

华中科技大学转专业联合数学考试 (重制版)

学数华科 转专业交流群

Last Updated: November 29, 2025

延中科技大学专业文盲群

写在一切之前

Provided by @ 那, 边。@ 淵

首先, 如果你选择通过转专业考试转专业, **请务必完整阅读《华科转专业简明指南》**。希望大家明确一点: 转专业考试是选拔性考试, 所以难度大是正常的。这不仅意味着备考时心态上要做好准备, 更意味着你不可能做到面面俱到, 所以必须结合实际情况开展考前复习, 把精力放到那些能够拿到的分数上。一般情况下, 准备做得越充分的同学越有优势!

先整体介绍一下华科转专业数学考试。转专业数学考试是转专业联合笔试的一部分, 大部分理工科专业的学院都要求报名转入学生参加。就往年规律来看, 考试时间为两个小时。正因为这是选拔性考试, 所以考试名称虽然为“微积分”, 但实际上更偏向于数学分析的难度, 当然没有这么多分析证明的要求, 大部分还是以计算为主。试卷整体难度显著高于微积分 (B), 接近于大学生数学竞赛。因此, 对于学习微积分 (C) 或 (D) 的同学, 建议一定要拔高学习层次, 必要时可以去蹭其他班级的微积分课堂。此外, 考试没有大纲, 所以没有固定的考试范围, 但会与大家微积分课程的教学进度持平, 往年大致考到不定积分 (详情参考往年真题)。

关于备考参考资料, 建议以这份真题合集, 毕志伟、吴洁老师的《微积分学学习辅导》和裴礼文老师的《数学分析中的典型问题与方法》为主。就往年题目来看, 考试真题很多都能在裴砖中找到原型甚至是原题, 很多题目的思想方法都曾在往年题目中出现 (近几年考题 24 年较为突出)。另外, B 站和学数华科 QQ 群也是很好的资源。因此, 大家不必通过任何第三方渠道去找所谓的转专业资料了, 他们的卷子基本就是盗用本群中的, 很多题目印刷甚至出错, 买了也是浪费钱、浪费时间。

关于备考流程, 建议在仔细研读裴砖的同时 (or 之后) 认真写写往年真题, 一开始不会做很正常, 本合集有非常详尽的答案, 大家一定要认真下功夫把每道题研究清楚 (每年的难度都有变化, 可以视情况而定)。研读裴砖可以分专题进行, 可以准备一个笔记本, 把每个专题的内容 (方法、例题与具体解题思路) 自己总结出来, 这也是非常重要的复习资料。我总结了往年真题中经常出现的裴砖中的专题, 供大家参考以重点复习:

1.3 求极限值的若干方法; 1.4 Stolz 公式; 1.5 递推形式的极限

2.4 函数方程 (了解模型即可, 不必深入)

3.1 导数; 3.2 微分中值定理; 3.3 Taylor 公式; 3.5 导数的综合应用

(裴砖中带五角星的内容基本均为重要内容, 而带星号内容可以忽略)

另外, 本文件已上传至 **《华中科技大学转专业联合数学考试(重制版)》**, 大家使用前可以先检查一下是否有更新.

最后, 祝大家考试顺利、成功上岸!

版权声明: 本文件由 @tarfersoul, @ 那, 边。整理、维护, 仅供个人学习与交流使用, 严禁用于任何商业用途; 未经授权不得转载、修改或以任何形式传播, 侵权必究。

延中科技大学专业文盲群

CONTENTS

写在一切之前	3
Contents	5
I 转专业数学考试真题	9
1 2024 年转专业考试真题	11
2 2024 年转专业考试真题参考答案	13
3 2023 年转专业考试真题	17
4 2023 年转专业考试真题参考答案	19
5 2022 年转专业考试真题	25
6 2022 年转专业考试真题参考答案	29
7 2021 年转专业考试真题	35
8 2021 年转专业考试真题参考答案	37
9 2020 年转专业考试真题	41
10 2020 年转专业考试真题参考答案	43
11 2019 年转专业考试真题	47
12 2019 年转专业考试真题参考答案	49
13 2018 年转专业考试真题	53
14 2018 年转专业考试真题参考答案	55
15 2017 年转专业考试真题	59
16 2017 年转专业考试真题参考答案	61
17 2015 年转专业考试真题	65
18 2015 年转专业考试真题参考答案	67
19 2014 年转专业考试真题	69
20 2014 年转专业考试真题参考答案	71
21 2013 年转专业考试真题	73
22 2013 年转专业考试真题参考答案	75

23 2012 年转专业考试真题	77
24 2012 年转专业考试真题参考答案	79
25 2011 年转专业考试真题	81
26 2011 年转专业考试真题参考答案	83

Change Logs

- Updated (2025.10.15): 增加了 2024 年真题证明题缺失的答案.
- Updated (2025.10.16): 更正了 2023 年真题填空题第 4 题表达式的错误.
- Updated (2025.10.18): 更新了 Chapter 写在一切之前；更正了 2023 年真题填空题第 6 题的答案.
- Updated (2025.10.19): 更正了部分答案中的错别字.
- Updated (2025.10.20): 增加了 2024 年真题填空题第 4 题的答案；更正了 2023 年真题证明题第 1 题的答案.
- Updated (2025.10.25): 更新了 Chapter 写在一切之前；修订了 2024 年真题及答案；更正了 2020 年真题第 6 题答案中表达式的错误；更正了 2014 年真题第 1 题的答案.
- Updated (2025.10.30): 更正了 2022 年真题选择题第 9 题表达式的错误；修订了 2023 年真题及答案.
- Updated (2025.11.1): 更新了 Chapter 写在一切之前；更正了 2024 年真题证明题第 3 题的答案.
- Updated (2025.11.2): 更正了 2022 年真题选择题第 1 题表达式的错误.
- Updated (2025.11.3): 更新了 2022 年真题解答题第 3 题的答案.
- Updated (2025.11.9): 更正了 2012 年真题第 4 题的答案；更正了 2014 年真题第 4 题的答案；更正了 2017 年真题第 2 题的答案；更正了 2017 年真题第 4 题表达式的错误；更正了 2017 年真题第 6 题的答案；更正了 2021 年真题证明题第 2 题的答案；更正了 2022 年真题选择题第 3 题的答案.
- Updated (2025.11.11): 更正了 2024 年真题证明题第 5 题答案中表达式的错误；更正了 2019 年真题第 5 题的答案；更正了 2023 年真题证明题第 6 题的答案；更正了 2021 年真题证明题第 1 题的答案.
- Updated (2025.11.14): 修订了 2022 年真题及答案.
- Updated (2025.11.16): 更正了 2023 年真题填空题第 3 题的答案.
- Updated (2025.11.17): 更正了 2020 年真题第 4 题的答案.
- Updated (2025.11.19): 修订了 2021 年真题及答案；修订了 2020 年真题及答案；更正了 2020 年真题第 1 题的答案；更正了 2022 年真题解答题第 1 题的答案.
- Updated (2025.11.22): 修订了 2019 年真题及答案；修订了 2018 年真题及答案；修订了 2017 年真题及答案.

- Updated (2025.11.23): 更正了 2022 年真题填空题第 8 题的答案；更正了 2019 年真题第 4 题的答案；更正了 2011 年真题第 9 题的答案；修订了 2015 年真题及答案；修订了 2014 年真题及答案；修订了 2013 年真题及答案；修订了 2012 年真题及答案；修订了 2011 年真题及答案.
- Updated (2025.11.24): 更新了 2020 年真题第 2 题的答案.
- Updated (2025.11.25): 更正了 2013 年真题第 5 题的答案；更新了 2013 年真题第 7 题的答案；更新了 2024 年真题填空题第 3 题的答案.
- Updated (2025.11.26): 更新了 2015 年真题第 2 题的答案.
- Updated (2025.11.29): 更正了 2021 年真题证明题第 3 题的答案.

Part I

转专业数学考试真题

CHAPTER 1

2024 年转专业考试真题

1 填空题 (每题 10 分, 共 60 分)

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \arctan \frac{2}{k^2} = \text{_____}.$

2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}} = \text{_____}.$

3. 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的邻域内有一阶连续导数, 且 $f'(0) = 0, f''(0)$ 存在, 则极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\ln(1+x))}{x^3} = \text{_____}.$

4. 设 $f(x) = (\arcsin x)^2$, 则 $f^{(2024)}(0) = \text{_____}.$

5. 已知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有定义, $\forall x, y \in (0, +\infty)$, $f(xy) = f(x)f(y)$, 且 $f'(1) = 2024$, 则 $f(x) = \text{_____}.$

6. $\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx = \text{_____}.$

2 证明题 (10 分)

已知 $\beta > 0$, 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = \ln \beta$, $x_{n+1} = x_1 + \sum_{i=1}^n \ln(\beta - x_i)$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛并求其极限.

3 证明题 (10 分)

证明: 若函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, f 单调, 存在数列 $\{x_n\}, x_n \in [a, b], g(x_n) = f(x_{n+1}), n = 1, 2, \dots$, 则 $f(x) = g(x)$ 在 $[a, b]$ 上有解.

4 证明题 (10 分)

设 $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0 \\ f'(0), & x = 0 \end{cases}$, $f(0) = 0, f(x)$ 在 \mathbf{R} 上存在二阶导数, 问 $g(x)$ 在 \mathbf{R} 上是否存在连续导数, 存在请证明, 不存在请说明理由.

5 证明题 (10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内二阶可导, $f(0) = 0, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}, f(1) = \frac{\pi}{2}$, 证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f''(\xi) = \frac{\xi}{1 - \xi^2} f'(\xi)$.

CHAPTER 2

2024 年转专业考试真题参考答案

1 填空题 (每题 10 分, 共 60 分)

1. Solution. $\frac{3\pi}{4}$.

利用反正切差角公式

$$\begin{aligned}\arctan x - \arctan y &= \arctan \frac{x-y}{1+xy}, \quad x = \frac{1}{k-1}, \quad y = \frac{1}{k+1}, \\ \Rightarrow \arctan \frac{2}{k^2} &= \arctan \frac{\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}}{1 + \frac{1}{(k-1)(k+1)}} = \arctan \frac{1}{k-1} - \arctan \frac{1}{k+1}.\end{aligned}$$

对 $k = 1, 2, \dots, n$ 累加并对 n 取极限

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \arctan \frac{2}{k^2} &= \arctan 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \left(\arctan \frac{1}{k-1} - \arctan \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \arctan 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\arctan 1 + \arctan \frac{1}{2} - \arctan \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{3\pi}{4}.\end{aligned}$$

2. Solution. $e^{-\frac{1}{2}}$.

利用 Taylor 公式 $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ ($t \rightarrow 0$), 令 $t = \sqrt{x}$, 得

$$\cos \sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x).$$

故

$$\begin{aligned}\ln \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}} &= \frac{1}{x} \ln(\cos \sqrt{x}) = \frac{1}{x} \ln \left(1 - \frac{x}{2} + o(x) \right) \\ &= \frac{1}{x} \left(-\frac{x}{2} + o(x) \right) = -\frac{1}{2} + o(1).\end{aligned}$$

两边取指数得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

3. Solution. $\frac{f''(0)}{2}$.

由于 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的邻域内可导, 由 Lagrange 中值定理, 存在 ξ 介于 x 与 $\ln(1+x)$ 之间, 使得

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\ln(1+x))}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(\xi)(x - \ln(1+x))}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(\xi) - f'(0)}{\xi - 0} \cdot \frac{\xi}{x} \cdot \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}.\end{aligned}$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1+x) \rightarrow 0$, 所以由夹逼准则可知 $\xi \rightarrow 0$.

同时, $\frac{\xi}{x}$ 介于 1 与 $\frac{\ln(1+x)}{x}$ 之间, 显然 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi}{x} = 1$. 故由导数的定义,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(\xi) - f'(0)}{\xi - 0} \cdot \frac{\xi}{x} \cdot \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} &= f''(0) \cdot \frac{x - \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x^2} \\ &= \frac{f''(0)}{2}.\end{aligned}$$

4. Solution. $2^{2023}(1011!)^2$.

方程两边求导, 得 $f'(x) = \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$, 即 $\sqrt{1-x^2}f'(x) = 2 \arcsin x$, 两边平方得

$$(1-x^2)f'^2(x) = 4f(x).$$

两边再次求导, 得 $2f'(x)[-xf'(x) + (1-x^2)f''(x) - 2] = 0$, 消去 $f'(x)$ 得

$$-xf'(x) + (1-x^2)f''(x) = 2.$$

(注意到 $f'(x) = 0$ 当且仅当 $x = 0$. $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2$, 此时 $-xf'(x) + (1-x^2)f''(x) = 2$ 仍然成立.)

利用 Leibniz 公式对上式两边同时求 n 阶导数得

$$-xf^{(n+1)}(x) - nf^{(n)}(x) + (1-x^2)f^{(n+2)}(x) - 2nx f^{(n+1)}(x) - n(n-1)f^{(n)}(x) = 0.$$

在上式中令 $x = 0$ 得

$$f^{(n+2)}(0) = n^2 f^{(n)}(0).$$

所以 $f^{(2024)}(0) = 2022^2 \cdot 2020^2 \cdots 2^2 f''(0) = 2^{2023}(1011!)^2$.

5. Solution. x^{2024} .

$\forall x > 0$, 有 $f(x) = f(\sqrt{x}\sqrt{x}) = f^2(\sqrt{x}) > 0$.

令 $g(x) = \ln f(x)$, 得

$$g(xy) = g(x) + g(y).$$

令 $u = \ln x$, $v = \ln y$, 则 $g(e^{u+v}) = g(e^u) + g(e^v)$, 说明 $h(u) = g(e^u)$ 满足

$$h(u+v) = h(u) + h(v),$$

且 h 在 $u = 0$ (即 $x = 1$) 可导, 故 $h(u) = Cu$. 于是

$$g(x) = h(\ln x) = C \ln x, \quad f(x) = e^{g(x)} = x^C.$$

由 $f'(x) = Cx^{C-1}$, 代入 $x = 1$ 并利用 $f'(1) = 2024$, 得 $C = 2024$. 故

$$f(x) = x^{2024}.$$

注: 本题更严谨详细的解题步骤参见《数学分析中的典型问题与方法》2.4 函数方程 例 2.4.1 及单元练习 2.4.6.

6. **Solution.** $2x\sqrt{e^x - 1} - 4\sqrt{e^x - 1} + 4 \arctan \sqrt{e^x - 1} + C$.

