

华中科技大学转专业联合数学考试 (重制版)

学数华科 转专业交流群

Last Updated: November 16, 2025

延中科技大学专业文盲群

写在一切之前

Provided by @ 那, 边。@ 淵

首先, 如果你选择通过转专业考试转专业, **请务必完整阅读《华科转专业简明指南》**。希望大家明确一点: 转专业考试是选拔性考试, 所以难度大是正常的。这不仅意味着备考时心态上要做好准备, 更意味着你不可能做到面面俱到, 所以必须结合实际情况开展考前复习, 把精力放到那些能够拿到的分数上。一般情况下, 准备做得越充分的同学越有优势!

先整体介绍一下华科转专业数学考试。转专业数学考试是转专业联合笔试的一部分, 大部分理工科专业的学院都要求报名转入学生参加。就往年规律来看, 考试时间为两个小时。正因为这是选拔性考试, 所以考试名称虽然为“微积分”, 但实际上更偏向于数学分析的难度, 当然没有这么多分析证明的要求, 大部分还是以计算为主。试卷整体难度显著高于微积分 (B), 接近于大学生数学竞赛。因此, 对于学习微积分 (C) 或 (D) 的同学, 建议一定要拔高学习层次, 必要时可以去蹭其他班级的微积分课堂。此外, 考试没有大纲, 所以没有固定的考试范围, 但会与大家微积分课程的教学进度持平, 往年大致考到不定积分 (详情参考往年真题)。

关于备考参考资料, 建议以这份真题合集, 毕志伟、吴洁老师的《微积分学学习辅导》和裴礼文老师的《数学分析中的典型问题与方法》为主。就往年题目来看, 考试真题很多都能在裴砖中找到原型甚至是原题, 很多题目的思想方法都曾在往年题目中出现 (近几年考题 24 年较为突出)。另外, B 站和学数华科 QQ 群也是很好的资源。因此, 大家不必通过任何第三方渠道去找所谓的转专业资料了, 他们的卷子基本就是盗用本群中的, 很多题目印刷甚至出错, 买了也是浪费钱、浪费时间。

关于备考流程, 建议在仔细研读裴砖的同时 (or 之后) 认真写写往年真题, 一开始不会做很正常, 本合集有非常详尽的答案, 大家一定要认真下功夫把每道题研究清楚 (每年的难度都有变化, 可以视情况而定)。研读裴砖可以分专题进行, 可以准备一个笔记本, 把每个专题的内容 (方法、例题与具体解题思路) 自己总结出来, 这也是非常重要的复习资料。我总结了往年真题中经常出现的裴砖中的专题, 供大家参考以重点复习:

1.3 求极限值的若干方法; 1.4 Stolz 公式; 1.5 递推形式的极限

2.4 函数方程 (了解模型即可, 不必深入)

3.1 导数; 3.2 微分中值定理; 3.3 Taylor 公式; 3.5 导数的综合应用

(裴砖中带五角星的内容基本均为重要内容, 而带星号内容可以忽略)

另外, 本文件已上传至 **《华中科技大学转专业联合数学考试(重制版)》**, 大家使用前可以先检查一下是否有更新.

最后, 祝大家考试顺利、成功上岸!

版权声明: 本文件由 @tarfersoul, @ 那, 边。整理、维护, 仅供个人学习与交流使用, 严禁用于任何商业用途; 未经授权不得转载、修改或以任何形式传播, 侵权必究。

延中科技大学专业文盲群

CONTENTS

写在一切之前	3
Contents	5
I 转专业数学考试真题	7
1 2024 年转专业考试真题	9
2 2024 年转专业考试真题参考答案	11
3 2023 年转专业考试真题	15
4 2023 年转专业考试真题参考答案	17
5 2022 年转专业考试真题	23
6 2022 年转专业考试真题参考答案	27
7 2021 年转专业考试真题	33
8 2021 年转专业考试真题参考答案	35
9 2020 年转专业考试真题	39
10 2020 年转专业考试真题参考答案	41
11 2019 年转专业考试真题	45
12 2019 年转专业考试真题参考答案	47
13 2018 年转专业考试真题	51
14 2018 年转专业考试真题参考答案	53
15 2017 年转专业考试真题	57
16 2017 年转专业考试真题参考答案	59
17 2015 年转专业考试真题	63
18 2015 年转专业考试真题参考答案	65
19 2014 年转专业考试真题	69
20 2014 年转专业考试真题参考答案	71
21 2013 年转专业考试真题	75
22 2013 年转专业考试真题参考答案	77

23 2012 年转专业考试真题	81
24 2012 年转专业考试真题参考答案	83
25 2011 年转专业考试真题	89
26 2011 年转专业考试真题参考答案	91

Change Logs

- Updated (2025.10.15): 增加了 2024 年真题证明题缺失的答案.
- Updated (2025.10.16): 更正了 2023 年真题填空题第 4 题表达式的错误.
- Updated (2025.10.18): 更新了 Chapter 写在一切之前；更正了 2023 年真题填空题第 6 题的答案.
- Updated (2025.10.19): 更正了部分答案中的错别字.
- Updated (2025.10.20): 增加了 2024 年真题填空题第 4 题的答案；更正了 2023 年真题证明题第 1 题的答案.
- Updated (2025.10.25): 更新了 Chapter 写在一切之前；修订了 2024 年真题及答案；更正了 2020 年真题第 6 题答案中表达式的错误；更正了 2014 年真题第 1 题的答案.
- Updated (2025.10.30): 更正了 2022 年真题选择题第 9 题表达式的错误；修订了 2023 年真题及答案.
- Updated (2025.11.1): 更新了 Chapter 写在一切之前；更正了 2024 年真题证明题第 3 题的答案.
- Updated (2025.11.2): 更正了 2022 年真题选择题第 1 题表达式的错误.
- Updated (2025.11.3): 更新了 2022 年真题解答题第 3 题的答案.
- Updated (2025.11.9): 更正了 2012 年真题第 4 题的答案；更正了 2014 年真题第 4 题的答案；更正了 2017 年真题第 2 题的答案；更正了 2017 年真题第 4 题表达式的错误；更正了 2017 年真题第 6 题的答案；更正了 2020 年真题第 4 题的答案；更正了 2021 年真题证明题第 2 题的答案；更正了 2022 年真题选择题第 3 题的答案.
- Updated (2025.11.11): 更正了 2024 年真题证明题第 5 题答案中表达式的错误；更正了 2019 年真题第 5 题的答案；更正了 2023 年真题证明题第 6 题的答案；更正了 2021 年真题证明题第 1 题的答案.
- Updated (2025.11.14): 修订了 2022 年真题及答案.
- Updated (2025.11.16): 更正了 2023 年真题填空题第 3 题的答案.

Part I

转专业数学考试真题

CHAPTER 1

2024 年转专业考试真题

1 填空题 (每题 10 分, 共 60 分)

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \arctan \frac{2}{k^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的邻域内有一阶连续导数, 且 $f'(0) = 0, f''(0)$ 存在, 则极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\ln(1+x))}{x^3} = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 设 $f(x) = (\arcsin x)^2$, 则 $f^{(2024)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 已知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有定义, $\forall x, y \in (0, +\infty)$, $f(xy) = f(x)f(y)$, 且 $f'(1) = 2024$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

6. $\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

2 证明题 (10 分)

已知 $\beta > 0$, 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = \ln \beta$, $x_{n+1} = x_1 + \sum_{i=1}^n \ln(\beta - x_i)$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛并求其极限.

3 证明题 (10 分)

证明：若函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续， f 单调，存在数列 $\{x_n\}, x_n \in [a, b], g(x_n) = f(x_{n+1}), n = 1, 2, \dots$ ，则 $f(x) = g(x)$ 在 $[a, b]$ 上有解。

4 证明题 (10 分)

设 $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0 \\ f'(0), & x = 0 \end{cases}$, $f(0) = 0, f(x)$ 在 \mathbf{R} 上存在二阶导数，问 $g(x)$ 在 \mathbf{R} 上是否存在连续导数，存在请证明，不存在请说明理由。

5 证明题 (10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在 $(0, 1)$ 内二阶可导， $f(0) = 0, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}, f(1) = \frac{\pi}{2}$ ，证明：存在 $\xi \in (0, 1)$ ，使得 $f''(\xi) = \frac{\xi}{1 - \xi^2} f'(\xi)$ 。

CHAPTER 2

2024 年转专业考试真题参考答案

1 填空题(每题 10 分, 共 60 分)

1. Solution. $\frac{3\pi}{4}$.

利用反正切差角公式

$$\begin{aligned}\arctan x - \arctan y &= \arctan \frac{x-y}{1+xy}, \quad x = \frac{1}{k-1}, \quad y = \frac{1}{k+1}, \\ \Rightarrow \arctan \frac{2}{k^2} &= \arctan \frac{\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}}{1 + \frac{1}{(k-1)(k+1)}} = \arctan \frac{1}{k-1} - \arctan \frac{1}{k+1}.\end{aligned}$$

对 $k = 1, 2, \dots, n$ 累加并对 n 取极限

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \arctan \frac{2}{k^2} &= \arctan 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \left(\arctan \frac{1}{k-1} - \arctan \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \arctan 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\arctan 1 + \arctan \frac{1}{2} - \arctan \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{3\pi}{4}.\end{aligned}$$

2. Solution. $e^{-\frac{1}{2}}$.

利用 Taylor 公式 $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ ($t \rightarrow 0$), 令 $t = \sqrt{x}$, 得

$$\cos \sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x).$$

故

$$\begin{aligned}\ln \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}} &= \frac{1}{x} \ln(\cos \sqrt{x}) = \frac{1}{x} \ln \left(1 - \frac{x}{2} + o(x) \right) \\ &= \frac{1}{x} \left(-\frac{x}{2} + o(x) \right) = -\frac{1}{2} + o(1).\end{aligned}$$

两边取指数得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

3. Solution. $\frac{f''(0)}{2}$.

利用 Taylor 展开

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2), \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^4).$$

因此

$$\begin{aligned} f(x) - f(\ln(1+x)) &= f'(0)\left(x - \ln(1+x)\right) + \frac{f''(0)}{2}\left(x^2 - (\ln(1+x))^2\right) + o(x^2) \\ &= \frac{f''(0)}{2}\left[x^2 - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)^2\right] + o(x^2) \\ &= \frac{f''(0)}{2}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\ln(1+x))}{x^3} = \frac{f''(0)}{2}.$$

4. Solution. $2^{2023}(1011!)^2$.

方程两边求导, 得 $f'(x) = \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$, 即 $\sqrt{1-x^2}f'(x) = 2 \arcsin x$, 两边平方得

$$(1-x^2)f'^2(x) = 4f(x).$$

两边再次求导, 得 $2f'(x)[-xf'(x) + (1-x^2)f''(x) - 2] = 0$, 消去 $f'(x)$ 得

$$-xf'(x) + (1-x^2)f''(x) = 2.$$

(注意到 $f'(x) = 0$ 当且仅当 $x = 0$. $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2$, 此时 $-xf'(x) + (1-x^2)f''(x) = 2$ 仍然成立.)

利用 Leibniz 公式对上式两边同时求 n 阶导数得

$$-xf^{(n+1)}(x) - nf^{(n)}(x) + (1-x^2)f^{(n+2)}(x) - 2nx f^{(n+1)}(x) - n(n-1)f^{(n)}(x) = 0.$$

在上式中令 $x = 0$ 得

$$f^{(n+2)}(0) = n^2 f^{(n)}(0).$$

所以 $f^{(2024)}(0) = 2022^2 \cdot 2020^2 \cdots 2^2 f''(0) = 2^{2023}(1011!)^2$.

5. Solution. x^{2024} .

$\forall x > 0$, 有 $f(x) = f(\sqrt{x}\sqrt{x}) = f^2(\sqrt{x}) > 0$.

令 $g(x) = \ln f(x)$, 得

$$g(xy) = g(x) + g(y).$$

令 $u = \ln x$, $v = \ln y$, 则 $g(e^{u+v}) = g(e^u) + g(e^v)$, 说明 $h(u) = g(e^u)$ 满足

$$h(u+v) = h(u) + h(v),$$

且 h 在 $u = 0$ (即 $x = 1$) 可导, 故 $h(u) = Cu$. 于是

$$g(x) = h(\ln x) = C \ln x, \quad f(x) = e^{g(x)} = x^C.$$

由 $f'(x) = C x^{C-1}$, 代入 $x = 1$ 并利用 $f'(1) = 2024$, 得 $C = 2024$. 故

$$f(x) = x^{2024}.$$

注: 本题更严谨详细的解题步骤参见《数学分析中的典型问题与方法》2.4 函数方程 例 2.4.1 及单元练习 2.4.6.

6. **Solution.** $2x\sqrt{e^x - 1} - 4\sqrt{e^x - 1} + 4\arctan\sqrt{e^x - 1} + C.$

令 $t = \sqrt{e^x - 1}$, 则

$$t^2 = e^x - 1, \quad e^x = t^2 + 1, \quad e^x dx = 2t dt,$$

且 $x = \ln(e^x) = \ln(t^2 + 1)$. 原式化为

$$\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx = \int \frac{x}{t} e^x dx = 2 \int x dt = 2 \int \ln(t^2 + 1) dt.$$

对 $2 \int \ln(t^2 + 1) dt$ 分部积分得

$$\begin{aligned} 2 \int \ln(t^2 + 1) dt &= 2 \left[t \ln(t^2 + 1) - \int \frac{2t^2}{t^2 + 1} dt \right] \\ &= 2t \ln(t^2 + 1) - 4 \int \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt \\ &= 2t \ln(t^2 + 1) - 4t + 4 \arctan t + C. \end{aligned}$$

最后代回 $t = \sqrt{e^x - 1}$ 得

$$2x\sqrt{e^x - 1} - 4\sqrt{e^x - 1} + 4\arctan\sqrt{e^x - 1} + C.$$

2 (10 分)

Proof. 由已知可得 $x_n = x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \ln(\beta - x_i)$, 用 $x_{n+1} = x_1 + \sum_{i=1}^n \ln(\beta - x_i)$ 相减, 得

$$x_{n+1} = x_n + \ln(\beta - x_n).$$

利用 $\forall x > 0, \ln x < x - 1$, 得

$$x_{n+1} - \beta + 1 = x_n + \ln(\beta - x_n) - \beta + 1 < x_n + \beta - x_n - 1 - \beta + 1 = 0.$$

于是 $\beta - 1$ 是 $\{x_n\}$ 的上界. 所以 $\ln(\beta - x_n) > 0$, $\{x_n\}$ 单调增加. 由单调有界原理, $\{x_n\}$ 必然收敛. 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \{x_n\} = a$, 对 $x_{n+1} = x_n + \ln(\beta - x_n)$ 左右两边取极限, 得 $\ln(\beta - a) = 0$, 所以极限为 $\beta - 1$.

3 (10 分)

Proof. 考虑数列 $\{f(x_n) - g(x_n)\}$. 若此数列在 $n = k$ 处出现变号, 即

$$[f(x_k) - g(x_k)] \cdot [f(x_{k-1}) - g(x_{k-1})] < 0,$$

则存在介于 x_{k-1} 和 x_k 的 ξ 使得 $f(\xi) - g(\xi) = 0$.

若不然, 不失一般性地设 $\{f(x_n) - g(x_n)\}$ 恒为正, 则

$$f(x_n) - f(x_{n-1}) = g(x_{n-1}) - f(x_{n-1}) < 0$$

恒成立, 故 $\{f(x_n)\}$ 单调递减. 由 f 的单调性可知 $\{x_n\}$ 亦单调, 而 $\{x_n\}$ 有界, 故 $\{x_n\}$ 必有极限 x_0 . 在 $f(x_{n+1}) = g(x_n)$ 中令 $n \rightarrow \infty$, 并由 f 和 g 的连续性, 即得 $f(x_0) = g(x_0)$.

4 (10 分)

Proof. 若 $x \neq 0$, $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$.

$$\text{若 } x = 0, g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x} - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - xf'(0)}{x^2}.$$

应用 L'Hospital 法则, 得

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{2x}.$$

因为 $f(x)$ 二阶可导, 所以 $g'(0) = \frac{f''(0)}{2}$.

$g'(x)$ 在 $x \neq 0$ 时的连续性显然. 下面考虑 $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf'(0) - f(x)}{x^2} \equiv A + B$$

由导数定义, $A = f''(0)$. 由上述讨论得 $B = -g'(0) = -\frac{f''(0)}{2}$,

因此 $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = \frac{f''(0)}{2} = g'(0)$, 即证 $g'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

5 (10 分)

Proof. 令 $g(x) = f(x) - \arcsin x$, 则 $g(0) = g\left(\frac{1}{2}\right) = g(1)$.

由 Rolle 定理可知, 存在 $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\beta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使得 $g'(\alpha) = g'(\beta) = 0$, 即

$$f'(\alpha) - \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} = f'(\beta) - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0.$$

令 $h(x) = f'(x)\sqrt{1-x^2}$, 则 $h(\alpha) = h(\beta) = 1$.

由 Rolle 定理, 存在 $\xi \in (\alpha, \beta)$ 使得 $h'(\xi) = 0$, 即

$$\sqrt{1-\xi^2}f''(\xi) - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}f'(\xi) = 0,$$

化简立得.

