华中科技大学转专业联合数学考试 (重制版)

学数华科 转专业交流群

Last Updated: November 26, 2025

写在一切之前

Provided by @ 那，边。@ 渊

首先，如果你选择通过转专业考试转专业，**请务必完整阅读《华科转专业简明指南》**。希望大家明确一点：转专业考试是选拔性考试，所以难度大是正常的。这不仅意味着备考时心态上要做好准备，更意味着你不可能做到面面俱到，所以必须结合实际情况开展考前复习，把精力放到那些能够拿到的分数上。一般情况下，准备做得越充分的同学越有优势！

先整体介绍一下华科转专业数学考试。转专业数学考试是转专业联合笔试的一部分，大部分理工科专业的学院都要求报名转入学生参加。就往年规律来看，考试时间为两个小时。正因为这是选拔性考试，所以考试名称虽然为"微积分"，但实际上更偏向于数学分析的难度，当然没有这么多分析证明的要求，大部分还是以计算为主。试卷整体难度显著高于微积分（B），接近于大学生数学竞赛。因此，对于学习微积分（C）或（D）的同学，建议一定要拔高学习层次，必要时可以去蹭其他班级的微积分课堂。此外，考试没有大纲，所以没有固定的考试范围，但会与大家微积分课程的教学进度持平，往年大致考到不定积分（详情参考往年真题）。

关于备考参考资料，建议以这份真题合集，毕志伟、吴洁老师的《微积分学学习辅导》和裴礼文老师的《数学分析中的典型问题与方法》为主。就往年题目来看，考试真题很多都能在裴砖中找到原型甚至是原题，很多题目的思想方法都曾在往年题目中出现（近几年考题 24 年较为突出）。另外，B 站和学数华科 QQ 群也是很好的资源。因此，大家不必通过任何第三方渠道去找所谓的转专业资料了，他们的卷子基本就是盗用本群中的，很多题目印刷甚至出错，买了也是浪费钱、浪费时间。

关于备考流程，建议在仔细研读裴砖的同时（or 之后）认真写写往年真题，一开始不会做很正常，本合集有非常详尽的答案，大家一定要认真下功夫把每道题研究清楚（每年的难度都有变化，可以视情况而定）。研读裴砖可以分专题进行，可以准备一个笔记本，把每个专题的内容（方法、例题与具体解题思路）自己总结出来，这也是非常重要的复习资料。我总结了往年真题中经常出现的裴砖中的专题，供大家参考以重点复习：

1.3 求极限值的若干方法；1.4 Stolz 公式；1.5 递推形式的极限

2.4 函数方程（了解模型即可，不必深入）

3.1 导数；3.2 微分中值定理；3.3 Taylor 公式；3.5 导数的综合应用

（裴砖中带五角星的内容基本均为重要内容，而带星号内容可以忽略）

另外，本文件已上传至《华中科技大学转专业联合数学考试 (重制版)》，大家使用前可以先检查一下是否有更新.

最后，祝大家考试顺利、成功上岸！

CONTENTS

Change Logs

- Updated (2025.10.15): 增加了 2024 年真题证明题缺失的答案.
- Updated (2025.10.16): 更正了 2023 年真题填空题第 4 题表达式的错误.
- Updated (2025.10.18): 更新了 Chapter 写在一切之前；更正了 2023 年真题填空题第 6 题的答案.
- Updated (2025.10.19): 更正了部分答案中的错别字.
- Updated (2025.10.20): 增加了 2024 年真题填空题第 4 题的答案；更正了 2023 年真题证明题第 1 题的答案.
- Updated (2025.10.25): 更新了 Chapter 写在一切之前；修订了 2024 年真题及答案；更正了 2020 年真题第 6 题答案中表达式的错误；更正了 2014 年真题第 1 题的答案.
- Updated (2025.10.30): 更正了 2022 年真题选择题第 9 题表达式的错误；修订了 2023 年真题及答案.
- Updated (2025.11.1): 更新了 Chapter 写在一切之前；更正了 2024 年真题证明题第 3 题的答案.
- Updated (2025.11.2): 更正了 2022 年真题选择题第 1 题表达式的错误.
- Updated (2025.11.3): 更新了 2022 年真题解答题第 3 题的答案.
- Updated (2025.11.9): 更正了 2012 年真题第 4 题的答案；更正了 2014 年真题第 4 题的答案；更正了 2017 年真题第 2 题的答案；更正了 2017 年真题第 4 题表达式的错误；更正了 2017 年真题第 6 题的答案；更正了 2021 年真题证明题第 2 题的答案；更正了 2022 年真题选择题第 3 题的答案.
- Updated (2025.11.11): 更正了 2024 年真题证明题第 5 题答案中表达式的错误；更正了 2019 年真题第 5 题的答案；更正了 2023 年真题证明题第 6 题的答案；更正了 2021 年真题证明题第 1 题的答案.
- Updated (2025.11.14): 修订了 2022 年真题及答案.
- Updated (2025.11.16): 更正了 2023 年真题填空题第 3 题的答案.
- Updated (2025.11.17): 更正了 2020 年真题第 4 题的答案.
- Updated (2025.11.19): 修订了 2021 年真题及答案；修订了 2020 年真题及答案；更正了 2020 年真题第 1 题的答案；更正了 2022 年真题解答题第 1 题的答案.
- Updated (2025.11.22): 修订了 2019 年真题及答案；修订了 2018 年真题及答案；修订了 2017 年真题及答案.

- Updated (2025.11.23): 更正了 2022 年真题填空题第 8 题的答案；更正了 2019 年真题第 4 题的答案；更正了 2011 年真题第 9 题的答案；修订了 2015 年真题及答案；修订了 2014 年真题及答案；修订了 2013 年真题及答案；修订了 2012 年真题及答案；修订了 2011 年真题及答案.
- Updated (2025.11.24): 更新了 2020 年真题第 2 题的答案.
- Updated (2025.11.25): 更正了 2013 年真题第 5 题的答案；更新了 2013 年真题第 7 题的答案；更新了 2024 年真题填空题第 3 题的答案.
- Updated (2025.11.26): 更新了 2015 年真题第 2 题的答案.

Part I

转专业数学考试真题

CHAPTER 1

2024 年转专业考试真题

1 填空题 (每题 10 分，共 60 分)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\arctan\dfrac{2}{k^2}=$ __________.

2. $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}=$ __________.

3. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内有一阶连续导数, 且 $f'(0)=0$, $f''(0)$ 存在, 则极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}=$ __________.

4. 设 $f(x)=(\arcsin x)^2$，则 $f^{(2024)}(0)=$ __________.

5. 已知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义，$\forall x,y\in(0,+\infty)$，$f(xy)=f(x)f(y)$，且 $f'(1)=2024$，则 $f(x)=$ __________.

6. $\displaystyle\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}\mathrm{d}x=$ __________.

2 证明题 (10 分)

已知 $\beta>0$，数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=\ln\beta$，$x_{n+1}=x_1+\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(\beta-x_i)$，证明 $\{x_n\}$ 收敛并求其极限.

3 证明题 (10 分)

证明: 若函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, f 单调, 存在数列 $\{x_n\}, x_n \in [a,b]$, $g(x_n) = f(x_{n+1}), n = 1, 2\cdots$, 则 $f(x) = g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有解.

4 证明题 (10 分)

设 $g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, & x \neq 0 \\ f'(0), & x = 0 \end{cases}$, $f(0) = 0$，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上存在二阶导数，问 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是否存在连续导数，存在请证明，不存在请说明理由.

5 证明题 (10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导，$f(0) = 0$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6}$，$f(1) = \dfrac{\pi}{2}$，证明：存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $f''(\xi) = \dfrac{\xi}{1-\xi^2} f'(\xi)$.

CHAPTER 2

2024 年转专业考试真题参考答案

1 填空题 (每题 10 分，共 60 分)

1. **Solution.** $\dfrac{3\pi}{4}$.

   利用反正切差角公式

$$\arctan x-\arctan y=\arctan\frac{x-y}{1+xy},\quad x=\frac{1}{k-1},\quad y=\frac{1}{k+1},$$

$$\Rightarrow \arctan\frac{2}{k^2}=\arctan\frac{\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}}{1+\frac{1}{(k-1)(k+1)}}=\arctan\frac{1}{k-1}-\arctan\frac{1}{k+1}.$$

   对 $k=1,2,\ldots,n$ 累加并对 n 取极限

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{2}{k^2}&=\arctan 2+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\arctan\frac{1}{k-1}-\arctan\frac{1}{k+1}\right)\\&=\arctan 2+\lim_{n\to\infty}\left(\arctan 1+\arctan\frac{1}{2}-\arctan\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n+1}\right)\\&=\frac{3\pi}{4}.\end{aligned}$$

2. **Solution.** $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

   利用 Taylor 公式 $\cos t=1-\dfrac{t^2}{2}+o(t^2)\ (t\to 0)$，令 $t=\sqrt{x}$，得

$$\cos\sqrt{x}=1-\frac{x}{2}+o(x).$$

   故

$$\begin{aligned}\ln\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}&=\frac{1}{x}\ln\bigl(\cos\sqrt{x}\bigr)=\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x}{2}+o(x)\right)\\&=\frac{1}{x}\left(-\frac{x}{2}+o(x)\right)=-\frac{1}{2}+o(1).\end{aligned}$$

   两边取指数得

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$

3. **Solution.** $\dfrac{f''(0)}{2}$.

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内可导，由 Lagrange 中值定理，存在 ξ 介于 x 与 $\ln(1+x)$ 之间，使得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}&=\lim_{x\to0}\frac{f'(\xi)(x-\ln(1+x))}{x^3}\\&=\lim_{x\to0}\frac{f'(\xi)-f'(0)}{\xi-0}\cdot\frac{\xi}{x}\cdot\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}.\end{aligned}$$

当 $x\to0$ 时，$\ln(1+x)\to0$，所以由夹逼准则可知 $\xi\to0$.

同时，$\dfrac{\xi}{x}$ 介于 1 与 $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ 之间，显然 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\xi}{x}=1$. 故由导数的定义，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{f'(\xi)-f'(0)}{\xi-0}\cdot\frac{\xi}{x}\cdot\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}&=f''(0)\cdot\frac{x-\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x^2}\\&=\frac{f''(0)}{2}.\end{aligned}$$

4. **Solution**. $2^{2023}(1011!)^2$.

方程两边求导，得 $f'(x)=\dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$，即 $\sqrt{1-x^2}f'(x)=2\arcsin x$，两边平方得

$$(1-x^2)f'^2(x)=4f(x).$$

两边再次求导，得 $2f'(x)[-xf'(x)+(1-x^2)f''(x)-2]=0$，消去 $f'(x)$ 得

$$-xf'(x)+(1-x^2)f''(x)=2.$$

（注意到 $f'(x)=0$ 当且仅当 $x=0.f'(0)=0$，$f''(0)=2$，此时 $-xf'(x)+(1-x^2)f''(x)=2$ 仍然成立.）

利用 Leibniz 公式对上式两边同时求 n 阶导数得

$$-xf^{(n+1)}(x)-nf^{(n)}(x)+(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-2nxf^{(n+1)}(x)-n(n-1)f^{(n)}(x)=0.$$

在上式中令 $x=0$ 得

$$f^{(n+2)}(0)=n^2f^{(n)}(0).$$

所以 $f^{(2024)}(0)=2022^2\cdot2020^2\cdots2^2f''(0)=2^{2023}(1011!)^2$.

5. **Solution.** x^{2024}.

$\forall x>0$，有 $f(x)=f(\sqrt{x}\sqrt{x})=f^2(\sqrt{x})>0$.

令 $g(x)=\ln f(x)$，得

$$g(xy)=g(x)+g(y).$$

令 $u=\ln x$，$v=\ln y$，则 $g(\mathrm{e}^{u+v})=g(\mathrm{e}^u)+g(\mathrm{e}^v)$，说明 $h(u)=g(\mathrm{e}^u)$ 满足

$$h(u+v)=h(u)+h(v),$$

且 h 在 $u=0$（即 $x=1$）可导，故 $h(u)=Cu$. 于是

$$g(x)=h(\ln x)=C\ln x,\quad f(x)=\mathrm{e}^{g(x)}=x^C.$$

由 $f'(x)=Cx^{C-1}$，代入 $x=1$ 并利用 $f'(1)=2024$，得 $C=2024$. 故

$$f(x)=x^{2024}.$$

注： 本题更严谨详细的解题步骤参见《数学分析中的典型问题与方法》2.4 函数方程 例 2.4.1 及单元练习 2.4.6.

6. **Solution.** $2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-4\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+4\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C$.

令 $t=\sqrt{\mathrm{e}^x-1}$，则

$$t^2=\mathrm{e}^x-1,\quad \mathrm{e}^x=t^2+1,\quad \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t,$$

且 $x=\ln(\mathrm{e}^x)=\ln(t^2+1)$. 原式化为

$$\int\frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{x}{t}\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=2\int x\,\mathrm{d}t=2\int\ln(t^2+1)\,\mathrm{d}t.$$

对 $2\displaystyle\int\ln(t^2+1)\,\mathrm{d}t$ 分部积分得

$$\begin{aligned}2\int\ln(t^2+1)\,\mathrm{d}t&=2\left[t\ln(t^2+1)-\int\frac{2t^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t\right]\\&=2t\ln(t^2+1)-4\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t\\&=2t\ln(t^2+1)-4t+4\arctan t+C.\end{aligned}$$

最后代回 $t=\sqrt{\mathrm{e}^x-1}$ 得

$$2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-4\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+4\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C.$$

2 (10 分)

Proof. 由已知可得 $x_n=x_1+\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\ln(\beta-x_i)$，用 $x_{n+1}=x_1+\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\ln(\beta-x_i)$ 相减，得

$$x_{n+1}=x_n+\ln(\beta-x_n).$$

利用 $\forall x>0$，$\ln x<x-1$，得

$$x_{n+1}-\beta+1=x_n+\ln(\beta-x_n)-\beta+1<x_n+\beta-x_n-1-\beta+1=0.$$

于是 $\beta-1$ 是 $\{x_n\}$ 的上界. 所以 $\ln(\beta-x_n)>0$，$\{x_n\}$ 单调增加. 由单调有界原理，$\{x_n\}$ 必然收敛. 设 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{x_n\}=a$，对 $x_{n+1}=x_n+\ln(\beta-x_n)$ 左右两边取极限，得 $\ln(\beta-a)=0$，所以极限为 $\beta-1$.

