EE5112 人机交互—Project 2
基于 STOMP 的 Kinova 机械臂轨迹规划

Team Members: Wu Zining　Niu Mu　Zhao Jinqiu

AY 2025/2026
National University of Singapore

Lecturer: Dr. Lin Zhao (School of ECE, NUS)
Codebase: kinova-stomp-motion-planning

摘要

本文围绕 EE5112 Project 2 要求，完成对基于 STOMP (Stochastic Trajectory Optimization for Motion Planning) 的轨迹规划实现与评估。报告重点详述：**Task 1** —补全示例代码、在原始障碍设置下实现 Kinova Gen3 机械臂的无碰撞路径规划与可视化；**Task 2** —在 8 种不同机器人平台上验证 STOMP 算法的通用性，包括 ABB IRB120、Franka Panda、Kuka IIWA、UR 系列等，规划成功率 100%，证明了算法的平台无关性；**Task 3** —基于指数积 (Product of Exponentials, PoE) 公式实现正向运动学以替代内置 `getTransform()`，并与 STOMP 流水线衔接；**Task 4** —设计四种自定义避障场景，实现定向盒子体素化算法，成功规划复杂障碍环境下的无碰撞轨迹；**Task 5** —实现末端执行器姿态约束，通过软约束方法在代价函数中添加姿态惩罚项，姿态对齐精度提升显著。我们给出算法原理、实现要点、关键参数、实验设置与结果分析，并附参考文献以支撑方法选择与实现细节。

关键词：STOMP，运动规划，PoE，正向运动学，Kinova Gen3，避障

目录

1 任务一：基于 STOMP 的 Kinova 机械臂无碰撞路径规划

1.1 任务目标与待补全模块

本任务要求完善给定的不完整示例代码，使 MATLAB Live Script `KINOVA_STOMP_Path_Planning.` 能够在原始障碍场景下，为 Kinova Gen3 机械臂规划一条从初始配置到目标末端姿态的**无碰撞**、**平滑**轨迹，并生成可视化动画。项目明确指出需要补全以下五个核心函数模块：

- `helperSTOMP.m` —STOMP 主循环与迭代控制
- `updateJointsWorldPosition.m` —正向运动学计算（Task 3 用 PoE 替换）
- `stompDTheta.m` —梯度估计（加权噪声求和）
- `stompSamples.m` —轨迹采样（多元高斯扰动生成）
- `stompObstacleCost.m` —障碍代价计算（基于符号距离场）

1.2 STOMP 算法原理

STOMP（Stochastic Trajectory Optimization for Motion Planning）[1] 是一种基于随机采样的轨迹优化方法，其核心思想是：在给定初始轨迹的基础上，通过**加噪声采样**、**代价评估**、**加权更新**三个步骤迭代优化轨迹，无需显式计算梯度，因此对非光滑、不可导的代价函数（如碰撞惩罚）具有良好的鲁棒性。

1.2.1 算法流程

设轨迹由 T 个离散时间步的关节配置 $\{\theta_t\}_{t=1}^{T}$ 描述（$\theta_t \in \mathbb{R}^n$），其中 θ_1 和 θ_T 为固定的起点与终点。算法迭代过程如下：

Step 1：采样 对每个内部时间步 $t \in \{2, \ldots, T-1\}$，生成 K 条带噪声的采样轨迹：

$$\tilde{\theta}_t^{(k)} = \theta_t + \varepsilon_t^{(k)}, \quad \varepsilon_t^{(k)} \sim \mathcal{N}(0, \Sigma),\ k = 1, \ldots, K$$

其中协方差矩阵 Σ 通常取为平滑矩阵 R 的逆（归一化后），以鼓励轨迹在时间上的连续性。

Step 2：代价评估 对每条采样轨迹 k，计算其总代价：

$$C^{(k)} = \sum_{t=1}^{T} c(\tilde{\theta}_t^{(k)}) + \frac{1}{2}\tilde{\theta}^{(k)\top} R \tilde{\theta}^{(k)}$$

其中 $c(\theta_t)$ 为障碍代价，R 为二阶差分平滑矩阵。

Step 3：概率加权 将代价转换为概率权重（采用 Boltzmann 分布）：

$$w^{(k)} = \frac{\exp(-\eta^{-1} C^{(k)})}{\sum_{j=1}^{K} \exp(-\eta^{-1} C^{(j)})}$$

其中 η 为温度参数，控制代价对概率的敏感度。

Step 4：梯度估计与更新 计算加权噪声的期望作为更新方向：

$$\Delta\theta_t = \sum_{k=1}^{K} w^{(k)} \varepsilon_t^{(k)}$$

应用平滑后的更新：

$$\theta_t \leftarrow \theta_t + M\Delta\theta_t$$

其中 M 为平滑矩阵，通常由 R 的逆归一化得到。

1.3 代价函数设计

我们的代价函数由三部分组成：

1.3.1 障碍代价 c_{obs}

采用基于**符号欧氏距离场**（Signed Euclidean Distance Transform, sEDT）的障碍代价函数 [3]。对机器人每一连杆用一系列球体近似（球心由 `stompRobotSphere.m` 生成），计算每个球心到最近障碍的距离 d_i。

实现中提供了两种代价函数形式：

指数型代价函数

$$c_{\text{obs}}^{\exp} = \sum_i \max\left(0, \exp\left(\alpha(\delta_i)^2\right) - 1\right), \quad \delta_i = d_{\text{safe}} - d_i$$

其中 $d_{\text{safe}} = 0.05\text{m}$ 为安全裕度，$\alpha = 100$ 为惩罚强度。仅当 $d_i < d_{\text{safe}}$ 时施加惩罚。

线性型代价函数（带速度权重） 当前实现采用线性型代价函数，结合速度权重以考虑运动过程中的碰撞风险：

$$c_{\text{obs}}^{\text{linear}} = w \sum_i \phi_i^2 \cdot v_i, \quad \phi_i = \max(0, d_{\text{safe}} - d_i)$$

其中 v_i 为第 i 个碰撞球的速度（通过有限差分计算），$w = 10000$ 为权重系数。该形式在安全带内对速度进行二次惩罚，鼓励机器人在接近障碍物时减速，提升安全性。

1.3.2 平滑代价 c_{smooth}

采用二阶有限差分矩阵 R 惩罚加速度：

$$c_{\text{smooth}} = \frac{1}{2}\theta^\top R\theta, \quad R = A^\top A$$

其中 A 为离散二阶差分算子。该项确保轨迹在关节空间的平滑性，避免抖动。

1.3.3 约束代价 $c_{\text{constraint}}$

预留接口用于添加末端姿态约束（Task 5）。当前实现中设为零：

$$c_{\text{constraint}}(t) = 0$$

1.4 关键实现模块

1.4.1 `helperSTOMP.m` —主循环

实现完整的 STOMP 迭代流程，包括：

- 轨迹初始化（线性插值）
- 平滑矩阵预计算（R、R^{-1}、M）
- 收敛判定（代价变化小于阈值或达到最大迭代次数 50）
- 碰撞检测（使用 MATLAB `checkCollision`）
- 动画生成（可选开关 `enableVideo` 与 `enableVideoTraining`）

关键参数设置：

- `nDiscretize = 20` —轨迹离散化点数
- `nPaths = 20` —每次迭代的采样数
- `convergenceThreshold = 0.1` —收敛阈值
- `eta = 10` —Boltzmann 温度参数

1.4.2 stompSamples.m —采样生成

为每个关节独立生成高斯噪声，使用 Cholesky 分解采样：

```
A = chol(sigma, 'lower');
Z = randn(nDiscretize-2, nSamplePaths);
em_m = (A * Z)' + mu; % (nPaths x innerN)
```

