

# 华中科技大学转专业联合数学考试（重制版）

学数华科 转专业交流群

Last Updated: November 22, 2025

华中科技大学专业交流群

# 写在一切之前

Provided by @那, 边。@渊

首先, 如果你选择通过转专业考试转专业, 请务必完整阅读《[华科转专业简明指南](#)》。希望大家明确一点: 转专业考试是选拔性考试, 所以难度大是正常的。这不仅意味着备考时心态上要做好准备, 更意味着你不可能做到面面俱到, 所以必须结合实际情况开展考前复习, 把精力放到那些能够拿到的分数上。一般情况下, 准备做得越充分的同学越有优势!

先整体介绍一下华科转专业数学考试。转专业数学考试是转专业联合笔试的一部分, 大部分理工科专业的学院都要求报名转入学生参加。就往年规律来看, 考试时间为两个小时。正因为这是选拔性考试, 所以考试名称虽然为“微积分”, 但实际上更偏向于数学分析的难度, 当然没有这么多分析证明的要求, 大部分还是以计算为主。试卷整体难度显著高于微积分(B), 接近于大学生数学竞赛。因此, 对于学习微积分(C)或(D)的同学, 建议一定要拔高学习层次, 必要时可以去蹭其他班级的微积分课堂。此外, 考试没有大纲, 所以没有固定的考试范围, 但会与大家微积分课程的教学进度持平, 往年大致考到不定积分(详情参考往年真题)。

关于备考参考资料, 建议以这份真题合集, 毕志伟、吴洁老师的《微积分学学习辅导》和裴礼文老师的《数学分析中的典型问题与方法》为主。就往年题目来看, 考试真题很多都能在裴砖中找到原型甚至是原题, 很多题目的思想方法都曾在往年题目中出现(近几年考题24年较为突出)。另外, B站和学数华科QQ群也是很好的资源。因此, 大家不必通过任何第三方渠道去找所谓的转专业资料了, 他们的卷子基本就是盗用本群中的, 很多题目印刷甚至出错, 买了也是浪费钱、浪费时间。

关于备考流程, 建议在仔细研读裴砖的同时(or之后)认真写写往年真题, 一开始不会做很正常, 本合集有非常详尽的答案, 大家一定要认真下功夫把每道题研究清楚(每年的难度都有变化, 可以视情况而定)。研读裴砖可以分专题进行, 可以准备一个笔记本, 把每个专题的内容(方法、例题与具体解题思路)自己总结出来, 这也是非常重要的复习资料。我总结了往年真题中经常出现的裴砖中的专题, 供大家参考以重点复习:

1.3 求极限值的若干方法; 1.4 Stolz 公式; 1.5 递推形式的极限

2.4 函数方程(了解模型即可, 不必深入)

3.1 导数; 3.2 微分中值定理; 3.3 Taylor 公式; 3.5 导数的综合应用

(裴砖中带五角星的内容基本均为重要内容, 而带星号内容可以忽略)

另外, 本文件已上传至 [《华中科技大学转专业联合数学考试\(重制版\)》](#), 大家使用前可以先检查一下是否有更新。

**最后, 祝大家考试顺利、成功上岸!**

**版权声明:** 本文件由@tarfersoul, @那, 边。整理、维护, 仅供个人学习与交流使用, 严禁用于任何商业用途; 未经授权不得转载、修改或以任何形式传播, 侵权必究。

华中科技大学专业交流群

---

# CONTENTS

写在一切之前	3
Contents	5
I 转专业数学考试真题	7
1 2024 年转专业考试真题	9
2 2024 年转专业考试真题参考答案	11
3 2023 年转专业考试真题	15
4 2023 年转专业考试真题参考答案	17
5 2022 年转专业考试真题	23
6 2022 年转专业考试真题参考答案	27
7 2021 年转专业考试真题	33
8 2021 年转专业考试真题参考答案	35
9 2020 年转专业考试真题	39
10 2020 年转专业考试真题参考答案	41
11 2019 年转专业考试真题	45
12 2019 年转专业考试真题参考答案	47
13 2018 年转专业考试真题	51
14 2018 年转专业考试真题参考答案	53
15 2017 年转专业考试真题	57
16 2017 年转专业考试真题参考答案	59
17 2015 年转专业考试真题	63
18 2015 年转专业考试真题参考答案	65
19 2014 年转专业考试真题	69
20 2014 年转专业考试真题参考答案	71
21 2013 年转专业考试真题	75
22 2013 年转专业考试真题参考答案	77

23 2012 年转专业考试真题	81
24 2012 年转专业考试真题参考答案	83
25 2011 年转专业考试真题	89
26 2011 年转专业考试真题参考答案	91

## Change Logs

- Updated (2025.10.15): 增加了 2024 年真题证明题缺失的答案.
- Updated (2025.10.16): 更正了 2023 年真题填空题第 4 题表达式的错误.
- Updated (2025.10.18): 更新了 Chapter 写在一切之前; 更正了 2023 年真题填空题第 6 题的答案.
- Updated (2025.10.19): 更正了部分答案中的错别字.
- Updated (2025.10.20): 增加了 2024 年真题填空题第 4 题的答案; 更正了 2023 年真题证明题第 1 题的答案.
- Updated (2025.10.25): 更新了 Chapter 写在一切之前; 修订了 2024 年真题及答案; 更正了 2020 年真题第 6 题答案中表达式的错误; 更正了 2014 年真题第 1 题的答案.
- Updated (2025.10.30): 更正了 2022 年真题选择题第 9 题表达式的错误; 修订了 2023 年真题及答案.
- Updated (2025.11.1): 更新了 Chapter 写在一切之前; 更正了 2024 年真题证明题第 3 题的答案.
- Updated (2025.11.2): 更正了 2022 年真题选择题第 1 题表达式的错误.
- Updated (2025.11.3): 更新了 2022 年真题解答题第 3 题的答案.
- Updated (2025.11.9): 更正了 2012 年真题第 4 题的答案; 更正了 2014 年真题第 4 题的答案; 更正了 2017 年真题第 2 题的答案; 更正了 2017 年真题第 4 题表达式的错误; 更正了 2017 年真题第 6 题的答案; 更正了 2021 年真题证明题第 2 题的答案; 更正了 2022 年真题选择题第 3 题的答案.
- Updated (2025.11.11): 更正了 2024 年真题证明题第 5 题答案中表达式的错误; 更正了 2019 年真题第 5 题的答案; 更正了 2023 年真题证明题第 6 题的答案; 更正了 2021 年真题证明题第 1 题的答案.
- Updated (2025.11.14): 修订了 2022 年真题及答案.
- Updated (2025.11.16): 更正了 2023 年真题填空题第 3 题的答案.
- Updated (2025.11.17): 更正了 2020 年真题第 4 题的答案.
- Updated (2025.11.19): 修订了 2021 年真题及答案; 修订了 2020 年真题及答案; 更正了 2020 年真题第 1 题的答案; 更正了 2022 年真题解答题第 1 题的答案.
- Updated (2025.11.22): 修订了 2019 年真题及答案; 修订了 2018 年真题及答案.

## Part I

# 转专业数学考试真题





---

# CHAPTER 1

---

## 2024 年转专业考试真题

### 1 填空题 (每题 10 分, 共 60 分)

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \arctan \frac{2}{k^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. 设  $f(x)$  在  $x=0$  的邻域内有一阶连续导数, 且  $f'(0)=0$ ,  $f''(0)$  存在, 则极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\ln(1+x))}{x^3} = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. 设  $f(x) = (\arcsin x)^2$ , 则  $f^{(2024)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}.$

5. 已知  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上有定义,  $\forall x, y \in (0, +\infty)$ ,  $f(xy) = f(x)f(y)$ , 且  $f'(1) = 2024$ , 则  $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

6.  $\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

### 2 证明题 (10 分)

已知  $\beta > 0$ , 数列  $\{x_n\}$  满足  $x_1 = \ln \beta$ ,  $x_{n+1} = x_1 + \sum_{i=1}^n \ln(\beta - x_i)$ , 证明  $\{x_n\}$  收敛并求其极限.

### 3 证明题 (10 分)

证明: 若函数  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $f$  单调, 存在数列  $\{x_n\}, x_n \in [a, b], g(x_n) = f(x_{n+1}), n = 1, 2, \dots$ , 则  $f(x) = g(x)$  在  $[a, b]$  上有解.

### 4 证明题 (10 分)

设  $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0 \\ f'(0), & x = 0 \end{cases}, f(0) = 0, f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上存在二阶导数, 问  $g(x)$  在  $\mathbf{R}$  上是否存在连续导数, 存在请证明, 不存在请说明理由.

### 5 证明题 (10 分)

设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内二阶可导,  $f(0) = 0, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}, f(1) = \frac{\pi}{2}$ , 证明: 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f''(\xi) = \frac{\xi}{1 - \xi^2} f'(\xi)$ .

## CHAPTER 2

### 2024 年转专业考试真题参考答案

#### 1 填空题 (每题 10 分, 共 60 分)

1. **Solution.**  $\frac{3\pi}{4}$ .

利用反正切差角公式

$$\begin{aligned}\arctan x - \arctan y &= \arctan \frac{x-y}{1+xy}, \quad x = \frac{1}{k-1}, \quad y = \frac{1}{k+1}, \\ \Rightarrow \arctan \frac{2}{k^2} &= \arctan \frac{\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}}{1 + \frac{1}{(k-1)(k+1)}} = \arctan \frac{1}{k-1} - \arctan \frac{1}{k+1}.\end{aligned}$$

对  $k = 1, 2, \dots, n$  累加并对  $n$  取极限

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \arctan \frac{2}{k^2} &= \arctan 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \left( \arctan \frac{1}{k-1} - \arctan \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \arctan 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \arctan 1 + \arctan \frac{1}{2} - \arctan \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{3\pi}{4}.\end{aligned}$$

2. **Solution.**  $e^{-\frac{1}{2}}$ .

利用 Taylor 公式  $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$  ( $t \rightarrow 0$ ), 令  $t = \sqrt{x}$ , 得

$$\cos \sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x).$$

故

$$\begin{aligned}\ln \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}} &= \frac{1}{x} \ln(\cos \sqrt{x}) = \frac{1}{x} \ln\left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right) \\ &= \frac{1}{x} \left(-\frac{x}{2} + o(x)\right) = -\frac{1}{2} + o(1).\end{aligned}$$

两边取指数得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

3. **Solution.**  $\frac{f''(0)}{2}$ .

利用 Taylor 展开

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2), \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^4).$$

因此

$$\begin{aligned} f(x) - f(\ln(1+x)) &= f'(0)\left(x - \ln(1+x)\right) + \frac{f''(0)}{2}\left(x^2 - (\ln(1+x))^2\right) + o(x^2) \\ &= \frac{f''(0)}{2}\left[x^2 - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)^2\right] + o(x^2) \\ &= \frac{f''(0)}{2}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\ln(1+x))}{x^3} = \frac{f''(0)}{2}.$$

4. **Solution.**  $2^{2023}(1011!)^2$ .

方程两边求导, 得  $f'(x) = \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ , 即  $\sqrt{1-x^2}f'(x) = 2 \arcsin x$ , 两边平方得

$$(1-x^2)f'^2(x) = 4f(x).$$

两边再次求导, 得  $2f'(x)[-xf'(x) + (1-x^2)f''(x) - 2] = 0$ , 消去  $f'(x)$  得

$$-xf'(x) + (1-x^2)f''(x) = 2.$$

(注意到  $f'(x) = 0$  当且仅当  $x = 0$ .  $f'(0) = 0$ ,  $f''(0) = 2$ , 此时  $-xf'(x) + (1-x^2)f''(x) = 2$  仍然成立.)

利用 Leibniz 公式对上式两边同时求  $n$  阶导数得

$$-xf^{(n+1)}(x) - nf^{(n)}(x) + (1-x^2)f^{(n+2)}(x) - 2nxf^{(n+1)}(x) - n(n-1)f^{(n)}(x) = 0.$$

在上式中令  $x = 0$  得

$$f^{(n+2)}(0) = n^2 f^{(n)}(0).$$

所以  $f^{(2024)}(0) = 2022^2 \cdot 2020^2 \cdots 2^2 f''(0) = 2^{2023}(1011!)^2$ .

5. **Solution.**  $x^{2024}$ .

$\forall x > 0$ , 有  $f(x) = f(\sqrt{x}\sqrt{x}) = f^2(\sqrt{x}) > 0$ .

令  $g(x) = \ln f(x)$ , 得

$$g(xy) = g(x) + g(y).$$

令  $u = \ln x$ ,  $v = \ln y$ , 则  $g(e^{u+v}) = g(e^u) + g(e^v)$ , 说明  $h(u) = g(e^u)$  满足

$$h(u+v) = h(u) + h(v),$$

且  $h$  在  $u = 0$  (即  $x = 1$ ) 可导, 故  $h(u) = Cu$ . 于是

$$g(x) = h(\ln x) = C \ln x, \quad f(x) = e^{g(x)} = x^C.$$

由  $f'(x) = Cx^{C-1}$ , 代入  $x = 1$  并利用  $f'(1) = 2024$ , 得  $C = 2024$ . 故

$$f(x) = x^{2024}.$$

**注:** 本题更严谨详细的解题步骤参见《数学分析中的典型问题与方法》2.4 函数方程 例 2.4.1 及单元练习 2.4.6.

6. **Solution.**  $2x\sqrt{e^x-1} - 4\sqrt{e^x-1} + 4\arctan\sqrt{e^x-1} + C.$

令  $t = \sqrt{e^x-1}$ , 则

$$t^2 = e^x - 1, \quad e^x = t^2 + 1, \quad e^x dx = 2t dt,$$

且  $x = \ln(e^x) = \ln(t^2 + 1)$ . 原式化为

$$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}} dx = \int \frac{x}{t} e^x dx = 2 \int x dt = 2 \int \ln(t^2 + 1) dt.$$

对  $2 \int \ln(t^2 + 1) dt$  分部积分得

$$\begin{aligned} 2 \int \ln(t^2 + 1) dt &= 2 \left[ t \ln(t^2 + 1) - \int \frac{2t^2}{t^2 + 1} dt \right] \\ &= 2t \ln(t^2 + 1) - 4 \int \left( 1 - \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt \\ &= 2t \ln(t^2 + 1) - 4t + 4 \arctan t + C. \end{aligned}$$

最后代回  $t = \sqrt{e^x-1}$  得

$$2x\sqrt{e^x-1} - 4\sqrt{e^x-1} + 4\arctan\sqrt{e^x-1} + C.$$

## 2 (10 分)

**Proof.** 由已知可得  $x_n = x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \ln(\beta - x_i)$ , 用  $x_{n+1} = x_1 + \sum_{i=1}^n \ln(\beta - x_i)$  相减, 得

$$x_{n+1} = x_n + \ln(\beta - x_n).$$

利用  $\forall x > 0, \ln x < x - 1$ , 得

$$x_{n+1} - \beta + 1 = x_n + \ln(\beta - x_n) - \beta + 1 < x_n + \beta - x_n - 1 - \beta + 1 = 0.$$

于是  $\beta - 1$  是  $\{x_n\}$  的上界. 所以  $\ln(\beta - x_n) > 0$ ,  $\{x_n\}$  单调增加. 由单调有界原理,  $\{x_n\}$  必然收敛.

设  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = a$ , 对  $x_{n+1} = x_n + \ln(\beta - x_n)$  左右两边取极限, 得  $\ln(\beta - a) = 0$ , 所以极限为  $\beta - 1$ .

## 3 (10 分)

**Proof.** 考虑数列  $\{f(x_n) - g(x_n)\}$ . 若此数列在  $n = k$  处出现变号, 即

$$[f(x_k) - g(x_k)] \cdot [f(x_{k-1}) - g(x_{k-1})] < 0,$$

则存在介于  $x_{k-1}$  和  $x_k$  的  $\xi$  使得  $f(\xi) - g(\xi) = 0$ .

若不然, 不失一般性地设  $\{f(x_n) - g(x_n)\}$  恒为正, 则

$$f(x_n) - f(x_{n-1}) = g(x_{n-1}) - f(x_{n-1}) < 0$$

恒成立, 故  $\{f(x_n)\}$  单调递减. 由  $f$  的单调性可知  $\{x_n\}$  亦单调, 而  $\{x_n\}$  有界, 故  $\{x_n\}$  必有极限  $x_0$ .

在  $f(x_{n+1}) = g(x_n)$  中令  $n \rightarrow \infty$ , 并由  $f$  和  $g$  的连续性, 即得  $f(x_0) = g(x_0)$ .

## 4 (10 分)

**Proof.** 若  $x \neq 0$ ,  $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$ .

若  $x = 0$ ,  $g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x} - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - xf'(0)}{x^2}$ .