令 $t = \sqrt{e^x - 1}$, 则

$$t^2 = e^x - 1, \quad e^x = t^2 + 1, \quad e^x dx = 2t dt,$$

且 $x = \ln(e^x) = \ln(t^2 + 1)$. 原式化为

$$\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx = \int \frac{x}{t} e^x dx = 2 \int x dt = 2 \int \ln(t^2 + 1) dt.$$

对 $2 \int \ln(t^2 + 1) dt$ 分部积分得

$$\begin{aligned} 2 \int \ln(t^2 + 1) dt &= 2 \left[t \ln(t^2 + 1) - \int \frac{2t^2}{t^2 + 1} dt \right] \\ &= 2t \ln(t^2 + 1) - 4 \int \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt \\ &= 2t \ln(t^2 + 1) - 4t + 4 \arctan t + C. \end{aligned}$$

最后代回 $t = \sqrt{e^x - 1}$ 得

$$2x\sqrt{e^x - 1} - 4\sqrt{e^x - 1} + 4 \arctan \sqrt{e^x - 1} + C.$$

2 (10 分)

Proof. 由已知可得 $x_n = x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \ln(\beta - x_i)$, 用 $x_{n+1} = x_1 + \sum_{i=1}^n \ln(\beta - x_i)$ 相减, 得

$$x_{n+1} = x_n + \ln(\beta - x_n).$$

利用 $\forall x > 0, \ln x < x - 1$, 得

$$x_{n+1} - \beta + 1 = x_n + \ln(\beta - x_n) - \beta + 1 < x_n + \beta - x_n - 1 - \beta + 1 = 0.$$

于是 $\beta - 1$ 是 $\{x_n\}$ 的上界. 所以 $\ln(\beta - x_n) > 0$, $\{x_n\}$ 单调增加. 由单调有界原理, $\{x_n\}$ 必然收敛.

设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \{x_n\} = a$, 对 $x_{n+1} = x_n + \ln(\beta - x_n)$ 左右两边取极限, 得 $\ln(\beta - a) = 0$, 所以极限为 $\beta - 1$.

3 (10 分)

Proof. 考虑数列 $\{f(x_n) - g(x_n)\}$. 若此数列在 $n = k$ 处出现变号, 即

$$[f(x_k) - g(x_k)] \cdot [f(x_{k-1}) - g(x_{k-1})] < 0,$$

则存在介于 x_{k-1} 和 x_k 的 ξ 使得 $f(\xi) - g(\xi) = 0$.

若不然, 不失一般性地设 $\{f(x_n) - g(x_n)\}$ 恒为正, 则

$$f(x_n) - f(x_{n-1}) = g(x_{n-1}) - f(x_{n-1}) < 0$$

恒成立, 故 $\{f(x_n)\}$ 单调递减. 由 f 的单调性可知 $\{x_n\}$ 亦单调, 而 $\{x_n\}$ 有界, 故 $\{x_n\}$ 必有极限 x_0 . 在 $f(x_{n+1}) = g(x_n)$ 中令 $n \rightarrow \infty$, 并由 f 和 g 的连续性, 即得 $f(x_0) = g(x_0)$.

4 (10 分)

Proof. 若 $x \neq 0$, $g'(x) = \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2}$.

$$\text{若 } x = 0, g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x} - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x f'(0)}{x^2}.$$

应用 L'Hospital 法则, 得

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{2x}.$$

因为 $f(x)$ 二阶可导, 所以 $g'(0) = \frac{f''(0)}{2}$.

$g'(x)$ 在 $x \neq 0$ 时的连续性显然. 下面考虑 $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f'(0) - f(x)}{x^2} \equiv A + B$$

由导数定义, $A = f''(0)$. 由上述讨论得 $B = -g'(0) = -\frac{f''(0)}{2}$,

因此 $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = \frac{f''(0)}{2} = g'(0)$, 即证 $g'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

5 (10 分)

Proof. 令 $g(x) = f(x) - \arcsin x$, 则 $g(0) = g\left(\frac{1}{2}\right) = g(1)$.

由 Rolle 定理可知, 存在 $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\beta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使得 $g'(\alpha) = g'(\beta) = 0$, 即

$$f'(\alpha) - \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} = f'(\beta) - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0.$$

令 $h(x) = f'(x)\sqrt{1-x^2}$, 则 $h(\alpha) = h(\beta) = 1$.

由 Rolle 定理可知, 存在 $\xi \in (\alpha, \beta)$, 使得 $h'(\xi) = 0$, 即

$$\sqrt{1-\xi^2}f''(\xi) - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}f'(\xi) = 0,$$

化简立得.

CHAPTER 3

2023 年转专业考试真题

1 填空题 (每题 8 分, 共 48 分)

1. 若 $\beta \neq k\pi (k = 0, 1, 2, \dots)$, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \tan \frac{\beta}{2^k} = \text{_____}$.
2. 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{3}} \left[(x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}} \right] = \text{_____}$.
3. 设 $0 < a_1 < \pi, a_{n+1} = \sin a_n (n = 1, 2, \dots)$, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} a_n = \text{_____}$.
4. 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的邻域内二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{f(x)}{x^2} \right) = 0$, 则 $f''(0) = \text{_____}$.
5. 设 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$, 则 $f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x) = \text{_____}$.
6. 设 $\alpha \neq \beta$ 是两个实常数, 则 $\frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha}$ 与 $\frac{e^\beta + e^\alpha}{2}$ 两者之较大者为 _____ .

2 证明题 (9 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+1} = a_n - \frac{1}{n+1} a_{n-1} (n = 2, 3, \dots)$$

证明: 对所有 $n \geq 3$, 都有 $0 < n a_n - 3 < \frac{6}{n-1}$.

3 证明题 (9 分)

设正整数 $n \geq 2$, 证明方程 $(1-x^2)^n = 1-x \quad x \in (0, 1)$ 恰有一解.

4 证明题 (9 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续导数, 对 (a, b) 内任意一点 ξ , 可否在 (a, b) 内找到两点 $\alpha, \beta, \xi \in (\alpha, \beta)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ 成立, 试证明你的结论或举反例.

5 证明题 (9 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上三阶可导, 且 $f'''(x) > 0$, 证明

$$f(a+h) - f(a) < \frac{h}{2} [f'(a) + f'(a+h)] \quad (a < a+h < b)$$

6 证明题 (16 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内二阶可导, 利用两种方法证明: $\exists \xi \in (a, b)$ 满足

$$f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{(b-a)^2}{4} f''(\xi).$$

CHAPTER 4

2023 年转专业考试真题参考答案

1 填空题(每题 8 分, 共 48 分)

1. **Solution.** $\frac{1}{\beta} - \cot \beta$.

注意到 $\tan x = \cot x - 2 \cot 2x$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \tan \frac{\beta}{2^k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \left(\cot \frac{\beta}{2^k} - 2 \cot \frac{\beta}{2^{k-1}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \cot \frac{\beta}{2^n} - \cot \beta \\ &= \frac{1}{\beta} - \cot \beta.\end{aligned}$$

2. **Solution.** $\frac{4}{3}$.

令 $t = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \rightarrow 0^+$, 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{3}} \left[(x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}} \right] = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(1+t^3)^{\frac{2}{3}} - (1-t^3)^{\frac{2}{3}}}{t^3} = \frac{4}{3}.$$

3. **Solution.** $\sqrt{3}$.

用数学归纳法容易证明 $a_n \in (0, \pi)$ 恒成立, 且 $a_{n+1} = \sin a_n < a_n$, 故 $\{a_n\}$ 收敛. 易见其收敛于 0.

由 Stolz 定理,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) - n}{\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 a_{n+1}^2}{a_n^2 - a_{n+1}^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin^2 x}{x^2 - \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{(x + \sin x)(x - \sin x)} \\ &= 3.\end{aligned}$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} a_n = \sqrt{3}$.

4. Solution. 9.

利用

$$\sin 3x = 3x - \frac{(3x)^3}{6} + o(x^3) = 3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3),$$

故

$$\frac{\sin 3x}{x^3} = \frac{3}{x^2} - \frac{9}{2} + o(1).$$

设

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2),$$

则

$$\frac{f(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{x^2} + \frac{f'(0)}{x} + \frac{f''(0)}{2} + o(1).$$

原式

$$\frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{f(x)}{x^2} = \frac{3 + f(0)}{x^2} + \frac{f'(0)}{x} + \left(\frac{f''(0)}{2} - \frac{9}{2}\right) + o(1).$$

为使极限存在且为 0, 应有

$$3 + f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad \frac{f''(0)}{2} - \frac{9}{2} = 0,$$

故

$$f''(0) = 9.$$

5. Solution. $\frac{(-1)^n n!}{4} \left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x+2)^{n+1}} \right].$

注意到

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right).$$

利用

$$\frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{x+C} = \frac{(-1)^n n!}{(x+C)^{n+1}},$$

对两项分别求导得

$$\frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{x-2} = \frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}, \quad \frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{x+2} = \frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}.$$

综上

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{4} \left[\frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}} \right] = \frac{(-1)^n n!}{4} \left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x+2)^{n+1}} \right].$$

6. Solution. $\frac{e^\beta + e^\alpha}{2}.$

不妨设 $\alpha < \beta$, 令 $t = \beta - \alpha > 0$, 将两个表达式转化为关于 t 的函数:

$$\frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha} = \frac{e^{\alpha+t} - e^\alpha}{t} = e^\alpha \cdot \frac{e^t - 1}{t},$$

$$\frac{e^\beta + e^\alpha}{2} = \frac{e^{\alpha+t} + e^\alpha}{2} = e^\alpha \cdot \frac{e^t + 1}{2}.$$

由于 $e^\alpha > 0$, 只需比较 $\frac{e^t - 1}{t}$ 与 $\frac{e^t + 1}{2}$ ($t > 0$) 的大小关系. 令

$$f(t) = \frac{e^t - 1}{e^t + 1} - \frac{t}{2},$$

则 $f'(t) = -\frac{(\mathrm{e}^t - 1)^2}{2(\mathrm{e}^t + 1)^2} < 0$ 恒成立, 所以 $f(t) < f(0) = 0$, 故 $\frac{\mathrm{e}^t - 1}{\mathrm{e}^t + 1} < \frac{t}{2}$, $\frac{\mathrm{e}^t + 1}{2} > \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t}$, 此即

$$\frac{\mathrm{e}^\beta + \mathrm{e}^\alpha}{2} > \frac{\mathrm{e}^\beta - \mathrm{e}^\alpha}{\beta - \alpha}.$$

当 $\alpha > \beta$ 时, 令 $t = \alpha - \beta > 0$ 同理可推得相同结论.

Note: 根据 A-L-G 不等式

$$\frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} < \frac{x_1 + x_2}{2}$$

可以直接得到结论.

另: 用特殊值带入也可以得到答案.

2 证明题 (9 分)

Proof. 将递推式变形为

$$(n+1)a_{n+1} - na_n = a_n - a_{n-1} \quad (n=2,3,\dots).$$

所以

$$\sum_{k=2}^n [(k+1)a_{k+1} - ka_k] = \sum_{k=2}^n (a_k - a_{k-1}) \quad (n \geq 2),$$

化简为

$$na_n - 3 = a_{n-1} \quad (n \geq 3).$$

下面使用数学归纳法证明 $a_n \in \left(0, \frac{6}{n}\right)$, $n \geq 2$.

注意到 $a_2 = 2 \in \left(0, \frac{6}{2}\right)$, 若 $a_k \in \left(0, \frac{6}{k}\right)$, $k \geq 2$, 则

$$a_{k+1} = \frac{1}{k+1}(a_k + 3) \in \left(0, \frac{\frac{6}{k} + 3}{k+1}\right),$$

又 $k \geq 2$ 时 $\frac{\frac{6}{k} + 3}{k+1} \leq \frac{6}{k+1}$, 所以 $a_{k+1} \in \left(0, \frac{6}{k+1}\right)$.

综上 $\forall n \geq 3$, 都有 $0 < na_n - 3 < \frac{6}{n-1}$.

3 证明题 (9 分)

Proof.

法一. 设 $f(x) = (1-x^2)^n - 1 + x$, 则 $f(0) = f(1) = 0$.

因 $f'(x) = -2nx(1-x^2)^{n-1} + 1$, 有 $f'(0) = f'(1) = 1$, 由导数定义与极限比较性可得

$$\exists x_1 \in (0, \delta) (\delta < \frac{1}{2}) \text{ 使 } \frac{f(x_1) - f(0)}{x_1 - 0} > 0, \quad \exists x_2 \in (1-\delta, 1) \text{ 使 } \frac{f(x_2) - f(1)}{x_2 - 1} > 0.$$

即 $f(x_1) > 0$, $f(x_2) < 0$. 由零点定理可知 $\exists \alpha \in (x_1, x_2)$, 使 $f(\alpha) = 0$. 下证唯一性.

假设 β 是 $f(x)$ 异于 α 的零点, 则 $f(0) = f(\alpha) = f(\beta) = f(1) = 0$,

由 Rolle 定理可知 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有三个零点, $f''(x)$ 在 $(0,1)$ 内有两个零点.

又因 $f''(x) = 2n(1-x^2)^{n-2} [(2n-1)x^2 - 1]$ 在 $(0,1)$ 内仅有一个零点, 因此矛盾!

法二. 方程 $(1-x^2)^n = 1-x \quad x \in (0,1)$ 等价于

$$(1+x)^n = (1-x)^{1-n} \quad x \in (0,1) \quad \text{或} \quad n \ln(1+x) + (n-1) \ln(1-x) = 0 \quad x \in (0,1)$$

设 $g(x) = n \ln(1+x) + (n-1) \ln(1-x)$, 则 $g(0) = 0$, $g(1^-) = -\infty$, $g'(x) = \frac{n}{1+x} - \frac{n-1}{1-x} = \frac{1-(2n-1)x}{1-x^2}$.

注意到 $g(0) = 0$, $g'(0) = 1 > 0$,

故 $\exists x_1 \in (0, \delta) (\delta < \frac{1}{2n-1})$, 使 $g(x_1) > 0$. 由零点定理可知 $\exists \alpha \in (x_1, 1)$, 使 $g(\alpha) = 0$.

因 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2n-1}\right)$ 上单增, 在 $\left(\frac{1}{2n-1}, 1\right)$ 上单减, 故 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 有且仅有一个零点.