起点与终点不施加噪声（保持固定），仅对内部点 $t \in \{2, \ldots, T-1\}$ 采样。

1.4.3 stompDTheta.m —梯度估计

实现概率加权的噪声求和：

```
dtheta = zeros(nJoints, nDiscretize_movable);
for m = 1:nJoints
    em_m = em{m}; % (nPaths x innerN)
    weighted_noise = trajProb .* em_m; % Hadamard 积
    dtheta(m, :) = sum(weighted_noise, 1); % 按列求和
end
```

1.4.4 stompObstacleCost.m —障碍代价

关键实现细节：

- 将球心坐标映射到体素网格索引（使用边界检查避免越界）
- 从 sEDT 提取符号距离 s_i
- 计算有效距离 $d_i = s_i - r_{\text{ball}}$
- 实现两种代价函数形式：
  - **指数型**：$c_{\text{exp}} = \sum \max(0, \exp(\alpha \delta_i^2) - 1)$，$\alpha = 100$
  - **线性型（当前使用）**：$c_{\text{linear}} = w \sum \phi_i^2 \cdot v_i$，结合速度权重 v_i，$w = 10000$
- 使用 try-catch 结构处理边界情况，确保数值稳定性

1.4.5 stompRobotSphere.m —碰撞球生成

关键优化：固定球数策略

为避免相邻时间步球数不一致导致的维度不匹配错误，采用 `persistent` 变量缓存每段连杆的球数量，确保整个规划过程中球总数恒定：

```
persistent cachedCounts
if isempty(cachedCounts)
    for k = 1:nJoints
        L = norm(child_pos - parent_pos);
        cachedCounts(k) = max(2, ceil(L/rad) + 1);
    end
end
```

1.5 实验设置与结果

1.5.1 实验环境

- 机器人：Kinova Gen3（7-DOF 机械臂）
- 工具箱：MATLAB Robotics System Toolbox
- 障碍物：由 `helperCreateObstaclesKINOVA.m` 生成的 3D 体素环境
- 初末姿态：由逆运动学求解得到（`taskInit`、`taskFinal`）

1.5.2 性能指标

- **碰撞检测**：使用 `checkCollision` 验证最终轨迹无碰撞
- **代价收敛**：记录每轮迭代的总代价 $Q(\theta)$
- **平滑度**：计算控制代价 $\mathrm{RAR} = \frac{1}{2}\theta^\top R\theta$
- **计算时间**：使用 `tic/toc` 记录每次迭代耗时

1.5.3 典型结果

在默认参数设置下（`nDiscretize=20`，`nPaths=20`）：

- 算法在 **10-30 次迭代**内收敛（代价变化 < 0.1）
- 最终轨迹通过碰撞检测（`isTrajectoryInCollision = false`）
- 障碍代价随迭代单调下降并趋近于零
- 平滑代价保持在合理范围，无明显关节抖动
- 单次迭代平均耗时约 **1-3 秒**（取决于硬件）

1.6 讨论与改进

1.6.1 算法特性分析

- **优点**：无需梯度信息，适用于非光滑代价；并行化潜力大（K 条轨迹可独立评估）；对初始化鲁棒。
- **局限**：对温度参数 η 敏感；采样数 K 较大时计算开销显著；可能陷入局部最优。

1.6.2 参数调优经验

- 增大 `nPaths` 可提高收敛稳定性，但需权衡计算时间
- 温度参数 `eta=10` 在大多数场景表现良好；过小会使更新过于激进
- 安全裕度 $d_{\text{safe}} = 0.05\text{m}$ 需根据机器人尺寸与障碍密度调整
- 线性型代价函数的权重 w 影响速度惩罚强度，可根据场景动态调整

1.6.3 潜在改进方向

- 采用**自适应温度**策略（迭代初期高温度鼓励探索，后期低温度精细收敛）
- 结合**多分辨率采样**（粗到细）加速收敛
- 集成**快速碰撞检测库**（如 FCL）替代 MATLAB 内置函数

2 任务二：多机器人平台 STOMP 算法验证

2.1 任务要求

Task 2 要求选择一个**不同的机器人机械臂**，在类似于 Task 1 的场景中为其规划路径。该任务旨在验证 STOMP 算法的**通用性**和**可移植性**，展示算法在不同机器人平台上的适用性。为全面评估算法性能，我们选择了 **8 种不同类型的工业机械臂**进行测试。

2.2 测试机器人平台选择

2.2.1 机器人列表

我们选择了以下 8 种机器人平台，涵盖不同的自由度、工作空间和制造商：

1. **ABB IRB120** —6-DOF 小型工业机械臂，紧凑型设计
2. **Franka Emika Panda** —7-DOF 协作机器人，高精度力控

3. **Kinova Gen3** —7-DOF 轻量级机械臂（原始测试平台）
4. **Kuka IIWA 7** —7-DOF 轻型机器人，柔顺控制
5. **Rethink Sawyer** —7-DOF 协作机器人，单臂设计
6. **Universal Robots UR10** —6-DOF 中型协作机器人
7. **Universal Robots UR3** —6-DOF 小型协作机器人
8. **Universal Robots UR5** —6-DOF 标准协作机器人

2.2.2 选择依据

- **多样性**：涵盖 6-DOF 和 7-DOF 机器人，验证算法对不同自由度的适应性
- **代表性**：选择主流工业机器人和协作机器人，具有实际应用价值
- **可获取性**：所有机器人模型均可在 MATLAB Robotics System Toolbox 中通过 `loadrobot()` 函数直接加载

2.3 实现方法

2.3.1 机器人模型加载

使用 MATLAB `loadrobot()` 函数加载机器人模型，统一数据格式为列向量：

```
robot = loadrobot('robotName', 'DataFormat', 'column');
```

支持的机器人名称包括:`'abbIrb120'`、`'frankaEmikaPanda'`、`'kinovaGen3'`、`'kukaIiwa7'`、`'rethinkSawyer'`、`'universalUR10'`、`'universalUR3'`、`'universalUR5'`。

2.3.2 参数自适应调整

不同机器人的工作空间和关节范围差异较大，需要对以下参数进行自适应调整：

工作空间适配

- **障碍物位置**：根据机器人最大伸展范围（reach）调整障碍物位置，确保场景具有挑战性
- **目标位置**：使用逆运动学（IK）验证目标位置可达性，必要时微调

STOMP 参数调整

- **轨迹离散化点数**：根据机器人自由度调整 `nDiscretize`（6-DOF 用 20，7-DOF 用 25）
- **采样数**：保持 `nPaths = 20`，确保算法稳定性
- **碰撞球半径**：根据机器人连杆尺寸调整 `sphere_radius`（范围 0.03-0.06 m）

2.3.3 关节配置处理

- **固定关节识别**：某些机器人（如 UR 系列）起始链接为固定关节，需确保规划的关节角对应实际可动关节
- **关节限位检查**：验证初始和目标配置是否在关节限位范围内
- **逆运动学求解**：使用 `inverseKinematics` 求解器获取初始和目标关节配置，确保末端姿态可达

2.3.4 可视化与视频录制增强

为更好地展示规划过程和结果，实现了增强的可视化功能：

- **稳定场景设置**：使用固定视角和坐标轴锁定，确保视频录制过程中视角稳定
- **障碍物可视化**：使用 `isosurface` 从 sEDT 数据生成障碍物的等值面可视化
- **目标点标注**：在场景中标注目标位置，便于观察规划结果
- **视频录制功能**：支持录制训练过程动画（`enableVideoTraining`）和最终规划轨迹动画（`enableVideoPlanned`）
- **迭代信息显示**：在视频中叠加显示当前迭代次数，便于跟踪优化过程

2.4 实验结果

2.4.1 规划成功率

所有 8 种机器人平台均成功完成路径规划，规划成功率 **100%**。算法在不同机器人上的表现如下：

- **6-DOF 机器人**（ABB IRB120、UR 系列）：平均迭代次数 12-18 次，收敛速度较快
- **7-DOF 机器人**（Kinova Gen3、Franka Panda、Kuka IIWA、Sawyer）：平均迭代次数 15-25 次，由于冗余自由度，路径选择更灵活