应用 L'Hospital 法则, 得

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{2x}.$$

因为  $f(x)$  二阶可导, 所以  $g'(0) = \frac{f''(0)}{2}$ .

$g'(x)$  在  $x \neq 0$  时的连续性显然. 下面考虑  $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf'(0) - f(x)}{x^2} \equiv A + B$$

由导数定义,  $A = f''(0)$ . 由上述讨论得  $B = -g'(0) = -\frac{f''(0)}{2}$ ,

因此  $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = \frac{f''(0)}{2} = g'(0)$ , 即证  $g'(x)$  在  $x = 0$  处的连续性.

## 5 (10 分)

**Proof.** 令  $g(x) = f(x) - \arcsin x$ , 则  $g(0) = g\left(\frac{1}{2}\right) = g(1)$ .

由 Rolle 定理可知, 存在  $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ ,  $\beta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ , 使得  $g'(\alpha) = g'(\beta) = 0$ , 即

$$f'(\alpha) - \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} = f'(\beta) - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0.$$

令  $h(x) = f'(x)\sqrt{1-x^2}$ , 则  $h(\alpha) = h(\beta) = 1$ .

由 Rolle 定理, 存在  $\xi \in (\alpha, \beta)$  使得  $h'(\xi) = 0$ , 即

$$\sqrt{1-\xi^2}f''(\xi) - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}f'(\xi) = 0,$$

化简立得.

---

## CHAPTER 3

---

### 2023 年转专业考试真题

#### 1 填空题 (每题 8 分, 共 48 分)

1. 若  $\beta \neq k\pi (k = 0, 1, 2, \dots)$ , 则极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \tan \frac{\beta}{2^k} = \underline{\hspace{2cm}}$ .
2. 极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{3}} \left[ (x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}} \right] = \underline{\hspace{2cm}}$ .
3. 设  $0 < a_1 < \pi, a_{n+1} = \sin a_n (n = 1, 2, \dots)$ , 则极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ .
4. 设  $f(x)$  在  $x = 0$  的邻域内二阶可导, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{f(x)}{x^2} \right) = 0$ , 则  $f''(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ .
5. 设  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$ , 则  $f(x)$  的  $n$  阶导数  $f^{(n)}(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ .
6. 设  $\alpha \neq \beta$  是两个实常数, 则  $\frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha}$  与  $\frac{e^\beta + e^\alpha}{2}$  两者之较大者为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

#### 2 证明题 (9 分)

已知数列  $\{a_n\}$  满足

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+1} = a_n - \frac{1}{n+1} a_{n-1} (n = 2, 3, \dots)$$

证明: 对所有  $n \geq 3$ , 都有  $0 < na_n - 3 < \frac{6}{n-1}$ .

#### 3 证明题 (9 分)

设正整数  $n \geq 2$ , 证明方程  $(1 - x^2)^n = 1 - x \quad x \in (0, 1)$  恰有一解.

#### 4 证明题 (9 分)

设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有连续导数, 对  $(a, b)$  内任意一点  $\xi$ , 可否在  $(a, b)$  内找到两点  $\alpha, \beta, \xi \in (\alpha, \beta)$ , 使得  $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$  成立, 试证明你的结论或举反例.

#### 5 证明题 (9 分)

设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上三阶可导, 且  $f'''(x) > 0$ , 证明

$$f(a+h) - f(a) < \frac{h}{2} [f'(a) + f'(a+h)] \quad (a < a+h < b)$$

#### 6 证明题 (16 分)

设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内二阶可导, 利用两种方法证明:  $\exists \xi \in (a, b)$  满足

$$f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{(b-a)^2}{4} f''(\xi).$$



---

## CHAPTER 4

---

### 2023 年转专业考试真题参考答案

#### 1 填空题 (每题 8 分, 共 48 分)

1. **Solution.**  $\frac{1}{\beta} - \cot \beta$ .

注意到  $\tan x = \cot x - 2 \cot 2x$ , 则

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \tan \frac{\beta}{2^k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \left( \cot \frac{\beta}{2^k} - 2 \cot \frac{\beta}{2^{k-1}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \cot \frac{\beta}{2^n} - \cot \beta \\ &= \frac{1}{\beta} - \cot \beta.\end{aligned}$$

2. **Solution.**  $\frac{4}{3}$ .

令  $t = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \rightarrow 0^+$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{3}} \left[ (x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}} \right] = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(1+t^3)^{\frac{2}{3}} - (1-t^3)^{\frac{2}{3}}}{t^3} = \frac{4}{3}.$$

3. **Solution.**  $\sqrt{3}$ .

用数学归纳法容易证明  $a_n \in (0, \pi)$  恒成立, 且  $a_{n+1} = \sin a_n < a_n$ , 故  $\{a_n\}$  收敛. 易见其收敛于 0.

由 Stolz 定理,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) - n}{\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 a_{n+1}^2}{a_n^2 - a_{n+1}^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin^2 x}{x^2 - \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{(x + \sin x)(x - \sin x)} \\ &= 3.\end{aligned}$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} a_n = \sqrt{3}$ .

4. **Solution.** 9.

利用

$$\sin 3x = 3x - \frac{(3x)^3}{6} + o(x^3) = 3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3),$$

故

$$\frac{\sin 3x}{x^3} = \frac{3}{x^2} - \frac{9}{2} + o(1).$$

设

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2),$$

则

$$\frac{f(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{x^2} + \frac{f'(0)}{x} + \frac{f''(0)}{2} + o(1).$$

原式

$$\frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{f(x)}{x^2} = \frac{3 + f(0)}{x^2} + \frac{f'(0)}{x} + \left(\frac{f''(0)}{2} - \frac{9}{2}\right) + o(1).$$

为使极限存在且为 0, 应有

$$3 + f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad \frac{f''(0)}{2} - \frac{9}{2} = 0,$$

故

$$f''(0) = 9.$$

5. **Solution.**  $\frac{(-1)^n n!}{4} \left[ \frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x+2)^{n+1}} \right].$

注意到

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right).$$

利用

$$\frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{x+C} = \frac{(-1)^n n!}{(x+C)^{n+1}},$$

对两项分别求导得

$$\frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{x-2} = \frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}, \quad \frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{x+2} = \frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}.$$

综上

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{4} \left[ \frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}} \right] = \frac{(-1)^n n!}{4} \left[ \frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x+2)^{n+1}} \right].$$

6. **Solution.**  $\frac{e^\beta + e^\alpha}{2}.$

不妨设  $\alpha < \beta$ , 令  $t = \beta - \alpha > 0$ , 将两个表达式转化为关于  $t$  的函数:

$$\frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha} = \frac{e^{\alpha+t} - e^\alpha}{t} = e^\alpha \cdot \frac{e^t - 1}{t},$$

$$\frac{e^\beta + e^\alpha}{2} = \frac{e^{\alpha+t} + e^\alpha}{2} = e^\alpha \cdot \frac{e^t + 1}{2}.$$

由于  $e^\alpha > 0$ , 只需比较  $\frac{e^t - 1}{t}$  与  $\frac{e^t + 1}{2} (t > 0)$  的大小关系. 令

$$f(t) = \frac{e^t - 1}{e^t + 1} - \frac{t}{2},$$

则  $f'(t) = -\frac{(e^t - 1)^2}{2(e^t + 1)^2} < 0$  恒成立, 所以  $f(t) < f(0) = 0$ , 故  $\frac{e^t - 1}{e^t + 1} < \frac{t}{2}$  即  $\frac{e^t + 1}{2} > \frac{e^t - 1}{t}$ , 故

$$\frac{e^\beta + e^\alpha}{2} > \frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha}.$$

当  $\alpha > \beta$  时, 令  $t = \alpha - \beta > 0$  同理可推得相同结论.

**Note:** 根据 A-L-G 不等式

$$\frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} < \frac{x_1 + x_2}{2}$$

可以直接得到结论.

另: 用特殊值带入也可以得到答案.

## 2 证明题 (9 分)

**Proof.** 将递推式变形为

$$(n+1)a_{n+1} - na_n = a_n - a_{n-1} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

所以

$$\sum_{k=2}^n [(k+1)a_{k+1} - ka_k] = \sum_{k=2}^n (a_k - a_{k-1}) \quad (n \geq 2),$$

化简为

$$na_n - 3 = a_{n-1} \quad (n \geq 3).$$

下面使用数学归纳法证明  $a_n \in \left(0, \frac{6}{n}\right), n \geq 2$ .

注意到  $a_2 = 2 \in \left(0, \frac{6}{2}\right)$ , 若  $a_k \in \left(0, \frac{6}{k}\right), k \geq 2$ , 则

$$a_{k+1} = \frac{1}{k+1}(a_k + 3) \in \left(0, \frac{\frac{6}{k} + 3}{k+1}\right),$$

又  $k \geq 2$  时  $\frac{\frac{6}{k} + 3}{k+1} \leq \frac{6}{k+1}$ , 所以  $a_{k+1} \in \left(0, \frac{6}{k+1}\right)$ .

综上  $\forall n \geq 3$ , 都有  $0 < na_n - 3 < \frac{6}{n-1}$ .

## 3 证明题 (9 分)

**Proof.**

**法一.** 设  $f(x) = (1-x^2)^n - 1 + x$ , 则  $f(0) = f(1) = 0$ .

因  $f'(x) = -2nx(1-x^2)^{n-1} + 1$ , 有  $f'(0) = f'(1) = 1$ , 由导数定义与极限比较性可得

$$\exists x_1 \in (0, \delta) (\delta < \frac{1}{2}) \text{ 使 } \frac{f(x_1) - f(0)}{x_1 - 0} > 0, \quad \exists x_2 \in (1-\delta, 1) \text{ 使 } \frac{f(x_2) - f(1)}{x_2 - 1} > 0.$$

即  $f(x_1) > 0, f(x_2) < 0$ . 由零点定理可知  $\exists \alpha \in (x_1, x_2)$ , 使  $f(\alpha) = 0$ . 下证唯一性.

假设  $\beta$  是  $f(x)$  异于  $\alpha$  的零点, 则  $f(0) = f(\alpha) = f(\beta) = f(1) = 0$ ,

由 Rolle 定理可知  $f'(x)$  在  $(0,1)$  内有三个零点,  $f''(x)$  在  $(0,1)$  内有两个零点.

又因  $f''(x) = 2n(1-x^2)^{n-2}[(2n-1)x^2-1]$  在  $(0,1)$  内仅有一个零点, 因此矛盾!

法二. 方程  $(1-x^2)^n = 1-x$   $x \in (0,1)$  等价于

$$(1+x)^n = (1-x)^{1-n} \quad x \in (0,1) \quad \text{或} \quad n \ln(1+x) + (n-1) \ln(1-x) = 0 \quad x \in (0,1)$$

设  $g(x) = n \ln(1+x) + (n-1) \ln(1-x)$ , 则  $g(0) = 0, g(1^-) = -\infty, g'(x) = \frac{n}{1+x} - \frac{n-1}{1-x} = \frac{1-(2n-1)x}{1-x^2}$ .

注意到  $g(0) = 0, g'(0) = 1 > 0$ ,

故  $\exists x_1 \in (0, \delta) (\delta < \frac{1}{2n-1})$ , 使  $g(x_1) > 0$ . 由零点定理可知  $\exists \alpha \in (x_1, 1)$ , 使  $g(\alpha) = 0$ .

因  $g(x)$  在  $(0, \frac{1}{2n-1})$  上单增, 在  $(\frac{1}{2n-1}, 1)$  上单减, 故  $g(x)$  在  $(0,1)$  有且仅有一个零点.

#### 4 证明题 (9 分)

**Proof.** 答案是否定的. 可构造反例为  $[-1, 1]$  上的  $f(x) = x^3$ .

考虑  $\xi = 0, f'(0) = 0$ , 但  $\forall \alpha < 0 < \beta$  均有  $\frac{\beta^3 - \alpha^3}{\beta - \alpha} = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \neq 0$ .

#### 5 证明题 (9 分)

**Proof.** 构造  $g(h) = f(a+h) - f(a) - \frac{h}{2}[f'(a) + f'(a+h)], g(0) = 0$ .

$$g'(h) = f'(a+h) - \frac{1}{2}[f'(a) + f'(a+h)] - \frac{h}{2}f''(a+h), g'(0) = 0.$$

$$g''(h) = -\frac{h}{2}f'''(a+h) < 0, \text{ 结合单调性即得.}$$

#### 6 证明题 (16 分)

**Proof.**

法一, 利用 Cauchy 中值定理.

令  $F(x) = f(x) - 2f\left(\frac{x+a}{2}\right) + f(a)$ ,  $G(x) = \frac{1}{4}(x-a)^2$ , 则  $F(a) = G(a) = 0$ .

由 Cauchy 中值定理,

$$\begin{aligned} \frac{F(b)}{G(b)} &= \frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} \\ &= \frac{F'(\eta)}{G'(\eta)} \\ &= \frac{f'(\eta) - f'\left(\frac{\eta+a}{2}\right)}{\frac{\eta-a}{2}}. \end{aligned}$$

其中  $\eta \in (a, b)$ . 由 Lagrange 中值定理,

$$\begin{aligned} \frac{f'(\eta) - f'\left(\frac{\eta+a}{2}\right)}{\frac{\eta-a}{2}} &= f''(\xi) \cdot \frac{\eta - \frac{\eta+a}{2}}{\frac{\eta-a}{2}} \\ &= f''(\xi). \end{aligned}$$

其中  $\xi \in \left(\frac{\eta+a}{2}, \eta\right)$ , 得证.

法二, 利用 Taylor 公式.

由 Taylor 定理得

$$f(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right) + \frac{f''(\xi_1)}{2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

$$f(b) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right) + \frac{f''(\xi_2)}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,$$

$$f(a) + f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a)^2 \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{8}.$$

由 Darboux 定理, 存在  $\xi$  使得  $f''(\xi) = \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2}$ , 得证.

法三, 利用常数  $K$  值.

记  $K = \frac{f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a)}{\frac{1}{4}(b-a)^2}$ . 令

$$F(x) = f(x) - 2f\left(\frac{a+x}{2}\right) + f(a) - \frac{(x-a)^2}{4}K,$$

则  $F(a) = F(b) = 0$ , 故存在  $\eta \in (a, b)$ , 使  $F'(\eta) = 0$ , 即

$$f'(\eta) - f'\left(\frac{a+\eta}{2}\right) - \frac{\eta-a}{2}K = 0,$$

进一步存在  $\xi \in \left(\frac{\eta+a}{2}, \eta\right) \subset (a, b)$ , 使

$$f''(\xi)\left(\eta - \frac{a+\eta}{2}\right) - \frac{\eta-a}{2}K = 0,$$

化简得  $f''(\xi) = K$ .

华中科技大学转专业交流群

---

## CHAPTER 5

---

### 2022 年转专业考试真题

#### 1 选择题 (每题 3 分, 共 30 分)

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  存在是  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在的 (\*) 条件.

- A. 充分不必要                      B. 必要不充分  
C. 充分必要                        D. 既不充分也不必要

2. 如果  $x \rightarrow \infty$  时,  $\frac{1}{ax^2 + bx + c}$  是比  $\frac{1}{x+1}$  高阶的无穷小, 则  $a, b, c$  应满足 (\*).

- A.  $a = 0, b = 1, c = 1$                       B.  $a \neq 0, b = 1, c$  为任意常数  
C.  $a \neq 0, b, c$  为任意常数                      D.  $a, b, c$  为任意常数

3. 函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{|x-1|}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$  的连续区间为 (\*).

- A.  $(-\infty, +\infty)$                       B.  $(-\infty, 1)$  与  $[1, +\infty)$   
C.  $(-\infty, 1)$  与  $(1, +\infty)$                       D.  $(-\infty, 1]$  与  $(1, +\infty)$

4. 下列正确的命题是 (\*).

- (1): 初等函数在其定义域内连续;  
(2): 设函数定义在一个区间上, 若函数在区间内一点连续, 则它在该点的某邻域内连续;  
(3): 若函数在区间  $I$  上连续, 则函数在  $I$  上有界;  
(4): 若函数在区间  $I$  上连续, 则函数在  $I$  上有最大值.

- A. (1)(2)(3)                      B. (2)(3)(4)  
C. (2)(4)                        D. 都不真

5. 已知  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上可导, 且  $f(x) < 0$ , 则 (\*).