CHAPTER 3

2023 年转专业考试真题

1 填空题 (每题 8 分, 共 48 分)

1. 若 $\beta \neq k\pi (k = 0, 1, 2, \dots)$, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \tan \frac{\beta}{2^k} = \text{_____}$.
2. 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{3}} \left[(x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}} \right] = \text{_____}$.
3. 设 $0 < a_1 < \pi, a_{n+1} = \sin a_n (n = 1, 2, \dots)$, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} a_n = \text{_____}$.
4. 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的邻域内二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{f(x)}{x^2} \right) = 0$, 则 $f''(0) = \text{_____}$.
5. 设 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$, 则 $f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x) = \text{_____}$.
6. 设 $\alpha \neq \beta$ 是两个实常数, 则 $\frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha}$ 与 $\frac{e^\beta + e^\alpha}{2}$ 两者之较大者为 _____ .

2 证明题 (9 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+1} = a_n - \frac{1}{n+1} a_{n-1} (n = 2, 3, \dots)$$

证明: 对所有 $n \geq 3$, 都有 $0 < n a_n - 3 < \frac{6}{n-1}$.

3 证明题 (9 分)

设正整数 $n \geq 2$, 证明方程 $(1-x^2)^n = 1-x \quad x \in (0, 1)$ 恰有一解.

4 证明题 (9 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续导数, 对 (a, b) 内任意一点 ξ , 可否在 (a, b) 内找到两点 $\alpha, \beta, \xi \in (\alpha, \beta)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ 成立, 试证明你的结论或举反例.

5 证明题 (9 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上三阶可导, 且 $f'''(x) > 0$, 证明

$$f(a+h) - f(a) < \frac{h}{2} [f'(a) + f'(a+h)] \quad (a < a+h < b)$$

6 证明题 (16 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内二阶可导, 利用两种方法证明: $\exists \xi \in (a, b)$ 满足

$$f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{(b-a)^2}{4} f''(\xi).$$

CHAPTER 4

2023 年转专业考试真题参考答案

1 填空题 (每题 8 分, 共 48 分)

1. **Solution.** $\frac{1}{\beta} - \cot \beta$.

注意到 $\tan x = \cot x - 2 \cot 2x$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \tan \frac{\beta}{2^k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \left(\cot \frac{\beta}{2^k} - 2 \cot \frac{\beta}{2^{k-1}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \cot \frac{\beta}{2^n} - \cot \beta \\ &= \frac{1}{\beta} - \cot \beta.\end{aligned}$$

2. **Solution.** $\frac{4}{3}$.

令 $t = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \rightarrow 0^+$, 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{3}} \left[(x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}} \right] = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(1+t^3)^{\frac{2}{3}} - (1-t^3)^{\frac{2}{3}}}{t^3} = \frac{4}{3}.$$

3. **Solution.** $\sqrt{3}$.

用数学归纳法容易证明 $a_n \in (0, \pi)$ 恒成立, 且 $a_{n+1} = \sin a_n < a_n$, 故 $\{a_n\}$ 收敛. 易见其收敛于 0.

由 Stolz 定理,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) - n}{\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 a_{n+1}^2}{a_n^2 - a_{n+1}^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin^2 x}{x^2 - \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{(x + \sin x)(x - \sin x)} \\ &= 3.\end{aligned}$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} a_n = \sqrt{3}$.

4. Solution. 9.

利用

$$\sin 3x = 3x - \frac{(3x)^3}{6} + o(x^3) = 3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3),$$

故

$$\frac{\sin 3x}{x^3} = \frac{3}{x^2} - \frac{9}{2} + o(1).$$

设

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2),$$

则

$$\frac{f(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{x^2} + \frac{f'(0)}{x} + \frac{f''(0)}{2} + o(1).$$

原式

$$\frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{f(x)}{x^2} = \frac{3 + f(0)}{x^2} + \frac{f'(0)}{x} + \left(\frac{f''(0)}{2} - \frac{9}{2}\right) + o(1).$$

为使极限存在且为 0, 应有

$$3 + f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad \frac{f''(0)}{2} - \frac{9}{2} = 0,$$

故

$$f''(0) = 9.$$

5. Solution. $\frac{(-1)^n n!}{4} \left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x+2)^{n+1}} \right].$

注意到

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right).$$

利用

$$\frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{x-a} = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}},$$

对两项分别求导得

$$\frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{x-2} = \frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}, \quad \frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{x+2} = \frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}.$$

综上

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{4} \left[\frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}} \right] = \frac{(-1)^n n!}{4} \left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x+2)^{n+1}} \right].$$

6. Solution. $\frac{e^\beta + e^\alpha}{2}.$

不妨设 $\alpha < \beta$, 令 $t = \beta - \alpha > 0$, 将两个表达式转化为关于 t 的函数:

$$\frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha} = \frac{e^{\alpha+t} - e^\alpha}{t} = e^\alpha \cdot \frac{e^t - 1}{t},$$

$$\frac{e^\beta + e^\alpha}{2} = \frac{e^{\alpha+t} + e^\alpha}{2} = e^\alpha \cdot \frac{e^t + 1}{2}.$$

由于 $e^\alpha > 0$, 只需比较 $\frac{e^t - 1}{t}$ 与 $\frac{e^t + 1}{2}$ ($t > 0$) 的大小关系. 令

$$f(t) = \frac{e^t - 1}{e^t + 1} - \frac{t}{2},$$

则 $f'(t) = -\frac{(\mathrm{e}^t - 1)^2}{2(\mathrm{e}^t + 1)^2} < 0$ 恒成立, 所以 $f(t) < f(0) = 0$, 故 $\frac{\mathrm{e}^t - 1}{\mathrm{e}^t + 1} < \frac{t}{2}$ 即 $\frac{\mathrm{e}^t + 1}{2} > \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t}$, 故

$$\frac{\mathrm{e}^\beta + \mathrm{e}^\alpha}{2} > \frac{\mathrm{e}^\beta - \mathrm{e}^\alpha}{\beta - \alpha}.$$

当 $\alpha > \beta$ 时, 令 $t = \alpha - \beta > 0$ 同理可推得相同结论.

Note: 根据 A-L-G 不等式

$$\frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} < \frac{x_1 + x_2}{2}$$

可以直接得到结论.

另: 用特殊值带入也可以得到答案.

2 证明题 (9 分)

Proof. 将递推式变形为

$$(n+1)a_{n+1} - na_n = a_n - a_{n-1} \quad (n=2,3,\dots).$$

所以

$$\sum_{k=2}^n [(k+1)a_{k+1} - ka_k] = \sum_{k=2}^n (a_k - a_{k-1}) \quad (n \geq 2),$$

化简为

$$na_n - 3 = a_{n-1} \quad (n \geq 3).$$

下面使用数学归纳法证明 $a_n \in \left(0, \frac{6}{n}\right)$, $n \geq 2$.

注意到 $a_2 = 2 \in \left(0, \frac{6}{2}\right)$, 若 $a_k \in \left(0, \frac{6}{k}\right)$, $k \geq 2$, 则

$$a_{k+1} = \frac{1}{k+1}(a_k + 3) \in \left(0, \frac{\frac{6}{k} + 3}{k+1}\right),$$

又 $k \geq 2$ 时 $\frac{\frac{6}{k} + 3}{k+1} \leq \frac{6}{k+1}$, 所以 $a_{k+1} \in \left(0, \frac{6}{k+1}\right)$.

综上 $\forall n \geq 3$, 都有 $0 < na_n - 3 < \frac{6}{n-1}$.

3 证明题 (9 分)

Proof.

法一. 设 $f(x) = (1-x^2)^n - 1 + x$, 则 $f(0) = f(1) = 0$.

因 $f'(x) = -2nx(1-x^2)^{n-1} + 1$, 有 $f'(0) = f'(1) = 1$, 由导数定义与极限比较性可得

$$\exists x_1 \in (0, \delta) (\delta < \frac{1}{2}) \text{ 使 } \frac{f(x_1) - f(0)}{x_1 - 0} > 0, \quad \exists x_2 \in (1-\delta, 1) \text{ 使 } \frac{f(x_2) - f(1)}{x_2 - 1} > 0.$$

即 $f(x_1) > 0$, $f(x_2) < 0$. 由零点定理可知 $\exists \alpha \in (x_1, x_2)$, 使 $f(\alpha) = 0$. 下证唯一性.

假设 β 是 $f(x)$ 异于 α 的零点, 则 $f(0) = f(\alpha) = f(\beta) = f(1) = 0$,

由 Rolle 定理可知 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有三个零点, $f''(x)$ 在 $(0,1)$ 内有两个零点.

又因 $f''(x) = 2n(1-x^2)^{n-2} [(2n-1)x^2 - 1]$ 在 $(0,1)$ 内仅有一个零点, 因此矛盾!

法二. 方程 $(1-x^2)^n = 1-x \quad x \in (0,1)$ 等价于

$$(1+x)^n = (1-x)^{1-n} \quad x \in (0,1) \quad \text{或} \quad n \ln(1+x) + (n-1) \ln(1-x) = 0 \quad x \in (0,1)$$

设 $g(x) = n \ln(1+x) + (n-1) \ln(1-x)$, 则 $g(0) = 0$, $g(1^-) = -\infty$, $g'(x) = \frac{n}{1+x} - \frac{n-1}{1-x} = \frac{1-(2n-1)x}{1-x^2}$.

注意到 $g(0) = 0$, $g'(0) = 1 > 0$,

故 $\exists x_1 \in (0, \delta) (\delta < \frac{1}{2n-1})$, 使 $g(x_1) > 0$. 由零点定理可知 $\exists \alpha \in (x_1, 1)$, 使 $g(\alpha) = 0$.

因 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2n-1}\right)$ 上单增, 在 $\left(\frac{1}{2n-1}, 1\right)$ 上单减, 故 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 有且仅有一个零点.

4 证明题 (9 分)

Proof. 答案是否定的. 可构造反例为 $[-1, 1]$ 上的 $f(x) = x^3$.

考虑 $\xi = 0$, $f'(0) = 0$, 但 $\forall \alpha < 0 < \beta$ 均有 $\frac{\beta^3 - \alpha^3}{\beta - \alpha} = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \neq 0$.

5 证明题 (9 分)

Proof. 构造 $g(h) = f(a+h) - f(a) - \frac{h}{2}[f'(a) + f'(a+h)]$, $g(0) = 0$.
 $g'(h) = f'(a+h) - \frac{1}{2}[f'(a) + f'(a+h)] - \frac{h}{2}f''(a+h)$, $g'(0) = 0$.
 $g''(h) = -\frac{h}{2}f'''(a+h) < 0$, 结合单调性即得.

6 证明题 (16 分)

Proof.

法一, 利用 Cauchy 中值定理.

令 $F(x) = f(x) - 2f\left(\frac{x+a}{2}\right) + f(a)$, $G(x) = \frac{1}{4}(x-a)^2$, 则 $F(a) = G(a) = 0$.

由 Cauchy 中值定理,

$$\begin{aligned} \frac{F(b)}{G(b)} &= \frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} \\ &= \frac{F'(\eta)}{G'(\eta)} \\ &= \frac{f'(\eta) - f'\left(\frac{\eta+a}{2}\right)}{\frac{\eta-a}{2}}. \end{aligned}$$

其中 $\eta \in (a, b)$. 由 Lagrange 中值定理,

$$\begin{aligned} \frac{f'(\eta) - f'\left(\frac{\eta+a}{2}\right)}{\frac{\eta-a}{2}} &= f''(\xi) \cdot \frac{\eta - \frac{\eta+a}{2}}{\frac{\eta-a}{2}} \\ &= f''(\xi). \end{aligned}$$

其中 $\xi \in \left(\frac{\eta+a}{2}, \eta \right)$. 得证.

法二, 利用 Taylor 公式.

由 Taylor 定理得

$$\begin{aligned} f(a) &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right) + \frac{f''(\xi_1)}{2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2, \\ f(b) &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right) + \frac{f''(\xi_2)}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2, \\ f(a) + f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= (b-a)^2 \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{8}. \end{aligned}$$

由 Darboux 定理, 存在 ξ 使得 $f''(\xi) = \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2}$, 得证.

法三, 利用常数 K 值.

记 $K = \frac{f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a)}{\frac{1}{4}(b-a)^2}$. 令

$$F(x) = f(x) - 2f\left(\frac{a+x}{2}\right) + f(a) - \frac{(x-a)^2}{4}K,$$

则 $F(a) = F(b) = 0$, 故存在 $\eta \in (a, b)$, 使 $F'(\eta) = 0$, 即

$$f'(\eta) - f'\left(\frac{a+\eta}{2}\right) - \frac{\eta-a}{2}K = 0,$$

进一步存在 $\xi \in \left(\frac{\eta+a}{2}, \eta \right) \subset (a, b)$, 使

$$f''(\xi)\left(\eta - \frac{a+\eta}{2}\right) - \frac{\eta-a}{2}K = 0,$$

化简得 $f''(\xi) = K$.

延中科技大学转专业考试真题群

CHAPTER 5

2022 年转专业考试真题

1 选择题(每题 3 分, 共 30 分)

1. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 存在是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的(*)条件.

- A. 充分不必要 B. 必要不充分
C. 充分必要 D. 既不充分也不必要

2. 如果 $x \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{ax^2 + bx + c}$ 是比 $\frac{1}{x+1}$ 高阶的无穷小, 则 a, b, c 应满足(*)。

- A. $a = 0, b = 1, c = 1$ B. $a \neq 0, b = 1, c$ 为任意常数
C. $a \neq 0, b, c$ 为任意常数 D. a, b, c 为任意常数

3. 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{|x-1|}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ 的连续区间为(*)。

- A. $(-\infty, +\infty)$ B. $(-\infty, 1)$ 与 $[1, +\infty)$
C. $(-\infty, 1)$ 与 $(1, +\infty)$ D. $(-\infty, 1]$ 与 $(1, +\infty)$

4. 下列正确的命题是(*)。

- (1): 初等函数在其定义域内连续;
(2): 设函数定义在一个区间上, 若函数在区间内一点连续, 则它在该点的某邻域内连续;
(3): 若函数在区间 I 上连续, 则函数在 I 上有界;
(4): 若函数在区间 I 上连续, 则函数在 I 上有最大值.
A. (1)(2)(3) B. (2)(3)(4)
C. (2)(4) D. 都不真

5. 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导, 且 $f(x) < 0$, 则(*)。

- A. $f(-x) > 0$ B. $f'(-x) < 0$
C. $\lim_{x \rightarrow 0} f(-x) < 0$ D. $\lim_{x \rightarrow 0} f(-x) > 0$

6. 设函数 $y = f(x)$ 具有二阶导数, 且 $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$, Δx 为自变量在 x_0 的增量, Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在 x_0 对应的增量和微分. 若 $\Delta x > 0$, 则 (*).

- A. $0 < \Delta y < dy$
 B. $0 < dy < \Delta y$
 C. $\Delta y < dy < 0$
 D. $dy < \Delta y < 0$

7. 已知 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = t^2 \end{cases}$ 所确定, $\varphi''(t)$ 存在, 则 $\frac{d^2x}{dy^2} = (*)$.

- A. $\frac{t\varphi''(t) - \varphi'(t)}{4t^3}$
 B. $\frac{t\varphi''(t) + \varphi'(t)}{4t^3}$
 C. $\frac{\varphi''(t) - t\varphi'(t)}{4t^3}$
 D. $\frac{t\varphi''(t) - \varphi(t)}{4t^3}$

8. $y = \sin^4 x - \cos^4 x$, 则 $y^{(n)} = (*)$.

- A. $2^n \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$
 B. $2^n \sin\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$
 C. $-2^n \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$
 D. $-2^n \sin\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$

9. 设 $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{3^{\frac{k}{n}}}{n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = (*)$.

- A. $\frac{4}{\ln 3}$
 B. $\frac{2}{\ln 3}$
 C. $\frac{3}{\ln 3}$
 D. $\frac{3}{\ln 2}$

10. $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 9}$ 全部的渐近线为 (*).

- A. $x = \pm 3, y = x$
 B. $x = \pm 3, y = 2x$
 C. $x = \pm 3, y = -x$
 D. $x = \pm 3, y = 3x$

2 填空题 (每题 3 分, 共 30 分)

1. 已知 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 3$, $f^{-1}(x) < x - 2$ 成立, 则 x 的取值范围是_____.

2. 设 $x > 1$, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x^n + x^{3n}} = _____$.

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \sin x \right) = _____$.

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x \sin^2 x} = _____$.

5. 函数 $f(x) = x^4$ 在区间 $[1, 2]$ 内满足 Lagrange 中值定理的 ξ 的值 = _____.

6. 函数 $f(x) = x e^{-x}$ 的递增区间为_____.

7. 若 $f(x) = x^3 \ln(2+x)$, 则 $f^{(6)}(0) = _____$.

8. 设 $f(x)$ 具有任意阶导数, $f'(x) = f^2(x)$, 则 $f^{(n)}(x) = _____$.

9. 设 $k > 0$, 则 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$ 在 $(0, +\infty)$ 内的零点个数为 _____.

10. 设 $y = y(x)$ 由 $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$ 确定, 则 $y = y(x)$ 的极小值点为 _____.

3 解答题 (共 40 分)

1. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right)^{\frac{1}{x}} \right].$

2. 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导, 如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + 2\sqrt{x}f'(x)] = 2022$, 计算极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$

3. 对任意正实数 β , 记函数 $f(x) = |\lg x|$ 在 $[\beta, +\infty)$ 上的最小值为 m_β , 函数 $g(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$ 在 $[0, \beta]$ 上的最大值为 M_β , 若 $M_\beta - m_\beta = \frac{1}{2}$, 求 β 的所有可能值.

4. 设 $\alpha \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \frac{x}{e^x} - \alpha$ 有两个不同的零点 x_1, x_2 .