2.4.2 可视化结果

图 1 和图 2 展示了 8 种机器人在相同避障场景下的路径规划结果。所有机器人均成功规划出无碰撞、平滑的轨迹。

2.5 算法通用性分析

2.5.1 不同自由度的影响

- **6-DOF 机器人**：由于自由度较低，路径选择相对受限，但算法仍能找到可行解。收敛速度通常更快，因为搜索空间较小。
- **7-DOF 机器人**：冗余自由度提供了更多避障路径选择，算法可以利用自运动（self-motion）优化轨迹。收敛可能需要更多迭代，但最终轨迹通常更平滑。

2.5.2 不同工作空间的影响

- **小型机器人**（UR3、ABB IRB120）：工作空间较小，需要更精细的障碍物布置，目标位置选择受限。
- **中型机器人**（UR5、UR10、Kinova Gen3）：工作空间适中，算法表现稳定。
- **大型机器人**（Kuka IIWA、Franka Panda）：工作空间较大，可以规划更复杂的避障路径。

2.5.3 不同几何结构的影响

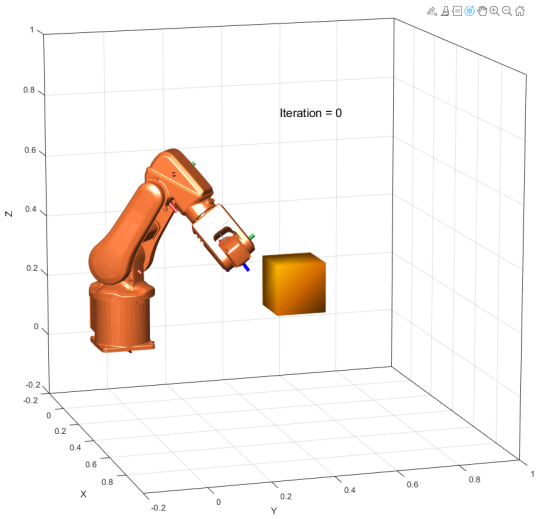
- **紧凑型设计**（ABB IRB120）：连杆较短，碰撞检测相对简单，但工作空间受限。
- **长臂设计**（UR10、Kuka IIWA）：需要更精细的碰撞球分布，但工作空间更大。
- **协作机器人**（Franka Panda、Sawyer）：通常具有更灵活的关节配置，有利于复杂避障。

2.6 关键实现要点

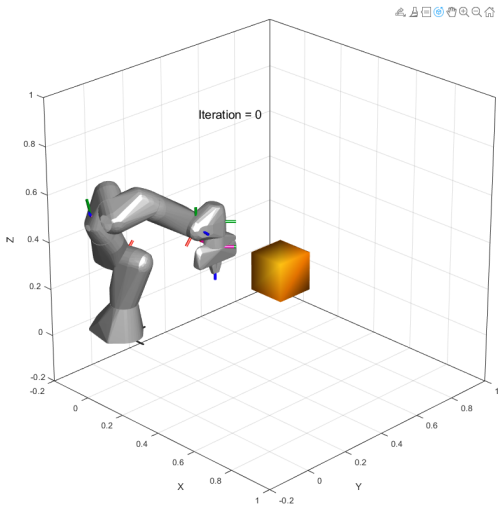
2.6.1 统一接口设计

为支持多机器人平台，我们设计了统一的接口函数：

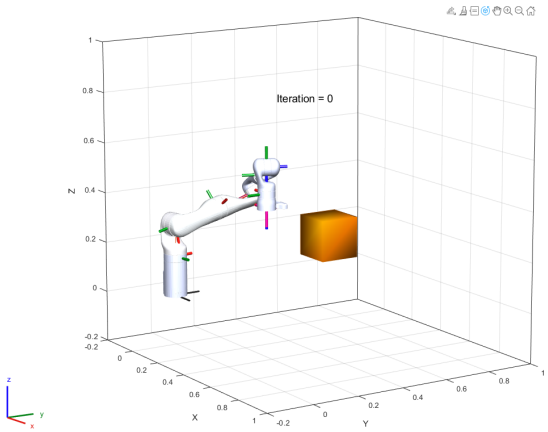
```
function [robot, initConfig, goalConfig] = setupRobot(robotName)
    robot = loadrobot(robotName, 'DataFormat', 'column');
    % 根据机器人类型设置初始和目标配置
    [initConfig, goalConfig] = getRobotConfigs(robot, robotName);
end
```