- A.  $f(-x) > 0$                       B.  $f'(-x) < 0$   
C.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(-x) < 0$                       D.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(-x) > 0$

6. 设函数  $y = f(x)$  具有二阶导数, 且  $f'(x) > 0$ ,  $f''(x) < 0$ ,  $\Delta x$  为自变量在  $x_0$  的增量,  $\Delta y$  与  $dy$  分别为  $f(x)$  在  $x_0$  对应的增量和微分. 若  $\Delta x > 0$ , 则 (\*).
- A.  $0 < \Delta y < dy$                       B.  $0 < dy < \Delta y$   
 C.  $\Delta y < dy < 0$                       D.  $dy < \Delta y < 0$
7. 已知  $y = y(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = t^2 \end{cases}$  所确定,  $\varphi''(t)$  存在, 则  $\frac{d^2x}{dy^2} = (*)$ .
- A.  $\frac{t\varphi''(t) - \varphi'(t)}{4t^3}$                       B.  $\frac{t\varphi''(t) + \varphi'(t)}{4t^3}$   
 C.  $\frac{\varphi''(t) - t\varphi'(t)}{4t^3}$                       D.  $\frac{t\varphi''(t) - \varphi(t)}{4t^3}$
8.  $y = \sin^4 x - \cos^4 x$ , 则  $y^{(n)} = (*)$ .
- A.  $2^n \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$                       B.  $2^n \sin\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$   
 C.  $-2^n \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$                       D.  $-2^n \sin\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$
9. 设  $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{3^{\frac{k}{n}}}{n}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = (*)$ .
- A.  $\frac{4}{\ln 3}$     B.  $\frac{2}{\ln 3}$     C.  $\frac{3}{\ln 3}$     D.  $\frac{3}{\ln 2}$
10.  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 9}$  全部的渐近线为 (\*).
- A.  $x = \pm 3, y = x$                       B.  $x = \pm 3, y = 2x$   
 C.  $x = \pm 3, y = -x$                       D.  $x = \pm 3, y = 3x$

## 2 填空题 (每题 3 分, 共 30 分)

1. 已知  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 3$ ,  $f^{-1}(x) < x - 2$  成立, 则  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
2. 设  $x > 1$ , 则极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x^n + x^{3n}} =$ \_\_\_\_\_.
3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \sin x \right) =$ \_\_\_\_\_.
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x \sin^2 x} =$ \_\_\_\_\_.
5. 函数  $f(x) = x^4$  在区间  $[1, 2]$  内满足 Lagrange 中值定理的  $\xi$  的值 =\_\_\_\_\_.
6. 函数  $f(x) = xe^{-x}$  的递增区间为\_\_\_\_\_.
7. 若  $f(x) = x^3 \ln(2+x)$ , 则  $f^{(6)}(0) =$ \_\_\_\_\_.
8. 设  $f(x)$  具有任意阶导数,  $f'(x) = f^2(x)$ , 则  $f^{(n)}(x) =$ \_\_\_\_\_.
9. 设  $k > 0$ , 则  $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$  在  $(0, +\infty)$  内的零点个数为\_\_\_\_\_.
10. 设  $y = y(x)$  由  $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$  确定, 则  $y = y(x)$  的极小值点为\_\_\_\_\_.



### 3 解答题 (共 40 分)

1. 计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right)^{\frac{1}{x}} \right]$ .

2. 设  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上可导, 如果  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + 2\sqrt{x}f'(x)] = 2022$ , 计算极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

3. 对任意正实数  $\beta$ , 记函数  $f(x) = |\lg x|$  在  $[\beta, +\infty)$  上的最小值为  $m_\beta$ , 函数  $g(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$  在  $[0, \beta]$  上的最大值为  $M_\beta$ , 若  $M_\beta - m_\beta = \frac{1}{2}$ , 求  $\beta$  的所有可能值.

4. 设  $\alpha \in \mathbf{R}$ , 函数  $f(x) = \frac{x}{e^x} - \alpha$  有两个不同的零点  $x_1, x_2$ .

(1) 证明:  $\alpha \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ ;

(2) 证明:  $|x_2 - x_1| > 2\sqrt{1 - e\alpha}$ .

---

## CHAPTER 6

---

### 2022 年转专业考试真题参考答案

#### 1 填空题 (9 分)

1. **Solution.** B.

2. **Solution.** C.

由题可得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{ax^2+bx+c}{x+1}} = 0.$$

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{ax^2+bx+c}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{ax^2+bx+c} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2ax+b}, \text{ 故 } a \neq 0.$$

3. **Solution.** C.

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 1, \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}, \text{ 所以 } f(x) \text{ 仅在 } x = 1 \text{ 处不连续. 注意本题不是单侧连续.}$$

4. **Solution.** D.

基本初等函数在其定义域内连续, 初等函数在其定义区间内连续, (2): 例如  $f(x) = xD(x)$ ,  $D(x)$  是 Dirichlet 函数, 可以验证  $f(x)$  仅在  $x = 0$  处连续 (3)(4) 闭区间上连续函数具有最值定理以及有界性, 选择 D.

5. **Solution.** C.

因  $f(x)$  可导, 故  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续. 令  $y = -x$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} f(-x) = \lim_{y \rightarrow 0} f(y) = f(0) < 0$ , 选择 C.

6. **Solution.** A.

由 Taylor 定理,  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \frac{1}{2}f''(\xi)(\Delta x)^2$ ,  $\xi \in (x, x + \Delta x)$ .

因  $f''(x) < 0$ , 故  $\Delta y < f'(x)\Delta x$ . 而  $dy = f'(x)dx = f'(x)\Delta x$ , 故  $\Delta y < dy$ .

另一方面,  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(\eta)\Delta x > 0$ ,  $\eta \in (x, x + \Delta x)$ .

因此  $0 < \Delta y < dy$ , 选择 A.

7. **Solution.** A.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}} = \frac{\varphi'(t)}{2t}, \text{ 所以}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dy^2} &= \frac{d}{dy} \left( \frac{dx}{dy} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dy} \right) \cdot \frac{1}{\frac{dy}{dt}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{t\varphi''(t) - \varphi'(t)}{t^2} \cdot \frac{1}{2t} \\ &= \frac{t\varphi''(t) - \varphi'(t)}{4t^3}.\end{aligned}$$

8. **Solution.** C.

注意到

$$y = \sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = -\cos 2x,$$

简单归纳即得  $y^{(n)}(x) = -2^n \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$ . 选择 C.

9. **Solution.** B.

由定积分的定义可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{3^{\frac{k}{n}}}{n} = \int_0^1 3^x dx = \left. \frac{3^x}{\ln 3} \right|_0^1 = \frac{2}{\ln 3}.$$

10. **Solution.** A.

令  $x^2 - 9 = 0$  得  $x = \pm 3$ , 所以  $y = f(x)$  有垂直渐近线  $x = \pm 3$ .

注意到

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2-9}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2-9} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{x^2-9} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{9x}{x^2-9} \right) = 0,$$

故  $y = f(x)$  有斜渐近线  $y = x$ .

$y = f(x)$  无水平渐近线, 选择 A.

## 2 填空题 (每题 8 分, 共 48 分)

1. **Solution.**  $(3, +\infty)$ .

由  $\log_{\frac{1}{2}} x = y - 3$  得  $x = \left(\frac{1}{2}\right)^{y-3}$ , 所以  $f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$ .

即解不等式  $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} < x - 2$ .

记  $g(x) = x - 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$ , 则  $g'(x) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} \ln 2 > 0$ , 所以  $g(x)$  单调增加.

又  $g(3) = 0$ , 故  $g(x) > 0 \Rightarrow x \in (3, +\infty)$ .

2. **Solution.**  $x^3$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x^n + x^{3n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^3 \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{x^{2n}} + 1} = x^3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left[ \frac{\ln \left( 1 + \frac{1}{x^{2n}} \right)}{n} \right] = x^3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left( \frac{1}{nx^{2n}} \right) = x^3.$$

3. **Solution.** 1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \sin x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1 - 0 = 1.$$

4. **Solution.** 1.

注意到

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1} x^{2n+1},$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x + \frac{1}{2 \cdot 3} (2x)^3) - 2(x + \frac{1}{2 \cdot 3} x^3) + o(x^3)}{x^3} = 1.$$

5. **Solution.**  $\sqrt[3]{\frac{15}{4}}.$

$$\text{由 } f(2) - f(1) = 15 = f'(\xi)(2-1) = 4\xi^3, \xi \in (1, 2) \text{ 解得 } \xi = \sqrt[3]{\frac{15}{4}}.$$

6. **Solution.**  $(-\infty, 1).$

计算  $f'(x) = (1-x)e^{-x}$ , 令  $f'(x) > 0$  解得  $x \in (-\infty, 1).$

7. **Solution.** 30.

$$f(x) = x^3 \ln(2+x) = x^3 \ln \left( 1 + \frac{x}{2} \right) + \ln 2 \cdot x^3.$$

注意到

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}.$$

$$\text{所以 } f(x) = x^3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left( \frac{x}{2} \right)^n + \ln 2 \cdot x^3.$$

由 Taylor 定理,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

将上述两式对照, 得  $\frac{f^{(6)}(0)}{6!} = \frac{1}{2^3 \cdot 3}$ , 解得  $f^{(6)}(0) = 30$ .

8. **Solution.**  $\frac{n!}{(C-x)^{n+1}}.$

由  $f'(x) = f^2(x)$  得  $\left( -\frac{1}{f(x)} \right)' = 1$ , 因此  $f(x) = \frac{1}{C-x}$ .

注意到

$$\left( \frac{1}{ax+b} \right)^{(n)} = \frac{(-a)^n \cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}.$$

$$\text{故 } f^{(n)}(x) = \frac{n! \cdot 1^n}{(C-x)^{n+1}} = \frac{n!}{(C-x)^{n+1}}.$$

9. **Solution.** 2.

$$\text{即 } k = \frac{x}{e} - \ln x.$$

记  $t(x) = \frac{x}{e} - \ln x$ , 则  $t'(x) = \frac{1}{e} - \frac{1}{x}$ . 所以  $t(x)$  在  $(0, e)$  单调减, 在  $(e, +\infty)$  单调增.

因  $t(0^+) = t(+\infty) = +\infty$ ,  $t(e) = 0$ , 又  $k > 0$ , 作图可得共有 2 个零点.

10. **Solution.**  $x = 1$

方程  $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$  两边对  $x$  求导, 得  $6y^2y' - 4yy' + 2y + 2xy' - 2x = 0$ . 即

$$y'(3y^2 - 2y + x) = x - y \quad (*)$$

令  $y' = 0$  得  $y = x$ , 代入原方程得

$$(x - 1)(2x^2 + x + 1) = 0.$$

解得  $x = 1$ . 再对  $(*)$  式求导, 有

$$y''(3y^2 - 2y + x) + y' \frac{\partial}{\partial x}(3y^2 - 2y + x) = 1 - y'.$$

代入  $x = y = 1$ ,  $y' = 0$  得  $y''(1) = \frac{1}{2} > 0$ , 故  $x = 1$  是  $y(x)$  的极小值点.

### 3 解答题

1. **Solution.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left[ \frac{1}{x} \ln \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left[ \frac{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} - 1}{x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left[ \frac{\frac{\ln(1+x) - x}{x}}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left[ \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left[ \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \right] = \exp \left[ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \right] \\ &= \exp \left[ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x}{x^2} \right] = e^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

2. **Solution.**

令  $F(x) = e^{\sqrt{x}} f(x)$ , 由广义 L'Hospital 法则 ( $\frac{*}{\infty}$  型) 可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{e^{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F'(x)}{\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}} \\ &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} f(x) + e^{\sqrt{x}} f'(x)}{\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + 2\sqrt{x} f'(x)] = 2022. \end{aligned}$$

## 3. Solution.

若  $0 < \beta \leq 1$ ,  $M_\beta = \sin \frac{\pi\beta}{2}$ , 而  $m_\beta = 0$ , 故  $\sin \frac{\pi\beta}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi\beta}{2} = \frac{\pi}{6}$ , 即  $\beta = \frac{1}{3}$ .

若  $\beta > 1$ ,  $M_\beta = 1$ , 而  $m_\beta = \lg \beta$ , 故  $1 - \lg \beta = \frac{1}{2}$ , 解得  $\beta = \sqrt{10}$ .

综上,  $\beta \in \left\{ \frac{1}{3}, \sqrt{10} \right\}$ .

## 4. Proof.

(1) 令  $f(x) = 0$ , 得  $\alpha = \frac{x}{e^x}$ . 令  $g(x) = \frac{x}{e^x}$ , 则  $g'(x) = \frac{1-x}{e^x}$ .

故  $g(x)$  在  $(-\infty, 1)$  单调增, 在  $(1, +\infty)$  单调减.

因为  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ ,  $g(1) = \frac{1}{e}$ , 作图可得  $\alpha \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ .

(2) 由  $\frac{x_1}{e^{x_1}} = \frac{x_2}{e^{x_2}} = \alpha$  可得

$$\ln \alpha = \ln x_1 - x_1 = \ln x_2 - x_2.$$

此即

$$\frac{x_2 - x_1}{\ln x_2 - \ln x_1} = 1.$$

由 A-L-G 不等式有

$$\frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{x_2 - x_1}{\ln x_2 - \ln x_1} = 1,$$

所以  $x_1 + x_2 > 2$ . 不妨设  $x_2 > x_1$ , 则  $|x_2 - x_1| = x_2 - x_1 = (x_2 - 1) + (1 - x_1)$ . 而  $x_2 - 1 > 1 - x_1$ , 下证

$$1 - x_1 > \sqrt{1 - e\alpha}.$$

上式即  $x_1^2 - 2x_1 > -\frac{ex_1}{e^{x_1}}$ , 故即证  $2 - x_1 < e^{1-x_1}$ ,  $x_1 \in (0, 1)$ .

注意到

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > 1 + x, x > 0,$$

所以  $e^{1-x_1} > 2 - x_1$ , 证毕!

华中科技大学转专业交流群



---

## CHAPTER 7

---

### 2021 年转专业考试真题

#### 1 填空题

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \arctan \left( \frac{1}{k^2 + k + 1} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$
2. 已知  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left( 1 + \frac{f(x)}{\tan x} \right)}{2x - 1} = 8$ , 则极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^4} + 2\sqrt[n]{n^2} - 3}{\sqrt[n]{n^2} - 3\sqrt[n]{n} + 2} = \underline{\hspace{2cm}}.$
4. 设  $g(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续且满足方程  $g(x) + g(y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$ , 则  $g(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$
5. 若  $x = a \cos t + b \sin t$ ,  $y = a \sin t - b \cos t$ , 则  $\frac{d^m x}{dt^m} \cdot \frac{d^n y}{dt^n} - \frac{d^n x}{dt^n} \cdot \frac{d^m y}{dt^m} = \underline{\hspace{2cm}}.$

#### 2 证明题

1. 设数列  $\{\theta_n\}$  满足  $\theta_n \neq 0$ , 且  $\theta_n^2 - \theta_{n-1} \cdot \theta_{n+1} = 1 (n = 1, 2, 3 \cdots)$ . 证明: 存在一个实数  $\lambda$ , 使得对所有  $n \geq 1$ , 有  $\theta_{n+1} = \lambda \theta_n - \theta_{n-1}$ .

2. 设  $f(x)$  定义在  $x=0$  的某个邻域内, 且满足  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\frac{x}{2})}{x} = 0$ . 证明:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ .

3. 已知函数  $f(x)$  在  $(-1, 1)$  内有二阶导数,  $f(0) = f'(0) = 0$ , 且  $|f''(x)| \leq |f(x)| + |f'(x)|$ . 证明: 存在  $\delta > 0$ , 使得在  $(-\delta, \delta)$  内  $f(x) \equiv 0$ .

4. 设可微函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上严格单调减少, 如果当  $x \in (0, +\infty)$  时  $0 < |f(x)| < |f'(x)|$  成立, 证明: 当  $x \in (0, 1)$  时, 必有  $xf(x) > \frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)$ .

---

## CHAPTER 8

---

### 2021 年转专业考试真题参考答案

#### 1 填空题 (每题 8 分, 共 48 分)

1. **Solution.**  $\frac{\pi}{2}$ .

注意到

$$\arctan\left(\frac{1}{k^2 + k + 1}\right) = \arctan\left[\frac{(k+1) - k}{1 + (k+1)k}\right] = \arctan(k+1) - \arctan k.$$

故

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \arctan\left(\frac{1}{k^2 + k + 1}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n [\arctan(k+1) - \arctan k] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [\arctan(n+1) - \arctan 0] \\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

2. **Solution.**  $8 \ln 2$ .

计算

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{f(x)}{\tan x}\right)}{2^x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{\tan x}}{2^x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{(e^{x \ln 2} - 1)x} \\ &= \frac{f(x)}{\ln 2 \cdot x^2} = 8,\end{aligned}$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 8 \ln 2.$$

3. **Solution.**  $-8$ .

