A

1.1 $A_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$; $A_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$; $A_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

$i=\sqrt{-1}$

1) $A_1\cdot A_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot0+1\cdot i ; & 0\cdot(-i)+1\cdot0\\1\cdot0+0\cdot i , & (-i)\cdot1+0\cdot0\end{pmatrix}$

$2\times2 \qquad 2\times2$

$=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}$

2) $A_2\cdot A_3=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot1+(-i)\cdot0 & 0\cdot0+i\\i\cdot1+0\cdot0 & i\cdot0+0\end{pmatrix}$

$2\times2 \qquad 2\times2$

$=\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}$

3) $\underbrace{A_1\cdot A_2}_{\text{см } 1)}\cdot A_3=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i\cdot1+0 & i\cdot0+0\cdot(-1)\\0\cdot1+(-i)\cdot0 & 0\cdot0+i\end{pmatrix}$

$2\times2 \qquad 2\times2$

$=\begin{pmatrix}i&0\\0&i\end{pmatrix}$

1.2. $v_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$; $v_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

1) $A_3\cdot v_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot0\\0\cdot1+(-1)\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$2\times2 \qquad 2\times1$

$A_3\cdot v_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot0+0\cdot1\\0\cdot0+(-1)\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

$2\times2 \qquad 2\times1$

2) $A_1+iA_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+i\cdot\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}$

$(A_1+iA_2)\cdot v_1=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot1+2\cdot0\\0\cdot1+0\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$2\times2 \qquad 2\times1$

$(A_1+iA_2)\cdot v_2=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot0+2\cdot1\\0\cdot0+0\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

$2\times2 \qquad 2\times1$

3) $A_1-iA_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}-i\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0&0\\2&0\end{pmatrix}$

$(A_1-iA_2)\cdot v_1=\begin{pmatrix}0&0\\2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\cdot1+0\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$

$2\times2 \qquad 2\times1$

$(A_1-iA_2)\cdot v_2=\begin{pmatrix}0&0\\2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\cdot0+0\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$$A_1^2 = A_1 \cdot A_1 = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \cdot \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0\cdot 0+1\cdot 1 & 0\cdot 1+0\cdot 1 \\ 0+0 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-i^2 & 0 \\ 0 & -i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0 \\ 0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

N 1.3

$B_1 : B_1^2 = A_1$

$\frac{1}{B_1} = A_1 ; \quad B_1^{-1} = A_1$

$B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) $\Delta = 0\cdot 0 - 1\cdot 1 = -1$, т.к обр. матрица существует.

2) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ – матрица миноров

3) $A^{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ – матрица алгебр. доп

4) ~~$B_1 = -1$~~

$B_1 = \frac{1}{|B_1^{-1}|} \cdot A^{\Gamma} = \frac{1}{\Delta} \cdot A^{\Gamma}$

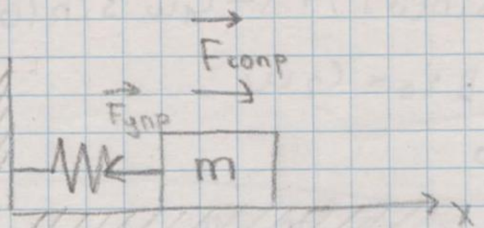
$B_1 = -1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$B_1 \cdot B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 & 0 \\ 0 & 1+0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E}$$

E, т.к B_1 найдена верно

N 3

1)



$$F = -bv = -bx'$$

$$F_{упр} = \begin{cases} -k|x|, & x > 0 \Rightarrow -kx \\ k|x|, & x < 0 \Rightarrow -kx \end{cases}$$

II зн Ньютона: $-kx - bv = ma$

угловая частота собств. колебаний:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$ma + kx + bv = 0$$

$$mx'' + kx + bx' = 0 \;|:m$$

$$x'' + \frac{b}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0$$

коэффициент затухания:

$$\beta = \frac{b}{2m}$$

$$x'' + 2\beta + \omega_0^2 x = 0 \quad \left(\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0\right)$$

$$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = 0$$

2) По условию слабые ~~колебания~~ затухания, сл $\beta < \omega_0$

$x(t) = e^{rt}$, сл:

$$r^2 \cdot e^{rt} + 2\beta r \cdot e^{rt} + \omega_0^2 e^{rt} = 0 \;|: e^{rt} \; (e^{rt} \neq 0)$$

$$r^2 + 2\beta r + \omega_0^2 = 0$$

корни: $r = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \Rightarrow r = -\beta \pm i\omega$ – мнимые корни