4 证明题 (9 分)

Proof. 答案是否定的. 可构造反例为 $[-1, 1]$ 上的 $f(x) = x^3$.

考虑 $\xi = 0$, $f'(0) = 0$, 但 $\forall \alpha < 0 < \beta$ 均有 $\frac{\beta^3 - \alpha^3}{\beta - \alpha} = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \neq 0$.

5 证明题 (9 分)

Proof. 构造 $g(h) = f(a+h) - f(a) - \frac{h}{2}[f'(a) + f'(a+h)]$, $g(0) = 0$.
 $g'(h) = f'(a+h) - \frac{1}{2}[f'(a) + f'(a+h)] - \frac{h}{2}f''(a+h)$, $g'(0) = 0$.
 $g''(h) = -\frac{h}{2}f'''(a+h) < 0$, 结合单调性即得.

6 证明题 (16 分)

Proof.

法一, 利用 Cauchy 中值定理.

令 $F(x) = f(x) - 2f\left(\frac{x+a}{2}\right) + f(a)$, $G(x) = \frac{1}{4}(x-a)^2$, 则 $F(a) = G(a) = 0$.

由 Cauchy 中值定理,

$$\begin{aligned} \frac{F(b)}{G(b)} &= \frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} \\ &= \frac{F'(\eta)}{G'(\eta)} \\ &= \frac{f'(\eta) - f'\left(\frac{\eta+a}{2}\right)}{\frac{\eta-a}{2}}. \end{aligned}$$

其中 $\eta \in (a, b)$. 由 Lagrange 中值定理,

$$\begin{aligned} \frac{f'(\eta) - f'\left(\frac{\eta+a}{2}\right)}{\frac{\eta-a}{2}} &= f''(\xi) \cdot \frac{\eta - \frac{\eta+a}{2}}{\frac{\eta-a}{2}} \\ &= f''(\xi). \end{aligned}$$

其中 $\xi \in \left(\frac{\eta+a}{2}, \eta \right)$, 得证.

法二, 利用 Taylor 公式.

由 Taylor 定理得

$$f(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right) + \frac{f''(\xi_1)}{2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

$$f(b) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right) + \frac{f''(\xi_2)}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,$$

$$f(a) + f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a)^2 \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{8}.$$

由 Darboux 定理, 存在 ξ 使得 $f''(\xi) = \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2}$, 得证.

法三, 利用常数 K 值.

记 $K = \frac{f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a)}{\frac{1}{4}(b-a)^2}$. 令

$$F(x) = f(x) - 2f\left(\frac{a+x}{2}\right) + f(a) - \frac{(x-a)^2}{4}K,$$

则 $F(a) = F(b) = 0$, 故存在 $\eta \in (a, b)$, 使 $F'(\eta) = 0$, 即

$$f'(\eta) - f'\left(\frac{a+\eta}{2}\right) - \frac{\eta-a}{2}K = 0,$$

进一步存在 $\xi \in \left(\frac{\eta+a}{2}, \eta \right) \subset (a, b)$, 使

$$f''(\xi) \left(\eta - \frac{a+\eta}{2} \right) - \frac{\eta-a}{2}K = 0,$$

化简得 $f''(\xi) = K$.

延中科技大学转专业考试真题群

CHAPTER 5

2022 年转专业考试真题

1 选择题(每题 3 分, 共 30 分)

1. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 存在是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的(*)条件.

- A. 充分不必要 B. 必要不充分
C. 充分必要 D. 既不充分也不必要

2. 如果 $x \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{ax^2 + bx + c}$ 是比 $\frac{1}{x+1}$ 高阶的无穷小, 则 a, b, c 应满足(*).

- A. $a = 0, b = 1, c = 1$ B. $a \neq 0, b = 1, c$ 为任意常数
C. $a \neq 0, b, c$ 为任意常数 D. a, b, c 为任意常数

3. 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{|x-1|}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ 的连续区间为(*).

- A. $(-\infty, +\infty)$ B. $(-\infty, 1)$ 与 $[1, +\infty)$
C. $(-\infty, 1)$ 与 $(1, +\infty)$ D. $(-\infty, 1]$ 与 $(1, +\infty)$

4. 下列正确的命题是(*).

- (1): 初等函数在其定义域内连续;
(2): 设函数定义在一个区间上, 若函数在区间内一点连续, 则它在该点的某邻域内连续;
(3): 若函数在区间 I 上连续, 则函数在 I 上有界;
(4): 若函数在区间 I 上连续, 则函数在 I 上有最大值.
- A. (1)(2)(3) B. (2)(3)(4)
C. (2)(4) D. 都不真

5. 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导, 且 $f(x) < 0$, 则(*).

- A. $f(-x) > 0$ B. $f'(-x) < 0$
C. $\lim_{x \rightarrow 0} f(-x) < 0$ D. $\lim_{x \rightarrow 0} f(-x) > 0$

6. 设函数 $y = f(x)$ 具有二阶导数, 且 $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$, Δx 为自变量在 x_0 的增量, Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在 x_0 对应的增量和微分. 若 $\Delta x > 0$, 则 (*).

- A. $0 < \Delta y < dy$
 B. $0 < dy < \Delta y$
 C. $\Delta y < dy < 0$
 D. $dy < \Delta y < 0$

7. 已知 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = t^2 \end{cases}$ 所确定, $\varphi''(t)$ 存在, 则 $\frac{d^2x}{dy^2} = (*)$.

- A. $\frac{t\varphi''(t) - \varphi'(t)}{4t^3}$
 B. $\frac{t\varphi''(t) + \varphi'(t)}{4t^3}$
 C. $\frac{\varphi''(t) - t\varphi'(t)}{4t^3}$
 D. $\frac{t\varphi''(t) - \varphi(t)}{4t^3}$

8. $y = \sin^4 x - \cos^4 x$, 则 $y^{(n)} = (*)$.

- A. $2^n \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$
 B. $2^n \sin\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$
 C. $-2^n \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$
 D. $-2^n \sin\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$

9. 设 $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{3^{\frac{k}{n}}}{n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = (*)$.

- A. $\frac{4}{\ln 3}$
 B. $\frac{2}{\ln 3}$
 C. $\frac{3}{\ln 3}$
 D. $\frac{3}{\ln 2}$

10. $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 9}$ 全部的渐近线为 (*).

- A. $x = \pm 3, y = x$
 B. $x = \pm 3, y = 2x$
 C. $x = \pm 3, y = -x$
 D. $x = \pm 3, y = 3x$

2 填空题 (每题 3 分, 共 30 分)

1. 已知 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 3$, $f^{-1}(x) < x - 2$ 成立, 则 x 的取值范围是_____.

2. 设 $x > 1$, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x^n + x^{3n}} = _____$.

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \sin x \right) = _____$.

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x \sin^2 x} = _____$.

5. 函数 $f(x) = x^4$ 在区间 $[1, 2]$ 内满足 Lagrange 中值定理的 ξ 的值 = _____.

6. 函数 $f(x) = x e^{-x}$ 的递增区间为_____.

7. 若 $f(x) = x^3 \ln(2+x)$, 则 $f^{(6)}(0) = _____$.

8. 设 $f(x)$ 具有任意阶导数, $f'(x) = f^2(x)$, 则 $f^{(n)}(x) = _____$.

9. 设 $k > 0$, 则 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$ 在 $(0, +\infty)$ 内的零点个数为 _____.

10. 设 $y = y(x)$ 由 $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$ 确定, 则 $y = y(x)$ 的极小值点为 _____.

3 解答题 (共 40 分)

1. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right)^{\frac{1}{x}} \right].$

2. 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导, 如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + 2\sqrt{x}f'(x)] = 2022$, 计算极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$

3. 对任意正实数 β , 记函数 $f(x) = |\lg x|$ 在 $[\beta, +\infty)$ 上的最小值为 m_β , 函数 $g(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$ 在 $[0, \beta]$ 上的最大值为 M_β , 若 $M_\beta - m_\beta = \frac{1}{2}$, 求 β 的所有可能值.

4. 设 $\alpha \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \frac{x}{e^x} - \alpha$ 有两个不同的零点 x_1, x_2 .

(1) 证明: $\alpha \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$;

(2) 证明: $|x_2 - x_1| > 2\sqrt{1 - e\alpha}$.

CHAPTER 6

2022 年转专业考试真题参考答案

1 填空题 (9 分)

1. **Solution.** B.

2. **Solution.** C.

由题可得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{ax^2+bx+c}{x+1}} = 0.$$

而 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{ax^2+bx+c}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{ax^2+bx+c} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2ax+b}$, 故 $a \neq 0$.

3. **Solution.** C.

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 1, \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}, \text{ 所以 } f(x) \text{ 仅在 } x = 1 \text{ 处不连续. 注意本题不是单侧连续.}$$

4. **Solution.** D.

基本初等函数在其定义域内连续, 初等函数在其定义区间内连续, (2): 例如 $f(x) = xD(x)$, $D(x)$ 是 Dirichlet 函数, 可以验证 $f(x)$ 仅在 $x = 0$ 处连续 (3)(4) 闭区间上连续函数具有最值定理以及有界性, 选择 D.

5. **Solution.** C.

因 $f(x)$ 可导, 故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续. 令 $y = -x$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(-x) = \lim_{y \rightarrow 0} f(y) = f(0) < 0$, 选择 C.

6. **Solution.** A.

由 Taylor 定理, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \frac{1}{2}f''(\xi)(\Delta x)^2$, $\xi \in (x, x + \Delta x)$.

因 $f''(x) < 0$, 故 $\Delta y < f'(x)\Delta x$. 而 $dy = f'(x)dx = f'(x)\Delta x$, 故 $\Delta y < dy$.

另一方面, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(\eta)\Delta x > 0$, $\eta \in (x, x + \Delta x)$.

因此 $0 < \Delta y < dy$, 选择 A.

7. **Solution.** A.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}} = \frac{\varphi'(t)}{2t}, \text{ 所以}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dy^2} &= \frac{d}{dy} \left(\frac{dx}{dy} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dy} \right) \cdot \frac{1}{\frac{dy}{dt}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{t\varphi''(t) - \varphi'(t)}{t^2} \cdot \frac{1}{2t} \\ &= \frac{t\varphi''(t) - \varphi'(t)}{4t^3}.\end{aligned}$$

8. **Solution.** C.

注意到

$$y = \sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = -\cos 2x,$$

简单归纳即得 $y^{(n)}(x) = -2^n \cos \left(2x + \frac{n\pi}{2} \right)$. 选择 C.

9. **Solution.** B.

由定积分的定义可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{3^{\frac{k}{n}}}{n} = \int_0^1 3^x dx = \left. \frac{3^x}{\ln 3} \right|_0^1 = \frac{2}{\ln 3}.$$

10. **Solution.** A.

令 $x^2 - 9 = 0$ 得 $x = \pm 3$, 所以 $y = f(x)$ 有垂直渐近线 $x = \pm 3$.

注意到

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2-9}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2-9} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2-9} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{9x}{x^2-9} \right) = 0,$$

故 $y = f(x)$ 有斜渐近线 $y = x$.

$y = f(x)$ 无水平渐近线, 选择 A.

2 填空题 (每题 8 分, 共 48 分)

1. **Solution.** $(3, +\infty)$.

由 $\log_{\frac{1}{2}} x = y - 3$ 得 $x = \left(\frac{1}{2} \right)^{y-3}$, 所以 $f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{2} \right)^{x-3}$.

即解不等式 $\left(\frac{1}{2} \right)^{x-3} < x - 2$.

记 $g(x) = x - 2 - \left(\frac{1}{2} \right)^{x-3}$, 则 $g'(x) = 1 + \left(\frac{1}{2} \right)^{x-3} \ln 2 > 0$, 所以 $g(x)$ 单调增加.

又 $g(3) = 0$, 故 $g(x) > 0 \Rightarrow x \in (3, +\infty)$.

2. **Solution.** x^3 .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x^n + x^{3n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^3 \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{x^{2n}} + 1} = x^3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left[\frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x^{2n}} \right)}{n} \right] = x^3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(\frac{1}{nx^{2n}} \right) = x^3.$$

3. **Solution.** 1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \sin x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1 - 0 = 1.$$

4. **Solution.** 1.

注意到

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1} x^{2n+1},$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x + \frac{1}{2 \cdot 3}(2x)^3) - 2(x + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3) + o(x^3)}{x^3} = 1.$$

5. **Solution.** $\sqrt[3]{\frac{15}{4}}$.

由 $f(2) - f(1) = 15 = f'(\xi)(2-1) = 4\xi^3, \xi \in (1, 2)$ 解得 $\xi = \sqrt[3]{\frac{15}{4}}$.

6. **Solution.** $(-\infty, 1)$.

计算 $f'(x) = (1-x)e^{-x}$, 令 $f'(x) > 0$ 解得 $x \in (-\infty, 1)$.

7. **Solution.** 30.

$$f(x) = x^3 \ln(2+x) = x^3 \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) + \ln 2 \cdot x^3.$$

注意到

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}.$$

$$\text{所以 } f(x) = x^3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^n + \ln 2 \cdot x^3.$$

由 Taylor 定理,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

将上述两式对照, 得 $\frac{f^{(6)}(0)}{6!} = \frac{1}{2^3 \cdot 3}$, 解得 $f^{(6)}(0) = 30$.

8. **Solution.** 0 或 $\frac{n!}{(C-x)^{n+1}}$.

由 $f'(x) = f^2(x)$, 若 $f(x) \equiv 0$, 显然满足题意. 此时 $f^{(n)}(x) \equiv 0$.

若不然, 则可得 $\left(-\frac{1}{f(x)}\right)' = 1$, 因此 $f(x) = \frac{1}{C-x}$.

注意到

$$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = \frac{(-a)^n \cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}.$$

$$\text{故 } f^{(n)}(x) = \frac{n! \cdot 1^n}{(C-x)^{n+1}} = \frac{n!}{(C-x)^{n+1}}.$$

9. Solution. 2.

即 $k = \frac{x}{e} - \ln x$.

记 $t(x) = \frac{x}{e} - \ln x$, 则 $t'(x) = \frac{1}{e} - \frac{1}{x}$. 所以 $t(x)$ 在 $(0, e)$ 单调减, 在 $(e, +\infty)$ 单调增.

因 $t(0^+) = t(+\infty) = +\infty$, $t(e) = 0$, 又 $k > 0$, 作图可得共有 2 个零点.