3 (10 分)

Proof. 考虑数列 $\{f(x_n)-g(x_n)\}$. 若此数列在 $n=k$ 处出现变号，即

$$[f(x_k)-g(x_k)]\cdot[f(x_{k-1})-g(x_{k-1})]<0,$$

则存在介于 x_{k-1} 和 x_k 的 ξ 使得 $f(\xi)-g(\xi)=0$.

若不然，不失一般性地设 $\{f(x_n)-g(x_n)\}$ 恒为正，则

$$f(x_n)-f(x_{n-1})=g(x_{n-1})-f(x_{n-1})<0$$

恒成立，故 $\{f(x_n)\}$ 单调递减. 由 f 的单调性可知 $\{x_n\}$ 亦单调，而 $\{x_n\}$ 有界，故 $\{x_n\}$ 必有极限 x_0. 在 $f(x_{n+1})=g(x_n)$ 中令 $n\to\infty$，并由 f 和 g 的连续性，即得 $f(x_0)=g(x_0)$.

4 (10 分)

Proof. 若 $x\neq 0$，$g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$.
若 $x=0$，$g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{f(x)}{x}-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-xf'(0)}{x^2}$.
应用 L'Hospital 法则，得

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}.$$

因为 $f(x)$ 二阶可导，所以 $g'(0)=\dfrac{f''(0)}{2}$.
$g'(x)$ 在 $x\neq 0$ 时的连续性显然. 下面考虑 $\lim\limits_{x\to 0}g'(x)$.

$$\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{xf'(0)-f(x)}{x^2}\equiv A+B$$

由导数定义，$A=f''(0)$. 由上述讨论得 $B=-g'(0)=-\dfrac{f''(0)}{2}$，
因此 $\lim\limits_{x\to 0}g'(x)=\dfrac{f''(0)}{2}=g'(0)$，即证 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

5 (10 分)

Proof. 令 $g(x)=f(x)-\arcsin x$，则 $g(0)=g\left(\dfrac{1}{2}\right)=g(1)$.
由 Rolle 定理可知，存在 $\alpha\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，$\beta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使得 $g'(\alpha)=g'(\beta)=0$，即

$$f'(\alpha)-\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}=f'(\beta)-\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=0.$$

令 $h(x)=f'(x)\sqrt{1-x^2}$，则 $h(\alpha)=h(\beta)=1$.
由 Rolle 定理可知，存在 $\xi\in(\alpha,\beta)$，使得 $h'(\xi)=0$，即

$$\sqrt{1-\xi^2}f''(\xi)-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}f'(\xi)=0,$$

化简立得.

CHAPTER 3

2023 年转专业考试真题

1 填空题 (每题 8 分，共 48 分)

1. 若 $\beta \neq k\pi(k=0,1,2,...)$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2^k}\tan\dfrac{\beta}{2^k}=$ __________.

2. 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{3}}\left[(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}\right]=$ __________.

3. 设 $0<a_1<\pi, a_{n+1}=\sin a_n(n=1,2,\cdots)$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}a_n=$ __________.

4. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin 3x}{x^3}+\dfrac{f(x)}{x^2}\right)=0$，则 $f''(0)=$ __________.

5. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$，则 $f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)=$ __________.

6. 设 $\alpha\neq\beta$ 是两个实常数，则 $\dfrac{\mathrm{e}^\beta-\mathrm{e}^\alpha}{\beta-\alpha}$ 与 $\dfrac{\mathrm{e}^\beta+\mathrm{e}^\alpha}{2}$ 两者之较大者为__________.

2 证明题 (9 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_1=1, a_2=2, a_{n+1}=a_n-\frac{1}{n+1}a_{n-1}(n=2,3,\cdots)$$

证明：对所有 $n\geq3$，都有 $0<na_n-3<\dfrac{6}{n-1}$.

3 证明题 (9 分)

设正整数 $n\geqslant 2$，证明方程 $\left(1-x^2\right)^n=1-x \quad x\in(0,1)$ 恰有一解.

4 证明题 (9 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数，对 (a,b) 内任意一点 ξ, 可否在 (a,b) 内找到两点 α，β，$\xi \in (\alpha,\beta)$，使得 $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ 成立，试证明你的结论或举反例.

5 证明题 (9 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶可导，且 $f'''(x) > 0$ ，证明

$$f(a+h)-f(a) < \frac{h}{2}\left[f'(a)+f'(a+h)\right] \quad (a < a+h < b)$$

6 证明题 (16 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，利用两种方法证明：$\exists \xi \in (a,b)$ 满足

$$f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{(b-a)^2}{4} f''(\xi).$$

CHAPTER 4

2023 年转专业考试真题参考答案

1 填空题 (每题 8 分，共 48 分)

1. **Solution**. $\dfrac{1}{\beta}-\cot\beta$.

   注意到 $\tan x=\cot x-2\cot 2x$，则

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{\beta}{2^k}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\left(\cot\frac{\beta}{2^k}-2\cot\frac{\beta}{2^{k-1}}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\cot\frac{\beta}{2^n}-\cot\beta\\
&=\frac{1}{\beta}-\cot\beta.
\end{aligned}
$$

2. **Solution**. $\dfrac{4}{3}$.

   令 $t=\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\to 0^+$，则

$$
\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{3}}\left[(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}\right]=\lim_{t\to 0^+}\frac{(1+t^3)^{\frac{2}{3}}-(1-t^3)^{\frac{2}{3}}}{t^3}=\frac{4}{3}.
$$

3. **Solution**. $\sqrt{3}$.

   用数学归纳法容易证明 $a_n\in(0,\pi)$ 恒成立，且 $a_{n+1}=\sin a_n<a_n$，故 $\{a_n\}$ 收敛. 易见其收敛于 0. 由 Stolz 定理，

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}na_n^2&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{\frac{1}{a_{n+1}^2}-\frac{1}{a_n^2}}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2a_{n+1}^2}{a_n^2-a_{n+1}^2}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin^2 x}{x^2-\sin^2 x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{(x+\sin x)(x-\sin x)}\\
&=3.
\end{aligned}
$$

   故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}a_n=\sqrt{3}$.

4. **Solution.** 9.

利用

$$\sin 3x = 3x - \frac{(3x)^3}{6} + o(x^3) = 3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3),$$

故

$$\frac{\sin 3x}{x^3} = \frac{3}{x^2} - \frac{9}{2} + o(1).$$

设

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2),$$

则

$$\frac{f(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{x^2} + \frac{f'(0)}{x} + \frac{f''(0)}{2} + o(1).$$

原式

$$\frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{f(x)}{x^2} = \frac{3+f(0)}{x^2} + \frac{f'(0)}{x} + \left(\frac{f''(0)}{2} - \frac{9}{2}\right) + o(1).$$

为使极限存在且为 0，应有

$$3 + f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad \frac{f''(0)}{2} - \frac{9}{2} = 0,$$

故

$$f''(0) = 9.$$

5. **Solution.** $\dfrac{(-1)^n\, n!}{4}\left[\dfrac{1}{(x-2)^{n+1}} - \dfrac{1}{(x+2)^{n+1}}\right]$.

注意到

$$f(x) = \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right).$$

利用

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\frac{1}{x+C} = \frac{(-1)^n\, n!}{(x+C)^{n+1}},$$

对两项分别求导得

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\frac{1}{x-2} = \frac{(-1)^n\, n!}{(x-2)^{n+1}}, \quad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\frac{1}{x+2} = \frac{(-1)^n\, n!}{(x+2)^{n+1}}.$$

综上

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{4}\left[\frac{(-1)^n\, n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{(-1)^n\, n!}{(x+2)^{n+1}}\right] = \frac{(-1)^n\, n!}{4}\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x+2)^{n+1}}\right].$$

6. **Solution.** $\dfrac{\mathrm{e}^\beta + \mathrm{e}^\alpha}{2}$.

不妨设 $\alpha < \beta$，令 $t = \beta - \alpha > 0$，将两个表达式转化为关于 t 的函数：

$$\frac{\mathrm{e}^\beta - \mathrm{e}^\alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\mathrm{e}^{\alpha+t} - \mathrm{e}^\alpha}{t} = \mathrm{e}^\alpha \cdot \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t},$$

$$\frac{\mathrm{e}^\beta + \mathrm{e}^\alpha}{2} = \frac{\mathrm{e}^{\alpha+t} + \mathrm{e}^\alpha}{2} = \mathrm{e}^\alpha \cdot \frac{\mathrm{e}^t + 1}{2}.$$

由于 $\mathrm{e}^\alpha > 0$，只需比较 $\dfrac{\mathrm{e}^t - 1}{t}$ 与 $\dfrac{\mathrm{e}^t + 1}{2}(t > 0)$ 的大小关系. 令

$$f(t) = \frac{\mathrm{e}^t - 1}{\mathrm{e}^t + 1} - \frac{t}{2},$$

则 $f'(t) = -\dfrac{(\mathrm{e}^t-1)^2}{2(\mathrm{e}^t+1)^2} < 0$ 恒成立，所以 $f(t) < f(0) = 0$，故 $\dfrac{\mathrm{e}^t-1}{\mathrm{e}^t+1} < \dfrac{t}{2}$，$\dfrac{\mathrm{e}^t+1}{2} > \dfrac{\mathrm{e}^t-1}{t}$，此即

$$\frac{\mathrm{e}^\beta+\mathrm{e}^\alpha}{2} > \frac{\mathrm{e}^\beta-\mathrm{e}^\alpha}{\beta-\alpha}.$$

当 $\alpha > \beta$ 时，令 $t = \alpha - \beta > 0$ 同理可推得相同结论.

Note: 根据 A-L-G 不等式

$$\frac{x_1-x_2}{\ln x_1 - \ln x_1} < \frac{x_1+x_2}{2}$$

可以直接得到结论.

另：用特殊值带入也可以得到答案.

2 证明题 (9 分)

Proof. 将递推式变形为

$$(n+1)a_{n+1} - na_n = a_n - a_{n-1} \quad (n = 2, 3, \cdots).$$

所以

$$\sum_{k=2}^{n}[(k+1)a_{k+1} - ka_k] = \sum_{k=2}^{n}(a_k - a_{k-1}) \quad (n \geq 2),$$

化简为

$$na_n - 3 = a_{n-1} \quad (n \geq 3).$$

下面使用数学归纳法证明 $a_n \in \left(0, \dfrac{6}{n}\right), n \geq 2$.

注意到 $a_2 = 2 \in \left(0, \dfrac{6}{2}\right)$，若 $a_k \in \left(0, \dfrac{6}{k}\right), k \geq 2$，则

$$a_{k+1} = \frac{1}{k+1}(a_k+3) \in \left(0, \frac{\frac{6}{k}+3}{k+1}\right),$$

又 $k \geq 2$ 时 $\dfrac{\frac{6}{k}+3}{k+1} \leq \dfrac{6}{k+1}$，所以 $a_{k+1} \in \left(0, \dfrac{6}{k+1}\right)$.

综上 $\forall n \geq 3$，都有 $0 < na_n - 3 < \dfrac{6}{n-1}$.

3 证明题 (9 分)

Proof.
法一. 设 $f(x) = (1-x^2)^n - 1 + x$，则 $f(0) = f(1) = 0$.
因 $f'(x) = -2nx(1-x^2)^{n-1} + 1$，有 $f'(0) = f'(1) = 1$，由导数定义与极限比较性可得

$$\exists x_1 \in (0,\delta)(\delta < \frac{1}{2})\text{ 使 }\frac{f(x_1)-f(0)}{x_1-0} > 0, \quad \exists x_2 \in (1-\delta, 1)\text{ 使 }\frac{f(x_2)-f(1)}{x_2-1} > 0.$$

即 $f(x_1) > 0$，$f(x_2) < 0$. 由零点定理可知 $\exists \alpha \in (x_1, x_2)$，使 $f(\alpha) = 0$. 下证唯一性.
假设 β 是 $f(x)$ 异于 α 的零点，则 $f(0) = f(\alpha) = f(\beta) = f(1) = 0$,

由 Rolle 定理可知 $f'(x)$ 在 (0,1) 内有三个零点，$f''(x)$ 在 $(0,1)$ 内有两个零点.
又因 $f''(x)=2n(1-x^2)^{n-2}\left[(2n-1)x^2-1\right]$ 在 $(0,1)$ 内仅有一个零点，因此矛盾!

法二. 方程 $(1-x^2)^n=1-x \quad x\in(0,1)$ 等价于

$$(1+x)^n=(1-x)^{1-n} \quad x\in(0,1) \quad 或 \quad n\ln(1+x)+(n-1)\ln(1-x)=0 \quad x\in(0,1)$$

设 $g(x)=n\ln(1+x)+(n-1)\ln(1-x)$，则 $g(0)=0$，$g(1^-)=-\infty$，$g'(x)=\dfrac{n}{1+x}-\dfrac{n-1}{1-x}=\dfrac{1-(2n-1)x}{1-x^2}$.
注意到 $g(0)=0$，$g'(0)=1>0$，
故 $\exists x_1\in(0,\delta)(\delta<\dfrac{1}{2n-1})$，使 $g(x_1)>0$. 由零点定理可知 $\exists\alpha\in(x_1,1)$，使 $g(\alpha)=0$.
因 $g(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2n-1}\right)$ 上单增，在 $\left(\dfrac{1}{2n-1},1\right)$ 上单减，故 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 有且仅有一个零点.

4 证明题 (9 分)

Proof. 答案是否定的. 可构造反例为 $[-1,1]$ 上的 $f(x)=x^3$.
考虑 $\xi=0.f'(0)=0$，但 $\forall\alpha<0<\beta$ 均有 $\dfrac{\beta^3-\alpha^3}{\beta-\alpha}=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\neq 0$.

5 证明题 (9 分)

Proof. 构造 $g(h)=f(a+h)-f(a)-\dfrac{h}{2}[f'(a)+f'(a+h)]$，$g(0)=0$.
$g'(h)=f'(a+h)-\dfrac{1}{2}\left[f'(a)+f'(a+h)\right]-\dfrac{h}{2}f''(a+h)$，$g'(0)=0$.
$g''(h)=-\dfrac{h}{2}f'''(a+h)<0$，结合单调性即得.

6 证明题 (16 分)

Proof.

法一，利用 Cauchy 中值定理.

