В задачах обоих блоков не столько важен правильный ответ, сколько Ваше решение. Даже если Вы не смогли найти ответ, имеет смысл продемонстрировать ход Ваших мыслей.

Решение задач можно вписать в поля формы регистрации, также туда можно вставить ссылку на файл с прописанным решением.

А. ОСНОВНОЙ БЛОК ЗАДАЧ (обязателен для всех проектов)

1. Рассмотрим три матрицы размера 2×2:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

где i — мнимая единица, $i = \sqrt{-1}$.

1. Вычислите матричные произведения A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1, $A_1A_2A_3$, а также квадраты матриц A_j.

2. В соответствии с правилами умножения матриц, перемножать можно не только квадратные матрицы одного размера: проделывать эту операцию можно, также если количество столбцов первой матрицы равно количеству строк второй. Обозначим через $\mathbb{M}(l, m)$ множество матриц с l строками и m столбцами. Тогда, если

   $$A \in \mathbb{M}(l, m), \quad B \in \mathbb{M}(m, n),$$

   то определено их произведение

   $$C = AB, \quad C \in \mathbb{M}(l, n).$$

   В частности, это означает, что можно умножить матрицу на вектор-столбец (говорят: *слева подействовать матрицей на вектор-столбец*). Пусть даны два вектор-столбца

   $$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Вычислите результат действия матриц

   $$A_3, \quad A_1 + iA_2 \quad \text{и} \quad A_1 - iA_2$$

   на каждый из векторов v_1 и v_2.

3. Найдём такую матрицу B_3, что $B_3^2 = A_3$ (иными словами, извлечём квадратный корень из матрицы A_3). Нетрудно проверить прямой подстановкой, что

$$B_{3,\pm} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm i \end{pmatrix}$$

подходит при любом выборе знака. Найдите хотя бы одну матрицу $B_1\colon\ B_1^2 = A_1$. Объясните полученный результат.

2. a) Найдите модуль и аргумент чисел, комплексно сопряженных к числам:

- $\dfrac{5i}{8-2i}$;
- $\dfrac{e^{i\omega t}}{e^{-\lambda t}} \qquad \omega, \lambda, t \in \mathbb{R}$;
- корень уравнения $z^6 + 1 = 0$ с наименьшей мнимой частью.

b) На какое комплексное число надо умножить число $6 + 4i$, чтобы повернуть его на комплексной плоскости относительно начала координат на 45 градусов?

3. Представьте себе пружинный маятник, состоящий из груза массой m, прикрепленного к пружине с коэффициентом жесткости k. Маятник движется горизонтально по гладкой поверхности. Однако, на движение груза действует сила сопротивления воздуха, пропорциональная его скорости: $F = -bv$, где b - коэффициент сопротивления воздуха, а v - скорость груза.

Задание:

1. Выведите дифференциальное уравнение движения груза, учитывая силу упругости пружины и силу сопротивления воздуха.

2. Запишите общее решение дифференциального уравнения в виде $x(t)$ выразив его через угловую частоту собственных колебаний ω_0, коэффициент затухания γ, амплитуду A и начальную фазу φ.

3. Найдите частное решение $x(t)$, если известны начальные условия:

- В момент времени $t = 0$ груз находится в положении x_0 (начальное смещение).
- В момент времени $t = 0$ груз имеет начальную скорость v_0.

4. Предположим, что $m = 0.1$ кг, $k = 4$ Н/м, $b = 0.2$ кг/с, $x_0 = 0.05$ м и $v_0 = 0$ м/с. Постройте график зависимости $x(t)$ в диапазоне времени от 0 до 5 секунд. Определите период колебаний T по графику. Сравните измеренный период с рассчитанным теоретическим значением. Рассчитайте энергию, рассеянную в виде тепла из-за сопротивления воздуха, за первые 2 секунды движения.

5. Предположим, что $m = 0.1$ кг, $k = 4$ Н/м, $b = 0.2$ кг/с, $x_0 = 0$ м и $v_0 = 5$ м/с. На расстоянии $d = 0.02$ м от положения равновесия шара расположена стенка, удары о которую можно считать абсолютно упругими. Сколько ударов о стенку произойдет в ходе движения шара?

