CHAPTER 1

2023-2024 学年微积分（一）（上）期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分，共 60 分)

1. 求极限 $l = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \sin\left(\sqrt{n^2+1}\pi\right)$.

2. 求极限 $l = \lim_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{\tan x} - \mathrm{e}^x}{x - \sin x}$.

3. 当 $x \to 0$ 时，设 $u = \sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}$ 的主部为 cx^k，试确定常数 c, k 的值.

4. 求极限 $l = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$.

5. 设函数 $f(x) = \dfrac{x - x^2}{\sin \pi x}$，指出 $f(x)$ 的间断点并判断其类型.

6. 设 $y = \sqrt{x \sin x \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}} (0 < x < \pi)$，求导数 y'.

7. 设 $f(x) = \begin{cases} a + x + \sqrt{1 - x}, & x < 0 \\ 1 + b \arctan x, & x \geq 0 \end{cases}$，求常数 a, b，使 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导.

8. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y = 2\mathrm{e}^y \sin x - 7x$ 确定的可微函数，求 $\mathrm{d}y|_{x=0}$.

9. 设 $y=\dfrac{1}{2-3x-2x^2}$，求 $y^{(n)}(0)$.

10. 设 $y=\sin^4 x-\cos^4 x$，求 y' 及 y''.

2 综合题 (每小题 6 分，共 30 分)

11. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t^2+1, \\ y=4t-t^2 \end{cases}$,$t>0$ 确定，过点 $(-1,0)$ 作 $y=y(x)$ 的切线，求切点 (x_0,y_0)，并写出该切线的方程.

12. 设 $y=g(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，$f(x)=x+(1+x)^x$，求 $y=g(2+x^2)$ 在 $x=1$ 处的导数.

13. 设 $b_i\geq 0(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$，$x_n=\dfrac{b_1}{1+b_1}+\dfrac{b_2}{(1+b_1)(1+b_2)}+\cdots+\dfrac{b_n}{(1+b_1)(1+b_2)\cdots(1+b_n)}$，研究数列 $\{x_n\}$ 的极限的存在性.

14. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\mathrm{e}^{-x}}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有一阶连续的导数，且 $g''(0)$ 存在，$g(0)=1$，$g'(0)=-1$，求 $f'(x)$，并讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

15. 一观察者站在地面上用望远镜观察一架飞机，该飞机的高度为 20km，正以 16km/min 的速度向观察者水平地飞过来，试问当飞机离观察者的水平距离为 40km 时，望远镜视角改变的速率是多少？

3 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

16. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且 $x_i\in(a,b), i=1,2,\cdots,n$，证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$f(\xi)=\frac{1}{n}\left(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\right).$$

17. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，并且 $f(0)=0, f(1)=\dfrac{1}{2}$，证明存在 $\xi,\eta\in(0,1)$，且 $\xi\neq\eta$，使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi+\eta$.

CHAPTER 2

2023-2024 学年微积分（一）（上）期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分，共 60 分)

1. **Solution**.

$$
\begin{aligned}
l =& \lim_{n\infty}(-1)^n n \sin\left((\sqrt{n^2+1}-n)\pi + n\pi\right) \\
=& \lim_{n\to\infty} n \sin\left((\sqrt{n^2+1}-n)\pi\right) = \lim_{n\to\infty} n \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right) \\
=& \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}\pi = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

2. **Solution**.

$$
\begin{aligned}
l =& \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{\tan x - x}-1)}{x-\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x - \sin x} \\
=& \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{\frac{1}{2}x^2} = 2.
\end{aligned}
$$

或

$$
\begin{aligned}
l =& \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{\xi}\frac{\tan x - x}{x-\sin x} \qquad (\xi \text{ 介于 } x \text{ 与 } \tan x \text{ 之间}) \\
=& \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x - \sin x} \\
=& \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{\frac{1}{2}x^2} = 2.
\end{aligned}
$$

3. **Solution**.

法一.

$$
\begin{aligned}
u =& \frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}(\tan x - \sin x) \\
\sim& \frac{1}{2}(\tan x - \sin x) = \frac{1}{2}\tan x(1-\cos x) \sim \frac{1}{4}x^3,
\end{aligned}
$$

即 $k=3, c=\frac{1}{4}$.

