华中科技大学转专业联合数学考试 (重制版)

学数华科 转专业交流群

Last Updated: November 14, 2025

写在一切之前

Provided by @ 那，边。@ 渊

首先，希望大家明确一点：转专业考试是选拔性考试，所以难度大是正常的。这不仅意味着备考时心态上要做好准备，更意味着你不可能做到面面俱到，所以必须结合实际情况开展考前复习，把精力放到那些能够拿到的分数上。一般情况下，准备做得越充分的同学越有优势！

先整体介绍一下华科转专业数学考试。转专业数学考试是转专业联合笔试的一部分，大部分理工科专业的学院都要求报名转入学生参加。就往年规律来看，考试时间为两个小时。正因为这是选拔性考试，所以考试名称虽然为“微积分”，但实际上更偏向于数学分析的难度，当然没有这么多分析证明的要求，大部分还是以计算为主。试卷整体难度显著高于微积分（B），接近于大学生数学竞赛。因此，对于学习微积分（C）或（D）的同学，建议一定要拔高学习层次，必要时可以去蹭其他班级的微积分课堂。此外，考试没有大纲，所以没有固定的考试范围，但会与大家微积分课程的教学进度持平，往年大致考到不定积分（详情参考往年真题）。

关于备考参考资料，建议以这份真题合集，毕志伟、吴洁老师的《微积分学学习辅导》和裴礼文老师的《数学分析中的典型问题与方法》为主。就往年题目来看，考试真题很多都能在裴砖中找到原型甚至是原题，很多题目的思想方法都曾在往年题目中出现（近几年考题 24 年较为突出）。另外，B 站和学数华科 QQ 群也是很好的资源。因此，大家不必通过任何第三方渠道去找所谓的转专业资料了，他们的卷子基本就是盗用本群中的，很多题目印刷甚至出错，买了也是浪费钱、浪费时间。

关于备考流程，建议在仔细研读裴砖的同时（or 之后）认真写写往年真题，一开始不会做很正常，本合集有非常详尽的答案，大家一定要认真下功夫把每道题研究清楚（每年的难度都有变化，可以视情况而定）。研读裴砖可以分专题进行，可以准备一个笔记本，把每个专题的内容（方法、例题与具体解题思路）自己总结出来，这也是非常重要的复习资料。我总结了往年真题中经常出现的裴砖中的专题，供大家参考以重点复习：

1.3 求极限值的若干方法；1.4 Stolz 公式；1.5 递推形式的极限

2.4 函数方程（了解模型即可，不必深入）

3.1 导数；3.2 微分中值定理；3.3 Taylor 公式；3.5 导数的综合应用

（裴砖中带五角星的内容基本均为重要内容，而带星号内容可以忽略）

另外，本文件已上传至 **https://github.com/Na-Bian/HUST-Major-Transfer-Examination-Mathematics**，大家使用前可以先检查一下是否有更新.

最后，祝大家考试顺利、成功上岸！

CONTENTS

Change Logs

- Updated (2025.10.15): 增加了 2024 年真题证明题缺失的答案.
- Updated (2025.10.16): 更正了 2023 年真题填空题第 4 题表达式的错误.
- Updated (2025.10.18): 更新了 Chapter 写在一切之前；更正了 2023 年真题填空题第 6 题的答案.
- Updated (2025.10.19): 更正了部分答案中的错别字.
- Updated (2025.10.20): 增加了 2024 年真题填空题第 4 题的答案；更正了 2023 年真题证明题第 1 题的答案.
- Updated (2025.10.25): 更新了 Chapter 写在一切之前；修订了 2024 年真题及答案；更正了 2020 年真题第 6 题答案中表达式的错误；更正了 2014 年真题第 1 题的答案.
- Updated (2025.10.30): 更正了 2022 年真题选择题第 9 题表达式的错误；修订了 2023 年真题及答案.
- Updated (2025.11.1): 更新了 Chapter 写在一切之前；更正了 2024 年真题证明题第 3 题的答案.
- Updated (2025.11.2): 更正了 2022 年真题选择题第 1 题表达式的错误.
- Updated (2025.11.3): 更正了 2023 年真题填空题第 3 题的答案；更新了 2022 年真题解答题第 3 题的答案.
- Updated (2025.11.9): 更正了 2012 年真题第 4 题的答案；更正了 2014 年真题第 4 题的答案；更正了 2017 年真题第 2 题的答案；更正了 2017 年真题第 4 题表达式的错误；更正了 2017 年真题第 6 题的答案；更正了 2020 年真题第 4 题的答案；更正了 2021 年真题证明题第 2 题的答案；更正了 2022 年真题选择题第 3 题的答案.
- Updated (2025.11.11): 更正了 2024 年真题证明题第 5 题答案中表达式的错误；更正了 2019 年真题第 5 题的答案；更正了 2023 年真题证明题第 6 题的答案；更正了 2021 年真题证明题第 1 题的答案.
- Updated (2025.11.14): 修订了 2022 年真题及答案.

Part I

转专业数学考试真题

CHAPTER 1

2024 年转专业考试真题

1 填空题 (每题 10 分，共 60 分)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\arctan\dfrac{2}{k^2}=$ __________.

2. $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}=$ __________.

3. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内有一阶连续导数, 且 $f'(0)=0$, $f''(0)$ 存在, 则极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}=$ __________.

4. 设 $f(x)=(\arcsin x)^2$，则 $f^{(2024)}(0)=$ __________.

5. 已知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义，$\forall x,y\in(0,+\infty)$，$f(xy)=f(x)f(y)$，且 $f'(1)=2024$，则 $f(x)=$ __________.

6. $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x=$ __________.

2 证明题 (10 分)

已知 $\beta>0$，数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=\ln\beta$，$x_{n+1}=x_1+\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(\beta-x_i)$，证明 $\{x_n\}$ 收敛并求其极限.

3 证明题 (10 分)

证明: 若函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, f 单调, 存在数列 $\{x_n\}, x_n \in [a,b]$, $g(x_n) = f(x_{n+1}), n = 1, 2 \cdots$, 则 $f(x) = g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有解.

4 证明题 (10 分)

设 $g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, & x \neq 0 \\ f'(0), & x = 0 \end{cases}$, $f(0) = 0$, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上存在二阶导数, 问 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是否存在连续导数, 存在请证明, 不存在请说明理由.

5 证明题 (10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内二阶可导, $f(0) = 0$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6}$, $f(1) = \dfrac{\pi}{2}$, 证明: 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f''(\xi) = \dfrac{\xi}{1-\xi^2} f'(\xi)$.

CHAPTER 2

2024 年转专业考试真题参考答案

1 填空题 (每题 10 分，共 60 分)

1. **Solution.** $\dfrac{3\pi}{4}$.

   利用反正切差角公式

$$\arctan x - \arctan y = \arctan \frac{x-y}{1+xy}, \quad x = \frac{1}{k-1}, \quad y = \frac{1}{k+1},$$

$$\Rightarrow \arctan \frac{2}{k^2} = \arctan \frac{\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}}{1 + \frac{1}{(k-1)(k+1)}} = \arctan \frac{1}{k-1} - \arctan \frac{1}{k+1}.$$

   对 $k = 1, 2, \ldots, n$ 累加并对 n 取极限

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \arctan \frac{2}{k^2} &= \arctan 2 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \left(\arctan \frac{1}{k-1} - \arctan \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \arctan 2 + \lim_{n\to\infty} \left(\arctan 1 + \arctan \frac{1}{2} - \arctan \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{3\pi}{4}.\end{aligned}$$

2. **Solution.** $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

   利用 Taylor 公式 $\cos t = 1 - \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)$ $(t \to 0)$，令 $t = \sqrt{x}$，得

$$\cos \sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x).$$

   故

$$\begin{aligned}\ln \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}} &= \frac{1}{x} \ln\bigl(\cos \sqrt{x}\bigr) = \frac{1}{x} \ln\left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right) \\ &= \frac{1}{x}\left(-\frac{x}{2} + o(x)\right) = -\frac{1}{2} + o(1).\end{aligned}$$

   两边取指数得

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$

3. **Solution.** $\dfrac{f''(0)}{2}$.

利用 Taylor 展开

$$f(x)=f(0)+f'(0)\,x+\frac{f''(0)}{2}\,x^2+o(x^2),\qquad \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^4).$$

因此

$$\begin{aligned}f(x)-f\big(\ln(1+x)\big)&=f'(0)\Big(x-\ln(1+x)\Big)+\frac{f''(0)}{2}\Big(x^2-\big(\ln(1+x)\big)^2\Big)+o(x^2)\\&=\frac{f''(0)}{2}\Big[x^2-\big(x-\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^3}{3}\big)^2\Big]+o(x^2)\\&=\frac{f''(0)}{2}\,x^3+o(x^3).\end{aligned}$$

故

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}=\frac{f''(0)}{2}.$$

4. **Solution**. $2^{2023}(1011!)^2$.

方程两边求导，得 $f'(x)=\dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$，即 $\sqrt{1-x^2}f'(x)=2\arcsin x$，两边平方得

$$(1-x^2)f'^2(x)=4f(x).$$

两边再次求导，得 $2f'(x)[-xf'(x)+(1-x^2)f''(x)-2]=0$，消去 $f'(x)$ 得

$$-xf'(x)+(1-x^2)f''(x)=2.$$

（注意到 $f'(x)=0$ 当且仅当 $x=0.f'(0)=0$，$f''(0)=2$，此时 $-xf'(x)+(1-x^2)f''(x)=2$ 仍然成立.）

利用 Leibniz 公式对上式两边同时求 n 阶导数得

$$-xf^{(n+1)}(x)-nf^{(n)}(x)+(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-2nxf^{(n+1)}(x)-n(n-1)f^{(n)}(x)=0.$$

在上式中令 $x=0$ 得

$$f^{(n+2)}(0)=n^2f^{(n)}(0).$$

所以 $f^{(2024)}(0)=2022^2\cdot2020^2\cdots2^2f''(0)=2^{2023}(1011!)^2$.

5. **Solution.** x^{2024}.

$\forall x>0$，有 $f(x)=f(\sqrt{x}\sqrt{x})=f^2(\sqrt{x})>0$.

令 $g(x)=\ln f(x)$，得

$$g(xy)=g(x)+g(y).$$

令 $u=\ln x$, $v=\ln y$，则 $g(e^{u+v})=g(e^u)+g(e^v)$，说明 $h(u)=g(e^u)$ 满足

$$h(u+v)=h(u)+h(v),$$

且 h 在 $u=0$（即 $x=1$）可导，故 $h(u)=Cu$. 于是

$$g(x)=h(\ln x)=C\ln x,\quad f(x)=e^{g(x)}=x^C.$$

由 $f'(x)=C\,x^{C-1}$，代入 $x=1$ 并利用 $f'(1)=2024$，得 $C=2024$. 故

$$f(x)=x^{2024}.$$

注：本题更严谨详细的解题步骤参见《数学分析中的典型问题与方法》2.4 函数方程 例 2.4.1 及单元练习 2.4.6.

6. **Solution.** $2x\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4\arctan\sqrt{e^x-1}+C$.

令 $t=\sqrt{e^x-1}$，则

$$t^2=e^x-1,\quad e^x=t^2+1,\quad e^x\,dx=2t\,dt,$$

且 $x=\ln(e^x)=\ln(t^2+1)$. 原式化为

$$\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}\,dx=\int\frac{x}{t}e^x\,dx=2\int x\,dt=2\int\ln(t^2+1)\,dt.$$

对 $2\int\ln(t^2+1)\,dt$ 分部积分得

$$\begin{aligned}2\int\ln(t^2+1)\,dt&=2\left[t\ln(t^2+1)-\int\frac{2t^2}{t^2+1}\,dt\right]\\&=2t\ln(t^2+1)-4\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt\\&=2t\ln(t^2+1)-4t+4\arctan t+C.\end{aligned}$$

最后代回 $t=\sqrt{e^x-1}$ 得

$$2x\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4\arctan\sqrt{e^x-1}+C.$$

2 (10 分)

Proof. 由已知可得 $x_n=x_1+\sum_{i=1}^{n-1}\ln(\beta-x_i)$，用 $x_{n+1}=x_1+\sum_{i=1}^{n}\ln(\beta-x_i)$ 相减，得

$$x_{n+1}=x_n+\ln(\beta-x_n).$$

利用 $\forall x>0$，$\ln x<x-1$，得

$$x_{n+1}-\beta+1=x_n+\ln(\beta-x_n)-\beta+1<x_n+\beta-x_n-1-\beta+1=0.$$

于是 $\beta-1$ 是 $\{x_n\}$ 的上界. 所以 $\ln(\beta-x_n)>0$，$\{x_n\}$ 单调增加. 由单调有界原理，$\{x_n\}$ 必然收敛.
设 $\lim\limits_{x\to\infty}\{x_n\}=a$，对 $x_{n+1}=x_n+\ln(\beta-x_n)$ 左右两边取极限，得 $\ln(\beta-a)=0$，所以极限为 $\beta-1$.

3 (10 分)

Proof. 考虑数列 $\{f(x_n)-g(x_n)\}$. 若此数列在 $n=k$ 处出现变号，即

$$[f(x_k)-g(x_k)]\cdot[f(x_{k-1})-g(x_{k-1})]<0,$$

则存在介于 x_{k-1} 和 x_k 的 ξ 使得 $f(\xi)-g(\xi)=0$.
若不然，不失一般性地设 $\{f(x_n)-g(x_n)\}$ 恒为正，则

$$f(x_n)-f(x_{n-1})=g(x_{n-1})-f(x_{n-1})<0$$

恒成立，故 $\{f(x_n)\}$ 单调递减. 由 f 的单调性可知 $\{x_n\}$ 亦单调，而 $\{x_n\}$ 有界，故 $\{x_n\}$ 必有极限 x_0.
在 $f(x_{n+1})=g(x_n)$ 中令 $n\to\infty$，并由 f 和 g 的连续性，即得 $f(x_0)=g(x_0)$.

4 (10 分)

Proof. 若 $x \neq 0$，$g'(x) = \dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$.
若 $x = 0$，$g'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{f(x)}{x} - f'(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - xf'(0)}{x^2}$.
应用 L'Hospital 法则，得

$$g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{2x}.$$

因为 $f(x)$ 二阶可导，所以 $g'(0) = \dfrac{f''(0)}{2}$.
$g'(x)$ 在 $x \neq 0$ 时的连续性显然. 下面考虑 $\lim\limits_{x\to 0} g'(x)$.

$$\lim_{x\to 0} g'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} + \lim_{x\to 0} \frac{xf'(0) - f(x)}{x^2} \equiv A + B$$

由导数定义，$A = f''(0)$. 由上述讨论得 $B = -g'(0) = -\dfrac{f''(0)}{2}$，
因此 $\lim\limits_{x\to 0} g'(x) = \dfrac{f''(0)}{2} = g'(0)$，即证 $g'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

5 (10 分)

Proof. 令 $g(x) = f(x) - \arcsin x$，则 $g(0) = g\left(\dfrac{1}{2}\right) = g(1)$.
由 Rolle 定理可知，存在 $\alpha \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$，$\beta \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$，使得 $g'(\alpha) = g'(\beta) = 0$，即

$$f'(\alpha) - \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} = f'(\beta) - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0.$$

令 $h(x) = f'(x)\sqrt{1-x^2}$，则 $h(\alpha) = h(\beta) = 1$.
由 Rolle 定理，存在 $\xi \in (\alpha, \beta)$ 使得 $h'(\xi) = 0$，即

$$\sqrt{1-\xi^2} f''(\xi) - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} f'(\xi) = 0,$$

化简立得.

CHAPTER 3

2023 年转专业考试真题

1 填空题 (每题 8 分，共 48 分)

1. 若 $\beta \neq k\pi(k=0,1,2,...)$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{\beta}{2^k} =$ __________.

2. 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{3}}\left[(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}\right] =$ __________.

3. 设 $0<a_1<\pi, a_{n+1}=\sin a_n(n=1,2,\cdots)$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}a_n =$ __________.

4. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}\right)=0$，则 $f''(0)=$ __________.

5. 设 $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$，则 $f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)=$ __________.

6. 设 $\alpha\neq\beta$ 是两个实常数，则 $\frac{e^\beta-e^\alpha}{\beta-\alpha}$ 与 $\frac{e^\beta+e^\alpha}{2}$ 两者之较大者为__________.

2 证明题 (9 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_1=1,a_2=2,a_{n+1}=a_n-\frac{1}{n+1}a_{n-1}(n=2,3,\cdots)$$

证明：对所有 $n\geq 3$，都有 $0<na_n-3<\frac{6}{n-1}$.

3 证明题 (9 分)

设正整数 $n\geqslant 2$，证明方程 $\left(1-x^2\right)^n=1-x \quad x\in(0,1)$ 恰有一解.

4 证明题 (9 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数，对 (a,b) 内任意一点 ξ, 可否在 (a,b) 内找到两点 α，β，$\xi \in (\alpha,\beta)$，使得 $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ 成立，试证明你的结论或举反例.

5 证明题 (9 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶可导，且 $f'''(x)>0$ ，证明

$$f(a+h)-f(a) < \frac{h}{2}\left[f'(a)+f'(a+h)\right] \quad (a<a+h<b)$$

6 证明题 (16 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，利用两种方法证明：$\exists \xi \in (a,b)$ 满足

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a) = \frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi).$$

CHAPTER 4

2023 年转专业考试真题参考答案

1 填空题 (每题 8 分，共 48 分)

1. **Solution**. $\dfrac{1}{\beta} - \cot\beta$.

   注意到 $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$，则

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{\beta}{2^k} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\left(\cot\frac{\beta}{2^k} - 2\cot\frac{\beta}{2^{k-1}}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\cot\frac{\beta}{2^n} - \cot\beta\\ &= \frac{1}{\beta} - \cot\beta.\end{aligned}$$

2. **Solution**. $\dfrac{4}{3}$.

   令 $t = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \to 0^+$，则

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{3}}\left[(x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}}\right] = \lim_{t\to 0^+}\frac{(1+t^3)^{\frac{2}{3}} - (1-t^3)^{\frac{2}{3}}}{t^3} = \frac{4}{3}.$$

3. **Solution**. 3.