(1) 证明: $\alpha \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$;

(2) 证明: $|x_2 - x_1| > 2\sqrt{1 - e\alpha}$.

CHAPTER 6

2022 年转专业考试真题参考答案

1 填空题 (9 分)

1. **Solution.** B.

2. **Solution.** C.

由题可得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{ax^2+bx+c}{x+1}} = 0.$$

而 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{ax^2+bx+c}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{ax^2+bx+c} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2ax+b}$, 故 $a \neq 0$.

3. **Solution.** C.

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 1, \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}, \text{ 所以 } f(x) \text{ 仅在 } x = 1 \text{ 处不连续. 注意本题不是单侧连续.}$$

4. **Solution.** D.

基本初等函数在其定义域内连续, 初等函数在其定义区间内连续, (2): 例如 $f(x) = xD(x), D(x)$ 是 Dirichlet 函数, 可以验证 $f(x)$ 仅在 $x = 0$ 处连续 (3)(4) 闭区间上连续函数具有最值定理以及有界性, 选择 D.

5. **Solution.** C.

因 $f(x)$ 可导, 故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续. 令 $y = -x$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(-x) = \lim_{y \rightarrow 0} f(y) = f(0) < 0$, 选择 C.

6. **Solution.** A.

由 Taylor 定理, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \frac{1}{2}f''(\xi)(\Delta x)^2$, $\xi \in (x, x + \Delta x)$.

因 $f''(x) < 0$, 故 $\Delta y < f'(x)\Delta x$. 而 $dy = f'(x)dx = f'(x)\Delta x$, 故 $\Delta y < dy$,

另一方面, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(\eta)\Delta x > 0$, $\eta \in (x, x + \Delta x)$.

因此 $0 < \Delta y < dy$, 选择 A.

7. **Solution.** A.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}} = \frac{\varphi'(t)}{2t}, \text{ 所以}$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left(\frac{dx}{dy} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dy} \right) \cdot \frac{1}{\frac{dy}{dt}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{t\varphi''(t) - \varphi'(t)}{t^2} \cdot \frac{1}{2t} = \frac{t\varphi''(t) - \varphi'(t)}{4t^3}.$$

8. Solution. C.

注意到

$$y = \sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = -\cos 2x,$$

简单归纳即得 $y^{(n)}(x) = -2^n \cos \left(2x + \frac{n\pi}{2} \right)$. 选择 C.

9. Solution. B.

由定积分的定义可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{3^{\frac{k}{n}}}{n} = \int_0^1 3^x dx = \left. \frac{3^x}{\ln 3} \right|_0^1 = \frac{2}{\ln 3}.$$

10. Solution. A.

令 $x^2 - 9 = 0$ 得 $x = \pm 3$, 所以 $y = f(x)$ 有垂直渐近线 $x = \pm 3$.

注意到

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2-9}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2-9} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2-9} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{9x}{x^2-9} \right) = 0,$$

故 $y = f(x)$ 有斜渐近线 $y = x$.

$y = f(x)$ 无水平渐近线, 选择 A.

2 填空题 (每题 8 分, 共 48 分)

1. Solution. $(3, +\infty)$.

由 $\log_{\frac{1}{2}} x = y - 3$ 得 $x = \left(\frac{1}{2} \right)^{y-3}$, 所以 $f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{2} \right)^{x-3}$.

即解不等式 $\left(\frac{1}{2} \right)^{x-3} < x - 2$.

记 $g(x) = x - 2 - \left(\frac{1}{2} \right)^{x-3}$, 则 $g'(x) = 1 + \left(\frac{1}{2} \right)^{x-3} \ln 2 > 0$, 所以 $g(x)$ 单调增加.

又 $g(3) = 0$, 故 $g(x) > 0 \Rightarrow x \in (3, +\infty)$.

2. Solution. x^3 .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x^n + x^{3n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^3 \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{x^{2n}} + 1} = x^3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left[\frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x^{2n}} \right)}{n} \right] = x^3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(\frac{1}{nx^{2n}} \right) = x^3.$$

3. Solution. 1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \sin x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1 - 0 = 1.$$

4. Solution. 1.

注意到

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1} x^{2n+1},$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x + \frac{1}{2 \cdot 3}(2x)^3) - 2(x + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3) + o(x^3)}{x^3} = 1.$$

5. Solution. $\sqrt[3]{\frac{15}{4}}.$

由 $f(2) - f(1) = 15 = f'(\xi)(2-1) = 4\xi^3, \xi \in (1, 2)$ 解得 $\xi = \sqrt[3]{\frac{15}{4}}.$

6. Solution. $(-\infty, 1).$

计算 $f'(x) = (1-x)e^{-x}$, 令 $f'(x) > 0$ 解得 $x \in (-\infty, 1).$

7. Solution. 30.

$$f(x) = x^3 \ln(2+x) = x^3 \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) + \ln 2 \cdot x^3.$$

注意到

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}.$$

所以 $f(x) = x^3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^n + \ln 2 \cdot x^3.$

由 Taylor 定理,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

将上述两式对照, 得 $\frac{f^{(6)}(0)}{6!} = \frac{1}{2^3 \cdot 3}$, 解得 $f^{(6)}(0) = 30.$

8. Solution. $\frac{n!}{(C-x)^{n+1}}.$

由 $f'(x) = f^2(x)$ 得 $\left(-\frac{1}{f(x)}\right)' = 1$, 因此 $f(x) = \frac{1}{C-x}.$

注意到

$$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = \frac{(-a)^n \cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}.$$

故 $f^{(n)}(x) = \frac{n! \cdot 1^n}{(C-x)^{n+1}} = \frac{n!}{(C-x)^{n+1}}.$

9. Solution. 2.

即 $k = \frac{x}{e} - \ln x.$

记 $t(x) = \frac{x}{e} - \ln x$, 则 $t'(x) = \frac{1}{e} - \frac{1}{x}$. 所以 $t(x)$ 在 $(0, e)$ 单调减, 在 $(e, +\infty)$ 单调增.

因 $t(0^+) = t(+\infty) = +\infty$, $t(e) = 0$, 又 $k > 0$, 作图可得共有 2 个零点.

10. **Solution.** $x = 1$

方程 $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$ 两边对 x 求导, 得 $6y^2y' - 4yy' + 2y + 2xy' - 2x = 0$. 即

$$y'(3y^2 - 2y + x) = x - y \quad (*)$$

令 $y' = 0$ 得 $y = x$, 代入原方程得

$$(x - 1)(2x^2 + x + 1) = 0.$$

解得 $x = 1$. 再对 (*) 式求导, 有

$$y''(3y^2 - 2y + x) + y' \frac{\partial}{\partial x}(3y^2 - 2y + x) = 1 - y'.$$

代入 $x = y = 1$, $y' = 0$ 得 $y''(1) = \frac{1}{2} > 0$, 故 $x = 1$ 是 $y(x)$ 的极小值点.

3 解答题

1. **Solution.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp \left[\frac{1}{x} \ln \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp \left[\frac{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} - 1}{x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp \left[\frac{\frac{\ln(1+x)-x}{x}}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp \left[\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left[\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \right] = \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \right] \\ &= \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x}{x^2} \right] = e^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

2. **Solution.**

令 $F(x) = e^{\sqrt{x}} f(x)$, 由广义 L'Hospital 法则 ($\frac{*}{\infty}$ 型) 可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{e^{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F'(x)}{\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}} \\ &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} f(x) + e^{\sqrt{x}} f'(x)}{\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + 2\sqrt{x} f'(x)] = 2022. \end{aligned}$$

3. **Solution.**

若 $0 < \beta \leq 1$, $M_\beta = \sin \frac{\pi\beta}{2}$, 而 $m_\beta = 0$, 故 $\sin \frac{\pi\beta}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi\beta}{2} = \frac{\pi}{6}$, 即 $\beta = \frac{1}{3}$.

若 $\beta > 1$, $M_\beta = 1$, 而 $m_\beta = \lg \beta$, 故 $1 - \lg \beta = \frac{1}{2}$, 解得 $\beta = \sqrt{10}$.

综上, $\beta \in \left\{ \frac{1}{3}, \sqrt{10} \right\}$.

4. Proof.

(1) 令 $f(x) = 0$, 得 $\alpha = \frac{x}{e^x}$. 令 $g(x) = \frac{x}{e^x}$, 则 $g'(x) = \frac{1-x}{e^x}$.

故 $g(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 单调增, 在 $(1, +\infty)$ 单调减.

因为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, $g(1) = \frac{1}{e}$, 作图可得 $\alpha \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$.

(2) 由 $\frac{x_1}{e^{x_1}} = \frac{x_2}{e^{x_2}} = \alpha$ 可得

$$\ln \alpha = \ln x_1 - x_1 = \ln x_2 - x_2.$$

此即

$$\frac{x_2 - x_1}{\ln x_2 - \ln x_1} = 1.$$

由 A-L-G 不等式有

$$\frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{x_2 - x_1}{\ln x_2 - \ln x_1} = 1,$$

所以 $x_1 + x_2 > 2$. 不妨设 $x_2 > x_1$, 则 $|x_2 - x_1| = x_2 - x_1 = (x_2 - 1) + (1 - x_1)$. 而 $x_2 - 1 > 1 - x_1$,

下证

$$1 - x_1 > \sqrt{1 - e\alpha}.$$

上式即 $x_1^2 - 2x_1 > -\frac{ex_1}{e^{x_1}}$, 故即证 $2 - x_1 < e^{1-x_1}$, $x_1 \in (0, 1)$.

注意到

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > 1 + x, x > 0,$$

所以 $e^{1-x_1} > 2 - x_1$, 证毕!

CHAPTER 7

2021 年转专业考试真题

1 填空题

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \arctan\left(\frac{1}{k^2 + k + 1}\right) =$

2. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{f(x)}{\tan x}\right)}{2^x - 1} = 8$, 则极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} =$

3. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^4} + 2\sqrt[n]{n^2} - 3}{\sqrt[n]{n^2} - 3\sqrt[n]{n} + 2} =$

4. 设 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续且满足方程 $g(x) + g(y) = g\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$, 求 $g(x) =$

5. $x = a \cos t + b \sin t$, $y = a \sin t - b \cos t$, 则 $\frac{d^m x}{dt^m} \cdot \frac{d^n y}{dt^n} - \frac{d^n x}{dt^n} \cdot \frac{d^m y}{dt^m} =$

2 证明题

1. 设 $\{\theta_n\} \neq 0$, 且满足 $\theta_n^2 - \theta_{n-1} \cdot \theta_{n+1} = 1(n = 1, 2, 3 \dots)$, 证明: 存在一个实数 λ , 使得对所有 $n \geq 1$, 有 $\theta_{n+1} = \lambda \theta_n - \theta_{n-1}$.

2. 设 $f(x)$ 定义在 $x = 0$ 的某个邻域上, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\frac{x}{2})}{x} = 0$, 证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.

3. 已知函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内有二阶导数, $f(0) = f'(0) = 0$, $|f''(x)| \leq |f(x)| + |f'(x)|$, 证明: 存在 $\delta > 0$, 使得在 $(-\delta, \delta)$ 内 $f(x) \equiv 0$.

4. 设可微函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格单调减少, 如果当 $x \in (0, +\infty)$ 时 $0 < |f(x)| < |f'(x)|$ 成立, 证明:
当 $x \in (0, 1)$ 时, 必有 $xf(x) > \frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)$.

CHAPTER 8

2021 年转专业考试真题参考答案

1 填空题(每题 8 分, 共 48 分)

1. **Solution.** $\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} [\arctan(k+1) - \arctan k] = \lim_{n \rightarrow \infty} [\arctan(n+1) - \arctan 0] = \frac{\pi}{2}$$

2. **Solution.** $8 \ln 2$

上式易化为: $\frac{f(x)}{\ln 2 \cdot x^2} = 8$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 8 \ln 2$

3. **Solution.** -8

$$\sqrt[n]{n} = t \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty), \text{ 原式} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^4 + 2t^2 - 3}{t^2 - 3t + 2} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t^2 - 1)(t^2 + 3)}{(t - 1)(t - 2)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t + 1)(t^2 + 3)}{t - 2} = -8$$

4. **Solution.** $g(x) = g(1)x^2$

由 $g(x) + g(y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$, 令 $x = y = 0$, 可得 $g(0) = 0$ 再令 $y = 0$, 可得 $g(x) = g(|x|)$ 可得偶函数.

下面考虑 $x, y > 0$ 的情况:

$$g(\sqrt{x^2}) + g(\sqrt{y^2}) = g(\sqrt{x^2 + y^2}), \text{ 令 } h(x) = g(\sqrt{x})(x > 0)$$

$$h(x^2) + h(y^2) = h(x^2 + y^2), \text{ 令 } x' = x^2, y' = y^2$$

则 $h(x') + h(y') = h(x' + y') \rightarrow h(x') = kx'$, 即 $h(x) = kx$.

$$g(\sqrt{x}) = kx \rightarrow g(x) = kx^2 (x > 0).$$

由偶函数可知, $g(x) = kx^2 (x \in \mathbb{R})$. 其中 $k = g(1)$.

5. **Solution.** $(a^2 + b^2) \sin \frac{n-m}{2}\pi$

$$\text{令 } x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos t + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin t \right) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(t - \alpha),$$

$$\text{同理令 } y = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin t - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos t \right) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(t - \alpha).$$

用 Leibniz 公式可得答案: $(a^2 + b^2) \sin \frac{n-m}{2}\pi$.

2 证明题(9 分)

1. **Proof.** 由题 $\theta_{n+1}^2 - \theta_n \cdot \theta_{n+2} = 1$, $\theta_n^2 - \theta_{n-1} \cdot \theta_{n+1} = 1$,

相减得 $\theta_{n+1}^2 + \theta_{n-1} \cdot \theta_{n+1} - \theta_n^2 - \theta_n \cdot \theta_{n+2} = 0$, 即 $\theta_{n+1}(\theta_{n-1} + \theta_{n+1}) = \theta_n(\theta_n + \theta_{n+2})$.

所以 $\frac{\theta_{n+2} + \theta_n}{\theta_{n+1}} = \frac{\theta_{n+1} + \theta_{n-1}}{\theta_n} = \lambda = \frac{\theta_2 + \theta_0}{\theta_1}$.

2. **Proof.** 已知 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x| < \delta$ 时, 有

$$\left| \frac{f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)}{x} \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

亦即

$$-\frac{\varepsilon}{3}|x| < f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) < \frac{\varepsilon}{3}|x|.$$

将 x 替换为 $\frac{x}{2^k}$, 得

$$-\frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{1}{2^k}|x| < f\left(\frac{x}{2^k}\right) - f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) < \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{1}{2^k}|x| (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

相加 (注意到 $\sum_{k=0}^n \left[f\left(\frac{x}{2^k}\right) - f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) \right] = f(x) - f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$) 得

$$-\frac{\varepsilon}{3} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}|x| < f(x) - f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) < \frac{\varepsilon}{3} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}|x|.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 注意到 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = 2$, 得

$$-\frac{2\varepsilon}{3}|x| \leq f(x) \leq \frac{2\varepsilon}{3}|x|.$$

故 $\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$, 因此 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x)}{x} \right| = 0$.

3. **Proof.**

(法一) 考察区间 $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ 上的函数 $|f(x)| + |f'(x)|$, 并假定它在 $x_0 \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ 处取到最大值 M .

$f(x_0) = f''(\xi_0)\frac{x_0^2}{2}$, $f'(x_0) = f''(\eta_0)x_0$, 其中 ξ_0, η_0 位于 x_0 和 0 之间. 从而有

$$\begin{aligned} M &= |f(x_0)| + |f'(x_0)| = |f''(\xi_0)|\frac{x_0^2}{2} + |f''(\eta_0)x_0| \\ &\leq \frac{|f''(\xi_0)| + |f''(\eta_0)|}{4} \\ &\leq \frac{|f(\xi_0)| + |f'(\xi_0)| + |f(\eta_0)| + |f'(\eta_0)|}{4} \\ &\leq \frac{M}{2} \end{aligned}$$

故 $M = 0$, 得证.

(法二) 令 $\delta = \frac{1}{2}$; 对于 $f(x)$, 定义在 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 区间, 并且具有连续的各种派生物

可知: 存在 $M_1, M_2 > 0$, 使得

$$|f(x)| < M_1, |f'(x)| < M_2, |f''(x)| < |f(x)| + |f'(x)| < M_1 + M_2$$

因此 $|f''(x)|$ 有上界.

由条件得到: 存在 $x_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, 使得 $|f''(x_1)| > S - \varepsilon$, ($\forall \varepsilon > 0$).

于是利用泰勒展开 $S > 0$ 不成立: 选择 $S > 0$, 设 $\varepsilon = \frac{1}{8}S > 0$, 则

$$|f''(x_1)| > \frac{7}{8}S$$

则

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2, \xi \in (0, x), f'(x_1) = f'(0) + x_1f''(\eta), \eta \in (0, x),$$

故

$$\left| \frac{7}{8}S \right| \leq |f''(x_1)| \leq |f(x_1)| + |f'(x_1)| \leq \frac{1}{2}|f''(\xi)|x_1^2 + |x_1||f''(\eta)| \leq \frac{5}{8}S < S$$

矛盾!