法二. 由题意得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{u}{cx^k}=1$. 而

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{u}{cx^k}=&\frac{\tan x-\sin x}{cx^k(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{2cx^k}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{2cx^k}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{3-k}}{4c},\end{aligned}$$

故 $3-k=0, 4c=1$，即 $k=3, c=\dfrac{1}{4}$.

4. **Solution**.

$$\begin{aligned}l=&\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)}=\mathrm{e}^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)}\\=&\mathrm{e}^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\arcsin x}{x}-1\right)}=\mathrm{e}^{\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-x}{x^3}}=\mathrm{e}^{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}{3x^2}}=\mathrm{e}^{\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{3x^2\sqrt{1-x^2}}}\\=&\mathrm{e}^{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2\sqrt{1-x^2}}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{6}}.\end{aligned}$$

5. **Solution**.

当 $\sin\pi x=0$ 即 $x=k, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 时，$f(x)$ 无定义，故 $x=k, k=0,\pm1,\pm2\cdots$ 是 $f(x)$ 的间断点.

因

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x-x^2}{\sin\pi x}=\lim_{x\to 0}\frac{\pi x}{\sin\pi x}\cdot\frac{1-x}{\pi}=\frac{1}{\pi};\\&\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\pi(1-x)}{\sin\pi(1-x)}\cdot\frac{x}{\pi}=\frac{1}{\pi},\end{aligned}$$

所以 $x=0,1$ 是可去间断点；

当 $k=-1,\pm2,\pm3,\cdots$ 时，$\lim\limits_{x\to k}f(x)=\infty$，所以 $x=-1,\pm2,\pm3,\cdots$ 是无穷间断点.

6. **Solution**. 因 $\ln y=\dfrac{1}{2}\left(\ln x+\ln\sin x+\dfrac{1}{2}\ln\left(\mathrm{e}^x-1\right)\right)$，

所以 $y'=\dfrac{1}{2}\sqrt{x\sin x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\left(\dfrac{1}{x}+\cot x+\dfrac{\mathrm{e}^x}{2(\mathrm{e}^x-1)}\right)$.

7. **Solution**. 要 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，必须 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，即

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=f(0).$$

因 $f(0)=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(1+b\arctan x)=1=f(0)$，

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(a+x+\sqrt{1-x})=a+1$，所以 $a+1=1$，即 $a=0$.

又 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+\sqrt{1-x})-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}(1-\sqrt{1-x})}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}\cdot\frac{1}{2}x}{x}=\dfrac{1}{2}$，

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+b\arctan x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{b\arctan x}{x}=b$，

要 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，必须 $f'_-(0)=f'_+(0)$，所以 $b=\dfrac{1}{2}$.

8. **Solution**.

法一. 当 $x=0$ 时 $y=0$.

方程两边求导

$$y' = 2\mathrm{e}^y y' \sin x + 2\mathrm{e}^y \cos x - 7,$$

即 $y' = \dfrac{2\mathrm{e}^y \cos x - 7}{1 - 2\mathrm{e}^y \sin x}$，

所以 $y'|_{x=0} = -5$，$\mathrm{d}y|_{x=0} = y'|_{x=0}\,\mathrm{d}x = -5\mathrm{d}x$.

法二. 当 $x=0$ 时 $y=0$.

方程两边求微分，得

$$\mathrm{d}y = 2\mathrm{e}^y \sin x \mathrm{d}y + 2\mathrm{e}^y \cos x \mathrm{d}x - 7\mathrm{d}x,$$

$\mathrm{d}y = \dfrac{2\mathrm{e}^y \cos x - 7}{1 - 2\mathrm{e}^y \sin x}\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y|_{x=0} = \left.\dfrac{2\mathrm{e}^y \cos x - 7}{1 - 2\mathrm{e}^y \sin x}\right|_{x=0}\mathrm{d}x = -5\mathrm{d}x$.

9. **Solution**.$y = \dfrac{1}{(1-2x)(x+2)} = \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{1}{2x-1}$.