   用数学归纳法容易证明 $a_n \in (0,\pi)$ 恒成立，且 $a_{n+1} = \sin a_n < a_n$, 故 $\{a_n\}$ 收敛. 易见其收敛于 0.

   由 Stolz 定理,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} na_n^2 &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2 a_{n+1}^2}{a_n^2 - a_{n+1}^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin^2 x}{x^2 - \sin^2 x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{(x+\sin x)(x-\sin x)}\\ &= 3.\end{aligned}$$

   故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}a_n = \sqrt{3}$.

4. **Solution.** 9.

利用

$$\sin 3x = 3x - \frac{(3x)^3}{6} + o(x^3) = 3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3),$$

故

$$\frac{\sin 3x}{x^3} = \frac{3}{x^2} - \frac{9}{2} + o(1).$$

设

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2),$$

则

$$\frac{f(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{x^2} + \frac{f'(0)}{x} + \frac{f''(0)}{2} + o(1).$$

原式

$$\frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{f(x)}{x^2} = \frac{3+f(0)}{x^2} + \frac{f'(0)}{x} + \left(\frac{f''(0)}{2} - \frac{9}{2}\right) + o(1).$$

为使极限存在且为 0，应有

$$3 + f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad \frac{f''(0)}{2} - \frac{9}{2} = 0,$$

故

$$f''(0) = 9.$$

5. **Solution.** $\dfrac{(-1)^n n!}{4}\left[\dfrac{1}{(x-2)^{n+1}} - \dfrac{1}{(x+2)^{n+1}}\right]$.

注意到

$$f(x) = \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right).$$

利用

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\frac{1}{x-a} = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}},$$

对两项分别求导得

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\frac{1}{x-2} = \frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}, \quad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\frac{1}{x+2} = \frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}.$$

综上

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{4}\left[\frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}\right] = \frac{(-1)^n n!}{4}\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x+2)^{n+1}}\right].$$

6. **Solution.** $\dfrac{e^\beta + e^\alpha}{2}$.

不妨设 $\alpha < \beta$，令 $t = \beta - \alpha > 0$，将两个表达式转化为关于 t 的函数：

$$\frac{\mathrm{e}^\beta - \mathrm{e}^\alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\mathrm{e}^{\alpha+t} - \mathrm{e}^\alpha}{t} = \mathrm{e}^\alpha \cdot \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t},$$

$$\frac{\mathrm{e}^\beta + \mathrm{e}^\alpha}{2} = \frac{\mathrm{e}^{\alpha+t} + \mathrm{e}^\alpha}{2} = \mathrm{e}^\alpha \cdot \frac{\mathrm{e}^t + 1}{2}.$$

由于 $\mathrm{e}^\alpha > 0$，只需比较 $\dfrac{\mathrm{e}^t - 1}{t}$ 与 $\dfrac{\mathrm{e}^t + 1}{2}(t > 0)$ 的大小关系. 令

$$f(t) = \frac{\mathrm{e}^t - 1}{\mathrm{e}^t + 1} - \frac{t}{2},$$

则 $f'(t)=-\dfrac{(\mathrm{e}^t-1)^2}{2(\mathrm{e}^t+1)^2}<0$ 恒成立，所以 $f(t)<f(0)=0$，故 $\dfrac{\mathrm{e}^t-1}{\mathrm{e}^t+1}<\dfrac{t}{2}$ 即 $\dfrac{\mathrm{e}^t+1}{2}>\dfrac{\mathrm{e}^t-1}{t}$，故

$$\frac{\mathrm{e}^\beta+\mathrm{e}^\alpha}{2}>\frac{\mathrm{e}^\beta-\mathrm{e}^\alpha}{\beta-\alpha}.$$

当 $\alpha>\beta$ 时，令 $t=\alpha-\beta>0$ 同理可推得相同结论.

Note: 根据 A-L-G 不等式

$$\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_1}<\frac{x_1+x_2}{2}$$

可以直接得到结论.

另：用特殊值带入也可以得到答案.

2 证明题 (9 分)

Proof. 将递推式变形为

$$(n+1)a_{n+1}-na_n=a_n-a_{n-1}\quad(n=2,3,\cdots).$$

所以

$$\sum_{k=2}^{n}[(k+1)a_{k+1}-ka_k]=\sum_{k=2}^{n}(a_k-a_{k-1})\quad(n\ge 2),$$

化简为

$$na_n-3=a_{n-1}\quad(n\ge 3).$$

下面使用数学归纳法证明 $a_n\in\left(0,\dfrac{6}{n}\right),n\ge 2.$

注意到 $a_2=2\in\left(0,\dfrac{6}{2}\right)$，若 $a_k\in\left(0,\dfrac{6}{k}\right),k\ge 2$，则

$$a_{k+1}=\frac{1}{k+1}(a_k+3)\in\left(0,\frac{\frac{6}{k}+3}{k+1}\right),$$

又 $k\ge 2$ 时 $\dfrac{\frac{6}{k}+3}{k+1}\le\dfrac{6}{k+1}$，所以 $a_{k+1}\in\left(0,\dfrac{6}{k+1}\right)$.

综上 $\forall n\ge 3$，都有 $0<na_n-3<\dfrac{6}{n-1}$.

3 证明题 (9 分)

Proof.

法一. 设 $f(x)=(1-x^2)^n-1+x$，则 $f(0)=f(1)=0$.

因 $f'(x)=-2nx(1-x^2)^{n-1}+1$, 有 $f'(0)=f'(1)=1$, 由导数定义与极限比较性可得 $\exists x_1\in(0,\delta)(\delta<\dfrac{1}{2})$ 使 $\dfrac{f(x_1)-f(0)}{x_1-0}>0$，$\exists x_2\in(1-\delta,1)$ 使 $\dfrac{f(x_2)-f(1)}{x_2-1}>0$，即 $f(x_1)>0$，$f(x_2)<0$. 由零点定理可知 $\exists\alpha\in(x_1,x_2)$，使 $f(\alpha)=0$. 下证唯一性.

假设 β 是 $f(x)$ 异于 α 的零点，则 $f(0)=f(\alpha)=f(\beta)=f(1)=0$，由 Rolle 定理可知 $f'(x)$ 在 (0,1) 内有三个零点，$f''(x)$ 在 $(0,1)$ 内有两个零点. 又因 $f''(x)=2n(1-x^2)^{n-2}\left[(2n-1)x^2-1\right]$ 在 $(0,1)$ 内仅有一个零点，因此矛盾!

法二. 方程 $(1-x^2)^n = 1-x \quad x\in(0,1)$ 等价于

$$(1+x)^n = (1-x)^{1-n} \quad x\in(0,1) \quad \text{或} \quad n\ln(1+x)+(n-1)\ln(1-x)=0 \quad x\in(0,1)$$

设 $g(x)=n\ln(1+x)+(n-1)\ln(1-x)$, 则 $g(0)=0$, $g(1^-)=-\infty$, $g'(x)=\dfrac{n}{1+x}-\dfrac{n-1}{1-x}=\dfrac{1-(2n-1)x}{1-x^2}$.

注意到 $g(0)=0$, $g'(0)=1>0$, 故 $\exists x_1\in(0,\delta)(\delta<\dfrac{1}{2n-1})$, 使 $g(x_1)>0$. 由零点定理可知 $\exists\alpha\in(x_1,1)$, 使 $g(\alpha)=0$.

因 $g(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2n-1}\right)$ 上单增，在 $\left(\dfrac{1}{2n-1},1\right)$ 上单减，故 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 有且仅有一个零点.

4 证明题 (9 分)

Proof. 答案是否定的. 可构造反例为 $[-1,1]$ 上的 $f(x)=x^3$.

考虑 $\xi=0.f'(0)=0$，但 $\forall\alpha<0<\beta$ 均有 $\dfrac{\beta^3-\alpha^3}{\beta-\alpha}=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\neq 0$.

5 证明题 (9 分)

Proof. 构造 $g(h)=f(a+h)-f(a)-\dfrac{h}{2}[f'(a)+f'(a+h)]$，$g(0)=0$.

$g'(h)=f'(a+h)-\dfrac{1}{2}\left[f'(a)+f'(a+h)\right]-\dfrac{h}{2}f''(a+h)$，$g'(0)=0$.

$g''(h)=-\dfrac{h}{2}f'''(a+h)<0$，结合单调性即得.

6 证明题 (16 分)

Proof.

法一，利用 Cauchy 中值定理.

令 $F(x)=f(x)-2f\left(\dfrac{x+a}{2}\right)+f(a)$，$G(x)=\dfrac{1}{4}(x-a)^2$，则 $F(a)=G(a)=0$.

由 Cauchy 中值定理，

$$\begin{aligned}\frac{F(b)}{G(b)}&=\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}\\&=\frac{F'(\eta)}{G'(\eta)}\\&=\frac{f'(\eta)-f'\left(\frac{\eta+a}{2}\right)}{\frac{\eta-a}{2}}.\end{aligned}$$

其中 $\eta\in(a,b)$. 由 Lagrange 中值定理，

$$\begin{aligned}\frac{f'(\eta)-f'\left(\frac{\eta+a}{2}\right)}{\frac{\eta-a}{2}}&=f''(\xi)\cdot\frac{\eta-\frac{\eta+a}{2}}{\frac{\eta-a}{2}}\\&=f''(\xi).\end{aligned}$$

其中 $\xi\in\left(\dfrac{\eta+a}{2},\eta\right)$. 得证.

法二，利用 Taylor 公式.

由 Taylor 定理得

$$f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)+\frac{f''(\xi_1)}{2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

$$f(b)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)+\frac{f''(\xi_2)}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,$$

$$f(a)+f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)=(b-a)^2\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{8}.$$

由 Darboux 定理，$\exists\xi$ 使得 $f''(\xi)=\dfrac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}$，得证.

法三，利用常数 K 值.

记 $K=\dfrac{f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)}{\frac{1}{4}(b-a)^2}$. 令

$$F(x)=f(x)-2f\left(\frac{a+x}{2}\right)+f(a)-\frac{(x-a)^2}{4}K,$$

则 $F(a)=F(b)=0$，故存在 $\eta\in(a,b)$，使 $F'(\eta)=0$，即

$$f'(\eta)-f'\left(\frac{a+\eta}{2}\right)-\frac{\eta-a}{2}K=0,$$

进一步存在 $\xi\in\left(\dfrac{a+\eta}{2},\eta\right)\subset(a,b)$，使

$$f''(\xi)\left(\eta-\frac{a+\eta}{2}\right)-\frac{\eta-a}{2}K=0,$$

化简得 $f''(\xi)=K$.

CHAPTER 5

2022 年转专业考试真题

1　选择题 (每题 3 分，共 30 分)

1. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 存在是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的 $(*)$ 条件.

   A. 充分不必要　　　**B.** 必要不充分

   C. 充分必要　　　**D.** 既不充分也不必要

2. 如果 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ 是比 $\dfrac{1}{x+1}$ 高阶的无穷小，则 a,b,c 应满足 $(*)$.

   A. $a=0,b=1,c=1$　　　**B.** $a\neq 0,b=1,c$ 为任意常数

   C. $a\neq 0,b,c$ 为任意常数　　　**D.** a,b,c 为任意常数

3. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-1|}{x-1}, & x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$ 的连续区间为 $(*)$.

   A. $(-\infty,+\infty)$　　　**B.** $(-\infty,1)$ 与$[1,+\infty)$

   C. $(-\infty,1)$ 与$(1,+\infty)$　　　**D.** $(-\infty,1]$ 与$(1,+\infty)$

4. 下列正确的命题是 $(*)$.

   (1): 初等函数在其定义域内连续；

   (2): 设函数定义在一个区间上，若函数在区间内一点连续，则它在该点的某邻域内连续；

   (3): 若函数在区间 I 上连续，则函数在 I 上有界；

   (4): 若函数在区间 I 上连续，则函数在 I 上有最大值.

   A. (1)(2)(3)　　　**B.** (2)(3)(4)

   C. (2)(4)　　　**D.** 都不真

5. 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且 $f(x)<0$，则 $(*)$.

   A. $f(-x)>0$　　　**B.** $f'(-x)<0$

   C. $\lim\limits_{x\to 0} f(-x)<0$　　　**D.** $\lim\limits_{x\to 0} f(-x)>0$

6. 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0$，$f''(x)<0, \Delta x$ 为自变量在 x_0 的增量，Δy 与 $\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在 x_0 对应的增量和微分. 若 $\Delta x>0$，则 $(*)$.

A. $0<\Delta y<\mathrm{d}y$ **B.** $0<\mathrm{d}y<\Delta y$
C. $\Delta y<\mathrm{d}y<0$ **D.** $\mathrm{d}y<\Delta y<0$

7. 已知 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=t^2 \end{cases}$ 所确定，$\varphi''(t)$ 存在，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=(*)$.

A. $\dfrac{t\varphi''(t)-\varphi'(t)}{4t^3}$ **B.** $\dfrac{t\varphi''(t)+\varphi'(t)}{4t^3}$
C. $\dfrac{\varphi''(t)-t\varphi'(t)}{4t^3}$ **D.** $\dfrac{t\varphi''(t)-\varphi(t)}{4t^3}$

8. $y=\sin^4 x-\cos^4 x$，则 $y^{(n)}=(*)$.

A. $2^n\cos\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ **B.** $2^n\sin\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$
C. $-2^n\cos\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ **D.** $-2^n\sin\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$

9. 设 $x_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{3^{\frac{k}{n}}}{n}$，则 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=(*)$.

A. $\dfrac{4}{\ln 3}$ **B.** $\dfrac{2}{\ln 3}$ **C.** $\dfrac{3}{\ln 3}$ **D.** $\dfrac{3}{\ln 2}$

10. $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-9}$ 全部的渐近线为 $(*)$.

A. $x=\pm 3, y=x$ **B.** $x=\pm 3, y=2x$
C. $x=\pm 3, y=-x$ **D.** $x=\pm 3, y=3x$

2 填空题 (每题 3 分，共 30 分)

1. 已知 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x+3$，$f^{-1}(x)<x-2$ 成立，则 x 的取值范围是__________.

2. 设 $x>1$，则极限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^n+x^{3n}}=$ __________.

3. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\sin x\right)=$ __________.

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x\sin^2 x}=$ __________.

5. 函数 $f(x)=x^4$ 在区间 $[1,2]$ 内满足 Lagrange 中值定理的 ξ 的值 =__________.

6. 函数 $f(x)=x\mathrm{e}^{-x}$ 的递增区间为__________.

7. 若 $f(x)=x^3\ln(2+x)$，则 $f^{(6)}(0)=$ __________.

8. 设 $f(x)$ 具有任意阶导数，$f'(x)=f^2(x)$，则 $f^{(n)}(x)=$ __________.

9. 设 $k>0$，则 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{\mathrm{e}}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内的零点个数为__________.

10. 设 $y=y(x)$ 由 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 确定，则 $y=y(x)$ 的极小值点为__________.

3 解答题 (共 40 分)

1. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{1}{x}}\right]$.

2. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导，如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+2\sqrt{x}f'(x)\right]=2022$，计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

3. 对任意正实数 β, 记函数 $f(x)=|\lg x|$ 在 $[\beta,+\infty)$ 上的最小值为 m_β，函数 $g(x)=\sin\dfrac{\pi x}{2}$ 在 $[0,\beta]$ 上的最大值为 M_β，若 $M_\beta-m_\beta=\dfrac{1}{2}$，求 β 的所有可能值.

4. 设 $\alpha\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}-\alpha$ 有两个不同的零点 x_1,x_2.

(1) 证明: $\alpha\in\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$;

(2) 证明: $|x_2-x_1|>2\sqrt{1-\mathrm{e}\alpha}$.

CHAPTER 6

2022 年转专业考试真题参考答案

1 填空题 (9 分)

1. **Solution.** B.

2. **Solution.** C.

   由题可得
   $$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{ax^2+bx+c}{x+1}}=0.$$
   而 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{ax^2+bx+c}{x+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{ax^2+bx+c}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2ax+b}$，故 $a\neq 0$.

3. **Solution.** C.

   $f(x)=\begin{cases}-1, & x<1,\\ 1, & x\geq 1\end{cases}$，所以 $f(x)$ 仅在 $x=1$ 处不连续. 注意本题不是单侧连续.

4. **Solution.** D.

   基本初等函数在其定义域内连续，初等函数在其定义区间内连续，(2): 例如 $f(x)=xD(x), D(x)$ 是 Dirichlet 函数，可以验证 $f(x)$ 仅在 $x=0$ 处连续 (3)(4) 闭区间上连续函数具有最值定理以及有界性，选择 D.

5. **Solution.** C.

   因 $f(x)$ 可导，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 令 $y=-x$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(-x)=\lim\limits_{y\to 0}f(y)=f(0)<0$，选择 C.

6. **Solution.** A.

   由 Taylor 定理，$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x)\Delta x+\frac{1}{2}f''(\xi)(\Delta x)^2$，$\xi\in(x,x+\Delta x)$.

   因 $f''(x)<0$，故 $\Delta y<f'(x)\Delta x$. 而 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x=f'(x)\Delta x$，故 $\Delta y<\mathrm{d}y$,

   另一方面，$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f'(\eta)\Delta x>0$，$\eta\in(x,x+\Delta x)$.

   因此 $0<\Delta y<\mathrm{d}y$，选择 A.

7. **Solution.** A.

$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{\varphi'(t)}{2t}$，所以

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{t\varphi''(t)-\varphi'(t)}{t^2}\cdot\frac{1}{2t}=\frac{t\varphi''(t)-\varphi'(t)}{4t^3}.$$

8. **Solution.** C.

注意到

$$y=\sin^4x-\cos^4x=(\sin^2x-\cos^2x)(\sin^2x+\cos^2x)=-\cos 2x,$$

简单归纳即得 $y^{(n)}(x)=-2^n\cos\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$. 选择 C.

9. **Solution.** B.

由定积分的定义可得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3^{\frac{k}{n}}}{n}=\int_0^1 3^x\,\mathrm{d}x=\left.\frac{3^x}{\ln 3}\right|_0^1=\frac{2}{\ln 3}.$$

10. **Solution.** A.

