
CHAPTER 1

2022-2023 学年微积分（一）（上）期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. 求极限 $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}} + \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}} \right).$

2. 求极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+x)} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right).$

3. 求当 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小量 $x - \arctan x$ 的主部和阶数.

4. 设 $b = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + a \cos x - 2}{\tan x}$ 为常数, 求 a, b .

5. 设函数 $f(x) = \frac{\ln |x|}{|x-1|} \sin x$, 求 $f(x)$ 的间断点并判断类型.

6. 设 $y(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} (x \neq 0, x \neq \pm 1)$, 求 $y'(x)$.

7. 设二阶可导函数 $y = y(x)$ 由方程 $y = 1 + xe^y$ 确定, 求 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0}$.

8. 设 $y = (1 + x^2)^{\sin x}$, 求 dy .

9. 已知 $f(x) = x^3 \ln(1+x)$, 求 $f^{(10)}(0)$.

10. 求曲线 $r = 1 - \cos \theta$ 在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 处的切线方程.

2 综合题 (每小题 6 分, 共 30 分)

11. 研究函数 $f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}}$ 的连续性.

12. 设 $y = g(x)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数, $f(x)$ 可导, $f(1) = 2, f'(1) = -4$, 求 $y = g(1+x^2)$ 在 $x = 1$ 处的导数.

13. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处二阶可导, 且 $f'(1) = 0, f''(1) = 0, y = f^2(x)$, 求 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=1}$.

14. 设函数 $g(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 函数 $f(x)$ 可导, 求 $F(x) = f(g(x))$ 的导数.

15. 将水以 $4\text{m}^3/\text{min}$ 的速率注入一个圆锥形容器中, 容器顶朝下倒立, 它的高度为 8m , 底面半径为 4m , 当容器内的水深达 5m 时, 水面升高的速率是多少?

3 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

16. 设 $x_n > 0$, $x_{n+1} + \frac{4}{x_n} < 4 (n = 1, 2, \dots)$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在并求其值.

17. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, b]$ 上具有二阶导数, 且 $|f''(x)| \leq M$, $f(x)$ 在 $(0, b)$ 内取得最大值, 试证: $|f'(0)| + |f'(b)| \leq Mb$.

CHAPTER 2

2022-2023 学年微积分（一）（上）期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. **Solution.** 设 $x_n = \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}} + \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}}$, 则

$$n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}} \leq x_n \leq n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}}, \quad n > 1.$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}} = \pi$, $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}} = \pi$,
所以 $l = \pi$.

2. **Solution.**

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{\sin x - x}{x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

3. **Solution.**

法一. 设 $f(x) = \arctan x$, 则 $f(0) = 0$, $f'(0) = \frac{1}{1+x^2} \Big|_{x=0} = 1$,

$$f''(0) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \Big|_{x=0} = 0, \quad f'''(0) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} \Big|_{x=0} = -2,$$

所以 $\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$, 于是

$$x - \arctan x = \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \sim \frac{1}{3}x^3.$$

即主部为 $\frac{1}{3}x^3$, 阶数为 3.

法二. 设 $x \rightarrow 0$, $x - \arctan x$ 的主部为 cx^r , 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{cx^r} = 1$.

因

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \arctan x)'}{(cx^r)'} &= \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{crx^{r-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{crx^{r-3}}, \end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{c^r x^{r-3}} = 1$, 从而 $r = 3, c = \frac{1}{3}$, 即主部为 $\frac{1}{3}x^3$, 阶数为 3.

4. **Solution.** 由 b 是常数, $\lim_{x \rightarrow 0} \tan x = 0$ 知, $\lim_{x \rightarrow 0} (x + a \cos x - 2) = 0$, 于是 $a = 2$.

进而 $b = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2(\cos x - 1)}{x} = 1$, 即 $a = 2, b = 1$.

5. **Solution.** 当 $x = 0, x = 1$ 时, $f(x)$ 无定义, 故 $x = 0, x = 1$ 是 $f(x)$ 的间断点.

因

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\csc x} \cdot \frac{1}{|x-1|} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc x \cot x} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x \cos x} = 0.\end{aligned}$$

类似可得 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$, 所以 $x = 0$ 是可去间断点.

(或 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln |x| \cdot \frac{1}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln |x| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln |x|}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$)

又

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x-1} \sin x = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1} \sin x = \sin 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\ln x}{x-1} \sin x = -\sin 1,\end{aligned}$$

所以 $x = 1$ 是跳跃间断点.

6. **Solution.** 化简得 $y(x) = \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x}$.

所以 $y'(x) = \frac{-\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot x - (1 - \sqrt{1-x^2})}{x^2} = \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x^2 \sqrt{1-x^2}}$.