因此, 不可能, 有结果: $S = 0$.

$$\text{因此 } f''(x) = 0; f'(x) = 0; f(x) = f(0) = 0, x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

错解: 考虑区间 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, 在该区间上有 $|f''(x)| \leq |f(x)| + |f'(x)|, x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$,

则

$$|f'(x)| = \left| \int_0^x f''(t) dt \right| \leq \int_0^x |f''(t)| dt \leq \int_0^x (|f(t)| + |f'(t)|) dt$$

$$\text{又因 } |f(x)| = \left| \int_0^x f'(t) dt \right| \leq \int_0^x |f'(t)| dt$$

$$\begin{aligned} \int_0^x |f'(t)| dt &\leq |f(\theta)|x + \int_0^x |f'(t)| dt \quad (\text{积分中值定理}) \\ &= x \int_0^\theta |f'(t)| dt + \int_0^x |f'(t)| dt \\ &\leq x \int_0^x |f'(t)| dt + \int_0^x |f'(t)| dt \\ &= (x+1) \int_0^x |f'(t)| dt \end{aligned}$$

记 $f'(x)$ 在 $(0, x)$ 上最大值点为 ϵ , 则

$$|f'(\epsilon)| \leq (\epsilon+1) \int_0^\epsilon |f'(t)| dt \leq (\epsilon+1)\epsilon |f'(\epsilon)| \leq \frac{3}{4} |f'(\epsilon)|$$

从而 $|f'(\epsilon)| = 0, f'(\epsilon) = 0, x \in \left(0, \frac{1}{2}\right), f(x) = 0$, 同理可将此情况推广到 $(-1, 1)$ 上.

错误原因在于使用牛顿-莱布尼茨公式时要求 $f''(t)$ 在 $t \in (0, x)$ 上连续, 此处由已知条件无法得出.

4. Proof. 首先我们给出 $f(x) < 0$ 的证明, (由介值定理, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上不变号)

$$g(x) \triangleq xf(x) - \frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right), g'(x) = xf'(x) + f(x) + \frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^3}f'\left(\frac{1}{x}\right) < 0$$

$g(x) > g(1) = 0$, 原命题成立.

下面给出 $f(x) > 0$ 的证明:

$$\Leftrightarrow \text{Proof: } x \in (0, 1), \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{f(x)} < x^2 \text{ 或 } \ln \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{f(x)} < 2 \ln x.$$

因为 $f(x)$ 严格递减, $f'(x) < 0$, 有 $f'\left(\frac{1}{x}\right) = -|f'(x)|$,

$$\ln \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{f(x)} = \ln f\left(\frac{1}{x}\right) - \ln f(x) \stackrel{\text{Lagrange 定理}}{=} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} \left(\frac{1}{x} - x\right)$$

注意到

$$0 < f(x) < |f'(\xi)| = -f'(\xi), \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} < -1, \frac{1}{x} - x > 0 (0 < x < 1)$$

接下来只需证: $\frac{-1}{x} < 2 \ln x (0 < x < 1)$. 【求导, 显然】

$$\text{故 } \ln \frac{f(\frac{1}{x})}{f(x)} < x - \frac{1}{x} < 2 \ln x (0 < x < 1).$$

错解: 由题可知, $f'(x) < 0, 0 < f(x) < -f'(x)$, 故 $\frac{-f'(x)}{f(x)} > 1$, 所以

$$\ln \frac{f(x)}{f(\frac{1}{x})} = - \int_x^{\frac{1}{x}} \frac{f'(t)}{f(t)} dt > \int_x^{\frac{1}{x}} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{x} - x, x \in (0, 1)$$

故 $\frac{f(x)}{f(\frac{1}{x})} > e^{\frac{1}{x}-x}$, 又 $e^{\frac{1}{x}-x} > \frac{1}{x^2}$
可得

$$x \cdot f(x) > \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right), x \in (0, 1).$$

错误原因在于使用牛顿-莱布尼茨公式时要求 $\frac{f'(t)}{f(t)}$ 在 $t \in \left(x, \frac{1}{x}\right)$ 上连续, 此处由已知条件无法得出.

CHAPTER 9

2020 年转专业考试真题

1 解答题

1. 设 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的有界实函数, 且 $f\left(x + \frac{1}{11}\right) + f\left(x + \frac{1}{12}\right) = f(x) + f\left(x + \frac{23}{132}\right)$ ($\forall x \in R$),
求证: $f(x)$ 是周期函数.

2. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i = A$, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(a_n - a_{n-1}) = 0$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

3. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{3}} \left[(x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}} \right]$.

4. 求在 \mathbf{R} 上满足方程 $f(2020x) + f(2019x) = 2022x + 2021$ 的连续解.

5. 讨论 $f(x) = [x] \sin \pi x$ 的连续性与可导性 ($[x]$ 表示不超过 x 的最大整数)

6. 计算 $\frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{x^2 + a^2} \right) \Big|_{x=0}$, 其中 n 是任意正整数.

(注: 原题没有 $x = 0$, 但那样无法正常求解, 怀疑打印错误, 此处加上, 后会附上不考虑此条件的解法)

7. 设 $f(x) \in C[0, 1] \cap D(0, 1)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, 求证: 在 $(0, 1)$ 内存在不同的 ξ, η , 使 $f'(\xi)f'(\eta) = 1$.

8. 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x + \frac{f(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = e^3$, 证明: $f''(0) = 4$.

CHAPTER 10

2020 年转专业考试真题参考答案

1 解答题

1. **Proof.** 设 $F(x) = f\left(x + \frac{1}{11}\right) - f(x)$, 则 $F\left(x + \frac{1}{12}\right) = F(x)$, 故 $F(x)$ 以 $\frac{1}{12}$ 为周期, 也以 1 为周期,
 $\therefore F(x+1) = F(x)$, 即 $f\left(x + \frac{1}{11}\right) - f(x) = f\left(x + \frac{12}{11}\right) - f(x+1)$
 $f(x+1) - f(x) = f\left(x + \frac{12}{11}\right) - f\left(x + \frac{1}{11}\right)$, $f(x+1) - f(x)$ 以 $\frac{1}{11}$ 为周期, 也以 1 为周期, 可得
 $f(x+n) - f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} [f(x+i+1) - f(x+i)] = (n-1)[f(x+1) - f(x)]$
 $f(x+1) - f(x) = \frac{f(x+n) - f(x)}{n-1}$, 令 $n \rightarrow \infty$, $\because f(x)$ 有界, $\therefore f(x+1) - f(x) = 0$
 $\therefore f(x)$ 以 1 为周期

2. **Solution.** 由 Abel 变换注意到

$$S_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} a_i = na_n - \sum_{i=2}^n i(a_i - a_{i-1}) - a_1$$

则有

$$a_n = \frac{S_{n-1}}{n} + \frac{\sum_{i=2}^n i(a_i - a_{i-1}) + a_1}{n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n-1}}{n-1} = A$$

由 Stolz 定理:

$$\frac{\sum_{i=2}^n i(a_i - a_{i-1}) + a_1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - a_{n-1}) = 0, \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$$

3. **Solution.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[1 + \frac{2}{3x} - \left(1 - \frac{2}{3x}\right) + o\left(\frac{1}{x}\right) \right] = \frac{4}{3}$.

4. **Solution.** 不妨考虑一般情况: $f(\alpha x) + f(\beta x) = ax + b (\alpha > \beta)$.

上式即 $f(x) + f\left(\frac{\beta}{\alpha}x\right) = \frac{ax}{\alpha} + b$.

所以

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{ax}{\alpha} + b - f\left(\frac{\beta}{\alpha}x\right) \\ &= \frac{ax}{\alpha} + b - \left[\frac{ax}{\alpha}\frac{\beta}{\alpha} + b - f\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}x\right)\right] \\ &= \frac{ax}{\alpha}\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) + f\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}x\right) \end{aligned}$$

利用上式迭代可得

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{ax}{\alpha}\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) + \frac{ax}{\alpha}\frac{\beta^2}{\alpha^2}\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) + f\left(\frac{\beta^4}{\alpha^4}x\right) \\ &= \frac{ax}{\alpha}\left(1 - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} - \frac{\beta^3}{\alpha^3}\right) + f\left(\frac{\beta^4}{\alpha^4}x\right) \\ &= \cdots = \frac{ax}{\alpha}\left(1 - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} - \cdots - \frac{\beta^{2n-1}}{\alpha^{2n-1}}\right) + f\left(\frac{\beta^{2n}}{\alpha^{2n}}x\right). \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow \infty$, 因 $\frac{\beta}{\alpha} < 1$, 故 $\frac{\beta^{2n}}{\alpha^{2n}} \rightarrow 0$, 且 $1 - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} - \cdots - \frac{\beta^{2n-1}}{\alpha^{2n-1}} \rightarrow \frac{1}{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$, 所以

$$f(x) = \frac{ax}{\alpha} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} + f(0) = \frac{ax}{\alpha + \beta} + \frac{b}{2}.$$

将 $\alpha = 2020$, $\beta = 2019$, $a = 2022$, $b = 2021$ 带入, 立得 $f(x) = \frac{2022}{4039}x + \frac{2021}{2}$.

5. Solution.

(1) 连续性: 对任意非整数点 $x \notin \mathbb{Z}$, $[x]$ 在该点的某邻域内取常值, $\sin \pi x$ 连续, 故 $f(x) = [x] \sin \pi x$ 在非整数点连续. 对任意整数点 $n \in \mathbb{Z}$, 有

$$f(n) = n \sin(n\pi) = 0.$$

但当 $x \rightarrow n^-$ 时,

$$[x] = n - 1, \quad \sin \pi x \rightarrow \sin(n\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \rightarrow (n - 1) \cdot 0 = 0,$$

当 $x \rightarrow n^+$ 时,

$$[x] = n, \quad \sin \pi x \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \rightarrow n \cdot 0 = 0.$$

因此左右极限均等于 $f(n)$, 故在整数点亦连续. 综上, f 在 \mathbb{R} 上处处连续.

(2) 可导性: 对非整数点 $x \notin \mathbb{Z}$, $[x] = k$ 为常数, 则

$$f(x) = k \sin \pi x, \quad f'(x) = k\pi \cos \pi x$$

存在, 故在非整数点可导. 考察整数点 $x = n$ 处左右导数: 令 $h \rightarrow 0^-$, 则

$$f(n + h) = (n - 1) \sin(\pi(n + h)) = (n - 1)(-1)^n \sin(\pi h),$$

$$\frac{f(n + h) - f(n)}{h} = (n - 1)(-1)^n \frac{\sin(\pi h)}{h} \rightarrow (n - 1)(-1)^n \pi.$$

令 $h \rightarrow 0^+$, 则

$$f(n + h) = n \sin(\pi(n + h)) = n(-1)^n \sin(\pi h),$$

$$\frac{f(n+h) - f(n)}{h} = n(-1)^n \frac{\sin(\pi h)}{h} \rightarrow n(-1)^n \pi.$$

左右导数不相等，故 f 在整数点不可导。

结论： f 在 \mathbb{R} 上处处连续，但仅在 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ 上可导，在整数点不可导。

6. Solution.

(法一) 由泰勒公式

$$\frac{1}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a^2} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x^2}{a^2} \right)^n = \frac{1}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{a^{2n}}.$$

再由泰勒展开的唯一性，故当 n 为奇数， $\frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{x^2 + a^2} \right) \Big|_{x=0} = 0$ 。

当 n 为偶数， $\frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{x^2 + a^2} \right) \Big|_{x=0} = \frac{(-1)^{n/2} (n!)}{a^{n+2}}$ 。

(法二) $(a^2 + x^2)y = 1$ ，由 Leibniz 公式，

$$(x^2 + a^2)y^{(n)} + 2nxy^{(n-1)} + n(n-1)y^{(n-2)} = 0$$

$x = 0, a^2y^{(n)} + n(n-1)y^{(n-2)} = 0$ ，由递推可得答案。

当 $x \neq 0$ 时，此时只能引入复数： $\frac{1}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2ai} \left(\frac{1}{x - ai} - \frac{1}{x + ai} \right)$

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{x^2 + a^2} \right) &= \frac{1}{2ai} \left(\frac{1}{x - ai} - \frac{1}{x + ai} \right)^{(n)} \\ &= \frac{(-1)^n n!}{2ai} \left[\frac{1}{(x - ai)^{n+1}} - \frac{1}{(x + ai)^{n+1}} \right] \\ &= \frac{(-1)^n n!}{2ai} \frac{(x + ai)^{n+1} - (x - ai)^{n+1}}{(x^2 + a^2)^{n+1}} \end{aligned}$$

考虑： $x + ai = \sqrt{a^2 + x^2} \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{ai}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right)$ ， $r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$ ， $\sin \theta = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

$$\Rightarrow (x \pm ai)^{n+1} = r^{n+1} e^{\pm i(n+1)\theta}$$

$$\Rightarrow (x + ai)^{n+1} - (x - ai)^{n+1} = r^{n+1} \left[e^{i(n+1)\theta} - e^{-i(n+1)\theta} \right] = \frac{r^{n+1} \sin(n+1)\theta}{a}$$

$$\Rightarrow (x + ai)^{n+1} - (x - ai)^{n+1} = r^{n+1} \left[e^{i(n+1)\theta} - e^{-i(n+1)\theta} \right] = \frac{r^{n+1} \sin(n+1)\theta}{a}$$

$$\Rightarrow (x + ai)^{n+1} - (x - ai)^{n+1} = r^{n+1} \left[e^{i(n+1)\theta} - e^{-i(n+1)\theta} \right] = \frac{r^{n+1} \sin(n+1)\theta}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{x^2 + a^2} \right) = \frac{(-1)^n n!}{a} \frac{\sin(n+1)\theta}{[\sqrt{a^2 + x^2}]^{n+1}}$$

7. Proof. 令

$$g(a) = f(a) + a - 1.$$

由于

$$g(0) = f(0) + 0 - 1 = -1 < 0, \quad g(1) = f(1) + 1 - 1 = 1 > 0,$$

由连续性知 $\exists c \in (0, 1)$ 使 $g(c) = 0$ ，即

$$f(c) = 1 - c.$$

在区间 $[0, c]$ 上, 拉格朗日中值定理给出 $\exists \eta \in (0, c)$ 使

$$f'(\eta) = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = \frac{1 - c}{c}.$$

在区间 $[c, 1]$ 上, 拉格朗日中值定理给出 $\exists \xi \in (c, 1)$ 使

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(c)}{1 - c} = \frac{c}{1 - c}.$$

故

$$f'(\xi) f'(\eta) = \frac{c}{1 - c} \cdot \frac{1 - c}{c} = 1,$$

且 $\xi \neq \eta$, 完成证明.

8. Proof.

由于极限存在且为 $e^3 > 0$, 考虑

$$A(x) = 1 + x + \frac{f(x)}{x}.$$

因为 f 在 0 处二阶可导, 记

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2).$$

于是

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(0)}{x} + f'(0) + \frac{f''(0)}{2}x + o(x).$$

为使 $A(x)$ 在 $x \rightarrow 0$ 时不发散, 必有 $f(0) = 0$. 令此时

$$A(x) = 1 + f'(0) + x\left(1 + \frac{f''(0)}{2}\right) + o(x).$$

又因

$$\lim_{x \rightarrow 0} A(x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln A(x)}{x}\right) = e^3,$$

若 $1 + f'(0) \neq 1$, 则 $\ln A(x)$ 在 $x \rightarrow 0$ 有非零常数项, 导致 $\frac{\ln A(x)}{x}$ 发散, 矛盾. 故

$$f'(0) = 0,$$

此时

$$A(x) = 1 + x\left(1 + \frac{f''(0)}{2}\right) + o(x), \quad \ln A(x) = x\left(1 + \frac{f''(0)}{2}\right) + o(x).$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln A(x)}{x} = 1 + \frac{f''(0)}{2} = 3,$$

解得

$$f''(0) = 4.$$

CHAPTER 11

2019 年转专业考试真题

1 解答题

1. 设函数 $y = f(x), x \in (-\infty, +\infty)$ 的图像关于 $x = 2019, x = 2020$ 均对称, 请判断函数 $y = f(x)$ 是什么性质的函数, 并说明你的判断.
2. 设 $a_n > 0, b_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) > 0$, 证明: 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$ 存在.
3. 计算不定积分: (1) $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1} dx$ (2) $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx$

4. (1) 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值, $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$. 证明: $\exists \xi \in (a, b)$ 使得 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明: $\exists \alpha \in (a, b)$, 使得 $f'(\alpha) + \alpha f(\alpha) = 0$.

5. 设 $n \in \mathbf{N}^*$, $f(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}$, 计算 $f(1), f(-1)$.

6. $f(x)$ 有连续导数且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f'(x)}{1 - e^{-x}} = 1$, 问 $f(0)$ 为何值时, $f(0)$ 为 $f(x)$ 的极值, 并说明它是极大值还是极小值.

7. 设 $f(x) : I \rightarrow R$ 是任一函数, $x_0 \in I$, 证明: $f(x)$ 在 x_0 处可导的充要条件是: 存在一个函数 $g(x) : I \rightarrow R$, 使:

(1) $f(x) - f(x_0) = g(x)(x - x_0), \forall x \in I$.

(2) $g(x)$ 在 x_0 处连续且 $g'(x_0) = g(x_0)$.

CHAPTER 12

2019 年转专业考试真题参考答案

1 解答题

1. **Solution.** $f(x)$ 是周期函数, 周期 $T = 2$.

利用图像关于 $x = 2019$ 和 $x = 2020$ 的对称性可得:

$$f(2019 + t) = f(2019 - t) \Rightarrow f(x) = f(2 \cdot 2019 - x),$$

$$f(2020 + t) = f(2020 - t) \Rightarrow f(x) = f(2 \cdot 2020 - x).$$

因此对于任意 x ,

$$f(x) = f(2 \cdot 2020 - (2 \cdot 2019 - x)) = f(x + 2),$$

即 $f(x)$ 具有周期 2.