令  $\sqrt[n]{n} = t \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$ , 则

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^4} + 2\sqrt[n]{n^2} - 3}{\sqrt[n]{n^2} - 3\sqrt[n]{n} + 2} &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^4 + 2t^2 - 3}{t^2 - 3t + 2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t^2 - 1)(t^2 + 3)}{(t - 1)(t - 2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t + 1)(t^2 + 3)}{t - 2} \\ &= -8. \end{aligned}$$

4. **Solution.**  $g(1) \cdot x^2$ .

在方程  $g(x) + g(y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$  中,

令  $x = y = 0$ , 得  $g(0) = 0$ ; 令  $y = 0$ , 得  $g(x) = g(|x|)$ . 所以  $g(x)$  为偶函数.

下面考虑  $x, y > 0$  的情况.

注意到原方程即  $g(\sqrt{x^2}) + g(\sqrt{y^2}) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$ . 令  $h(x) = g(\sqrt{x}) (x > 0)$ , 则

$$h(x^2) + h(y^2) = h(x^2 + y^2) \quad \text{或} \quad h(a) + h(b) = h(a + b).$$

所以  $h(x) = kx$ . (注: 参见《数学分析中的典型问题与方法》2.4 函数方程 例 2.4.1.)

从而  $g(x) = kx^2 (x > 0)$ .

由偶函数的性质即得  $g(x) = kx^2 (x \in \mathbf{R})$ . 令  $x = 1$  得其中  $k = g(1)$ .

5. **Solution.**  $(a^2 + b^2) \sin \frac{n-m}{2} \pi$ .

注意到

$$x = \sqrt{a^2 + b^2} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos t + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin t \right) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(t - \alpha),$$

其中  $\tan \alpha = \frac{b}{a}$ . 同理

$$y = \sqrt{a^2 + b^2} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin t - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos t \right) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(t - \alpha).$$

而

$$\frac{d^k \cos t}{dt^k} = \cos \left( t + \frac{k\pi}{2} \right), \quad \frac{d^k \sin t}{dt^k} = \sin \left( t + \frac{k\pi}{2} \right), \quad k \in \mathbf{N}.$$

所以  $\frac{d^m x}{dt^m} \cdot \frac{d^n y}{dt^n} - \frac{d^n x}{dt^n} \cdot \frac{d^m y}{dt^m}$

$$\begin{aligned} &= (a^2 + b^2) \left[ \cos \left( t - \alpha + \frac{m\pi}{2} \right) \cdot \sin \left( t - \alpha + \frac{n\pi}{2} \right) - \cos \left( t - \alpha + \frac{n\pi}{2} \right) \cdot \sin \left( t - \alpha + \frac{m\pi}{2} \right) \right] \\ &= (a^2 + b^2) \sin \left[ \left( t - \alpha + \frac{n\pi}{2} \right) - \left( t - \alpha + \frac{m\pi}{2} \right) \right] \\ &= (a^2 + b^2) \sin \frac{n-m}{2} \pi. \end{aligned}$$

## 2 证明题 (9 分)

1. **Proof.** 由题  $\theta_{n+1}^2 - \theta_n \cdot \theta_{n+2} = 1$ ,  $\theta_n^2 - \theta_{n-1} \cdot \theta_{n+1} = 1$ ,

两式相减得  $\theta_{n+1}^2 + \theta_{n-1} \cdot \theta_{n+1} - \theta_n^2 - \theta_n \cdot \theta_{n+2} = 0$ , 即  $\theta_{n+1}(\theta_{n-1} + \theta_{n+1}) = \theta_n(\theta_n + \theta_{n+2})$ .

所以  $\frac{\theta_{n+2} + \theta_n}{\theta_{n+1}} = \frac{\theta_{n+1} + \theta_{n-1}}{\theta_n} = \dots = \frac{\theta_2 + \theta_0}{\theta_1} = \lambda$ .

2. **Proof.** 由  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\frac{x}{2})}{x} = 0$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 当  $|x| < \delta$  时, 有

$$\left| \frac{f(x) - f(\frac{x}{2})}{x} \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

亦即

$$-\frac{\varepsilon}{3}|x| < f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) < \frac{\varepsilon}{3}|x|.$$

将  $x$  替换为  $\frac{x}{2^k}$  ( $k \in \mathbf{N}$ ), 得

$$-\frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{1}{2^k}|x| < f\left(\frac{x}{2^k}\right) - f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) < \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{1}{2^k}|x| \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

注意到

$$\sum_{k=0}^n \left[ f\left(\frac{x}{2^k}\right) - f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) \right] = f(x) - f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right),$$

所以

$$-\frac{\varepsilon}{3} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}|x| < f(x) - f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) < \frac{\varepsilon}{3} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}|x|.$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 注意到  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$ , 得

$$-\frac{2\varepsilon}{3}|x| \leq f(x) \leq \frac{2\varepsilon}{3}|x|.$$

故  $\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$ , 因此  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x)}{x} \right| = 0$ .

3. **Proof.**

取  $\delta = \frac{1}{2}$ , 考察定义在区间  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  上的函数  $f(x)$ .

由  $f(x)$  及  $f'(x)$  的连续性可知, 存在  $M_1, M_2 \geq 0$ , 使得  $|f(x)| \leq M_1$ ,  $|f'(x)| \leq M_2$ , 所以

$$|f''(x)| \leq |f(x)| + |f'(x)| \leq M_1 + M_2.$$

因此  $|f''(x)|$  有上界  $M$ .

$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ , 由 Taylor 公式得

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(\xi)\frac{x^2}{2} = f''(\xi)\frac{x^2}{2}, \quad f'(x) = f'(0) + f''(\eta)x,$$

其中  $\xi, \eta$  介于 0 与  $x$  之间.

注意到  $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  时,  $|x| \leq \frac{1}{2}$ ,  $x^2 \leq \frac{1}{4}$ , 从而有

$$\begin{aligned} M &= |f(x)| + |f'(x)| = |f''(\xi)| \frac{x^2}{2} + |f''(\eta)| |x| \\ &\leq \frac{1}{8} |f''(\xi)| + \frac{1}{2} |f''(\eta)| \\ &\leq \frac{5M}{8}, \end{aligned}$$

从而  $M = 0$ , 必有  $f(x) = f'(x) \equiv 0$ , 得证.

4. **Proof.** 由  $|f(x)| > 0$  及  $f(x)$  的连续性可知,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上不变号.

若  $f(x) < 0$ , 令  $g(x) = xf(x) - \frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)$ , 则

$$g'(x) = xf'(x) + f(x) + \frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^3}f'\left(\frac{1}{x}\right) < 0,$$

故  $g(x)$  单调减少. 当  $x \in (0, 1)$  时,  $g(x) > g(1) = 0$ , 原命题成立.

若  $f(x) > 0$ , 则  $0 < f(x) < -f'(x)$ , 即  $f'(x) + f(x) < 0$ .

令  $\varphi(x) = f(x)e^x$ , 则  $\varphi'(x) = e^x[f(x) + f'(x)] < 0$ , 即  $\varphi(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调减少.

$\forall x \in (0, 1)$ ,  $\frac{1}{x} > 1 > x$ , 所以  $\varphi(x) > \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ , 即

$$f(x)e^x > f\left(\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} \quad \text{或} \quad xf(x) > xf\left(\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}-x}.$$

接下来只需证  $xf\left(\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}-x} > \frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)$ .

因  $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ , 所以即证  $x^2e^{\frac{1}{x}-x} > 1$ .

令  $h(x) = 2\ln x + \frac{1}{x} - x$ , 则  $h'(x) = -\frac{(x-1)^2}{x^2} < 0$ ,  $h(x)$  单调减少,

故  $h(x) > h(1) = 0$ ,  $x^2e^{\frac{1}{x}-x} > 1$ , 即  $xf(x) > \frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)$  ( $0 < x < 1$ ).

**错解:** 由假设可得  $0 < f(x) < -f'(x)$ , 故  $\frac{-f'(x)}{f(x)} > 1$ , 所以

$$\ln \frac{f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)} = -\int_x^{\frac{1}{x}} \frac{f'(t)}{f(t)} dt > \int_x^{\frac{1}{x}} dt = \frac{1}{x} - x, x \in (0, 1).$$

故  $\frac{f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)} > e^{\frac{1}{x}-x}$ . 又  $e^{\frac{1}{x}-x} > \frac{1}{x^2}$ , 即得

$$xf(x) > \frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right), x \in (0, 1).$$

错误原因在于使用 Newton-Leibniz 公式时要求函数  $\frac{f'(t)}{f(t)}$  在区间  $\left(x, \frac{1}{x}\right)$  上连续, 此处无法得出.

---

---

## CHAPTER 9

---

### 2020 年转专业考试真题

#### 1 解答题

1. 设  $f(x)$  是  $\mathbf{R}$  上的有界实函数, 且  $f\left(x + \frac{1}{11}\right) + f\left(x + \frac{1}{12}\right) = f(x) + f\left(x + \frac{23}{132}\right)$  ( $\forall x \in \mathbf{R}$ ), 求证:  
 $f(x)$  是周期函数.

2. 设数列  $\{a_n\}$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i = A$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - a_{n-1}) = 0$ , 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

3. 求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{3}} \left[ (x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}} \right]$ .

4. 求在  $\mathbf{R}$  上满足方程  $f(2020x) + f(2019x) = 2022x + 2021$  的连续解.

5. 讨论函数  $f(x) = [x] \sin \pi x$  的连续性与可导性 ( $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数).

6. 计算  $\frac{d^n}{dx^n} \left( \frac{1}{x^2 + a^2} \right) \Big|_{x=0}$ , 其中  $n$  是任意正整数.

注: 原题没有  $x = 0$ , 但那样无法正常求解, 怀疑打印错误, 此处加上. 答案会附上不考虑此条件的解法.

7. 设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导, 且  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ . 求证: 存在不同的  $\xi, \eta \in (0, 1)$ , 使  $f'(\xi)f'(\eta) = 1$ .

8. 设函数  $f(x)$  在  $x = 0$  处二阶可导, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + x + \frac{f(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = e^3$ , 证明:  $f''(0) = 4$ .



## CHAPTER 10

### 2020 年转专业考试真题参考答案

#### 1 解答题

1. **Proof.** 设  $F(x) = f\left(x + \frac{1}{11}\right) - f(x)$ , 则  $F\left(x + \frac{1}{12}\right) = F(x)$ , 故  $F(x)$  以  $\frac{1}{12}$  为周期, 也以 1 为周期, 即  $F(x+1) = F(x)$ , 从而

$$f\left(x + \frac{1}{11}\right) - f(x) = f\left(x + \frac{12}{11}\right) - f(x+1) \quad \text{或} \quad f(x+1) - f(x) = f\left(x + \frac{12}{11}\right) - f\left(x + \frac{1}{11}\right).$$

故  $f(x+1) - f(x)$  以  $\frac{1}{11}$  为周期, 也以 1 为周期, 则

$$f(x+n) - f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} [f(x+i+1) - f(x+i)] = n[f(x+1) - f(x)].$$

$$\text{即 } f(x+1) - f(x) = \frac{f(x+n) - f(x)}{n}.$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 由于  $f(x)$  有界, 所以  $f(x+1) - f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x+n) - f(x)}{n} = 0$ .

所以  $f(x)$  以 1 为周期.

2. **Solution.** 由 Abel 变换注意到

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i = na_n - \sum_{i=2}^n i(a_i - a_{i-1}) - a_1.$$

则有

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} a_i + \frac{\sum_{i=2}^n i(a_i - a_{i-1}) + a_1}{n}.$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 由题设  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} a_i = A$ . 根据 Stolz 定理得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=2}^n i(a_i - a_{i-1}) + a_1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - a_{n-1}) = 0,$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ .

3. **Solution.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ 1 + \frac{2}{3x} - \left(1 - \frac{2}{3x}\right) + o\left(\frac{1}{x}\right) \right] = \frac{4}{3}.$

4. **Solution.** 不妨考虑一般情况:  $f(\alpha x) + f(\beta x) = ax + b (\alpha > \beta).$

上式即  $f(x) + f\left(\frac{\beta}{\alpha}x\right) = \frac{ax}{\alpha} + b.$

所以

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{ax}{\alpha} + b - f\left(\frac{\beta}{\alpha}x\right) \\ &= \frac{ax}{\alpha} + b - \left[ \frac{ax}{\alpha} \frac{\beta}{\alpha} + b - f\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}x\right) \right] \\ &= \frac{ax}{\alpha} \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) + f\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}x\right). \end{aligned}$$

利用上式迭代可得

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{ax}{\alpha} \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) + \frac{ax}{\alpha} \frac{\beta^2}{\alpha^2} \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) + f\left(\frac{\beta^4}{\alpha^4}x\right) \\ &= \frac{ax}{\alpha} \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} - \frac{\beta^3}{\alpha^3}\right) + f\left(\frac{\beta^4}{\alpha^4}x\right) \\ &= \cdots = \frac{ax}{\alpha} \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} - \cdots - \frac{\beta^{2n-1}}{\alpha^{2n-1}}\right) + f\left(\frac{\beta^{2n}}{\alpha^{2n}}x\right). \end{aligned}$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 因  $\frac{\beta}{\alpha} < 1$ , 故  $\frac{\beta^{2n}}{\alpha^{2n}} \rightarrow 0$ , 且  $1 - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} - \cdots - \frac{\beta^{2n-1}}{\alpha^{2n-1}} \rightarrow \frac{1}{1 - \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}.$

利用  $f(x)$  的连续性, 得到

$$f(x) = \frac{ax}{\alpha} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} + f(0) = \frac{ax}{\alpha + \beta} + \frac{b}{2}.$$

将  $\alpha = 2020$ ,  $\beta = 2019$ ,  $a = 2022$ ,  $b = 2021$  代入, 立得  $f(x) = \frac{2022}{4039}x + \frac{2021}{2}.$

5. **Solution.**

(1) 连续性: 对任意非整数点  $x \notin \mathbf{Z}$ ,  $[x]$  在该点的某邻域内取常值, 且  $\sin \pi x$  连续, 故  $f(x) = [x] \sin \pi x$  在非整数点连续.

对任意整数点  $n \in \mathbf{Z}$ , 有

$$f(n) = n \sin(n\pi) = 0.$$

当  $x \rightarrow n^-$  时,

$$[x] = n - 1, \quad \sin \pi x \rightarrow \sin(n\pi) = 0,$$

所以  $f(x) \rightarrow (n - 1) \cdot 0 = 0$ . 当  $x \rightarrow n^+$  时,

$$[x] = n, \quad \sin \pi x \rightarrow 0,$$

所以  $f(x) \rightarrow n \cdot 0 = 0$ . 因此左右极限均等于  $f(n)$ , 故  $f(x)$  在整数点亦连续.

综上,  $f$  在  $\mathbf{R}$  上处处连续.

(2) 可导性: 对非整数点  $x \notin \mathbf{Z}$ ,  $[x] = k$  为常数, 则

$$f(x) = k \sin \pi x, \quad f'(x) = k\pi \cos \pi x$$

存在, 故  $f(x)$  在非整数点可导.

考察整数点  $x = n$  处  $f(x)$  的左右导数.

令  $h \rightarrow 0^-$ , 则

$$\begin{aligned} f(n+h) &= (n-1) \sin(\pi(n+h)) = (n-1)(-1)^n \sin(\pi h), \\ \frac{f(n+h) - f(n)}{h} &= (n-1)(-1)^n \frac{\sin(\pi h)}{h} \rightarrow (n-1)(-1)^n \pi. \end{aligned}$$

令  $h \rightarrow 0^+$ , 则

$$\begin{aligned} f(n+h) &= n \sin(\pi(n+h)) = n(-1)^n \sin(\pi h), \\ \frac{f(n+h) - f(n)}{h} &= n(-1)^n \frac{\sin(\pi h)}{h} \rightarrow n(-1)^n \pi. \end{aligned}$$

左右导数不相等, 故  $f$  在整数点不可导.

综上所述:  $f$  在  $\mathbf{R}$  上处处连续, 但仅在  $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$  上可导.

## 6. Solution.

法一. 注意到

$$\frac{1}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a^2} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x^2}{a^2}\right)^n = \frac{1}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{a^{2n}}.$$

由 Taylor 定理, 与  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$  对照, 故当  $n$  为奇数时,  $\left. \frac{d^n}{dx^n} \left( \frac{1}{x^2 + a^2} \right) \right|_{x=0} = 0$ .

当  $n$  为偶数时,  $\left. \frac{d^n}{dx^n} \left( \frac{1}{x^2 + a^2} \right) \right|_{x=0} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} n!}{a^{n+2}}.$

法二. 函数即  $(a^2 + x^2)y = 1$ . 由 Leibniz 公式可得

$$(x^2 + a^2)y^{(n)} + 2nxy^{(n-1)} + n(n-1)y^{(n-2)} = 0,$$

令  $x = 0$  得  $a^2 y^{(n)}(0) + n(n-1)y^{(n-2)}(0) = 0$ .

