CHAPTER 1

2024-2025 学年微积分（B）（上）期中考试

1　基本计算题 (每小题 6 分，共 60 分)

1. 设 $x_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+\sqrt[3]{2}} + \cdots + \dfrac{1}{n+\sqrt[3]{n}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2. 求极限 $l = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{x\cos x}}{x\ln(1+x^2)}$.

3. 当 $x \to 0$ 时，求无穷小量 $u = \left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^{x^2} - 1$ 的主部和阶数.

4. 求极限 $l=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-\cos 3x}{\mathrm{e}^x-1-x}$.

5. 设函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(\alpha+\beta\sin x)}{\sin^2 x}$，且点 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，试求常数 α,β 的值.

6. 设 $y=\sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$，求导数 y'.

7. 设 $y=f(\sin^2 x)$，求 y' 及 y''.

8. 设 $f(x)=\begin{cases}(1+x^2)^{\frac{1}{\sin x}}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$，求 $f'(x)$.

9. 设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $\cos(xy)+\ln y-x-1=0$ 确定的可微函数，求 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}$.

10. 设 $f(x)=x^2\ln(1+x)$，求 $f^{(6)}(0)$.

2 综合题 (每小题 6 分，共 30 分)

11. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2\mathrm{e}^{n(x-1)}+ax+b}{\mathrm{e}^{n(x-1)}+1}$ 的连续性，其中 a,b 为常数.

12. 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\arctan\sqrt{t},\\ y=y(t)\end{cases}$ $(t>0)$ 确定，其中 $y=y(t)$ 由方程 $\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^t=2\mathrm{e}$ 确定，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(\dfrac{\pi}{4},f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$ 处的切线方程.

13. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=1$，$x_n=x_{n-1}+\dfrac{1}{n^2}(n\geq 2)$，研究极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的存在性.

14. 在距火箭发射塔 4000 米处安装一台摄像机，为使摄像机的镜头始终对准火箭，摄像机的仰角 θ 应随着火箭的上升不断增加. 假设火箭发射后垂直上升到距离地面 3000 米处，其速度为 600 米 /s，试求在此时刻摄像机仰角 θ 的变化率.

15. 设可微函数 $y=f(x)$ 由方程 $x^3+y^3+xy-1=0$ 确定，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\cos x-1)-1}{\ln(1+x^2)}$.

3 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

16. 设正整数 $n>1$，证明：$x^{2n}+a_1x^{2n-1}+a_2x^{2n-2}+\cdots+a_{2n-1}x-1=0$ 至少有两个实根.

17. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，并且 $f(0)=f(1)=0, f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$，证明存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$.

CHAPTER 2

2024-2025 学年微积分（B）（上）期中考试参考答案

1　基本计算题 (每小题 6 分，共 60 分)

1. **Solution**. 注意到 $n+1 \le n+\sqrt[3]{k} \le n+\sqrt[3]{n}$，所以

$$\frac{n}{n+\sqrt[3]{n}} \le x_n \le \frac{n}{n+1}.$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+\sqrt[3]{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1} = 1$，由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

2. **Solution**.

$$\begin{aligned} l &= -\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^x \frac{\mathrm{e}^{x\cos x - x} - 1}{x^3} = -\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - x}{x^3} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. **Solution**.

$$\begin{aligned} u = \left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^{x^2} - 1 = \exp\left(x^2 \ln\frac{2+\cos x}{3}\right) - 1 \\ &\sim x^2 \ln\frac{2+\cos x}{3} \\ &\sim x^2 \ln\left(1-\frac{x^2}{6}\right) \\ &\sim x^2\left(-\frac{x^2}{6}\right) = -\frac{1}{6}x^4. \end{aligned}$$

所以 u 的主部为 $-\dfrac{1}{6}x^4$，阶数为 4.

4. **Solution**.