令 $x^2-9=0$ 得 $x=\pm3$，所以 $y=f(x)$ 有垂直渐近线 $x=\pm3$.

注意到

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2-9}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-9}=1,\quad b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-9}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{9x}{x^2-9}\right)=0,$$

故 $y=f(x)$ 有斜渐近线 $y=x$.

$y=f(x)$ 无水平渐近线，选择 A.

2 填空题 (每题 8 分，共 48 分)

1. **Solution.** $(3,+\infty)$.

由 $\log_{\frac{1}{2}}x=y-3$ 得 $x=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{y-3}$，所以 $f^{-1}(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-3}$.

即解不等式 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-3}<x-2$.

记 $g(x)=x-2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-3}$，则 $g'(x)=1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-3}\ln 2>0$，所以 $g(x)$ 单调增加.

又 $g(3)=0$，故 $g(x)>0\Rightarrow x\in(3,+\infty)$.

2. **Solution.** x^3.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^n+x^{3n}}=\lim_{n\to\infty}x^3\cdot\sqrt[n]{\frac{1}{x^{2n}}+1}=x^3\cdot\lim_{n\to\infty}\exp\left[\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^{2n}}\right)}{n}\right]=x^3\cdot\lim_{n\to\infty}\exp\left(\frac{1}{nx^{2n}}\right)=x^3.$$

3. **Solution.** 1.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\sin x\right)=\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1-0=1.$$

4. **Solution.** 1.

注意到

$$\arcsin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}x^{2n+1},$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(2x+\frac{1}{2\cdot 3}(2x)^3\right)-2\left(x+\frac{1}{2\cdot 3}x^3\right)+o(x^3)}{x^3}=1.$$

5. **Solution.** $\sqrt[3]{\dfrac{15}{4}}$.

由 $f(2)-f(1)=15=f'(\xi)(2-1)=4\xi^3,\xi\in(1,2)$ 解得 $\xi=\sqrt[3]{\dfrac{15}{4}}$.

6. **Solution.** $(-\infty,1)$.

计算 $f'(x)=(1-x)\mathrm{e}^{-x}$，令 $f'(x)>0$ 解得 $x\in(-\infty,1)$.

7. **Solution.** 30.

$f(x)=x^3\ln(2+x)=x^3\ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right)+\ln 2\cdot x^3$.

注意到

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}.$$

所以 $f(x)=x^3\cdot\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n+\ln 2\cdot x^3$.

由 Taylor 定理，

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

将上述两式对照，得 $\dfrac{f^{(6)}(0)}{6!}=\dfrac{1}{2^3\cdot 3}$，解得 $f^{(6)}(0)=30$.

8. **Solution.** $\dfrac{n!}{(C-x)^{n+1}}$.

由 $f'(x)=f^2(x)$ 得 $\left(-\dfrac{1}{f(x)}\right)'=1$，因此 $f(x)=\dfrac{1}{C-x}$.

注意到

$$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=\frac{(-a)^n\cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}.$$

故 $f^{(n)}(x)=\dfrac{n!\cdot 1^n}{(C-x)^{n+1}}=\dfrac{n!}{(C-x)^{n+1}}$.

9. **Solution.** 2.

即 $k=\dfrac{x}{\mathrm{e}}-\ln x$.

记 $t(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}}-\ln x$，则 $t'(x)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}-\dfrac{1}{x}$. 所以 $t(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 单调减，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 单调增.

因 $t(0^+)=t(+\infty)=+\infty$，$t(\mathrm{e})=0$，又 $k>0$，作图可得共有 2 个零点.

10. **Solution.** $x=1$

方程 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 两边对 x 求导，得 $6y^2y'-4yy'+2y+2xy'-2x=0$. 即

$$y'(3y^2-2y+x)=x-y \quad (*)$$

令 $y'=0$ 得 $y=x$，代入原方程得

$$(x-1)(2x^2+x+1)=0.$$

解得 $x=1$. 再对 $(*)$ 式求导，有

$$y''(3y^2-2y+x)+y'\frac{\partial}{\partial x}(3y^2-2y+x)=1-y'.$$

代入 $x=y=1$，$y'=0$ 得 $y''(1)=\dfrac{1}{2}>0$，故 $x=1$ 是 $y(x)$ 的极小值点.

3 解答题

1. **Solution.**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right]^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to+\infty}\exp\left[\frac{1}{x}\ln\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\exp\left[\frac{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}-1}{x}\right]\\ &=\lim_{x\to+\infty}\exp\left[\frac{\frac{\ln(1+x)-x}{x}}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\exp\left[\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\right]\\ &=\lim_{x\to0}\exp\left[\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\right]=\exp\left[\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\right]\\ &=\exp\left[\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-x}{x^2}\right]=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

2. **Solution.**

令 $F(x)=\mathrm{e}^{\sqrt{x}}f(x)$，由广义 L' Hospital 法则（$\dfrac{*}{\infty}$ 型）可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{F'(x)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}\\ &=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}f(x)+\mathrm{e}^{\sqrt{x}}f'(x)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}\\ &=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+2\sqrt{x}f'(x)\right]=2022.\end{aligned}$$

3. **Solution.**

若 $0<\beta\le1$，$M_\beta=\sin\dfrac{\pi\beta}{2}$，而 $m_\beta=0$，故 $\sin\dfrac{\pi\beta}{2}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{\pi\beta}{2}=\dfrac{\pi}{6}$，即 $\beta=\dfrac{1}{3}$.

若 $\beta>1$，$M_\beta=1$，而 $m_\beta=\lg\beta$，故 $1-\lg\beta=\dfrac{1}{2}$，解得 $\beta=\sqrt{10}$.

综上，$\beta\in\left\{\dfrac{1}{3},\sqrt{10}\right\}$.

4. **Proof.**

(1) 令 $f(x)=0$，得 $\alpha=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$. 令 $g(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$，则 $g'(x)=\dfrac{1-x}{\mathrm{e}^x}$.
故 $g(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 单调增，在 $(1,+\infty)$ 单调减.
因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$，$g(1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，作图可得 $\alpha\in\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.
(2) 由 $\dfrac{x_1}{\mathrm{e}^{x_1}}=\dfrac{x_2}{\mathrm{e}^{x_2}}=\alpha$ 可得

$$\ln\alpha=\ln x_1-x_1=\ln x_2-x_2.$$

此即

$$\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}=1.$$

由 A-L-G 不等式有

$$\frac{x_1+x_2}{2}>\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}=1,$$

所以 $x_1+x_2>2$. 不妨设 $x_2>x_1$，则 $|x_2-x_1|=x_2-x_1=(x_2-1)+(1-x_1)$. 而 $x_2-1>1-x_1$，下证

$$1-x_1>\sqrt{1-\mathrm{e}\alpha}.$$

上式即 $x_1^2-2x_1>-\dfrac{\mathrm{e}x_1}{\mathrm{e}^{x_1}}$，故即证 $2-x_1<\mathrm{e}^{1-x_1},x_1\in(0,1)$.
注意到

$$\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}>1+x,x>0,$$

所以 $\mathrm{e}^{1-x_1}>2-x_1$，证毕!

CHAPTER 7

2021 年转专业考试真题

1 填空题

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\arctan\left(\dfrac{1}{k^2+k+1}\right)=$

2. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{\tan x}\right)}{2^x-1}=8$, 则极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=$

3. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n^4}+2\sqrt[n]{n^2}-3}{\sqrt[n]{n^2}-3\sqrt[n]{n}+2}=$

4. 设 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且满足方程 $g(x)+g(y)=g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$，求 $g(x)=$

5. $x=a\cos t+b\sin t,\quad y=a\sin t-b\cos t,$ 则 $\dfrac{d^m x}{dt^m}\cdot\dfrac{d^n y}{dt^n}-\dfrac{d^n x}{dt^n}\cdot\dfrac{d^m y}{dt^m}=$

2 证明题

1. 设 $\{\theta_n\}\neq 0$，且满足 $\theta_n^2-\theta_{n-1}\cdot\theta_{n+1}=1(n=1,2,3\cdots)$，证明：存在一个实数 λ，使得对所有 $n\geq 1$，有 $\theta_{n+1}=\lambda\theta_n-\theta_{n-1}$.

2. 设 $f(x)$ 定义在 $x=0$ 的某个邻域上，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=0$，证明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

3. 已知函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有二阶导数，$f(0)=f'(0)=0, |f''(x)|\le |f(x)|+|f'(x)|$, 证明：存在 $\delta>0$, 使得在 $(-\delta,\delta)$ 内 $f(x)\equiv 0$.

4. 设可微函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调减少，如果当 $x\in(0,+\infty)$ 时 $0<|f(x)|<|f'(x)|$ 成立，证明：当 $x\in(0,1)$ 时，必有 $xf(x)>\dfrac{1}{x}f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

CHAPTER 8

2021 年转专业考试真题参考答案

1 填空题 (每题 8 分，共 48 分)

1. **Solution**. $\frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{\infty}[\arctan(k+1)-\arctan k]=\lim\limits_{n\to\infty}[\arctan(n+1)-\arctan 0]=\frac{\pi}{2}$

2. **Solution**. $8\ln 2$

上式易化为：$\frac{f(x)}{\ln 2\cdot x^2}=8$, 故 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=8\ln 2$

3. **Solution**. -8

$\sqrt[n]{n}=t\to 1\ (n\to\infty)$, 原式 $=\lim\limits_{t\to 1}\frac{t^4+2t^2-3}{t^2-3t+2}=\lim\limits_{t\to 1}\frac{(t^2-1)(t^2+3)}{(t-1)(t-2)}=\lim\limits_{t\to 1}\frac{(t+1)(t^2+3)}{t-2}=-8$

4. **Solution**. $g(x)=g(1)x^2$

由 $g(x)+g(y)=g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, 令 $x=y=0$, 可得 $g(0)=0$ 再令 $y=0$, 可得 $g(x)=g(|x|)$ 可得偶函数. 下面考虑 $x,y>0$ 的情况:

$g\left(\sqrt{x^2}\right)+g\left(\sqrt{y^2}\right)=g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, 令 $h(x)=g(\sqrt{x})(x>0)$

$h(x^2)+h(y^2)=h(x^2+y^2)$, 令 $x'=x^2, y'=y^2$

则 $h(x')+h(y')=h(x'+y')\to h(x')=kx'$, 即 $h(x)=kx$.

$g(\sqrt{x})=kx\to g(x)=kx^2(x>0)$.

由偶函数可知, $g(x)=kx^2(x\in\mathbb{R})$. 其中 $k=g(1)$.

5. **Solution**. $(a^2+b^2)\sin\frac{n-m}{2}\pi$

令 $x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t\right)=\sqrt{a^2+b^2}\cos(t-\alpha)$,

同理令 $y=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t\right)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(t-\alpha)$.

用 Leibniz 公式可得答案: $(a^2+b^2)\sin\frac{n-m}{2}\pi$.

2 证明题 (9 分)

1. **Proof**. 由题 $\theta_{n+1}^2-\theta_n\cdot\theta_{n+2}=1$，$\theta_n^2-\theta_{n-1}\cdot\theta_{n+1}=1$，

相减得 $\theta_{n+1}^2+\theta_{n-1}\cdot\theta_{n+1}-\theta_n^2-\theta_n\cdot\theta_{n+2}=0$，即 $\theta_{n+1}(\theta_{n-1}+\theta_{n+1})=\theta_n(\theta_n+\theta_{n+2})$.

所以 $\frac{\theta_{n+2}+\theta_n}{\theta_{n+1}}=\frac{\theta_{n+1}+\theta_{n-1}}{\theta_n}=\lambda=\frac{\theta_2+\theta_0}{\theta_1}$.

2. **Proof**. 已知 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $|x|<\delta$ 时, 有

$$\left|\frac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

亦即

$$-\frac{\varepsilon}{3}|x|<f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)<\frac{\varepsilon}{3}|x|.$$

将 x 替换为 $\frac{x}{2^k}$, 得

$$-\frac{\varepsilon}{3}\cdot\frac{1}{2^k}|x|<f\left(\frac{x}{2^k}\right)-f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)<\frac{\varepsilon}{3}\cdot\frac{1}{2^k}|x|\ (k=0,1,2,\cdots,n).$$

相加 (注意到 $\sum\limits_{k=0}^{n}\left[f\left(\frac{x}{2^k}\right)-f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right]=f(x)-f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$) 得

$$-\frac{\varepsilon}{3}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}|x|<f\left(x\right)-f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)<\frac{\varepsilon}{3}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}|x|.$$

令 $n\to\infty$，注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}=2$，得

$$-\frac{2\varepsilon}{3}|x|\le f(x)\le\frac{2\varepsilon}{3}|x|.$$

故 $\left|\frac{f(x)}{x}\right|\le\frac{2\varepsilon}{3}<\varepsilon$，因此 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|=0$.

3. **Proof**.

(法一) 考察区间 $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$ 上的函数 $|f(x)|+|f'(x)|$, 并假定它在 $x_0\in\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$ 处取到最大值 M.

$f(x_0)=f''(\xi_0)\frac{x_0^2}{2},f'(x_0)=f''(\eta_0)x_0$, 其中 ξ_0,η_0 位于 x_0 和 0 之间. 从而有

$$\begin{aligned}M=|f(x_0)|+|f'(x_0)|&=|f''(\xi_0)|\frac{x_0^2}{2}+|f''(\eta_0)x_0|\\&\le\frac{|f''(\xi_0)|+|f''(\eta_0)|}{4}\\&\le\frac{|f(\xi_0)|+|f'(\xi_0)|+|f(\eta_0)|+|f'(\eta_0)|}{4}\\&\le\frac{M}{2}\end{aligned}$$

故 $M=0$, 得证.

(法二) 令 $\delta=\frac{1}{2}$; 对于 $f(x)$, 定义在 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 区间, 并且具有连续的各种派生物

可知: 存在 $M_1,M_2>0$, 使得

$$|f(x)|<M_1,|f'(x)|<M_2,|f''(x)|<|f(x)|+|f'(x)|<M_1+M_2$$

因此 $|f''(x)|$ 有上界.

由条件得到: 存在 $x_1\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, 使得 $|f''(x_1)|>S-\varepsilon,(\forall\varepsilon>0)$.

于是利用泰勒展开 $S>0$ 不成立: 选择 $S>0$, 设 $\varepsilon=\frac{1}{8}S>0$, 则

$$|f''(x_1)|>\frac{7}{8}S$$

则

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2,\xi\in(0,x),f'(x_1)=f'(0)+x_1f''(\eta),\eta\in(0,x),$$

故

$$|\frac{7}{8}S\le|f''(x_1)|\le|f(x_1)|+|f'(x_1)|\le\frac{1}{2}|f''(\xi)|x_1^2+|x_1||f''(\eta)|\le\frac{5}{8}S<S$$

矛盾!

因此, 不可能, 有结果: $S=0$.

因此 $f''(x)=0$; $f'(x)=0$; $f(x)=f(0)=0,x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

错解: 考虑区间 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, 在该区间上有 $|f''(x)|\le|f(x)|+|f'(x)|,x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$,

则

$$|f'(x)|=\left|\int_0^x f''(t)dt\right|\le\int_0^x|f''(t)|\,dt\le\int_0^x(|f(t)|+|f'(t)|)dt$$

又因 $|f(x)|=\left|\int_0^x f'(t)dt\right|\le\int_0^x|f'(t)|\,dt$

$$\begin{aligned}\int_0^x|f'(t)|\,dt&\le|f(\theta)|\,x+\int_0^x|f'(t)|\,dt(\text{积分中值定理})\\&=x\int_0^\theta|f'(t)|\,dt+\int_0^x|f'(t)|\,dt\\&\le x\int_0^x|f'(t)|\,dt+\int_0^x|f'(t)|\,dt\\&=(x+1)\int_0^x|f'(t)|\,dt\end{aligned}$$

记 $f'(x)$ 在 $(0,x)$ 上最大值点为 ϵ, 则

$$|f'(\epsilon)|\le(\epsilon+1)\int_0^\epsilon|f'(t)|\,dt\le(\epsilon+1)\epsilon\,|f'(\epsilon)|\le\frac{3}{4}\,|f'(\epsilon)|$$

从而 $|f'(\epsilon)|=0,f'(x)=0,x\in\left(0,\frac{1}{2}\right),f(x)=0$, 同理可将此情况推广到 $(-1,1)$ 上.

错误原因在于使用牛顿–莱布尼茨公式时要求 $f''(t)$ 在 $t\in(0,x)$ 上连续, 此处由已知条件无法得出.

4. **Proof**. 首先我们给出 $f(x)<0$ 的证明, (由介值定理, $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上不变号)

$$g(x)\triangleq xf(x)-\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right),g'(x)=xf'(x)+f(x)+\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^3}f'\left(\frac{1}{x}\right)<0$$

$g(x)>g(1)=0$, 原命题成立.

下面给出 $f(x)>0$ 的证明:

$\Leftrightarrow$ Proof: $x\in(0,1),\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{f(x)}<x^2$ 或 $\ln\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{f(x)}<2\ln x$.

因为 $f(x)$ 严格递减, $f'(x)<0$, 有 $f'(\frac{1}{x})=-|f'(x)|$,

$$\ln\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{f(x)}=\ln f\left(\frac{1}{x}\right)-\ln f(x)\overset{\text{Lagrange 定理}}{=}\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}\left(\frac{1}{x}-x\right)$$

注意到

$$0<f(x)<|f'(\xi)|=-f'(\xi),\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}<-1,\frac{1}{x}-x>0(0<x<1)$$

.

接下来只需证: $\dfrac{-1}{x}<2\ln x(0<x<1)$. 【求导，显然】

故 $\ln\dfrac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{f(x)}<x-\dfrac{1}{x}<2\ln x(0<x<1)$.