4. Используя Python, прочесть данные из файла по ссылке *https://cloud.physics.itmo.ru/s/pY68e5CrdtQHF6M*), которые задают спектральное распределение некоторой величины. Найти среднее и среднеквадратичное отклонение этой величины, не используя встроенных функций Python. В ответ приложить ссылку на открытый репозиторий с кодом.

5. Найти сопротивление цепи, представленной на рисунке 1.

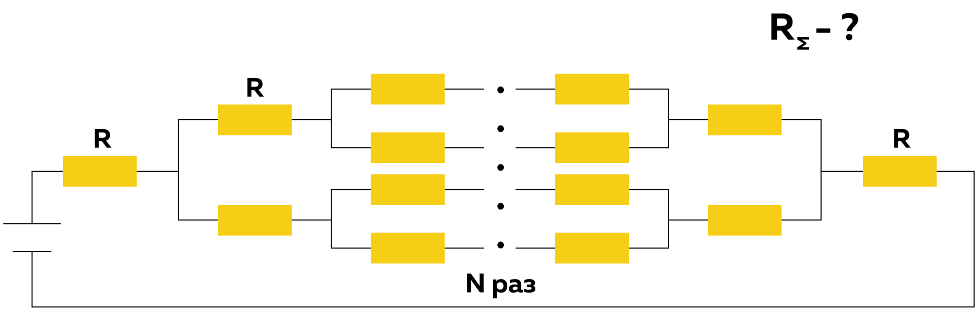


Рисунок 1: Схема цепи из резисторов

В. СПЕЦИАЛЬНЫЙ БЛОК ЗАДАЧ (можно выбрать в соответствии с указаниями конкретного проекта)

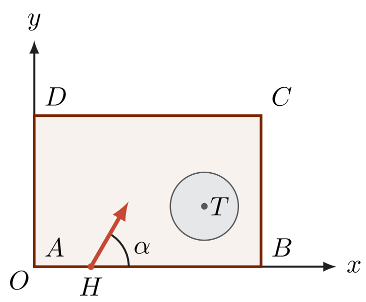
1. Изучим распространение света в прямоугольном ящике при условии зеркального отражения от стенок. Положим, что луч движется параллельно одной из пар граней (например, верхнему и нижнему основаниям), поэтому задача плоская, и во всех дальнейших рассуждениях параллелепипед заменён на прямоугольник.

Итак, дан прямоугольник $ABCD$ ($AB = a$, $BC = b$). Луч "вводят" внутрь через малое отверстие, находящееся в точке H на стороне AB, при этом $AH = \ell$. Внутри прямоугольника отмечают точку T с координатами x, y, а также рисуют окружность радиуса R с центром в точке T.

Луч распространяется, зеркально отражаясь от стенок. Опишите алгоритм и напишите программу, вычисляющую, после которого по счёту отражения луч пересечёт окружность или коснётся её.

Входные данные: a, b, ℓ, x, y, R, а также угол α между начальным направлением луча и осью Ox ($0 < \alpha < 180°$).

Примечание: известно, что можно так подобрать параметры системы, что траектория луча вообще не будет иметь общих точек с выбранной окружностью, поэтому в программе задайте "большое" число отражений N_∞ (условную "бесконечность"), преодоление которого соответствует ответу "никогда не пересечёт".



2.

Необходимо промоделировать достаточно простую систему — есть металлический шарик массы m в поле тяжести и колеблющийся стержень массой $M \gg m$, на который шарик падает.

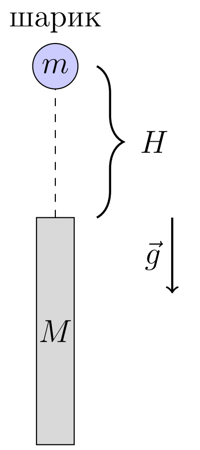


Рисунок 2: Схема падения шарика на колеблющийся стержень.