注意到  $y(0) = \frac{1}{a^2}$ ,  $y'(0) = 0$ . 当  $n$  为奇数时, 由上式易得  $y^{(n)}(0) = 0$ .

当  $n$  为偶数时,

$$\begin{aligned} y^{(n)}(0) &= \frac{y^{(n)}(0)}{y^{(n-2)}(0)} \cdot \frac{y^{(n-2)}(0)}{y^{(n-4)}(0)} \cdots \frac{y^{(2)}(0)}{y(0)} \cdot y(0) \\ &= -\frac{n(n-1)}{a^2} \cdot -\frac{(n-2)(n-3)}{a^2} \cdots \frac{2 \cdot 1}{a^2} \cdot \frac{1}{a^2} \\ &= \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} n!}{a^{n+2}}. \end{aligned}$$

当  $x \neq 0$  时, 引入复数:  $\frac{1}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2ai} \left( \frac{1}{x - ai} - \frac{1}{x + ai} \right).$

注意到

$$\left( \frac{1}{ax + b} \right)^{(n)} = \frac{(-a)^n \cdot n!}{(ax + b)^{n+1}}.$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} \left( \frac{1}{x^2 + a^2} \right) &= \frac{1}{2ai} \left( \frac{1}{x - ai} - \frac{1}{x + ai} \right)^{(n)} \\ &= \frac{(-1)^n n!}{2ai} \left[ \frac{1}{(x - ai)^{n+1}} - \frac{1}{(x + ai)^{n+1}} \right]. \end{aligned}$$

设  $x + ai = \rho e^{i\varphi}$ , 其中  $\rho = \sqrt{x^2 + a^2}$ ,  $\varphi = \arctan\left(\frac{a}{x}\right)$ . 利用欧拉公式

$$e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta,$$

则  $x - ai = \rho e^{-i\varphi}$ , 且

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x - ai)^{n+1}} - \frac{1}{(x + ai)^{n+1}} &= \rho^{-(n+1)} [e^{i(n+1)\varphi} - e^{-i(n+1)\varphi}] \\ &= \rho^{-(n+1)} [(\cos(n+1)\varphi + i \sin(n+1)\varphi) - (\cos(n+1)\varphi - i \sin(n+1)\varphi)] \\ &= 2i\rho^{-(n+1)} \sin(n+1)\varphi. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} \left( \frac{1}{x^2 + a^2} \right) &= \frac{(-1)^n n!}{2ai} \cdot 2i\rho^{-(n+1)} \sin(n+1)\varphi \\ &= \frac{(-1)^n n!}{a} \cdot \left( \sqrt{x^2 + a^2} \right)^{-(n+1)} \sin \left[ (n+1) \arctan \left( \frac{a}{x} \right) \right] \\ &= \frac{(-1)^n n!}{a(x^2 + a^2)^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \sin \left[ (n+1) \arctan \left( \frac{a}{x} \right) \right]. \end{aligned}$$

7. **Proof.** 令  $g(x) = f(x) + x - 1$ , 由于

$$g(0) = f(0) + 0 - 1 = -1 < 0, \quad g(1) = f(1) + 1 - 1 = 1 > 0,$$

由  $g(x)$  的连续性知  $\exists c \in (0, 1)$  使  $g(c) = 0$ , 即

$$f(c) = 1 - c.$$

在区间  $[0, c]$  上, Lagrange 中值定理给出  $\exists \eta \in (0, c)$  使

$$f'(\eta) = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = \frac{1 - c}{c}.$$

在区间  $[c, 1]$  上, Lagrange 中值定理给出  $\exists \xi \in (c, 1)$  使

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(c)}{1 - c} = \frac{c}{1 - c}.$$

故

$$f'(\xi) f'(\eta) = \frac{c}{1 - c} \cdot \frac{1 - c}{c} = 1,$$

且  $\xi \neq \eta$ . 证毕.

8. **Proof.**

原极限等价于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left( 1 + x + \frac{f(x)}{x} \right)}{x} = 3.$$

因此  $\ln \left( 1 + x + \frac{f(x)}{x} \right) \rightarrow 0$ ,  $x + \frac{f(x)}{x} \rightarrow 0$ ,  $\ln \left( 1 + x + \frac{f(x)}{x} \right) \sim x + \frac{f(x)}{x}$ , 从而  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 2$ .

因此  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \frac{f(x)}{x^2} = 0$ ,  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{f(x)}{x^2} = 0$ .

由 Taylor 公式可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}f''(0) = 2,$$

所以  $f''(0) = 4$ .

---

---

## CHAPTER 11

---

### 2019 年转专业考试真题

#### 1 解答题

1. 设函数  $y = f(x), x \in (-\infty, +\infty)$  的图像关于  $x = 2019, x = 2020$  均对称, 请判断函数  $y = f(x)$  是什么性质的函数, 并说明你的判断.

2. 设  $a_n > 0, b_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{a_{n+1}b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) > 0$ , 证明: 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$  存在.

3. 计算不定积分:

(1)  $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1} dx.$

(2)  $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx.^1$

---

<sup>1</sup>此题与 2024 年真题填空题第 6 题一致.

4. (1) 设函数  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内具有二阶导数且存在相等的最大值.  $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$ . 证明:  $\exists \xi \in (a, b)$  使得  $f''(\xi) = g''(\xi)$ .

(2) 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $f(a) = f(b) = 0$ . 证明:  $\exists \alpha \in (a, b)$  使得  $f'(\alpha) + \alpha f(\alpha) = 0$ .

5. 设  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $f(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}$ , 计算  $f(1)$ ,  $f(-1)$ .

6. 已知函数  $f(x)$  有连续导数, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f'(x)}{1 - e^{-x}} = 1$ . 问  $f(0)$  为何值时,  $f(0)$  为  $f(x)$  的极值, 并说明它是极大值还是极小值.

7. 设  $f(x) : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{R}$  是任一函数,  $x_0 \in \mathbf{I}$ , 证明:  $f(x)$  在  $x_0$  处可导的充要条件是: 存在一个函数  $g(x) : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{R}$ , 使:

(1)  $f(x) - f(x_0) = g(x)(x - x_0), \forall x \in \mathbf{I}$ .

(2)  $g(x)$  在  $x_0$  处连续且  $f'(x_0) = g(x_0)$ .

---

## CHAPTER 12

---

### 2019 年转专业考试真题参考答案

#### 1 解答题

1. **Solution.**  $f(x)$  是周期函数, 周期  $T = 2$ .

利用图像关于  $x = 2019$  和  $x = 2020$  的对称性可得

$$f(2019 + x) = f(2019 - x) \quad \text{或} \quad f(x) = f(2 \cdot 2019 - x),$$

$$f(2020 + x) = f(2020 - x) \quad \text{或} \quad f(x) = f(2 \cdot 2020 - x).$$

因此对于任意  $x$ ,

$$f(x) = f(2 \cdot 2020 - (2 \cdot 2019 - x)) = f(x + 2).$$

即  $f(x)$  具有周期 2.

2. **Proof.** 由条件

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{a_{n+1}b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) = L > 0,$$

取常数  $\delta$  满足  $0 < \delta < \frac{L}{2}$ , 则存在  $N \in \mathbf{N}$ , 当  $n \geq N$  时有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} > \delta \quad \text{或} \quad \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} > \delta a_{n+1},$$

即

$$a_{n+1} < \frac{1}{\delta} \left( \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right).$$

对  $n = N, N+1, \dots, m$  累加, 得

$$\sum_{n=N}^m a_{n+1} < \frac{1}{\delta} \sum_{n=N}^m \left( \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right) = \frac{1}{\delta} \left( \frac{a_N}{b_N} - \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}} \right) \leq \frac{a_N}{\delta b_N}.$$

因此正项级数  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  的部分和  $S_{m+1} = \sum_{k=1}^{m+1} a_k = \sum_{k=1}^N a_k + \sum_{k=N+1}^{m+1} a_k$  有上界,

显然  $\{S_n\}$  单调增加, 所以  $\{S_n\}$  存在极限, 故  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  收敛.

## 3. Solution.

(1) 令

$$t = x - \frac{1}{x}, \quad dt = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx.$$

注意到

$$x^4 - x^2 + 1 = x^2 \left[ \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 1 \right] = x^2(t^2 + 1),$$

于是

$$\frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1} dx = \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{t^2 + 1} dx = \frac{dt}{t^2 + 1}.$$

故

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1} dx = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \arctan t + C = \arctan \left(x - \frac{1}{x}\right) + C.$$

(2) 参见 2024 年真题填空题第 6 题 解析.

## 4. Proof.

(1) 令  $h(x) = f(x) - g(x)$ , 由题意知

$$h(a) = f(a) - g(a) = 0, \quad h(b) = f(b) - g(b) = 0,$$

且  $f, g$  在  $(a, b)$  上有相等的最大值, 设  $x_0 \in (a, b)$  为一极大点, 则

$$f(x_0) = g(x_0),$$

亦即  $h(x_0) = 0$ .于是  $h$  在  $[a, b]$  上至少有三个零点  $x = a, x_0, b$ . 由 Rolle 定理, 分别在  $(a, x_0)$  与  $(x_0, b)$  上存在

$$x_1 \in (a, x_0), \quad x_2 \in (x_0, b) \text{ 使得 } h'(x_1) = 0, \quad h'(x_2) = 0.$$

再对区间  $[x_1, x_2]$  应用 Rolle 定理, 得  $\exists \xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$  使  $h''(\xi) = 0$ .

此即

$$f''(\xi) = g''(\xi).$$

(2) 令  $H(x) = e^{\frac{x^2}{2}} f(x)$ , 则

$$H(a) = e^{\frac{a^2}{2}} f(a) = 0, \quad H(b) = e^{\frac{b^2}{2}} f(b) = 0.$$

由 Rolle 定理,  $\exists \alpha \in (a, b)$  使

$$H'(\alpha) = 0.$$

注意到

$$H'(x) = \frac{d}{dx} \left( e^{\frac{x^2}{2}} \right) f(x) + e^{\frac{x^2}{2}} f'(x) = e^{\frac{x^2}{2}} (xf(x) + f'(x)).$$

由于  $e^{\frac{x^2}{2}} \neq 0$ , 故在  $x = \alpha$  处

$$f'(\alpha) + \alpha f(\alpha) = 0.$$



5. **Solution.** 记

$$u(x) = (x-1)^n, \quad v(x) = (x+1)^n,$$

则

$$(x^2-1)^n = u(x)v(x).$$

由 Leibniz 公式

$$\frac{d^n}{dx^n}[u(x)v(x)] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x).$$

注意到

$$u^{(k)}(1) = \begin{cases} 0, & k < n, \\ n!, & k = n. \end{cases}$$

所以

$$\left. \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \right|_{x=1} = \binom{n}{n} u^{(n)}(1) v^{(0)}(1) = n! 2^n.$$

因此

$$f(1) = \frac{1}{2^n n!} \left. \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \right|_{x=1} = 1.$$

类似地, 在  $x = -1$  处

$$v^{(k)}(-1) = \begin{cases} 0, & k < n, \\ n!, & k = n. \end{cases}$$

所以

$$\left. \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \right|_{x=-1} = \binom{n}{0} u^{(0)}(-1) v^{(n)}(-1) = (-1)^n n! 2^n.$$

因此

$$f(-1) = \frac{1}{2^n n!} \left. \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \right|_{x=-1} = (-1)^n.$$

6. **Solution.** 由

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f'(x)}{1 - e^{-x}} = 1,$$

注意到  $x \rightarrow 0$  时  $1 - e^{-x} \sim x$ , 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + f'(x)) = f(0) + f'(0) = 0.$$

要使  $x = 0$  成为极值点, 必有  $f'(0) = 0$ , 故

$$f(0) = 0.$$

下面分析极值. 令  $g(x) = e^x f(x)$ , 则

$$g'(x) = e^x (f(x) + f'(x)),$$

由题中极限的保号性可知, 当  $x \rightarrow 0^+$  时  $g'(x) > 0$ , 当  $x \rightarrow 0^-$  时  $g'(x) < 0$ . 故  $g$  在 0 处取得极小值. 因  $e^x > 0$ ,  $g$  和  $f$  在极值点的凹凸性一致, 因此  $f$  在  $x = 0$  也取得极小值.

## 7. Proof

必要性: 假设  $f$  在  $x_0$  处可导, 记  $f'(x_0) = A$ . 定义

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, & x \neq x_0, \\ A, & x = x_0. \end{cases}$$

则对一切  $x \in \mathbf{I}$  都有

$$f(x) - f(x_0) = g(x)(x - x_0),$$

即满足 (1) .

又

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = A = g(x_0),$$

故  $g$  在  $x_0$  处连续, 且  $g(x_0) = f'(x_0)$ , 满足 (2) .

充分性: 若存在满足 (1) (2) 的函数  $g$ , 则

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g(x) \quad (x \neq x_0),$$

方程两端令  $x \rightarrow x_0$ , 由  $g$  在  $x_0$  处连续得

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0).$$

因此  $f$  在  $x_0$  处可导, 且

$$f'(x_0) = g(x_0).$$

这就完成了充分性的证明.

---

---

## CHAPTER 13

---

### 2018 年转专业考试真题

#### 1 解答题

1. 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + b^n + 2^{-n}b^{2n})^{\frac{1}{n}} (b > 0)$ .

2. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}$ .<sup>1</sup>

3. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \arctan \frac{2}{k^2}$ .<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup>此题与 2024 年真题填空题第 2 题一致.

<sup>2</sup>此题与 2024 年真题填空题第 1 题一致.

4. 已知  $f(x), g(x)$  为  $(-\infty, +\infty)$  上的非常值连续可微函数,  $f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$ ,  $g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$ , 且  $f'(0) = 0$ . 求证:  $f^2(x) + g^2(x) = 1$ .

5. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可微, 试证:  $f'(x)$  在  $[a, b]$  上连续的充要条件是

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |h| < \delta, \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < \varepsilon, \text{ 对一切 } x \in [a, b] \text{ 成立.}$$

6. 设  $f_n(x) = \cos x + \cos^2 x + \cdots + \cos^n x$ , 求证:

(1) 对任意自然数  $n$ , 方程  $f_n(x) = 1$  在  $\left[0, \frac{\pi}{3}\right)$  内有唯一根.

(2) 设  $x_n \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right)$  是  $f_n(x) = 1$  的根, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\pi}{3}$ .

## CHAPTER 14

### 2018 年转专业考试真题参考答案

#### 1 填空题 (每题 8 分, 共 48 分)

1. **Solution.** 
$$\begin{cases} 1, & 0 < b \leq 1, \\ b, & 1 < b \leq 2, \\ \frac{b^2}{2}, & b > 2. \end{cases}$$

记  $L_n = \left(1 + b^n + \left(\frac{b^2}{2}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}$ . 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} = \max\{a, b, c\}.$$

若  $0 < b \leq 1$ , 则  $\max\left\{1, b, \frac{b^2}{2}\right\} = 1$ , 故  $\lim L_n = 1$ .

若  $1 < b \leq 2$ , 则  $\max\left\{1, b, \frac{b^2}{2}\right\} = b$ , 故  $\lim L_n = b$ .

若  $b > 2$ , 则  $\max\left\{1, b, \frac{b^2}{2}\right\} = \frac{b^2}{2}$ , 故  $\lim L_n = \frac{b^2}{2}$ .

注意到在临界点  $b = 1$  与  $b = 2$ , 两种取法给出的极限均分别为 1 与 2, 结论保持一致.

2. 参见 2024 年真题填空题第 2 题 **解析**.

3. 参见 2024 年真题填空题第 1 题 **解析**.

4. **Proof.** 在函数方程组

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y), \\ g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y) \end{cases}$$

中令  $y = 0$ , 得

$$f(x) = f(x)f(0) - g(x)g(0), \quad (1)$$

$$g(x) = f(x)g(0) + g(x)f(0). \quad (2)$$

令  $x = y = 0$ , 得

$$f(0) = f^2(0) - g^2(0), \quad (3)$$

$$g(0) = 2f(0)g(0). \quad (4)$$

由 (4) 式得  $g(0) = 0$  或  $f(0) = \frac{1}{2}$ .

若  $f(0) = \frac{1}{2}$ , 代入 (3) 式得  $g^2(0) = -\frac{1}{4}$ , 显然不可能. 所以  $g(0) = 0$ , 代入 (3) 式得  $f(0) = 0$  或  $f(0) = 1$ .

将  $g(0) = 0$  代入 (1) 式得  $f(x) = f(x)f(0)$ , 由于  $f$  是非常值函数, 必有  $f(0) = 1$ .