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1-x^2}-1)+(1-\cos 3x)}{1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-1-x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2+\frac{9}{2}x^2+o(x^2)}{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)} \\ &= 8. \end{aligned}$$

5. **Solution**.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(\alpha+\beta\sin x)}{\sin^2 x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1+\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\sin^2 x-\frac{1}{8}(\sin x+\sin^2 x)^2+o(\sin x+\sin^2 x)^2-\alpha-\beta\sin x}{\sin^2 x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1+\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\sin^2 x-\frac{1}{8}\sin^2 x+o(\sin^2 x)-\alpha-\beta\sin x}{\sin^2 x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\alpha)+(\frac{1}{2}-\beta)\sin x+\frac{3}{8}\sin^2 x+o(\sin^2 x)}{\sin^2 x}.
\end{aligned}
$$

因为点 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在，所以 $1-\alpha=0$，$\dfrac{1}{2}-\beta=0$，解得 $\alpha=1,\beta=\dfrac{1}{2}$.

6. **Solution**. $\ln y=\dfrac{1}{3}\left[\ln x+\ln(x^2+1)-2\ln(x^2-1)\right]$，

所以 $\dfrac{1}{y}\cdot y'=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2x}{x^2+1}-\dfrac{4x}{x^2-1}\right)$，即

$$
y'=\sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}-\frac{4x}{x^2-1}\right).
$$

7. **Solution**.

$y'=f'(\sin^2 x)\cdot 2\sin x\cos x=f'(\sin^2 x)\cdot\sin 2x$，

$y''=f''(\sin^2 x)\cdot\sin^2 2x+2\cos 2x\cdot f'(\sin^2 x)$.

8. **Solution**.$f(x)$ 的定义域为 $x\neq k\pi, k=\pm 1,\pm 2,\cdots$.

当 $x\neq 0$ 时，$\ln f(x)=\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sin x}$，所以

$$
\begin{aligned}
f'(x) =& f(x)\cdot\left(\frac{\frac{2x}{1+x^2}\sin x-\ln(1+x^2)\cos x}{\sin^2 x}\right) \\
=& (1+x^2)^{\frac{1}{\sin x}}\cdot\left(\frac{\frac{2x}{1+x^2}\sin x-\ln(1+x^2)\cos x}{\sin^2 x}\right) \\
=& (1+x^2)^{\frac{1}{\sin x}}\cdot\left(\frac{2x}{(1+x^2)\sin x}-\frac{\ln(1+x^2)\cos x}{\sin^2 x}\right).
\end{aligned}
$$

当 $x=0$ 时，

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{\sin x}}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+x^2)}{\sin x}}-1}{x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x\sin x}=1.
\end{aligned}
$$

综上所述，$f'(x)=\begin{cases}(1+x^2)^{\frac{1}{\sin x}}\cdot\left(\dfrac{2x}{(1+x^2)\sin x}-\dfrac{\ln(1+x^2)\cos x}{\sin^2 x}\right), & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$

9. **Solution**. 对方程 $\cos(xy)+\ln y-x-1=0$ 两边求微分得

$$
-\sin(xy)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)+\frac{1}{y}\mathrm{d}y-\mathrm{d}x=0.
$$

当 $x=0$ 时，$y=1$，代入上式得 $\mathrm{d}y|_{x=0}=\mathrm{d}x$.

10. **Solution**. 利用 $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$，得

$$f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^5-\frac{1}{4}x^6+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+2}}{n}.$$

由 Taylor 定理，将上式与 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 对照，得 $f^{(6)}(0)=-\dfrac{1}{4}\cdot 6!=-180.$

2 综合题 (每小题 6 分，共 30 分)

11. **Solution**.

当 $x>1$ 时，$\mathrm{e}^{n(x-1)}\to+\infty$，所以

$$\begin{aligned}f(x)&=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2\mathrm{e}^{n(x-1)}+ax+b}{\mathrm{e}^{n(x-1)}+1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2+\frac{ax+b}{\mathrm{e}^{n(x-1)}}}{1+\frac{1}{\mathrm{e}^{n(x-1)}}}\\&=x^2.\end{aligned}$$

当 $x=1$ 时，$\mathrm{e}^{n(x-1)}=1$，所以 $f(1)=\lim\limits_{n\to\infty}\left.\dfrac{x^2+ax+b}{2}\right|_{x=1}=\dfrac{1+a+b}{2}.$