10. Solution. $x = 1$

方程 $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$ 两边对 x 求导, 得 $6y^2y' - 4yy' + 2y + 2xy' - 2x = 0$. 即

$$y'(3y^2 - 2y + x) = x - y \quad (*)$$

令 $y' = 0$ 得 $y = x$, 代入原方程得

$$(x - 1)(2x^2 + x + 1) = 0.$$

解得 $x = 1$. 再对 $(*)$ 式求导, 有

$$y''(3y^2 - 2y + x) + y' \frac{\partial}{\partial x}(3y^2 - 2y + x) = 1 - y'.$$

代入 $x = y = 1$, $y' = 0$ 得 $y''(1) = \frac{1}{2} > 0$, 故 $x = 1$ 是 $y(x)$ 的极小值点.

3 解答题

1. Solution.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left[\frac{1}{x} \ln \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left[\frac{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} - 1}{x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left[\frac{\frac{\ln(1+x)-x}{x}}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left[\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left[\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \right] = \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \right] \\ &= \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x}{x^2} \right] = e^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

2. Solution.

令 $F(x) = e^{\sqrt{x}}f(x)$, 由广义 L'Hospital 法则 ($\frac{*}{\infty}$ 型) 可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{e^{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F'(x)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}} \\ &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}f(x) + e^{\sqrt{x}}f'(x)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + 2\sqrt{x}f'(x)] = 2022. \end{aligned}$$

3. Solution.

若 $0 < \beta \leq 1$, $M_\beta = \sin \frac{\pi\beta}{2}$, 而 $m_\beta = 0$, 故 $\sin \frac{\pi\beta}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi\beta}{2} = \frac{\pi}{6}$, 即 $\beta = \frac{1}{3}$.

若 $\beta > 1$, $M_\beta = 1$, 而 $m_\beta = \lg \beta$, 故 $1 - \lg \beta = \frac{1}{2}$, 解得 $\beta = \sqrt{10}$.

综上, $\beta \in \left\{ \frac{1}{3}, \sqrt{10} \right\}$.

4. Proof.

(1) 令 $f(x) = 0$, 得 $\alpha = \frac{x}{e^x}$. 令 $g(x) = \frac{x}{e^x}$, 则 $g'(x) = \frac{1-x}{e^x}$.

故 $g(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 单调增, 在 $(1, +\infty)$ 单调减.

因为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, $g(1) = \frac{1}{e}$, 作图可得 $\alpha \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$.

(2) 由 $\frac{x_1}{e^{x_1}} = \frac{x_2}{e^{x_2}} = \alpha$ 可得

$$\ln \alpha = \ln x_1 - x_1 = \ln x_2 - x_2.$$

此即

$$\frac{x_2 - x_1}{\ln x_2 - \ln x_1} = 1.$$

由 A-L-G 不等式有

$$\frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{x_2 - x_1}{\ln x_2 - \ln x_1} = 1,$$

所以 $x_1 + x_2 > 2$. 不妨设 $x_2 > x_1$, 则 $|x_2 - x_1| = x_2 - x_1 = (x_2 - 1) + (1 - x_1)$. 而 $x_2 - 1 > 1 - x_1$,

下证

$$1 - x_1 > \sqrt{1 - e\alpha}.$$

上式即 $x_1^2 - 2x_1 > -\frac{ex_1}{e^{x_1}}$, 故即证 $2 - x_1 < e^{1-x_1}$, $x_1 \in (0, 1)$.

注意到

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > 1 + x, x > 0,$$

所以 $e^{1-x_1} > 2 - x_1$, 证毕!

延中科技大学转专业交流群

CHAPTER 7

2021 年转专业考试真题

1 填空题

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \arctan \left(\frac{1}{k^2 + k + 1} \right) = \text{_____}.$
2. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{f(x)}{\tan x} \right)}{2^x - 1} = 8$, 则极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \text{_____}.$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^4} + 2 \sqrt[n]{n^2} - 3}{\sqrt[n]{n^2} - 3 \sqrt[n]{n} + 2} = \text{_____}.$
4. 设 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续且满足方程 $g(x) + g(y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$, 则 $g(x) = \text{_____}.$
5. 若 $x = a \cos t + b \sin t$, $y = a \sin t - b \cos t$, 则 $\frac{d^m x}{dt^m} \cdot \frac{d^n y}{dt^n} - \frac{d^n x}{dt^n} \cdot \frac{d^m y}{dt^m} = \text{_____}.$

2 证明题

1. 设数列 $\{\theta_n\}$ 满足 $\theta_n \neq 0$, 且 $\theta_n^2 - \theta_{n-1} \cdot \theta_{n+1} = 1(n = 1, 2, 3 \dots)$. 证明: 存在一个实数 λ , 使得对所有 $n \geq 1$, 有 $\theta_{n+1} = \lambda \theta_n - \theta_{n-1}$.

2. 设 $f(x)$ 定义在 $x = 0$ 的某个邻域内，且满足 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\frac{x}{2})}{x} = 0$. 证明: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.

3. 已知函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内有二阶导数, $f(0) = f'(0) = 0$, 且 $|f''(x)| \leq |f(x)| + |f'(x)|$. 证明: 存在 $\delta > 0$, 使得在 $(-\delta, \delta)$ 内 $f(x) \equiv 0$.

4. 设可微函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格单调减少, 如果当 $x \in (0, +\infty)$ 时 $0 < |f(x)| < |f'(x)|$ 成立, 证明:
当 $x \in (0, 1)$ 时, 必有 $xf(x) > \frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)$.

CHAPTER 8

2021 年转专业考试真题参考答案

1 填空题(每题 8 分, 共 48 分)

1. **Solution.** $\frac{\pi}{2}$.

注意到

$$\arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \arctan\left[\frac{(k+1)-k}{1+(k+1)k}\right] = \arctan(k+1) - \arctan k.$$

故

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} [\arctan(k+1) - \arctan k] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [\arctan(n+1) - \arctan 0] \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

2. **Solution.** $8 \ln 2$.

计算

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{f(x)}{\tan x}\right)}{2^x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{\tan x}}{2^x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{(e^{x \ln 2} - 1)x} \\ &= \frac{f(x)}{\ln 2 \cdot x^2} = 8, \end{aligned}$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 8 \ln 2$.

3. **Solution.** -8 .

令 $\sqrt[n]{n} = t \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^4} + 2\sqrt[n]{n^2} - 3}{\sqrt[n]{n^2} - 3\sqrt[n]{n} + 2} &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^4 + 2t^2 - 3}{t^2 - 3t + 2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t^2 - 1)(t^2 + 3)}{(t - 1)(t - 2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t + 1)(t^2 + 3)}{t - 2} \\ &= -8.\end{aligned}$$

4. **Solution.** $g(1) \cdot x^2$.

在方程 $g(x) + g(y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$ 中,

令 $x = y = 0$, 得 $g(0) = 0$; 令 $y = 0$, 得 $g(x) = g(|x|)$. 所以 $g(x)$ 为偶函数.

下面考虑 $x, y > 0$ 的情况.

注意到原方程即 $g(\sqrt{x^2}) + g(\sqrt{y^2}) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$. 令 $h(x) = g(\sqrt{x})(x > 0)$, 则

$$h(x^2) + h(y^2) = h(x^2 + y^2) \quad \text{或} \quad h(a) + h(b) = h(a + b).$$

所以 $h(x) = kx$. (注: 参见《数学分析中的典型问题与方法》2.4 函数方程 例 2.4.1.)

从而 $g(x) = kx^2 (x > 0)$.

由偶函数的性质即得 $g(x) = kx^2 (x \in \mathbf{R})$. 令 $x = 1$ 得其中 $k = g(1)$.

5. **Solution.** $(a^2 + b^2) \sin \frac{n-m}{2}\pi$.

注意到

$$x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos t + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin t \right) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(t - \alpha),$$

其中 $\tan \alpha = \frac{b}{a}$. 同理

$$y = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin t - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos t \right) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(t - \alpha).$$

而

$$\frac{d^k \cos t}{dt^k} = \cos \left(t + \frac{k\pi}{2} \right), \quad \frac{d^k \sin t}{dt^k} = \sin \left(t + \frac{k\pi}{2} \right), \quad k \in \mathbf{N}.$$

$$\text{所以 } \frac{d^m x}{dt^m} \cdot \frac{d^n y}{dt^n} - \frac{d^n x}{dt^n} \cdot \frac{d^m y}{dt^m}$$

$$\begin{aligned}&= (a^2 + b^2) \left[\cos \left(t - \alpha + \frac{m\pi}{2} \right) \cdot \sin \left(t - \alpha + \frac{n\pi}{2} \right) - \cos \left(t - \alpha + \frac{n\pi}{2} \right) \cdot \sin \left(t - \alpha + \frac{m\pi}{2} \right) \right] \\ &= (a^2 + b^2) \sin \left[\left(t - \alpha + \frac{n\pi}{2} \right) - \left(t - \alpha + \frac{m\pi}{2} \right) \right] \\ &= (a^2 + b^2) \sin \frac{n-m}{2}\pi.\end{aligned}$$

2 证明题 (9 分)

1. **Proof.** 由题 $\theta_{n+1}^2 - \theta_n \cdot \theta_{n+2} = 1$, $\theta_n^2 - \theta_{n-1} \cdot \theta_{n+1} = 1$,

两式相减得 $\theta_{n+1}^2 + \theta_{n-1} \cdot \theta_{n+1} - \theta_n^2 - \theta_n \cdot \theta_{n+2} = 0$, 即 $\theta_{n+1}(\theta_{n-1} + \theta_{n+1}) = \theta_n(\theta_n + \theta_{n+2})$.

所以 $\frac{\theta_{n+2} + \theta_n}{\theta_{n+1}} = \frac{\theta_{n+1} + \theta_{n-1}}{\theta_n} = \dots = \frac{\theta_2 + \theta_0}{\theta_1} = \lambda$.

2. **Proof.** 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = 0$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $|x| < \delta$ 时, 有

$$\left| \frac{f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)}{x} \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

亦即

$$-\frac{\varepsilon}{3}|x| < f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) < \frac{\varepsilon}{3}|x|.$$

将 x 替换为 $\frac{x}{2^k}$ ($k \in \mathbb{N}$), 得

$$-\frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{1}{2^k}|x| < f\left(\frac{x}{2^k}\right) - f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) < \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{1}{2^k}|x| (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

注意到

$$\sum_{k=0}^n \left[f\left(\frac{x}{2^k}\right) - f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) \right] = f(x) - f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right),$$

所以

$$-\frac{\varepsilon}{3} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}|x| < f(x) - f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) < \frac{\varepsilon}{3} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}|x|.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 注意到 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$, 得

$$-\frac{2\varepsilon}{3}|x| \leq f(x) \leq \frac{2\varepsilon}{3}|x|.$$

故 $\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$, 因此 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x)}{x} \right| = 0$.

3. **Proof.**

取 $\delta = \frac{1}{2}$, 由于 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上二阶可导, 所以 $f(x)$, $f'(x)$ 在区间 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 上连续.

由闭区间上连续函数的有界性, 存在 $M \geq 0$, 使得

$$M = \max \left\{ |f(x)| + |f'(x)| \mid x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \right\}.$$

不妨假设这一最大值点为 x_0 , 即 $M = |f(x_0)| + |f'(x_0)|$.

$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, 由 Taylor 公式得

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(\xi) \frac{x^2}{2} = f''(\xi) \frac{x^2}{2}, \quad f'(x) = f'(0) + f''(\eta)x,$$

其中 ξ, η 介于 0 与 x 之间.

注意到 $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 时, $|x| \leq \frac{1}{2}$, $x^2 \leq \frac{1}{4}$. 利用 $|f''(x)| \leq |f(x)| + |f'(x)| \leq M$, 从而有

$$\begin{aligned} M &= |f(x_0)| + |f'(x_0)| = |f''(\xi)| \frac{x_0^2}{2} + |f''(\eta)||x_0| \\ &\leq \frac{1}{8}|f''(\xi)| + \frac{1}{2}|f''(\eta)| \\ &\leq \frac{5M}{8}, \end{aligned}$$

故 $M = 0$, 必有 $f(x) = f'(x) \equiv 0$, 得证.

4. **Proof.** 由 $|f(x)| > 0$ 及 $f(x)$ 的连续性可知, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上不变号.

若 $f(x) < 0$, 令 $g(x) = xf(x) - \frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)$, 则

$$g'(x) = xf'(x) + f(x) + \frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^3}f'\left(\frac{1}{x}\right) < 0,$$

故 $g(x)$ 单调减少. 当 $x \in (0, 1)$ 时, $g(x) > g(1) = 0$, 原命题成立.

若 $f(x) > 0$, 则 $0 < f(x) < -f'(x)$, 即 $f'(x) + f(x) < 0$.

令 $\varphi(x) = f(x)e^x$, 则 $\varphi'(x) = e^x[f(x) + f'(x)] < 0$, 即 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调减少.

$\forall x \in (0, 1)$, $\frac{1}{x} > 1 > x$, 所以 $\varphi(x) > \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$, 即

$$f(x)e^x > f\left(\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} \quad \text{或} \quad xf(x) > xf\left(\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}-x}.$$

接下来只需证 $xf\left(\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}-x} > \frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)$.

因 $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$, 所以即证 $x^2e^{\frac{1}{x}-x} > 1$.

令 $h(x) = 2\ln x + \frac{1}{x} - x$, 则 $h'(x) = -\frac{(x-1)^2}{x^2} < 0$, $h(x)$ 单调减少,

故 $h(x) > h(1) = 0$, $x^2e^{\frac{1}{x}-x} > 1$, 即 $xf(x) > \frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)$ ($0 < x < 1$).

错解: 由假设可得 $0 < f(x) < -f'(x)$, 故 $\frac{-f'(x)}{f(x)} > 1$, 所以

$$\ln \frac{f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)} = - \int_x^{\frac{1}{x}} \frac{f'(t)}{f(t)} dt > \int_x^{\frac{1}{x}} dt = \frac{1}{x} - x, x \in (0, 1).$$

故 $\frac{f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)} > e^{\frac{1}{x}-x}$. 又 $e^{\frac{1}{x}-x} > \frac{1}{x^2}$, 即得

$$xf(x) > \frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right), x \in (0, 1).$$

错误原因在于使用 Newton-Leibniz 公式时要求函数 $\frac{f'(t)}{f(t)}$ 在区间 $\left(x, \frac{1}{x}\right)$ 上连续, 此处无法得出.