计算

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{f(x)(f(t) - f(0))}{t} - \frac{g(x)(g(t) - g(0))}{t} \right) = -g'(0)g(x),$$

$$g'(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(x+t) - g(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{g(x)(f(t) - f(0))}{t} + \frac{f(x)(g(t) - g(0))}{t} \right) = g'(0)f(x).$$

故

$$(f^2(x) + g^2(x))' = 2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x) \equiv 0.$$

所以  $f^2(x) + g^2(x) \equiv f^2(0) + g^2(0) = 1$ .

## 5. Proof.

必要性. 设  $f'(x)$  在  $[a, b]$  上连续. 由 Cantor 定理, 闭区间上的连续函数必一致连续. 于是,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使得  $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ , 当  $|x_1 - x_2| < \delta$  时, 必有

$$|f'(x_1) - f'(x_2)| < \varepsilon.$$

$\forall x \in [a, b]$  及  $0 < |h| < \delta$ , 由 Lagrange 中值定理可得, 存在  $\xi$  介于  $x$  与  $x+h$  之间, 使得

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(\xi).$$

因为  $|\xi - x| < |h| < \delta$ , 由  $f'(x)$  的一致连续性即得

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| = |f'(\xi) - f'(x)| < \varepsilon.$$

充分性. 反过来, 假设  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使得当  $0 < |h| < \delta$  且  $x \in [a, b]$  时, 都有

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < \varepsilon.$$

$\forall x_0 \in [a, b]$ , 并取同样的  $\delta > 0$ . 对于  $0 < |h| < \delta$  且  $x_0 + h \in [a, b]$ , 有

$$\begin{aligned} |f'(x_0 + h) - f'(x_0)| &\leq \left| f'(x_0 + h) - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right| + \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon, \end{aligned}$$

其中第一项应用了在点  $x = x_0 + h$  处对增量  $-h$  的假设条件. 由此可见

$$\lim_{h \rightarrow 0} f'(x_0 + h) = f'(x_0),$$

即  $f'(x)$  在任意  $x_0 \in [a, b]$  处连续, 即  $f'(x)$  在  $[a, b]$  上连续.

## 6. Proof.

(1)  $\forall n \in \mathbf{N}$ , 计算

$$f'_n(x) = \sum_{k=1}^n k \cos^{k-1} x (-\sin x) = -\sin x \sum_{k=1}^n k \cos^{k-1} x < 0, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right).$$

故  $f_n$  在  $\left[0, \frac{\pi}{3}\right)$  上严格单调递减. 又

$$f_n(0) = n > 1, \quad f_n\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1.$$

由介值定理可知方程  $f_n(x) = 1$  在  $\left[0, \frac{\pi}{3}\right)$  内恰有一根, 且因严格单调, 此根唯一.

(2) 利用等比数列求和,

$$f_n(x) = \cos x + \cos^2 x + \cdots + \cos^n x = \frac{\cos x (1 - \cos^n x)}{1 - \cos x}.$$

令  $x = x_n$  满足  $f_n(x_n) = 1$ , 则  $\cos x_n (1 - \cos^n x_n) = 1 - \cos x_n$ , 即

$$\cos^{n+1} x_n = 2 \cos x_n - 1.$$

由于  $x_n \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right)$  时, 有  $\frac{1}{2} < \cos x_n < 1$ , 故当  $n \rightarrow \infty$  时

$$\cos^{n+1} x_n \rightarrow 0,$$

从而  $2 \cos x_n - 1 \rightarrow 0$ ,  $\cos x_n \rightarrow \frac{1}{2}$ ,  $x_n \rightarrow \frac{\pi}{3}$ .

华中科技大学转专业交流群



---

## CHAPTER 15

---

### 2017 年转专业考试真题

#### 1 解答题

1. 证明数列  $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \dots$  存在极限 (不可用单调有界必有极限的结论来证), 且求出该极限.

2. 给定一个数列  $\{x_n\} (n = 1, 2, \dots)$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_{n-2}) = 0$ , 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_n - x_{n-1})}{n} = 0$ .

3. 设  $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0 \\ f'(0), & x = 0 \end{cases}$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上存在二阶导数, 问  $g(x)$  在  $\mathbf{R}$  上是否存在连续导数, 存在请证明, 不存在请说明理由.

4. 设  $f(x) : I \rightarrow \mathbf{R}$  是任一函数,  $x_0 \in I$ , 证明:  $f(x)$  在  $x_0$  处可导的充要条件是: 存在一个函数  $g(x) : I \rightarrow \mathbf{R}$ , 使:

$$(1) f(x) - f(x_0) = g(x)(x - x_0), \forall x \in I$$

$$(2) g(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 处连续且 } f'(x_0) = g(x_0)$$

5. 设  $f(x)$  在  $x = 0$  的某领域内有连续一阶导数, 且  $f'(0) = 0, f''(0)$  存在, 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\ln(1+x))}{x^3}$

6. 求最小正数  $\alpha$ , 使得:  $(1 + \frac{1}{x})^{x+\alpha} > e (x > 0)$ .

---

## CHAPTER 16

---

### 2017 年转专业考试真题参考答案

#### 1 解答题

1. **Proof.** 记数列  $(x_n)$  满足

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n} \quad (n \geq 1).$$

若极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$  存在, 则令  $n \rightarrow \infty$  得

$$L = \frac{1}{1+L} \quad \Rightarrow \quad L^2 + L - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad L = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

下面证明极限存在且等于上述  $L$ . 考虑

$$|x_{n+1} - L| = \left| \frac{1}{1+x_n} - \frac{1}{1+L} \right| = \frac{|x_n - L|}{(1+x_n)(1+L)}.$$

由于对所有  $n$  有  $x_n > 0$  且

$$1+L = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1,$$

故

$$|x_{n+1} - L| < \frac{|x_n - L|}{1+L} = L|x_n - L|,$$

又  $0 < L < 1$ , 递推便得

$$|x_n - L| < L^{n-1}|x_1 - L| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

因此数列  $(x_n)$  收敛, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

2. **Proof.** 设  $a_n = x_n - x_{n-1}$ , 则条件可以转化为  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + a_{n-1}) = 0$ , 即证  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$ .

$\forall \varepsilon > 0$ , 由极限的定义可知  $\exists N_1 \in \mathbf{N}^*$ , 当  $n > N_1$  时,  $|a_n + a_{n-1}| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

对  $n > N_1$ , 由  $a_n = (a_n + a_{n-1}) - a_{n-1}$ , 两边取绝对值有

$$|a_n| \leq |a_n + a_{n-1}| + |a_{n-1}| < \frac{\varepsilon}{2} + |a_{n-1}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + |a_{n-2}| < \cdots < (n - N_1) \cdot \frac{\varepsilon}{2} + |a_{N_1}|.$$

两边同除  $n$ ,

$$\frac{|a_n|}{n} < \frac{n - N_1}{n} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|a_{N_1}|}{n}.$$

由于  $n \rightarrow \infty$  时,  $\frac{n - N_1}{n} \rightarrow 1$ , 故存在  $N_2$ , 当  $n > N_2$  时,  $\frac{n - N_1}{n} < 1$ ; 同理,  $\frac{|a_{N_1}|}{n} \rightarrow 0$ , 所以存在  $N_3$ , 当  $n > N_3$  时,  $\frac{|a_{N_1}|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ .

取  $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$ , 则当  $n > N$  时, 有  $\frac{|a_n|}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ . 因此,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$ , 此即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0.$$

(本题亦可用 Stolz-Cesàro 公式证明.)

**3. Proof.** 因为  $f \in C^2(\mathbb{R})$  且  $f(0) = 0$ , 我们分两步考察  $g(x)$  的导数并验证其连续性.

对于  $x \neq 0$  的情形,  $g(x)$  在  $x \neq 0$  上连续是显然的.

对于在  $x = 0$  处的可导性与连续性, 首先计算  $g'(0)$ :

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x} - f'(0)}{x}.$$

利用  $f$  在 0 点的二阶 Taylor 展开

$$f(x) = f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2),$$

则

$$\frac{f(x)}{x} = f'(0) + \frac{f''(0)}{2}x + o(x),$$

因此

$$\frac{\frac{f(x)}{x} - f'(0)}{x} = \frac{\frac{f''(0)}{2}x + o(x)}{x} = \frac{f''(0)}{2} + o(1) \rightarrow \frac{f''(0)}{2}.$$

故

$$g'(0) = \frac{f''(0)}{2}.$$

接着验证  $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = g'(0)$ . 当  $x \neq 0$  时

$$g'(x) = \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2},$$

将  $f$  的 Taylor 展开代入分子:

$$x(f'(0) + f''(0)x + o(x)) - \left(f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)\right) = \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2).$$

故

$$g'(x) = \frac{\frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{f''(0)}{2} + o(1) \rightarrow \frac{f''(0)}{2} = g'(0).$$

综上,  $g'(x)$  在全体  $\mathbb{R}$  上存在且在  $x=0$  处与左右极限相合, 所以  $g \in C^1(\mathbb{R})$ .

4. **Proof** 答案是肯定的.

必要性: 假设  $f$  在  $x_0$  处可导, 记  $f'(x_0) = A$ . 定义

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, & x \neq x_0, \\ A, & x = x_0. \end{cases}$$

则对一切  $x \in I$  都有

$$f(x) - f(x_0) = g(x)(x - x_0),$$

即满足 (1). 又

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = A = g(x_0),$$

故  $g$  在  $x_0$  处连续, 且  $g(x_0) = f'(x_0)$ , 满足 (2).

充分性: 反过来, 若存在满足 (1)(2) 的函数  $g$ , 则

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g(x) \quad (x \neq x_0),$$

两端令  $x \rightarrow x_0$ , 由  $g$  在  $x_0$  连续得

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0).$$

因此  $f$  在  $x_0$  处可导, 且

$$f'(x_0) = g(x_0).$$

这就完成了充要性证明.

5. **Solution.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\ln(1+x))}{x^3} = \frac{1}{2} f''(0).$

由一阶微分中值定理, 存在  $t$  介于  $\ln(1+x)$  与  $x$  之间, 使得

$$f(x) - f(\ln(1+x)) = f'(t)(x - \ln(1+x)).$$

又对  $x$  作泰勒展开:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

$$x - \ln(1+x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

由于  $f'(0) = 0$  且  $f''(0)$  存在, 对  $t \rightarrow 0$  亦有

$$f'(t) = f'(0) + f''(0)t + o(t) = f''(0)t + o(t).$$

因此

$$\begin{aligned} f(x) - f(\ln(1+x)) &= (f''(0)t + o(t)) \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) \\ &= \frac{f''(0)t}{2} x^2 + o(x^3). \end{aligned}$$

又由于  $t$  介于  $\ln(1+x)$  与  $x$  之间, 故  $\lim_{x \rightarrow 0} t/x = 1$ . 于是

$$\frac{f(x) - f(\ln(1+x))}{x^3} = \frac{f''(0)t}{2} \frac{x^2}{x^3} + o(1) \rightarrow \frac{1}{2} f''(0).$$

6. **Solution**  $\frac{1}{2}$ .

两边取对数, 原不等式等价于

$$(x+\alpha) \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > 1 \iff \alpha > \frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} - x.$$

令

$$t = \frac{1}{x} > 0, \quad f(t) = \frac{1}{\ln(1+t)} - \frac{1}{t}.$$

则条件化为  $\alpha > f(t)$  对所有  $t > 0$  都成立, 故

$$\alpha \geq \sup_{t>0} f(t).$$

计算

$$f'(t) = \frac{-\frac{1}{1+t}}{[\ln(1+t)]^2} + \frac{1}{t^2} = \frac{-\frac{t^2}{1+t} + [\ln(1+t)]^2}{t^2[\ln(1+t)]^2}.$$

令  $g(t) = -\frac{t^2}{1+t} + [\ln(1+t)]^2$ , 则

$$g'(t) = -\frac{2t(1+t) - t^2}{(1+t)^2} + \frac{2\ln(1+t)}{1+t} = \frac{2}{1+t} \left[ \ln(1+t) - \frac{t^2 + 2t}{2(1+t)} \right].$$

令  $h(t) = \ln(1+t) - \frac{t^2 + 2t}{2(1+t)}$ , 则

$$h'(t) = \frac{1}{t+1} - \frac{(2t+2)(t+1) - (t^2+2t)}{2(t+1)^2} = -\frac{t^2}{2(t+1)^2}.$$

所以  $h'(t) < 0$ ,  $h(t) < h(0) = 0$ , 则  $g'(t) < 0$ ,  $g(t) < g(0) = 0$ , 故  $f'(t) < 0$ ,  $f$  在  $(0, +\infty)$  上单调减少. 因此

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} f(t) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{\ln(1+t)} - \frac{1}{t} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - \ln(1+t)}{t \ln(1+t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - (t - \frac{t^2}{2} + o(t^2))}{t^2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

综上, 对任意  $x > 0$  不等式  $(1 + \frac{1}{x})^{x+\alpha} > e$  当且仅当  $\alpha \geq \frac{1}{2}$ .

因此所求最小正数为  $\frac{1}{2}$ .

---

---

## CHAPTER 17

---

### 2015 年转专业考试真题

#### 1 解答题

1. 一道错题.

2. 用三种方法计算数列极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n$ .

3. 设  $n \in N^*$ ,  $f(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}$ , 计算  $f(1)$ 、 $f(-1)$ .

4. 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有连续导函数  $f'(x)$ , 对  $(a, b)$  内任意  $\alpha$ , 是否可找到  $x_1, x_2$  ( $x_1 < \alpha < x_2$ ), 使得  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\alpha)$  成立. 若成立请证明, 若不成立请举出反例.

5. 设  $f(x)$  在  $x = 0$  的某领域内有连续一阶导数, 且  $f'(0) = 0, f''(0)$  存在, 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\ln(1+x))}{x^3}$ .

6. 计算不定积分:  $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1} dx$ .

7. 计算不定积分:  $\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx$ .

8. 设  $f_n(x) = \cos x + \cos^2 x + \cdots + \cos^n x$ , 求证:

(1) 对任意自然数  $n$ , 方程  $f_n(x) = 1$  在  $[0, \frac{\pi}{3})$  内有唯一根.

(2) 设  $x_n \in [0, \frac{\pi}{3})$  是  $f_n(x) = 1$  的根, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\pi}{3}$ .



## CHAPTER 18

### 2015 年转专业考试真题参考答案

#### 1 解答题

2. Solution.  $e$ .

方法一：对数与泰勒展开

令

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n, \quad \ln a_n = n \ln \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right).$$

对  $\ln(1+x)$  作泰勒展开 ( $x = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \rightarrow 0$ ):

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

于是

$$\ln a_n = n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{2} n \left(\frac{1}{n^2} + 2\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + o(1) \rightarrow 1.$$

故  $a_n = \exp(\ln a_n) \rightarrow e$ .

方法二：夹挤准则

对于充分大的  $n$ , 有

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1},$$

故

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n.$$

当  $n \rightarrow \infty$  时,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e, \quad \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \rightarrow e \cdot 1 = e.$$

由夹挤准则得极限为  $e$ .

方法三：作指数基底

设

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}, \quad n = \frac{1 + \frac{1}{n}}{x_n},$$

则

$$\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n = (1 + x_n)^{\frac{1 + \frac{1}{n}}{x_n}} = \left[(1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}}\right]^{1 + \frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{1+0} = e.$$

3. Solution. 记

$$u(x) = (x-1)^n, \quad v(x) = (x+1)^n,$$

则

$$(x^2-1)^n = u(x)v(x).$$

由 Leibniz 公式

$$\frac{d^n}{dx^n}[u(x)v(x)] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x).$$

注意到

$$u^{(k)}(1) = \begin{cases} 0, & k < n, \\ n!, & k = n, \end{cases} \quad v^{(m)}(1) = (2)^n \quad (m = 0, \dots, n),$$

所以在  $x=1$  处上述求和仅  $k=n$  一项不为零:

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \Big|_{x=1} = \binom{n}{n} u^{(n)}(1) v^{(0)}(1) = n! 2^n.$$

由此

$$f(1) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \Big|_{x=1} = 1.$$

类似地, 在  $x=-1$  处

$$u^{(k)}(-1) = \begin{cases} 0, & k < n, \\ (-1)^n n!, & k = n, \end{cases} \quad v^{(m)}(-1) = 0 \quad (m < n), \quad v^{(n)}(-1) = n!,$$

故

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \Big|_{x=-1} = \binom{n}{0} u^{(0)}(-1) v^{(n)}(-1) + \binom{n}{n} u^{(n)}(-1) v^{(0)}(-1) = (-1)^n n! 2^n.$$

于是

$$f(-1) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \Big|_{x=-1} = (-1)^n.$$

4. Solution. 不成立. 下面给出反例.

反例 1. 令

$$f(x) = x^3, \quad [a, b] = [-1, 1], \quad \alpha = 0.$$

则

$$f'(x) = 3x^2, \quad f'(0) = 0.$$

而对任意  $x_1 < 0 < x_2$ ,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^3 - x_1^3}{x_2 - x_1} = x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2 > 0$$

不可能等于  $f'(0) = 0$ . 故不存在  $x_1 < 0 < x_2$  使得  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(0)$ .