2. **Proof.** 由条件

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1} b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) = L > 0,$$

取常数 δ 满足 $0 < \delta < \frac{L}{2}$, 则存在 $N \in \mathbb{N}$, 当 $n \geq N$ 时有

$$\frac{a_n}{a_{n+1} b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} > \delta \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} > \delta a_{n+1},$$

即

$$a_{n+1} < \frac{1}{\delta} \left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right).$$

对 $n = N, N + 1, \dots, m$ 累加, 得

$$\sum_{n=N}^m a_{n+1} < \frac{1}{\delta} \sum_{n=N}^m \left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right) = \frac{1}{\delta} \left(\frac{a_N}{b_N} - \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}} \right) \leq \frac{a_N}{\delta b_N}.$$

因此 $\sum_{k=1}^n a_k$ 的部分和有上界, 故 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛.

3. **Solution.(1)** 令

$$t = x - \frac{1}{x}, \quad dt = \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) dx.$$

注意到

$$x^4 - x^2 + 1 = x^2 \left((x - \frac{1}{x})^2 + 1 \right) = x^2(t^2 + 1),$$

于是

$$\frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1} dx = \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{t^2 + 1} dt = \frac{dt}{t^2 + 1}.$$

故

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1} dx = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \arctan t + C = \arctan\left(x - \frac{1}{x}\right) + C.$$

(2) 令

$$t = \sqrt{e^x - 1}, \quad e^x = t^2 + 1, \quad x = \ln(t^2 + 1), \quad dt = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} dx = \frac{t}{2} dx \Rightarrow e^x dx = 2t dt.$$

则

$$\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx = \int \frac{x(2t dt)}{t} = 2 \int x dt = 2 \int \ln(t^2 + 1) dt.$$

对 $\int \ln(t^2 + 1) dt$ 分部积分,

$$\int \ln(t^2 + 1) dt = t \ln(t^2 + 1) - \int \frac{2t^2}{t^2 + 1} dt = t \ln(t^2 + 1) - 2 \int \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1}\right) dt = t \ln(t^2 + 1) - 2t + 2 \arctan t + C.$$

因此

$$2 \int \ln(t^2 + 1) dt = 2t \ln(t^2 + 1) - 4t + 4 \arctan t + C.$$

回代 $t = \sqrt{e^x - 1}$, 得

$$\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx = 2\sqrt{e^x - 1} \ln(e^x) - 4\sqrt{e^x - 1} + 4 \arctan\sqrt{e^x - 1} + C = 2x\sqrt{e^x - 1} - 4\sqrt{e^x - 1} + 4 \arctan\sqrt{e^x - 1} + C.$$

4. Proof.

(1) 令

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

由题意知

$$h(a) = f(a) - g(a) = 0, \quad h(b) = f(b) - g(b) = 0,$$

且 f, g 在 (a, b) 上有相等的最大值, 设 $x_0 \in (a, b)$ 为一极大点, 则

$$f(x_0) = g(x_0),$$

亦即

$$h(x_0) = 0.$$

于是 h 在 $[a, b]$ 上至少有三个零点 $x = a < x_0 < b$. 由 Rolle 定理, 分别在 (a, x_0) 与 (x_0, b) 上存在

$$x_1 \in (a, x_0), \quad x_2 \in (x_0, b), \quad h'(x_1) = 0, \quad h'(x_2) = 0.$$

再对区间 $[x_1, x_2]$ 再次应用 Rolle 定理, 得 $\exists \xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$ 使

$$h''(\xi) = 0.$$

而

$$h''(\xi) = f''(\xi) - g''(\xi),$$

故

$$f''(\xi) = g''(\xi).$$

(2) 令

$$H(x) = e^{\frac{x^2}{2}} f(x).$$

则

$$H(a) = e^{\frac{a^2}{2}} f(a) = 0, \quad H(b) = e^{\frac{b^2}{2}} f(b) = 0.$$

由 Rolle 定理, $\exists \alpha \in (a, b)$ 使

$$H'(\alpha) = 0.$$

而

$$H'(x) = \frac{d}{dx} \left(e^{\frac{x^2}{2}} \right) f(x) + e^{\frac{x^2}{2}} f'(x) = e^{\frac{x^2}{2}} (xf(x) + f'(x)).$$

故在 $x = \alpha$ 处

$$xf(x) + f'(x) \Big|_{x=\alpha} = 0 \Rightarrow f'(\alpha) + \alpha f(\alpha) = 0.$$

5. Solution. 记

$$u(x) = (x - 1)^n, \quad v(x) = (x + 1)^n,$$

则

$$(x^2 - 1)^n = u(x)v(x).$$

由 Leibniz 公式

$$\frac{d^n}{dx^n} [u(x)v(x)] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x).$$

注意到

$$u^{(k)}(1) = \begin{cases} 0, & k < n, \\ n!, & k = n. \end{cases}$$

所以

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \Big|_{x=1} = \binom{n}{n} u^{(n)}(1) v^{(0)}(1) = n! 2^n.$$

因此

$$f(1) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \Big|_{x=1} = 1.$$

类似地, 在 $x = -1$ 处

$$v^{(k)}(-1) = \begin{cases} 0, & k < n, \\ n!, & k = n. \end{cases}$$

所以

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \Big|_{x=-1} = \binom{n}{0} u^{(0)}(-1) v^{(n)}(-1) = (-1)^n n! 2^n.$$

因此

$$f(-1) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \Big|_{x=-1} = (-1)^n.$$

6. Solution. 由

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f'(x)}{1 - e^{-x}} = 1,$$

以及 $1 - e^{-x} \sim x$ (当 $x \rightarrow 0$) 可知分子也必须与 x 同阶, 于是

$$f(0) + f'(0) = 0.$$

要使 $x = 0$ 成为极值点, 需 $f'(0) = 0$, 故

$$f(0) = 0.$$

下面判断极值的性质. 令

$$g(x) = e^x f(x).$$

则

$$g'(x) = e^x (f(x) + f'(x)),$$

且由题中极限不等式的符号保持性可见, 当 $x > 0$ 近 0 时 $g'(x) > 0$, 当 $x < 0$ 近 0 时 $g'(x) < 0$. 故 g 在 0 处由减变增, 取得极小值. 由于 $e^x > 0$, g 和 f 在极值点的凹凸性一致, 因此 f 在 $x = 0$ 也取得极小值.

7. Proof 答案是肯定的.

必要性: 假设 f 在 x_0 处可导, 记 $f'(x_0) = A$. 定义

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, & x \neq x_0, \\ A, & x = x_0. \end{cases}$$

则对一切 $x \in I$ 都有

$$f(x) - f(x_0) = g(x)(x - x_0),$$

即满足 (1). 又

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = A = g(x_0),$$

故 g 在 x_0 处连续, 且 $g(x_0) = f'(x_0)$, 满足 (2).

充分性: 反过来, 若存在满足 (1)(2) 的函数 g , 则

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g(x) \quad (x \neq x_0),$$

两端令 $x \rightarrow x_0$, 由 g 在 x_0 连续得

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0).$$

因此 f 在 x_0 处可导, 且

$$f'(x_0) = g(x_0).$$

这就完成了充要性证明.

CHAPTER 13

2018 年转专业考试真题

1 解答题

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + b^n + 2^{-n}b^{2n})^{\frac{1}{n}} (b > 0)$

2. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}$

3. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \arctan \frac{2}{k^2}$

4. 已知 $f(x), g(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的非常值连续可微函数, $f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$, $g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$, 且 $f'(0) = 0$, 求证: $f(x)^2 + g(x)^2 = 1$.

5. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微, 试证: $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续的充要条件是: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |h| < \delta, \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < \varepsilon$, 对一切 $x \in [a, b]$ 成立.

6. 设 $f_n(x) = \cos x + \cos^2 x + \cdots + \cos^n x$, 求证:

(1) 对任意自然数 n , 方程 $f_n(x) = 1$ 在 $[0, \frac{\pi}{3}]$ 内有唯一根

(2) 设 $x_n \in [0, \frac{\pi}{3}]$ 是 $f_n(x) = 1$ 的根, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\pi}{3}$.

CHAPTER 14

2018 年转专业考试真题参考答案

1 填空题(每题 8 分, 共 48 分)

1. **Solution.** $\begin{cases} 1, & 0 < b < 1, \\ b, & 1 \leq b \leq 2, \\ \frac{b^2}{2}, & b \geq 2. \end{cases}$

写成

$$L_n = \left(1 + b^n + \left(\frac{b^2}{2}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}, \quad a_1 = 1, a_2 = b, a_3 = \frac{b^2}{2}.$$

注意到 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} = \max\{a, b, c\}$

case 1: 若 $0 < b < 1$, $\max\{1, b, b^2/2\} = 1$, 故 $\lim L_n = 1$.

case 2: 若 $1 \leq b < 2$, $\max\{1, b, b^2/2\} = b$, 于是

$$L_n = b \left(1 + b^{-n} + \left(\frac{b}{2}\right)^{-n}\right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b.$$

case 3: 若 $b > 2$, $\max\{1, b, b^2/2\} = b^2/2$, 从而

$$L_n = \frac{b^2}{2} \left(1 + \left(\frac{2}{b^2}\right)^n + \left(\frac{2}{b}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{b^2}{2}.$$

在边界点 $b = 1$ 与 $b = 2$, 两种取法给出的极限均为 1 与 2, 故结论保持一致.

2. **Solution.** $e^{-\frac{1}{2}}$.

利用泰勒公式 $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ ($t \rightarrow 0$), 令 $t = \sqrt{x}$, 得

$$\cos \sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x).$$

故

$$\begin{aligned} \ln \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}} &= \frac{1}{x} \ln(\cos \sqrt{x}) = \frac{1}{x} \ln \left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right) \\ &= \frac{1}{x} \left(-\frac{x}{2} + o(x)\right) = -\frac{1}{2} + o(1). \end{aligned}$$

两边取指数得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

3. Solution. $\frac{3\pi}{4}$.

利用反正切差角公式

$$\begin{aligned} \arctan x - \arctan y &= \arctan \frac{x-y}{1+xy}, \quad x = \frac{1}{k-1}, \quad y = \frac{1}{k+1}, \\ \Rightarrow \arctan \frac{2}{k^2} &= \arctan \frac{\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}}{1 + \frac{1}{(k-1)(k+1)}} = \arctan \frac{1}{k-1} - \arctan \frac{1}{k+1}. \end{aligned}$$

对 $k = 1, 2, \dots, n$ 累加并对 n 取极限

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \arctan \frac{2}{k^2} &= \arctan 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \left(\arctan \frac{1}{k-1} - \arctan \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \arctan 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\arctan 1 + \arctan \frac{1}{2} - \arctan \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

4. Proof.

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y), \\ g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y), \end{cases}$$

令 $y = 0$, 得

$$f(x) = f(x)f(0) - g(x)g(0),$$

$$g(x) = f(x)g(0) + g(x)f(0).$$

于是

$$f(x) + g(x) = f(x)(f(0) + g(0)) + g(x)(f(0) - g(0)),$$

即

$$f(x)(1 - f(0) - g(0)) = g(x)(f(0) - g(0) - 1).$$

由于 f, g 非常值函数, 故

$$f(0) + g(0) = 1, \quad f(0) - g(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad f(0) = 1, \quad g(0) = 0.$$

接下来,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)(f(t) - f(0))}{t} - \frac{g(x)(g(t) - g(0))}{t} \right) = -g'(0)g(x), \\ g'(x) &= g'(0)f(x). \end{aligned}$$

故

$$(f^2(x) + g^2(x))' = 2f f' + 2g g' = 0 \quad \Rightarrow \quad f^2(x) + g^2(x) = C.$$

又 $f^2(0) + g^2(0) = 1$, 故

$$f^2(x) + g^2(x) = 1.$$

5. Proof.

必要性. 设 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续. 由于 $[a, b]$ 紧, f' 在 $[a, b]$ 上一致连续. 于是, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x', x \in [a, b]$ 且 $|x' - x| < \delta$ 时有

$$|f'(x') - f'(x)| < \varepsilon.$$

对任意 $x \in [a, b]$ 及 $0 < |h| < \delta$, 由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (x, x+h)$ (或 $(x+h, x)$), 使得

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(\xi).$$

因为 $|\xi - x| < |h| < \delta$, 故

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| = |f'(\xi) - f'(x)| < \varepsilon.$$

充分性. 反过来, 假设对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |h| < \delta$ 且 $x \in [a, b]$ 时都有

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < \varepsilon.$$

任取 $x_0 \in [a, b]$, 并取同样的 $\delta > 0$. 对于 $0 < |h| < \delta$ 且 $x_0 + h \in [a, b]$, 有

$$\begin{aligned} |f'(x_0 + h) - f'(x_0)| &\leq \left| f'(x_0 + h) - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right| + \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon, \end{aligned}$$

其中第一项应用了在点 $x = x_0 + h$ 处对增量 $-h$ 的假设条件. 由此可见

$$\lim_{h \rightarrow 0} f'(x_0 + h) = f'(x_0),$$

即 f' 在任意 $x_0 \in [a, b]$ 处连续, 故 f' 在 $[a, b]$ 上连续.

6. Proof.

(1) 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 计算

$$f'_n(x) = \sum_{k=1}^n k \cos^{k-1} x (-\sin x) = -\sin x \sum_{k=1}^n k \cos^{k-1} x < 0, \quad x \in (0, \frac{\pi}{3}).$$

故 f_n 在 $[0, \frac{\pi}{3}]$ 上严格单调递减. 又

$$f_n(0) = n > 1, \quad f_n\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1.$$

由介值定理可知方程 $f_n(x) = 1$ 在 $[0, \frac{\pi}{3}]$ 内恰有一根, 且因严格单调, 此根唯一.

(2) 利用等比数列求和,

$$f_n(x) = \cos x + \cos^2 x + \cdots + \cos^n x = \frac{\cos x (1 - \cos^n x)}{1 - \cos x}.$$

令 $x = x_n$ 满足 $f_n(x_n) = 1$, 则

$$\cos x_n (1 - \cos^n x_n) = 1 - \cos x_n \implies \cos^{n+1} x_n = 2 \cos x_n - 1.$$

由于 $x_n \in [0, \frac{\pi}{3}]$, 有 $1/2 < \cos x_n < 1$, 故当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$\cos^{n+1} x_n \rightarrow 0,$$

从而 $2 \cos x_n - 1 \rightarrow 0 \Rightarrow \cos x_n \rightarrow \frac{1}{2} \Rightarrow x_n \rightarrow \frac{\pi}{3}$. 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\pi}{3}$.

CHAPTER 15

2017 年转专业考试真题

1 解答题

1. 证明数列 $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \dots$ 存在极限 (不可用单调有界必有极限的结论来证), 且求出该极限.

2. 给定一个数列 $\{x_n\} (n = 1, 2, \dots)$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_{n-2}) = 0$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_n - x_{n-1})}{n} = 0$.

3. 设 $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0 \\ f'(0), & x = 0 \end{cases}$, $f(0) = 0, f(x)$ 在 \mathbf{R} 上存在二阶导数, 问 $g(x)$ 在 \mathbf{R} 上是否存在连续导数, 存在请证明, 不存在请说明理由.

4. 设 $f(x) : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{R}$ 是任一函数, $x_0 \in \mathbf{I}$, 证明: $f(x)$ 在 x_0 处可导的充要条件是: 存在一个函数 $g(x) : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{R}$, 使:

- (1) $f(x) - f(x_0) = g(x)(x - x_0), \forall x \in I$
- (2) $g(x)$ 在 x_0 处连续且 $g'(x_0) = g(x_0)$

5. 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某领域内有连续一阶导数, 且 $f'(0) = 0, f''(0)$ 存在, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\ln(1+x))}{x^3}$

6. 求最小正数 α , 使得: $(1 + \frac{1}{x})^{x+\alpha} > e (x > 0)$.

CHAPTER 16

2017 年转专业考试真题参考答案

1 解答题

1. **Proof.** 记数列 (x_n) 满足

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n} \quad (n \geq 1).$$

若极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$ 存在, 则令 $n \rightarrow \infty$ 得

$$L = \frac{1}{1+L} \Rightarrow L^2 + L - 1 = 0 \Rightarrow L = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

下面证明极限存在且等于上述 L . 考虑

$$|x_{n+1} - L| = \left| \frac{1}{1+x_n} - \frac{1}{1+L} \right| = \frac{|x_n - L|}{(1+x_n)(1+L)}.$$

由于对所有 n 有 $x_n > 0$ 且

$$1+L = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1,$$

故

$$|x_{n+1} - L| < \frac{|x_n - L|}{1+L} = L|x_n - L|,$$

又 $0 < L < 1$, 递推便得

$$|x_n - L| < L^{n-1}|x_1 - L| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

因此数列 (x_n) 收敛, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

2. **Proof.** 设 $a_n = x_n - x_{n-1}$, 则条件可以转化为 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + a_{n-1}) = 0$, 即证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$.

$\forall \varepsilon > 0$, 由极限的定义可知 $\exists N_1 \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N_1$ 时, $|a_n + a_{n-1}| < \frac{\varepsilon}{2}$.