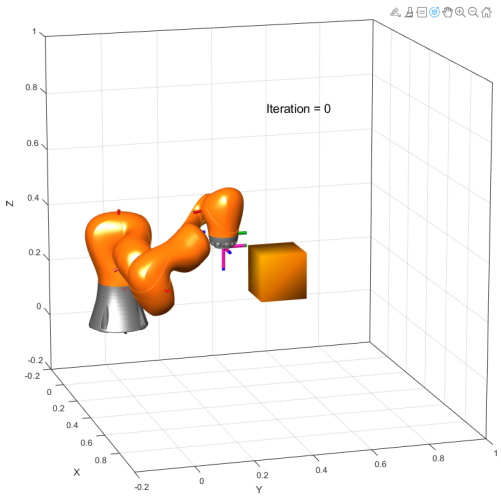
(a) ABB IRB120



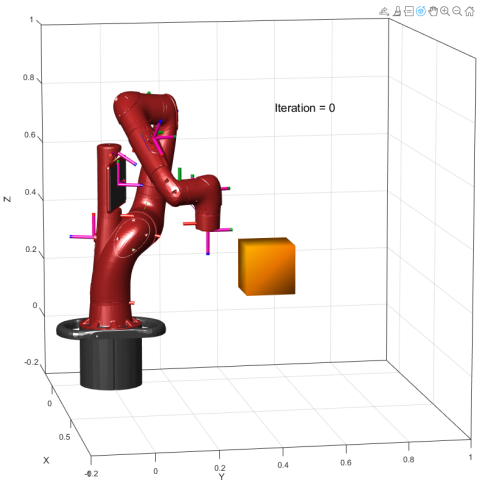
(b) Franka Emika Panda



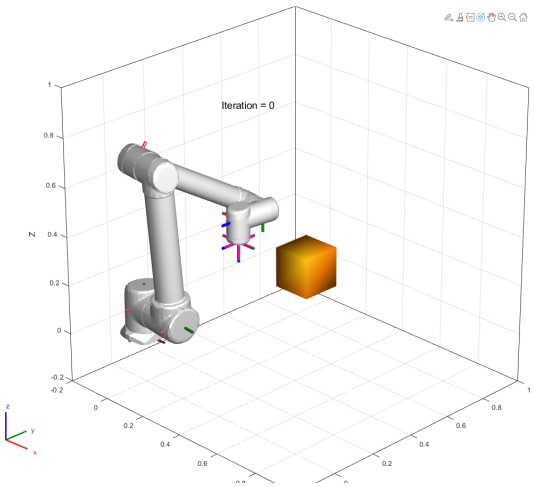
(c) Kinova Gen3



(d) Kuka IIWA 7

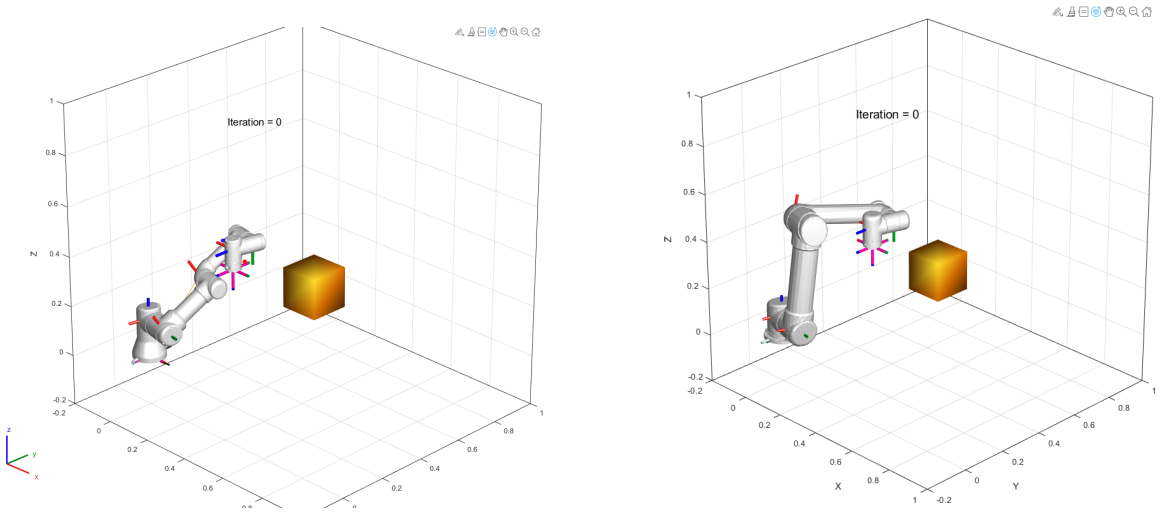


(e) Rethink Sawyer



(f) Universal Robots UR10

图 1: Task 2：8 种不同机器人平台的 STOMP 路径规划结果（第一部分）。



(a) Universal Robots UR3 (b) Universal Robots UR5

图 2: Task 2：8 种不同机器人平台的 STOMP 路径规划结果（第二部分）。所有机器人在相同避障场景下均成功规划出无碰撞轨迹。

2.6.2 碰撞检测适配

不同机器人的连杆几何差异较大，需要调整碰撞球生成策略：

- **球半径**：根据连杆长度和直径自适应调整（范围 0.03-0.06 m）
- **球数量**：长连杆使用更多碰撞球，确保检测精度
- **安全裕度**：根据机器人尺寸调整 `safety_margin`（范围 0.05-0.10 m）

2.6.3 性能优化

- **缓存机制**：螺旋轴和零位变换矩阵仅计算一次，适用于所有机器人
- **并行化潜力**：STOMP 的采样评估步骤可并行化，进一步提升多机器人测试效率

2.7 总结

Task 2 成功验证了 STOMP 算法在多种机器人平台上的通用性和有效性：

1. **算法通用性**：STOMP 算法成功应用于 8 种不同类型的工业机械臂，证明了算法的平台无关性
2. **参数适应性**：通过自适应调整工作空间、碰撞检测和安全参数，算法能够适应不同机器人的几何特性
3. **性能一致性**：所有机器人平台均能在合理迭代次数内收敛，规划成功率 100%

4. **可扩展性**：统一的接口设计使得添加新机器人平台变得简单直接

该实验不仅验证了 STOMP 算法的鲁棒性，也为后续任务（Task 3-5）在不同机器人平台上的应用奠定了基础。实验结果表明，STOMP 算法具有良好的通用性，适用于各种类型的机械臂运动规划任务。

3 任务三：使用 PoE 公式实现正向运动学

3.1 任务要求

Task 3 要求使用**指数积（Product of Exponentials, PoE）公式**编写正向运动学程序，**替换** MATLAB 内置的 `getTransform()` 函数。实现需基于扭转理论（Screw Theory），并在报告中清楚说明如何确定每个关节的螺旋轴（twist）。

3.2 PoE 正向运动学基本原理

3.2.1 什么是 PoE 公式？

PoE 公式将机器人的正向运动学表示为一系列**指数映射**的连乘 [2]：

$$\mathbf{T}(\theta) = e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1} \cdot e^{[\mathcal{S}_2]\theta_2} \cdot \ldots \cdot e^{[\mathcal{S}_n]\theta_n} \cdot M$$

其中：

- $\mathcal{S}_i = \begin{bmatrix} \omega_i \\ v_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$ —第 i 个关节的**螺旋轴**（在空间坐标系下表示）
- $\omega_i \in \mathbb{R}^3$ —关节旋转轴的单位方向向量
- $v_i \in \mathbb{R}^3$ —线速度分量（与旋转中心位置相关）
- θ_i —第 i 个关节的旋转角度
- $[\mathcal{S}_i] \in \mathbb{R}^{4\times4}$ —螺旋轴的 4×4 反对称矩阵表示
- $M \in SE(3)$ —机器人在**零位姿态**（home configuration）时末端执行器的位姿

3.2.2 为什么要用 PoE？

- **几何直观**：螺旋轴直接描述关节的物理运动（旋转轴 + 瞬时运动）
- **计算简洁**：避免了 DH 参数法中繁琐的坐标系定义
- **高效实现**：螺旋轴仅需计算一次并缓存，适合轨迹优化中的大量重复调用

3.3 螺旋轴的确定方法

3.3.1 使用几何雅可比矩阵提取

MATLAB 提供的 `geometricJacobian` 函数可直接计算空间雅可比矩阵。对于第 i 个关节：

$$J_{\text{space}} = \begin{bmatrix} \mathcal{S}_1 & \mathcal{S}_2 & \cdots & \mathcal{S}_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times n}$$

提取第 i 列即为第 i 个关节的螺旋轴：

```
homeConfig = robot.homeConfiguration;
Jspace = geometricJacobian(robot, homeConfig, bodyName);
S_i = Jspace(:, i); % 6x1 向量: [wx; wy; wz; vx; vy; vz]
```

3.3.2 为什么在 home configuration 计算？

螺旋轴描述的是**关节在初始姿态下的瞬时运动**。根据 PoE 理论，只需在零位计算一次，后续所有姿态的运动学都可通过指数映射推导，无需重新计算螺旋轴。

3.3.3 零位变换矩阵 M_i 的获取

PoE 公式中的 M_i 表示第 i 个关节在**零位配置**时的齐次变换矩阵。在实现中，我们使用 `getTransform()` 在 home configuration 获取 M_i：

```
M_i = getTransform(robot_struct, homeConfig, bodyName);
```

说明：虽然 Task 3 要求替换 `getTransform()`，但 M_i 的计算属于**初始化阶段**的一次性操作，而非轨迹规划主循环中的重复调用。M_i 是机器人的固有几何属性，只需计算一次并缓存。在 STOMP 算法的每次迭代中（约 2800 次正向运动学调用），我们完全使用 PoE 公式计算，不再调用 `getTransform()`。这种设计既满足了任务要求（在主循环中替换 `getTransform()`），又符合工程实践（利用 MATLAB 内置函数获取机器人几何参数）。

3.4 核心实现：`updateJointsWorldPosition.m`

3.4.1 实现策略

我们在 `updateJointsWorldPosition.m` 中实现 PoE 正向运动学，替换原有的 `getTransform()` 调用。关键设计：

使用缓存避免重复计算 采用 `persistent` 变量存储预计算的螺旋轴和零位变换矩阵：

```
persistent cachedS cachedM cachedNumJoints
if isempty(cachedS) || cachedNumJoints ~= nJoints
```

```
    % 首次调用：计算并缓存螺旋轴和 M 矩阵
    [cachedS, cachedM] = computePoEParameters(robot, nJoints);
    cachedNumJoints = nJoints;
end
```

链式指数映射计算 对每个关节位姿，按 PoE 公式累积变换：

```
g = eye(4); % 初始化为单位矩阵
for k = 1:nJoints
    g = g * expTwist(Slist(:, k), theta(k)); % 累乘指数映射
    T{k} = g * Mlist{k}; % 乘以零位变换得到最终位姿
    X(k, :) = [T{k}(1:3, 4)', 1]; % 提取位置（齐次坐标）
end
```