7. **Solution.** 由题设有 $x = 0, y = 1$, 方程两边关于 x 求导得

$$\begin{aligned}(1 - xe^y)y' &= e^y, & (*) \\ y'(0) &= e.\end{aligned}$$

方程 (*) 两边再关于 x 求导得

$$(1 - xe^y)y'' = 2y'e^y + x \cdot (y')^2 \cdot e^y,$$

所以

$$y''(0) = 2e^2, \quad \text{即} \quad \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} = 2e^2.$$

8. **Solution.** 因 $\ln y = \sin x \ln(1+x^2)$, 所以

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \ln(1+x^2) + \sin x \cdot \frac{2x}{1+x^2},$$

即 $y' = \left(\cos x \ln(1+x^2) + \frac{2x \sin x}{1+x^2} \right) y = (1+x^2)^{\sin x} \left(\cos x \ln(1+x^2) + \frac{2x \sin x}{1+x^2} \right),$

因此 $dy = (1+x^2)^{\sin x} \left(\cos x \ln(1+x^2) + \frac{2x \sin x}{1+x^2} \right) dx.$

9. **Solution.** 取 $v(x) = x^3$, 它的四阶以上的导数为 0,

$$u^{(k)}(x) = (\ln(1+x))^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}, k = 1, 2, \dots,$$

由 Leibniz 公式 $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$, 得

$$f^{(10)}(x) = x^3 \frac{(-1)^9 9!}{(1+x)^{10}} + 30x^2 \frac{(-1)^8 8!}{(1+x)^9} + 3 \times 10 \times 9x \frac{(-1)^7 7!}{(1+x)^8} + 10 \times 9 \times 8 \frac{(-1)^6 6!}{(1+x)^7}.$$

$$\text{所以 } f^{(10)}(0) = \frac{10!}{7}.$$

10. **Solution.** 曲线的参数方程为 $\begin{cases} x = (1 - \cos \theta) \cos \theta, \\ y = (1 - \cos \theta) \sin \theta \end{cases}$. 于是得到

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\sin^2 \theta + (1 - \cos \theta) \cos \theta}{2 \sin \theta \cos \theta - \sin \theta}.$$

代入 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 得到 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -1$, $x = 0, y = 1$, 因此切线方程为 $y = -x + 1$.

2 综合题 (每小题 6 分, 共 30 分)

11. **Solution.** 当 $x > 0$ 时, $e^{nx} \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}} = x^2$;

当 $x < 0$ 时, $e^{nx} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}} = x$;

当 $x = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}} = 0$,

综上所述, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0, \\ x, & x \leq 0. \end{cases}$

当 $x \neq 0$ 时, $f(x) = x^2$ 及 $f(x) = x$ 均为幂函数, 连续;

当 $x = 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, 且 $f(0) = 0$, 故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

因此 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处连续.

12. **Solution.** 由题意得 $g'(2) = \frac{1}{f'(1)} = -\frac{1}{4}$.

所以

$$y'(1) = [2xg'(2)]|_{x=1} = -\frac{1}{2}.$$

13. **Solution.** $y'(x) = 2f(x)f'(x)$,

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{y'(x) - y'(1)}{x - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x)f'(x)}{x - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x)(f'(x) - f'(1))}{x - 1} \\
&= 2f(1)f''(1) = 0.
\end{aligned}$$

14. **Solution.** $F(x) = \begin{cases} f\left(x^3 \sin \frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ f(0), & x = 0. \end{cases}$

当 $x \neq 0$ 时, $F'(x) = f'\left(x^3 \sin \frac{1}{x}\right) \left(3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}\right)$,

当 $x = 0$ 时,

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = 0,$$

$$F'(0) = f'(g(0)) \cdot g'(0) = f'(0) \cdot 0 = 0.$$

15. **Solution.** 设时刻 t 容器中水的体积为 $V \text{ m}^3$, 水的高度为 $h \text{ m}$, 水面半径为 $r \text{ m}$, 则

$$\frac{r}{4} = \frac{h}{8}, \quad \text{即 } r = \frac{h}{2}, \quad \text{因而 } V = \frac{1}{12} \pi h^3,$$

于是 $\frac{dV}{dt} = \frac{1}{4} \pi h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$.

当 $h = 5 \text{ m}$ 时, $\frac{dV}{dt} = 4 \text{ m}^3/\text{min}$ 时, $\frac{dh}{dt} = \frac{16}{25\pi} \text{ m/min}$.

即水面升高的速率是 $\frac{16}{25\pi} \text{ m/min}$.

3 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

16. **Proof.** 由 $x_{n+1} - x_n < 4 - \frac{4}{x_n} - x_n = -\left(\sqrt{x_n} - \frac{2}{\sqrt{x_n}}\right)^2 \leq 0$ 得到 $\{x_n\}$ 单调递减.

(或由均值不等式 $\sqrt{x_{n+1} \cdot \frac{4}{x_n}} \leq \frac{x_{n+1} + \frac{4}{x_n}}{2}$ 及 $x_{n+1} + \frac{4}{x_n} < 4$ 得

$$\sqrt{x_{n+1} \cdot \frac{4}{x_n}} < 2, \quad \text{即 } \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1, \quad \text{从而 } \{x_n\} \text{ 单调递减.})$$

又 $x_n > 0$, 由单调有界准则可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 则 $A > 0$. 由 $x_{n+1} + \frac{4}{x_n} < 4$ 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_{n+1} + \frac{4}{x_n}\right) \leq 4$, 即 $A + \frac{4}{A} \leq 4$, 解得 $A = 2$.

17. **Proof.** 设 $f(x)$ 在 $x_0 \in (0, b)$ 处取得最大值, 则 $f'(x_0) = 0$.

对函数 $f'(x)$ 在 $[0, x_0], [x_0, b]$ 上分别应用 Lagrange 中值定理, 得

$$f'(x_0) - f'(0) = f''(\eta)x_0, \quad \exists \eta \in (0, x_0)$$

$$f'(b) - f'(x_0) = f''(\xi)(b - x_0), \quad \exists \xi \in (x_0, b)$$

$$|f'(0)| + |f'(b)| = |f''(\eta)|x_0 + |f''(\xi)|(b - x_0) \leq Mx_0 + M(b - x_0) = Mb.$$