Считайте, что центр масс стержня колеблется по гармоническому закону:

$$y_c(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0),$$

где ω — циклическая частота колебаний A — амплитуда колебаний, φ_0 — стартовая фаза колебаний. Рассмотрите два случая - когда соударение происходит без потерь энергии и с потерей $\alpha = 0.1$ части каждое соударение.

Изучите как можно более широкий спектр частот, зависимость от времени, высоты и стартовой фазы. Для зависимости от времени рекомендуется строить фазовый портрет (график $v(y)$). Рассмотрите случай, когда поле тяжести создается внешним массивным телом (например, Землей) и стержнем.

Ответьте на следующие вопросы:

1. Какой максимальной высоты может достигнуть шарик? При каких α существует частота, на которой шарик может прыгать бесконечно?

2. При каком условии фазовый портрет системы будет замкнутым? Как влияет на это численная ошибка моделирования?

3. Как меняется энергия в случае стабильных колебаний? Как численная ошибка влияет на закон сохранения энергии? Какие способы есть избавиться от такого рода ошибки?

P.S. Для ответа на вопросы можно пользоваться любыми источниками информации и языками программирования, но в приоритете Python для уменьшения временных затрат на написание кода.

3. 1) Известно, что некоторый полупроводник не способен поглощать свет, если длина волны фотонов больше 620 нм. Рассчитайте, какой максимальной энергией (в электронвольтах, с точностью до десятых) может обладать фотон, «пролетающий» этот полупроводник насквозь, не поглощаясь?

2) Перовскит MAPbI3 состоит из трех элементов: органический метиламмоний (CH_3NH_3 – сокр. MA), свинец (Pb) и йод (I). Для получения его раствора необходимо смешать соли MAI и PbI_2, молярные массы которых 158,97 г/моль и 461,01 г/моль, соответственно. Сколько граммов каждой соли необходимо взять, чтобы получить 1 мл раствора с молярностью 1.2 моль/л. Сколько надо добавить соли PbI_2, чтобы получить ее 5% переизбыток?

3) Фактор заполнения вольтамперной характеристики для солнечного элемента равен 70%. Какой он обладает эффективностью, если напряжение холостого хода равно 1100 мВ, ток короткого замыкания 0,84 мА, а мощность падающего излучения 10 мВт? (Информацию можно найти по ссылке *https://www.pveducation.org/pvcdrom/welcome-to-pvcdrom*)

4. Рассмотрим обращение вокруг Земли Международной космической станции (МКС). МКС имеет массу $m = 440\ 000$ кг. Орбита станции располагается на высоте $h = 400$ км над поверхностью Земли и ее форму можно считать окружностью. Будем считать, что Земля является однородным шаром массой $M = 6 \cdot 10^{24}$ кг и имеет радиус $R_0 = 6\ 400$ км. Гравитационную постоянную принять равной $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$. Определите:

1. Скорость движения МКС по ее орбите v_1 и период обращения вокруг Земли T.

2. До какой скорости v необходимо разогнать МКС, чтобы в дальней точке новой орбиты МКС удалялась на расстояние $R_1 = 380\ 000$ км. Каким будет новый период обращения T_1? (Ускорение направлено вдоль скорости и изменение скорости считать моментальным.)

3. Какая наименьшая скорость v_2 потребовалась бы, чтобы МКС со своей начальной орбиты могла улететь сколь угодно далеко от Земли. Хватило ли бы этой скорости в реальности и почему?

5. Продемонстрировать свой навык программирования на языке Python. Обучить нейронную сеть на основе библиотеки pytorch для классификации изображений из датасета MNIST, посчитать точность полученной модели (гнаться за большими процентами не обязательно, важно, чтобы получилось что-то лучше рандома и вы это сделали самостоятельно).
Необходимо создать публичный репозиторий на гитхабе, где выложить jupyter notebook со своим решением и в качестве ответа на задачу предоставить ссылку на свой репозиторий (датасет в него выгружать не стоит, добавьте в .gitignore).
Мы знаем, что много решений есть в интернете, но нам важно, чтобы вы именно понимали, как программировать и не боялись этого, умели читать код и прочее. Не решайте эту задачу, если думаете просто взять готовый код и отправить его нам!