CHAPTER 9

2020 年转专业考试真题

1 解答题

1. 设 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的有界实函数, 且 $f\left(x + \frac{1}{11}\right) + f\left(x + \frac{1}{12}\right) = f(x) + f\left(x + \frac{23}{132}\right)$ ($\forall x \in \mathbf{R}$), 求证: $f(x)$ 是周期函数.
2. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i = A$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - a_{n-1}) = 0$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
3. 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{3}} \left[(x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}} \right]$.¹
4. 求在 \mathbf{R} 上满足方程 $f(2020x) + f(2019x) = 2022x + 2021$ 的连续解.

¹此题与 2023 年真题填空题第 2 题一致.

5. 讨论函数 $f(x) = [x] \sin \pi x$ 的连续性与可导性 ($[x]$ 表示不超过 x 的最大整数).

6. 计算 $\frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{x^2 + a^2} \right) \Big|_{x=0}$, 其中 n 是任意正整数.

注: 原题没有 $x = 0$, 但那样无法正常求解, 怀疑打印错误, 此处加上. 答案会附上不考虑此条件的解法.

7. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$. 求证: 存在不同的 $\xi, \eta \in (0, 1)$, 使 $f'(\xi)f'(\eta) = 1$.

8. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x + \frac{f(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = e^3$, 证明: $f''(0) = 4$.

CHAPTER 10

2020 年转专业考试真题参考答案

1 解答题

1. **Proof.** 设 $F(x) = f\left(x + \frac{1}{11}\right) - f(x)$, 则 $F\left(x + \frac{1}{12}\right) = F(x)$, 故 $F(x)$ 以 $\frac{1}{12}$ 为周期, 也以 1 为周期, 即 $F(x+1) = F(x)$, 从而

$$f\left(x + \frac{1}{11}\right) - f(x) = f\left(x + \frac{12}{11}\right) - f(x+1) \quad \text{或} \quad f(x+1) - f(x) = f\left(x + \frac{12}{11}\right) - f\left(x + \frac{1}{11}\right).$$

故 $f(x+1) - f(x)$ 以 $\frac{1}{11}$ 为周期, 也以 1 为周期, 则

$$f(x+n) - f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} [f(x+i+1) - f(x+i)] = n[f(x+1) - f(x)].$$

即 $f(x+1) - f(x) = \frac{f(x+n) - f(x)}{n}$.

令 $n \rightarrow \infty$, 由于 $f(x)$ 有界, 所以 $f(x+1) - f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x+n) - f(x)}{n} = 0$.

所以 $f(x)$ 以 1 为周期.

2. **Solution.** 不妨定义 $a_0 = 0$, 由 Stolz 定理,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^n i(a_i - a_{i-1})}{n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{na_n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{n+1}{n} a_n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(a_n - a_{n-1})}{n - (n-1)} = 0. \end{aligned}$$

所以 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i = A$.

3. 参见 2023 年真题填空题第 2 题 **解析**.

4. **Solution.** 不妨考虑一般情况: $f(\alpha x) + f(\beta x) = ax + b (\alpha > \beta)$.

$$\text{上式即 } f(x) + f\left(\frac{\beta}{\alpha}x\right) = \frac{ax}{\alpha} + b.$$

所以

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{ax}{\alpha} + b - f\left(\frac{\beta}{\alpha}x\right) \\ &= \frac{ax}{\alpha} + b - \left[\frac{ax}{\alpha} \frac{\beta}{\alpha} + b - f\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}x\right) \right] \\ &= \frac{ax}{\alpha} \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) + f\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}x\right). \end{aligned}$$

利用上式迭代可得

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{ax}{\alpha} \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) + \frac{ax}{\alpha} \frac{\beta^2}{\alpha^2} \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) + f\left(\frac{\beta^4}{\alpha^4}x\right) \\ &= \frac{ax}{\alpha} \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} - \frac{\beta^3}{\alpha^3}\right) + f\left(\frac{\beta^4}{\alpha^4}x\right) \\ &= \dots = \frac{ax}{\alpha} \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} - \dots - \frac{\beta^{2n-1}}{\alpha^{2n-1}}\right) + f\left(\frac{\beta^{2n}}{\alpha^{2n}}x\right). \end{aligned}$$

$$\text{令 } n \rightarrow \infty, \text{ 因 } \frac{\beta}{\alpha} < 1, \text{ 故 } \frac{\beta^{2n}}{\alpha^{2n}} \rightarrow 0, \text{ 且 } 1 - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} - \dots - \frac{\beta^{2n-1}}{\alpha^{2n-1}} \rightarrow \frac{1}{1 - \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}.$$

利用 $f(x)$ 的连续性, 得到

$$f(x) = \frac{ax}{\alpha} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} + f(0) = \frac{ax}{\alpha + \beta} + \frac{b}{2}.$$

$$\text{将 } \alpha = 2020, \beta = 2019, a = 2022, b = 2021 \text{ 代入, 立得 } f(x) = \frac{2022}{4039}x + \frac{2021}{2}.$$

5. **Solution.**

(1) 连续性: 对任意非整数点 $x \notin \mathbf{Z}$, $[x]$ 在该点的某邻域内取常值, 且 $\sin \pi x$ 连续, 故 $f(x) = [x] \sin \pi x$ 在非整数点连续.

对任意整数点 $n \in \mathbf{Z}$, 有

$$f(n) = n \sin(n\pi) = 0.$$

当 $x \rightarrow n^-$ 时,

$$[x] = n - 1, \quad \sin \pi x \rightarrow \sin(n\pi) = 0,$$

所以 $f(x) \rightarrow (n-1) \cdot 0 = 0$. 当 $x \rightarrow n^+$ 时,

$$[x] = n, \quad \sin \pi x \rightarrow 0,$$

所以 $f(x) \rightarrow n \cdot 0 = 0$. 因此左右极限均等于 $f(n)$, 故 $f(x)$ 在整数点亦连续.

综上, f 在 \mathbf{R} 上处处连续.

(2) 可导性: 对非整数点 $x \notin \mathbf{Z}$, $[x] = k$ 为常数, 则

$$f(x) = k \sin \pi x, \quad f'(x) = k\pi \cos \pi x$$

存在, 故 $f(x)$ 在非整数点可导.

考察整数点 $x = n$ 处 $f(x)$ 的左右导数.

令 $h \rightarrow 0^-$, 则

$$\begin{aligned} f(n+h) &= (n-1) \sin(\pi(n+h)) = (n-1)(-1)^n \sin(\pi h), \\ \frac{f(n+h)-f(n)}{h} &= (n-1)(-1)^n \frac{\sin(\pi h)}{h} \rightarrow (n-1)(-1)^n \pi. \end{aligned}$$

令 $h \rightarrow 0^+$, 则

$$\begin{aligned} f(n+h) &= n \sin(\pi(n+h)) = n(-1)^n \sin(\pi h), \\ \frac{f(n+h)-f(n)}{h} &= n(-1)^n \frac{\sin(\pi h)}{h} \rightarrow n(-1)^n \pi. \end{aligned}$$

左右导数不相等, 故 f 在整数点不可导.

综上所述: f 在 \mathbf{R} 上处处连续, 但仅在 $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ 上可导.

6. Solution.

法一. 注意到

$$\frac{1}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a^2} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x^2}{a^2} \right)^n = \frac{1}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{a^{2n}}.$$

由 Taylor 定理, 与 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ 对照, 故当 n 为奇数时, $\left. \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{x^2 + a^2} \right) \right|_{x=0} = 0$.

当 n 为偶数时, $\left. \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{x^2 + a^2} \right) \right|_{x=0} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} n!}{a^{n+2}}$.

法二. 函数即 $(a^2 + x^2)y = 1$. 由 Leibniz 公式可得

$$(x^2 + a^2)y^{(n)} + 2nxy^{(n-1)} + n(n-1)y^{(n-2)} = 0,$$

令 $x = 0$ 得 $a^2 y^{(n)}(0) + n(n-1)y^{(n-2)}(0) = 0$.

注意到 $y(0) = \frac{1}{a^2}$, $y'(0) = 0$. 当 n 为奇数时, 由上式易得 $y^{(n)}(0) = 0$.

当 n 为偶数时,

$$\begin{aligned} y^{(n)}(0) &= \frac{y^{(n)}(0)}{y^{(n-2)}(0)} \cdot \frac{y^{(n-2)}(0)}{y^{(n-4)}(0)} \cdots \frac{y^{(2)}(0)}{y(0)} \cdot y(0) \\ &= -\frac{n(n-1)}{a^2} \cdot -\frac{(n-2)(n-3)}{a^2} \cdots \frac{2 \cdot 1}{a^2} \cdot \frac{1}{a^2} \\ &= \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} n!}{a^{n+2}}. \end{aligned}$$

当 $x \neq 0$ 时, 引入复数: $\frac{1}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2ai} \left(\frac{1}{x-ai} - \frac{1}{x+ai} \right)$.

注意到

$$\left(\frac{1}{ax+b} \right)^{(n)} = \frac{(-a)^n \cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}.$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{x^2 + a^2} \right) &= \frac{1}{2ai} \left(\frac{1}{x-ai} - \frac{1}{x+ai} \right)^{(n)} \\ &= \frac{(-1)^n n!}{2ai} \left[\frac{1}{(x-ai)^{n+1}} - \frac{1}{(x+ai)^{n+1}} \right]. \end{aligned}$$

设 $x + ai = \rho e^{i\varphi}$, 其中 $\rho = \sqrt{x^2 + a^2}$, $\varphi = \arctan\left(\frac{a}{x}\right)$. 利用欧拉公式

$$e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta,$$

则 $x - ai = \rho e^{-i\varphi}$, 且

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x - ai)^{n+1}} - \frac{1}{(x + ai)^{n+1}} &= \rho^{-(n+1)} [e^{i(n+1)\varphi} - e^{-i(n+1)\varphi}] \\ &= \rho^{-(n+1)} [(\cos(n+1)\varphi + i \sin(n+1)\varphi) - (\cos(n+1)\varphi - i \sin(n+1)\varphi)] \\ &= 2i\rho^{-(n+1)} \sin(n+1)\varphi. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{x^2 + a^2} \right) &= \frac{(-1)^n n!}{2ai} \cdot 2i\rho^{-(n+1)} \sin(n+1)\varphi \\ &= \frac{(-1)^n n!}{a} \cdot \left(\sqrt{x^2 + a^2} \right)^{-(n+1)} \sin \left[(n+1) \arctan \left(\frac{a}{x} \right) \right] \\ &= \frac{(-1)^n n!}{a(x^2 + a^2)^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \sin \left[(n+1) \arctan \left(\frac{a}{x} \right) \right]. \end{aligned}$$

7. **Proof.** 令 $g(x) = f(x) + x - 1$, 由于

$$g(0) = f(0) + 0 - 1 = -1 < 0, \quad g(1) = f(1) + 1 - 1 = 1 > 0,$$

由 $g(x)$ 的连续性知 $\exists c \in (0, 1)$ 使 $g(c) = 0$, 即

$$f(c) = 1 - c.$$

在区间 $[0, c]$ 上, Lagrange 中值定理给出 $\exists \eta \in (0, c)$ 使

$$f'(\eta) = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = \frac{1 - c}{c}.$$

在区间 $[c, 1]$ 上, Lagrange 中值定理给出 $\exists \xi \in (c, 1)$ 使

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(c)}{1 - c} = \frac{c}{1 - c}.$$

故

$$f'(\xi) f'(\eta) = \frac{c}{1 - c} \cdot \frac{1 - c}{c} = 1,$$

且 $\xi \neq \eta$. 证毕.

8. **Proof.**

原极限等价于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + x + \frac{f(x)}{x} \right)}{x} = 3.$$

因此 $\ln \left(1 + x + \frac{f(x)}{x} \right) \rightarrow 0$, $x + \frac{f(x)}{x} \rightarrow 0$, $\ln \left(1 + x + \frac{f(x)}{x} \right) \sim x + \frac{f(x)}{x}$, 从而 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 2$.

因此 $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \frac{f(x)}{x^2} = 0$, $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{f(x)}{x^2} = 0$.

由 Taylor 公式可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}f''(0) = 2,$$

所以 $f''(0) = 4$.

CHAPTER 11

2019 年转专业考试真题

1 解答题

1. 设函数 $y = f(x), x \in (-\infty, +\infty)$ 的图像关于 $x = 2019, x = 2020$ 均对称, 请判断函数 $y = f(x)$ 是什么性质的函数, 并说明你的判断.
2. 设 $a_n > 0, b_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) > 0$, 证明: 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$ 存在.
3. 计算不定积分:
 - (1) $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1} dx.$
 - (2) $\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx.$ ¹

¹此题与 2024 年真题填空题第 6 题一致.

4. (1) 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值. $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$. 证明: $\exists \xi \in (a, b)$ 使得 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$. 证明: $\exists \alpha \in (a, b)$ 使得 $f'(\alpha) + \alpha f(\alpha) = 0$.

5. 设 $n \in \mathbf{N}^*$, $f(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}$, 计算 $f(1), f(-1)$.

6. 已知函数 $f(x)$ 有连续导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f'(x)}{1 - e^{-x}} = 1$. 问 $f(0)$ 为何值时, $f(0)$ 为 $f(x)$ 的极值, 并说明它是极大值还是极小值.

7. 设 $f(x) : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{R}$ 是任一函数, $x_0 \in \mathbf{I}$, 证明: $f(x)$ 在 x_0 处可导的充要条件是: 存在一个函数 $g(x) : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{R}$, 使:

- (1) $f(x) - f(x_0) = g(x)(x - x_0), \forall x \in \mathbf{I}$.
- (2) $g(x)$ 在 x_0 处连续且 $g'(x_0) = g(x_0)$.

CHAPTER 12

2019 年转专业考试真题参考答案

1 解答题

1. **Solution.** $f(x)$ 是周期函数, 周期 $T = 2$.

利用图像关于 $x = 2019$ 和 $x = 2020$ 的对称性可得

$$f(2019 + x) = f(2019 - x) \quad \text{或} \quad f(x) = f(2 \cdot 2019 - x),$$

$$f(2020 + x) = f(2020 - x) \quad \text{或} \quad f(x) = f(2 \cdot 2020 - x).$$

因此对于任意 x ,

$$f(x) = f(2 \cdot 2020 - (2 \cdot 2019 - x)) = f(x + 2).$$

即 $f(x)$ 具有周期 2.