对 $n > N_1$, 由 $a_n = (a_n + a_{n-1}) - a_{n-1}$, 两边取绝对值有

$$|a_n| \leq |a_n + a_{n-1}| + |a_{n-1}| < \frac{\varepsilon}{2} + |a_{n-1}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + |a_{n-2}| < \cdots < (n - N_1) \cdot \frac{\varepsilon}{2} + |a_{N_1}|.$$

两边同除 n ,

$$\frac{|a_n|}{n} < \frac{n - N_1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|a_{N_1}|}{n}.$$

由于 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{n - N_1}{n} \rightarrow 1$, 故存在 N_2 , 当 $n > N_2$ 时, $\frac{n - N_1}{n} < 1$; 同理, $\frac{|a_{N_1}|}{n} \rightarrow 0$, 所以存在 N_3 , 当 $n > N_3$ 时, $\frac{|a_{N_1}|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$.

取 $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$, 则当 $n > N$ 时, 有 $\frac{|a_n|}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. 因此, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$, 此即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0.$$

(本题亦可用 Stolz–Cesàro 公式证明.)

3. **Proof.** 因为 $f \in C^2(\mathbb{R})$ 且 $f(0) = 0$, 我们分两步考察 $g(x)$ 的导数并验证其连续性.

对于 $x \neq 0$ 的情形, $g(x)$ 在 $x \neq 0$ 上连续是显然的.

对于在 $x = 0$ 处的可导性与连续性, 首先计算 $g'(0)$:

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x} - f'(0)}{x}.$$

利用 f 在 0 点的二阶 Taylor 展开

$$f(x) = f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2),$$

则

$$\frac{f(x)}{x} = f'(0) + \frac{f''(0)}{2}x + o(x),$$

因此

$$\frac{\frac{f(x)}{x} - f'(0)}{x} = \frac{\frac{f''(0)}{2}x + o(x)}{x} = \frac{f''(0)}{2} + o(1) \rightarrow \frac{f''(0)}{2}.$$

故

$$g'(0) = \frac{f''(0)}{2}.$$

接着验证 $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = g'(0)$. 当 $x \neq 0$ 时

$$g'(x) = \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2},$$

将 f 的 Taylor 展开代入分子:

$$x(f'(0) + f''(0)x + o(x)) - \left(f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)\right) = \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2).$$

故

$$g'(x) = \frac{\frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{f''(0)}{2} + o(1) \longrightarrow \frac{f''(0)}{2} = g'(0).$$

综上, $g'(x)$ 在全体 \mathbb{R} 上存在且在 $x = 0$ 处与左右极限相合, 所以 $g \in C^1(\mathbb{R})$.

4. Proof 答案是肯定的.

必要性: 假设 f 在 x_0 处可导, 记 $f'(x_0) = A$. 定义

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, & x \neq x_0, \\ A, & x = x_0. \end{cases}$$

则对一切 $x \in I$ 都有

$$f(x) - f(x_0) = g(x)(x - x_0),$$

即满足 (1). 又

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = A = g(x_0),$$

故 g 在 x_0 处连续, 且 $g(x_0) = f'(x_0)$, 满足 (2).

充分性: 反过来, 若存在满足 (1)(2) 的函数 g , 则

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g(x) \quad (x \neq x_0),$$

两端令 $x \rightarrow x_0$, 由 g 在 x_0 连续得

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0).$$

因此 f 在 x_0 处可导, 且

$$f'(x_0) = g(x_0).$$

这就完成了充要性证明.

$$5. \text{ Solution. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\ln(1+x))}{x^3} = \frac{1}{2} f''(0).$$

由一阶微分中值定理, 存在 t 介于 $\ln(1+x)$ 与 x 之间, 使得

$$f(x) - f(\ln(1+x)) = f'(t)(x - \ln(1+x)).$$

又对 x 作泰勒展开:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

$$x - \ln(1+x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

由于 $f'(0) = 0$ 且 $f''(0)$ 存在, 对 $t \rightarrow 0$ 亦有

$$f'(t) = f'(0) + f''(0)t + o(t) = f''(0)t + o(t).$$

因此

$$\begin{aligned} f(x) - f(\ln(1+x)) &= (f''(0)t + o(t))\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \\ &= \frac{f''(0)t}{2}x^2 + o(x^3). \end{aligned}$$

又由于 t 介于 $\ln(1+x)$ 与 x 之间, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} t/x = 1$. 于是

$$\frac{f(x) - f(\ln(1+x))}{x^3} = \frac{f''(0)t}{2} \frac{x^2}{x^3} + o(1) \longrightarrow \frac{1}{2} f''(0).$$

6. Solution $\frac{1}{2}$.

两边取对数, 原不等式等价于

$$(x+\alpha) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > 1 \iff \alpha > \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} - x.$$

令

$$t = \frac{1}{x} > 0, \quad f(t) = \frac{1}{\ln(1+t)} - \frac{1}{t}.$$

则条件化为 $\alpha > f(t)$ 对所有 $t > 0$ 都成立, 故

$$\alpha \geq \sup_{t>0} f(t).$$

计算

$$f'(t) = \frac{-\frac{1}{1+t}}{\left[\ln(1+t)\right]^2} + \frac{1}{t^2} = \frac{-\frac{t^2}{1+t} + [\ln(1+t)]^2}{t^2[\ln(1+t)]^2}.$$

令 $g(t) = -\frac{t^2}{1+t} + [\ln(1+t)]^2$, 则

$$g'(t) = -\frac{2t(1+t) - t^2}{(1+t)^2} + \frac{2\ln(1+t)}{1+t} = \frac{2}{1+t} \left[\ln(1+t) - \frac{t^2 + 2t}{2(1+t)} \right].$$

令 $h(t) = \ln(1+t) - \frac{t^2 + 2t}{2(1+t)}$, 则

$$h'(t) = \frac{1}{t+1} - \frac{(2t+2)(t+1) - (t^2 + 2t)}{2(t+1)^2} = -\frac{t^2}{2(t+1)^2}.$$

所以 $h'(t) < 0$, $h(t) < h(0) = 0$, 则 $g'(t) < 0$, $g(t) < g(0) = 0$, 故 $f'(t) < 0$, f 在 $(0, +\infty)$ 上单调减少. 因此

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} f(t) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\ln(1+t)} - \frac{1}{t} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - \ln(1+t)}{t \ln(1+t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - (t - \frac{t^2}{2} + o(t^2))}{t^2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

综上, 对任意 $x > 0$ 不等式 $(1 + \frac{1}{x})^{x+\alpha} > e$ 当且仅当 $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

因此所求最小正数为 $\frac{1}{2}$.

CHAPTER 17

2015 年转专业考试真题

1 解答题

1. 一道错题.
2. 用三种方法计算数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n$.
3. 设 $n \in N^*$, $f(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}$, 计算 $f(1)$ 、 $f(-1)$.
4. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续导函数 $f'(x)$, 对 (a, b) 内任意 α , 是否可找到 x_1, x_2 ($x_1 < \alpha < x_2$), 使得 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\alpha)$ 成立. 若成立请证明, 若不成立请举出反例.

5. 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某领域内有连续一阶导数, 且 $f'(0) = 0, f''(0)$ 存在, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\ln(1+x))}{x^3}$.

6. 计算不定积分: $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1} dx$.

7. 计算不定积分: $\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx$.

8. 设 $f_n(x) = \cos x + \cos^2 x + \cdots + \cos^n x$, 求证:

(1) 对任意自然数 n , 方程 $f_n(x) = 1$ 在 $[0, \frac{\pi}{3})$ 内有唯一根.

(2) 设 $x_n \in [0, \frac{\pi}{3})$ 是 $f_n(x) = 1$ 的根, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\pi}{3}$.

CHAPTER 18

2015 年转专业考试真题参考答案

1 解答题

2. Solution. e.

方法一：对数与泰勒展开

令

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n, \quad \ln a_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right).$$

对 $\ln(1+x)$ 作泰勒展开 ($x = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \rightarrow 0$):

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

于是

$$\ln a_n = n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{2}n\left(\frac{1}{n^2} + 2\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + o(1) \rightarrow 1.$$

故 $a_n = \exp(\ln a_n) \rightarrow e$.

方法二：夹挤准则

对于充分大的 n , 有

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1},$$

故

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n.$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e, \quad \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \rightarrow e \cdot 1 = e.$$

由夹挤准则得极限为 e .

方法三：作指数基底

设

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}, \quad n = \frac{1 + \frac{1}{n}}{x_n},$$

则

$$\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1 + x_n\right)^{\frac{1+\frac{1}{n}}{x_n}} = \left[\left(1 + x_n\right)^{\frac{1}{x_n}}\right]^{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{1+0} = e.$$

3. Solution. 记

$$u(x) = (x - 1)^n, \quad v(x) = (x + 1)^n,$$

则

$$(x^2 - 1)^n = u(x)v(x).$$

由 Leibniz 公式

$$\frac{d^n}{dx^n}[u(x)v(x)] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x).$$

注意到

$$u^{(k)}(1) = \begin{cases} 0, & k < n, \\ n!, & k = n, \end{cases} \quad v^{(m)}(1) = (2)^n \quad (m = 0, \dots, n),$$

所以在 $x = 1$ 处上述求和仅 $k = n$ 一项不为零：

$$\left. \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n \right|_{x=1} = \binom{n}{n} u^{(n)}(1) v^{(0)}(1) = n! 2^n.$$

由此

$$f(1) = \frac{1}{2^n n!} \left. \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n \right|_{x=1} = 1.$$

类似地，在 $x = -1$ 处

$$u^{(k)}(-1) = \begin{cases} 0, & k < n, \\ (-1)^n n!, & k = n, \end{cases} \quad v^{(m)}(-1) = 0 \quad (m < n), \quad v^{(n)}(-1) = n!,$$

故

$$\left. \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n \right|_{x=-1} = \binom{n}{0} u^{(0)}(-1) v^{(n)}(-1) + \binom{n}{n} u^{(n)}(-1) v^{(0)}(-1) = (-1)^n n! 2^n.$$

于是

$$f(-1) = \frac{1}{2^n n!} \left. \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n \right|_{x=-1} = (-1)^n.$$

4. Solution. 不成立. 下面给出反例.

反例 1. 令

$$f(x) = x^3, \quad [a, b] = [-1, 1], \quad \alpha = 0.$$

则

$$f'(x) = 3x^2, \quad f'(0) = 0.$$

而对任意 $x_1 < 0 < x_2$,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^3 - x_1^3}{x_2 - x_1} = x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2 > 0$$

不可能等于 $f'(0) = 0$. 故不存在 $x_1 < 0 < x_2$ 使得 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(0)$.

反例 2. 令

$$f(x) = \sin x, \quad [a, b] = [-\pi, \pi], \quad \alpha = 0.$$

则

$$f'(x) = \cos x, \quad f'(0) = 1.$$

而对任意 $x_1 < 0 < x_2$,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\sin x_2 - \sin x_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 \cos\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right) \sin\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)}{x_2 - x_1} < \frac{2 \cdot 1 \cdot \frac{x_2-x_1}{2}}{x_2 - x_1} = 1,$$

且当 $x_1 \rightarrow 0^-$ 或 $x_2 \rightarrow 0^+$ 时, 上式仍小于 1. 因此也无法取到 $f'(0) = 1$.

5. **Solution.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\ln(1+x))}{x^3} = \frac{1}{2} f''(0)$.

由一阶微分中值定理, 存在 t 介于 $\ln(1+x)$ 与 x 之间, 使得

$$f(x) - f(\ln(1+x)) = f'(t)(x - \ln(1+x)).$$

又对 x 作泰勒展开:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

$$x - \ln(1+x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

由于 $f'(0) = 0$ 且 $f''(0)$ 存在, 对 $t \rightarrow 0$ 亦有

$$f'(t) = f'(0) + f''(0)t + o(t) = f''(0)t + o(t).$$

因此

$$\begin{aligned} f(x) - f(\ln(1+x)) &= (f''(0)t + o(t))\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \\ &= \frac{f''(0)t}{2}x^2 + o(x^3). \end{aligned}$$

又由于 t 介于 $\ln(1+x)$ 与 x 之间, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} t/x = 1$. 于是

$$\frac{f(x) - f(\ln(1+x))}{x^3} = \frac{f''(0)t}{2} \frac{x^2}{x^3} + o(1) \longrightarrow \frac{1}{2} f''(0).$$

6. **Solution.** 令

$$t = x - \frac{1}{x}, \quad dt = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx.$$

注意到

$$x^4 - x^2 + 1 = x^2 \left((x - \frac{1}{x})^2 + 1\right) = x^2(t^2 + 1),$$

于是

$$\frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1} dx = \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{t^2 + 1} dx = \frac{dt}{t^2 + 1}.$$

故

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1} dx = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \arctan t + C = \arctan\left(x - \frac{1}{x}\right) + C.$$

7. **Solution.** 令

$$t = \sqrt{e^x - 1}, \quad e^x = t^2 + 1, \quad x = \ln(t^2 + 1), \quad dt = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} dx = \frac{t}{2} dx \implies e^x dx = 2t dt.$$

则

$$\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx = \int \frac{x(2t dt)}{t} = 2 \int x dt = 2 \int \ln(t^2 + 1) dt.$$

对 $\int \ln(t^2 + 1) dt$ 分部积分,

$$\int \ln(t^2 + 1) dt = t \ln(t^2 + 1) - \int \frac{2t^2}{t^2 + 1} dt = t \ln(t^2 + 1) - 2 \int \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1}\right) dt = t \ln(t^2 + 1) - 2t + 2 \arctan t + C.$$

因此

$$2 \int \ln(t^2 + 1) dt = 2t \ln(t^2 + 1) - 4t + 4 \arctan t + C.$$

回代 $t = \sqrt{e^x - 1}$, 得

$$\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx = 2\sqrt{e^x - 1} \ln(e^x) - 4\sqrt{e^x - 1} + 4 \arctan \sqrt{e^x - 1} + C = 2x\sqrt{e^x - 1} - 4\sqrt{e^x - 1} + 4 \arctan \sqrt{e^x - 1} + C.$$

8. Proof.

(1) 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 计算

$$f'_n(x) = \sum_{k=1}^n k \cos^{k-1} x (-\sin x) = -\sin x \sum_{k=1}^n k \cos^{k-1} x < 0, \quad x \in (0, \frac{\pi}{3}).$$

故 f_n 在 $[0, \frac{\pi}{3}]$ 上严格单调递减. 又

$$f_n(0) = n > 1, \quad f_n(\frac{\pi}{3}) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1.$$

由介值定理可知方程 $f_n(x) = 1$ 在 $[0, \frac{\pi}{3}]$ 内恰有一根, 且因严格单调, 此根唯一.

(2) 利用等比数列求和,

$$f_n(x) = \cos x + \cos^2 x + \cdots + \cos^n x = \frac{\cos x (1 - \cos^n x)}{1 - \cos x}.$$

令 $x = x_n$ 满足 $f_n(x_n) = 1$, 则

$$\cos x_n (1 - \cos^n x_n) = 1 - \cos x_n \implies \cos^{n+1} x_n = 2 \cos x_n - 1.$$

由于 $x_n \in [0, \frac{\pi}{3}]$, 有 $1/2 < \cos x_n < 1$, 故当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$\cos^{n+1} x_n \rightarrow 0,$$

从而 $2 \cos x_n - 1 \rightarrow 0 \Rightarrow \cos x_n \rightarrow \frac{1}{2} \Rightarrow x_n \rightarrow \frac{\pi}{3}$. 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\pi}{3}$.

CHAPTER 19

2014 年转专业考试真题

1 解答题

1. 证明: 若对 $\forall x, y \in (-\infty, +\infty)$, 有 $|f(x) - f(y)| = |x - y|$, 且 $f(0) = 0$, 则 $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in (-\infty, +\infty)$.

2. 用三种方法计算数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n$.

3. 设 $n \in N^*$, $f(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n (x^2 - 1)^n}{\mathrm{d}x^n}$, 计算 $f(1)$ 、 $f(-1)$.

4. 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内有连续的一阶导数, 且 $f'(0) = 0, f''(0)$ 存在, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\ln(1 + x))}{x^3}$.

5. 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 有定义, 对任意 $x, y \in (0, +\infty)$ 有 $f(xy) = f(x)f(y)$ 且 $f'(1) = n > 0$, 求 $f(x)$.

6. 计算不定积分: $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1} dx$

7. 计算不定积分: $\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx$

8. 设 $\mu \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上非负, 且 $f''(x) \leq 0, x \in [0, 1]$, 证明: $f(t) \geq \mu f(s), \forall t \in [\mu, 1 - \mu], \forall s \in [0, 1]$.

CHAPTER 20

2014 年转专业考试真题参考答案

1 解答题

1. Solution.

令 $y = 0$, 由题意得

$$|f(x) - f(0)| = |x - 0| \implies |f(x)| = |x|, \forall x.$$

又由保距函数必为单射, 故对任意 x , 必有

$$f(x) = x \quad \text{或} \quad f(x) = -x.$$

下取 $x = 1$, 分两种情况讨论:

(i) 若 $f(1) = 1$. 设存在 $x_0 > 0$ 使 $f(x_0) = -x_0$, 则

$$|f(x_0) - f(1)| = |(-x_0) - 1| = x_0 + 1,$$

但保距性要求

$$|f(x_0) - f(1)| = |x_0 - 1|,$$

即 $x_0 + 1 = |x_0 - 1|$. 若 $x_0 \geq 1$, $x_0 + 1 = x_0 - 1$, 显然矛盾; 若 $0 < x_0 < 1$, 则 $x_0 + 1 = 1 - x_0$ 解得 $x_0 = 0$, 矛盾. 故对所有 $x > 0$ 均有 $f(x) = x$. 由 $|f(-x)| = |-x|$ 及单射性, 又可推出 $f(-x) = -x$. 于是

$$f(x) = x, \quad \forall x.$$

(ii) 若 $f(1) = -1$. 类似论证可得对所有 $x > 0$, 必 $f(x) = -x$, 并进一步推出 $f(-x) = x$, 即

$$f(x) = -x, \quad \forall x.$$

于是在两种情形下, 都有

$$f(x+y) = \pm(x+y) = \pm x \pm y = f(x) + f(y),$$

证毕.