令 $F(x)=f(x)-2f\left(\dfrac{x+a}{2}\right)+f(a)$，$G(x)=\dfrac{1}{4}(x-a)^2$，则 $F(a)=G(a)=0$.
由 Cauchy 中值定理，

$$\begin{aligned}\frac{F(b)}{G(b)}&=\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}\\&=\frac{F'(\eta)}{G'(\eta)}\\&=\frac{f'(\eta)-f'\left(\frac{\eta+a}{2}\right)}{\frac{\eta-a}{2}}.\end{aligned}$$

其中 $\eta\in(a,b)$. 由 Lagrange 中值定理，

$$\begin{aligned}\frac{f'(\eta)-f'\left(\frac{\eta+a}{2}\right)}{\frac{\eta-a}{2}}&=f''(\xi)\cdot\frac{\eta-\frac{\eta+a}{2}}{\frac{\eta-a}{2}}\\&=f''(\xi).\end{aligned}$$

其中 $\xi \in \left(\frac{\eta+a}{2}, \eta\right)$，得证.

法二，利用 Taylor 公式.

由 Taylor 定理得

$$f(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right) + \frac{f''(\xi_1)}{2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

$$f(b) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right) + \frac{f''(\xi_2)}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,$$

$$f(a) + f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a)^2\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{8}.$$

由 Darboux 定理，存在 ξ 使得 $f''(\xi) = \frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}$，得证.

法三，利用常数 K 值.

记 $K = \frac{f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)}{\frac{1}{4}(b-a)^2}$. 令

$$F(x) = f(x) - 2f\left(\frac{a+x}{2}\right) + f(a) - \frac{(x-a)^2}{4}K,$$

则 $F(a) = F(b) = 0$，故存在 $\eta \in (a,b)$，使 $F'(\eta) = 0$，即

$$f'(\eta) - f'\left(\frac{a+\eta}{2}\right) - \frac{\eta-a}{2}K = 0,$$

进一步存在 $\xi \in \left(\frac{\eta+a}{2}, \eta\right) \subset (a,b)$，使

$$f''(\xi)\left(\eta - \frac{a+\eta}{2}\right) - \frac{\eta-a}{2}K = 0,$$

化简得 $f''(\xi) = K$.

CHAPTER 5

2022 年转专业考试真题

1　选择题 (每题 3 分，共 30 分)

1. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 存在是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的 $(*)$ 条件.

   A. 充分不必要　　　　**B.** 必要不充分

   C. 充分必要　　　　**D.** 既不充分也不必要

2. 如果 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ 是比 $\dfrac{1}{x+1}$ 高阶的无穷小，则 a,b,c 应满足 $(*)$.

   A. $a=0,b=1,c=1$　　　　**B.** $a\neq 0,b=1,c$ 为任意常数

   C. $a\neq 0,b,c$ 为任意常数　　　　**D.** a,b,c 为任意常数

3. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-1|}{x-1}, & x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$ 的连续区间为 $(*)$.

   A. $(-\infty,+\infty)$　　　　**B.** $(-\infty,1)$ 与$[1,+\infty)$

   C. $(-\infty,1)$ 与$(1,+\infty)$　　　　**D.** $(-\infty,1]$ 与$(1,+\infty)$

4. 下列正确的命题是 $(*)$.

   (1): 初等函数在其定义域内连续；

   (2): 设函数定义在一个区间上，若函数在区间内一点连续，则它在该点的某邻域内连续；

   (3): 若函数在区间 I 上连续，则函数在 I 上有界；

   (4): 若函数在区间 I 上连续，则函数在 I 上有最大值.

   A. (1)(2)(3)　　　　**B.** (2)(3)(4)

   C. (2)(4)　　　　**D.** 都不真

5. 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且 $f(x)<0$，则 $(*)$.

   A. $f(-x)>0$　　　　**B.** $f'(-x)<0$

   C. $\lim\limits_{x\to 0} f(-x)<0$　　　　**D.** $\lim\limits_{x\to 0} f(-x)>0$

6. 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0$，$f''(x)<0, \Delta x$ 为自变量在 x_0 的增量，Δy 与 $\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在 x_0 对应的增量和微分. 若 $\Delta x>0$，则 $(*)$.

A. $0<\Delta y<\mathrm{d}y$ **B.** $0<\mathrm{d}y<\Delta y$
C. $\Delta y<\mathrm{d}y<0$ **D.** $\mathrm{d}y<\Delta y<0$

7. 已知 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=t^2 \end{cases}$ 所确定，$\varphi''(t)$ 存在，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=(*)$.

A. $\dfrac{t\varphi''(t)-\varphi'(t)}{4t^3}$ **B.** $\dfrac{t\varphi''(t)+\varphi'(t)}{4t^3}$
C. $\dfrac{\varphi''(t)-t\varphi'(t)}{4t^3}$ **D.** $\dfrac{t\varphi''(t)-\varphi(t)}{4t^3}$

8. $y=\sin^4 x-\cos^4 x$，则 $y^{(n)}=(*)$.

A. $2^n\cos\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ **B.** $2^n\sin\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$
C. $-2^n\cos\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ **D.** $-2^n\sin\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$

9. 设 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{3^{\frac{k}{n}}}{n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=(*)$.

A. $\dfrac{4}{\ln 3}$ **B.** $\dfrac{2}{\ln 3}$ **C.** $\dfrac{3}{\ln 3}$ **D.** $\dfrac{3}{\ln 2}$

10. $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-9}$ 全部的渐近线为 $(*)$.

A. $x=\pm 3, y=x$ **B.** $x=\pm 3, y=2x$
C. $x=\pm 3, y=-x$ **D.** $x=\pm 3, y=3x$

2 填空题 (每题 3 分，共 30 分)

1. 已知 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x+3$，$f^{-1}(x)<x-2$ 成立，则 x 的取值范围是__________.

2. 设 $x>1$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^n+x^{3n}}=$ __________.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\sin x\right)=$ __________.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x\sin^2 x}=$ __________.

5. 函数 $f(x)=x^4$ 在区间 $[1,2]$ 内满足 Lagrange 中值定理的 ξ 的值 =__________.

6. 函数 $f(x)=x\mathrm{e}^{-x}$ 的递增区间为__________.

7. 若 $f(x)=x^3\ln(2+x)$，则 $f^{(6)}(0)=$ __________.

8. 设 $f(x)$ 具有任意阶导数，$f'(x)=f^2(x)$，则 $f^{(n)}(x)=$ __________.

9. 设 $k>0$，则 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{\mathrm{e}}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内的零点个数为__________.

10. 设 $y=y(x)$ 由 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 确定，则 $y=y(x)$ 的极小值点为__________.

3 解答题 (共 40 分)

1. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{1}{x}}\right]$.

2. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导，如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+2\sqrt{x}f'(x)\right]=2022$，计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

3. 对任意正实数 β, 记函数 $f(x) = |\lg x|$ 在 $[\beta, +\infty)$ 上的最小值为 m_β，函数 $g(x) = \sin\dfrac{\pi x}{2}$ 在 $[0, \beta]$ 上的最大值为 M_β，若 $M_\beta - m_\beta = \dfrac{1}{2}$，求 β 的所有可能值.

4. 设 $\alpha \in \mathbf{R}$，函数 $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} - \alpha$ 有两个不同的零点 x_1, x_2.

(1) 证明: $\alpha \in \left(0, \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$;

(2) 证明: $|x_2 - x_1| > 2\sqrt{1 - \mathrm{e}\alpha}$.

CHAPTER 6

2022 年转专业考试真题参考答案

1 填空题 (9 分)

1. **Solution.** B.

2. **Solution.** C.

   由题可得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{ax^2+bx+c}{x+1}}=0.$$

   而 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\frac{ax^2+bx+c}{x+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{ax^2+bx+c}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2ax+b}$，故 $a\neq 0$.

3. **Solution.** C.

   $f(x)=\begin{cases}-1, & x<1,\\ 1, & x\geq 1\end{cases}$，所以 $f(x)$ 仅在 $x=1$ 处不连续. 注意本题不是单侧连续.

4. **Solution.** D.

   基本初等函数在其定义域内连续，初等函数在其定义区间内连续，(2): 例如 $f(x)=xD(x), D(x)$ 是 Dirichlet 函数，可以验证 $f(x)$ 仅在 $x=0$ 处连续 (3)(4) 闭区间上连续函数具有最值定理以及有界性，选择 D.

5. **Solution.** C.

   因 $f(x)$ 可导，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 令 $y=-x$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(-x)=\lim\limits_{y\to 0}f(y)=f(0)<0$，选择 C.

6. **Solution.** A.

   由 Taylor 定理，$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x)\Delta x+\dfrac{1}{2}f''(\xi)(\Delta x)^2$，$\xi\in(x,x+\Delta x)$.

   因 $f''(x)<0$，故 $\Delta y<f'(x)\Delta x$. 而 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x=f'(x)\Delta x$，故 $\Delta y<\mathrm{d}y$.

   另一方面，$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f'(\eta)\Delta x>0$，$\eta\in(x,x+\Delta x)$.

   因此 $0<\Delta y<\mathrm{d}y$，选择 A.

7. **Solution.** A.

$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \dfrac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}} = \dfrac{\varphi'(t)}{2t}$，所以

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{t\varphi''(t)-\varphi'(t)}{t^2}\cdot\frac{1}{2t}\\ &= \frac{t\varphi''(t)-\varphi'(t)}{4t^3}.\end{aligned}$$

8. **Solution.** C.

   注意到

   $$y = \sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = -\cos 2x,$$

   简单归纳即得 $y^{(n)}(x) = -2^n \cos\left(2x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$. 选择 C.

9. **Solution.** B.

   由定积分的定义可得

   $$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3^{\frac{k}{n}}}{n} = \int_0^1 3^x\,\mathrm{d}x = \left.\frac{3^x}{\ln 3}\right|_0^1 = \frac{2}{\ln 3}.$$

10. **Solution.** A.

    令 $x^2-9=0$ 得 $x=\pm 3$，所以 $y=f(x)$ 有垂直渐近线 $x=\pm 3$.

    注意到

    $$k = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2-9}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-9} = 1,\ \ b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-9}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{9x}{x^2-9}\right) = 0,$$

    故 $y=f(x)$ 有斜渐近线 $y=x$.

    $y=f(x)$ 无水平渐近线，选择 A.

2 填空题 (每题 8 分，共 48 分)

1. **Solution.** $(3,+\infty)$.

   由 $\log_{\frac{1}{2}} x = y-3$ 得 $x = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{y-3}$，所以 $f^{-1}(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-3}$.

   即解不等式 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-3} < x-2$.

   记 $g(x) = x-2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-3}$，则 $g'(x) = 1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-3}\ln 2 > 0$，所以 $g(x)$ 单调增加.

   又 $g(3)=0$，故 $g(x)>0 \Rightarrow x\in(3,+\infty)$.

2. **Solution.** x^3.

   $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^n+x^{3n}} = \lim_{n\to\infty} x^3\cdot\sqrt[n]{\frac{1}{x^{2n}}+1} = x^3\cdot\lim_{n\to\infty}\exp\left[\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^{2n}}\right)}{n}\right] = x^3\cdot\lim_{n\to\infty}\exp\left(\frac{1}{nx^{2n}}\right) = x^3.$$

3. **Solution.** 1.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\sin x\right)=\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1-0=1.$$

4. **Solution.** 1.

注意到

$$\arcsin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}x^{2n+1},$$

所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(2x+\frac{1}{2\cdot3}(2x)^3\right)-2\left(x+\frac{1}{2\cdot3}x^3\right)+o(x^3)}{x^3}=1.$$

5. **Solution.** $\sqrt[3]{\dfrac{15}{4}}$.

由 $f(2)-f(1)=15=f'(\xi)(2-1)=4\xi^3,\xi\in(1,2)$ 解得 $\xi=\sqrt[3]{\dfrac{15}{4}}$.

6. **Solution.** $(-\infty,1)$.

计算 $f'(x)=(1-x)\mathrm{e}^{-x}$，令 $f'(x)>0$ 解得 $x\in(-\infty,1)$.

7. **Solution.** 30.

$f(x)=x^3\ln(2+x)=x^3\ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right)+\ln 2\cdot x^3$.

注意到

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}.$$

所以 $f(x)=x^3\cdot\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n+\ln 2\cdot x^3$.

由 Taylor 定理，

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

将上述两式对照，得 $\dfrac{f^{(6)}(0)}{6!}=\dfrac{1}{2^3\cdot3}$，解得 $f^{(6)}(0)=30$.

8. **Solution.** 0 或 $\dfrac{n!}{(C-x)^{n+1}}$.

由 $f'(x)=f^2(x)$，若 $f(x)\equiv0$，显然满足题意. 此时 $f^{(n)}(x)\equiv0$.

若不然，则可得 $\left(-\dfrac{1}{f(x)}\right)'=1$，因此 $f(x)=\dfrac{1}{C-x}$.

注意到

$$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=\frac{(-a)^n\cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}.$$

故 $f^{(n)}(x)=\dfrac{n!\cdot1^n}{(C-x)^{n+1}}=\dfrac{n!}{(C-x)^{n+1}}$.

9. **Solution.** 2.

即 $k=\dfrac{x}{\mathrm{e}}-\ln x$.

记 $t(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}}-\ln x$，则 $t'(x)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}-\dfrac{1}{x}$. 所以 $t(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 单调减，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 单调增.

因 $t(0^+)=t(+\infty)=+\infty$，$t(\mathrm{e})=0$，又 $k>0$，作图可得共有 2 个零点.

10. **Solution.** $x=1$

方程 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 两边对 x 求导，得 $6y^2y'-4yy'+2y+2xy'-2x=0$. 即

$$y'(3y^2-2y+x)=x-y \qquad (*)$$

令 $y'=0$ 得 $y=x$，代入原方程得

$$(x-1)(2x^2+x+1)=0.$$

解得 $x=1$. 再对 $(*)$ 式求导，有

$$y''(3y^2-2y+x)+y'\frac{\partial}{\partial x}(3y^2-2y+x)=1-y'.$$

代入 $x=y=1$，$y'=0$ 得 $y''(1)=\dfrac{1}{2}>0$，故 $x=1$ 是 $y(x)$ 的极小值点.

3 解答题

1. **Solution.**

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right]^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to0}\exp\left[\frac{1}{x}\ln\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right]=\lim_{x\to0}\exp\left[\frac{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}-1}{x}\right]\\
&=\lim_{x\to0}\exp\left[\frac{\frac{\ln(1+x)-x}{x}}{x}\right]=\lim_{x\to0}\exp\left[\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\right]\\
&=\lim_{x\to0}\exp\left[\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\right]=\exp\left[\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\right]\\
&=\exp\left[\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-x}{x^2}\right]=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

2. **Solution.**

令 $F(x)=\mathrm{e}^{\sqrt{x}}f(x)$，由广义 L' Hospital 法则（$\dfrac{*}{\infty}$ 型）可得

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{F'(x)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}\\
&=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}f(x)+\mathrm{e}^{\sqrt{x}}f'(x)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+2\sqrt{x}f'(x)\right]=2022.
\end{aligned}$$

3. **Solution.**

若 $0<\beta\le 1$，$M_\beta=\sin\dfrac{\pi\beta}{2}$，而 $m_\beta=0$，故 $\sin\dfrac{\pi\beta}{2}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{\pi\beta}{2}=\dfrac{\pi}{6}$，即 $\beta=\dfrac{1}{3}$.