反例 2. 令

$$f(x) = \sin x, \quad [a, b] = [-\pi, \pi], \quad \alpha = 0.$$

则

$$f'(x) = \cos x, \quad f'(0) = 1.$$

而对任意  $x_1 < 0 < x_2$ ,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\sin x_2 - \sin x_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 \cos\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right) \sin\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)}{x_2 - x_1} < \frac{2 \cdot 1 \cdot \frac{x_2-x_1}{2}}{x_2 - x_1} = 1,$$

且当  $x_1 \rightarrow 0^-$  或  $x_2 \rightarrow 0^+$  时, 上式仍小于 1. 因此也无法取到  $f'(0) = 1$ .

5. **Solution.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\ln(1+x))}{x^3} = \frac{1}{2} f''(0).$

由一阶微分中值定理, 存在  $t$  介于  $\ln(1+x)$  与  $x$  之间, 使得

$$f(x) - f(\ln(1+x)) = f'(t)(x - \ln(1+x)).$$

又对  $x$  作泰勒展开:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

$$x - \ln(1+x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

由于  $f'(0) = 0$  且  $f''(0)$  存在, 对  $t \rightarrow 0$  亦有

$$f'(t) = f'(0) + f''(0)t + o(t) = f''(0)t + o(t).$$

因此

$$\begin{aligned} f(x) - f(\ln(1+x)) &= (f''(0)t + o(t))\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \\ &= \frac{f''(0)t}{2} x^2 + o(x^3). \end{aligned}$$

又由于  $t$  介于  $\ln(1+x)$  与  $x$  之间, 故  $\lim_{x \rightarrow 0} t/x = 1$ . 于是

$$\frac{f(x) - f(\ln(1+x))}{x^3} = \frac{f''(0)t}{2} \frac{x^2}{x^3} + o(1) \rightarrow \frac{1}{2} f''(0).$$

6. **Solution.** 令

$$t = x - \frac{1}{x}, \quad dt = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx.$$

注意到

$$x^4 - x^2 + 1 = x^2 \left( \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 1 \right) = x^2(t^2 + 1),$$

于是

$$\frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1} dx = \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{t^2 + 1} dx = \frac{dt}{t^2 + 1}.$$

故

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1} dx = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \arctan t + C = \arctan\left(x - \frac{1}{x}\right) + C.$$

7. **Solution.** 令

$$t = \sqrt{e^x - 1}, \quad e^x = t^2 + 1, \quad x = \ln(t^2 + 1), \quad dt = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} dx = \frac{t}{2} dx \Rightarrow e^x dx = 2t dt.$$

则

$$\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx = \int \frac{x (2t dt)}{t} = 2 \int x dt = 2 \int \ln(t^2 + 1) dt.$$

对  $\int \ln(t^2 + 1) dt$  分部积分,

$$\int \ln(t^2 + 1) dt = t \ln(t^2 + 1) - \int \frac{2t^2}{t^2 + 1} dt = t \ln(t^2 + 1) - 2 \int \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1}\right) dt = t \ln(t^2 + 1) - 2t + 2 \arctan t + C.$$

因此

$$2 \int \ln(t^2 + 1) dt = 2t \ln(t^2 + 1) - 4t + 4 \arctan t + C.$$

回代  $t = \sqrt{e^x - 1}$ , 得

$$\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx = 2\sqrt{e^x - 1} \ln(e^x) - 4\sqrt{e^x - 1} + 4 \arctan \sqrt{e^x - 1} + C = 2x\sqrt{e^x - 1} - 4\sqrt{e^x - 1} + 4 \arctan \sqrt{e^x - 1} + C.$$

### 8. Proof.

(1) 对任意  $n \in \mathbb{N}$ , 计算

$$f'_n(x) = \sum_{k=1}^n k \cos^{k-1} x (-\sin x) = -\sin x \sum_{k=1}^n k \cos^{k-1} x < 0, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right).$$

故  $f_n$  在  $[0, \frac{\pi}{3}]$  上严格单调递减. 又

$$f_n(0) = n > 1, \quad f_n\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1.$$

由介值定理可知方程  $f_n(x) = 1$  在  $[0, \frac{\pi}{3})$  内恰有一根, 且因严格单调, 此根唯一.

(2) 利用等比数列求和,

$$f_n(x) = \cos x + \cos^2 x + \cdots + \cos^n x = \frac{\cos x(1 - \cos^n x)}{1 - \cos x}.$$

令  $x = x_n$  满足  $f_n(x_n) = 1$ , 则

$$\cos x_n(1 - \cos^n x_n) = 1 - \cos x_n \Rightarrow \cos^{n+1} x_n = 2 \cos x_n - 1.$$

由于  $x_n \in [0, \frac{\pi}{3})$ , 有  $1/2 < \cos x_n < 1$ , 故当  $n \rightarrow \infty$  时

$$\cos^{n+1} x_n \rightarrow 0,$$

从而  $2 \cos x_n - 1 \rightarrow 0 \Rightarrow \cos x_n \rightarrow \frac{1}{2} \Rightarrow x_n \rightarrow \frac{\pi}{3}$ . 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\pi}{3}$ .

---

---

## CHAPTER 19

---

### 2014 年转专业考试真题

#### 1 解答题

1. 证明: 若对  $\forall x, y \in (-\infty, +\infty)$ , 有  $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ , 且  $f(0) = 0$ , 则  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ ,  $\forall x, y \in (-\infty, +\infty)$ .

2. 用三种方法计算数列极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n$ .

3. 设  $n \in N^*$ ,  $f(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}$ , 计算  $f(1)$ 、 $f(-1)$ .

4. 设  $f(x)$  在  $x = 0$  的某邻域内有连续的一阶导数, 且  $f'(0) = 0$ ,  $f''(0)$  存在, 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\ln(1 + x))}{x^3}$ .

5. 设  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  有定义, 对任意  $x, y \in (0, +\infty)$  有  $f(xy) = f(x)f(y)$  且  $f'(1) = n > 0$ , 求  $f(x)$ .

6. 计算不定积分:  $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1} dx$

7. 计算不定积分:  $\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx$

8. 设  $\mu \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ ,  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上非负, 且  $f''(x) \leq 0, x \in [0, 1]$ , 证明:  $f(t) \geq \mu f(s), \forall t \in [\mu, 1 - \mu], \forall s \in [0, 1]$ .

---

## CHAPTER 20

---

### 2014 年转专业考试真题参考答案

#### 1 解答题

##### 1. Solution.

令  $y = 0$ , 由题意得

$$|f(x) - f(0)| = |x - 0| \implies |f(x)| = |x|, \forall x.$$

又由保距函数必为单射, 故对任意  $x$ , 必有

$$f(x) = x \quad \text{或} \quad f(x) = -x.$$

下取  $x = 1$ , 分两种情况讨论:

(i) 若  $f(1) = 1$ . 设存在  $x_0 > 0$  使  $f(x_0) = -x_0$ , 则

$$|f(x_0) - f(1)| = |(-x_0) - 1| = x_0 + 1,$$

但保距性要求

$$|f(x_0) - f(1)| = |x_0 - 1|,$$

即  $x_0 + 1 = |x_0 - 1|$ . 若  $x_0 \geq 1$ ,  $x_0 + 1 = x_0 - 1$ , 显然矛盾; 若  $0 < x_0 < 1$ , 则  $x_0 + 1 = 1 - x_0$  解得  $x_0 = 0$ , 矛盾. 故对所有  $x > 0$  均有  $f(x) = x$ . 由  $|f(-x)| = |-x|$  及单射性, 又可推出  $f(-x) = -x$ . 于是

$$f(x) = x, \quad \forall x.$$

(ii) 若  $f(1) = -1$ . 类似论证可得对所有  $x > 0$ , 必  $f(x) = -x$ , 并进一步推出  $f(-x) = x$ , 即

$$f(x) = -x, \quad \forall x.$$

于是在两种情形下, 都有

$$f(x + y) = \pm(x + y) = \pm x \pm y = f(x) + f(y),$$

证毕.

##### 2. Solution. e.

方法一: 对数与泰勒展开

令

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n, \quad \ln a_n = n \ln \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right).$$

对  $\ln(1+x)$  作泰勒展开 ( $x = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \rightarrow 0$ ):

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

于是

$$\ln a_n = n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{2} n \left(\frac{1}{n^2} + 2\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + o(1) \rightarrow 1.$$

故  $a_n = \exp(\ln a_n) \rightarrow e$ .

**方法二：夹挤准则**

对于充分大的  $n$ , 有

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1},$$

故

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n.$$

当  $n \rightarrow \infty$  时,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e, \quad \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \rightarrow e \cdot 1 = e.$$

由夹挤准则得极限为  $e$ .

**方法三：作指数基底**

设

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}, \quad n = \frac{1 + \frac{1}{n}}{x_n},$$

则

$$\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n = (1 + x_n)^{\frac{1 + \frac{1}{n}}{x_n}} = \left[(1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}}\right]^{1 + \frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{1+0} = e.$$

**3. Solution.** 记

$$u(x) = (x-1)^n, \quad v(x) = (x+1)^n,$$

则

$$(x^2 - 1)^n = u(x)v(x).$$

由 Leibniz 公式

$$\frac{d^n}{dx^n} [u(x)v(x)] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x).$$

注意到

$$u^{(k)}(1) = \begin{cases} 0, & k < n, \\ n!, & k = n, \end{cases} \quad v^{(m)}(1) = (2)^n \quad (m = 0, \dots, n),$$

所以在  $x=1$  处上述求和仅  $k=n$  一项不为零:

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \Big|_{x=1} = \binom{n}{n} u^{(n)}(1) v^{(0)}(1) = n! 2^n.$$

由此

$$f(1) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \Big|_{x=1} = 1.$$



类似地, 在  $x = -1$  处

$$u^{(k)}(-1) = \begin{cases} 0, & k < n, \\ (-1)^n n!, & k = n, \end{cases} \quad v^{(m)}(-1) = 0 \ (m < n), \quad v^{(n)}(-1) = n!,$$

故

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n \Big|_{x=-1} = \binom{n}{0} u^{(0)}(-1) v^{(n)}(-1) + \binom{n}{n} u^{(n)}(-1) v^{(0)}(-1) = (-1)^n n! 2^n.$$

于是

$$f(-1) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n \Big|_{x=-1} = (-1)^n.$$

4. **Solution.**  $\frac{f''(0)}{2}$ .  
利用 Taylor 展开:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2), \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^4).$$

因此

$$\begin{aligned} f(x) - f(\ln(1+x)) &= f'(0)(x - \ln(1+x)) + \frac{f''(0)}{2}(x^2 - (\ln(1+x))^2) + o(x^2) \\ &= \frac{f''(0)}{2} \left[ x^2 - \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right)^2 \right] + o(x^2) \\ &= \frac{f''(0)}{2} x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\ln(1+x))}{x^3} = \frac{f''(0)}{2}.$$

5. **Solution.**  $f(x) = x^n$ .

由  $f(xy) = f(x)f(y)$ , 对任意  $x > 0$ , 考察  $f$  在  $x$  处的导数:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x(1 + \frac{\Delta x}{x})) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)f(1 + \frac{\Delta x}{x}) - f(x)}{\Delta x}.$$

提取  $f(x)$  得

$$f'(x) = f(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \frac{\Delta x}{x}) - 1}{\Delta x}.$$

令  $u = \frac{\Delta x}{x}$ , 则  $\Delta x = xu$ , 当  $\Delta x \rightarrow 0$  时  $u \rightarrow 0$ , 所以上式变为

$$f'(x) = f(x) \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(1+u) - 1}{xu} = \frac{f(x)}{x} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(1+u) - 1}{u} = \frac{f(x)}{x} f'(1) = \frac{n f(x)}{x}.$$

于是  $f$  满足常微分方程

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{n}{x},$$

对两边积分得

$$\ln f(x) = n \ln x + C.$$

由  $f(1) = 1$  可知  $C = 0$ , 故

$$f(x) = e^{n \ln x} = x^n, \quad x > 0.$$

6. **Solution.** 令

$$t = x - \frac{1}{x}, \quad dt = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx.$$

注意到

$$x^4 - x^2 + 1 = x^2 \left( \left( x - \frac{1}{x} \right)^2 + 1 \right) = x^2 (t^2 + 1),$$

于是

$$\frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1} dx = \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{t^2 + 1} dx = \frac{dt}{t^2 + 1}.$$

故

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1} dx = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \arctan t + C = \arctan \left( x - \frac{1}{x} \right) + C.$$

7. Solution. 令

$$t = \sqrt{e^x - 1}, \quad e^x = t^2 + 1, \quad x = \ln(t^2 + 1), \quad dt = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} dx = \frac{t}{2} dx \Rightarrow e^x dx = 2t dt.$$

则

$$\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx = \int \frac{x (2t dt)}{t} = 2 \int x dt = 2 \int \ln(t^2 + 1) dt.$$

对  $\int \ln(t^2 + 1) dt$  分部积分,

$$\int \ln(t^2 + 1) dt = t \ln(t^2 + 1) - \int \frac{2t^2}{t^2 + 1} dt = t \ln(t^2 + 1) - 2 \int \left( 1 - \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt = t \ln(t^2 + 1) - 2t + 2 \arctan t + C.$$

因此

$$2 \int \ln(t^2 + 1) dt = 2t \ln(t^2 + 1) - 4t + 4 \arctan t + C.$$

回代  $t = \sqrt{e^x - 1}$ , 得

$$\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx = 2\sqrt{e^x - 1} \ln(e^x) - 4\sqrt{e^x - 1} + 4 \arctan \sqrt{e^x - 1} + C = 2x\sqrt{e^x - 1} - 4\sqrt{e^x - 1} + 4 \arctan \sqrt{e^x - 1} + C.$$

8. Proof.

固定任意  $t \in [\mu, 1 - \mu]$  与  $s \in [0, 1]$ , 令

$$m = \frac{t - \mu s}{1 - \mu}.$$

由于  $\mu \in (0, \frac{1}{2})$  且  $t \in [\mu, 1 - \mu]$ , 易验证  $m \in [0, 1]$ . 又  $f$  在  $[0, 1]$  上非负且  $f''(x) \leq 0$ , 故  $f$  为凹函数. 由凹函数的定义, 对于任何  $\lambda \in (0, 1)$  和  $x_1, x_2 \in [0, 1]$  有

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

取  $\lambda = \mu$ ,  $x_1 = s$ ,  $x_2 = m$ , 且注意到

$$\mu s + (1 - \mu)m = \mu s + (1 - \mu) \frac{t - \mu s}{1 - \mu} = t,$$

于是

$$f(t) = f(\mu s + (1 - \mu)m) \geq \mu f(s) + (1 - \mu)f(m) \geq \mu f(s),$$

因为  $f(m) \geq 0$ . 这正是所要证明的  $f(t) \geq \mu f(s)$ .

---

## CHAPTER 21

---

### 2013 年转专业考试真题

#### 1 解答题

1. 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$ .

2. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}$ .

3. 设  $a_n > 0, b_n > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{a_n}{a_{n+1}b_n} - \frac{1}{b_{n+1}}) > 0$ , 证明: 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$  存在.

4. 证明: 若函数  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 存在数列  $\{x_n\}, x_n \in [a, b], g(x_n) = f(x_{n+1}), n = 1, 2, \dots$ , 则  $f(x) = g(x)$  在  $[a, b]$  上有解.

5. 设函数  $y = y(x)$  由方程  $\begin{cases} x = \ln \cos t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$  确定, 求  $\left. \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{4}}$ .

6. 求最小正数  $\alpha$ , 使得:  $(1 + \frac{1}{x})^{x+\alpha} > e (x > 0)$ .

7. 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续在  $(0, 1)$  内可导, 且  $f(0) = 0, f(1) = 1$ , 又  $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$  是满足  $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$  的正数. 证明: 在  $(0, 1)$  中存在互不相同的数  $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_n$  满足  $\frac{\alpha_1}{f'(\beta_1)} + \frac{\alpha_2}{f'(\beta_2)} + \cdots + \frac{\alpha_n}{f'(\beta_n)} = 1$ .

---

## CHAPTER 22

---

### 2013 年转专业考试真题参考答案

#### 1 解答题

1. **Solution.** 1.