2. Solution. e.

方法一: 对数与泰勒展开

令

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n, \quad \ln a_n = n \ln \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right).$$

对 $\ln(1+x)$ 作泰勒展开 ($x = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \rightarrow 0$):

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

于是

$$\ln a_n = n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{2} n \left(\frac{1}{n^2} + 2 \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + o(1) \rightarrow 1.$$

故 $a_n = \exp(\ln a_n) \rightarrow e$.

方法二：夹挤准则

对于充分大的 n , 有

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1},$$

故

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n.$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e, \quad \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \rightarrow e \cdot 1 = e.$$

由夹挤准则得极限为 e .

方法三：作指数基底

设

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}, \quad n = \frac{1 + \frac{1}{n}}{x_n},$$

则

$$\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n = (1 + x_n)^{\frac{1+\frac{1}{n}}{x_n}} = \left[(1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}}\right]^{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{1+0} = e.$$

3. Solution. 记

$$u(x) = (x-1)^n, \quad v(x) = (x+1)^n,$$

则

$$(x^2 - 1)^n = u(x)v(x).$$

由 Leibniz 公式

$$\frac{d^n}{dx^n}[u(x)v(x)] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x).$$

注意到

$$u^{(k)}(1) = \begin{cases} 0, & k < n, \\ n!, & k = n, \end{cases} \quad v^{(m)}(1) = (2)^n \quad (m = 0, \dots, n),$$

所以在 $x = 1$ 处上述求和仅 $k = n$ 一项不为零:

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n \Big|_{x=1} = \binom{n}{n} u^{(n)}(1) v^{(0)}(1) = n! 2^n.$$

由此

$$f(1) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n \Big|_{x=1} = 1.$$

类似地, 在 $x = -1$ 处

$$u^{(k)}(-1) = \begin{cases} 0, & k < n, \\ (-1)^n n!, & k = n, \end{cases} \quad v^{(m)}(-1) = 0 (m < n), \quad v^{(n)}(-1) = n!,$$

故

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n \Big|_{x=-1} = \binom{n}{0} u^{(0)}(-1) v^{(n)}(-1) + \binom{n}{n} u^{(n)}(-1) v^{(0)}(-1) = (-1)^n n! 2^n.$$

于是

$$f(-1) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n \Big|_{x=-1} = (-1)^n.$$

4. Solution. $\frac{f''(0)}{2}$.

利用 Taylor 展开:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2), \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^4).$$

因此

$$\begin{aligned} f(x) - f(\ln(1+x)) &= f'(0)\left(x - \ln(1+x)\right) + \frac{f''(0)}{2}\left(x^2 - (\ln(1+x))^2\right) + o(x^2) \\ &= \frac{f''(0)}{2}\left[x^2 - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)^2\right] + o(x^2) \\ &= \frac{f''(0)}{2}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\ln(1+x))}{x^3} = \frac{f''(0)}{2}.$$

5. Solution. $f(x) = x^n$.

由 $f(xy) = f(x)f(y)$, 对任意 $x > 0$, 考察 f 在 x 处的导数:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x(1 + \frac{\Delta x}{x})) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)f(1 + \frac{\Delta x}{x}) - f(x)}{\Delta x}.$$

提取 $f(x)$ 得

$$f'(x) = f(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \frac{\Delta x}{x}) - 1}{\Delta x}.$$

令 $u = \frac{\Delta x}{x}$, 则 $\Delta x = xu$, 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时 $u \rightarrow 0$, 所以上式变为

$$f'(x) = f(x) \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(1+u) - 1}{xu} = \frac{f(x)}{x} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(1+u) - 1}{u} = \frac{f(x)}{x} f'(1) = \frac{nf(x)}{x}.$$

于是 f 满足常微分方程

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{n}{x},$$

对两边积分得

$$\ln f(x) = n \ln x + C.$$

由 $f(1) = 1$ 可知 $C = 0$, 故

$$f(x) = e^{n \ln x} = x^n, \quad x > 0.$$

6. Solution. 令

$$t = x - \frac{1}{x}, \quad dt = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)dx.$$

注意到

$$x^4 - x^2 + 1 = x^2 \left((x - \frac{1}{x})^2 + 1 \right) = x^2(t^2 + 1),$$

于是

$$\frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1} dx = \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{t^2 + 1} dt = \frac{dt}{t^2 + 1}.$$

故

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1} dx = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \arctan t + C = \arctan\left(x - \frac{1}{x}\right) + C.$$

7. **Solution.** 令

$$t = \sqrt{e^x - 1}, \quad e^x = t^2 + 1, \quad x = \ln(t^2 + 1), \quad dt = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} dx = \frac{t}{2} dx \Rightarrow e^x dx = 2t dt.$$

则

$$\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx = \int \frac{x(2t dt)}{t} = 2 \int x dt = 2 \int \ln(t^2 + 1) dt.$$

对 $\int \ln(t^2 + 1) dt$ 分部积分,

$$\int \ln(t^2 + 1) dt = t \ln(t^2 + 1) - \int \frac{2t^2}{t^2 + 1} dt = t \ln(t^2 + 1) - 2 \int \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1}\right) dt = t \ln(t^2 + 1) - 2t + 2 \arctan t + C.$$

因此

$$2 \int \ln(t^2 + 1) dt = 2t \ln(t^2 + 1) - 4t + 4 \arctan t + C.$$

回代 $t = \sqrt{e^x - 1}$, 得

$$\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx = 2\sqrt{e^x - 1} \ln(e^x) - 4\sqrt{e^x - 1} + 4 \arctan \sqrt{e^x - 1} + C = 2x\sqrt{e^x - 1} - 4\sqrt{e^x - 1} + 4 \arctan \sqrt{e^x - 1} + C.$$

8. **Proof.**

固定任意 $t \in [\mu, 1 - \mu]$ 与 $s \in [0, 1]$, 令

$$m = \frac{t - \mu s}{1 - \mu}.$$

由于 $\mu \in (0, \frac{1}{2})$ 且 $t \in [\mu, 1 - \mu]$, 易验证 $m \in [0, 1]$. 又 f 在 $[0, 1]$ 上非负且 $f''(x) \leq 0$, 故 f 为凹函数. 由凹函数的定义, 对于任何 $\lambda \in (0, 1)$ 和 $x_1, x_2 \in [0, 1]$ 有

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

取 $\lambda = \mu$ 、 $x_1 = s$ 、 $x_2 = m$, 且注意到

$$\mu s + (1 - \mu)m = \mu s + (1 - \mu)\frac{t - \mu s}{1 - \mu} = t,$$

于是

$$f(t) = f(\mu s + (1 - \mu)m) \geq \mu f(s) + (1 - \mu)f(m) \geq \mu f(s),$$

因为 $f(m) \geq 0$. 这正是所要证明的 $f(t) \geq \mu f(s)$.

CHAPTER 21

2013 年转专业考试真题

1 解答题

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2 + n}).$

2. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}.$

3. 设 $a_n > 0, b_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) > 0$, 证明: 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$ 存在.

4. 证明: 若函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 存在数列 $\{x_n\}, x_n \in [a, b], g(x_n) = f(x_{n+1}), n = 1, 2, \dots$, 则 $f(x) = g(x)$ 在 $[a, b]$ 上有解.

5. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\begin{cases} x = \ln \cos t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$ 确定, 求 $\left. \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{4}}$.

6. 求最小正数 α , 使得: $(1 + \frac{1}{x})^{x+\alpha} > e (x > 0)$.

7. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 又 $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ 是满足 $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$ 的正数. 证明: 在 $(0, 1)$ 中存在互不相同的数 $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_n$ 满足 $\frac{\alpha_1}{f'(\beta_1)} + \frac{\alpha_2}{f'(\beta_2)} + \dots + \frac{\alpha_n}{f'(\beta_n)} = 1$.

CHAPTER 22

2013 年转专业考试真题参考答案

1 解答题

1. **Solution.** 1.

利用 $\sin^2 \theta = \sin^2(\theta - n\pi)$ 得

$$\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) = \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n} - n\pi) = \sin^2(\pi(\sqrt{n^2+n} - n)).$$

又

$$\pi(\sqrt{n^2+n} - n) = \pi \frac{(n^2+n) - n^2}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}.$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1.$$

2. **Solution.** $e^{-\frac{1}{2}}$.

利用泰勒公式 $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ ($t \rightarrow 0$), 令 $t = \sqrt{x}$, 得

$$\cos \sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x).$$

故

$$\begin{aligned} \ln \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}} &= \frac{1}{x} \ln(\cos \sqrt{x}) = \frac{1}{x} \ln \left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right) \\ &= \frac{1}{x} \left(-\frac{x}{2} + o(x)\right) = -\frac{1}{2} + o(1). \end{aligned}$$

两边取指数得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

3. **Proof.** 由条件

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1} b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) = L > 0,$$

取常数 δ 满足 $0 < \delta < \frac{L}{2}$, 则存在 $N \in \mathbb{N}$, 当 $n \geq N$ 时有

$$\frac{a_n}{a_{n+1} b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} > \delta \implies \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} > \delta a_{n+1},$$

即

$$a_{n+1} < \frac{1}{\delta} \left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right).$$

对 $n = N, N+1, \dots, m$ 累加, 得

$$\sum_{n=N}^m a_{n+1} < \frac{1}{\delta} \sum_{n=N}^m \left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right) = \frac{1}{\delta} \left(\frac{a_N}{b_N} - \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}} \right) \leq \frac{a_N}{\delta b_N}.$$

因此 $\sum_{k=1}^n a_k$ 的部分和有上界, 故 $\sum_{k=1}^\infty a_k$ 收敛.

4. **Proof.** 反证法, 设反命题成立, 即

$$f(x) \neq g(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

令

$$F(x) = f(x) - g(x).$$

则 F 在 $[a, b]$ 上连续且恒不为零, 要么 $F(x) > 0$, 要么 $F(x) < 0$. 不妨设

$$F(x) > 0, \quad \forall x \in [a, b].$$

由连续性和紧性, 存在

$$m = \min_{x \in [a, b]} F(x) > 0.$$

由题意, 数列 $\{x_n\} \subset [a, b]$ 满足

$$g(x_n) = f(x_{n+1}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

故

$$F(x_n) = f(x_n) - g(x_n) = f(x_n) - f(x_{n+1}).$$

两边累加得

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_{n+1}) &= \sum_{k=1}^n [f(x_k) - f(x_{k+1})] = \sum_{k=1}^n F(x_k) \\ &\geq \sum_{k=1}^n m = nm. \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow \infty$, 则

$$f(x_1) - f(x_{n+1}) \geq nm \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x_{n+1}) \rightarrow -\infty,$$

这与连续函数 f 在紧区间 $[a, b]$ 上必有界的事实矛盾. 故假设不成立, 必有一点 $c \in [a, b]$ 使

$$F(c) = 0, \quad \text{i.e. } f(c) = g(c).$$

证毕.

$$5. \text{ Solution. } \frac{dy}{dt} = t \sin t, \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{8}.$$

利用链式法则,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(\ln \cos t) = -\tan t, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(\sin t - t \cos t) = \cos t - (\cos t - t \sin t) = t \sin t.$$

因此

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{t \sin t}{\tan t} = -t \cos t.$$

再对 t 求导并除以 dx/dt 得二阶导数:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{dx} \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{1}{-\tan t} \frac{d}{dt} (-t \cos t) = \frac{-\cos t + t \sin t}{-\tan t} = \frac{\cos^2 t}{\sin t} - t \cos t.$$

故在 $t = \frac{\pi}{4}$ 处,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} &= -\frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi \sqrt{2}}{8}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} &= \frac{\cos^2 \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4}} - \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{\pi \sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi \sqrt{2}}{8}. \end{aligned}$$

6. Solution $\frac{1}{2}$.

两边取对数, 原不等式等价于

$$(x + \alpha) \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) > 1 \iff \alpha > \frac{1}{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)} - x.$$

令

$$t = \frac{1}{x} > 0, \quad f(t) = \frac{1}{\ln(1+t)} - \frac{1}{t}.$$

则条件化为 $\alpha > f(t)$ 对所有 $t > 0$ 都成立, 故

$$\alpha \geq \sup_{t>0} f(t).$$

计算

$$f'(t) = \frac{-\frac{1}{1+t}}{\left[\ln(1+t) \right]^2} + \frac{1}{t^2} = \frac{-\frac{t^2}{1+t} + [\ln(1+t)]^2}{t^2 [\ln(1+t)]^2}.$$

令 $g(t) = -\frac{t^2}{1+t} + [\ln(1+t)]^2$, 则

$$g'(t) = -\frac{2t(1+t) - t^2}{(1+t)^2} + \frac{2 \ln(1+t)}{1+t} = \frac{2}{1+t} \left[\ln(1+t) - \frac{t^2 + 2t}{2(1+t)} \right].$$

令 $h(t) = \ln(1+t) - \frac{t^2 + 2t}{2(1+t)}$, 则

$$h'(t) = \frac{1}{t+1} - \frac{(2t+2)(t+1) - (t^2 + 2t)}{2(t+1)^2} = -\frac{t^2}{2(t+1)^2}.$$

所以 $h'(t) < 0$, $h(t) < h(0) = 0$, 则 $g'(t) < 0$, $g(t) < g(0) = 0$, 故 $f'(t) < 0$, f 在 $(0, +\infty)$ 上单调减少. 因此

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} f(t) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\ln(1+t)} - \frac{1}{t} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - \ln(1+t)}{t \ln(1+t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - (t - \frac{t^2}{2} + o(t^2))}{t^2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

综上, 对任意 $x > 0$ 不等式 $(1 + \frac{1}{x})^{x+\alpha} > e$ 当且仅当 $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

因此所求最小正数为 $\frac{1}{2}$.

7. Proof.

由 f 在 $[0, 1]$ 上连续且 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 以及 $\alpha_i > 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, 对每个 $k = 1, 2, \dots, n-1$, 由介值定理可取

$$x_k \in (0, 1) \quad \text{使得} \quad f(x_k) = \sum_{i=1}^k \alpha_i.$$

令 $x_0 = 0, x_n = 1$. 则在每个区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上, 应用中值定理得: 存在 $\beta_i \in (x_{i-1}, x_i)$ 使

$$f'(\beta_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{\alpha_i}{x_i - x_{i-1}}.$$

因此

$$x_i - x_{i-1} = \frac{\alpha_i}{f'(\beta_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

对 $i = 1$ 到 n 累加, 得

$$x_n - x_0 = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{f'(\beta_i)} = 1.$$

于是

$$\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{f'(\beta_i)} = 1.$$

且每个 β_i 位于不同的开区间 (x_{i-1}, x_i) , 故互不相同. 证毕.

CHAPTER 23

2012 年转专业考试真题

1 解答题

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}}$.

2. 证明：对任意 $x, y \in \mathbf{R}$ 有 $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$, 则对每个 $n \in N, \forall a, b \in \mathbf{R}$, 有:
 $|f(a) - f(b)| \leq \frac{1}{n} |a - b|^2$.

3. 设 $a_n > 0, b_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1} b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) > 0$, 证明：极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$ 存在.

4. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x - 1}}$.

5. 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 有定义, 对任意 $x, y \in (0, +\infty)$ 有 $f(xy) = f(x)f(y)$ 且 $f'(1) = n > 0$, 求 $f(x)$.

6. 求最小正数 α , 使得: $(1 + \frac{1}{x})^{x+\alpha} > e (x > 0)$

7. 计算不定积分: $\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx$

8. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 又 $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ 是满足 $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$ 的正数. 证明: 在 $(0, 1)$ 中存在互不相同的数 $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_n$ 满足 $\frac{\alpha_1}{f'(\beta_1)} + \frac{\alpha_2}{f'(\beta_2)} + \dots + \frac{\alpha_n}{f'(\beta_n)} = 1$

CHAPTER 24

2012 年转专业考试真题参考答案

1 解答题

1. Solution.

法一. 注意斯特林公式 (Stirling's approximation):

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

故

$$(n!)^{\frac{1}{n^2}} = \left(\sqrt{2\pi n}\right)^{\frac{1}{n^2}} \left(\frac{n}{e}\right)^{\frac{n}{n^2}} = (2\pi n)^{\frac{1}{2n^2}} (n/e)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 \cdot 1 = 1.$$

法二. 利用夹挤定理 (squeeze theorem): 对 sufficiently large n 有

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq n^n,$$

两端同取 $1/n^2$ 次幂得

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \leq (n!)^{\frac{1}{n^2}} \leq n^{\frac{1}{n}},$$

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n/2)^{1/(2n)} = 1$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$, 故中间项亦趋于 1.

法三. 对数法与斯托尔茨定理 (Stolz–Cesàro): 令

$$a_n = (n!)^{\frac{1}{n^2}}, \quad \ln a_n = \frac{\ln(n!)}{n^2}.$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n!) - \ln((n-1)!)}{n^2 - (n-1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{2n-1} = 0,$$

由斯托尔茨定理可得 $\ln a_n \rightarrow 0$, 因此 $a_n = \exp(\ln a_n) \rightarrow 1$.

综上, $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}} = 1$.