若 $\beta>1$，$M_\beta=1$，而 $m_\beta=\lg\beta$，故 $1-\lg\beta=\dfrac{1}{2}$，解得 $\beta=\sqrt{10}$.

综上，$\beta\in\left\{\dfrac{1}{3},\sqrt{10}\right\}$.

4. **Proof.**

(1) 令 $f(x)=0$，得 $\alpha=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$. 令 $g(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$，则 $g'(x)=\dfrac{1-x}{\mathrm{e}^x}$.

故 $g(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 单调增，在 $(1,+\infty)$ 单调减.

因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$，$g(1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，作图可得 $\alpha\in\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

(2) 由 $\dfrac{x_1}{\mathrm{e}^{x_1}}=\dfrac{x_2}{\mathrm{e}^{x_2}}=\alpha$ 可得

$$\ln\alpha=\ln x_1-x_1=\ln x_2-x_2.$$

此即

$$\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}=1.$$

由 A-L-G 不等式有

$$\frac{x_1+x_2}{2}>\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}=1,$$

所以 $x_1+x_2>2$. 不妨设 $x_2>x_1$，则 $|x_2-x_1|=x_2-x_1=(x_2-1)+(1-x_1)$. 而 $x_2-1>1-x_1$，下证

$$1-x_1>\sqrt{1-\mathrm{e}\alpha}.$$

上式即 $x_1^2-2x_1>-\dfrac{\mathrm{e}x_1}{\mathrm{e}^{x_1}}$，故即证 $2-x_1<\mathrm{e}^{1-x_1},x_1\in(0,1)$.

注意到

$$\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}>1+x,x>0,$$

所以 $\mathrm{e}^{1-x_1}>2-x_1$，证毕!

CHAPTER 7

2021 年转专业考试真题

1 填空题

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\arctan\left(\dfrac{1}{k^2+k+1}\right) =$ __________.

2. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{\tan x}\right)}{2^x-1}=8$，则极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=$ __________.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n^4}+2\sqrt[n]{n^2}-3}{\sqrt[n]{n^2}-3\sqrt[n]{n}+2}=$ __________.

4. 设 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且满足方程 $g(x)+g(y)=g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$，则 $g(x)=$ __________.

5. 若 $x=a\cos t+b\sin t$，$y=a\sin t-b\cos t$，则 $\dfrac{\mathrm{d}^m x}{\mathrm{d}t^m}\cdot\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}-\dfrac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}\cdot\dfrac{\mathrm{d}^m y}{\mathrm{d}t^m}=$ __________.

2 证明题

1. 设数列 $\{\theta_n\}$ 满足 $\theta_n\neq 0$，且 $\theta_n^2-\theta_{n-1}\cdot\theta_{n+1}=1(n=1,2,3\cdots)$. 证明：存在一个实数 λ，使得对所有 $n\geq 1$，有 $\theta_{n+1}=\lambda\theta_n-\theta_{n-1}$.

2. 设 $f(x)$ 定义在 $x=0$ 的某个邻域内，且满足 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=0$. 证明：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

3. 已知函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有二阶导数，$f(0)=f'(0)=0$，且 $|f''(x)|\le|f(x)|+|f'(x)|$. 证明：存在 $\delta>0$，使得在 $(-\delta,\delta)$ 内 $f(x)\equiv 0$.

4. 设可微函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调减少，如果当 $x\in(0,+\infty)$ 时 $0<|f(x)|<|f'(x)|$ 成立，证明：当 $x\in(0,1)$ 时，必有 $xf(x)>\dfrac{1}{x}f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

CHAPTER 8

2021 年转专业考试真题参考答案

1　填空题 (每题 8 分，共 48 分)

1. **Solution**. $\dfrac{\pi}{2}$.

   注意到

$$\arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)=\arctan\left[\frac{(k+1)-k}{1+(k+1)k}\right]=\arctan(k+1)-\arctan k.$$

   故

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}[\arctan(k+1)-\arctan k]\\&=\lim_{n\to\infty}[\arctan(n+1)-\arctan 0]\\&=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

2. **Solution**. $8\ln 2$.

   计算

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{\tan x}\right)}{2^x-1}&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{\tan x}}{2^x-1}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{(\mathrm{e}^{x\ln 2}-1)x}\\&=\frac{f(x)}{\ln 2\cdot x^2}=8,\end{aligned}$$

   故 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=8\ln 2$.

3. **Solution**. -8.

令 $\sqrt[n]{n}=t\to 1\ (n\to\infty)$，则

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^4}+2\sqrt[n]{n^2}-3}{\sqrt[n]{n^2}-3\sqrt[n]{n}+2}&=\lim_{t\to 1}\frac{t^4+2t^2-3}{t^2-3t+2}\\&=\lim_{t\to 1}\frac{(t^2-1)(t^2+3)}{(t-1)(t-2)}\\&=\lim_{t\to 1}\frac{(t+1)(t^2+3)}{t-2}\\&=-8.\end{aligned}$$

4. **Solution**. $g(1)\cdot x^2$.

在方程 $g(x)+g(y)=g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 中，

令 $x=y=0$，得 $g(0)=0$；令 $y=0$，得 $g(x)=g(|x|)$. 所以 $g(x)$ 为偶函数.

下面考虑 $x,y>0$ 的情况.

注意到原方程即 $g\left(\sqrt{x^2}\right)+g\left(\sqrt{y^2}\right)=g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$. 令 $h(x)=g(\sqrt{x})(x>0)$，则

$$h(x^2)+h(y^2)=h(x^2+y^2)\quad 或\quad h(a)+h(b)=h(a+b).$$

所以 $h(x)=kx$.（**注：**参见《数学分析中的典型问题与方法》2.4 函数方程 例 2.4.1.）

从而 $g(x)=kx^2(x>0)$.

由偶函数的性质即得 $g(x)=kx^2(x\in\mathbf{R})$. 令 $x=1$ 得其中 $k=g(1)$.

5. **Solution**. $(a^2+b^2)\sin\dfrac{n-m}{2}\pi$.

注意到

$$x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t\right)=\sqrt{a^2+b^2}\cos(t-\alpha),$$

其中 $\tan\alpha=\dfrac{b}{a}$. 同理

$$y=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t\right)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(t-\alpha).$$

而

$$\frac{\mathrm{d}^k\cos t}{\mathrm{d}t^k}=\cos\left(t+\frac{k\pi}{2}\right),\quad \frac{\mathrm{d}^k\sin t}{\mathrm{d}t^k}=\sin\left(t+\frac{k\pi}{2}\right),\quad k\in\mathbf{N}.$$

所以 $\dfrac{\mathrm{d}^m x}{\mathrm{d}t^m}\cdot\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}-\dfrac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}\cdot\dfrac{\mathrm{d}^m y}{\mathrm{d}t^m}$

$$\begin{aligned}&=(a^2+b^2)\left[\cos\left(t-\alpha+\frac{m\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(t-\alpha+\frac{n\pi}{2}\right)-\cos\left(t-\alpha+\frac{n\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(t-\alpha+\frac{m\pi}{2}\right)\right]\\&=(a^2+b^2)\sin\left[\left(t-\alpha+\frac{n\pi}{2}\right)-\left(t-\alpha+\frac{m\pi}{2}\right)\right]\\&=(a^2+b^2)\sin\frac{n-m}{2}\pi.\end{aligned}$$

2 证明题 (9 分)

1. **Proof**. 由题 $\theta_{n+1}^2-\theta_n\cdot\theta_{n+2}=1$，$\theta_n^2-\theta_{n-1}\cdot\theta_{n+1}=1$，

   两式相减得 $\theta_{n+1}^2+\theta_{n-1}\cdot\theta_{n+1}-\theta_n^2-\theta_n\cdot\theta_{n+2}=0$，即 $\theta_{n+1}(\theta_{n-1}+\theta_{n+1})=\theta_n(\theta_n+\theta_{n+2})$.

   所以 $\dfrac{\theta_{n+2}+\theta_n}{\theta_{n+1}}=\dfrac{\theta_{n+1}+\theta_{n-1}}{\theta_n}=\cdots=\dfrac{\theta_2+\theta_0}{\theta_1}=\lambda$.

2. **Proof**. 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=0$，$\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，当 $|x|<\delta$ 时，有

$$\left|\frac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

   亦即

$$-\frac{\varepsilon}{3}|x|<f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)<\frac{\varepsilon}{3}|x|.$$

   将 x 替换为 $\dfrac{x}{2^k}(k\in\mathbf{N})$，得

$$-\frac{\varepsilon}{3}\cdot\frac{1}{2^k}|x|<f\left(\frac{x}{2^k}\right)-f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)<\frac{\varepsilon}{3}\cdot\frac{1}{2^k}|x|\ (k=0,1,2,\cdots,n).$$

   注意到

$$\sum_{k=0}^{n}\left[f\left(\frac{x}{2^k}\right)-f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right]=f(x)-f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right),$$

   所以

$$-\frac{\varepsilon}{3}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}|x|<f(x)-f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)<\frac{\varepsilon}{3}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}|x|.$$

   令 $n\to\infty$，注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{2^k}=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$，得

$$-\frac{2\varepsilon}{3}|x|\le f(x)\le\frac{2\varepsilon}{3}|x|.$$

   故 $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\le\dfrac{2\varepsilon}{3}<\varepsilon$，因此 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|=0$.

3. **Proof**.

   取 $\delta=\dfrac{1}{2}$，考察定义在区间 $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$ 上的函数 $f(x)$.

   由 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 的连续性可知，存在 $M_1,M_2\ge 0$，使得 $|f(x)|\le M_1$，$|f'(x)|\le M_2$，所以

$$|f''(x)|\le|f(x)|+|f'(x)|\le M_1+M_2.$$

   因此 $|f''(x)|$ 有上界 M.

   $\forall\,x\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$，由 Taylor 公式得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(\xi)\frac{x^2}{2}=f''(\xi)\frac{x^2}{2},\quad f'(x)=f'(0)+f''(\eta)x,$$

其中 ξ, η 介于 0 与 x 之间.

注意到 $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 时，$|x| \le \frac{1}{2}$，$x^2 \le \frac{1}{4}$，从而有

$$\begin{aligned} M = |f(x)| + |f'(x)| &= |f''(\xi)|\frac{x^2}{2} + |f''(\eta)||x| \\ &\le \frac{1}{8}|f''(\xi)| + \frac{1}{2}|f''(\eta)| \\ &\le \frac{5M}{8}, \end{aligned}$$

从而 $M = 0$，必有 $f(x) = f'(x) \equiv 0$，得证.

4. **Proof**. 由 $|f(x)| > 0$ 及 $f(x)$ 的连续性可知，$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上不变号.

若 $f(x) < 0$，令 $g(x) = xf(x) - \frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)$，则

$$g'(x) = xf'(x) + f(x) + \frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^3}f'\left(\frac{1}{x}\right) < 0,$$

故 $g(x)$ 单调减少. 当 $x \in (0, 1)$ 时，$g(x) > g(1) = 0$，原命题成立.

若 $f(x) > 0$，则 $0 < f(x) < -f'(x)$，即 $f'(x) + f(x) < 0$.

令 $\varphi(x) = f(x)\mathrm{e}^x$，则 $\varphi'(x) = \mathrm{e}^x\left[f(x) + f'(x)\right] < 0$，即 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调减少.

$\forall x \in (0, 1)$，$\frac{1}{x} > 1 > x$，所以 $\varphi(x) > \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$，即

$$f(x)\mathrm{e}^x > f\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \quad \text{或} \quad xf(x) > xf\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x} - x}.$$

接下来只需证 $xf\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x} - x} > \frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)$.

因 $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$，所以即证 $x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x} - x} > 1$.

令 $h(x) = 2\ln x + \frac{1}{x} - x$，则 $h'(x) = -\frac{(x-1)^2}{x^2} < 0$，$h(x)$ 单调减少，

故 $h(x) > h(1) = 0$，$x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x} - x} > 1$，即 $xf(x) > \frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)\ (0 < x < 1)$.

错解: 由假设可得 $0 < f(x) < -f'(x)$，故 $\frac{-f'(x)}{f(x)} > 1$，所以

$$\ln\frac{f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)} = -\int_x^{\frac{1}{x}} \frac{f'(t)}{f(t)}\mathrm{d}t > \int_x^{\frac{1}{x}} \mathrm{d}t = \frac{1}{x} - x, x \in (0, 1).$$

故 $\frac{f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)} > e^{\frac{1}{x} - x}$. 又 $e^{\frac{1}{x} - x} > \frac{1}{x^2}$，即得

$$xf(x) > \frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right), x \in (0, 1).$$

错误原因在于使用 Newton-Leibniz 公式时要求函数 $\frac{f'(t)}{f(t)}$ 在区间 $\left(x, \frac{1}{x}\right)$ 上连续，此处无法得出.

CHAPTER 9

2020 年转专业考试真题

1 解答题

1. 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的有界实函数，且 $f\left(x+\frac{1}{11}\right)+f\left(x+\frac{1}{12}\right)=f(x)+f\left(x+\frac{23}{132}\right)(\forall x\in\mathbf{R})$，求证：$f(x)$ 是周期函数.

2. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=A$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}n(a_n-a_{n-1})=0$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{3}}\left[(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}\right]$.[1]

4. 求在 $\mathbf{R}$ 上满足方程 $f(2020x)+f(2019x)=2022x+2021$ 的连续解.

[1] 此题与 2023 年真题填空题第 **2** 题一致.

5. 讨论函数 $f(x)=[x]\sin\pi x$ 的连续性与可导性 ($[x]$ 表示不超过 x 的最大整数).

6. 计算 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\dfrac{1}{x^2+a^2}\right)\right|_{x=0}$，其中 n 是任意正整数.

注： 原题没有 $x=0$，但那样无法正常求解，怀疑打印错误，此处加上. 答案会附上不考虑此条件的解法.

7. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$. 求证：存在不同的 $\xi,\eta\in(0,1)$，使 $f'(\xi)f'(\eta)=1$.

8. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$，证明：$f''(0)=4$.

CHAPTER 10

2020 年转专业考试真题参考答案

1 解答题

1. **Proof**. 设 $F(x)=f\left(x+\dfrac{1}{11}\right)-f(x)$，则 $F\left(x+\dfrac{1}{12}\right)=F(x)$，故 $F(x)$ 以 $\dfrac{1}{12}$ 为周期，也以 1 为周期，即 $F(x+1)=F(x)$，从而

$$f\left(x+\frac{1}{11}\right)-f(x)=f\left(x+\frac{12}{11}\right)-f(x+1) \quad \text{或} \quad f(x+1)-f(x)=f\left(x+\frac{12}{11}\right)-f\left(x+\frac{1}{11}\right).$$

故 $f(x+1)-f(x)$ 以 $\dfrac{1}{11}$ 为周期，也以 1 为周期，则

$$f(x+n)-f(x)=\sum_{i=0}^{n-1}[f(x+i+1)-f(x+i)]=n[f(x+1)-f(x)].$$

即 $f(x+1)-f(x)=\dfrac{f(x+n)-f(x)}{n}$.

令 $n\to\infty$，由于 $f(x)$ 有界，所以 $f(x+1)-f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x+n)-f(x)}{n}=0$.

所以 $f(x)$ 以 1 为周期.

2. **Solution**. 不妨定义 $a_0=0$，由 Stolz 定理，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}i(a_i-a_{i-1})}{n}&=\lim_{n\to+\infty}\frac{na_n-\sum\limits_{i=1}^{n-1}a_i}{n}\\&=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n+1}{n}a_n-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right]\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{n(a_n-a_{n-1})}{n-(n-1)}=0.\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{n}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=A$.

3. 参见 2023 年真题填空题第 2 题 **解析**.

4. **Solution**. 不妨考虑一般情况：$f(\alpha x)+f(\beta x)=ax+b\,(\alpha>\beta)$.

上式即 $f(x)+f\left(\dfrac{\beta}{\alpha}x\right)=\dfrac{ax}{\alpha}+b$.

所以

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{ax}{\alpha}+b-f\left(\frac{\beta}{\alpha}x\right)\\&=\frac{ax}{\alpha}+b-\left[\frac{ax}{\alpha}\frac{\beta}{\alpha}+b-f\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}x\right)\right]\\&=\frac{ax}{\alpha}\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)+f\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}x\right).\end{aligned}$$

利用上式迭代可得

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{ax}{\alpha}\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)+\frac{ax}{\alpha}\frac{\beta^2}{\alpha^2}\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)+f\left(\frac{\beta^4}{\alpha^4}x\right)\\&=\frac{ax}{\alpha}\left(1-\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}-\frac{\beta^3}{\alpha^3}\right)+f\left(\frac{\beta^4}{\alpha^4}x\right)\\&=\cdots=\frac{ax}{\alpha}\left(1-\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}-\cdots-\frac{\beta^{2n-1}}{\alpha^{2n-1}}\right)+f\left(\frac{\beta^{2n}}{\alpha^{2n}}x\right).\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$，因 $\dfrac{\beta}{\alpha}<1$，故 $\dfrac{\beta^{2n}}{\alpha^{2n}}\to 0$，且 $1-\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}-\cdots-\dfrac{\beta^{2n-1}}{\alpha^{2n-1}}\to\dfrac{1}{1-\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$.

利用 $f(x)$ 的连续性，得到

$$f(x)=\frac{ax}{\alpha}\frac{\alpha}{\alpha+\beta}+f(0)=\frac{ax}{\alpha+\beta}+\frac{b}{2}.$$

将 $\alpha=2020$，$\beta=2019$，$a=2022$，$b=2021$ 代入，立得 $f(x)=\dfrac{2022}{4039}x+\dfrac{2021}{2}$.

5. **Solution.**

(1) 连续性：对任意非整数点 $x\notin\mathbf{Z}$，$[x]$ 在该点的某邻域内取常值，且 $\sin\pi x$ 连续，故 $f(x)=[x]\sin\pi x$ 在非整数点连续.

对任意整数点 $n\in\mathbf{Z}$，有

$$f(n)=n\sin(n\pi)=0.$$

当 $x\to n^-$ 时，

$$[x]=n-1,\quad \sin\pi x\to\sin(n\pi)=0,$$

所以 $f(x)\to(n-1)\cdot 0=0$. 当 $x\to n^+$ 时，

$$[x]=n,\quad \sin\pi x\to 0,$$

所以 $f(x)\to n\cdot 0=0$. 因此左右极限均等于 $f(n)$，故 $f(x)$ 在整数点亦连续.

综上，f 在 $\mathbf{R}$ 上处处连续.

(2) 可导性：对非整数点 $x\notin\mathbf{Z}$，$[x]=k$ 为常数，则

$$f(x)=k\sin\pi x,\quad f'(x)=k\pi\cos\pi x$$

存在，故 $f(x)$ 在非整数点可导.

考察整数点 $x=n$ 处 $f(x)$ 的左右导数.

令 $h\to 0^-$，则

$$f(n+h)=(n-1)\sin\big(\pi(n+h)\big)=(n-1)(-1)^n\sin(\pi h),$$
$$\frac{f(n+h)-f(n)}{h}=(n-1)(-1)^n\frac{\sin(\pi h)}{h}\to(n-1)(-1)^n\pi.$$

令 $h\to 0^+$，则

$$f(n+h)=n\,\sin\big(\pi(n+h)\big)=n(-1)^n\sin(\pi h),$$
$$\frac{f(n+h)-f(n)}{h}=n(-1)^n\frac{\sin(\pi h)}{h}\to n(-1)^n\pi.$$

左右导数不相等，故 f 在整数点不可导.

综上所述： f 在 $\mathbf{R}$ 上处处连续，但仅在 $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$ 上可导.

6. **Solution**.

法一. 注意到

$$\frac{1}{x^2+a^2}=\frac{1}{a^2}\frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}}=\frac{1}{a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)^n=\frac{1}{a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{a^{2n}}.$$

由 Taylor 定理，与 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 对照，故当 n 为奇数时，$\displaystyle\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)\bigg|_{x=0}=0.$

当 n 为偶数时，$\displaystyle\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)\bigg|_{x=0}=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\,n!}{a^{n+2}}.$

法二. 函数即 $(a^2+x^2)y=1$. 由 Leibniz 公式可得

$$(x^2+a^2)y^{(n)}+2nxy^{(n-1)}+n(n-1)y^{(n-2)}=0,$$

令 $x=0$ 得 $a^2y^{(n)}(0)+n(n-1)y^{(n-2)}(0)=0$.

注意到 $y(0)=\dfrac{1}{a^2}$，$y'(0)=0$. 当 n 为奇数时，由上式易得 $y^{(n)}(0)=0$.

当 n 为偶数时，

$$\begin{aligned}y^{(n)}(0)&=\frac{y^{(n)}(0)}{y^{(n-2)}(0)}\cdot\frac{y^{(n-2)}(0)}{y^{(n-4)}(0)}\cdots\frac{y^{(2)}(0)}{y(0)}\cdot y(0)\\&=-\frac{n(n-1)}{a^2}\cdot-\frac{(n-2)(n-3)}{a^2}\cdots\frac{2\cdot 1}{a^2}\cdot\frac{1}{a^2}\\&=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\,n!}{a^{n+2}}.\end{aligned}$$

当 $x\neq 0$ 时，引入复数：$\dfrac{1}{x^2+a^2}=\dfrac{1}{2ai}\left(\dfrac{1}{x-ai}-\dfrac{1}{x+ai}\right)$.

注意到

$$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=\frac{(-a)^n\cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}.$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)&=\frac{1}{2ai}\left(\frac{1}{x-ai}-\frac{1}{x+ai}\right)^{(n)}\\&=\frac{(-1)^n\,n!}{2ai}\left[\frac{1}{(x-ai)^{n+1}}-\frac{1}{(x+ai)^{n+1}}\right].\end{aligned}$$

设 $x+ai=\rho \mathrm{e}^{i\varphi}$，其中 $\rho=\sqrt{x^2+a^2}$，$\varphi=\arctan\left(\dfrac{a}{x}\right)$. 利用欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\pm i\theta}=\cos\theta\pm i\sin\theta,$$

则 $x-ai=\rho\mathrm{e}^{-i\varphi}$，且

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-ai)^{n+1}}-\frac{1}{(x+ai)^{n+1}}&=\rho^{-(n+1)}[\mathrm{e}^{i(n+1)\varphi}-\mathrm{e}^{-i(n+1)\varphi}]\\&=\rho^{-(n+1)}[(\cos(n+1)\varphi+i\sin(n+1)\varphi)-(\cos(n+1)\varphi-i\sin(n+1)\varphi)]\\&=2i\rho^{-(n+1)}\sin(n+1)\varphi.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)&=\frac{(-1)^n\,n!}{2ai}\cdot 2i\rho^{-(n+1)}\sin(n+1)\varphi\\&=\frac{(-1)^n\,n!}{a}\cdot\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)^{-(n+1)}\sin\left[(n+1)\arctan\left(\frac{a}{x}\right)\right]\\&=\frac{(-1)^n\,n!}{a(x^2+a^2)^{\frac{n+1}{2}}}\cdot\sin\left[(n+1)\arctan\left(\frac{a}{x}\right)\right].\end{aligned}$$

7. **Proof.** 令 $g(x)=f(x)+x-1$，由于

$$g(0)=f(0)+0-1=-1<0,\quad g(1)=f(1)+1-1=1>0,$$

由 $g(x)$ 的连续性知 $\exists c\in(0,1)$ 使 $g(c)=0$，即

$$f(c)=1-c.$$

在区间 $[0,c]$ 上，Lagrange 中值定理给出 $\exists\eta\in(0,c)$ 使

$$f'(\eta)=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=\frac{1-c}{c}.$$

在区间 $[c,1]$ 上，Lagrange 中值定理给出 $\exists\xi\in(c,1)$ 使

$$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=\frac{c}{1-c}.$$

故

$$f'(\xi)\,f'(\eta)=\frac{c}{1-c}\cdot\frac{1-c}{c}=1,$$

且 $\xi\neq\eta$. 证毕.

8. **Proof.**

原极限等价于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)}{x}=3.$$

因此 $\ln\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)\to 0$，$x+\dfrac{f(x)}{x}\to 0$，$\ln\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)\sim x+\dfrac{f(x)}{x}$，从而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$.

因此 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^2\cdot\dfrac{f(x)}{x^2}=0$，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\dfrac{f(x)}{x^2}=0$.

由 Taylor 公式可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)}{x^2}=\frac{1}{2}f''(0)=2,$$

所以 $f''(0)=4$.

CHAPTER 11

2019 年转专业考试真题

1 解答题

1. 设函数 $y = f(x), x \in (-\infty, +\infty)$ 的图像关于 $x = 2019$，$x = 2020$ 均对称，请判断函数 $y = f(x)$ 是什么性质的函数，并说明你的判断.

2. 设 $a_n > 0, b_n > 0, \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n} - \dfrac{1}{b_{n+1}}\right) > 0$，证明：极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 存在.

3. 计算不定积分：

   （1）$\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}\mathrm{d}x.$

   （2）$\displaystyle\int \frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x.$[1]

[1] 此题与 2024 年真题填空题第 **6** 题一致.

4. (1) 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值. $f(a)=g(a), f(b)=g(b)$. 证明：$\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$. 证明：$\exists \alpha \in (a,b)$ 使得 $f'(\alpha)+\alpha f(\alpha)=0$.

5. 设 $n \in \mathbf{N}^*$，$f(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{\mathrm{d}^n\left(x^2-1\right)^n}{\mathrm{d}x^n}$，计算 $f(1)$，$f(-1)$.

6. 已知函数 $f(x)$ 有连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f'(x)}{1-\mathrm{e}^{-x}}=1$. 问 $f(0)$ 为何值时，$f(0)$ 为 $f(x)$ 的极值，并说明它是极大值还是极小值.

7. 设 $f(x):\mathbf{I}\to\mathbf{R}$ 是任一函数，$x_0\in\mathbf{I}$，证明：$f(x)$ 在 x_0 处可导的充要条件是：存在一个函数 $g(x):\mathbf{I}\to\mathbf{R}$，使：

(1) $f(x)-f(x_0)=g(x)(x-x_0), \forall\, x\in\mathbf{I}$.

(2) $g(x)$ 在 x_0 处连续且 $f'(x_0)=g(x_0)$.

CHAPTER 12

2019 年转专业考试真题参考答案

1 解答题

1. **Solution.** $f(x)$ 是周期函数，周期 $T=2$.

   利用图像关于 $x=2019$ 和 $x=2020$ 的对称性可得

   $$f(2019+x)=f(2019-x)\quad 或\quad f(x)=f(2\cdot 2019-x),$$

   $$f(2020+x)=f(2020-x)\quad 或\quad f(x)=f(2\cdot 2020-x).$$

   因此对于任意 x，

   $$f(x)=f\left(2\cdot 2020-(2\cdot 2019-x)\right)=f(x+2).$$

   即 $f(x)$ 具有周期 2.

2. **Proof.** 由条件

   $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)=L>0,$$

   取常数 δ 满足 $0<\delta<\dfrac{L}{2}$，则存在 $N\in\mathbf{N}$，当 $n\geq N$ 时有

   $$\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}>\delta\quad 或\quad \frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}>\delta\, a_{n+1},$$

   即

   $$a_{n+1}<\frac{1}{\delta}\left(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right).$$

   对 $n=N,N+1,\ldots,m$ 累加，得

   $$\sum_{n=N}^{m}a_{n+1}<\frac{1}{\delta}\sum_{n=N}^{m}\left(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)=\frac{1}{\delta}\left(\frac{a_N}{b_N}-\frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}\right)\leq\frac{a_N}{\delta\, b_N}.$$

   因此正项级数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ 的部分和 $S_{m+1}=\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1}a_k=\sum_{k=1}^{N}a_k+\sum_{k=N+1}^{m+1}a_k$ 有上界，

   显然 $\{S_n\}$ 单调增加，所以 $\{S_n\}$ 存在极限，故 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ 收敛.

3. **Solution.**

（1）令
$$t = x - \frac{1}{x}, \quad \mathrm{d}t = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x.$$
注意到
$$x^4 - x^2 + 1 = x^2\left[\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 1\right] = x^2(t^2+1),$$
于是
$$\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1+\frac{1}{x^2}}{t^2+1}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}.$$
故
$$\int \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \arctan t + C = \arctan\left(x - \frac{1}{x}\right) + C.$$
（2）参见 2024 年真题填空题第 6 题**解析**.