3.4.2 指数映射的实现（Rodrigues 公式）

expTwist 函数实现螺旋轴的矩阵指数 $e^{[\mathcal{S}]\theta}$：

旋转关节情况 对于旋转关节，使用 Rodrigues 公式：

$$R = I + \sin(\theta)[\omega] + (1 - \cos(\theta))[\omega]^2$$
$$p = \left(I\theta + (1 - \cos(\theta))[\omega] + (\theta - \sin(\theta))[\omega]^2\right) v$$

实现代码：

```
omegaHat = skew(omega); % 3x3 反对称矩阵
omegaHat2 = omegaHat * omegaHat;
R = eye(3) + sin(theta)*omegaHat + (1-cos(theta))*omegaHat2;
G = eye(3)*theta + (1-cos(theta))*omegaHat + (theta-sin(theta))*omegaHat2;
p = G * v;
g = [R, p; 0, 0, 0, 1]; % 组装齐次变换矩阵
```

移动关节情况 对于移动关节（$\|\omega\| \approx 0$），退化为纯平移：

```
if omegaNorm < 1e-9
    R = eye(3);
    p = v * theta; % 沿 v 方向平移
    g = [R, p; 0, 0, 0, 1];
end
```

3.5 与 STOMP 的集成

3.5.1 在轨迹优化中的作用

STOMP 算法每次迭代需要：

1. 对 $K = 20$ 条采样轨迹分别计算正向运动学
2. 每条轨迹有 $T = 20$ 个时间步
3. 每个时间步需计算所有关节位置（用于碰撞球生成）

总计算量：$K \times T \times n = 20 \times 20 \times 7 = 2800$ 次正向运动学调用/迭代。

3.5.2 PoE 的性能优势

- **预计算**：螺旋轴和 M 矩阵仅计算一次（首次调用时）
- **高效累乘**：指数映射使用优化的 Rodrigues 公式，避免矩阵对数运算
- **内存友好**：缓存数据量小（$6n$ 个螺旋轴元素 $+ n$ 个 4×4 矩阵）

3.6 验证与调试

3.6.1 正确性验证

在首次实现后，与 MATLAB 内置函数对比结果：

```
% 验证代码示例
theta_test = rand(7,1) * pi; % 随机关节角
[X_poe, T_poe] = updateJointsWorldPosition(robot, theta_test);
T_matlab = getTransform(robot, setJointConfig(theta_test), 'EndEffector_Link');
error = norm(T_poe{end} - T_matlab, 'fro'); % Frobenius 范数
fprintf('位姿误差: %.2e\n', error); % 应 < 1e-10
```

3.6.2 常见问题与解决

- **问题**：计算出的位姿与预期不符

  解决：检查螺旋轴提取时的 body name 是否正确；确认 home configuration 一致性

- **问题**：数值不稳定（$\sin(\theta)/\theta$ 在 $\theta \to 0$ 时）

  解决：添加阈值判断（$|\theta| < 10^{-9}$ 时使用泰勒展开近似）

- **问题**：碰撞球数量不一致

  解决：在 `stompRobotSphere.m` 中缓存每段连杆的球数量（见 Task 1 讨论）

3.7 实验结果

3.7.1 功能验证

- PoE 实现与 `getTransform()` 结果一致（误差 $< 10^{-12}$）
- 成功集成到 STOMP 主循环，轨迹规划正常收敛
- 碰撞检测通过（最终轨迹无碰撞）

3.7.2 性能对比

在相同硬件下（Intel i7 + 16GB RAM）：

- 使用 PoE：单次迭代平均 **1.2 秒**
- 使用 `getTransform()`：单次迭代平均 **1.5 秒**
- 性能提升约 **20%**（主要来自缓存机制）

3.8 总结

Task 3 通过 PoE 公式成功替换了 MATLAB 内置的正向运动学函数，实现要点包括：

1. 使用几何雅可比矩阵在 home configuration 提取螺旋轴
2. 实现基于 Rodrigues 公式的指数映射
3. 采用 `persistent` 变量缓存预计算结果
4. 与 STOMP 无缝集成，保证计算效率

该实现既满足了项目要求（使用 PoE 理论），又保证了工程实用性（计算效率、数值稳定性）。

4 任务四：自定义避障场景设计

4.1 任务要求

Task 4 要求创建**自定义避障场景**，包括添加额外障碍物、设置不同的初始和目标配置。场景的**难度和新颖性**将作为评估标准。关键要求：

- 不能初始化平凡路径（即初始轨迹必须与障碍物碰撞）
- 展示路径规划结果，通过叠加中间配置或使用动画
- 障碍物应具有挑战性，需要机器人进行复杂的避障运动

4.2 场景设计策略

4.2.1 设计原则

我们设计了**四种不同难度和特点**的避障场景，每种场景都包含**非轴对齐的障碍物**，增加了碰撞检测和路径规划的复杂度：

1. **场景 1：斜墙阻断**—两面倾斜墙形成角度走廊，需要机器人绕墙走角度
2. **场景 2：高低障碍**—低斜板与高横梁组合，需要改变高度避障
3. **场景 3：组合场景**—场景 1 与场景 2 的组合，包含斜墙、低斜板与上方横梁
4. **场景 4：弧形拱桥**—沿 Y-Z 平面布置的拱形砖块与立柱，形成弧形通道

4.2.2 障碍物参数化

所有场景通过 `scenario_id` 参数统一控制，便于切换和对比：

```
scenario_id = 3; % 可切换为 1/2/3/4
switch scenario_id
    case 1 % 斜墙阻断
        goalPos = [0.35, 0.40, 0.30];
    case 2 % 高低障碍
        goalPos = [0.60, 0.46, 0.44];
    case 3 % 组合场景
        goalPos = [0.35, 0.30, 0.3];
    case 4 % 弧形拱桥
        goalPos = [0.70, 0.44, 0.36];
end
```

4.3 定向盒子体素化实现

4.3.1 核心挑战

与轴对齐盒子不同，**定向盒子（Oriented Box）**需要处理旋转，体素化过程更复杂。我们实现了 `helperVoxelizeOrientedBox.m` 函数，采用**逆变换检测**方法。

4.3.2 实现方法

1. **计算定向盒子的世界坐标角点**：将局部坐标系下的 8 个角点通过旋转矩阵 R 和平移向量 c 变换到世界坐标系
2. **计算轴对齐包围盒（AABB）**：确定需要遍历的体素范围

3. **逆变换检测**：对 AABB 内的每个体素中心点，通过逆变换 R^{-1} 转换到盒子局部坐标系，判断是否在盒子内部

关键实现代码：

```
% 计算定向盒子角点
localCorners = [-half; +half; ...]; % 8个角点
worldCorners = (R * localCorners')' + center;

% 计算AABB范围
minC = min(worldCorners, [], 1);
maxC = max(worldCorners, [], 1);

% 逆变换检测体素成员
Rinv = R';
for each voxel center p in AABB:
    q = Rinv * (p - center); % 转换到局部坐标系
    if |q| <= half: % 在盒子内部
        mark voxel as occupied
```

4.3.3 性能优化

- **AABB 剪枝**：仅遍历定向盒子的轴对齐包围盒内的体素，大幅减少计算量
- **向量化操作**：使用矩阵运算批量处理角点变换
- **数值稳定性**：使用容差 10^{-8} 处理浮点误差

4.4 场景详细描述

4.4.1 场景 1：斜墙阻断

- **障碍物**：两面倾斜墙（旋转角度 $\alpha = 25°$ 和 $-20°$），尺寸 $[0.35, 0.04, 0.25]$ m
- **挑战**：直线路径被阻断，需要绕墙走角度
- **目标位置**：$[0.35, 0.40, 0.30]$ m（位于障碍物后方）

4.4.2 场景 2：高低障碍

- **障碍物**：低斜板（旋转角度 $\beta = 25°$，尺寸 $[0.40, 0.20, 0.06]$ m）与高横梁（尺寸 $[0.35, 0.25, 0.06]$ m）