6. Для транзистора 2SC3423 в схеме с общим эмиттером (см. рисунок 3) задайте рабочую точку со следующими параметрами: напряжение коллектор-эмиттер U = 4 В, ток коллектора $I_К$ = 20 мА при температуре 25°C. Для этого подберите подходящие номиналы сопротивлений, чтобы обеспечить заданный режим работы схемы. Напряжение источника питания $E_К$ = 10 В. Входная и выходная характеристика транзистора приведены на рисунке.

7. В простейшем случае система индуктивной передачи энергии представляет собой две связанные катушки индуктивности L_1 и L_2, взаимная индуктивность которых M. Паразитные сопротивления данных катушек соответственно равны R_1 и R_2.

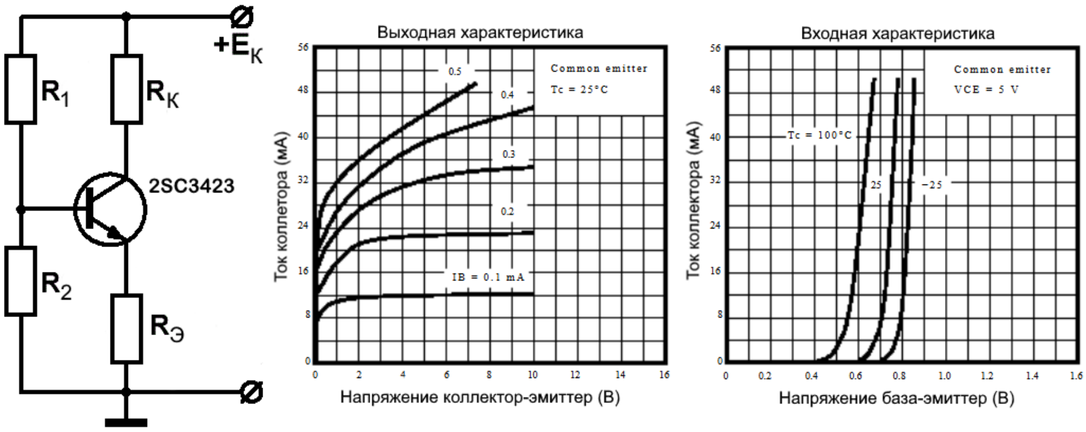


Рисунок 3: Схема к задаче 6

Для повышения эффективности передачи энергии обе катушки настраваются на резонансную частоту ω_0 с помощью конденсаторов C_1, C_2 так, что $\omega_0 = 1/\sqrt{L_1 C_1} = 1/\sqrt{L_2 C_2}$. К передающей катушке подключается источник переменного напряжения, а к приемной катушке нагрузка R_L. На рисунке 4 представлена схема такой системы, где связанные индуктивности заменены эквивалентной Т-образной схемой.

Необходимо:

1. Используя законы Кирхгофа составить уравнения для данной цепи, определить ток передатчика и ток в нагрузке.

2. Определить мощность поступившую в нагрузку и мощность источника (их отношение называется эффективностью передачи энергии)

3. Для катушек с заданными параметрами $L_1 = 100$ мкГн и $L_2 = 40$ мкГн определить требуемые емкости конденсаторов, для настройки резонансных частот приемника и передатчика на частоту $f_0 = 200$ кГц.

4. Вычислить переданную мощность и эффективность передачи энергии на частоте f_0, если $R_1 = R_2 = 0.1$ Ом, $R_L = 10$ Ом, взаимная индуктивность катушек $M = 12$ мкГн и напряжение источника $V = 10$ В.

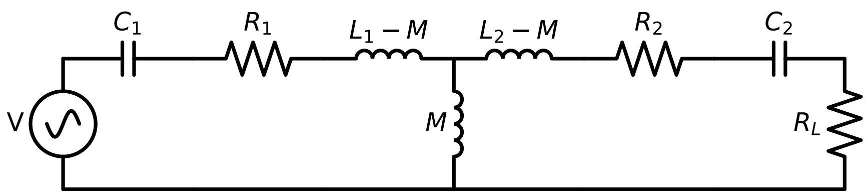


Рисунок 4: Эквивалентная схема системы индуктивной передачи энергии