$x(t) = e^{-\beta t}(C_1 \cdot e^{i\omega t} + C_2 \cdot e^{i\omega t})$ (C_1 и C_2 – произв. конст)

$$x(t) = e^{-\beta t}(C_1(\cos(\omega t) + e\sin(\omega t)) + C_2(\cos(\omega t) + e\sin(\omega t)))$$

$$= e^{-\beta t}(C_1 \cdot \cos(\omega t) + C_2 \cdot \sin(\omega t)) = A \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

3) $x(t) = e^{-\beta t}(C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t))$

$$\underbrace{C_1 \cos(0)}_{=1} + C_2 \underbrace{\sin(0)}_{=0} = x_0; \; C_1 + 0 = x_0; \; C_1 = x_0$$

$$v_0 = x'(t) = \frac{dx}{dt},$$

$$v_0 = \frac{dx}{dt} = -\beta e^{-\beta t}(C_1 \cdot \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)) + e^{-\beta t}(C_2 \omega \cos \omega t - C_1 \omega \sin \omega t) = -A \cdot e^{-\beta t}(\beta \cos(\omega t + \varphi) + \omega \sin(\omega t + \varphi))$$

при $t=0$: $v_0 = -\beta(C_1 \cdot \cos(0) + C_2 \cdot \sin(0)) + (-C_1 w \cdot \sin(0) + C_2 \cdot w \cdot \cos(0)) = -\beta C_1 + C_2 w = -\beta x_0 + C_2 w$

$v_0 = -\beta x_0 + C_2 w$, $C_2 = \frac{v_0 + \beta x_0}{w}$

частное решение: $x(t) = e^{-\beta t}\left(x_0 \cdot \cos(wt) + \frac{v_0 + \beta x_0}{w} \cdot \sin(wt)\right)$

Задача с усл и ур-ями движения

$m = 0{,}1$ кг

$k = 4 \frac{Н}{м}$

$b = 0{,}2 \frac{кг}{с}$

$x_0 = 0{,}05$ м

$v_0 = 0 \frac{м}{с}$

$\beta = \frac{b}{2m}$; $\beta = \frac{0{,}2}{2 \cdot 0{,}1} = 1$; $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$;

$w_0 = \sqrt{\frac{4}{0{,}1}} \approx 6{,}32 \left(\frac{рад}{с}\right)$

$C_1 = x_0 = 0{,}05$ м

$w = \sqrt{6{,}32^2 - 1^2} \approx 6{,}24 \left(\frac{рад}{с}\right)$;

$C_2 = \frac{v_0 + \beta x_0}{w}$; $C_2 = \frac{0 + 1 \cdot 0{,}05}{\sqrt{6{,}32^2 - 1^2}} \approx 8{,}038 \cdot 10^{-3}$

$x(t) = e^{-t}(0{,}05 \cdot \cos(6{,}24t) + 8{,}038 \cdot 10^{-3} \sin(6{,}24t))$

$x(t) = e^{-t}(0{,}05 \cdot \cos(6{,}24t) + 8{,}038 \cdot 10^{-3} \cdot \sin(6{,}24t))$

Теор. период: $T_T = \frac{2\pi}{w}$; $T = \frac{2 \cdot 3{,}14}{6{,}24} \approx 1{,}007$ (с) ≈ 1

Энергия, рассеянная в виде тепла равна работе силы F / интегралу её мощности N.