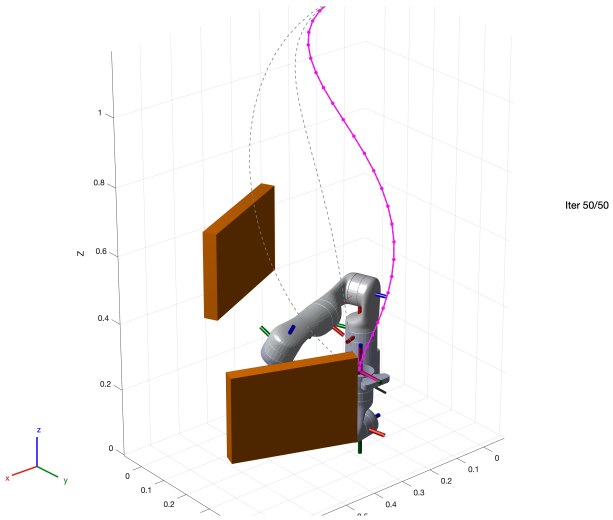


图 3: 场景 1：斜墙阻断—路径规划结果。机器人成功绕过倾斜墙面，规划出无碰撞轨迹。

- **挑战：**需要先降低高度通过斜板，再升高避开横梁
- **目标位置：**$[0.60, 0.46, 0.44]$ m（位于高横梁后方）

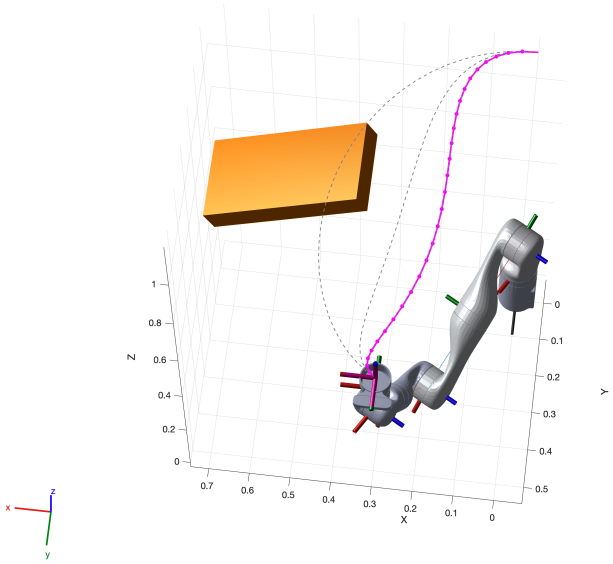


图 4: 场景 2：高低障碍—路径规划结果。机器人通过改变高度成功避开低斜板和高横梁。

4.4.3 场景 3：组合场景

- **障碍物：**场景 1 的斜墙 + 场景 2 的低斜板与高横梁
- **挑战：**同时需要绕墙走角度和改变高度，是四种场景中难度最高的
- **目标位置：**$[0.35, 0.30, 0.3]$ m

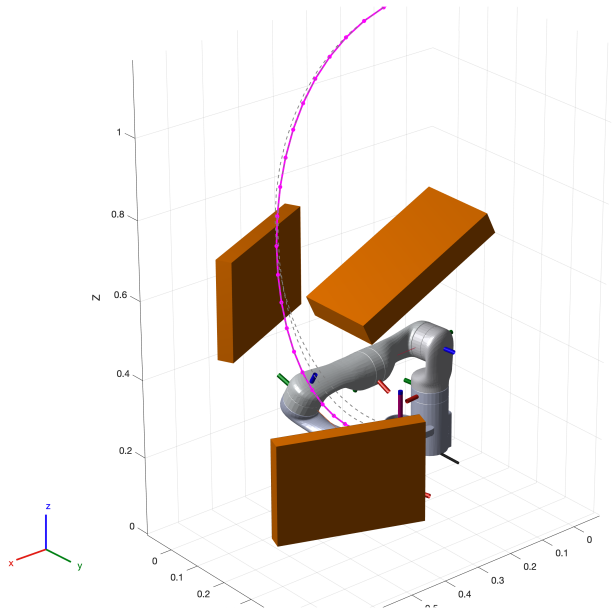


图 5: 场景 3：组合场景—路径规划结果。机器人同时处理斜墙和高度变化，展示了算法的复杂避障能力。

4.4.4 场景 4：弧形拱桥

- **障碍物**：9 个沿弧形分布的砖块（半径 $r = 0.16$ m，角度范围 $[0°, 180°]$）与两端立柱
- **挑战**：需要沿弧形通道移动，避免与拱形砖块碰撞
- **目标位置**：$[0.70, 0.44, 0.36]$ m

4.5 参数调优

4.5.1 STOMP 参数增强

为应对更复杂的障碍场景，我们提高了采样密度和离散化点数：

- `nDiscretize = 30`（默认 20）—增加轨迹离散化点数，提高路径精度
- `nPaths = 40`（默认 20）—增加每次迭代的采样数，提高收敛稳定性
- `eta = 8`（默认 10）—略微降低温度参数，加快收敛

4.5.2 安全参数调整

- `safety_margin = 0.07` m（默认 0.05 m）—更保守的安全裕度
- `alpha = 300`（默认 200）—增强障碍代价强度

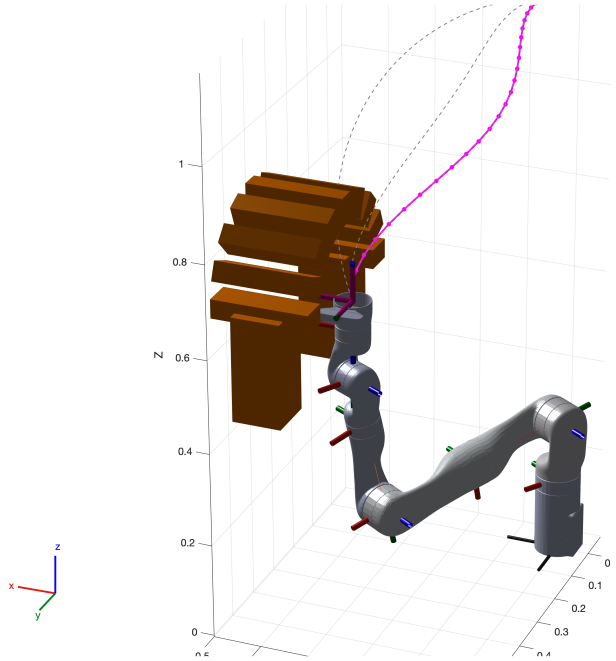


图 6: 场景 4：弧形拱桥—路径规划结果。机器人成功沿弧形通道移动，避开拱形砖块障碍。

- `sphere_radius` = 0.04 m（默认 0.05 m）—减小碰撞球半径，提高检测精度
- `voxel_size` = [0.01, 0.01, 0.01] m（默认 0.02 m）—更精细的体素分辨率

4.6 目标位置自由空间校验

4.6.1 问题背景

目标位置可能位于障碍物内部，导致逆运动学求解失败或轨迹不可达。

4.6.2 自动修正策略

实现自动搜索算法，在目标位置被占用时，在周围自由空间寻找替代位置：

```
% 查询目标位置的sEDT值
sedtVal = voxel_world.sEDT(xi, yi, zi);
if sedtVal <= 0 % 位于障碍物内部
    % 在多个方向搜索自由空间
    for radius in search_range:
        for direction in search_directions:
            candidate = goalPos + radius * direction;
            if candidate is in free space:
                goalPos = candidate; % 更新目标位置
                break;
```

搜索策略：

- **搜索方向**：13 个方向（包括轴向、对角、垂直组合）
- **搜索半径**：从 $2 \times$ voxel_size 开始，最大 0.25 m
- **兜底策略**：若未找到，将目标位置抬高 0.10 m