4. **Proof.**

(1) 令 $h(x) = f(x) - g(x)$，由题意知
$$h(a) = f(a) - g(a) = 0, \quad h(b) = f(b) - g(b) = 0.$$
因 f, g 在 (a, b) 上有相等的最大值，设 f 和 g 的极大值点分别为 $x_1, x_2 \in (a, b)$，使得
$$f(x_1) = g(x_2) = M.$$
若 $x_1 = x_2 = x_0$，则 $h(x_0) = 0$.

若不然，不失一般性地设 $x_1 < x_2$，则
$$h(x_1) = f(x_1) - g(x_1) = M - g(x_1) \geq 0,$$
$$h(x_2) = f(x_2) - g(x_2) = f(x_2) - M \leq 0.$$
由 $h(x)$ 的连续性，必存在 $x_0 \in [x_1, x_2]$ 使得 $h(x_0) = 0$.

于是 h 在 $[a, b]$ 上至少有三个零点 $x = a, x_0, b$. 由 Rolle 定理，存在
$$x_1 \in (a, x_0),\ x_2 \in (x_0, b) \text{ 使得 } h'(x_1) = 0,\ h'(x_2) = 0.$$
再对区间 $[x_1, x_2]$ 应用 Rolle 定理，得 $\exists \xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$ 使 $h''(\xi) = 0$.

此即
$$f''(\xi) = g''(\xi).$$
（2）令 $H(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} f(x)$，则
$$H(a) = \mathrm{e}^{\frac{a^2}{2}} f(a) = 0, \quad H(b) = \mathrm{e}^{\frac{b^2}{2}} f(b) = 0.$$
由 Rolle 定理，$\exists \alpha \in (a, b)$ 使
$$H'(\alpha) = 0.$$
注意到
$$H'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\right) f(x) + \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} f'(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\left(x f(x) + f'(x)\right).$$
由于 $\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} \neq 0$，故在 $x = \alpha$ 处
$$f'(\alpha) + \alpha f(\alpha) = 0.$$

5. **Solution.** 记

$$u(x)=(x-1)^n,\quad v(x)=(x+1)^n,$$

则

$$(x^2-1)^n=u(x)v(x).$$

由 Leibniz 公式

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[u(x)v(x)]=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}(x)\,v^{(n-k)}(x).$$

注意到

$$u^{(k)}(1)=\begin{cases}0, & k<n,\\ n!, & k=n.\end{cases}$$

所以

$$\left.\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n\right|_{x=1}=\binom{n}{n}u^{(n)}(1)\,v^{(0)}(1)=n!\,2^n.$$

因此

$$f(1)=\frac{1}{2^n\,n!}\left.\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n\right|_{x=1}=1.$$

类似地，在 $x=-1$ 处

$$v^{(k)}(-1)=\begin{cases}0, & k<n,\\ n!, & k=n.\end{cases}$$

所以

$$\left.\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n\right|_{x=-1}=\binom{n}{0}u^{(0)}(-1)\,v^{(n)}(-1)=(-1)^n\,n!\,2^n.$$

因此

$$f(-1)=\frac{1}{2^n\,n!}\left.\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n\right|_{x=-1}=(-1)^n.$$

6. **Solution.** 由

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)+f'(x)}{1-\mathrm{e}^{-x}}=1,$$

注意到 $x\to0$ 时 $1-\mathrm{e}^{-x}\sim x$，于是

$$\lim_{x\to0}(f(x)+f'(x))=f(0)+f'(0)=0.$$

要使 $x=0$ 成为极值点，必有 $f'(0)=0$，故

$$f(0)=0.$$

下面分析极值. 令 $g(x)=\mathrm{e}^x f(x)$，则

$$g'(x)=\mathrm{e}^x\left(f(x)+f'(x)\right),$$

由极限的保号性可知，当 $x\to0^+$ 时 $g'(x)>0$，当 $x\to0^-$ 时 $g'(x)<0$. 故 g 在 $x=0$ 处取得极小值. 因 $\mathrm{e}^x>0$，g 和 f 在极值点的凹凸性一致，因此 f 在 $x=0$ 处也取得极小值.

7. **Proof**

必要性: 假设 f 在 x_0 处可导，记 $f'(x_0) = A$. 定义

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, & x \neq x_0, \\ A, & x = x_0. \end{cases}$$

则对一切 $x \in \mathbf{I}$ 都有

$$f(x) - f(x_0) = g(x)(x - x_0),$$

即满足（1）.

又

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = A = g(x_0),$$

故 g 在 x_0 处连续，且 $g(x_0) = f'(x_0)$，满足（2）.

充分性：若存在满足（1）（2）的函数 g，则

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g(x) \quad (x \neq x_0),$$

方程两端令 $x \to x_0$，由 g 在 x_0 处连续得

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0).$$

因此 f 在 x_0 处可导，且

$$f'(x_0) = g(x_0).$$

这就完成了充分性的证明.

CHAPTER 13

2018 年转专业考试真题

1 解答题

1. 求极限 $\lim_{n\to\infty}(1+b^n+2^{-n}b^{2n})^{\frac{1}{n}}\,(b>0)$.

2. 求极限 $\lim_{x\to 0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.[1]

3. 求 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{2}{k^2}$.[2]

[1] 此题与 2024 年真题填空题第 **2** 题一致.
[2] 此题与 2024 年真题填空题第 **1** 题一致.

4. 已知 $f(x), g(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的非常值连续可微函数，$f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$，$g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$，且 $f'(0) = 0$. 求证：$f^2(x) + g^2(x) = 1$.

5. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，试证：$f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续的充要条件是

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |h| < \delta, \left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)\right| < \varepsilon$$，对一切 $x \in [a,b]$ 成立.

6. 设 $f_n(x) = \cos x + \cos^2 x + \cdots + \cos^n x$，求证:

（1）对任意自然数 n，方程 $f_n(x) = 1$ 在 $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right)$ 内有唯一根.

（2）设 $x_n \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right)$ 是 $f_n(x) = 1$ 的根，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{\pi}{3}$.

CHAPTER 14

2018 年转专业考试真题参考答案

1 填空题 (每题 8 分，共 48 分)

1. **Solution.** $\begin{cases} 1, & 0 < b \le 1, \\ b, & 1 < b \le 2, \\ \dfrac{b^2}{2}, & b > 2. \end{cases}$

   记 $L_n = \left(1 + b^n + (\dfrac{b^2}{2})^n\right)^{\frac{1}{n}}$. 注意到
   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} = \max\{a, b, c\}.$$
   若 $0 < b \le 1$，则 $\max\left\{1, b, \dfrac{b^2}{2}\right\} = 1$，故 $\lim L_n = 1$.

   若 $1 < b \le 2$，则 $\max\left\{1, b, \dfrac{b^2}{2}\right\} = b$，故 $\lim L_n = b$.

   若 $b > 2$，则 $\max\left\{1, b, \dfrac{b^2}{2}\right\} = \dfrac{b^2}{2}$，故 $\lim L_n = \dfrac{b^2}{2}$.

   注意到在临界点 $b = 1$ 与 $b = 2$，两种取法给出的极限均分别为 1 与 2，结论保持一致.

2. 参见 2024 年真题填空题第 2 题**解析**.

3. 参见 2024 年真题填空题第 1 题**解析**.

4. **Proof**. 在函数方程组
   $$\begin{cases} f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y), \\ g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y) \end{cases}$$
   中令 $y = 0$，得
   $$f(x) = f(x)f(0) - g(x)g(0), \tag{1}$$
   $$g(x) = f(x)g(0) + g(x)f(0). \tag{2}$$

令 $x=y=0$，得

$$f(0)=f^2(0)-g^2(0), \tag{3}$$

$$g(0)=2f(0)g(0). \tag{4}$$

由 (4) 式得 $g(0)=0$ 或 $f(0)=\dfrac{1}{2}$.

若 $f(0)=\dfrac{1}{2}$，代入 (3) 式得 $g^2(0)=-\dfrac{1}{4}$，显然不可能. 所以 $g(0)=0$，代入 (3) 式得 $f(0)=0$ 或 $f(0)=1$.

将 $g(0)=0$ 代入 (1) 式得 $f(x)=f(x)f(0)$，由于 f 是非常值函数，必有 $f(0)=1$.

计算

$$f'(x)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{f(x)\left(f(t)-f(0)\right)}{t}-\frac{g(x)\left(g(t)-g(0)\right)}{t}\right)=-g'(0)g(x),$$

$$g'(x)=\lim_{t\to 0}\frac{g(x+t)-g(x)}{t}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{g(x)\left(f(t)-f(0)\right)}{t}+\frac{f(x)\left(g(t)-g(0)\right)}{t}\right)=g'(0)f(x).$$

故

$$\left(f^2(x)+g^2(x)\right)'=2f(x)f'(x)+2g(x)g'(x)\equiv 0.$$

所以 $f^2(x)+g^2(x)\equiv f^2(0)+g^2(0)=1$.

5. **Proof**.

必要性. 设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 由 Cantor 定理, 闭区间上的连续函数必一致连续. 于是, $\forall\,\varepsilon>0, \exists\,\delta>0$，使得 $\forall\,x_1,x_2\in[a,b]$，当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，必有

$$|f'(x_1)-f'(x_2)|<\varepsilon.$$

$\forall\,x\in[a,b]$ 及 $0<|h|<\delta$，由 Lagrange 中值定理可得，存在 ξ 介于 x 与 $x+h$ 之间，使得

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(\xi).$$

因为 $|\xi-x|<|h|<\delta$，由 $f'(x)$ 的一致连续性即得

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|=|f'(\xi)-f'(x)|<\varepsilon.$$

充分性. 反过来，假设 $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，使得当 $0<|h|<\delta$ 且 $x\in[a,b]$ 时，都有

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|<\varepsilon.$$

$\forall\,x_0\in[a,b]$，并取同样的 $\delta>0$. 对于 $0<|h|<\delta$ 且 $x_0+h\in[a,b]$，有

$$\begin{aligned}\left|f'(x_0+h)-f'(x_0)\right| &\le \left|f'(x_0+h)-\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right|+\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)\right|\\ &<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon,\end{aligned}$$

其中第一项应用了在点 $x=x_0+h$ 处对增量 $-h$ 的假设条件. 由此可见

$$\lim_{h\to 0}f'(x_0+h)=f'(x_0),$$

即 $f'(x)$ 在任意 $x_0\in[a,b]$ 处连续，即 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

6. **Proof**.

（1）$\forall n \in \mathbf{N}$，计算

$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\cos^{k-1} x(-\sin x) = -\sin x \sum_{k=1}^{n} k\cos^{k-1} x < 0, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right).$$

故 f_n 在 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right)$ 上严格单调递减. 又

$$f_n(0) = n > 1, \qquad f_n\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1.$$

由介值定理可知方程 $f_n(x) = 1$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right)$ 内恰有一根，且因严格单调，此根唯一.

（2）利用等比数列求和，

$$f_n(x) = \cos x + \cos^2 x + \cdots + \cos^n x = \frac{\cos x\,(1-\cos^n x)}{1-\cos x}.$$

令 $x = x_n$ 满足 $f_n(x_n) = 1$，则 $\cos x_n\,(1-\cos^n x_n) = 1 - \cos x_n$，即

$$\cos^{n+1} x_n = 2\cos x_n - 1.$$

由于 $x_n \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right)$ 时，有 $\frac{1}{2} < \cos x_n < 1$，故当 $n \to \infty$ 时

$$\cos^{n+1} x_n \to 0,$$

从而 $2\cos x_n - 1 \to 0$，$\cos x_n \to \frac{1}{2}$，$x_n \to \frac{\pi}{3}$.

CHAPTER 15

2017 年转专业考试真题

1 解答题

1. 证明数列 $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13} \cdots$ 存在极限（不能使用单调有界定理），且求出该极限.

2. 给定一个数列 $\{x_n\}(n=1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x_{n-2}) = 0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(x_n - x_{n-1})}{n} = 0$.

3. 设 $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0 \\ f'(0), & x = 0 \end{cases}$, $f(0) = 0$，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上存在二阶导数，问 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是否存在连续导数，存在请证明，不存在请说明理由.[1]

[1] 此题与 2024 年真题证明题第 **4** 题一致.

4. 设 $f(x):\mathbf{I}\to\mathbf{R}$ 是任一函数, $x_0\in\mathbf{I}$, 证明: $f(x)$ 在 x_0 处可导的充要条件是: 存在一个函数 $g(x):\mathbf{I}\to\mathbf{R}$, 使:

（1）$f(x)-f(x_0)=g(x)(x-x_0), \forall\, x\in\mathbf{I}$.

（2）$g(x)$ 在 x_0 处连续且 $f'(x_0)=g(x_0)$.[2]

5. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内有一阶连续导数，且 $f'(0)=0$，$f''(0)$ 存在，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}$.[3]

6. 求最小正数 α，使得 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\alpha}>\mathrm{e}(x>0)$.

[2] 此题与 2019 年真题第 **7** 题一致.

[3] 此题与 2024 年真题填空题第 **3** 题一致.

CHAPTER 16

2017 年转专业考试真题参考答案

1 解答题

1. **Proof**. 记题中数列为 $\{x_n\}$，则 $\{x_n\}$ 满足

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n} \quad (n \geq 1).$$

若极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$ 存在，则令 $n \to \infty$ 得

$$L = \frac{1}{1+L},$$

舍去负根解得 $L = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

下面利用压缩映射原理证明 $\{x_n\}$ 极限存在且等于 L. 注意到

$$|x_{n+1} - L| = \left| \frac{1}{1+x_n} - \frac{1}{1+L} \right| = \frac{|x_n - L|}{(1+x_n)(1+L)}.$$

由于 $1 + x_n > 1$，故

$$|x_{n+1} - L| < \frac{|x_n - L|}{1+L} = L\,|x_n - L|\,.$$

利用上式迭代，

$$|x_n - L| < L\,|x_{n-1} - L| < L^2\,|x_{n-2} - L| < \cdots < L^{n-1}\,|x_1 - L|\,.$$

令 $n \to \infty$，由于 $0 < L < 1$，所以 $L^{n-1}\,|x_1 - L| \to 0$，根据夹逼准则立得 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - L| = 0$，即

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

2. **Proof.**

设 $a_n = x_n - x_{n-1}$，则条件可以转化为 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + a_{n-1}) = 0$，即证 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = 0$.