错解: 由题可知, $f'(x)<0, 0<f(x)<-f'(x)$, 故 $\dfrac{-f'(x)}{f(x)}>1$, 所以

$$\ln\frac{f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}=-\int_x^{\frac{1}{x}}\frac{f'(t)}{f(t)}dt>\int_x^{\frac{1}{x}}\frac{1}{t}dt=\frac{1}{x}-x, x\in(0,1)$$

故 $\dfrac{f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}>e^{\frac{1}{x}-x}$, 又 $e^{\frac{1}{x}-x}>\dfrac{1}{x^2}$

可得

$$x\cdot f(x)>\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right), x\in(0,1).$$

错误原因在于使用牛顿–莱布尼茨公式时要求 $\dfrac{f'(t)}{f(t)}$ 在 $t\in\left(x,\dfrac{1}{x}\right)$ 上连续, 此处由已知条件无法得出.

CHAPTER 9

2020 年转专业考试真题

1　解答题

1. 设 $f(x)$ 是 **R** 上的有界实函数，且 $f\left(x+\frac{1}{11}\right)+f\left(x+\frac{1}{12}\right)=f\left(x\right)+f\left(x+\frac{23}{132}\right)\ (\forall x\in R)$，求证：$f(x)$ 是周期函数.

2. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=A$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}n(a_n-a_{n-1})=0$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{3}}\left[(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}\right]$.

4. 求在 **R** 上满足方程 $f(2020x)+f(2019x)=2022x+2021$ 的连续解.

5. 讨论 $f(x)=[x]\sin\pi x$ 的连续性与可导性 ($[x]$ 表示不超过 x 的最大整数)

6. 计算 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\dfrac{1}{x^2+a^2}\right)\right|_{x=0}$，其中 n 是任意正整数.

（注：原题没有 $x=0$，但那样无法正常求解，怀疑打印错误，此处加上，后会附上不考虑此条件的解法）

7. 设 $f(x)\in C[0,1]\cap D(0,1), f(0)=0, f(1)=1$, 求证：在 $(0,1)$ 内存在不同的 ξ,η , 使 $f'(\xi)f'(\eta)=1$.

8. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$, 证明：$f''(0)=4$.

CHAPTER 10

2020 年转专业考试真题参考答案

1 解答题

1. **Proof**. 设 $F(x)=f\left(x+\dfrac{1}{11}\right)-f(x)$, 则 $F\left(x+\dfrac{1}{12}\right)=F(x)$，故 $F(x)$ 以 $\dfrac{1}{12}$ 为周期，也以 1 为周期,
$\therefore F(x+1)=F(x)$，即 $f\left(x+\dfrac{1}{11}\right)-f(x)=f\left(x+\dfrac{12}{11}\right)-f(x+1)$

$f(x+1)-f(x)=f\left(x+\dfrac{12}{11}\right)-f\left(x+\dfrac{1}{11}\right)$，$f(x+1)-f(x)$ 以 $\dfrac{1}{11}$ 为周期，也以 1 为周期，可得
$f(x+n)-f(x)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}[f(x+i+1)-f(x+i)]=(n-1)[f(x+1)-f(x)]$

$f(x+1)-f(x)=\dfrac{f(x+n)-f(x)}{n-1}$，令 $n\to\infty$，$\because f(x)$ 有界, $\therefore f(x+1)-f(x)=0$

$\therefore f(x)$ 以 1 为周期

2. **Solution**. 由 Abel 变换注意到

$$S_{n-1}=\sum_{i=1}^{n-1}a_i=na_n-\sum_{i=2}^{n}i(a_i-a_{i-1})-a_1$$

则有

$$a_n=\frac{S_{n-1}}{n}+\frac{\sum_{i=2}^{n}i(a_i-a_{i-1})+a_1}{n},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{S_{n-1}}{n-1}=A$$

由 Stolz 定理:

$$\frac{\sum_{i=2}^{n}i(a_i-a_{i-1})+a_1}{n}=\lim_{n\to\infty}n(a_n-a_{n-1})=0,\quad \therefore \lim_{n\to\infty}a_n=A$$

3. **Solution**. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\right]=\lim_{x\to+\infty}x\left[1+\frac{2}{3x}-\left(1-\frac{2}{3x}\right)+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\frac{4}{3}.$

4. **Solution**. 不妨考虑一般情况：$f(\alpha x)+f(\beta x)=ax+b\,(\alpha>\beta)$.

上式即 $f(x)+f\left(\dfrac{\beta}{\alpha}x\right)=\dfrac{ax}{\alpha}+b.$

所以

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{ax}{\alpha} + b - f\left(\frac{\beta}{\alpha}x\right) \\ &= \frac{ax}{\alpha} + b - \left[\frac{ax}{\alpha}\frac{\beta}{\alpha} + b - f\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}x\right)\right] \\ &= \frac{ax}{\alpha}\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) + f\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}x\right) \end{aligned}$$

利用上式迭代可得

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{ax}{\alpha}\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) + \frac{ax}{\alpha}\frac{\beta^2}{\alpha^2}\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) + f\left(\frac{\beta^4}{\alpha^4}x\right) \\ &= \frac{ax}{\alpha}\left(1 - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} - \frac{\beta^3}{\alpha^3}\right) + f\left(\frac{\beta^4}{\alpha^4}x\right) \\ &= \cdots = \frac{ax}{\alpha}\left(1 - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} - \cdots - \frac{\beta^{2n-1}}{\alpha^{2n-1}}\right) + f\left(\frac{\beta^{2n}}{\alpha^{2n}}x\right). \end{aligned}$$

令 $n \to \infty$，因 $\frac{\beta}{\alpha} < 1$，故 $\frac{\beta^{2n}}{\alpha^{2n}} \to 0$，且 $1 - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} - \cdots - \frac{\beta^{2n-1}}{\alpha^{2n-1}} \to \frac{1}{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$，所以

$$f(x) = \frac{ax}{\alpha}\frac{\alpha}{\alpha + \beta} + f(0) = \frac{ax}{\alpha + \beta} + \frac{b}{2}.$$

将 $\alpha = 2020$，$\beta = 2019$，$a = 2022$，$b = 2021$ 带入，立得 $f(x) = \frac{2022}{4039}x + \frac{2021}{2}$.

5.**Solution.**

(1) 连续性：对任意非整数点 $x \notin \mathbb{Z}$，$[x]$ 在该点的某邻域内取常值，$\sin \pi x$ 连续，故 $f(x) = [x]\sin \pi x$ 在非整数点连续. 对任意整数点 $n \in \mathbb{Z}$，有

$$f(n) = n\sin(n\pi) = 0.$$

但当 $x \to n^-$ 时，

$$[x] = n - 1, \quad \sin \pi x \to \sin(n\pi) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) \to (n-1)\cdot 0 = 0,$$

当 $x \to n^+$ 时，

$$[x] = n, \quad \sin \pi x \to 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) \to n \cdot 0 = 0.$$

因此左右极限均等于 $f(n)$，故在整数点亦连续. 综上，f 在 $\mathbb{R}$ 上处处连续.

(2) 可导性：对非整数点 $x \notin \mathbb{Z}$，$[x] = k$ 为常数，则

$$f(x) = k\sin \pi x, \quad f'(x) = k\pi \cos \pi x$$

存在，故在非整数点可导. 考察整数点 $x = n$ 处左右导数：令 $h \to 0^-$，则

$$f(n+h) = (n-1)\sin\big(\pi(n+h)\big) = (n-1)(-1)^n \sin(\pi h),$$

$$\frac{f(n+h) - f(n)}{h} = (n-1)(-1)^n \frac{\sin(\pi h)}{h} \to (n-1)(-1)^n \pi.$$

令 $h \to 0^+$，则

$$f(n+h) = n\,\sin\big(\pi(n+h)\big) = n(-1)^n \sin(\pi h),$$

$$\frac{f(n+h)-f(n)}{h}=n(-1)^n\frac{\sin(\pi h)}{h}\to n(-1)^n\pi.$$

左右导数不相等，故 f 在整数点不可导.

结论：f 在 $\mathbb{R}$ 上处处连续，但仅在 $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ 上可导，在整数点不可导.

6. **Solution**.

(法一) 由泰勒公式

$$\frac{1}{x^2+a^2}=\frac{1}{a^2}\frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}}=\frac{1}{a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)^n=\frac{1}{a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{a^{2n}}.$$

再由泰勒展开的唯一性，故当 n 为奇数，$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)\Big|_{x=0}=0.$

当 n 为偶数，$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)\Big|_{x=0}=\frac{(-1)^{n/2}(n!)}{a^{n+2}}.$

(法二) $(a^2+x^2)y=1$, 由 Leibniz 公式，

$$(x^2+a^2)y^{(n)}+2nxy^{(n-1)}+n(n-1)y^{(n-2)}=0$$

$x=0, a^2y^{(n)}+n(n-1)y^{(n-2)}=0$, 由递推可得答案.

当 $x\neq 0$ 时，此时只能引入复数：$\frac{1}{x^2+a^2}=\frac{1}{2ai}\left(\frac{1}{x-ai}-\frac{1}{x+ai}\right)$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)&=\frac{1}{2ai}\left(\frac{1}{x-ai}-\frac{1}{x+ai}\right)^{(n)}\\&=\frac{(-1)^n n!}{2ai}\left[\frac{1}{(x-ai)^{n+1}}-\frac{1}{(x+ai)^{n+1}}\right]\\&=\frac{(-1)^n n!}{2ai}\frac{(x+ai)^{n+1}-(x-ai)^{n+1}}{(x^2+a^2)^{n+1}}\end{aligned}$$

考虑: $x+ai=\sqrt{a^2+x^2}\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}+\frac{ai}{\sqrt{a^2+x^2}}\right), r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}, \sin\theta=-\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow(x\pm ai)^{n+1}=r^{n+1}e^{\pm i(n+1)\theta}\\&\Rightarrow(x+ai)^{n+1}-(x-ai)^{n+1}=r^{n+1}\left[e^{i(n+1)\theta}-e^{-i(n+1)\theta}\right]=\frac{r^{n+1}\sin(n+1)\theta}{a}\\&\Rightarrow(x+ai)^{n+1}-(x-ai)^{n+1}=r^{n+1}\left[e^{i(n+1)\theta}-e^{-i(n+1)\theta}\right]=\frac{r^{n+1}\sin(n+1)\theta}{a}\\&\Rightarrow(x+ai)^{n+1}-(x-ai)^{n+1}=r^{n+1}\left[e^{i(n+1)\theta}-e^{-i(n+1)\theta}\right]=\frac{r^{n+1}\sin(n+1)\theta}{a}\\&\Rightarrow\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)=\frac{(-1)^n n!}{a}\frac{\sin(n+1)\theta}{\left[\sqrt{a^2+x^2}\right]^{n+1}}\end{aligned}$$

7. **Proof.** 令

$$g(a)=f(a)+a-1.$$

由于

$$g(0)=f(0)+0-1=-1<0,\quad g(1)=f(1)+1-1=1>0,$$

由连续性知 $\exists c\in(0,1)$ 使 $g(c)=0$，即

$$f(c)=1-c.$$

在区间 $[0,c]$ 上，拉格朗日中值定理给出 $\exists \eta \in (0,c)$ 使

$$f'(\eta) = \frac{f(c)-f(0)}{c-0} = \frac{1-c}{c}.$$

在区间 $[c,1]$ 上，拉格朗日中值定理给出 $\exists \xi \in (c,1)$ 使

$$f'(\xi) = \frac{f(1)-f(c)}{1-c} = \frac{c}{1-c}.$$

故

$$f'(\xi)\, f'(\eta) = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{1-c}{c} = 1,$$

且 $\xi \neq \eta$，完成证明.

8. **Proof.**

由于极限存在且为 $e^3 > 0$，考虑

$$A(x) = 1 + x + \frac{f(x)}{x}.$$

因为 f 在 0 处二阶可导，记

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2).$$

于是

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(0)}{x} + f'(0) + \frac{f''(0)}{2}x + o(x).$$

为使 $A(x)$ 在 $x \to 0$ 时不发散，必有 $f(0) = 0$. 令此时

$$A(x) = 1 + f'(0) + x\Big(1 + \tfrac{f''(0)}{2}\Big) + o(x).$$

又因

$$\lim_{x\to 0} A(x)^{\frac{1}{x}} = \exp\Big(\lim_{x\to 0} \frac{\ln A(x)}{x}\Big) = e^3,$$

若 $1 + f'(0) \neq 1$，则 $\ln A(x)$ 在 $x \to 0$ 有非零常数项，导致 $\dfrac{\ln A(x)}{x}$ 发散，矛盾. 故

$$f'(0) = 0,$$

此时

$$A(x) = 1 + x\Big(1 + \tfrac{f''(0)}{2}\Big) + o(x), \quad \ln A(x) = x\Big(1 + \tfrac{f''(0)}{2}\Big) + o(x).$$

因此

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln A(x)}{x} = 1 + \frac{f''(0)}{2} = 3,$$

解得

$$f''(0) = 4.$$

CHAPTER 11

2019 年转专业考试真题

1 解答题

1. 设函数 $y=f(x), x\in(-\infty,+\infty)$ 的图像关于 $x=2019, x=2020$ 均对称，请判断函数 $y=f(x)$ 是什么性质的函数，并说明你的判断.

2. 设 $a_n>0, b_n>0, \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}})>0$, 证明：极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 存在.

3. 计算不定积分: (1) $\int\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}dx$ (2) $\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$

4. (1) 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值，$f(a)=g(a), f(b)=g(b)$. 证明：$\exists \xi \in(a, b)$ 使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导且 $f(a)=f(b)=0$，证明：$\exists \alpha \in(a, b)$，使得 $f'(\alpha)+\alpha f(\alpha)=0$.

5. 设 $n \in \mathbf{N}^{*}$，$f(x)=\dfrac{1}{2^{n} n!} \dfrac{\mathrm{d}^{n}\left(x^{2}-1\right)^{n}}{\mathrm{d} x^{n}}$，计算 $f(1), f(-1)$.

6. $f(x)$ 有连续导数且 $\lim\limits_{x \rightarrow 0} \dfrac{f(x)+f'(x)}{1-e^{-x}}=1$，问 $f(0)$ 为何值时，$f(0)$ 为 $f(x)$ 的极值，并说明它是极大值还是极小值.

7. 设 $f(x): I \rightarrow R$ 是任一函数，$x_{0} \in I$，证明：$f(x)$ 在 x_{0} 处可导的充要条件是：存在一个函数 $g(x): I \rightarrow R$，使：

(1) $f(x)-f(x_{0})=g(x)(x-x_{0}), \forall x \in I$.

(2) $g(x)$ 在 x_{0} 处连续且 $f'(x_{0})=g(x_{0})$.

CHAPTER 12

2019 年转专业考试真题参考答案

1　解答题

1. **Solution.** $f(x)$ 是周期函数，周期 $T=2$.

利用图像关于 $x=2019$ 和 $x=2020$ 的对称性可得：

$$f(2019+t)=f(2019-t)\implies f(x)=f(2\cdot 2019-x),$$

$$f(2020+t)=f(2020-t)\implies f(x)=f(2\cdot 2020-x).$$

因此对于任意 x，

$$f(x)=f\big(2\cdot 2020-(2\cdot 2019-x)\big)=f(x+2),$$

即 $f(x)$ 具有周期 2.

2. **Proof.** 由条件

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\Big)=L>0,$$

取常数 δ 满足 $0<\delta<\dfrac{L}{2}$，则存在 $N\in\mathbb{N}$，当 $n\geq N$ 时有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}>\delta\quad\implies\quad\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}>\delta\, a_{n+1},$$

即

$$a_{n+1}<\frac{1}{\delta}\Big(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\Big).$$

对 $n=N,N+1,\ldots,m$ 累加，得

$$\sum_{n=N}^{m}a_{n+1}<\frac{1}{\delta}\sum_{n=N}^{m}\Big(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\Big)=\frac{1}{\delta}\Big(\frac{a_N}{b_N}-\frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}\Big)\leq\frac{a_N}{\delta\, b_N}.$$

因此 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 的部分和有上界，故 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ 收敛.