2. **Proof.** 由条件

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1} b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) = L > 0,$$

取常数 δ 满足 $0 < \delta < \frac{L}{2}$, 则存在 $N \in \mathbb{N}$, 当 $n \geq N$ 时有

$$\frac{a_n}{a_{n+1} b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} > \delta \quad \text{或} \quad \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} > \delta a_{n+1},$$

即

$$a_{n+1} < \frac{1}{\delta} \left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right).$$

对 $n = N, N + 1, \dots, m$ 累加, 得

$$\sum_{n=N}^m a_{n+1} < \frac{1}{\delta} \sum_{n=N}^m \left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right) = \frac{1}{\delta} \left(\frac{a_N}{b_N} - \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}} \right) \leq \frac{a_N}{\delta b_N}.$$

因此正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 的部分和 $S_{m+1} = \sum_{k=1}^{m+1} a_k = \sum_{k=1}^N a_k + \sum_{k=N+1}^{m+1} a_k$ 有上界,

显然 $\{S_n\}$ 单调增加, 所以 $\{S_n\}$ 存在极限, 故 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛.

3. Solution.

(1) 令

$$t = x - \frac{1}{x}, \quad dt = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx.$$

注意到

$$x^4 - x^2 + 1 = x^2 \left[\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 1 \right] = x^2(t^2 + 1),$$

于是

$$\frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1} dx = \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{t^2 + 1} dt = \frac{dt}{t^2 + 1}.$$

故

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1} dx = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \arctan t + C = \arctan\left(x - \frac{1}{x}\right) + C.$$

(2) 参见 2024 年真题填空题第 6 题解析.

4. Proof.

(1) 令 $h(x) = f(x) - g(x)$, 由题意知

$$h(a) = f(a) - g(a) = 0, \quad h(b) = f(b) - g(b) = 0.$$

因 f, g 在 (a, b) 上有相等的最大值, 设 f 和 g 的极大值点分别为 $x_1, x_2 \in (a, b)$, 使得

$$f(x_1) = g(x_2) = M.$$

若 $x_1 = x_2 = x_0$, 则 $h(x_0) = 0$.

若不然, 不失一般性地设 $x_1 < x_2$, 则

$$\begin{aligned} h(x_1) &= f(x_1) - g(x_1) = M - g(x_1) \geq 0, \\ h(x_2) &= f(x_2) - g(x_2) = f(x_2) - M \leq 0. \end{aligned}$$

由 $h(x)$ 的连续性, 必存在 $x_0 \in [x_1, x_2]$ 使得 $h(x_0) = 0$.

于是 h 在 $[a, b]$ 上至少有三个零点 $x = a, x_0, b$. 由 Rolle 定理, 存在

$$x_1 \in (a, x_0), \quad x_2 \in (x_0, b) \text{ 使得 } h'(x_1) = 0, \quad h'(x_2) = 0.$$

再对区间 $[x_1, x_2]$ 应用 Rolle 定理, 得 $\exists \xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$ 使 $h''(\xi) = 0$.

此即

$$f''(\xi) = g''(\xi).$$

(2) 令 $H(x) = e^{\frac{x^2}{2}} f(x)$, 则

$$H(a) = e^{\frac{a^2}{2}} f(a) = 0, \quad H(b) = e^{\frac{b^2}{2}} f(b) = 0.$$

由 Rolle 定理, $\exists \alpha \in (a, b)$ 使

$$H'(\alpha) = 0.$$

注意到

$$H'(x) = \frac{d}{dx} \left(e^{\frac{x^2}{2}} \right) f(x) + e^{\frac{x^2}{2}} f'(x) = e^{\frac{x^2}{2}} (xf(x) + f'(x)).$$

由于 $e^{\frac{x^2}{2}} \neq 0$, 故在 $x = \alpha$ 处

$$f'(\alpha) + \alpha f(\alpha) = 0.$$

5. **Solution.** 记

$$u(x) = (x - 1)^n, \quad v(x) = (x + 1)^n,$$

则

$$(x^2 - 1)^n = u(x)v(x).$$

由 Leibniz 公式

$$\frac{d^n}{dx^n}[u(x)v(x)] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x).$$

注意到

$$u^{(k)}(1) = \begin{cases} 0, & k < n, \\ n!, & k = n. \end{cases}$$

所以

$$\left. \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n \right|_{x=1} = \binom{n}{n} u^{(n)}(1) v^{(0)}(1) = n! 2^n.$$

因此

$$f(1) = \frac{1}{2^n n!} \left. \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n \right|_{x=1} = 1.$$

类似地, 在 $x = -1$ 处

$$v^{(k)}(-1) = \begin{cases} 0, & k < n, \\ n!, & k = n. \end{cases}$$

所以

$$\left. \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n \right|_{x=-1} = \binom{n}{0} u^{(0)}(-1) v^{(n)}(-1) = (-1)^n n! 2^n.$$

因此

$$f(-1) = \frac{1}{2^n n!} \left. \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n \right|_{x=-1} = (-1)^n.$$

6. **Solution.** 由

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f'(x)}{1 - e^{-x}} = 1,$$

注意到 $x \rightarrow 0$ 时 $1 - e^{-x} \sim x$, 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + f'(x)) = f(0) + f'(0) = 0.$$

要使 $x = 0$ 成为极值点, 必有 $f'(0) = 0$, 故

$$f(0) = 0.$$

下面分析极值. 令 $g(x) = e^x f(x)$, 则

$$g'(x) = e^x (f(x) + f'(x)),$$

由极限的保号性可知, 当 $x \rightarrow 0^+$ 时 $g'(x) > 0$, 当 $x \rightarrow 0^-$ 时 $g'(x) < 0$. 故 g 在 $x = 0$ 处取得极小值. 因 $e^x > 0$, g 和 f 在极值点的凹凸性一致, 因此 f 在 $x = 0$ 处也取得极小值.

7. Proof

必要性: 假设 f 在 x_0 处可导, 记 $f'(x_0) = A$. 定义

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, & x \neq x_0, \\ A, & x = x_0. \end{cases}$$

则对一切 $x \in \mathbf{I}$ 都有

$$f(x) - f(x_0) = g(x)(x - x_0),$$

即满足 (1) .

又

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = A = g(x_0),$$

故 g 在 x_0 处连续, 且 $g(x_0) = f'(x_0)$, 满足 (2) .

充分性: 若存在满足 (1) (2) 的函数 g , 则

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g(x) \quad (x \neq x_0),$$

方程两端令 $x \rightarrow x_0$, 由 g 在 x_0 处连续得

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0).$$

因此 f 在 x_0 处可导, 且

$$f'(x_0) = g(x_0).$$

这就完成了充分性的证明.

CHAPTER 13

2018 年转专业考试真题

1 解答题

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + b^n + 2^{-n}b^{2n})^{\frac{1}{n}} (b > 0)$.

2. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}$.¹

3. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \arctan \frac{2}{k^2}$.²

¹此题与 2024 年真题填空题第 2 题一致.

²此题与 2024 年真题填空题第 1 题一致.

4. 已知 $f(x), g(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的非常值连续可微函数, $f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$, $g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$, 且 $f'(0) = 0$. 求证: $f^2(x) + g^2(x) = 1$.

5. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微, 试证: $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续的充要条件是

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |h| < \delta, \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < \varepsilon, \text{ 对一切 } x \in [a, b] \text{ 成立.}$$

6. 设 $f_n(x) = \cos x + \cos^2 x + \cdots + \cos^n x$, 求证:

(1) 对任意自然数 n , 方程 $f_n(x) = 1$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right)$ 内有唯一根.

(2) 设 $x_n \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right)$ 是 $f_n(x) = 1$ 的根, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\pi}{3}$.

CHAPTER 14

2018 年转专业考试真题参考答案

1 填空题 (每题 8 分, 共 48 分)

1. **Solution.** $\begin{cases} 1, & 0 < b \leq 1, \\ b, & 1 < b \leq 2, \\ \frac{b^2}{2}, & b > 2. \end{cases}$

记 $L_n = \left(1 + b^n + \left(\frac{b^2}{2}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}$. 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} = \max\{a, b, c\}.$$

若 $0 < b \leq 1$, 则 $\max\left\{1, b, \frac{b^2}{2}\right\} = 1$, 故 $\lim L_n = 1$.

若 $1 < b \leq 2$, 则 $\max\left\{1, b, \frac{b^2}{2}\right\} = b$, 故 $\lim L_n = b$.

若 $b > 2$, 则 $\max\left\{1, b, \frac{b^2}{2}\right\} = \frac{b^2}{2}$, 故 $\lim L_n = \frac{b^2}{2}$.

注意到在临界点 $b = 1$ 与 $b = 2$, 两种取法给出的极限均分别为 1 与 2, 结论保持一致.

2. 参见 2024 年真题填空题第 2 题解析.

3. 参见 2024 年真题填空题第 1 题解析.

4. **Proof.** 在函数方程组

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y), \\ g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y) \end{cases}$$

中令 $y = 0$, 得

$$f(x) = f(x)f(0) - g(x)g(0), \quad (1)$$

$$g(x) = f(x)g(0) + g(x)f(0). \quad (2)$$

令 $x = y = 0$, 得

$$f(0) = f^2(0) - g^2(0), \quad (3)$$

$$g(0) = 2f(0)g(0). \quad (4)$$

由 (4) 式得 $g(0) = 0$ 或 $f(0) = \frac{1}{2}$.

若 $f(0) = \frac{1}{2}$, 代入 (3) 式得 $g^2(0) = -\frac{1}{4}$, 显然不可能. 所以 $g(0) = 0$, 代入 (3) 式得 $f(0) = 0$ 或 $f(0) = 1$.

将 $g(0) = 0$ 代入 (1) 式得 $f(x) = f(x)f(0)$, 由于 f 是非常值函数, 必有 $f(0) = 1$.

计算

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)(f(t) - f(0))}{t} - \frac{g(x)(g(t) - g(0))}{t} \right) = -g'(0)g(x), \\ g'(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(x+t) - g(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{g(x)(f(t) - f(0))}{t} + \frac{f(x)(g(t) - g(0))}{t} \right) = g'(0)f(x). \end{aligned}$$

故

$$(f^2(x) + g^2(x))' = 2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x) \equiv 0.$$

所以 $f^2(x) + g^2(x) \equiv f^2(0) + g^2(0) = 1$.

5. Proof.

必要性. 设 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续. 由 Cantor 定理, 闭区间上的连续函数必一致连续. 于是, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得 $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$, 当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 必有

$$|f'(x_1) - f'(x_2)| < \varepsilon.$$

$\forall x \in [a, b]$ 及 $0 < |h| < \delta$, 由 Lagrange 中值定理可得, 存在 ξ 介于 x 与 $x+h$ 之间, 使得

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(\xi).$$

因为 $|\xi - x| < |h| < \delta$, 由 $f'(x)$ 的一致连续性即得

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| = |f'(\xi) - f'(x)| < \varepsilon.$$

充分性. 反过来, 假设 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |h| < \delta$ 且 $x \in [a, b]$ 时, 都有

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < \varepsilon.$$

$\forall x_0 \in [a, b]$, 并取同样的 $\delta > 0$. 对于 $0 < |h| < \delta$ 且 $x_0 + h \in [a, b]$, 有

$$\begin{aligned} |f'(x_0 + h) - f'(x_0)| &\leq \left| f'(x_0 + h) - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right| + \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon, \end{aligned}$$

其中第一项应用了在点 $x = x_0 + h$ 处对增量 $-h$ 的假设条件. 由此可见

$$\lim_{h \rightarrow 0} f'(x_0 + h) = f'(x_0),$$

即 $f'(x)$ 在任意 $x_0 \in [a, b]$ 处连续, 即 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

6. Proof.

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$, 计算

$$f'_n(x) = \sum_{k=1}^n k \cos^{k-1} x (-\sin x) = -\sin x \sum_{k=1}^n k \cos^{k-1} x < 0, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right).$$

故 f_n 在 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ 上严格单调递减. 又

$$f_n(0) = n > 1, \quad f_n\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1.$$

由介值定理可知方程 $f_n(x) = 1$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ 内恰有一根, 且因严格单调, 此根唯一.

(2) 利用等比数列求和,

$$f_n(x) = \cos x + \cos^2 x + \cdots + \cos^n x = \frac{\cos x (1 - \cos^n x)}{1 - \cos x}.$$

令 $x = x_n$ 满足 $f_n(x_n) = 1$, 则 $\cos x_n (1 - \cos^n x_n) = 1 - \cos x_n$, 即

$$\cos^{n+1} x_n = 2 \cos x_n - 1.$$

由于 $x_n \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ 时, 有 $\frac{1}{2} < \cos x_n < 1$, 故当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$\cos^{n+1} x_n \rightarrow 0,$$

从而 $2 \cos x_n - 1 \rightarrow 0$, $\cos x_n \rightarrow \frac{1}{2}$, $x_n \rightarrow \frac{\pi}{3}$.

CHAPTER 15

2017 年转专业考试真题

1 解答题

- 证明数列 $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \dots$ 存在极限（不能使用单调有界定理），且求出该极限.
- 给定一个数列 $\{x_n\} (n = 1, 2, \dots)$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_{n-2}) = 0$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_n - x_{n-1})}{n} = 0$.
- 设 $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0 \\ f'(0), & x = 0 \end{cases}$, $f(0) = 0$, $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上存在二阶导数, 问 $g(x)$ 在 \mathbf{R} 上是否存在连续导数, 存在请证明, 不存在请说明理由.¹

¹此题与 2024 年真题证明题第 4 题一致.

4. 设 $f(x) : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{R}$ 是任一函数, $x_0 \in \mathbf{I}$, 证明: $f(x)$ 在 x_0 处可导的充要条件是: 存在一个函数 $g(x) : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{R}$, 使:

- (1) $f(x) - f(x_0) = g(x)(x - x_0), \forall x \in \mathbf{I}.$
- (2) $g(x)$ 在 x_0 处连续且 $g'(x_0) = g(x_0).$ ²

5. 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的邻域内有一阶连续导数, 且 $f'(0) = 0$, $f''(0)$ 存在, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\ln(1+x))}{x^3}.$ ³

6. 求最小正数 α , 使得 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+\alpha} > e (x > 0).$

²此题与 2019 年真题第 7 题一致.

³此题与 2024 年真题填空题第 3 题一致.