由公式 $\left(\dfrac{1}{(1+x)}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n\, n!}{(1+x)^{n+1}}$，得

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x) =& \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x+2}\right)^{(n)} - \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2x-1}\right)^{(n)} = \frac{1}{5}\frac{(-1)^n\cdot n!}{(x+2)^{n+1}} - \frac{2}{5}\frac{(-1)^n\cdot 2^n\cdot n!}{(2x-1)^{n+1}} \\ =& \frac{n!}{5}\left(\frac{(-1)^n}{(x+2)^{n+1}} - \frac{(-1)^n 2^{n+1}}{(2x-1)^{n+1}}\right), \end{aligned}$$

所以 $y^{(n)}(0) = \dfrac{n!}{5}\left(\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}} + 2^{n+1}\right)$.

10. **Solution**.$y = \sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = -\cos 2x$,

所以

$$\begin{aligned} y' =& 2\sin 2x, \\ y'' =& 4\cos 2x. \end{aligned}$$

2 综合题 (每小题 6 分，共 30 分)

11. **Solution**. 设切点 (x_0, y_0) 对应的参数为 $t = t_0$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=t_0} = \left.\dfrac{4-2t}{2t}\right|_{t=t_0} = \dfrac{2-t_0}{t_0}$，

曲线在 (x_0, y_0) 的切线方程为 $y - y_0 = \dfrac{2-t_0}{t_0}(x - x_0)$，

即 $y - (4t_0 - t_0^2) = \dfrac{2-t_0}{t_0}(x - t_0^2 - 1)$ 化简得 $y = \dfrac{2-t_0}{t_0}x + 2t_0 - \dfrac{2-t_0}{t_0}$，

切线过 $(-1, 0)$，故代入方程得 $t_0^2 - t_0 - 2 = 0$，解得：$t_0 = -2$（不合题意），$t_0 = 1$，

由 $t_0 = 1$ 得 $(x_0, y_0) = (2, 3)$，故所求切线方程为 $y = x + 1$.

12. **Solution**. 由题意得 $f'(x) = 1 + (1+x)^x \left(\ln(1+x) + \dfrac{x}{1+x}\right)$，

所以 $f'(1) = 2(\ln 2 + 1)$.

$f(1) = 3$，$g'(3) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{2(\ln 2 + 1)}$，

$y' = g'(2+x^2) \cdot 2x = 2xg'(2+x^2)$，$y'|_{x=1} = g'(3) \cdot 2 = \dfrac{1}{\ln 2 + 1}$.

13. **Solution**.

$$\begin{aligned}
x_{n+1} =& \frac{b_1}{1+b_1} + \frac{b_2}{(1+b_1)(1+b_2)} + \cdots + \frac{b_n}{(1+b_1)(1+b_2)\cdots(1+b_n)} + \frac{b_{n+1}}{(1+b_1)(1+b_2)\cdots(1+b_{n+1})} \\
=& x_n + \frac{b_{n+1}}{(1+b_1)(1+b_2)\cdots(1+b_{n+1})} \geq x_n,
\end{aligned}$$

故数列 $\{x_n\}$ 单调递增.

因 $\dfrac{b_k}{(1+b_1)(1+b_2)\cdots(1+b_k)} = \dfrac{1}{(1+b_1)(1+b_2)\cdots(1+b_{k-1})} - \dfrac{1}{(1+b_1)(1+b_2)\cdots(1+b_k)}$,

所以 $x_n = 1 - \dfrac{1}{1+b_1} + \left(\dfrac{1}{1+b_1} - \dfrac{1}{(1+b_1)(1+b_2)}\right) + \cdots + \left(\dfrac{1}{(1+b_1)(1+b_2)\cdots(1+b_{n-1})} - \dfrac{1}{(1+b_1)(1+b_2)\cdots(1+b_n)}\right)$

故 $x_n = 1 - \dfrac{1}{(1+b_1)(1+b_2)\cdots(1+b_n)} < 1$.

从而数列 $\{x_n\}$ 有上界，由单调有界准则知数列得极限存在.

14. **Solution**.