3. **Solution.**(1) 令

$$t=x-\frac{1}{x},\quad dt=\Big(1+\frac{1}{x^2}\Big)\,dx.$$

注意到

$$x^4-x^2+1=x^2\Big((x-\tfrac{1}{x})^2+1\Big)=x^2(t^2+1),$$

于是

$$\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}\,dx=\frac{1+\frac{1}{x^2}}{t^2+1}\,dx=\frac{dt}{t^2+1}.$$

故

$$\int\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}\,dx=\int\frac{dt}{t^2+1}=\arctan t+C=\arctan\Big(x-\tfrac{1}{x}\Big)+C.$$

(2) 令

$$t=\sqrt{e^x-1},\quad e^x=t^2+1,\quad x=\ln(t^2+1),\quad dt=\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}\,dx=\frac{t}{2}\,dx\implies e^x\,dx=2t\,dt.$$

则

$$\int\frac{x\,e^x}{\sqrt{e^x-1}}\,dx=\int\frac{x\,(2t\,dt)}{t}=2\int x\,dt=2\int\ln(t^2+1)\,dt.$$

对 $\int\ln(t^2+1)\,dt$ 分部积分，

$$\int\ln(t^2+1)\,dt=t\ln(t^2+1)-\int\frac{2t^2}{t^2+1}\,dt=t\ln(t^2+1)-2\int\Big(1-\frac{1}{t^2+1}\Big)dt=t\ln(t^2+1)-2t+2\arctan t+C.$$

因此

$$2\int\ln(t^2+1)\,dt=2t\ln(t^2+1)-4t+4\arctan t+C.$$

回代 $t=\sqrt{e^x-1}$，得

$$\int\frac{x\,e^x}{\sqrt{e^x-1}}\,dx=2\sqrt{e^x-1}\,\ln\big(e^x\big)-4\sqrt{e^x-1}+4\arctan\sqrt{e^x-1}+C=2x\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4\arctan\sqrt{e^x-1}+C.$$

4. **Proof.**

(1) 令

$$h(x)=f(x)-g(x).$$

由题意知

$$h(a)=f(a)-g(a)=0,\quad h(b)=f(b)-g(b)=0,$$

且 f,g 在 (a,b) 上有相等的最大值，设 $x_0\in(a,b)$ 为一极大点，则

$$f(x_0)=g(x_0),$$

亦即

$$h(x_0)=0.$$

于是 h 在 $[a,b]$ 上至少有三个零点 $x=a<x_0<b$. 由 Rolle 定理，分别在 (a,x_0) 与 (x_0,b) 上存在

$$x_1\in(a,x_0),\ x_2\in(x_0,b),\qquad h'(x_1)=0,\ h'(x_2)=0.$$

再对区间 $[x_1,x_2]$ 再次应用 Rolle 定理，得 $\exists\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$ 使

$$h''(\xi)=0.$$

而

$$h''(\xi)=f''(\xi)-g''(\xi),$$

故

$$f''(\xi) = g''(\xi).$$

(2) 令

$$H(x) = e^{\frac{x^2}{2}} f(x).$$

则

$$H(a) = e^{\frac{a^2}{2}} f(a) = 0, \quad H(b) = e^{\frac{b^2}{2}} f(b) = 0.$$

由 Rolle 定理，$\exists \alpha \in (a, b)$ 使

$$H'(\alpha) = 0.$$

而

$$H'(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right) f(x) + e^{\frac{x^2}{2}} f'(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \big(xf(x) + f'(x)\big).$$

故在 $x = \alpha$ 处

$$xf(x) + f'(x)\Big|_{x=\alpha} = 0 \implies f'(\alpha) + \alpha f(\alpha) = 0.$$

5. **Solution.** 记

$$u(x) = (x-1)^n, \qquad v(x) = (x+1)^n,$$

则

$$(x^2-1)^n = u(x)v(x).$$

由 Leibniz 公式

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[u(x)v(x)] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x)\, v^{(n-k)}(x).$$

注意到

$$u^{(k)}(1) = \begin{cases} 0, & k < n, \\ n!, & k = n. \end{cases}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n\Big|_{x=1} = \binom{n}{n} u^{(n)}(1)\, v^{(0)}(1) = n!\, 2^n.$$

因此

$$f(1) = \frac{1}{2^n\, n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n\Big|_{x=1} = 1.$$

类似地，在 $x = -1$ 处

$$v^{(k)}(-1) = \begin{cases} 0, & k < n, \\ n!, & k = n. \end{cases}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n\Big|_{x=-1} = \binom{n}{0} u^{(0)}(-1)\, v^{(n)}(-1) = (-1)^n\, n!\, 2^n.$$

因此

$$f(-1) = \frac{1}{2^n\, n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n\Big|_{x=-1} = (-1)^n.$$

6. **Solution.** 由

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) + f'(x)}{1 - e^{-x}} = 1,$$

以及 $1-e^{-x}\sim x$（当 $x\to 0$）可知分子也必须与 x 同阶，于是

$$f(0)+f'(0)=0.$$

要使 $x=0$ 成为极值点，需 $f'(0)=0$，故

$$f(0)=0.$$

下面判断极值的性质. 令

$$g(x)=e^x f(x).$$

则

$$g'(x)=e^x\big(f(x)+f'(x)\big),$$

且由题中极限不等式的符号保持性可见，当 $x>0$ 近 0 时 $g'(x)>0$，当 $x<0$ 近 0 时 $g'(x)<0$. 故 g 在 0 处由减变增，取得极小值. 由于 $e^x>0$，g 和 f 在极值点的凹凸性一致，因此 f 在 $x=0$ 也取得极小值.

7. **Proof** 答案是肯定的.

必要性: 假设 f 在 x_0 处可导，记 $f'(x_0)=A$. 定义

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & x\neq x_0,\\ A, & x=x_0.\end{cases}$$

则对一切 $x\in I$ 都有

$$f(x)-f(x_0)=g(x)\,(x-x_0),$$

即满足 (1). 又

$$\lim_{x\to x_0}g(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)=A=g(x_0),$$

故 g 在 x_0 处连续，且 $g(x_0)=f'(x_0)$，满足 (2).

充分性：反过来，若存在满足 (1)(2) 的函数 g，则

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=g(x)\quad(x\neq x_0),$$

两端令 $x\to x_0$，由 g 在 x_0 连续得

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}g(x)=g(x_0).$$

因此 f 在 x_0 处可导，且

$$f'(x_0)=g(x_0).$$

这就完成了充要性证明.

CHAPTER 13

2018 年转专业考试真题

1 解答题

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+b^n+2^{-n}b^{2n})^{\frac{1}{n}}(b>0)$

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$

3. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\arctan\dfrac{2}{k^2}$

4. 已知 $f(x), g(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的非常值连续可微函数，$f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y), g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$, 且 $f'(0) = 0$, 求证：$f(x)^2 + g(x)^2 = 1$.

5. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，试证：$f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续的充要条件是：$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |h| < \delta, \left| \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < \varepsilon$, 对一切 $x \in [a,b]$ 成立.

6. 设 $f_n(x) = \cos x + \cos^2 x + \cdots + \cos^n x$, 求证:
(1) 对任意自然数 n, 方程 $f_n(x) = 1$ 在 $[0, \dfrac{\pi}{3})$ 内有唯一根
(2) 设 $x_n \in [0, \dfrac{\pi}{3})$ 是 $f_n(x) = 1$ 的根, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{\pi}{3}$.

CHAPTER 14

2018 年转专业考试真题参考答案

1 填空题 (每题 8 分，共 48 分)

1. **Solution.** $\begin{cases} 1, & 0 < b < 1, \\ b, & 1 \le b \le 2, \\ \dfrac{b^2}{2}, & b \ge 2. \end{cases}$

写成

$$L_n = \left(1 + b^n + (\tfrac{b^2}{2})^n\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad a_1 = 1,\ a_2 = b,\ a_3 = \tfrac{b^2}{2}.$$

注意到 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} = \max\{a, b, c\}$

case 1: 若 $0 < b < 1$，$\max\{1, b, b^2/2\} = 1$，故 $\lim L_n = 1$.

case 2: 若 $1 \le b < 2$，$\max\{1, b, b^2/2\} = b$，于是

$$L_n = b\Big(1 + b^{-n} + (\tfrac{b}{2})^{-n}\Big)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} b.$$

case 3: 若 $b > 2$，$\max\{1, b, b^2/2\} = b^2/2$，从而

$$L_n = \frac{b^2}{2}\Big(1 + (\tfrac{2}{b^2})^n + (\tfrac{2}{b})^n\Big)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{b^2}{2}.$$

在边界点 $b = 1$ 与 $b = 2$，两种取法给出的极限均为 1 与 2，故结论保持一致.

2. **Solution.** $e^{-\frac{1}{2}}$.

利用泰勒公式 $\cos t = 1 - \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)\ (t \to 0)$，令 $t = \sqrt{x}$，得

$$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x).$$

故

$$\begin{aligned} \ln \sqrt[x]{\cos\sqrt{x}} &= \frac{1}{x}\ln\big(\cos\sqrt{x}\big) = \frac{1}{x}\ln\Big(1 - \frac{x}{2} + o(x)\Big) \\ &= \frac{1}{x}\Big(-\frac{x}{2} + o(x)\Big) = -\frac{1}{2} + o(1). \end{aligned}$$

两边取指数得

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt[x]{\cos\sqrt{x}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

3. **Solution**. $\dfrac{3\pi}{4}$.

利用反正切差角公式

$$\arctan x - \arctan y = \arctan\frac{x-y}{1+xy},\quad x=\frac{1}{k-1},\quad y=\frac{1}{k+1},$$

$$\Rightarrow \arctan\frac{2}{k^2} = \arctan\frac{\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}}{1+\frac{1}{(k-1)(k+1)}} = \arctan\frac{1}{k-1} - \arctan\frac{1}{k+1}.$$

对 $k=1,2,\dots,n$ 累加并对 n 取极限

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{2}{k^2} &= \arctan 2 + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\Big(\arctan\frac{1}{k-1} - \arctan\frac{1}{k+1}\Big)\\ &= \arctan 2 + \lim_{n\to\infty}\left(\arctan 1 + \arctan\frac{1}{2} - \arctan\frac{1}{n} - \arctan\frac{1}{n+1}\right)\\ &= \frac{3\pi}{4}.\end{aligned}$$

4. **Proof**.

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y),\\ g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y),\end{cases}$$

令 $y=0$，得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x)f(0) - g(x)g(0),\\ g(x) &= f(x)g(0) + g(x)f(0).\end{aligned}$$

于是

$$f(x)+g(x) = f(x)\big(f(0)+g(0)\big) + g(x)\big(f(0)-g(0)\big),$$

即

$$f(x)\big(1-f(0)-g(0)\big) = g(x)\big(f(0)-g(0)-1\big).$$

由于 f,g 非常值函数，故

$$f(0)+g(0)=1,\quad f(0)-g(0)=1 \quad\Rightarrow\quad f(0)=1,\ g(0)=0.$$

接下来，

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t} = \lim_{t\to 0}\Big(\frac{f(x)\big(f(t)-f(0)\big)}{t} - \frac{g(x)\big(g(t)-g(0)\big)}{t}\Big) = -g'(0)\,g(x),\\ g'(x) &= g'(0)\,f(x).\end{aligned}$$

故

$$\big(f^2(x)+g^2(x)\big)' = 2f\,f' + 2g\,g' = 0 \quad\Longrightarrow\quad f^2(x)+g^2(x) = C.$$

又 $f^2(0)+g^2(0)=1$，故

$$f^2(x)+g^2(x) = 1.$$

5. **Proof**.

必要性. 设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 由于 $[a,b]$ 紧，f' 在 $[a,b]$ 上一致连续. 于是，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $x',x\in[a,b]$ 且 $|x'-x|<\delta$ 时有

$$|f'(x') - f'(x)| < \varepsilon.$$

对任意 $x \in [a,b]$ 及 $0 < |h| < \delta$，由拉格朗日中值定理，存在 $\xi \in (x, x+h)$（或 $(x+h, x)$），使得

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(\xi).$$

因为 $|\xi - x| < |h| < \delta$，故

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x)\right| = |f'(\xi) - f'(x)| < \varepsilon.$$

充分性. 反过来，假设对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |h| < \delta$ 且 $x \in [a,b]$ 时都有

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x)\right| < \varepsilon.$$

任取 $x_0 \in [a,b]$，并取同样的 $\delta > 0$. 对于 $0 < |h| < \delta$ 且 $x_0 + h \in [a,b]$，有

$$\begin{aligned}\left|f'(x_0+h) - f'(x_0)\right| &\le \left|f'(x_0+h) - \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right| + \left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)\right| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,\end{aligned}$$

其中第一项应用了在点 $x = x_0 + h$ 处对增量 $-h$ 的假设条件. 由此可见

$$\lim_{h\to 0} f'(x_0+h) = f'(x_0),$$

即 f' 在任意 $x_0 \in [a,b]$ 处连续，故 f' 在 $[a,b]$ 上连续.

6. **Proof**.

(1) 对任意 $n \in \mathbb{N}$，计算

$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\ \cos^{k-1} x\,(-\sin x) = -\sin x \sum_{k=1}^{n} k \cos^{k-1} x < 0, \quad x \in \left(0, \tfrac{\pi}{3}\right).$$

故 f_n 在 $[0, \dfrac{\pi}{3}]$ 上严格单调递减. 又

$$f_n(0) = n > 1, \qquad f_n\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k = 1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n < 1.$$

由介值定理可知方程 $f_n(x) = 1$ 在 $[0, \dfrac{\pi}{3})$ 内恰有一根，且因严格单调，此根唯一.

(2) 利用等比数列求和，

$$f_n(x) = \cos x + \cos^2 x + \cdots + \cos^n x = \frac{\cos x\left(1 - \cos^n x\right)}{1 - \cos x}.$$

令 $x = x_n$ 满足 $f_n(x_n) = 1$，则

$$\cos x_n\left(1 - \cos^n x_n\right) = 1 - \cos x_n \quad \Longrightarrow \quad \cos^{n+1} x_n = 2\cos x_n - 1.$$

由于 $x_n \in [0, \dfrac{\pi}{3})$，有 $1/2 < \cos x_n < 1$，故当 $n \to \infty$ 时

$$\cos^{n+1} x_n \to 0,$$

从而 $2\cos x_n - 1 \to 0 \Rightarrow \cos x_n \to \frac{1}{2} \Rightarrow x_n \to \frac{\pi}{3}$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{\pi}{3}$.

CHAPTER 15

2017 年转专业考试真题

1 解答题

1. 证明数列 $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13} \cdots$ 存在极限 (不可用单调有界必有极限的结论来证), 且求出该极限.

2. 给定一个数列 $\{x_n\}(n = 1, 2, \cdots)$ 且 $\lim_{n\to\infty}(x_n - x_{n-2}) = 0$, 证明: $\lim_{n\to\infty}\frac{(x_n - x_{n-1})}{n} = 0$.

3. 设 $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, x \neq 0 \\ f'(0), x = 0 \end{cases}$, $f(0) = 0, f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上存在二阶导数, 问 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是否存在连续导数, 存在请证明, 不存在请说明理由.

4. 设 $f(x): \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ 是任一函数, $x_0 \in \mathbf{I}$, 证明: $f(x)$ 在 x_0 处可导的充要条件是: 存在一个函数 $g(x): \mathbf{I} \to \mathbf{R}$, 使:

(1)$f(x) - f(x_0) = g(x)(x - x_0), \forall x \in I$

(2)$g(x)$ 在 x_0 处连续且 $f'(x_0) = g(x_0)$

5. 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某领域内有连续一阶导数, 且 $f'(0) = 0$, $f''(0)$ 存在, 求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(\ln(1+x))}{x^3}$

6. 求最小正数 α，使得：$(1 + \dfrac{1}{x})^{x+\alpha} > \mathrm{e}(x > 0)$.

CHAPTER 16

2017 年转专业考试真题参考答案

1 解答题

1. **Proof**. 记数列 (x_n) 满足

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \tfrac{1}{2}, \quad x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n} \quad (n \geq 1).$$

若极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$ 存在，则令 $n \to \infty$ 得

$$L = \frac{1}{1+L} \quad \Longrightarrow \quad L^2 + L - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad L = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

下面证明极限存在且等于上述 L. 考虑

$$\left|x_{n+1} - L\right| = \left|\frac{1}{1+x_n} - \frac{1}{1+L}\right| = \frac{\left|x_n - L\right|}{(1+x_n)(1+L)}.$$

由于对所有 n 有 $x_n > 0$ 且

$$1 + L = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1,$$

故

$$\left|x_{n+1} - L\right| < \frac{\left|x_n - L\right|}{1+L} = L\left|x_n - L\right|,$$

又 $0 < L < 1$，递推便得

$$\left|x_n - L\right| < L^{n-1}\left|x_1 - L\right| \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).$$

因此数列 (x_n) 收敛，且

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

2. **Proof.** 设 $a_n = x_n - x_{n-1}$，则条件可以转化为 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + a_{n-1}) = 0$，即证 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = 0$.
$\forall \varepsilon > 0$，由极限的定义可知 $\exists N_1 \in \mathbf{N}^*$，当 $n > N_1$ 时，$|a_n + a_{n-1}| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
对 $n > N_1$，由 $a_n = (a_n + a_{n-1}) - a_{n-1}$，两边取绝对值有

$$|a_n| \le |a_n + a_{n-1}| + |a_{n-1}| < \frac{\varepsilon}{2} + |a_{n-1}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + |a_{n-2}| < \cdots < (n - N_1) \cdot \frac{\epsilon}{2} + |a_{N_1}|.$$

两边同除 n,

$$\frac{|a_n|}{n} < \frac{n - N_1}{n} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|a_{N_1}|}{n}.$$

由于 $n \to \infty$ 时，$\dfrac{n-N_1}{n} \to 1$，故存在 N_2，当 $n > N_2$ 时，$\dfrac{n-N_1}{n} < 1$；同理，$\dfrac{|a_{N_1}|}{n} \to 0$，所以存在 N_3，当 $n > N_3$ 时，$\dfrac{|a_{N_1}|}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

取 $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$，则当 $n > N$ 时，有 $\dfrac{|a_n|}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. 因此，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = 0$，此即

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0.$$

(本题亦可用 Stolz–Cesàro 公式证明.)

3. **Proof.** 因为 $f \in C^2(\mathbb{R})$ 且 $f(0) = 0$，我们分两步考察 $g(x)$ 的导数并验证其连续性.

对于 $x \neq 0$ 的情形, $g(x)$ 在 $x \neq 0$ 上连续是显然的.

对于在 $x = 0$ 处的可导性与连续性，首先计算 $g'(0)$：

$$g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{f(x)}{x} - f'(0)}{x}.$$

利用 f 在 0 点的二阶 Taylor 展开

$$f(x) = f'(0)x + \frac{f''(0)}{2} x^2 + o(x^2),$$

则

$$\frac{f(x)}{x} = f'(0) + \frac{f''(0)}{2} x + o(x),$$

因此

$$\frac{\frac{f(x)}{x} - f'(0)}{x} = \frac{\frac{f''(0)}{2} x + o(x)}{x} = \frac{f''(0)}{2} + o(1) \longrightarrow \frac{f''(0)}{2}.$$

故

$$g'(0) = \frac{f''(0)}{2}.$$

接着验证 $\lim\limits_{x\to 0} g'(x) = g'(0)$. 当 $x \neq 0$ 时

$$g'(x) = \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2},$$

将 f 的 Taylor 展开代入分子:

$$x\big(f'(0) + f''(0)x + o(x)\big) - \Big(f'(0)x + \frac{f''(0)}{2} x^2 + o(x^2)\Big) = \frac{f''(0)}{2} x^2 + o(x^2).$$

故

$$g'(x)=\frac{\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}=\frac{f''(0)}{2}+o(1)\longrightarrow\frac{f''(0)}{2}=g'(0).$$

综上，$g'(x)$ 在全体 $\mathbb{R}$ 上存在且在 $x=0$ 处与左右极限相合，所以 $g\in C^1(\mathbb{R})$.

4. **Proof** 答案是肯定的.

必要性: 假设 f 在 x_0 处可导，记 $f'(x_0)=A$. 定义

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & x\neq x_0,\\ A, & x=x_0.\end{cases}$$

则对一切 $x\in I$ 都有

$$f(x)-f(x_0)=g(x)\,(x-x_0),$$

即满足 (1). 又

$$\lim_{x\to x_0}g(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)=A=g(x_0),$$

故 g 在 x_0 处连续，且 $g(x_0)=f'(x_0)$，满足 (2).