2. Proof. 令 $a, b \in \mathbb{R}$ 和 $n \in \mathbb{N}$. 在区间 $[a, b]$ 上等分出 n 段, 设

$$x_k = a + \frac{k}{n}(b-a), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

则显然

$$x_0 = a, \quad x_n = b, \quad x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}.$$

由题设对任意 x, y 有 $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$ 以及三角不等式,

$$\begin{aligned}|f(a) - f(b)| &= |f(x_0) - f(x_n)| \leq \sum_{k=1}^n |f(x_{k-1}) - f(x_k)| \\&\leq \sum_{k=1}^n |x_{k-1} - x_k|^2 = n \left(\frac{|b-a|}{n} \right)^2 = \frac{1}{n} |b-a|^2.\end{aligned}$$

因此对每个 $n \in \mathbb{N}$ 以及任意 $a, b \in \mathbb{R}$, 均有

$$|f(a) - f(b)| \leq \frac{1}{n} |a-b|^2.$$

证毕.

3. **Proof.** 由条件

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1} b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) = L > 0,$$

取常数 δ 满足 $0 < \delta < \frac{L}{2}$, 则存在 $N \in \mathbb{N}$, 当 $n \geq N$ 时有

$$\frac{a_n}{a_{n+1} b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} > \delta \implies \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} > \delta a_{n+1},$$

即

$$a_{n+1} < \frac{1}{\delta} \left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right).$$

对 $n = N, N+1, \dots, m$ 累加, 得

$$\sum_{n=N}^m a_{n+1} < \frac{1}{\delta} \sum_{n=N}^m \left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right) = \frac{1}{\delta} \left(\frac{a_N}{b_N} - \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}} \right) \leq \frac{a_N}{\delta b_N}.$$

因此 $\sum_{k=1}^n a_k$ 的部分和有上界, 故 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛.

4. **Solution.** $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

令

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x - 1}}.$$

取对数得

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\frac{\ln(1+x)}{x})}{e^x - 1}.$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, 利用 Taylor 公式

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \implies \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x),$$

$$\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = \ln\left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right) = -\frac{x}{2} + o(x),$$

同时

$$e^x - 1 = x + o(x).$$

因此

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{x}{2} + o(x)}{x + o(x)} = -\frac{1}{2}.$$

故

$$L = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

5. **Solution.** $f(x) = x^n$.

由 $f(xy) = f(x)f(y)$, 对任意 $x > 0$, 考察 f 在 x 处的导数:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x(1 + \frac{\Delta x}{x})) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)f(1 + \frac{\Delta x}{x}) - f(x)}{\Delta x}.$$

提取 $f(x)$ 得

$$f'(x) = f(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \frac{\Delta x}{x}) - 1}{\Delta x}.$$

令 $u = \frac{\Delta x}{x}$, 则 $\Delta x = xu$, 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时 $u \rightarrow 0$, 所以上式变为

$$f'(x) = f(x) \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(1 + u) - 1}{xu} = \frac{f(x)}{x} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(1 + u) - 1}{u} = \frac{f(x)}{x} f'(1) = \frac{n f(x)}{x}.$$

于是 f 满足常微分方程

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{n}{x},$$

对两边积分得

$$\ln f(x) = n \ln x + C.$$

由 $f(1) = 1$ 可知 $C = 0$, 故

$$f(x) = e^{n \ln x} = x^n, \quad x > 0.$$

6. **Solution** $\frac{1}{2}$.

两边取对数, 原不等式等价于

$$(x + \alpha) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > 1 \iff \alpha > \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} - x.$$

令

$$t = \frac{1}{x} > 0, \quad f(t) = \frac{1}{\ln(1+t)} - \frac{1}{t}.$$

则条件化为 $\alpha > f(t)$ 对所有 $t > 0$ 都成立, 故

$$\alpha \geq \sup_{t>0} f(t).$$

计算

$$f'(t) = \frac{-\frac{1}{1+t}}{\left[\ln(1+t)\right]^2} + \frac{1}{t^2} = \frac{-\frac{t^2}{1+t} + [\ln(1+t)]^2}{t^2[\ln(1+t)]^2}.$$

令 $g(t) = -\frac{t^2}{1+t} + [\ln(1+t)]^2$, 则

$$g'(t) = -\frac{2t(1+t) - t^2}{(1+t)^2} + \frac{2\ln(1+t)}{1+t} = \frac{2}{1+t} \left[\ln(1+t) - \frac{t^2 + 2t}{2(1+t)} \right].$$

令 $h(t) = \ln(1+t) - \frac{t^2 + 2t}{2(1+t)}$, 则

$$h'(t) = \frac{1}{t+1} - \frac{(2t+2)(t+1) - (t^2 + 2t)}{2(t+1)^2} = -\frac{t^2}{2(t+1)^2}.$$

所以 $h'(t) < 0$, $h(t) < h(0) = 0$, 则 $g'(t) < 0$, $g(t) < g(0) = 0$, 故 $f'(t) < 0$, f 在 $(0, +\infty)$ 上单调减少. 因此

$$\begin{aligned}\sup_{t>0} f(t) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\ln(1+t)} - \frac{1}{t} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - \ln(1+t)}{t \ln(1+t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - (t - \frac{t^2}{2} + o(t^2))}{t^2} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

综上, 对任意 $x > 0$ 不等式 $(1 + \frac{1}{x})^{x+\alpha} > e$ 当且仅当 $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

因此所求最小正数为 $\frac{1}{2}$.

7. Solution.

令

$$t = \sqrt{e^x - 1}, \quad e^x = t^2 + 1, \quad x = \ln(t^2 + 1), \quad dt = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} dx = \frac{t}{2} dx \Rightarrow e^x dx = 2t dt.$$

则

$$\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx = \int \frac{x (2t dt)}{t} = 2 \int x dt = 2 \int \ln(t^2 + 1) dt.$$

对 $\int \ln(t^2 + 1) dt$ 分部积分,

$$\int \ln(t^2 + 1) dt = t \ln(t^2 + 1) - \int \frac{2t^2}{t^2 + 1} dt = t \ln(t^2 + 1) - 2 \int \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1}\right) dt = t \ln(t^2 + 1) - 2t + 2 \arctan t + C.$$

因此

$$2 \int \ln(t^2 + 1) dt = 2t \ln(t^2 + 1) - 4t + 4 \arctan t + C.$$

回代 $t = \sqrt{e^x - 1}$, 得

$$\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx = 2\sqrt{e^x - 1} \ln(e^x) - 4\sqrt{e^x - 1} + 4 \arctan \sqrt{e^x - 1} + C = 2x\sqrt{e^x - 1} - 4\sqrt{e^x - 1} + 4 \arctan \sqrt{e^x - 1} + C.$$

8. Proof.

由 f 在 $[0, 1]$ 上连续且 $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, 以及 $\alpha_i > 0$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, 对每个 $k = 1, 2, \dots, n-1$, 由介值定理可取

$$x_k \in (0, 1) \quad \text{使得} \quad f(x_k) = \sum_{i=1}^k \alpha_i.$$

令 $x_0 = 0$, $x_n = 1$. 则在每个区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上, 应用中值定理得: 存在 $\beta_i \in (x_{i-1}, x_i)$ 使

$$f'(\beta_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{\alpha_i}{x_i - x_{i-1}}.$$

因此

$$x_i - x_{i-1} = \frac{\alpha_i}{f'(\beta_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

对 $i = 1$ 到 n 累加, 得

$$x_n - x_0 = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{f'(\beta_i)} = 1.$$

于是

$$\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{f'(\beta_i)} = 1.$$

且每个 β_i 位于不同的开区间 (x_{i-1}, x_i) , 故互不相同. 证毕.

CHAPTER 25

2011 年转专业考试真题

1 解答题

1. 证明: 对任意 $x, y \in R$ 有 $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$, 则对每个 $n \in N, \forall a, b \in R$, 有:
$$|f(a) - f(b)| \leq \frac{1}{n} |a - b|^2.$$
2. 设 $x_n = (1 + a)(1 + a^2) \cdots (1 + a^{2^n})$, 其中 $|a| < 1$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$
3. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x - 1}}$
4. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, $f(0) = 1, g(x) = \int_0^{\sin x} f(tx^2) dt$, 求 $g'(x)$, 并求 $g'(0)$.

5. 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 有定义, 对任意 $x, y \in (0, +\infty)$ 有 $f(xy) = f(x)f(y)$ 且 $f'(1) = n > 0$, 求 $f(x)$.

6. 计算不定积分: $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx$

7. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 又 $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ 是满足 $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$ 的正数. 证明: 在 $(0, 1)$ 中存在互不相同的数 $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_n$ 满足 $\frac{\alpha_1}{f'(\beta_1)} + \frac{\alpha_2}{f'(\beta_2)} + \dots + \frac{\alpha_n}{f'(\beta_n)} = 1$

8. 证明: 若 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可微, $f(0) = 0, 0 \leq f'(x) \leq 1$, 则 $\left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 \geq \int_0^1 f^3(x) dx$

9. 证明: 对任意正整数 n , 有 $\frac{2}{3}n\sqrt{n} < \sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n} < \frac{4n+3}{6}\sqrt{n}$

CHAPTER 26

2011 年转专业考试真题参考答案

1 解答题

1. **Proof.** 令 $a, b \in \mathbb{R}$ 和 $n \in \mathbb{N}$. 在区间 $[a, b]$ 上等分出 n 段, 设

$$x_k = a + \frac{k}{n}(b - a), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

则显然

$$x_0 = a, \quad x_n = b, \quad x_k - x_{k-1} = \frac{b - a}{n}.$$

由题设对任意 x, y 有 $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$ 以及三角不等式,

$$\begin{aligned} |f(a) - f(b)| &= |f(x_0) - f(x_n)| \leq \sum_{k=1}^n |f(x_{k-1}) - f(x_k)| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |x_{k-1} - x_k|^2 = n \left(\frac{|b - a|}{n} \right)^2 = \frac{1}{n} |b - a|^2. \end{aligned}$$

因此对每个 $n \in \mathbb{N}$ 以及任意 $a, b \in \mathbb{R}$, 均有

$$|f(a) - f(b)| \leq \frac{1}{n} |a - b|^2.$$

证毕.

2. **Solution.** $\frac{1}{1-a}$.

注意到

$$(1-a)x_n = (1-a)(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n}) = 1-a^{2^{n+1}},$$

故

$$x_n = \frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-a},$$

因为 $|a| < 1$ 时 $a^{2^{n+1}} \rightarrow 0$, 故极限为 $\frac{1}{1-a}$.

3. **Solution.** $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

令

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x - 1}}.$$

取对数得

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)}{e^x - 1}.$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, 利用泰勒展开

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3) \Rightarrow \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + O(x^2),$$

$$\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = \ln\left(1 - \frac{x}{2} + O(x^2)\right) = -\frac{x}{2} + O(x^2),$$

同时

$$e^x - 1 = x + O(x^2).$$

因此

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{x}{2} + O(x^2)}{x + O(x^2)} = -\frac{1}{2}.$$

故

$$L = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

4. Solution.

首先将积分变量替换: 令 $u = tx^2$, 则 $t = u/x^2$, $dt = du/x^2$, 上限 $t = \sin x$ 对应 $u = x^2 \sin x$. 于是

$$g(x) = \int_0^{\sin x} f(tx^2) dt = \frac{1}{x^2} \int_0^{x^2 \sin x} f(u) du.$$

对 x 求导, 应用商法则及牛顿-莱布尼茨公式得

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx} \left[x^{-2} \right] \int_0^{x^2 \sin x} f(u) du + x^{-2} \frac{d}{dx} \left[\int_0^{x^2 \sin x} f(u) du \right] \\ &= -\frac{2}{x^3} \int_0^{x^2 \sin x} f(u) du + \frac{1}{x^2} f(x^2 \sin x) \frac{d}{dx}(x^2 \sin x) \\ &= -\frac{2}{x^3} \int_0^{x^2 \sin x} f(u) du + \frac{1}{x^2} f(x^2 \sin x)(2x \sin x + x^2 \cos x). \end{aligned}$$

接着计算 $g'(0)$. 由于 $\int_0^{x^2 \sin x} f(u) du = f(0)x^2 \sin x + o(x^3)$ 且 $f(x^2 \sin x) = f(0) + o(1)$, 故当 $x \rightarrow 0$:

$$-\frac{2}{x^3} \int_0^{x^2 \sin x} f(u) du \sim -\frac{2}{x^3}[x^3] = -2, \quad \frac{1}{x^2} f(x^2 \sin x)(2x \sin x + x^2 \cos x) \sim \frac{1}{x^2}[1 \cdot (2x^2 + x^2)] = 3.$$

于是

$$g'(0) = (-2) + 3 = 1.$$

5. Solution. $f(x) = x^n$.

由 $f(xy) = f(x)f(y)$, 对任意 $x > 0$, 考察 f 在 x 处的导数:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x(1 + \frac{\Delta x}{x})) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)f(1 + \frac{\Delta x}{x}) - f(x)}{\Delta x}.$$

提取 $f(x)$ 得

$$f'(x) = f(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \frac{\Delta x}{x}) - 1}{\Delta x}.$$

令 $u = \frac{\Delta x}{x}$, 则 $\Delta x = xu$, 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时 $u \rightarrow 0$, 所以上式变为

$$f'(x) = f(x) \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(1+u)-1}{xu} = \frac{f(x)}{x} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(1+u)-1}{u} = \frac{f(x)}{x} f'(1) = \frac{n f(x)}{x}.$$

于是 f 满足常微分方程

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{n}{x},$$

对两边积分得

$$\ln f(x) = n \ln x + C.$$

由 $f(1) = 1$ 可知 $C = 0$, 故

$$f(x) = e^{n \ln x} = x^n, \quad x > 0.$$

6. Solution. 令

$$t = \sqrt{e^x - 1}, \quad e^x = t^2 + 1, \quad x = \ln(t^2 + 1), \quad dt = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} dx = \frac{t}{2} dx \Rightarrow e^x dx = 2t dt.$$

则

$$\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx = \int \frac{x(2t dt)}{t} = 2 \int x dt = 2 \int \ln(t^2 + 1) dt.$$

对 $\int \ln(t^2 + 1) dt$ 分部积分,

$$\int \ln(t^2 + 1) dt = t \ln(t^2 + 1) - \int \frac{2t^2}{t^2 + 1} dt = t \ln(t^2 + 1) - 2 \int \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1}\right) dt = t \ln(t^2 + 1) - 2t + 2 \arctan t + C.$$

因此

$$2 \int \ln(t^2 + 1) dt = 2t \ln(t^2 + 1) - 4t + 4 \arctan t + C.$$

回代 $t = \sqrt{e^x - 1}$, 得

$$\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx = 2\sqrt{e^x - 1} \ln(e^x) - 4\sqrt{e^x - 1} + 4 \arctan \sqrt{e^x - 1} + C = 2x\sqrt{e^x - 1} - 4\sqrt{e^x - 1} + 4 \arctan \sqrt{e^x - 1} + C.$$

8. Solution.

令

$$F(t) = \left(\int_0^t f(x) dx \right)^2 - \int_0^t f^3(x) dx, \quad t \in [0, 1].$$

显然 $F(0) = 0$. 对 t 求导得

$$\begin{aligned} F'(t) &= 2 \left(\int_0^t f(x) dx \right) f(t) - f^3(t) \\ &= f(t) \left(2 \int_0^t f(x) dx - [f(t)]^2 \right) = f(t) G(t), \end{aligned}$$

其中

$$G(t) = 2 \int_0^t f(x) dx - [f(t)]^2.$$

又由于

$$G(0) = 0, \quad G'(t) = 2f(t) - 2f(t)f'(t) = 2f(t)(1 - f'(t)) \geq 0 \quad (\text{因 } 0 \leq f'(t) \leq 1),$$

所以 $G(t) \geq 0$ 对所有 $t \in [0, 1]$ 成立. 再由 $f(t) \geq 0$ (从 $f(0) = 0$ 且 $f' \geq 0$ 得到) 可知

$$F'(t) = f(t)G(t) \geq 0,$$

故 $F(1) \geq F(0) = 0$, 即

$$\left(\int_0^1 f(x) dx\right)^2 - \int_0^1 f^3(x) dx \geq 0,$$

从而完成证明.

9. **Proof.** 利用根函数在 $[0, n]$ 上严格凹性, 对每个整数区间 $[k-1, k]$ 作左右端点梯形比较:

下界: 因为 \sqrt{x} 在 $[k-1, k]$ 上 $\sqrt{x} \geq \sqrt{k-1}$,

$$\sqrt{k} > \int_{k-1}^k \sqrt{x} dx.$$

对 $k = 1, 2, \dots, n$ 累加得

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} > \int_0^n \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^n = \frac{2}{3}n\sqrt{n}.$$

上界: 因为 \sqrt{x} 在 $[k-1, k]$ 上凹, 下端点梯形面积小于弦顶梯形面积, 即

$$\frac{\sqrt{k-1} + \sqrt{k}}{2} < \int_{k-1}^k \sqrt{x} dx.$$

于是

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\sqrt{k-1} + \sqrt{k}) < \int_0^n \sqrt{x} dx + \frac{1}{2}\sqrt{n} = \frac{2}{3}n\sqrt{n} + \frac{1}{2}\sqrt{n} = \frac{4n+3}{6}\sqrt{n}.$$

综上, 对任意正整数 n 都有

$$\frac{2}{3}n\sqrt{n} < \sum_{k=1}^n \sqrt{k} < \frac{4n+3}{6}\sqrt{n}.$$