当 $x<1$ 时，$\mathrm{e}^{n(x-1)}\to 0$，所以 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{ax+b}{1}=ax+b.$

综上所述，$f(x)=\begin{cases}x^2, & x>1,\\ \dfrac{1+a+b}{2}, & x=1,\\ ax+b, & x<1.\end{cases}$

$f(x)$ 连续当且仅当 $\begin{cases}1=\dfrac{1+a+b}{2},\\ a+b=1\end{cases}$，即 $a+b=1.$

12. **Solution**. 当 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$t=1$，由方程 $\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^t=2\mathrm{e}$ 得 $y(1)=1$，所以 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1.$

对方程 $\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^t=2\mathrm{e}$ 两边求微分得 $\mathrm{e}^y\mathrm{d}y+\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=0$，代入 $t=1,y=1$ 得 $\mathrm{d}y=-\mathrm{d}t$，所以 $y_t'(1)=-1.$

且 $x_t'=\dfrac{1}{2\sqrt{t}(1+t)}$，所以 $x_t'(1)=\dfrac{1}{4}$. 故

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{y_t'(1)}{x_t'(1)}=-4.$$

所以切线方程为

$$y-1=-4\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\quad 或\quad 4x+y-1-\pi=0.$$

13. **Solution**. 由题可得

$$x_n - x_{n-1} = \frac{1}{n^2},$$
$$x_{n-1} - x_{n-2} = \frac{1}{(n-1)^2},$$
$$\cdots$$
$$x_2 - x_1 = \frac{1}{2^2}.$$

将上述各式相加得 $x_n = x_1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

显然 $\{x_n\}$ 单调增加，且 $x_n < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 2 - \frac{1}{n} < 2$，所以数列 $\{x_n\}$ 收敛，即 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在.

14. **Solution**.
设火箭上升的高度为 h，则 $\tan\theta = \frac{h}{4000}$，所以 $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = 4000 \cdot \sec^2\theta \cdot \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$.
由题设可知此时刻 $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = 600$，$\sec\theta = \frac{\sqrt{4000^2 + 3000^2}}{4000} = \frac{5}{4}$，
所以 $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}}{4000 \cdot \sec^2\theta} = \frac{600}{4000 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2} = \frac{12}{125}$（弧度/秒）.

15. **Solution**. 当 $x = 0$ 时，由方程得 $y = f(0) = 1$.
对方程 $x^3 + y^3 + xy - 1 = 0$ 两边求微分得 $3x^2\mathrm{d}x + 3y^2\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = 0$，所以当 $x = 0, y = 1$ 时，$f'(0) = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = -\frac{1}{3}$.
因此

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{f(\cos x - 1) - 1}{\ln(1+x^2)} &= \lim_{x\to 0} \frac{f(\cos x - 1) - f(0)}{\cos x - 1 - 0} \cdot \frac{\cos x - 1}{\ln(1+x^2)} \\ &= f'(0) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\ln(1+x^2)} \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} \\ &= \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

3 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

16. **Proof**. 令 $F(x) = x^{2n} + a_1x^{2n-1} + a_2x^{2n-2} + \cdots + a_{2n-1}x - 1$，则 $F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续.
注意到 $F(0) = -1, F(-\infty) = F(\infty) = +\infty$，由介值定理可知，存在 $c_1 \in (-\infty, 0)$，$c_2 \in (0, +\infty)$，使得 $F(c_1) = 0$，$F(c_2) = 0$，即方程至少有两个实根.

17. **Proof**. 令 $F(x) = f(x) - x$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导.
注意到 $F(0) = f(0) - 0 = 0$，$F\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$，$F(1) = f(1) - 1 = -1$.
任取 $\eta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$，由介值定理可知存在 $x_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right), x_2 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$，使得 $F(x_1) = F(x_2) = \eta$.
所以由 Rolle 定理可知，存在 $\xi \in (x_1, x_2) \subset (0,1)$，使得 $F'(\xi) = 0$，即 $f'(\xi) = 1$.