充分性：反过来，若存在满足 (1)(2) 的函数 g，则

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=g(x)\quad(x\neq x_0),$$

两端令 $x\to x_0$，由 g 在 x_0 连续得

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}g(x)=g(x_0).$$

因此 f 在 x_0 处可导，且

$$f'(x_0)=g(x_0).$$

这就完成了充要性证明.

5. **Solution.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f\big(\ln(1+x)\big)}{x^3}=\dfrac{1}{2}f''(0).$

由一阶微分中值定理，存在 t 介于 $\ln(1+x)$ 与 x 之间，使得

$$f(x)-f\big(\ln(1+x)\big)=f'(t)\big(x-\ln(1+x)\big).$$

又对 x 作泰勒展开：

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$

$$x-\ln(1+x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$

由于 $f'(0)=0$ 且 $f''(0)$ 存在，对 $t\to 0$ 亦有

$$f'(t)=f'(0)+f''(0)\,t+o(t)=f''(0)\,t+o(t).$$

因此

$$\begin{aligned} f(x)-f\big(\ln(1+x)\big) &= \big(f''(0)\,t+o(t)\big)\Big(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\Big) \\ &= \frac{f''(0)\,t}{2}\,x^2+o(x^3). \end{aligned}$$

又由于 t 介于 $\ln(1+x)$ 与 x 之间，故 $\lim\limits_{x\to 0} t/x=1$. 于是

$$\frac{f(x)-f\big(\ln(1+x)\big)}{x^3}=\frac{f''(0)\,t}{2}\,\frac{x^2}{x^3}+o(1)\longrightarrow \frac{1}{2}\,f''(0).$$

6. **Solution** $\frac{1}{2}$.

两边取对数，原不等式等价于

$$(x+\alpha)\ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big)>1 \quad\Longleftrightarrow\quad \alpha>\frac{1}{\ln\big(1+\frac{1}{x}\big)}-x.$$

令

$$t=\frac{1}{x}>0,\quad f(t)=\frac{1}{\ln(1+t)}-\frac{1}{t}.$$

则条件化为 $\alpha>f(t)$ 对所有 $t>0$ 都成立，故

$$\alpha\geq\sup_{t>0}f(t).$$

计算

$$f'(t)=\frac{-\frac{1}{1+t}}{\big[\ln(1+t)\big]^2}+\frac{1}{t^2}=\frac{-\frac{t^2}{1+t}+[\ln(1+t)]^2}{t^2[\ln(1+t)]^2}.$$

令 $g(t)=-\dfrac{t^2}{1+t}+[\ln(1+t)]^2$，则

$$g'(t)=-\frac{2t(1+t)-t^2}{(1+t)^2}+\frac{2\ln(1+t)}{1+t}=\frac{2}{1+t}\left[\ln(1+t)-\frac{t^2+2t}{2(1+t)}\right].$$

令 $h(t)=\ln(1+t)-\dfrac{t^2+2t}{2(1+t)}$，则

$$h'(t)=\frac{1}{t+1}-\frac{(2t+2)(t+1)-(t^2+2t)}{2(t+1)^2}=-\frac{t^2}{2(t+1)^2}.$$

所以 $h'(t)<0$，$h(t)<h(0)=0$，则 $g'(t)<0$，$g(t)<g(0)=0$，故 $f'(t)<0$，f 在 $(0,+\infty)$ 上单调减少. 因此

$$\begin{aligned} \sup_{t>0}f(t)=\lim_{t\to0^+}f(t) &= \lim_{t\to0^+}\Big(\frac{1}{\ln(1+t)}-\frac{1}{t}\Big) \\ &= \lim_{t\to0^+}\frac{t-\ln(1+t)}{t\ln(1+t)} \\ &= \lim_{t\to0^+}\frac{t-(t-\frac{t^2}{2}+o(t^2))}{t^2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

综上，对任意 $x>0$ 不等式 $(1+\dfrac{1}{x})^{x+\alpha}>\mathrm{e}$ 当且仅当 $\alpha\geq\dfrac{1}{2}$.

因此所求最小正数为 $\dfrac{1}{2}$.

CHAPTER 17

2015 年转专业考试真题

1 解答题

1. 一道错题.
2. 用三种方法计算数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n$.

3. 设 $n\in N^*$, $\quad f(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n\left(x^2-1\right)^n}{\mathrm{d}x^n}$, 计算 $f(1)$、$f(-1)$.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导函数 $f'(x)$, 对 (a,b) 内任意 α, 是否可找到 $x_1, x_2\,(x_1<\alpha<x_2)$, 使得 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\alpha)$ 成立. 若成立请证明，若不成立请举出反例.

5. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某领域内有连续一阶导数，且 $f'(0)=0, f''(0)$ 存在，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}$.

6. 计算不定积分: $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}\mathrm{d}x$.

7. 计算不定积分: $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x$.

8. 设 $f_n(x)=\cos x+\cos^2 x+\cdots+\cos^n x$, 求证:
(1) 对任意自然数 n, 方程 $f_n(x)=1$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{3})$ 内有唯一根.
(2) 设 $x_n\in[0,\dfrac{\pi}{3})$ 是 $f_n(x)=1$ 的根, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{\pi}{3}$.

CHAPTER 18

2015 年转专业考试真题参考答案

1 解答题

2. **Solution.** e.

方法一：对数与泰勒展开

令

$$a_n=\Big(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\Big)^n,\quad \ln a_n=n\ln\Big(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\Big).$$

对 $\ln(1+x)$ 作泰勒展开（$x=\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\to 0$）：

$$\ln\Big(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\Big)=\Big(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\Big)-\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\Big)^2+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

于是

$$\ln a_n=n\Big(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\Big)-\frac{1}{2}n\Big(\frac{1}{n^2}+2\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}\Big)+o\Big(\frac{1}{n}\Big)=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n}+O(\tfrac{1}{n^2})\Big)+o(1)\to 1.$$

故 $a_n=\exp(\ln a_n)\to e$.

方法二：夹挤准则

对于充分大的 n，有

$$\frac{1}{n}<\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n-1},$$

故

$$\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n<\Big(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\Big)^n<\Big(1+\frac{1}{n-1}\Big)^n.$$

当 $n\to\infty$ 时，

$$\Big(1+\tfrac{1}{n}\Big)^n\to e,\quad \Big(1+\tfrac{1}{n-1}\Big)^n=\Big(1+\tfrac{1}{n-1}\Big)^{n-1}\Big(1+\tfrac{1}{n-1}\Big)\to e\cdot 1=e.$$

由夹挤准则得极限为 e.

方法三：作指数基底

设

$$x_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2},\quad n=\frac{1+\frac{1}{n}}{x_n},$$

则

$$\Big(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\Big)^n=(1+x_n)^{\frac{1+\frac{1}{n}}{x_n}}=\Big[(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}\Big]^{1+\frac{1}{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}e^{1+0}=e.$$

3. **Solution.** 记

$$u(x) = (x-1)^n, \qquad v(x) = (x+1)^n,$$

则

$$(x^2-1)^n = u(x)v(x).$$

由 Leibniz 公式

$$\frac{d^n}{dx^n}[u(x)v(x)] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x)\, v^{(n-k)}(x).$$

注意到

$$u^{(k)}(1) = \begin{cases} 0, & k < n, \\ n!, & k = n, \end{cases} \qquad v^{(m)}(1) = (2)^{\,n} \quad (m = 0, \ldots, n),$$

所以在 $x = 1$ 处上述求和仅 $k = n$ 一项不为零:

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\Big|_{x=1} = \binom{n}{n} u^{(n)}(1)\, v^{(0)}(1) = n!\, 2^n.$$

由此

$$f(1) = \frac{1}{2^n\, n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\Big|_{x=1} = 1.$$

类似地，在 $x = -1$ 处

$$u^{(k)}(-1) = \begin{cases} 0, & k < n, \\ (-1)^n\, n!, & k = n, \end{cases} \qquad v^{(m)}(-1) = 0\, (m < n),\ v^{(n)}(-1) = n!,$$

故

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\Big|_{x=-1} = \binom{n}{0} u^{(0)}(-1)\, v^{(n)}(-1) + \binom{n}{n} u^{(n)}(-1)\, v^{(0)}(-1) = (-1)^n\, n!\, 2^n.$$

于是

$$f(-1) = \frac{1}{2^n\, n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\Big|_{x=-1} = (-1)^n.$$

4. **Solution.** 不成立. 下面给出反例.

反例 1. 令

$$f(x) = x^3, \qquad [a,b] = [-1,1], \quad \alpha = 0.$$

则

$$f'(x) = 3x^2, \quad f'(0) = 0.$$

而对任意 $x_1 < 0 < x_2$,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^3 - x_1^3}{x_2 - x_1} = x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2 > 0$$

不可能等于 $f'(0) = 0$. 故不存在 $x_1 < 0 < x_2$ 使得 $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(0)$.

反例 2. 令

$$f(x) = \sin x, \qquad [a,b] = [-\pi, \pi], \quad \alpha = 0.$$

则

$$f'(x) = \cos x, \quad f'(0) = 1.$$

而对任意 $x_1 < 0 < x_2$,

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{\sin x_2 - \sin x_1}{x_2-x_1} = \frac{2\cos\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)\sin\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)}{x_2-x_1} < \frac{2\cdot 1\cdot \frac{x_2-x_1}{2}}{x_2-x_1} = 1,$$

且当 $x_1 \to 0^-$ 或 $x_2 \to 0^+$ 时，上式仍小于 1. 因此也无法取到 $f'(0)=1$.

5. **Solution.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f\big(\ln(1+x)\big)}{x^3} = \dfrac{1}{2} f''(0)$.

由一阶微分中值定理，存在 t 介于 $\ln(1+x)$ 与 x 之间，使得

$$f(x)-f\big(\ln(1+x)\big) = f'(t)\big(x-\ln(1+x)\big).$$

又对 x 作泰勒展开:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

$$x - \ln(1+x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

由于 $f'(0)=0$ 且 $f''(0)$ 存在，对 $t\to 0$ 亦有

$$f'(t) = f'(0) + f''(0)\,t + o(t) = f''(0)\,t + o(t).$$

因此

$$\begin{aligned} f(x)-f\big(\ln(1+x)\big) &= \big(f''(0)\,t + o(t)\big)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \\ &= \frac{f''(0)\,t}{2}\,x^2 + o(x^3). \end{aligned}$$

又由于 t 介于 $\ln(1+x)$ 与 x 之间，故 $\lim\limits_{x\to 0} t/x = 1$. 于是

$$\frac{f(x)-f\big(\ln(1+x)\big)}{x^3} = \frac{f''(0)\,t}{2}\,\frac{x^2}{x^3} + o(1) \longrightarrow \frac{1}{2} f''(0).$$

6. **Solution.** 令

$$t = x - \frac{1}{x}, \quad dt = \left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx.$$

注意到

$$x^4 - x^2 + 1 = x^2\left((x-\tfrac{1}{x})^2+1\right) = x^2(t^2+1),$$

于是

$$\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}\,dx = \frac{1+\frac{1}{x^2}}{t^2+1}\,dx = \frac{dt}{t^2+1}.$$

故

$$\int \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}\,dx = \int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan t + C = \arctan\!\left(x-\tfrac{1}{x}\right) + C.$$

7. **Solution.** 令

$$t = \sqrt{e^x-1}, \quad e^x = t^2+1, \quad x = \ln(t^2+1), \quad dt = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}\,dx = \frac{t}{2}\,dx \implies e^x\,dx = 2t\,dt.$$

则

$$\int \frac{x\,e^x}{\sqrt{e^x-1}}\,dx = \int \frac{x\,(2t\,dt)}{t} = 2\int x\,dt = 2\int \ln(t^2+1)\,dt.$$

对 $\int \ln(t^2+1)\,dt$ 分部积分，

$$\int \ln(t^2+1)\,dt = t\ln(t^2+1) - \int \frac{2t^2}{t^2+1}\,dt = t\ln(t^2+1) - 2\int\Big(1-\frac{1}{t^2+1}\Big)dt = t\ln(t^2+1) - 2t + 2\arctan t + C.$$

因此

$$2\int \ln(t^2+1)\,dt = 2t\ln(t^2+1) - 4t + 4\arctan t + C.$$

回代 $t=\sqrt{e^x-1}$，得

$$\int \frac{x\,e^x}{\sqrt{e^x-1}}\,dx = 2\sqrt{e^x-1}\,\ln\big(e^x\big) - 4\sqrt{e^x-1} + 4\arctan\sqrt{e^x-1} + C = 2x\sqrt{e^x-1} - 4\sqrt{e^x-1} + 4\arctan\sqrt{e^x-1} + C.$$

8. **Proof**.

(1) 对任意 $n\in\mathbb{N}$，计算

$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\,\cos^{k-1}x\,(-\sin x) = -\sin x\sum_{k=1}^{n} k\cos^{k-1}x < 0, \quad x\in\big(0,\tfrac{\pi}{3}\big).$$

故 f_n 在 $[0,\dfrac{\pi}{3}]$ 上严格单调递减. 又

$$f_n(0) = n > 1, \qquad f_n\big(\tfrac{\pi}{3}\big) = \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{2}\Big)^k = 1-\Big(\frac{1}{2}\Big)^n < 1.$$

由介值定理可知方程 $f_n(x)=1$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{3})$ 内恰有一根，且因严格单调，此根唯一.

(2) 利用等比数列求和，

$$f_n(x) = \cos x + \cos^2 x + \cdots + \cos^n x = \frac{\cos x\big(1-\cos^n x\big)}{1-\cos x}.$$

令 $x=x_n$ 满足 $f_n(x_n)=1$，则

$$\cos x_n\big(1-\cos^n x_n\big) = 1-\cos x_n \quad\Longrightarrow\quad \cos^{n+1}x_n = 2\cos x_n - 1.$$

由于 $x_n\in[0,\dfrac{\pi}{3})$，有 $1/2<\cos x_n<1$，故当 $n\to\infty$ 时

$$\cos^{n+1}x_n \to 0,$$

从而 $2\cos x_n - 1\to 0 \Rightarrow \cos x_n\to\frac{1}{2} \Rightarrow x_n\to\frac{\pi}{3}$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{\pi}{3}$.

CHAPTER 19

2014 年转专业考试真题

1 解答题

1. 证明: 若对 $\forall x, y \in (-\infty, +\infty)$，有 $|f(x) - f(y)| = |x - y|$，且 $f(0) = 0$，则 $f(x + y) = f(x) + f(y)$，$\forall x, y \in (-\infty, +\infty)$.

2. 用三种方法计算数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

3. 设$n \in N^*$，　$f(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{\mathrm{d}^n\left(x^2-1\right)^n}{\mathrm{d}x^n}$, 计算$f(1)$、$f(-1)$.

4. 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内有连续的一阶导数, 且 $f'(0) = 0$, $f''(0)$ 存在, 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x) - f(\ln(1+x))}{x^3}$.

5. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有定义, 对任意 $x,y\in(0,+\infty)$ 有 $f(xy)=f(x)f(y)$ 且 $f'(1)=n>0$, 求 $f(x)$.

6. 计算不定积分: $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}\mathrm{d}x$

7. 计算不定积分: $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x$

8. 设 $\mu\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负, 且 $f''(x)\leq 0, x\in[0,1]$, 证明: $f(t)\geqslant\mu f(s),\forall t\in[\mu,1-\mu],\forall s\in[0,1]$.

CHAPTER 20

2014 年转专业考试真题参考答案

1 解答题

1. **Solution.**

令 $y=0$，由题意得

$$|f(x)-f(0)|=|x-0| \quad \Longrightarrow \quad |f(x)|=|x|,\ \forall x.$$

又由保距函数必为单射，故对任意 x，必有

$$f(x)=x \quad 或 \quad f(x)=-x.$$

下取 $x=1$，分两种情况讨论：

(i) 若 $f(1)=1$. 设存在 $x_0>0$ 使 $f(x_0)=-x_0$，则

$$|f(x_0)-f(1)|=|(-x_0)-1|=x_0+1,$$

但保距性要求

$$|f(x_0)-f(1)|=|x_0-1|,$$

即 $x_0+1=|x_0-1|$. 若 $x_0\geq 1$，$x_0+1=x_0-1$，显然矛盾；若 $0<x_0<1$，则 $x_0+1=1-x_0$ 解得 $x_0=0$，矛盾. 故对所有 $x>0$ 均有 $f(x)=x$. 由 $|f(-x)|=|-x|$ 及单射性，又可推出 $f(-x)=-x$. 于是

$$f(x)=x, \quad \forall x.$$

(ii) 若 $f(1)=-1$. 类似论证可得对所有 $x>0$，必 $f(x)=-x$，并进一步推出 $f(-x)=x$，即

$$f(x)=-x, \quad \forall x.$$

于是在两种情形下，都有

$$f(x+y)=\pm(x+y)=\pm x\pm y=f(x)+f(y),$$

证毕.

2. **Solution.** e.

方法一：对数与泰勒展开

令

$$a_n = \Big(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\Big)^n, \quad \ln a_n = n\ln\Big(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\Big).$$

对 $\ln(1+x)$ 作泰勒展开（$x=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\to 0$）：

$$\ln\Big(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\Big) = \Big(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\Big) - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\Big)^2 + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

于是

$$\ln a_n = n\Big(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\Big) - \frac{1}{2}n\Big(\frac{1}{n^2}+2\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}\Big) + o\Big(\frac{1}{n}\Big) = 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n}+O(\tfrac{1}{n^2})\Big)+o(1)\to 1.$$

故 $a_n=\exp(\ln a_n)\to e$.

方法二：夹挤准则

对于充分大的 n，有

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{n}+\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1},$$

故

$$\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n < \Big(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\Big)^n < \Big(1+\frac{1}{n-1}\Big)^n.$$

当 $n\to\infty$ 时，

$$\Big(1+\tfrac{1}{n}\Big)^n \to e, \quad \Big(1+\tfrac{1}{n-1}\Big)^n = \Big(1+\tfrac{1}{n-1}\Big)^{n-1}\Big(1+\tfrac{1}{n-1}\Big)\to e\cdot 1 = e.$$

由夹挤准则得极限为 e.