CHAPTER 16

2017 年转专业考试真题参考答案

1 解答题

1. **Proof.** 记题中数列为 $\{x_n\}$, 则 $\{x_n\}$ 满足

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n} \quad (n \geq 1).$$

若极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$ 存在, 则令 $n \rightarrow \infty$ 得

$$L = \frac{1}{1+L},$$

舍去负根解得 $L = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

下面利用压缩映射原理证明 $\{x_n\}$ 极限存在且等于 L . 注意到

$$|x_{n+1} - L| = \left| \frac{1}{1+x_n} - \frac{1}{1+L} \right| = \frac{|x_n - L|}{(1+x_n)(1+L)}.$$

由于 $1+x_n > 1$, 故

$$|x_{n+1} - L| < \frac{|x_n - L|}{1+L} = L|x_n - L|.$$

利用上式迭代,

$$|x_n - L| < L|x_{n-1} - L| < L^2|x_{n-2} - L| < \cdots < L^{n-1}|x_1 - L|.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 由于 $0 < L < 1$, 所以 $L^{n-1}|x_1 - L| \rightarrow 0$, 根据夹逼准则立得 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - L| = 0$, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

2. **Proof.**

设 $a_n = x_n - x_{n-1}$, 则条件可以转化为 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + a_{n-1}) = 0$, 即证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$.

法一. $\forall \varepsilon > 0$, 由极限的定义可知 $\exists N_1 \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N_1$ 时, $|a_n + a_{n-1}| < \frac{\varepsilon}{2}$.

对 $n > N_1$, 由 $a_n = (a_n + a_{n-1}) - a_{n-1}$, 两边取绝对值有

$$|a_n| \leq |a_n + a_{n-1}| + |a_{n-1}| < \frac{\varepsilon}{2} + |a_{n-1}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + |a_{n-2}| < \cdots < (n - N_1) \cdot \frac{\varepsilon}{2} + |a_{N_1}|.$$

两边同除 n ,

$$\frac{|a_n|}{n} < \frac{n - N_1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|a_{N_1}|}{n}.$$

由于 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{n - N_1}{n} \rightarrow 1$, 故存在 N_2 , 当 $n > N_2$ 时, $\frac{n - N_1}{n} < 1$;

同理, $\frac{|a_{N_1}|}{n} \rightarrow 0$, 所以存在 N_3 , 当 $n > N_3$ 时, $\frac{|a_{N_1}|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$.

取 $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$, 则当 $n > N$ 时, 有 $\frac{|a_n|}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

因此, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$, 此即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0.$$

法二. 当 n 为偶数时, 不妨设 $n = 2k(k \in \mathbb{N})$.

当 $k \rightarrow \infty$ 时, 由题可知 $a_{2k} + a_{2k-1} \rightarrow 0$ 且 $a_{2k-1} + a_{2k-2} \rightarrow 0$.

以上两式相减得 $(a_{2k} + a_{2k-1}) - (a_{2k-1} + a_{2k-2}) = a_{2k} - a_{2k-2} \rightarrow 0$.

由 Stolz 公式可知,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{2k}}{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{2k} - a_{2k-2}}{2k - (2k-2)} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{2k} - a_{2k-2}}{2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

当 n 为奇数时, 不妨设 $n = 2k+1(k \in \mathbb{N})$.

当 $k \rightarrow \infty$ 时, 由题可知 $a_{2k+1} + a_{2k} \rightarrow 0$ 且 $a_{2k} + a_{2k-1} \rightarrow 0$.

以上两式相减得 $(a_{2k+1} + a_{2k}) - (a_{2k} + a_{2k-1}) = a_{2k+1} - a_{2k-1} \rightarrow 0$.

由 Stolz 公式可知,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{2k+1}}{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{2k+1} - a_{2k-1}}{2k+1 - (2k-1)} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{2k+1} - a_{2k-1}}{2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

综上所述, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$.

3. 参见 2024 年真题证明题第 4 题解析.

4. 参见 2019 年真题第 7 题解析.

5. 参见 2024 年真题填空题第 3 题解析.

6. Solution $\frac{1}{2}$.

两边取对数, 原不等式等价于

$$(x + \alpha) \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) > 1 \quad \text{或} \quad \alpha > \frac{1}{\ln(1 + \frac{1}{x})} - x.$$

令

$$t = \frac{1}{x} > 0, \quad f(t) = \frac{1}{\ln(1+t)} - \frac{1}{t}.$$

则条件化为 $\alpha > f(t)$ 对所有 $t > 0$ 都成立, 故

$$\alpha \geq \sup_{t>0} f(t).$$

计算

$$f'(t) = \frac{-\frac{1}{1+t}}{[\ln(1+t)]^2} + \frac{1}{t^2} = \frac{-\frac{t^2}{1+t} + [\ln(1+t)]^2}{t^2[\ln(1+t)]^2}.$$

令 $g(t) = -\frac{t^2}{1+t} + [\ln(1+t)]^2$, 则

$$g'(t) = -\frac{2t(1+t) - t^2}{(1+t)^2} + \frac{2\ln(1+t)}{1+t} = \frac{2}{1+t} \left[\ln(1+t) - \frac{t^2 + 2t}{2(1+t)} \right].$$

令 $h(t) = \ln(1+t) - \frac{t^2 + 2t}{2(1+t)}$, 则

$$h'(t) = \frac{1}{t+1} - \frac{(2t+2)(t+1) - (t^2 + 2t)}{2(t+1)^2} = -\frac{t^2}{2(t+1)^2}.$$

所以 $h'(t) < 0$, $h(t) < h(0) = 0$, 则 $g'(t) < 0$, $g(t) < g(0) = 0$, 故 $f'(t) < 0$,

f 在 $(0, +\infty)$ 上单调减少. 因此

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} f(t) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\ln(1+t)} - \frac{1}{t} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - \ln(1+t)}{t \ln(1+t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - (t - \frac{t^2}{2} + o(t^2))}{t^2} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

综上, 对任意 $x > 0$ 不等式 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+\alpha} > e$ 当且仅当 $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

因此所求最小正数为 $\frac{1}{2}$.

CHAPTER 17

2015 年转专业考试真题

1 解答题

1. 一道错题.
2. 用三种方法计算数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n$.
3. 设 $n \in \mathbf{N}^*$, $f(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}$, 计算 $f(1)$, $f(-1)$.¹
4. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续导数, 对 (a, b) 内任意一点 ξ , 可否在 (a, b) 内找到两点 $\alpha, \beta, \xi \in (\alpha, \beta)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ 成立, 试证明你的结论或举反例.²

¹此题与 2019 年真题第 5 题一致.

²此题与 2023 年真题证明题第 4 题一致.

5. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内有一阶连续导数, 且 $f'(0)=0$, $f''(0)$ 存在, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\ln(1+x))}{x^3}$.³

6. 计算不定积分 $\int \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1} dx$.⁴

7. 计算不定积分: $\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x-1}} dx$.⁵

8. 设 $f_n(x) = \cos x + \cos^2 x + \cdots + \cos^n x$, 求证:

(1) 对任意自然数 n , 方程 $f_n(x) = 1$ 在 $[0, \frac{\pi}{3}]$ 内有唯一根.

(2) 设 $x_n \in [0, \frac{\pi}{3}]$ 是 $f_n(x) = 1$ 的根, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\pi}{3}$.⁶

³此题与 2024 年真题填空题第 3 题一致.

⁴此题与 2019 年真题第 3 题 (1) 一致.

⁵此题与 2024 年真题填空题第 6 题一致.

⁶此题与 2018 年真题第 6 题一致.

CHAPTER 18

2015 年转专业考试真题参考答案

1 解答题

2. Solution. e.

法一：取对数，等价无穷小估计

记

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n, \quad x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}, \quad \ln a_n = n \ln(1 + x_n).$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时， $x_n \rightarrow 0$ ，于是 $\ln(1 + x_n) = x_n + o(x_n)$ ，即

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n\right) = \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + x_n)}{\frac{1}{n}}\right) \\ &= \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right) \\ &= \exp\left(1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}\right) \\ &= e. \end{aligned}$$

法二：夹挤准则

对于充分大的 n ，有

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1},$$

故

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n.$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时，

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e, \quad \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \rightarrow e \cdot 1 = e.$$

由夹挤准则得极限为 e .

法三：作指数基底

设

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}, \quad n = \frac{1 + \frac{1}{n}}{x_n},$$

则当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n = (1 + x_n)^{\frac{1+\frac{1}{n}}{x_n}} = \left[(1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}}\right]^{1+\frac{1}{n}} \rightarrow e^{1+0} = e.$$

3. 参见 2019 年真题第 5 题 [解析](#).
4. 参见 2023 年真题证明题第 4 题 [解析](#).
5. 参见 2024 年真题填空题第 3 题 [解析](#).
6. 参见 2019 年真题第 3 题 [解析](#).
7. 参见 2024 年真题填空题第 6 题 [解析](#).
8. 参见 2018 年真题第 6 题 [解析](#).

CHAPTER 19

2014 年转专业考试真题

1 解答题

1. 证明: 若 $\forall x, y \in (-\infty, +\infty)$, 有 $|f(x) - f(y)| = |x - y|$, 且 $f(0) = 0$, 则 $f(x + y) = f(x) + f(y)$,
 $\forall x, y \in (-\infty, +\infty)$.
2. 用三种方法计算数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n$.¹
3. 设 $n \in \mathbf{N}^*$, $f(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n (x^2 - 1)^n}{\mathrm{d}x^n}$, 计算 $f(1)$, $f(-1)$.²
4. 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的邻域内有一阶连续导数, 且 $f'(0) = 0$, $f''(0)$ 存在, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\ln(1 + x))}{x^3}$.³

¹此题与 2015 年真题第 2 题一致.

²此题与 2019 年真题第 5 题一致.

³此题与 2024 年真题填空题第 3 题一致.

5. 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 有定义, 对任意 $x, y \in (0, +\infty)$ 有 $f(xy) = f(x)f(y)$ 且 $f'(1) = n > 0$, 求 $f(x)$.

6. 计算不定积分 $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1} dx$.⁴

7. 计算不定积分: $\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx$.⁵

8. 设 $\mu \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上非负, 且 $f''(x) \leq 0, x \in [0, 1]$. 证明: $f(t) \geq \mu f(s), \forall t \in [\mu, 1 - \mu], \forall s \in [0, 1]$.

⁴此题与 2019 年真题第 3 题 (1) 一致.

⁵此题与 2024 年真题填空题第 6 题一致.

CHAPTER 20

2014 年转专业考试真题参考答案

1 解答题

1. **Solution.**

令 $y = 0$, 由题意得 $|f(x) - f(0)| = |x - 0|$, 从而

$$|f(x)| = |x|, \forall x.$$

故 $f^2(x) = x^2$.

将 $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ 两边平方, 得

$$\begin{aligned}(f(x) - f(y))^2 &= f^2(x) + f^2(y) - 2f(x)f(y) \\&= x^2 + y^2 - 2f(x)f(y) \\&= x^2 + y^2 - 2xy.\end{aligned}$$

从而 $f(x)f(y) = xy$.

计算

$$\begin{aligned}[f(x+y) - (f(x) + f(y))]^2 &= f^2(x+y) + [f(x) + f(y)]^2 - 2f(x+y)[f(x) + f(y)] \\&= (x+y)^2 + f^2(x) + f^2(y) + 2f(x)f(y) - 2f(x+y)f(x) - 2f(x+y)f(y) \\&= x^2 + y^2 + 2xy + x^2 + y^2 + 2xy - 2(x+y)x - 2(x+y)y \\&\equiv 0.\end{aligned}$$

所以 $f(x+y) - (f(x) + f(y)) \equiv 0$, 即 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in (-\infty, +\infty)$.

2. 参见 2015 年真题第 2 题 **解析**.

3. 参见 2019 年真题第 3 题 **解析**.

4. 参见 2024 年真题填空题第 3 题 **解析**.

5. **Solution.** $f(x) = x^n$.

由 $f(xy) = f(x)f(y)$, 对任意 $x > 0$, 考察 f 在 x 处的导数:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x(1 + \frac{\Delta x}{x})) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)f(1 + \frac{\Delta x}{x}) - f(x)}{\Delta x} \\ &= f(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \frac{\Delta x}{x}) - 1}{\Delta x}. \end{aligned}$$

令 $u = \frac{\Delta x}{x}$, 则 $\Delta x = xu$, 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时 $u \rightarrow 0$, 所以上式变为

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(1 + u) - 1}{xu} \\ &= \frac{f(x)}{x} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(1 + u) - 1}{u} \\ &= \frac{f(x)}{x} f'(1) = \frac{n f(x)}{x}. \end{aligned}$$

于是 f 满足常微分方程

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{n}{x},$$

对两边积分得

$$\ln f(x) = n \ln x + C.$$

在方程 $f(xy) = f(x)f(y)$ 中令 $y = 1$ 得 $f(x) = f(x)f(1)$, 从而 $f(x) \equiv 0$ 或 $f(1) = 1$.

显然 $f(x)$ 不是常值函数, 否则 $f'(1) = 0$. 因此 $f(1) = 1$, $C = 0$. 故

$$f(x) = e^{n \ln x} = x^n, \quad x > 0.$$

6. 参见 2019 年真题第 3 题解析.

7. 参见 2024 年真题填空题第 6 题解析.

8. Proof.

固定任意 $t \in [\mu, 1 - \mu]$ 与 $s \in [0, 1]$, 令

$$m = \frac{t - \mu s}{1 - \mu}.$$

由于 $\mu \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 且 $t \in [\mu, 1 - \mu]$, 易验证 $m \in [0, 1]$. 又 f 在 $[0, 1]$ 上非负且 $f''(x) \leq 0$, 故 f 为上凸函数, 对于任何 $\lambda \in (0, 1)$ 和 $x_1, x_2 \in [0, 1]$ 有

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

取 $\lambda = \mu$, $x_1 = s$, $x_2 = m$, 注意到

$$\mu s + (1 - \mu)m = \mu s + (1 - \mu)\frac{t - \mu s}{1 - \mu} = t,$$

于是

$$f(t) = f(\mu s + (1 - \mu)m) \geq \mu f(s) + (1 - \mu)f(m) \geq \mu f(s),$$

因为 $f(m) \geq 0$. 这正是所要证明的 $f(t) \geq \mu f(s)$.