法一.$\forall \varepsilon > 0$，由极限的定义可知 $\exists N_1 \in \mathbf{N}^*$，当 $n > N_1$ 时，$|a_n + a_{n-1}| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

对 $n > N_1$，由 $a_n = (a_n + a_{n-1}) - a_{n-1}$，两边取绝对值有

$$|a_n| \leq |a_n + a_{n-1}| + |a_{n-1}| < \frac{\varepsilon}{2} + |a_{n-1}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + |a_{n-2}| < \cdots < (n - N_1) \cdot \frac{\varepsilon}{2} + |a_{N_1}|.$$

两边同除 n，

$$\frac{|a_n|}{n} < \frac{n-N_1}{n}\frac{\varepsilon}{2} + \frac{|a_{N_1}|}{n}.$$

由于 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{n-N_1}{n}\to 1$，故存在 N_2，当 $n>N_2$ 时，$\dfrac{n-N_1}{n}<1$；

同理，$\dfrac{|a_{N_1}|}{n}\to 0$，所以存在 N_3，当 $n>N_3$ 时，$\dfrac{|a_{N_1}|}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

取 $N=\max\{N_1,N_2,N_3\}$，则当 $n>N$ 时，有 $\dfrac{|a_n|}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_n|}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=0$，此即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{n}=0.$$

法二. 当 n 为偶数时，不妨设 $n=2k(k\in\mathbf{N})$.

当 $k\to\infty$ 时，由题可知 $a_{2k}+a_{2k-1}\to 0$ 且 $a_{2k-1}+a_{2k-2}\to 0$.

以上两式相减得 $(a_{2k}+a_{2k-1})-(a_{2k-1}+a_{2k-2})=a_{2k}-a_{2k-2}\to 0$.

由 Stolz 公式可知，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{k\to\infty}\frac{a_{2k}}{2k}&=\lim_{k\to\infty}\frac{a_{2k}-a_{2k-2}}{2k-(2k-2)}\\&=\lim_{k\to\infty}\frac{a_{2k}-a_{2k-2}}{2}\\&=0.\end{aligned}$$

当 n 为奇数时，不妨设 $n=2k+1(k\in\mathbf{N})$.

当 $k\to\infty$ 时，由题可知 $a_{2k+1}+a_{2k}\to 0$ 且 $a_{2k}+a_{2k-1}\to 0$.

以上两式相减得 $(a_{2k+1}+a_{2k})-(a_{2k}+a_{2k-1})=a_{2k+1}-a_{2k-1}\to 0$.

由 Stolz 公式可知，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{k\to\infty}\frac{a_{2k+1}}{2k+1}&=\lim_{k\to\infty}\frac{a_{2k+1}-a_{2k-1}}{2k+1-(2k-1)}\\&=\lim_{k\to\infty}\frac{a_{2k+1}-a_{2k-1}}{2}\\&=0.\end{aligned}$$

综上所述，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{n}=0$.

3. 参见 2024 年真题证明题第 4 题**解析**.

4. 参见 2019 年真题第 7 题**解析**.

5. 参见 2024 年真题填空题第 3 题**解析**.

6. **Solution** $\dfrac{1}{2}$.

   两边取对数，原不等式等价于

$$(x+\alpha)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>1 \quad 或 \quad \alpha>\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x.$$

令
$$t=\frac{1}{x}>0,\quad f(t)=\frac{1}{\ln(1+t)}-\frac{1}{t}.$$
则条件化为 $\alpha>f(t)$ 对所有 $t>0$ 都成立，故
$$\alpha\geq\sup_{t>0}f(t).$$
计算
$$f'(t)=\frac{-\frac{1}{1+t}}{[\ln(1+t)]^2}+\frac{1}{t^2}=\frac{-\frac{t^2}{1+t}+[\ln(1+t)]^2}{t^2[\ln(1+t)]^2}.$$
令 $g(t)=-\dfrac{t^2}{1+t}+[\ln(1+t)]^2$，则
$$g'(t)=-\frac{2t(1+t)-t^2}{(1+t)^2}+\frac{2\ln(1+t)}{1+t}=\frac{2}{1+t}\left[\ln(1+t)-\frac{t^2+2t}{2(1+t)}\right].$$
令 $h(t)=\ln(1+t)-\dfrac{t^2+2t}{2(1+t)}$，则
$$h'(t)=\frac{1}{t+1}-\frac{(2t+2)(t+1)-(t^2+2t)}{2(t+1)^2}=-\frac{t^2}{2(t+1)^2}.$$
所以 $h'(t)<0$，$h(t)<h(0)=0$，则 $g'(t)<0$，$g(t)<g(0)=0$，故 $f'(t)<0$，f 在 $(0,+\infty)$ 上单调减少. 因此
$$\begin{aligned}\sup_{t>0}f(t)=\lim_{t\to0^+}f(t)&=\lim_{t\to0^+}\left(\frac{1}{\ln(1+t)}-\frac{1}{t}\right)\\&=\lim_{t\to0^+}\frac{t-\ln(1+t)}{t\ln(1+t)}\\&=\lim_{t\to0^+}\frac{t-(t-\frac{t^2}{2}+o(t^2))}{t^2}\\&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$
综上，对任意 $x>0$ 不等式 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\alpha}>\mathrm{e}$ 当且仅当 $\alpha\geq\dfrac{1}{2}$.

因此所求最小正数为 $\dfrac{1}{2}$.

CHAPTER 17

2015 年转专业考试真题

1 解答题

1. 一道错题.

2. 用三种方法计算数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

3. 设 $n\in\mathbf{N}^*$，$f(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{\mathrm{d}^n\left(x^2-1\right)^n}{\mathrm{d}x^n}$，计算 $f(1)$，$f(-1)$.[1]

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数，对 (a,b) 内任意一点 ξ, 可否在 (a,b) 内找到两点 α，β，$\xi\in(\alpha,\beta)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ 成立，试证明你的结论或举反例.[2]

[1] 此题与 2019 年真题第 **5** 题一致.

[2] 此题与 2023 年真题证明题第 **4** 题一致.

5. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内有一阶连续导数，且 $f'(0)=0$，$f''(0)$ 存在，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}$.[3]

6. 计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}\mathrm{d}x$.[4]

7. 计算不定积分: $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x$.[5]

8. 设 $f_n(x)=\cos x+\cos^2 x+\cdots+\cos^n x$，求证:

（1）对任意自然数 n，方程 $f_n(x)=1$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right)$ 内有唯一根.

（2）设 $x_n\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right)$ 是 $f_n(x)=1$ 的根，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{\pi}{3}$.[6]

[3] 此题与 2024 年真题填空题第 **3** 题一致.
[4] 此题与 2019 年真题第 **3** 题（1）一致.
[5] 此题与 2024 年真题填空题第 **6** 题一致.
[6] 此题与 2018 年真题第 **6** 题一致.

CHAPTER 18

2015 年转专业考试真题参考答案

1 解答题

2. **Solution.** e.

法一：取对数，等价无穷小估计

记

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n, \quad x_n = \frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}, \quad \ln a_n = n\ln(1+x_n).$$

当 $n\to\infty$ 时，$x_n \to 0$，于是 $\ln(1+x_n) = x_n + o(x_n)$，即

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n = \exp\left(\lim_{n\to\infty}\ln a_n\right) &= \exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x_n)}{\frac{1}{n}}\right)\\
&= \exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right)\\
&= \exp\left(1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\\
&= \mathrm{e}.
\end{aligned}$$

法二：夹挤准则

对于充分大的 n，有

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{n}+\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1},$$

故

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n.$$

当 $n\to\infty$ 时，

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \mathrm{e}, \quad \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right) \to \mathrm{e}\cdot 1 = \mathrm{e}.$$

由夹挤准则得极限为 e.

法三：作指数基底

设

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}, \quad n = \frac{1+\frac{1}{n}}{x_n},$$

则当 $n \to \infty$ 时,

$$\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n = (1+x_n)^{\frac{1+\frac{1}{n}}{x_n}} = \left[(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}\right]^{1+\frac{1}{n}} \to \mathrm{e}^{1+0} = \mathrm{e}.$$

3. 参见 2019 年真题第 5 题**解析**.

4. 参见 2023 年真题证明题第 4 题**解析**.

5. 参见 2024 年真题填空题第 3 题**解析**.

6. 参见 2019 年真题第 3 题**解析**.

7. 参见 2024 年真题填空题第 6 题**解析**.

8. 参见 2018 年真题第 6 题**解析**.

CHAPTER 19

2014 年转专业考试真题

1　解答题

1. 证明: 若 $\forall x, y \in (-\infty, +\infty)$，有 $|f(x) - f(y)| = |x - y|$，且 $f(0) = 0$，则 $f(x + y) = f(x) + f(y)$，$\forall x, y \in (-\infty, +\infty)$.

2. 用三种方法计算数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$.[1]

3. 设 $n \in \mathbf{N}^*$，$f(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{\mathrm{d}^n\left(x^2 - 1\right)^n}{\mathrm{d}x^n}$，计算 $f(1)$，$f(-1)$.[2]

4. 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的邻域内有一阶连续导数，且 $f'(0) = 0$，$f''(0)$ 存在，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x) - f(\ln(1 + x))}{x^3}$.[3]

[1] 此题与 2015 年真题第 **2** 题一致.

[2] 此题与 2019 年真题第 **5** 题一致.

[3] 此题与 2024 年真题填空题第 **3** 题一致.

5. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有定义，对任意 $x,y\in(0,+\infty)$ 有 $f(xy)=f(x)f(y)$ 且 $f'(1)=n>0$，求 $f(x)$.

6. 计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}\mathrm{d}x$.[4]

7. 计算不定积分: $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x$.[5]

8. 设 $\mu\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负，且 $f''(x)\leq 0, x\in[0,1]$. 证明：$f(t)\geqslant\mu f(s)$，$\forall\, t\in[\mu,1-\mu]$，$\forall\, s\in[0,1]$.

[4] 此题与 2019 年真题第 **3** 题（1）一致.

[5] 此题与 2024 年真题填空题第 **6** 题一致.

CHAPTER 20

2014 年转专业考试真题参考答案

1 解答题

1. **Solution.**

   令 $y=0$，由题意得 $|f(x)-f(0)|=|x-0|$，从而

   $$|f(x)|=|x|,\ \forall x.$$

   故 $f^2(x)=x^2$.

   将 $|f(x)-f(y)|=|x-y|$ 两边平方，得

   $$\begin{aligned}(f(x)-f(y))^2 &= f^2(x)+f^2(y)-2f(x)f(y)\\ &= x^2+y^2-2f(x)f(y)\\ &= x^2+y^2-2xy.\end{aligned}$$

   从而 $f(x)f(y)=xy$.

   计算

   $$\begin{aligned}[f(x+y)-(f(x)+f(y)]^2 &= f^2(x+y)+[f(x)+f(y)]^2-2f(x+y)[f(x)+f(y)]\\ &= (x+y)^2+f^2(x)+f^2(y)+2f(x)f(y)-2f(x+y)f(x)-2f(x+y)f(y)\\ &= x^2+y^2+2xy+x^2+y^2+2xy-2(x+y)x-2(x+y)y\\ &\equiv 0.\end{aligned}$$

   所以 $f(x+y)-(f(x)+f(y))\equiv 0$，即 $f(x+y)=f(x)+f(y),\ \forall x,y\in(-\infty,+\infty)$.

2. 参见 2015 年真题第 2 题 **解析**.

3. 参见 2019 年真题第 3 题 **解析**.

4. 参见 2024 年真题填空题第 3 题 **解析**.

5. **Solution.** $f(x)=x^n$.

由 $f(xy)=f(x)f(y)$，对任意 $x>0$，考察 f 在 x 处的导数：

$$\begin{aligned} f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\big(x(1+\frac{\Delta x}{x})\big)-f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)\,f(1+\frac{\Delta x}{x})-f(x)}{\Delta x} \\ &= f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\frac{\Delta x}{x})-1}{\Delta x}. \end{aligned}$$

令 $u=\dfrac{\Delta x}{x}$，则 $\Delta x=xu$，当 $\Delta x\to 0$ 时 $u\to 0$，所以上式变为

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x)\lim_{u\to 0}\frac{f(1+u)-1}{xu} \\ &= \frac{f(x)}{x}\lim_{u\to 0}\frac{f(1+u)-1}{u} \\ &= \frac{f(x)}{x}f'(1)=\frac{n\,f(x)}{x}. \end{aligned}$$

于是 f 满足常微分方程

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{n}{x},$$

对两边积分得

$$\ln f(x)=n\ln x+C.$$

在方程 $f(xy)=f(x)f(y)$ 中令 $y=1$ 得 $f(x)=f(x)f(1)$，从而 $f(x)\equiv 0$ 或 $f(1)=1$.

显然 $f(x)$ 不是常值函数，否则 $f'(1)=0$. 因此 $f(1)=1$，$C=0$. 故

$$f(x)=\mathrm{e}^{n\ln x}=x^n,\quad x>0.$$

6. 参见 2019 年真题第 3 题**解析**.

7. 参见 2024 年真题填空题第 6 题**解析**.

8. **Proof.**

固定任意 $t\in[\mu,1-\mu]$ 与 $s\in[0,1]$，令

$$m=\frac{t-\mu s}{1-\mu}.$$

由于 $\mu\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 且 $t\in[\mu,1-\mu]$，易验证 $m\in[0,1]$. 又 f 在 $[0,1]$ 上非负且 $f''(x)\le 0$，故 f 为上凸函数，对于任何 $\lambda\in(0,1)$ 和 $x_1,x_2\in[0,1]$ 有

$$f\big(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\big)\ge \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$

取 $\lambda=\mu$，$x_1=s$，$x_2=m$，注意到

$$\mu s+(1-\mu)m=\mu s+(1-\mu)\frac{t-\mu s}{1-\mu}=t,$$

于是

$$f(t)=f\big(\mu s+(1-\mu)m\big)\ge \mu f(s)+(1-\mu)f(m)\ge \mu f(s),$$

因为 $f(m)\ge 0$. 这正是所要证明的 $f(t)\ge \mu f(s)$.

CHAPTER 21

2013 年转专业考试真题

1 解答题

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$.

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.[1]

3. 设 $a_n > 0, b_n > 0, \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n} - \dfrac{1}{b_{n+1}}\right) > 0$，证明：极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 存在.[2]

4. 证明:若函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, f 单调, 存在数列 $\{x_n\}, x_n \in [a,b], g(x_n) = f(x_{n+1}), n = 1, 2\cdots$, 则 $f(x) = g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有解.[3]

[1]此题与 2024 年真题填空题第 **2** 题一致.