方法三：作指数基底

设

$$x_n = \frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}, \quad n = \frac{1+\frac{1}{n}}{x_n},$$

则

$$\Big(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\Big)^n = (1+x_n)^{\frac{1+\frac{1}{n}}{x_n}} = \Big[(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}\Big]^{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{1+0}=e.$$

3. **Solution.** 记

$$u(x)=(x-1)^n, \qquad v(x)=(x+1)^n,$$

则

$$(x^2-1)^n = u(x)v(x).$$

由 Leibniz 公式

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[u(x)v(x)] = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} u^{(k)}(x)\, v^{(n-k)}(x).$$

注意到

$$u^{(k)}(1) = \begin{cases} 0, & k<n, \\ n!, & k=n, \end{cases} \qquad v^{(m)}(1) = (2)^n \quad (m=0,\dots,n),$$

所以在 $x=1$ 处上述求和仅 $k=n$ 一项不为零：

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n\Big|_{x=1} = \binom{n}{n} u^{(n)}(1)\, v^{(0)}(1) = n!\,2^n.$$

由此

$$f(1) = \frac{1}{2^n\, n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n\Big|_{x=1} = 1.$$

类似地，在 $x=-1$ 处

$$u^{(k)}(-1)=\begin{cases}0, & k<n,\\ (-1)^n\, n!, & k=n,\end{cases}\qquad v^{(m)}(-1)=0\,(m<n),\ v^{(n)}(-1)=n!,$$

故

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n\Big|_{x=-1}=\binom{n}{0}u^{(0)}(-1)\,v^{(n)}(-1)+\binom{n}{n}u^{(n)}(-1)\,v^{(0)}(-1)=(-1)^n\,n!\,2^n.$$

于是

$$f(-1)=\frac{1}{2^n\,n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n\Big|_{x=-1}=(-1)^n.$$

4. **Solution.** $\dfrac{f''(0)}{2}$.

利用 Taylor 展开：

$$f(x)=f(0)+f'(0)\,x+\frac{f''(0)}{2}\,x^2+o(x^2),\qquad \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^4).$$

因此

$$\begin{aligned}f(x)-f\big(\ln(1+x)\big)&=f'(0)\Big(x-\ln(1+x)\Big)+\frac{f''(0)}{2}\Big(x^2-\big(\ln(1+x)\big)^2\Big)+o(x^2)\\&=\frac{f''(0)}{2}\Big[x^2-\big(x-\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^3}{3}\big)^2\Big]+o(x^2)\\&=\frac{f''(0)}{2}\,x^3+o(x^3).\end{aligned}$$

故

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}=\frac{f''(0)}{2}.$$

5. **Solution.** $f(x)=x^n$.

由 $f(xy)=f(x)f(y)$，对任意 $x>0$，考察 f 在 x 处的导数：

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f\big(x(1+\frac{\Delta x}{x})\big)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x)\,f(1+\frac{\Delta x}{x})-f(x)}{\Delta x}.$$

提取 $f(x)$ 得

$$f'(x)=f(x)\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(1+\frac{\Delta x}{x})-1}{\Delta x}.$$

令 $u=\dfrac{\Delta x}{x}$，则 $\Delta x=xu$，当 $\Delta x\to0$ 时 $u\to0$，所以上式变为

$$f'(x)=f(x)\lim_{u\to0}\frac{f(1+u)-1}{xu}=\frac{f(x)}{x}\lim_{u\to0}\frac{f(1+u)-1}{u}=\frac{f(x)}{x}f'(1)=\frac{n\,f(x)}{x}.$$

于是 f 满足常微分方程

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{n}{x},$$

对两边积分得

$$\ln f(x)=n\ln x+C.$$

由 $f(1)=1$ 可知 $C=0$，故

$$f(x)=e^{n\ln x}=x^n,\quad x>0.$$

6. **Solution.** 令

$$t=x-\frac{1}{x},\quad \mathrm{d}t=\Big(1+\frac{1}{x^2}\Big)\mathrm{d}x.$$

注意到

$$x^4 - x^2 + 1 = x^2\Big((x-\tfrac{1}{x})^2+1\Big) = x^2(t^2+1),$$

于是

$$\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1+\frac{1}{x^2}}{t^2+1}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}.$$

故

$$\int \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \arctan t + C = \arctan\Big(x-\frac{1}{x}\Big) + C.$$

7. **Solution.** 令

$$t=\sqrt{\mathrm{e}^x-1},\quad \mathrm{e}^x = t^2+1,\quad x=\ln(t^2+1),\quad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^x}{2\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x = \frac{t}{2}\mathrm{d}x \implies \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t.$$

则

$$\int \frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x = \int \frac{x\,(2t\mathrm{d}t)}{t} = 2\int x\mathrm{d}t = 2\int \ln(t^2+1)\mathrm{d}t.$$

对 $\displaystyle\int \ln(t^2+1)\mathrm{d}t$ 分部积分，

$$\int \ln(t^2+1)\mathrm{d}t = t\ln(t^2+1) - \int \frac{2t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t = t\ln(t^2+1) - 2\int\Big(1-\frac{1}{t^2+1}\Big)\mathrm{d}t = t\ln(t^2+1) - 2t + 2\arctan t + C.$$

因此

$$2\int \ln(t^2+1)\mathrm{d}t = 2t\ln(t^2+1) - 4t + 4\arctan t + C.$$

回代 $t=\sqrt{e^x-1}$，得

$$\int \frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x = 2\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\ln(\mathrm{e}^x) - 4\sqrt{\mathrm{e}^x-1} + 4\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1} + C = 2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1} - 4\sqrt{\mathrm{e}^x-1} + 4\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1} + C.$$

8. **Proof.**

固定任意 $t\in[\mu,1-\mu]$ 与 $s\in[0,1]$，令

$$m = \frac{t-\mu s}{1-\mu}.$$

由于 $\mu\in(0,\frac{1}{2})$ 且 $t\in[\mu,1-\mu]$，易验证 $m\in[0,1]$. 又 f 在 $[0,1]$ 上非负且 $f''(x)\le 0$，故 f 为凹函数. 由凹函数的定义，对于任何 $\lambda\in(0,1)$ 和 $x_1,x_2\in[0,1]$ 有

$$f\big(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\big) \ge \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

取 $\lambda=\mu$、$x_1=s$、$x_2=m$，且注意到

$$\mu s + (1-\mu)m = \mu s + (1-\mu)\frac{t-\mu s}{1-\mu} = t,$$

于是

$$f(t) = f\big(\mu s+(1-\mu)m\big) \ge \mu f(s) + (1-\mu)f(m) \ge \mu f(s),$$

因为 $f(m)\ge 0$. 这正是所要证明的 $f(t)\ge \mu f(s)$.

CHAPTER 21

2013 年转专业考试真题

1 解答题

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$.

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.

3. 设 $a_n>0, b_n>0, \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}})>0$, 证明：极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 存在.

4. 证明：若函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，存在数列 $\{x_n\}, x_n\in[a,b]$，$g(x_n)=f(x_{n+1}), n=1,2\cdots$, 则 $f(x)=g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有解.

5. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\begin{cases} x=\ln\cos t \\ y=\sin t-t\cos t \end{cases}$ 确定，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}$.

6. 求最小正数 α，使得：$(1+\dfrac{1}{x})^{x+\alpha}>e(x>0)$.

7. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0,f(1)=1$, 又 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 是满足 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$ 的正数. 证明：在 $(0,1)$ 中存在互不相同的数 $\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n$满足 $\dfrac{\alpha_1}{f'(\beta_1)}+\dfrac{\alpha_2}{f'(\beta_2)}+\cdots+\dfrac{\alpha_n}{f'(\beta_n)}=1$.

CHAPTER 22

2013 年转专业考试真题参考答案

1 解答题

1. **Solution**. 1.

利用 $\sin^2\theta = \sin^2(\theta - n\pi)$ 得

$$\sin^2\big(\pi\sqrt{n^2+n}\big) = \sin^2\big(\pi\sqrt{n^2+n} - n\pi\big) = \sin^2\Big(\pi(\sqrt{n^2+n} - n)\Big).$$

又

$$\pi(\sqrt{n^2+n} - n) = \pi\frac{(n^2+n)-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\sin^2\big(\pi\sqrt{n^2+n}\big) = \lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \sin^2\frac{\pi}{2} = 1.$$

2. **Solution.** $e^{-\frac{1}{2}}$.

利用泰勒公式 $\cos t = 1 - \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)\ (t\to 0)$，令 $t = \sqrt{x}$，得

$$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x).$$

故

$$\begin{aligned}\ln\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}} &= \frac{1}{x}\ln\big(\cos\sqrt{x}\big) = \frac{1}{x}\ln\Big(1 - \frac{x}{2} + o(x)\Big)\\ &= \frac{1}{x}\Big(-\frac{x}{2} + o(x)\Big) = -\frac{1}{2} + o(1).\end{aligned}$$

两边取指数得

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

3. **Proof.** 由条件

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n} - \frac{1}{b_{n+1}}\Big) = L > 0,$$

取常数 δ 满足 $0 < \delta < \dfrac{L}{2}$，则存在 $N\in\mathbb{N}$，当 $n \geq N$ 时有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} > \delta \quad\Longrightarrow\quad \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} > \delta\, a_{n+1},$$

即

$$a_{n+1} < \frac{1}{\delta}\Big(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\Big).$$

对 $n = N, N+1, \ldots, m$ 累加，得

$$\sum_{n=N}^{m} a_{n+1} < \frac{1}{\delta}\sum_{n=N}^{m}\Big(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\Big) = \frac{1}{\delta}\Big(\frac{a_N}{b_N} - \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}\Big) \le \frac{a_N}{\delta\, b_N}.$$

因此 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 的部分和有上界，故 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛.

4. **Proof.** 反证法，设反命题成立，即

$$f(x) \neq g(x), \quad \forall x \in [a,b].$$

令

$$F(x) = f(x) - g(x).$$

则 F 在 $[a,b]$ 上连续且恒不为零，要么 $F(x) > 0$，要么 $F(x) < 0$. 不妨设

$$F(x) > 0, \quad \forall x \in [a,b].$$

由连续性和紧性，存在

$$m = \min_{x\in[a,b]} F(x) > 0.$$

由题意，数列 $\{x_n\} \subset [a,b]$ 满足

$$g(x_n) = f(x_{n+1}), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

故

$$F(x_n) = f(x_n) - g(x_n) = f(x_n) - f(x_{n+1}).$$

两边累加得

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_{n+1}) &= \sum_{k=1}^{n}\big[f(x_k) - f(x_{k+1})\big] = \sum_{k=1}^{n} F(x_k) \\ &\ge \sum_{k=1}^{n} m = nm. \end{aligned}$$

令 $n \to \infty$，则

$$f(x_1) - f(x_{n+1}) \ge nm \to +\infty \quad \Longrightarrow \quad f(x_{n+1}) \to -\infty,$$

这与连续函数 f 在紧区间 $[a,b]$ 上必有界的事实矛盾. 故假设不成立，必有一点 $c \in [a,b]$ 使

$$F(c) = 0, \quad \text{i.e.} \quad f(c) = g(c).$$

证毕.

5. **Solution.** $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} == t\sin t, \left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\pi\sqrt{2}}{8}.$

利用链式法则，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ln\cos t) = -\tan t, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin t - t\cos t) = \cos t - \big(\cos t - t\sin t\big) = t\sin t.$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=-\frac{t\sin t}{\tan t}=-t\cos t.$$

再对 t 求导并除以 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 得二阶导数:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{1}{-\tan t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-t\cos t)=\frac{-\cos t+t\sin t}{-\tan t}=\frac{\cos^2 t}{\sin t}-t\cos t.$$

故在 $t=\frac{\pi}{4}$ 处,

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi\sqrt{2}}{8},$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{\cos^2\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}}-\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}-\frac{\pi\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi\sqrt{2}}{8}.$$

6. **Solution** $\frac{1}{2}$.

两边取对数，原不等式等价于

$$(x+\alpha)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>1 \quad\Longleftrightarrow\quad \alpha>\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x.$$

令

$$t=\frac{1}{x}>0,\quad f(t)=\frac{1}{\ln(1+t)}-\frac{1}{t}.$$

则条件化为 $\alpha>f(t)$ 对所有 $t>0$ 都成立，故

$$\alpha\geq\sup_{t>0}f(t).$$

计算

$$f'(t)=\frac{-\frac{1}{1+t}}{\left[\ln(1+t)\right]^2}+\frac{1}{t^2}=\frac{-\frac{t^2}{1+t}+[\ln(1+t)]^2}{t^2[\ln(1+t)]^2}.$$

令 $g(t)=-\dfrac{t^2}{1+t}+[\ln(1+t)]^2$，则

$$g'(t)=-\frac{2t(1+t)-t^2}{(1+t)^2}+\frac{2\ln(1+t)}{1+t}=\frac{2}{1+t}\left[\ln(1+t)-\frac{t^2+2t}{2(1+t)}\right].$$

令 $h(t)=\ln(1+t)-\dfrac{t^2+2t}{2(1+t)}$，则

$$h'(t)=\frac{1}{t+1}-\frac{(2t+2)(t+1)-(t^2+2t)}{2(t+1)^2}=-\frac{t^2}{2(t+1)^2}.$$

所以 $h'(t)<0$，$h(t)<h(0)=0$，则 $g'(t)<0$，$g(t)<g(0)=0$，故 $f'(t)<0$，f 在 $(0,+\infty)$ 上单调减少. 因此

$$\begin{aligned}\sup_{t>0}f(t)=\lim_{t\to0^+}f(t)&=\lim_{t\to0^+}\left(\frac{1}{\ln(1+t)}-\frac{1}{t}\right)\\&=\lim_{t\to0^+}\frac{t-\ln(1+t)}{t\ln(1+t)}\\&=\lim_{t\to0^+}\frac{t-(t-\frac{t^2}{2}+o(t^2))}{t^2}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

综上，对任意 $x>0$ 不等式 $(1+\frac{1}{x})^{x+\alpha}>\mathrm{e}$ 当且仅当 $\alpha\geq\frac{1}{2}$.

因此所求最小正数为 $\frac{1}{2}$.

7. **Proof.**

由 f 在 $[0,1]$ 上连续且 $f(0)=0$, $f(1)=1$，以及 $\alpha_i>0$, $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$，对每个 $k=1,2,\ldots,n-1$，由介值定理可取

$$x_k\in(0,1)\quad\text{使得}\quad f(x_k)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i.$$

令 $x_0=0$, $x_n=1$. 则在每个区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上，应用中值定理得：存在 $\beta_i\in(x_{i-1},x_i)$ 使

$$f'(\beta_i)=\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}=\frac{\alpha_i}{x_i-x_{i-1}}.$$

因此

$$x_i-x_{i-1}=\frac{\alpha_i}{f'(\beta_i)},\qquad i=1,2,\ldots,n.$$

对 $i=1$ 到 n 累加，得

$$x_n-x_0=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{f'(\beta_i)}=1.$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{f'(\beta_i)}=1.$$

且每个 β_i 位于不同的开区间 (x_{i-1},x_i)，故互不相同. 证毕.

CHAPTER 23

2012 年转专业考试真题

1 解答题

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$.

2. 证明：对任意 $x,y\in\mathbf{R}$ 有 $|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|^2$，则对每个 $n\in N,\forall a,b\in\mathbf{R}$，有: $|f(a)-f(b)|\leqslant\dfrac{1}{n}|\,a-b\,|^2$.

3. 设 $a_n>0,b_n>0,\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}})>0$, 证明：极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 存在.

4. 求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$.

5. 设$f(x)$在$(0,+\infty)$有定义,对任意$x,y\in(0,+\infty)$有$f(xy)=f(x)f(y)$且$f'(1)=n>0$,求$f(x)$.

6. 求最小正数 α，使得：$(1+\dfrac{1}{x})^{x+\alpha}>\mathrm{e}(x>0)$

7. 计算不定积分: $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x$

8. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=0,f(1)=1$,又 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 是满足 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$ 的正数. 证明：在 $(0,1)$ 中存在互不相同的数 $\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n$满足$\dfrac{\alpha_1}{f'(\beta_1)}+\dfrac{\alpha_2}{f'(\beta_2)}+\cdots+\dfrac{\alpha_n}{f'(\beta_n)}=1$

CHAPTER 24

2012 年转专业考试真题参考答案

1 解答题

1. **Solution.** 1.

法一. 注意斯特林公式（Stirling's approximation）:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

故

$$(n!)^{\frac{1}{n^2}} = \left(\sqrt{2\pi n}\right)^{\frac{1}{n^2}}\left(\frac{n}{e}\right)^{\frac{n}{n^2}} = (2\pi n)^{\frac{1}{2n^2}}(n/e)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1\cdot 1 = 1.$$

法二. 利用夹挤定理（squeeze theorem）：对 sufficiently large n 有

$$\left(\tfrac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \le n! \le n^n,$$

两端同取 $1/n^2$ 次幂得

$$\left(\tfrac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \le (n!)^{\frac{1}{n^2}} \le n^{\frac{1}{n}},$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}(n/2)^{1/(2n)} = 1$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$，故中间项亦趋于 1.

法三. 对数法与斯托尔茨定理（Stolz–Cesàro）：令

$$a_n = (n!)^{\frac{1}{n^2}}, \quad \ln a_n = \frac{\ln(n!)}{n^2}.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n!)-\ln((n-1)!)}{n^2-(n-1)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{2n-1} = 0,$$

由斯托尔茨定理可得 $\ln a_n \to 0$，因此 $a_n = \exp(\ln a_n) \to 1$.

综上，$\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}} = 1$.

2. **Proof.** 令 $a, b \in \mathbb{R}$ 和 $n \in \mathbb{N}$. 在区间 $[a,b]$ 上等分出 n 段，设

$$x_k = a + \frac{k}{n}(b-a), \quad k = 0,1,2,\ldots,n,$$

则显然

$$x_0 = a, \quad x_n = b, \quad x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}.$$

由题设对任意 x, y 有 $|f(x)-f(y)| \le |x-y|^2$ 以及三角不等式,

$$|f(a)-f(b)| = \big|f(x_0)-f(x_n)\big| \le \sum_{k=1}^{n}\big|f(x_{k-1})-f(x_k)\big|$$
$$\le \sum_{k=1}^{n}\big|x_{k-1}-x_k\big|^2 = n\Big(\frac{|b-a|}{n}\Big)^2 = \frac{1}{n}\,|b-a|^2.$$

因此对每个 $n \in \mathbb{N}$ 以及任意 $a, b \in \mathbb{R}$,均有

$$|f(a)-f(b)| \le \frac{1}{n}\,|a-b|^2.$$

证毕.