CHAPTER 21

2013 年转专业考试真题

1 解答题

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \left(\pi \sqrt{n^2 + n} \right).$

2. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}.$ ¹

3. 设 $a_n > 0, b_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1} b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) > 0$, 证明: 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$ 存在.²

4. 证明: 若函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, f 单调, 存在数列 $\{x_n\}, x_n \in [a, b], g(x_n) = f(x_{n+1}), n = 1, 2 \dots$, 则 $f(x) = g(x)$ 在 $[a, b]$ 上有解.³

¹此题与 2024 年真题填空题第 2 题一致.

²此题与 2019 年真题第 2 题一致.

³此题与 2024 年真题证明题第 3 题一致.

5. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\begin{cases} x = \ln \cos t, \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$ 确定, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=\frac{\pi}{4}}$.

6. 求最小正数 α , 使得 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+\alpha} > e(x > 0)$.⁴

7. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$. 又 $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ 是满足 $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$ 的正数. 证明: 在 $(0, 1)$ 中存在互不相同的数 $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_n$ 满足 $\frac{\alpha_1}{f'(\beta_1)} + \frac{\alpha_2}{f'(\beta_2)} + \dots + \frac{\alpha_n}{f'(\beta_n)} = 1$.

⁴此题与 2017 年真题第 6 题一致.

CHAPTER 22

2013 年转专业考试真题参考答案

1 解答题

1. **Solution.** 1.

注意到

$$\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) = \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n} - n\pi) = \sin^2(\pi(\sqrt{n^2+n} - n)).$$

又

$$\pi(\sqrt{n^2+n} - n) = \pi \frac{(n^2+n) - n^2}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1}.$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} = \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1.$$

2. 参见 2024 年真题填空题第 2 题 [解析](#).

3. 参见 2019 年真题第 2 题 [解析](#).

4. 参见 2024 年真题证明题第 3 题 [解析](#).

5. **Solution.** $\frac{dy}{dx} = -t \cos t, \quad \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{8}.$

利用链式法则,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(\ln \cos t) = -\tan t, \tag{22.1}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(\sin t - t \cos t) = \cos t - (\cos t - t \sin t) = t \sin t. \tag{22.2}$$

因此

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{t \sin t}{\tan t} = -t \cos t.$$

再对 t 求导并除以 $\frac{dx}{dt}$ 得二阶导数:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{dx} \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{1}{-\tan t} \frac{d}{dt} (-t \cos t) = \frac{-\cos t + t \sin t}{-\tan t} = \frac{\cos^2 t}{\sin t} - t \cos t.$$

故在 $t = \frac{\pi}{4}$ 处,

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4}} - \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{\pi \sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi \sqrt{2}}{8}.$$

6. 参见 2017 年真题第 6 题解析.

7. Proof.

由 $\alpha_k > 0$, $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$, 构造数值分点:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \alpha_1, \quad x_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \dots, \quad x_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k = 1,$$

则显然 $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1$.

因 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 结合 $\{x_k\}$ 的严格单调性, 由介值定理总能选取递增的序列 $\{c_k\}$ 使得

$$f(c_k) = x_k, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

其中 $0 = c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n = 1$.

由 Lagrange 中值定理, 存在 $\beta_k \in (c_{k-1}, c_k)$ 使

$$f'(\beta_k) = \frac{f(c_k) - f(c_{k-1})}{c_k - c_{k-1}} = \frac{\alpha_k}{c_k - c_{k-1}}.$$

因此

$$c_k - c_{k-1} = \frac{\alpha_k}{f'(\beta_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

对 k 从 1 到 n 累加, 得

$$c_n - c_0 = 1 = \sum_{k=1}^n (c_k - c_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{f'(\beta_k)}.$$

于是

$$\sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{f'(\beta_k)} = 1.$$

且每个 β_k 位于不同的开区间 (c_{k-1}, c_k) , 故互不相同. 证毕.

CHAPTER 23

2012 年转专业考试真题

1 解答题

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}}$.

2. 证明：若对任意 $x, y \in \mathbf{R}$ 有 $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$, 则对每个 $n \in \mathbf{N}, \forall a, b \in \mathbf{R}$, 有
 $|f(a) - f(b)| \leq \frac{1}{n}|a - b|^2$.

3. 设 $a_n > 0, b_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) > 0$, 证明：极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$ 存在.¹

4. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^{x^2}-1}}$.

¹此题与 2019 年真题第 2 题一致.

5. 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 有定义, 对任意 $x, y \in (0, +\infty)$ 有 $f(xy) = f(x)f(y)$ 且 $f'(1) = n > 0$, 求 $f(x)$.²

6. 求最小正数 α , 使得 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+\alpha} > e(x > 0)$.³

7. 计算不定积分: $\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx$.⁴

8. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$. 又 $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ 是满足 $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$ 的正数. 证明: 在 $(0, 1)$ 中存在互不相同的数 $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_n$ 满足 $\frac{\alpha_1}{f'(\beta_1)} + \frac{\alpha_2}{f'(\beta_2)} + \dots + \frac{\alpha_n}{f'(\beta_n)} = 1$.⁵

²此题与 2014 年真题第 5 题一致.

³此题与 2017 年真题第 6 题一致.

⁴此题与 2024 年真题填空题第 6 题一致.

⁵此题与 2013 年真题第 7 题一致.

CHAPTER 24

2012 年转专业考试真题参考答案

1 解答题

1. **Solution.** 1.

法一. Stirling 公式估计.

注意到当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

故

$$(n!)^{\frac{1}{n^2}} = \left(\sqrt{2\pi n}\right)^{\frac{1}{n^2}} \left(\frac{n}{e}\right)^{\frac{n}{n^2}} = (2\pi n)^{\frac{1}{2n^2}} \left(\frac{n}{e}\right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1 \cdot 1 = 1.$$

法二. 夹逼定理.

注意到对充分大的 n , 有

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq n^n,$$

两端同取 $\frac{1}{n^2}$ 次幂得

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \leq (n!)^{\frac{1}{n^2}} \leq n^{\frac{1}{n}},$$

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$, 故中间项亦趋于 1.

法三. Stolz 定理.

记

$$a_n = (n!)^{\frac{1}{n^2}}, \quad \ln a_n = \frac{\ln(n!)}{n^2}.$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n!) - \ln((n-1)!)}{n^2 - (n-1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{2n-1} = 0,$$

根据 Stolz 定理可得 $\ln a_n \rightarrow 0$, 因此 $a_n = \exp(\ln a_n) \rightarrow 1$.

2. **Proof.** $\forall a, b \in \mathbf{R}$ 和 $n \in \mathbf{N}$, 在区间 $[a, b]$ 上等分出 n 段, 设

$$x_k = a + \frac{k}{n}(b-a), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

则显然

$$x_0 = a, \quad x_n = b, \quad x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}.$$

由题设对任意 x, y 有 $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$, 则由三角不等式可得

$$\begin{aligned} |f(a) - f(b)| &= |f(x_0) - f(x_n)| \leq \sum_{k=1}^n |f(x_{k-1}) - f(x_k)| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |x_{k-1} - x_k|^2 = n \left(\frac{|b-a|}{n} \right)^2 = \frac{1}{n} |b-a|^2. \end{aligned}$$

因此对每个 $n \in \mathbb{N}$ 以及任意 $a, b \in \mathbf{R}$, 均有

$$|f(a) - f(b)| \leq \frac{1}{n} |a - b|^2.$$

3. 参见 2019 年真题第 2 题解析.

4. Solution. $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

记 $L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x-1}}$. 取对数得

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)}{e^x - 1}.$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, 利用 Taylor 公式

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

$$\ln \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right) = \ln \left(1 - \frac{x}{2} + o(x) \right) = -\frac{x}{2} + o(x),$$

同时

$$e^x - 1 = x + o(x).$$

因此

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{x}{2} + o(x)}{x + o(x)} = -\frac{1}{2}.$$

故

$$L = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

5. 参见 2014 年真题第 5 题解析.

6. 参见 2017 年真题第 6 题解析.

7. 参见 2024 年真题填空题第 6 题解析.

8. 参见 2013 年真题第 7 题解析.

CHAPTER 25

2011 年转专业考试真题

1 解答题

1. 证明：若对任意 $x, y \in \mathbf{R}$ 有 $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$, 则对每个 $n \in \mathbf{N}, \forall a, b \in \mathbf{R}$, 有
$$|f(a) - f(b)| \leq \frac{1}{n}|a - b|^2.$$
¹
2. 设 $x_n = (1 + a)(1 + a^2) \cdots (1 + a^{2^n})$, 其中 $|a| < 1$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
3. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x - 1}}$.²
4. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, $f(0) = 1$, $g(x) = \int_0^{\sin x} f(tx^2) dt$, 求 $g'(x)$, 并求 $g'(0)$.

¹此题与 2012 年真题第 2 题一致.

²此题与 2012 年真题第 4 题一致.

5. 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 有定义, 对任意 $x, y \in (0, +\infty)$ 有 $f(xy) = f(x)f(y)$ 且 $f'(1) = n > 0$, 求 $f(x)$.³

6. 计算不定积分: $\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx$.⁴

7. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$. 又 $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ 是满足 $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$ 的正数. 证明: 在 $(0, 1)$ 中存在互不相同的数 $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_n$ 满足 $\frac{\alpha_1}{f'(\beta_1)} + \frac{\alpha_2}{f'(\beta_2)} + \dots + \frac{\alpha_n}{f'(\beta_n)} = 1$.⁵

8. 证明: 若 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可微, $f(0) = 0, 0 \leq f'(x) \leq 1$, 则 $\left(\int_0^1 f(x) dx\right)^2 \geq \int_0^1 f^3(x) dx$.

9. 证明: 对任意正整数 n , 有 $\frac{2}{3}n\sqrt{n} < \sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n} < \frac{4n+3}{6}\sqrt{n}$.

³此题与 2014 年真题第 5 题一致.

⁴此题与 2024 年真题填空题第 6 题一致.

⁵此题与 2013 年真题第 7 题一致.

CHAPTER 26

2011 年转专业考试真题参考答案

1 解答题

1. 参见 2012 年真题第 2 题 **解析**.

2. **Solution.** $\frac{1}{1-a}$.

注意到

$$(1-a)x_n = (1-a)(1+a)(1+a^2) \cdots (1+a^{2^n}) = 1-a^{2^{n+1}},$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 因 $|a| < 1$, 有

$$x_n = \frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a} \rightarrow \frac{1}{1-a}.$$

3. 参见 2012 年真题第 4 题 **解析**.

4. **Solution.**

作积分变量替换, 令 $u = tx^2$, 则 $t = \frac{u}{x^2}$, $dt = \frac{du}{x^2}$, 上限 $t = \sin x$ 对应 $u = x^2 \sin x$. 于是

$$g(x) = \int_0^{\sin x} f(tx^2) dt = \frac{1}{x^2} \int_0^{x^2 \sin x} f(u) du.$$

计算

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx} \frac{1}{x^2} \int_0^{x^2 \sin x} f(u) du + \frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(\int_0^{x^2 \sin x} f(u) du \right) \\ &= -\frac{2}{x^3} \int_0^{x^2 \sin x} f(u) du + \frac{1}{x^2} f(x^2 \sin x) \frac{d}{dx} (x^2 \sin x) \\ &= -\frac{2}{x^3} \int_0^{x^2 \sin x} f(u) du + \frac{1}{x^2} f(x^2 \sin x) (2x \sin x + x^2 \cos x). \end{aligned}$$

下面计算 $g'(0)$.

当 $x \rightarrow 0$ 时, 由积分中值定理, 利用函数 $f(x)$ 的连续性可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left[-\frac{2}{x^3} \int_0^{x^2 \sin x} f(u) du + \frac{1}{x^2} f(x^2 \sin x) (2x \sin x + x^2 \cos x) \right] &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[-\frac{2x^2 \sin x f(\xi)}{x^3} + \frac{f(0)(2x^2 + x^2)}{x^2} \right] \\ &= -2f(0) + 3f(0) \\ &= f(0) = 1. \end{aligned}$$

其中 $\xi \rightarrow 0$. 所以 $g'(0) = 1$.

5. 参见 2014 年真题第 5 题 [解析](#).
6. 参见 2024 年真题填空题第 6 题 [解析](#).
7. 参见 2013 年真题第 7 题 [解析](#).

8. Solution.

令

$$F(t) = \left(\int_0^t f(x) dx \right)^2 - \int_0^t f^3(x) dx, \quad t \in [0, 1].$$

显然 $F(0) = 0$. 对 t 求导得

$$\begin{aligned} F'(t) &= 2 \left(\int_0^t f(x) dx \right) f(t) - f^3(t) \\ &= f(t) \left(2 \int_0^t f(x) dx - [f(t)]^2 \right) = f(t)G(t), \end{aligned}$$

其中

$$G(t) = 2 \int_0^t f(x) dx - [f(t)]^2,$$

且 $G(0) = 0$. 又 $0 \leq f'(t) \leq 1$, 故

$$G'(t) = 2f(t) - 2f(t)f'(t) = 2f(t)(1 - f'(t)) \geq 0,$$

所以 $G(t) \geq G(0) = 0$ 对所有 $t \in [0, 1]$ 成立. 再由 $f(t) \geq 0$ (从 $f(0) = 0$ 且 $f'(t) \geq 0$ 得到) 可知

$$F'(t) = f(t)G(t) \geq 0.$$

故 $F(1) \geq F(0) = 0$, 即

$$\left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 - \int_0^1 f^3(x) dx \geq 0.$$

9. **Proof.** 利用函数 $y = \sqrt{x}$ 在 $[0, n]$ 上的严格上凸性, 对每个整数区间 $[k-1, k]$ 作左右端点梯形比较:

下界: $\forall x \in [k-1, k]$, 由积分中值定理可得

$$\sqrt{k} \geq \int_{k-1}^k \sqrt{x} dx.$$

对 $k = 1, 2, \dots, n$ 累加, 显然等号无法取到, 所以

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} > \int_0^n \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^n = \frac{2}{3} n \sqrt{n}.$$

上界: 因为 \sqrt{x} 在 $[k-1, k]$ 上凸, 下端点梯形面积小于弦顶梯形面积, 即

$$\frac{\sqrt{k-1} + \sqrt{k}}{2} < \int_{k-1}^k \sqrt{x} dx.$$

于是

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\sqrt{k-1} + \sqrt{k}) + \frac{1}{2} \sqrt{n} < \int_0^n \sqrt{x} dx + \frac{1}{2} \sqrt{n} = \frac{2}{3} n \sqrt{n} + \frac{1}{2} \sqrt{n} = \frac{4n+3}{6} \sqrt{n}.$$