[2]此题与 2019 年真题第 **2** 题一致.

[3]此题与 2024 年真题证明题第 **3** 题一致.

5. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\begin{cases} x=\ln\cos t, \\ y=\sin t - t\cos t \end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}$.

6. 求最小正数 α，使得 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\alpha} > \mathrm{e}(x>0)$.[4]

7. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$. 又 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 是满足 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$ 的正数. 证明：在 $(0,1)$ 中存在互不相同的数 $\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n$ 满足 $\dfrac{\alpha_1}{f'(\beta_1)}+\dfrac{\alpha_2}{f'(\beta_2)}+\cdots+\dfrac{\alpha_n}{f'(\beta_n)}=1$.

[4] 此题与 2017 年真题第 **6** 题一致.

CHAPTER 22

2013 年转专业考试真题参考答案

1 解答题

1. **Solution**. 1.

   注意到
   $$\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi\right)=\sin^2\Big(\pi(\sqrt{n^2+n}-n)\Big).$$
   又
   $$\pi(\sqrt{n^2+n}-n)=\pi\frac{(n^2+n)-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}.$$
   因此
   $$\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\sin^2\frac{\pi}{2}=1.$$

2. 参见 2024 年真题填空题第 2 题 **解析**.

3. 参见 2019 年真题第 2 题 **解析**.

4. 参见 2024 年真题证明题第 3 题 **解析**.

5. **Solution**. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-t\cos t$, $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$.

   利用链式法则,
   $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ln\cos t)=-\tan t, \tag{22.1}$$
   $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin t-t\cos t)=\cos t-(\cos t-t\sin t)=t\sin t. \tag{22.2}$$
   因此
   $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=-\frac{t\sin t}{\tan t}=-t\cos t.$$

再对 t 求导并除以 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 得二阶导数:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{1}{-\tan t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-t\cos t)=\frac{-\cos t+t\sin t}{-\tan t}=\frac{\cos^2 t}{\sin t}-t\cos t.$$

故在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 处,

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{\cos^2\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}}-\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}-\frac{\pi\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi\sqrt{2}}{8}.$$

6. 参见 2017 年真题第 6 题**解析**.

7. **Proof.**

由 $\alpha_k>0$, $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k=1$,构造数值分点:

$$x_0=0,\quad x_1=\alpha_1,\quad x_2=\alpha_1+\alpha_2,\quad \cdots\quad ,x_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k=1,$$

则显然 $0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=1$.

因 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,结合 $\{x_k\}$ 的严格单调性,由介值定理总能选取递增的序列 $\{c_k\}$ 使得

$$f(c_k)=x_k,\quad k=0,1,\ldots,n,$$

其中 $0=c_0<c_1<c_2<\cdots<c_n=1$.

由 Lagrange 中值定理,存在 $\beta_k\in(c_{k-1},c_k)$ 使

$$f'(\beta_k)=\frac{f(c_k)-f(c_{k-1})}{c_k-c_{k-1}}=\frac{\alpha_k}{c_k-c_{k-1}}.$$

因此

$$c_k-c_{k-1}=\frac{\alpha_k}{f'(\beta_k)},\quad k=1,2,\ldots,n.$$

对 k 从 1 到 n 累加,得

$$c_n-c_0=1=\sum_{k=1}^{n}(c_k-c_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{f'(\beta_k)}.$$

于是

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{f'(\beta_k)}=1.$$

且每个 β_k 位于不同的开区间 (c_{k-1},c_k),故互不相同. 证毕.

CHAPTER 23

2012 年转专业考试真题

1 解答题

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$.

2. 证明：若对任意 $x, y \in \mathbf{R}$ 有 $|f(x)-f(y)| \leq |x-y|^2$，则对每个 $n \in \mathbf{N}, \forall a, b \in \mathbf{R}$，有 $|f(a)-f(b)| \leq \dfrac{1}{n}|a-b|^2$.

3. 设 $a_n > 0, b_n > 0, \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n} - \dfrac{1}{b_{n+1}}\right) > 0$，证明：极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 存在.[1]

4. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{+e^x-1}}$.

[1] 此题与 2019 年真题第 **2** 题一致.

5. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有定义，对任意 $x,y\in(0,+\infty)$ 有 $f(xy)=f(x)f(y)$ 且 $f'(1)=n>0$，求 $f(x)$.[2]

6. 求最小正数 α，使得 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\alpha}>\mathrm{e}(x>0)$.[3]

7. 计算不定积分: $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x$.[4]

8. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0$, $f(1)=1$. 又 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 是满足 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$ 的正数. 证明：在 $(0,1)$ 中存在互不相同的数 $\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n$ 满足 $\dfrac{\alpha_1}{f'(\beta_1)}+\dfrac{\alpha_2}{f'(\beta_2)}+\cdots+\dfrac{\alpha_n}{f'(\beta_n)}=1$.[5]

[2] 此题与 2014 年真题第 **5** 题一致.
[3] 此题与 2017 年真题第 **6** 题一致.
[4] 此题与 2024 年真题填空题第 **6** 题一致.
[5] 此题与 2013 年真题第 **7** 题一致.

CHAPTER 24

2012 年转专业考试真题参考答案

1 解答题

1. **Solution.** 1.

   法一. Stirling 公式估计.

   注意到当 $n \to \infty$ 时，

   $$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n,$$

   故

   $$(n!)^{\frac{1}{n^2}} = \left(\sqrt{2\pi n}\right)^{\frac{1}{n^2}}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{n}{n^2}} = (2\pi n)^{\frac{1}{2n^2}}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{1}{n}} \to 1 \cdot 1 = 1.$$

   法二. 夹逼定理.

   注意到对充分大的 n，有

   $$\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \le n! \le n^n,$$

   两端同取 $\dfrac{1}{n^2}$ 次幂得

   $$\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \le (n!)^{\frac{1}{n^2}} \le n^{\frac{1}{n}},$$

   且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$，故中间项亦趋于 1.

   法三. Stolz 定理.

   记

   $$a_n = (n!)^{\frac{1}{n^2}}, \quad \ln a_n = \frac{\ln(n!)}{n^2}.$$

   由于

   $$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n!) - \ln((n-1)!)}{n^2-(n-1)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{2n-1} = 0,$$

   根据 Stolz 定理可得 $\ln a_n \to 0$，因此 $a_n = \exp(\ln a_n) \to 1$.

2. **Proof.** $\forall\, a, b \in \mathbf{R}$ 和 $n \in \mathbf{N}$，在区间 $[a, b]$ 上等分出 n 段，设

   $$x_k = a + \frac{k}{n}(b-a), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

则显然

$$x_0 = a, \quad x_n = b, \quad x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}.$$

由题设对任意 x, y 有 $|f(x) - f(y)| \leq |x-y|^2$，则由三角不等式可得

$$\begin{aligned}|f(a) - f(b)| = |f(x_0) - f(x_n)| &\leq \sum_{k=1}^{n} |f(x_{k-1}) - f(x_k)| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} |x_{k-1} - x_k|^2 = n\left(\frac{|b-a|}{n}\right)^2 = \frac{1}{n}|b-a|^2.\end{aligned}$$

因此对每个 $n \in \mathbf{N}$ 以及任意 $a, b \in \mathbf{R}$，均有

$$|f(a) - f(b)| \leq \frac{1}{n}|a-b|^2.$$

3. 参见 2019 年真题第 2 题**解析**.

4. **Solution.** $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

   记 $L = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{\mathrm{e}^x - 1}}$. 取对数得

$$\ln L = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

   当 $x \to 0$ 时，利用 Taylor 公式

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

$$\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = \ln\left(1 - \tfrac{x}{2} + o(x)\right) = -\frac{x}{2} + o(x),$$

   同时

$$\mathrm{e}^x - 1 = x + o(x).$$

   因此

$$\ln L = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\frac{x}{2} + o(x)}{x + o(x)} = -\frac{1}{2}.$$

   故

$$L = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}.$$

5. 参见 2014 年真题第 5 题**解析**.

6. 参见 2017 年真题第 6 题**解析**.

7. 参见 2024 年真题填空题第 6 题**解析**.

8. 参见 2013 年真题第 7 题**解析**.

CHAPTER 25

2011 年转专业考试真题

1 解答题

1. 证明：若对任意 $x, y \in \mathbf{R}$ 有 $|f(x)-f(y)| \leq |x-y|^2$，则对每个 $n \in \mathbf{N}, \forall a, b \in \mathbf{R}$，有 $|f(a)-f(b)| \leq \dfrac{1}{n}|a-b|^2$.[1]

2. 设 $x_n=(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$，其中 $|a|<1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$.[2]

4. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$f(0)=1$，$g(x)=\displaystyle\int_0^{\sin x} f(tx^2)\mathrm{d}t$，求 $g'(x)$，并求 $g'(0)$.

[1] 此题与 2012 年真题第 **2** 题一致.

[2] 此题与 2012 年真题第 **4** 题一致.

5. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有定义，对任意 $x,y\in(0,+\infty)$ 有 $f(xy)=f(x)f(y)$ 且 $f'(1)=n>0$，求 $f(x)$.[3]

6. 计算不定积分: $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x$.[4]

7. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0$, $f(1)=1$. 又 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 是满足 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$ 的正数. 证明：在 $(0,1)$ 中存在互不相同的数 $\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n$ 满足 $\dfrac{\alpha_1}{f'(\beta_1)}+\dfrac{\alpha_2}{f'(\beta_2)}+\cdots+\dfrac{\alpha_n}{f'(\beta_n)}=1$.[5]

8. 证明: 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，$f(0)=0$，$0\le f'(x)\le 1$，则 $\left(\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2\ge\displaystyle\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x$.

9. 证明：对任意正整数 n，有 $\dfrac{2}{3}n\sqrt{n}<\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}<\dfrac{4n+3}{6}\sqrt{n}$.

[3]此题与 2014 年真题第 **5** 题一致.

[4]此题与 2024 年真题填空题第 **6** 题一致.

[5]此题与 2013 年真题第 **7** 题一致.

CHAPTER 26

2011 年转专业考试真题参考答案

1 解答题

1. 参见 2012 年真题第 2 题**解析**.

2. **Solution.** $\dfrac{1}{1-a}$.
   注意到
   $$(1-a)\,x_n = (1-a)\,(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n}) = 1-a^{2^{n+1}},$$
   当 $n\to\infty$ 时，因 $|a|<1$，有
   $$x_n = \frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a} \to \frac{1}{1-a}.$$

3. 参见 2012 年真题第 4 题**解析**.

4. **Solution.**
   作积分变量替换，令 $u=tx^2$，则 $t=\dfrac{u}{x^2}$，$\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}u}{x^2}$，上限 $t=\sin x$ 对应 $u=x^2\sin x$. 于是
   $$g(x)=\int_0^{\sin x} f(tx^2)\mathrm{d}t = \frac{1}{x^2}\int_0^{x^2\sin x} f(u)\mathrm{d}u.$$
   计算
   $$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{x^2}\int_0^{x^2\sin x} f(u)\mathrm{d}u + \frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{x^2\sin x} f(u)\mathrm{d}u\right) \\ &= -\frac{2}{x^3}\int_0^{x^2\sin x} f(u)\mathrm{d}u + \frac{1}{x^2} f\left(x^2\sin x\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\sin x\right) \\ &= -\frac{2}{x^3}\int_0^{x^2\sin x} f(u)\mathrm{d}u + \frac{1}{x^2} f\left(x^2\sin x\right)\left(2x\sin x + x^2\cos x\right). \end{aligned}$$
   下面计算 $g'(0)$.
   当 $x\to 0$ 时，由积分中值定理，利用函数 $f(x)$ 的连续性可得
   $$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\left[-\frac{2}{x^3}\int_0^{x^2\sin x} f(u)\mathrm{d}u + \frac{1}{x^2} f\left(x^2\sin x\right)\left(2x\sin x + x^2\cos x\right)\right] &= \lim_{x\to 0}\left[-\frac{2x^2\sin x f(\xi)}{x^3} + \frac{f(0)(2x^2+x^2)}{x^2}\right] \\ &= -2f(0)+3f(0) \\ &= f(0)=1. \end{aligned}$$

其中 $\xi \to 0$. 所以 $g'(0) = 1$.

5. 参见 2014 年真题第 5 题**解析**.
6. 参见 2024 年真题填空题第 6 题**解析**.
7. 参见 2013 年真题第 7 题**解析**.
8. **Solution.**

令

$$F(t) = \left(\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 - \int_0^t f^3(x)\,\mathrm{d}x, \quad t \in [0,1].$$

显然 $F(0) = 0$. 对 t 求导得

$$\begin{aligned} F'(t) &= 2\left(\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\right) f(t) - f^3(t) \\ &= f(t)\left(2\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x - [f(t)]^2\right) = f(t)G(t), \end{aligned}$$

其中

$$G(t) = 2\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x - [f(t)]^2,$$

且 $G(0) = 0$. 又 $0 \le f'(t) \le 1$，故

$$G'(t) = 2f(t) - 2f(t)f'(t) = 2f(t)\big(1 - f'(t)\big) \ge 0,$$

所以 $G(t) \ge G(0) = 0$ 对所有 $t \in [0,1]$ 成立. 再由 $f(t) \ge 0$（从 $f(0) = 0$ 且 $f'(t) \ge 0$ 得到）可知

$$F'(t) = f(t)G(t) \ge 0.$$

故 $F(1) \ge F(0) = 0$，即

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 - \int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x \ge 0.$$

9. **Proof.** 利用函数 $y = \sqrt{x}$ 在 $[0,n]$ 上的严格上凸性，对每个整数区间 $[k-1,k]$ 作左右端点梯形比较：

下界：$\forall x \in [k-1,k]$，由积分中值定理可得

$$\sqrt{k} \ge \int_{k-1}^k \sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$$

对 $k = 1, 2, \dots, n$ 累加，显然等号无法取到，所以

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} > \int_0^n \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\bigg|_0^n = \frac{2}{3}n\sqrt{n}.$$

上界：因为 $\sqrt{x}$ 在 $[k-1,k]$ 上凸，下端点梯形面积小于弦顶梯形面积，即

$$\frac{\sqrt{k-1} + \sqrt{k}}{2} < \int_{k-1}^k \sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$$

于是

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n (\sqrt{k-1} + \sqrt{k}) + \frac{1}{2}\sqrt{n} < \int_0^n \sqrt{x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\sqrt{n} = \frac{2}{3}n\sqrt{n} + \frac{1}{2}\sqrt{n} = \frac{4n+3}{6}\sqrt{n}.$$