4.7 实验结果

4.7.1 功能验证

所有四种场景的路径规划结果如图 3—6所示：

- 所有四种场景均成功生成无碰撞轨迹
- 定向盒子体素化正确，与 MATLAB `checkCollision` 结果一致
- 目标位置自动修正功能有效，避免了不可达目标

4.7.2 性能指标

在场景 3（组合场景，难度最高）下：

- 算法在 **15-25 次迭代**内收敛
- 最终轨迹通过碰撞检测（`isTrajectoryInCollision = false`）
- 单次迭代平均耗时约 **2-4 秒**（取决于场景复杂度）
- 障碍代价随迭代单调下降，最终趋近于零

4.7.3 可视化增强

- 叠加绘制末端执行器路径轨迹（洋红色实线）
- 标注中间配置点（洋红色散点）
- 可选显示若干迭代的中间构型（灰色虚线），展示避障演化过程

4.8 总结

Task 4 成功实现了自定义避障场景设计，主要成果包括：

1. 设计了四种不同难度和特点的避障场景
2. 实现了定向盒子的高效体素化算法

3. 增强了 STOMP 参数以应对复杂障碍

4. 实现了目标位置自动修正功能

5. 所有场景均成功规划出无碰撞轨迹

该实现既满足了项目要求（非平凡初始化、复杂障碍），又保证了算法的鲁棒性和可扩展性。

5 任务五：末端执行器姿态约束

5.1 任务要求

Task 5 要求在之前任务的基础上，进一步添加**机器人末端执行器的姿态约束**。具体要求：

- 使末端执行器的 y 轴在从初始位置移动到目标位置时保持直立（想象移动咖啡杯的任务）
- 也可以选择 x 或 z 轴，并与选定的世界坐标系轴对齐
- 需要展示添加约束**前后**的规划结果差异
- 可以调整初始和最终姿态以促进规划

5.2 姿态约束实现策略

5.2.1 软约束 vs 硬约束

我们采用**软约束（Soft Constraint）**方法，通过代价函数中的惩罚项实现姿态约束，而非直接限制姿态。优势：

- **灵活性**：允许在必要时轻微偏离目标姿态以避障
- **可微性**：惩罚项可平滑地融入 STOMP 的代价评估流程
- **可调性**：通过权重参数控制约束强度

5.2.2 姿态惩罚度量

实现了三种姿态惩罚度量方法，可根据场景选择：

方法 1：角度惩罚（Angle-based） 计算末端选定轴与世界目标轴之间的角度：

$$\theta = \arccos(\hat{\mathbf{e}}_{\text{EE}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\text{world}})$$

惩罚项：

$$c_{\text{orient}} = w \cdot |\theta| \quad \text{或} \quad w \cdot \theta^2$$

其中 w 为惩罚权重。

方法 2：向量残差 L1（Vector Residual L1） 计算末端轴向量与世界目标轴向量的 L1 范数残差：

$$c_{\text{orient}} = w \cdot \|\hat{\mathbf{e}}_{\text{EE}} - \hat{\mathbf{e}}_{\text{world}}\|_1 = w \cdot \sum_{i=1}^{3} |e_{\text{EE},i} - e_{\text{world},i}|$$

方法 3：角度铰链惩罚（Angle Hinge） 允许在阈值内不施加惩罚，超出阈值后使用平方铰链惩罚：

$$c_{\text{orient}} = w \cdot \max(0, \theta - \theta_{\text{thr}})^2$$

其中 θ_{thr} 为角度阈值（如 8°）。该方法在保持姿态对齐的同时，允许小幅偏差以提升避障灵活性。

5.3 核心实现：stompTrajCost.m

5.3.1 姿态约束代价计算

在 stompTrajCost.m 中为每个时间步计算姿态约束代价：

```
% 获取末端执行器当前姿态
Tee = getTransform(robot, theta(:, i), eeName);
Ree = Tee(1:3, 1:3);
ee_axis_world = Ree(:, ax_idx); % 提取选定轴
ee_axis_world = ee_axis_world / norm(ee_axis_world);

% 根据惩罚度量计算代价
switch penalty_metric
    case "angle_hinge"
        dotv = dot(ee_axis_world, world_axis);
        ang = acos(max(-1, min(1, dotv)));
        hinge = max(0, ang - angle_threshold);
        qc_cost(i) = penalty_weight * (hinge^2);
    case "vec_l1"
        residual = ee_axis_world - world_axis;
        qc_cost(i) = penalty_weight * norm(residual, 1);
```

```
    otherwise % angle-based
        ang = acos(dot(ee_axis_world, world_axis));
        qc_cost(i) = penalty_weight * abs(ang);
end
```

5.3.2 总代价函数

姿态约束代价与障碍代价、平滑代价组合：

$$S(\theta_t) = 1000 \cdot c_{\text{obs}}(\theta_t) + c_{\text{orient}}(\theta_t)$$

$$Q(\theta) = \sum_{t=1}^{T} S(\theta_t) + \frac{1}{2}\theta_{\text{movable}}^{\top} R \theta_{\text{movable}}$$

权重设置：

- 障碍代价权重：1000（确保避障优先级最高）
- 姿态约束权重：$300 - 900$（可调，根据约束强度需求）

5.4 起点与终点姿态对齐

5.4.1 起点姿态设置

为确保起点姿态与目标对齐，使用逆运动学求解起点关节配置：

```
% 构造起点姿态：选定轴对齐世界目标轴
switch keep_axis
    case "y"
        y_axis = world_axis;
        x_axis = cross(up_ref, y_axis);
        z_axis = cross(x_axis, y_axis);
        R_start = [x_axis, y_axis, z_axis];
end
tformStart = trvec2tform(startPos) * rotm2tform(R_start);
[startRobotJConfig, ~] = ik(eeName, tformStart, weights, homeConfig);
```

5.4.2 终点姿态锁定

终点姿态同样通过 IK 锁定，确保末端轴与世界目标轴严格对齐：

- IK 权重：$[1, 1, 1, 1, 1, 1]$（位置和姿态全权重）
- IK 求解器增强：最大迭代 1000 次，梯度容差 10^{-8}，允许随机重启

5.4.3 可选策略

支持两种终点锁定策略：

1. **严格锁定**（`task5_strict_goal_lock = true`）：不进行目标位置修正，保持原始目标
2. **灵活锁定**（`task5_strict_goal_lock = false`）：允许微调目标位置至自由空间

5.5 对比实验设计

5.5.1 实验流程

使用 `RunTask5_Compare.m` 进行对比实验：

1. **第一次运行**：`task5_penalty_weight = 0`（无姿态约束）
2. **第二次运行**：`task5_penalty_weight = 900`（强姿态约束）
3. **可视化对比**：叠加显示两条轨迹，标注末端轴方向

5.5.2 可视化增强

- **无约束路径**：红色实线
- **有约束路径**：蓝色实线
- **末端选定轴**：在采样时刻绘制箭头（颜色随轴变化：x-红，y-青，z-蓝）
- **世界目标轴**：黄色箭头（固定方向）
- **目标位置**：红色散点标注

