径Rの円Cが与えられたとする。Aと異なる任意の点Xに対し、AからXへのびる半直線上の点Yを

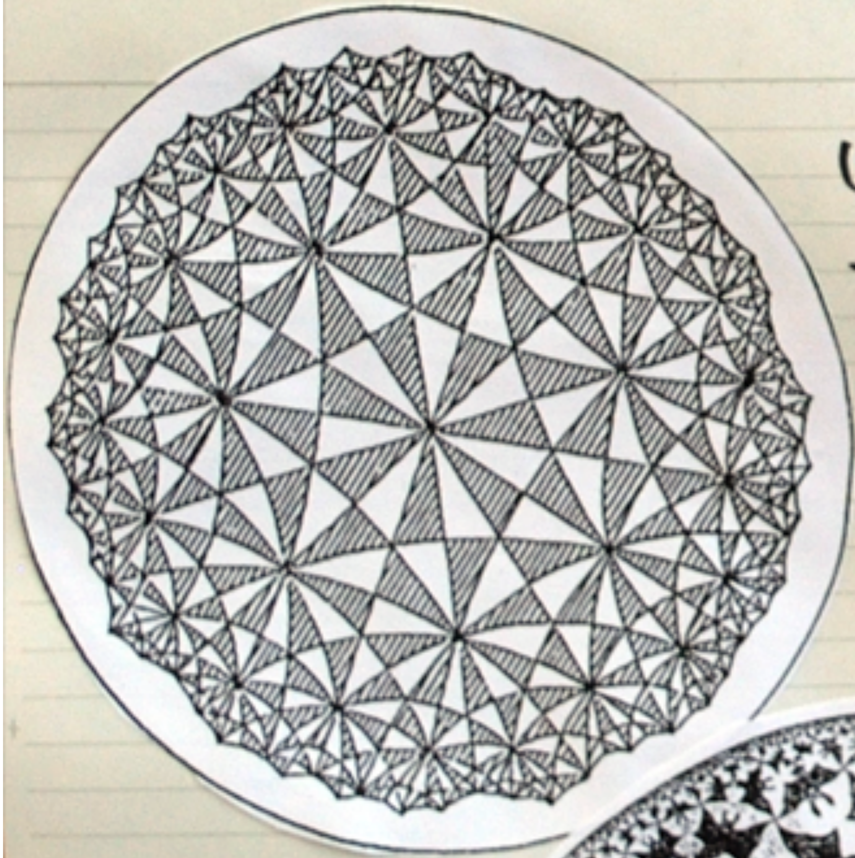
$$d(A,X)\cdot d(A,Y)=R^2$$

をみたすようにとる。
これによりYは一意的にきまる。
このXをYにうつす写像（YをX）をCに関する反転という。

この反転は、非ユークリッド平面では
・交点での2直線間の角と、反転後の角が等しい
・円を円に写す
・距離を保つ（この平面内で定義された距離）
といった性質をもっているので、平面などのときと同様、
三角形を鏡映させていくことでタイル張りできる。
実際 (a, b, c) の組が $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<1$ をみたすとき、
それぞれの角 α, β, γ に対し、$2\alpha a=360°$, $2\beta b=360°$, $2\gamma c=360°$
である。このような三角形が存在することは、図のような



円内の原点を通る直線AB
に対し、$\angle A=\alpha$、$\angle B=\beta$ となるように
円内に半直線をひいて、それらが
交わる角が $\angle C=\gamma$ となるよう調節すればよい。
この三角形の1つの頂点のまわりをひと回り
するように、鏡映（反転）させたとき、
$2a$ 個（$2b$、$2c$ 個）の三角形が張れるので
平面などと同様にタイル張りが可能である。



(a, b, c)
= (7, 3, 2)
の例

エッシャーの
天使と悪魔
(4, 4, 3)
の例