N 2

а)

1) $\frac{5i}{8-2i} = \frac{5i(8+2i)}{(8-2i)(8+2i)} = \frac{40i+10i^2}{64-4i^2} = \frac{40i-10}{68} = \frac{20i-5}{34} =$

$-\frac{5}{34}+\frac{10}{17}i$

$\left|-\frac{5}{34}-\frac{10}{17}i\right| = \sqrt{\left(-\frac{5}{34}\right)^2+\left(-\frac{10}{17}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{1156}+\frac{100}{289}} = \frac{5}{\sqrt{68}} = \frac{5}{2\sqrt{17}} =$

$\frac{5\sqrt{17}}{34}$

2) $\frac{e^{i\omega t}}{e^{-\lambda t}} = \frac{e^{0}(\cos\omega t + i\sin\omega t)}{e^{-\lambda t}(\cos 0 + i \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\sin 0}})} = e^{\lambda t}(\cos\omega t + i\sin\omega t)$

(модуль: $e^{\lambda t}$, аргумент $-\omega t$

$z = a+bi = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, φ - аргумент)

3) $z^6+1=0$

$z^6=-1$

$z = \sqrt[6]{1(\cos\pi + i\sin\pi)}$

$z = \sqrt[6]{1}\left(\cos\left(\frac{\pi+2\pi k}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2\pi k}{6}\right)\right), k \in Z$

$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ т.к $n=6$

$z_1 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$ $\quad z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

$z_2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ $\quad z_2 = i$

$z_3 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$ $\quad z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

$z_4 = \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}$ $\quad z_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

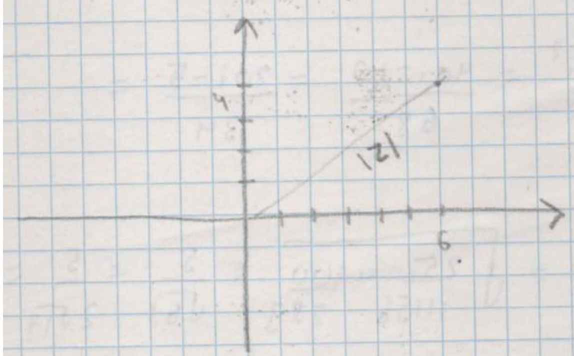
$z_5 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$ $\quad z_5 = -i$

$z_6 = \cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}$ $\quad z_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

$|z_5| = |-i| = 1$ ($a=0$ и $b=-1$)

$\arg z = -\frac{\pi}{2}$

б) $z = 6 + 4i$



Для поворота комплексного числа на заданный угол:

$w = z \cdot e^{i\theta}$

w – искомое число

$z = x + yi$ (исх. комп. число)

θ – угол поворота в радианах

$\theta = \frac{\pi}{4}$

$e^{i\theta} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$; $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

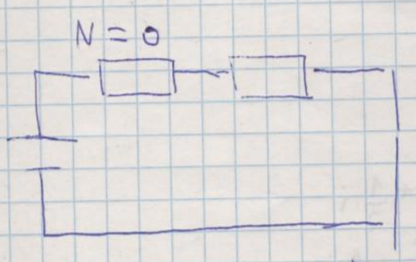
$w = (6+4i)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(6+4i)(i+1)$

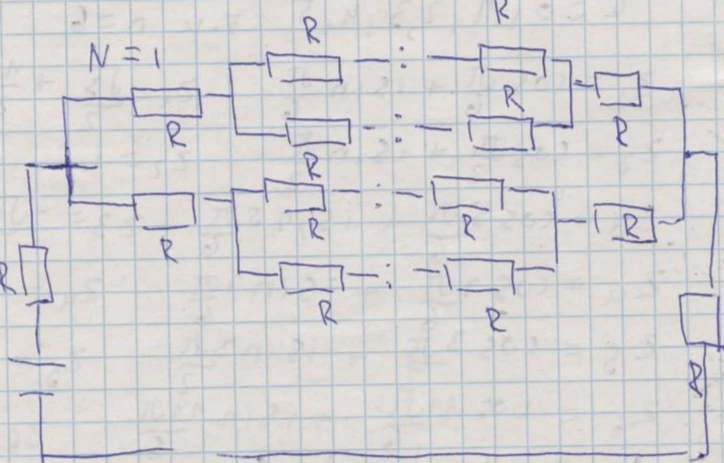
Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

N 5

Перебор по N:

N	0	1	2	3	4
	2R	3,5R	3,9R	3,79R	3,97...





При ↑N: $R_{об} \to 4R$

$R_{об} = 2R + \frac{R_{об}}{2}$

пар. соед для ветвей с одинаковым сопр ($R_{об}$ в об. фрагменте – значения посчит на предыдущ. шаге)

Ответ: $R_{об} = 4R$ (при $N \geq 2$, остальные в таблице)