当 $x \neq 0$ 时，$f'(x) = \dfrac{x(g'(x) + \mathrm{e}^{-x}) - g(x) + \mathrm{e}^{-x}}{x^2} = \dfrac{xg'(x) + (x+1)\mathrm{e}^{-x} - g(x)}{x^2}$.

当 $x = 0$ 时，

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{g(x)-\mathrm{e}^{-x}}{x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{g(x) - \mathrm{e}^{-x}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{g'(x) + \mathrm{e}^{-x}}{2x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{g'(x) + 1 + \mathrm{e}^{-x} - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{g'(x) - g'(0) + \mathrm{e}^{-x} - 1}{2x} = \frac{1}{2}(g''(0) - 1),
\end{aligned}$$

因

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f'(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{x(g'(x) + \mathrm{e}^{-x})}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{g'(x) + \mathrm{e}^{-x}}{x} - \frac{g(x) - \mathrm{e}^{-x}}{x^2}\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{g'(x) + \mathrm{e}^{-x}}{x} = -\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - \mathrm{e}^{-x}}{x^2} = g''(0) - 1 - \frac{1}{2}(g''(0) - 1) = \frac{1}{2}(g''(0) - 1) = f'(0),
\end{aligned}$$

故 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

15. **Solution**. 设时刻 t 飞机离观察者的水平距离为 $x$km，望远镜视角为 θ 弧度，则有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -16\text{km/min}, \quad x = 20\tan\theta,$$

故 $\theta = \arctan\dfrac{x}{20}$，于是 $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{20 + \frac{x^2}{20}} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.

当 $x = 40$km，$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -16(\text{km/min})$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{20 + \frac{40^2}{20}}(-16) = -\dfrac{4}{25}$rad/min.

即望远镜视角改变的速率是 $-\dfrac{4}{25}$rad/min.

3 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

16. **Proof**. 不妨设 $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$，显然 $f(x)$ 在 $[x_1, x_n]$ 上连续.

故 $f(x)$ 在 $[x_1, x_n]$ 上必取得最大值 M 和最小值 m，即 $m \leq f(x) \leq M, x \in [x_1, x_n]$，从而有 $m \leq f(x_i) \leq M, i = 1, 2, \cdots, n$，故有

$$m \leq \frac{1}{n}\left(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\right) \leq M.$$

由介值定理知至少存在一点 $\xi \in [x_1, x_n] \subset (a, b)$ 使得

$$f(\xi) = \frac{1}{n}\left(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\right).$$

使得 $f(\xi) = 0$ 即 $\alpha\xi = \tan\xi$，故方程 $\alpha x = \tan x$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个实根.

17. **Proof**.

法一. 令 $F(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2$，

则 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在 $(0, 1)$ 内可导，且 $F(0) = f(0) = 0$，$F(1) = f(1) - \frac{1}{2} = 0$，

函数 $F(x)$ 在 $\left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上分别应用 Lagrange 中值定理得，$\exists \eta \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \xi \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$，使得

$$F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) = F'(\eta)\frac{1}{2}, \qquad \text{即 } 2F\left(\frac{1}{2}\right) = f'(\eta) - \eta,$$
$$F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right) = F'(\xi)\frac{1}{2}, \qquad \text{即 } -2F\left(\frac{1}{2}\right) = f'(\xi) - \xi,$$

两式相加得 $f'(\eta) - \eta + f'(\xi) - \xi = 0$，即 $f'(\xi) + f'(\eta) = \xi + \eta$.

法二. 令 $G(x) = f(x) - f(1 - x)$，则

$$G'(x) = f'(x) + f'(1 - x), \quad G(0) = f(0) - f(1) = -\frac{1}{2}, \quad G\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

应用 Lagrange 中值定理得，$\exists \xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$，使

$$G\left(\frac{1}{2}\right) - G(0) = G'(\xi)\left(\frac{1}{2} - 0\right) \quad \text{即} \quad f'(\xi) + f'(1 - \xi) = 1.$$

令 $\eta = 1 - \xi \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$，即得 $f'(\xi) + f'(\eta) = \xi + \eta$.