3. **Proof.** 由条件

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\Big) = L > 0,$$

取常数 δ 满足 $0<\delta<\dfrac{L}{2}$,则存在 $N \in \mathbb{N}$,当 $n \ge N$ 时有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}} > \delta \quad \Longrightarrow \quad \frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} > \delta\, a_{n+1},$$

即

$$a_{n+1} < \frac{1}{\delta}\Big(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\Big).$$

对 $n = N, N+1, \ldots, m$ 累加,得

$$\sum_{n=N}^{m} a_{n+1} < \frac{1}{\delta}\sum_{n=N}^{m}\Big(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\Big) = \frac{1}{\delta}\Big(\frac{a_N}{b_N}-\frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}\Big) \le \frac{a_N}{\delta\, b_N}.$$

因此 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 的部分和有上界,故 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛.

4. **Solution.** $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

令

$$L = \lim_{x\to 0^+}\Big(\frac{\ln(1+x)}{x}\Big)^{\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}}.$$

取对数得

$$\ln L = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\big(\frac{\ln(1+x)}{x}\big)}{\mathrm{e}^x-1}.$$

当 $x \to 0$ 时,利用 Taylor 公式

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+o(x^2) \implies \frac{\ln(1+x)}{x} = 1-\frac{x}{2}+o(x),$$
$$\ln\Big(\frac{\ln(1+x)}{x}\Big) = \ln\big(1-\tfrac{x}{2}+o(x)\big) = -\frac{x}{2}+o(x),$$

同时

$$\mathrm{e}^x-1 = x+o(x).$$

因此

$$\ln L = \lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{x}{2}+o(x)}{x+o(x)} = -\frac{1}{2}.$$

故
$$L=\mathrm{e}^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}.$$

5. **Solution.** $f(x)=x^n$.

由 $f(xy)=f(x)f(y)$，对任意 $x>0$，考察 f 在 x 处的导数：
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\big(x(1+\frac{\Delta x}{x})\big)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)\,f(1+\frac{\Delta x}{x})-f(x)}{\Delta x}.$$
提取 $f(x)$ 得
$$f'(x)=f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\frac{\Delta x}{x})-1}{\Delta x}.$$
令 $u=\dfrac{\Delta x}{x}$，则 $\Delta x=xu$，当 $\Delta x\to 0$ 时 $u\to 0$，所以上式变为
$$f'(x)=f(x)\lim_{u\to 0}\frac{f(1+u)-1}{xu}=\frac{f(x)}{x}\lim_{u\to 0}\frac{f(1+u)-1}{u}=\frac{f(x)}{x}f'(1)=\frac{n\,f(x)}{x}.$$
于是 f 满足常微分方程
$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{n}{x},$$
对两边积分得
$$\ln f(x)=n\ln x+C.$$
由 $f(1)=1$ 可知 $C=0$，故
$$f(x)=e^{n\ln x}=x^n,\quad x>0.$$

6. **Solution** $\dfrac{1}{2}$.

两边取对数，原不等式等价于
$$(x+\alpha)\ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big)>1\quad\Longleftrightarrow\quad\alpha>\frac{1}{\ln\big(1+\frac{1}{x}\big)}-x.$$
令
$$t=\frac{1}{x}>0,\quad f(t)=\frac{1}{\ln(1+t)}-\frac{1}{t}.$$
则条件化为 $\alpha>f(t)$ 对所有 $t>0$ 都成立，故
$$\alpha\geq\sup_{t>0}f(t).$$
计算
$$f'(t)=\frac{-\frac{1}{1+t}}{\big[\ln(1+t)\big]^2}+\frac{1}{t^2}=\frac{-\frac{t^2}{1+t}+[\ln(1+t)]^2}{t^2[\ln(1+t)]^2}.$$

令 $g(t)=-\dfrac{t^2}{1+t}+[\ln(1+t)]^2$，则
$$g'(t)=-\frac{2t(1+t)-t^2}{(1+t)^2}+\frac{2\ln(1+t)}{1+t}=\frac{2}{1+t}\left[\ln(1+t)-\frac{t^2+2t}{2(1+t)}\right].$$

令 $h(t)=\ln(1+t)-\dfrac{t^2+2t}{2(1+t)}$，则
$$h'(t)=\frac{1}{t+1}-\frac{(2t+2)(t+1)-(t^2+2t)}{2(t+1)^2}=-\frac{t^2}{2(t+1)^2}.$$

所以 $h'(t)<0$，$h(t)<h(0)=0$，则 $g'(t)<0$，$g(t)<g(0)=0$，故 $f'(t)<0$，f 在 $(0,+\infty)$ 上单调减少. 因此

$$\begin{aligned}\sup_{t>0} f(t) = \lim_{t\to0^+} f(t) &= \lim_{t\to0^+}\left(\frac{1}{\ln(1+t)}-\frac{1}{t}\right)\\ &= \lim_{t\to0^+}\frac{t-\ln(1+t)}{t\ln(1+t)}\\ &= \lim_{t\to0^+}\frac{t-(t-\frac{t^2}{2}+o(t^2))}{t^2}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

综上，对任意 $x>0$ 不等式 $(1+\frac{1}{x})^{x+\alpha}>\mathrm{e}$ 当且仅当 $\alpha\geq\frac{1}{2}$.

因此所求最小正数为 $\frac{1}{2}$.

7. **Solution.**

令

$$t=\sqrt{\mathrm{e}^x-1},\quad \mathrm{e}^x=t^2+1,\quad x=\ln(t^2+1),\quad \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^x}{2\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x=\frac{t}{2}\mathrm{d}x\implies \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t.$$

则

$$\int\frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x=\int\frac{x\,(2t\mathrm{d}t)}{t}=2\int x\mathrm{d}t=2\int\ln(t^2+1)\mathrm{d}t.$$

对 $\int\ln(t^2+1)\mathrm{d}t$ 分部积分，

$$\int\ln(t^2+1)\mathrm{d}t=t\ln(t^2+1)-\int\frac{2t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t=t\ln(t^2+1)-2\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t=t\ln(t^2+1)-2t+2\arctan t+C.$$

因此

$$2\int\ln(t^2+1)\mathrm{d}t=2t\ln(t^2+1)-4t+4\arctan t+C.$$

回代 $t=\sqrt{e^x-1}$，得

$$\int\frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x=2\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\ln(\mathrm{e}^x)-4\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+4\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C=2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-4\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+4\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C.$$

8. **Proof.**

由 f 在 $[0,1]$ 上连续且 $f(0)=0$, $f(1)=1$，以及 $\alpha_i>0$, $\sum_{i=1}^n\alpha_i=1$，对每个 $k=1,2,\ldots,n-1$，由介值定理可取

$$x_k\in(0,1)\quad\text{使得}\quad f(x_k)=\sum_{i=1}^k\alpha_i.$$

令 $x_0=0$, $x_n=1$. 则在每个区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上，应用中值定理得：存在 $\beta_i\in(x_{i-1},x_i)$ 使

$$f'(\beta_i)=\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}=\frac{\alpha_i}{x_i-x_{i-1}}.$$

因此

$$x_i-x_{i-1}=\frac{\alpha_i}{f'(\beta_i)},\qquad i=1,2,\ldots,n.$$

对 $i=1$ 到 n 累加，得

$$x_n-x_0=\sum_{i=1}^n(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^n\frac{\alpha_i}{f'(\beta_i)}=1.$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{f'(\beta_i)}=1.$$

且每个 β_i 位于不同的开区间 (x_{i-1},x_i)，故互不相同. 证毕.

CHAPTER 25

2011 年转专业考试真题

1 解答题

1. 证明：对任意 $x, y \in R$ 有 $|f(x)-f(y)| \leqslant |x-y|^2$，则对每个 $n \in N, \forall a, b \in R$，有：$|f(a)-f(b)| \leqslant \dfrac{1}{n}|\ a-b\ |^2$.

2. 设$x_n=(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$，其中$|a|<1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$

4. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$f(0)=1, g(x)=\displaystyle\int_0^{\sin x} f(tx^2)dt$，求 $g'(x)$，并求 $g'(0)$.

5. 设$f(x)$在$(0,+\infty)$有定义, 对任意$x,y\in(0,+\infty)$有$f(xy)=f(x)f(y)$且$f'(1)=n>0$, 求$f(x)$.

6. 计算不定积分: $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$

7. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0, f(1)=1$, 又 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 是满足 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$ 的正数. 证明：在 $(0,1)$ 中存在互不相同的数 $\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n$ 满足 $\frac{\alpha_1}{f'(\beta_1)}+\frac{\alpha_2}{f'(\beta_2)}+\cdots+\frac{\alpha_n}{f'(\beta_n)}=1$

8. 证明: 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微, $f(0)=0, 0\le f'(x)\le 1$, 　则 $\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \ge \int_0^1 f^3(x)dx$

9. 证明: 对任意正整数 n, 有$\frac{2}{3}n\sqrt{n}<\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}<\frac{4n+3}{6}\sqrt{n}$

CHAPTER 26

2011 年转专业考试真题参考答案

1 解答题

1. **Proof.** 令 $a, b \in \mathbb{R}$ 和 $n \in \mathbb{N}$. 在区间 $[a, b]$ 上等分出 n 段，设

$$x_k = a + \frac{k}{n}(b-a), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

则显然

$$x_0 = a, \quad x_n = b, \quad x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}.$$

由题设对任意 x, y 有 $|f(x) - f(y)| \le |x-y|^2$ 以及三角不等式，

$$\begin{aligned} |f(a) - f(b)| &= \big|f(x_0) - f(x_n)\big| \le \sum_{k=1}^{n} \big|f(x_{k-1}) - f(x_k)\big| \\ &\le \sum_{k=1}^{n} \big|x_{k-1} - x_k\big|^2 = n\Big(\frac{|b-a|}{n}\Big)^2 = \frac{1}{n}\,|b-a|^2. \end{aligned}$$

因此对每个 $n \in \mathbb{N}$ 以及任意 $a, b \in \mathbb{R}$，均有

$$|f(a) - f(b)| \le \frac{1}{n}\,|a-b|^2.$$

证毕.

2. **Solution.** $\dfrac{1}{1-a}$.

注意到

$$(1-a)\,x_n = (1-a)\,(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n}) = 1 - a^{2^{n+1}},$$

故

$$x_n = \frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1-a},$$

因为 $|a| < 1$ 时 $a^{2^{n+1}} \to 0$，故极限为 $\dfrac{1}{1-a}$.

3. **Solution.** $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

令

$$L = \lim_{x\to 0^+} \Big(\frac{\ln(1+x)}{x}\Big)^{\frac{1}{e^x - 1}}.$$

取对数得

$$\ln L=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)}{e^x-1}.$$

当 $x\to 0$ 时，利用泰勒展开

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+O(x^3)\implies\frac{\ln(1+x)}{x}=1-\frac{x}{2}+O(x^2),$$

$$\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)=\ln\left(1-\tfrac{x}{2}+O(x^2)\right)=-\frac{x}{2}+O(x^2),$$

同时

$$e^x-1=x+O(x^2).$$

因此

$$\ln L=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{x}{2}+O(x^2)}{x+O(x^2)}=-\frac{1}{2}.$$

故

$$L=e^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

4. **Solution.**

首先将积分变量替换：令 $u=tx^2$，则 $t=u/x^2$，$dt=du/x^2$，上限 $t=\sin x$ 对应 $u=x^2\sin x$. 于是

$$g(x)=\int_0^{\sin x}f(tx^2)\,dt=\frac{1}{x^2}\int_0^{x^2\sin x}f(u)\,du.$$

对 x 求导，应用商法则及牛顿–莱布尼茨公式得

$$\begin{aligned}g'(x)&=\frac{d}{dx}\left[x^{-2}\right]\int_0^{x^2\sin x}f(u)\,du+x^{-2}\frac{d}{dx}\left[\int_0^{x^2\sin x}f(u)\,du\right]\\&=-\frac{2}{x^3}\int_0^{x^2\sin x}f(u)\,du+\frac{1}{x^2}\,f\left(x^2\sin x\right)\frac{d}{dx}\left(x^2\sin x\right)\\&=-\frac{2}{x^3}\int_0^{x^2\sin x}f(u)\,du+\frac{1}{x^2}\,f\left(x^2\sin x\right)\left(2x\sin x+x^2\cos x\right).\end{aligned}$$

接着计算 $g'(0)$. 由于 $\int_0^{x^2\sin x}f(u)\,du=f(0)\,x^2\sin x+o(x^3)$ 且 $f(x^2\sin x)=f(0)+o(1)$，故当 $x\to 0$:

$$-\frac{2}{x^3}\int_0^{x^2\sin x}f(u)\,du\sim-\frac{2}{x^3}\left[x^3\right]=-2,\quad\frac{1}{x^2}f(x^2\sin x)(2x\sin x+x^2\cos x)\sim\frac{1}{x^2}\left[1\cdot(2x^2+x^2)\right]=3.$$

于是

$$g'(0)=(-2)+3=1.$$

5. **Solution.** $f(x)=x^n$.

由 $f(xy)=f(x)f(y)$，对任意 $x>0$，考察 f 在 x 处的导数:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x(1+\frac{\Delta x}{x})\right)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)\,f(1+\frac{\Delta x}{x})-f(x)}{\Delta x}.$$

提取 $f(x)$ 得

$$f'(x)=f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\frac{\Delta x}{x})-1}{\Delta x}.$$

令 $u=\dfrac{\Delta x}{x}$，则 $\Delta x=xu$，当 $\Delta x\to 0$ 时 $u\to 0$，所以上式变为

$$f'(x)=f(x)\lim_{u\to 0}\frac{f(1+u)-1}{xu}=\frac{f(x)}{x}\lim_{u\to 0}\frac{f(1+u)-1}{u}=\frac{f(x)}{x}f'(1)=\frac{n\,f(x)}{x}.$$

于是 f 满足常微分方程

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{n}{x},$$

对两边积分得

$$\ln f(x)=n\ln x+C.$$

由 $f(1)=1$ 可知 $C=0$，故

$$f(x)=e^{n\ln x}=x^n,\quad x>0.$$

6. **Solution.** 令

$$t=\sqrt{e^x-1},\quad e^x=t^2+1,\quad x=\ln(t^2+1),\quad dt=\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}\,dx=\frac{t}{2}\,dx\implies e^x\,dx=2t\,dt.$$

则

$$\int\frac{x\,e^x}{\sqrt{e^x-1}}\,dx=\int\frac{x\,(2t\,dt)}{t}=2\int x\,dt=2\int\ln(t^2+1)\,dt.$$

对 $\int\ln(t^2+1)\,dt$ 分部积分，

$$\int\ln(t^2+1)\,dt=t\ln(t^2+1)-\int\frac{2t^2}{t^2+1}\,dt=t\ln(t^2+1)-2\int\Big(1-\frac{1}{t^2+1}\Big)dt=t\ln(t^2+1)-2t+2\arctan t+C.$$

因此

$$2\int\ln(t^2+1)\,dt=2t\ln(t^2+1)-4t+4\arctan t+C.$$

回代 $t=\sqrt{e^x-1}$，得

$$\int\frac{x\,e^x}{\sqrt{e^x-1}}\,dx=2\sqrt{e^x-1}\,\ln\big(e^x\big)-4\sqrt{e^x-1}+4\arctan\sqrt{e^x-1}+C=2x\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4\arctan\sqrt{e^x-1}+C.$$

8. **Solution.**

令

$$F(t)=\Big(\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\Big)^2-\int_0^t f^3(x)\,\mathrm{d}x,\quad t\in[0,1].$$

显然 $F(0)=0$. 对 t 求导得

$$\begin{aligned}F'(t)&=2\Big(\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\Big)f(t)-f^3(t)\\&=f(t)\Big(2\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x-[f(t)]^2\Big)\ =\ f(t)\,G(t),\end{aligned}$$

其中

$$G(t)=2\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x-[f(t)]^2.$$

又由于

$$G(0)=0,\quad G'(t)=2f(t)-2f(t)f'(t)=2f(t)\big(1-f'(t)\big)\geq 0\quad(\text{因}0\leq f'(t)\leq 1),$$

所以 $G(t) \geq 0$ 对所有 $t \in [0,1]$ 成立. 再由 $f(t) \geq 0$（从 $f(0)=0$ 且 $f' \geq 0$ 得到）可知

$$F'(t) = f(t)G(t) \geq 0,$$

故 $F(1) \geq F(0) = 0$，即

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 - \int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x \geq 0,$$

从而完成证明.

9. **Proof.** 利用根函数在 $[0,n]$ 上严格凹性，对每个整数区间 $[k-1,k]$ 作左右端点梯形比较:

下界：因为 $\sqrt{x}$ 在 $[k-1,k]$ 上 $\sqrt{x} \geq \sqrt{k-1}$,

$$\sqrt{k} > \int_{k-1}^{k} \sqrt{x}\,dx.$$

对 $k=1,2,\ldots,n$ 累加得

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} > \int_0^n \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^n = \frac{2}{3}n\sqrt{n}.$$

上界：因为 $\sqrt{x}$ 在 $[k-1,k]$ 上凹，下端点梯形面积小于弦顶梯形面积，即

$$\frac{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}}{2} < \int_{k-1}^{k} \sqrt{x}\,dx.$$

于是

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k-1}+\sqrt{k}) < \int_0^n \sqrt{x}\,dx + \frac{1}{2}\sqrt{n} = \frac{2}{3}n\sqrt{n} + \frac{1}{2}\sqrt{n} = \frac{4n+3}{6}\sqrt{n}.$$

综上，对任意正整数 n 都有

$$\frac{2}{3}n\sqrt{n} < \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} < \frac{4n+3}{6}\sqrt{n}.$$