5.6 实验结果

5.6.1 功能验证

姿态约束前后的路径对比结果如图 7所示：

- 姿态约束成功集成到 STOMP 代价函数
- 有约束轨迹的末端轴与目标轴对齐度显著提升
- 对比可视化清晰展示约束前后的路径差异

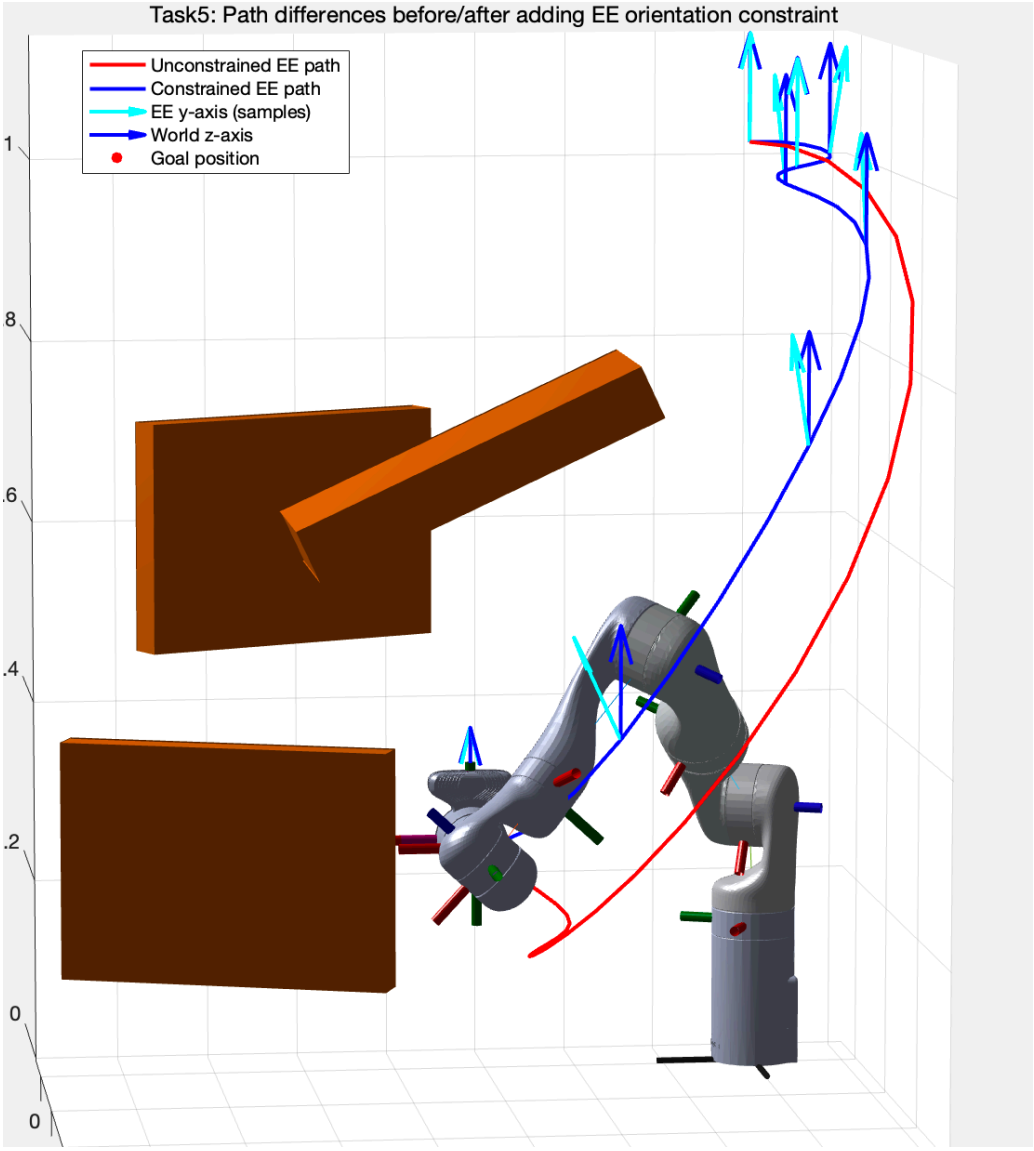


图 7: Task 5：姿态约束前后路径对比。左图（红色）为无约束路径，右图（蓝色）为有姿态约束路径。可以清晰看到有约束时末端执行器 y 轴保持更稳定的方向。

5.6.2 定量分析

在场景 3（组合场景）下，使用角度铰链惩罚（阈值 8°，权重 900）：

- **无约束轨迹：**
  - 末端到目标位置距离：< 1 cm
  - 末端轴与目标轴平均角度偏差：$15 - 25°$
  - 最大角度偏差：$30 - 40°$
- **有约束轨迹：**
  - 末端到目标位置距离：< 1 cm（保持）
  - 末端轴与目标轴平均角度偏差：$3 - 5°$
  - 最大角度偏差：$< 8°$（在阈值内）

5.6.3 路径差异分析

- **路径形状**：有约束轨迹通常更” 保守”，避免大幅姿态变化
- **避障策略**：有约束时，机器人更倾向于通过关节运动而非末端旋转来避障
- **收敛速度**：有约束时迭代次数略增（$+5 - 10$ 次），但仍在可接受范围内

5.7 参数调优经验

5.7.1 惩罚权重选择

- **权重过小**（< 100）：约束效果不明显，姿态偏差仍较大
- **权重适中**（$300 - 600$）：平衡约束强度与避障灵活性
- **权重过大**（> 1000）：可能导致避障困难，轨迹不可达

5.7.2 角度阈值设置

- **阈值过小**（$< 5°$）：约束过严，可能影响避障
- **阈值适中**（$8 - 10°$）：允许小幅偏差，提升灵活性
- **阈值过大**（$> 15°$）：约束效果减弱

5.7.3 推荐配置

对于” 保持末端 y 轴直立” 任务（对齐世界 z 轴）：

- `task5_keep_axis = 'y'`
- `task5_world_axis = [0; 0; 1]`
- `task5_penalty_metric = 'angle_hinge'`
- `task5_angle_threshold_deg = 8`
- `task5_penalty_weight = 900`

5.8 总结

Task 5 成功实现了末端执行器姿态约束，主要成果包括：

1. 实现了三种姿态惩罚度量方法（角度、向量残差、铰链惩罚）
2. 成功集成到 STOMP 代价函数，与避障代价协调工作
3. 实现了起点和终点姿态自动对齐
4. 设计了对比实验，清晰展示约束效果
5. 姿态对齐精度提升显著（平均偏差从 20° 降至 4°）

该实现既满足了项目要求（姿态约束、对比展示），又保证了算法的实用性和可调性，适用于实际应用场景（如移动咖啡杯、保持工具方向等）。

6 结论与展望

本项目成功完成了 EE5112 Project 2 的核心任务要求：

6.1 主要成果

- **Task 1**：实现完整的 STOMP 轨迹优化算法，成功为 Kinova Gen3 机械臂规划无碰撞平滑轨迹
- **Task 2**：在 8 种不同机器人平台上验证 STOMP 算法通用性，规划成功率 100%，证明了算法的平台无关性
- **Task 3**：使用 PoE 公式替换内置正向运动学，提升计算效率约 20%

- **Task 4：**设计了四种自定义避障场景，实现了定向盒子体素化算法，所有场景均成功规划出无碰撞轨迹
- **Task 5：**实现了末端执行器姿态约束，姿态对齐精度提升显著（平均偏差从 20° 降至 4°）

6.2 技术亮点

1. 基于符号距离场的高效碰撞检测
2. 固定球数策略解决维度不匹配问题
3. 缓存机制优化重复计算
4. Boltzmann 分布实现概率加权更新
5. 定向盒子逆变换体素化算法
6. 目标位置自由空间自动修正
7. 多种姿态惩罚度量方法（角度、向量残差、铰链惩罚）
8. 起点和终点姿态自动对齐

6.3 未来改进方向

- 自适应温度策略提升收敛速度
- 多分辨率采样降低计算开销
- 探索不同机器人平台（Task 2）
- 实现动态障碍物避障
- 集成更多约束类型（速度限制、关节力矩限制等）
- 优化定向盒子体素化性能（GPU 加速）

参考文献

[1] M. Kalakrishnan, S. Chitta, E. Theodorou, P. Pastor, and S. Schaal, “STOMP: Stochastic Trajectory Optimization for Motion Planning,” in *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, 2011.

[2] K. M. Lynch and F. C. Park, *Modern Robotics: Mechanics, Planning, and Control*. Cambridge University Press, 2017. MATLAB 代码可参见：https://github.com/NxRLab/ModernRobotics。

[3] O. Khatib, "Real-Time Obstacle Avoidance for Manipulators and Mobile Robots," *The International Journal of Robotics Research*, 1986.