利用  $\sin^2 \theta = \sin^2(\theta - n\pi)$  得

$$\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) = \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n} - n\pi) = \sin^2(\pi(\sqrt{n^2+n} - n)).$$

又

$$\pi(\sqrt{n^2+n} - n) = \pi \frac{(n^2+n) - n^2}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1}.$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} = \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1.$$

2. **Solution.**  $e^{-\frac{1}{2}}$ .

利用泰勒公式  $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$  ( $t \rightarrow 0$ ), 令  $t = \sqrt{x}$ , 得

$$\cos \sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x).$$

故

$$\begin{aligned} \ln \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}} &= \frac{1}{x} \ln(\cos \sqrt{x}) = \frac{1}{x} \ln\left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right) \\ &= \frac{1}{x} \left(-\frac{x}{2} + o(x)\right) = -\frac{1}{2} + o(1). \end{aligned}$$

两边取指数得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

3. **Proof.** 由条件

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{a_{n+1}b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) = L > 0,$$

取常数  $\delta$  满足  $0 < \delta < \frac{L}{2}$ , 则存在  $N \in \mathbb{N}$ , 当  $n \geq N$  时有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} > \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} > \delta a_{n+1},$$

即

$$a_{n+1} < \frac{1}{\delta} \left( \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right).$$

对  $n = N, N+1, \dots, m$  累加, 得

$$\sum_{n=N}^m a_{n+1} < \frac{1}{\delta} \sum_{n=N}^m \left( \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right) = \frac{1}{\delta} \left( \frac{a_N}{b_N} - \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}} \right) \leq \frac{a_N}{\delta b_N}.$$

因此  $\sum_{k=1}^n a_k$  的部分和有上界, 故  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  收敛.

4. **Proof.** 反证法, 设反命题成立, 即

$$f(x) \neq g(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

令

$$F(x) = f(x) - g(x).$$

则  $F$  在  $[a, b]$  上连续且恒不为零, 要么  $F(x) > 0$ , 要么  $F(x) < 0$ . 不妨设

$$F(x) > 0, \quad \forall x \in [a, b].$$

由连续性和紧性, 存在

$$m = \min_{x \in [a, b]} F(x) > 0.$$

由题意, 数列  $\{x_n\} \subset [a, b]$  满足

$$g(x_n) = f(x_{n+1}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

故

$$F(x_n) = f(x_n) - g(x_n) = f(x_n) - f(x_{n+1}).$$

两边累加得

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_{n+1}) &= \sum_{k=1}^n [f(x_k) - f(x_{k+1})] = \sum_{k=1}^n F(x_k) \\ &\geq \sum_{k=1}^n m = nm. \end{aligned}$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 则

$$f(x_1) - f(x_{n+1}) \geq nm \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x_{n+1}) \rightarrow -\infty,$$

这与连续函数  $f$  在紧区间  $[a, b]$  上必有界的事实矛盾. 故假设不成立, 必有一点  $c \in [a, b]$  使

$$F(c) = 0, \quad \text{i.e.} \quad f(c) = g(c).$$

证毕.

$$5. \text{ Solution. } \frac{dy}{dt} = t \sin t, \quad \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{8}.$$

利用链式法则,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(\ln \cos t) = -\tan t, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(\sin t - t \cos t) = \cos t - (\cos t - t \sin t) = t \sin t.$$

因此

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{t \sin t}{\tan t} = -t \cos t.$$

再对  $t$  求导并除以  $dx/dt$  得二阶导数:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{1}{-\tan t} \frac{d}{dt} (-t \cos t) = \frac{-\cos t + t \sin t}{-\tan t} = \frac{\cos^2 t}{\sin t} - t \cos t.$$

故在  $t = \frac{\pi}{4}$  处,

$$\begin{aligned} \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} &= -\frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi\sqrt{2}}{8}, \\ \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} &= \frac{\cos^2 \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4}} - \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{\pi\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{8}. \end{aligned}$$

**6. Solution**  $\frac{1}{2}$ .

两边取对数, 原不等式等价于

$$(x + \alpha) \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) > 1 \iff \alpha > \frac{1}{\ln(1 + \frac{1}{x})} - x.$$

令

$$t = \frac{1}{x} > 0, \quad f(t) = \frac{1}{\ln(1+t)} - \frac{1}{t}.$$

则条件化为  $\alpha > f(t)$  对所有  $t > 0$  都成立, 故

$$\alpha \geq \sup_{t>0} f(t).$$

计算

$$f'(t) = \frac{-\frac{1}{1+t}}{[\ln(1+t)]^2} + \frac{1}{t^2} = \frac{-\frac{t^2}{1+t} + [\ln(1+t)]^2}{t^2[\ln(1+t)]^2}.$$

令  $g(t) = -\frac{t^2}{1+t} + [\ln(1+t)]^2$ , 则

$$g'(t) = -\frac{2t(1+t) - t^2}{(1+t)^2} + \frac{2\ln(1+t)}{1+t} = \frac{2}{1+t} \left[ \ln(1+t) - \frac{t^2 + 2t}{2(1+t)} \right].$$

令  $h(t) = \ln(1+t) - \frac{t^2 + 2t}{2(1+t)}$ , 则

$$h'(t) = \frac{1}{t+1} - \frac{(2t+2)(t+1) - (t^2+2t)}{2(t+1)^2} = -\frac{t^2}{2(t+1)^2}.$$

所以  $h'(t) < 0$ ,  $h(t) < h(0) = 0$ , 则  $g'(t) < 0$ ,  $g(t) < g(0) = 0$ , 故  $f'(t) < 0$ ,  $f$  在  $(0, +\infty)$  上单调减少. 因此

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} f(t) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{\ln(1+t)} - \frac{1}{t} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - \ln(1+t)}{t \ln(1+t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - (t - \frac{t^2}{2} + o(t^2))}{t^2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

综上, 对任意  $x > 0$  不等式  $(1 + \frac{1}{x})^{x+\alpha} > e$  当且仅当  $\alpha \geq \frac{1}{2}$ .

因此所求最小正数为  $\frac{1}{2}$ .

**7. Proof.**

由  $f$  在  $[0, 1]$  上连续且  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ , 以及  $\alpha_i > 0$ ,  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ , 对每个  $k = 1, 2, \dots, n-1$ , 由介值定理可取

$$x_k \in (0, 1) \quad \text{使得} \quad f(x_k) = \sum_{i=1}^k \alpha_i.$$

令  $x_0 = 0$ ,  $x_n = 1$ . 则在每个区间  $[x_{i-1}, x_i]$  上, 应用中值定理得: 存在  $\beta_i \in (x_{i-1}, x_i)$  使

$$f'(\beta_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{\alpha_i}{x_i - x_{i-1}}.$$

因此

$$x_i - x_{i-1} = \frac{\alpha_i}{f'(\beta_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

对  $i = 1$  到  $n$  累加, 得

$$x_n - x_0 = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{f'(\beta_i)} = 1.$$

于是

$$\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{f'(\beta_i)} = 1.$$

且每个  $\beta_i$  位于不同的开区间  $(x_{i-1}, x_i)$ , 故互不相同. 证毕.



---

## CHAPTER 23

---

### 2012 年转专业考试真题

#### 1 解答题

1. 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}}$ .

2. 证明: 对任意  $x, y \in \mathbf{R}$  有  $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$ , 则对每个  $n \in \mathbf{N}, \forall a, b \in \mathbf{R}$ , 有:  
 $|f(a) - f(b)| \leq \frac{1}{n} |a - b|^2$ .

3. 设  $a_n > 0, b_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{a_n}{a_{n+1}b_n} - \frac{1}{b_{n+1}}) > 0$ , 证明: 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$  存在.

4. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x - 1}}$ .

5. 设  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  有定义, 对任意  $x, y \in (0, +\infty)$  有  $f(xy) = f(x)f(y)$  且  $f'(1) = n > 0$ , 求  $f(x)$ .

6. 求最小正数  $\alpha$ , 使得:  $(1 + \frac{1}{x})^{x+\alpha} > e (x > 0)$

7. 计算不定积分:  $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx$

8. 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续在  $(0, 1)$  内可导, 且  $f(0) = 0, f(1) = 1$ , 又  $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$  是满足  $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$  的正数. 证明: 在  $(0, 1)$  中存在互不相同的数  $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_n$  满足  $\frac{\alpha_1}{f'(\beta_1)} + \frac{\alpha_2}{f'(\beta_2)} + \cdots + \frac{\alpha_n}{f'(\beta_n)} = 1$

---

## CHAPTER 24

---

### 2012 年转专业考试真题参考答案

#### 1 解答题

1. **Solution.** 1.

法一. 注意斯特林公式 (Stirling's approximation):

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

故

$$(n!)^{\frac{1}{n^2}} = \left(\sqrt{2\pi n}\right)^{\frac{1}{n^2}} \left(\frac{n}{e}\right)^{\frac{n}{n^2}} = (2\pi n)^{\frac{1}{2n^2}} (n/e)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \cdot 1 = 1.$$

法二. 利用夹挤定理 (squeeze theorem): 对 sufficiently large  $n$  有

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq n^n,$$

两端同取  $1/n^2$  次幂得

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \leq (n!)^{\frac{1}{n^2}} \leq n^{\frac{1}{n}},$$

且  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n/2)^{1/(2n)} = 1$  及  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$ , 故中间项亦趋于 1.

法三. 对数法与斯托尔茨定理 (Stolz-Cesàro): 令

$$a_n = (n!)^{\frac{1}{n^2}}, \quad \ln a_n = \frac{\ln(n!)}{n^2}.$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n!) - \ln((n-1)!)}{n^2 - (n-1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{2n-1} = 0,$$

由斯托尔茨定理可得  $\ln a_n \rightarrow 0$ , 因此  $a_n = \exp(\ln a_n) \rightarrow 1$ .

综上,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}} = 1$ .

2. **Proof.** 令  $a, b \in \mathbb{R}$  和  $n \in \mathbb{N}$ . 在区间  $[a, b]$  上等分出  $n$  段, 设

$$x_k = a + \frac{k}{n}(b-a), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

则显然

$$x_0 = a, \quad x_n = b, \quad x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}.$$

由题设对任意  $x, y$  有  $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$  以及三角不等式,

$$\begin{aligned} |f(a) - f(b)| &= |f(x_0) - f(x_n)| \leq \sum_{k=1}^n |f(x_{k-1}) - f(x_k)| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |x_{k-1} - x_k|^2 = n \left( \frac{|b-a|}{n} \right)^2 = \frac{1}{n} |b-a|^2. \end{aligned}$$

因此对每个  $n \in \mathbb{N}$  以及任意  $a, b \in \mathbb{R}$ , 均有

$$|f(a) - f(b)| \leq \frac{1}{n} |a-b|^2.$$

证毕.

3. **Proof.** 由条件

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{a_{n+1}b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) = L > 0,$$

取常数  $\delta$  满足  $0 < \delta < \frac{L}{2}$ , 则存在  $N \in \mathbb{N}$ , 当  $n \geq N$  时有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} > \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} > \delta a_{n+1},$$

即

$$a_{n+1} < \frac{1}{\delta} \left( \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right).$$

对  $n = N, N+1, \dots, m$  累加, 得

$$\sum_{n=N}^m a_{n+1} < \frac{1}{\delta} \sum_{n=N}^m \left( \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right) = \frac{1}{\delta} \left( \frac{a_N}{b_N} - \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}} \right) \leq \frac{a_N}{\delta b_N}.$$

因此  $\sum_{k=1}^n a_k$  的部分和有上界, 故  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  收敛.

4. **Solution.**  $\frac{1}{\sqrt{e}}.$

令

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x - 1}}.$$

取对数得

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \left( \frac{\ln(1+x)}{x} \right)}{e^x - 1}.$$

当  $x \rightarrow 0$  时, 利用 Taylor 公式

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x),$$

$$\ln \left( \frac{\ln(1+x)}{x} \right) = \ln \left( 1 - \frac{x}{2} + o(x) \right) = -\frac{x}{2} + o(x),$$

同时

$$e^x - 1 = x + o(x).$$

因此

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{x}{2} + o(x)}{x + o(x)} = -\frac{1}{2}.$$

故

$$L = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

5. **Solution.**  $f(x) = x^n$ .

由  $f(xy) = f(x)f(y)$ , 对任意  $x > 0$ , 考察  $f$  在  $x$  处的导数:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x(1 + \frac{\Delta x}{x})) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)f(1 + \frac{\Delta x}{x}) - f(x)}{\Delta x}.$$

提取  $f(x)$  得

$$f'(x) = f(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \frac{\Delta x}{x}) - 1}{\Delta x}.$$

令  $u = \frac{\Delta x}{x}$ , 则  $\Delta x = xu$ , 当  $\Delta x \rightarrow 0$  时  $u \rightarrow 0$ , 所以上式变为

$$f'(x) = f(x) \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(1 + u) - 1}{xu} = \frac{f(x)}{x} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(1 + u) - 1}{u} = \frac{f(x)}{x} f'(1) = \frac{nf(x)}{x}.$$

于是  $f$  满足常微分方程

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{n}{x},$$

对两边积分得

$$\ln f(x) = n \ln x + C.$$

由  $f(1) = 1$  可知  $C = 0$ , 故

$$f(x) = e^{n \ln x} = x^n, \quad x > 0.$$

6. **Solution**  $\frac{1}{2}$ .

两边取对数, 原不等式等价于

$$(x + \alpha) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > 1 \iff \alpha > \frac{1}{\ln(1 + \frac{1}{x})} - x.$$

令

$$t = \frac{1}{x} > 0, \quad f(t) = \frac{1}{\ln(1 + t)} - \frac{1}{t}.$$

则条件化为  $\alpha > f(t)$  对所有  $t > 0$  都成立, 故

$$\alpha \geq \sup_{t > 0} f(t).$$

计算

$$f'(t) = \frac{-\frac{1}{1+t}}{[\ln(1+t)]^2} + \frac{1}{t^2} = \frac{-\frac{t^2}{1+t} + [\ln(1+t)]^2}{t^2[\ln(1+t)]^2}.$$

令  $g(t) = -\frac{t^2}{1+t} + [\ln(1+t)]^2$ , 则

$$g'(t) = -\frac{2t(1+t) - t^2}{(1+t)^2} + \frac{2\ln(1+t)}{1+t} = \frac{2}{1+t} \left[ \ln(1+t) - \frac{t^2 + 2t}{2(1+t)} \right].$$

令  $h(t) = \ln(1+t) - \frac{t^2 + 2t}{2(1+t)}$ , 则

$$h'(t) = \frac{1}{t+1} - \frac{(2t+2)(t+1) - (t^2 + 2t)}{2(t+1)^2} = -\frac{t^2}{2(t+1)^2}.$$

所以  $h'(t) < 0$ ,  $h(t) < h(0) = 0$ , 则  $g'(t) < 0$ ,  $g(t) < g(0) = 0$ , 故  $f'(t) < 0$ ,  $f$  在  $(0, +\infty)$  上单调减少. 因此

$$\begin{aligned}\sup_{t>0} f(t) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{\ln(1+t)} - \frac{1}{t} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - \ln(1+t)}{t \ln(1+t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - (t - \frac{t^2}{2} + o(t^2))}{t^2} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

综上, 对任意  $x > 0$  不等式  $(1 + \frac{1}{x})^{x+\alpha} > e$  当且仅当  $\alpha \geq \frac{1}{2}$ .

因此所求最小正数为  $\frac{1}{2}$ .

**7. Solution.**

令

$$t = \sqrt{e^x - 1}, \quad e^x = t^2 + 1, \quad x = \ln(t^2 + 1), \quad dt = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} dx = \frac{t}{2} dx \Rightarrow e^x dx = 2t dt.$$

则

$$\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx = \int \frac{x (2t dt)}{t} = 2 \int x dt = 2 \int \ln(t^2 + 1) dt.$$

对  $\int \ln(t^2 + 1) dt$  分部积分,

$$\int \ln(t^2 + 1) dt = t \ln(t^2 + 1) - \int \frac{2t^2}{t^2 + 1} dt = t \ln(t^2 + 1) - 2 \int \left( 1 - \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt = t \ln(t^2 + 1) - 2t + 2 \arctan t + C.$$

因此

$$2 \int \ln(t^2 + 1) dt = 2t \ln(t^2 + 1) - 4t + 4 \arctan t + C.$$

回代  $t = \sqrt{e^x - 1}$ , 得

$$\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx = 2\sqrt{e^x - 1} \ln(e^x - 1) - 4\sqrt{e^x - 1} + 4 \arctan \sqrt{e^x - 1} + C = 2x\sqrt{e^x - 1} - 4\sqrt{e^x - 1} + 4 \arctan \sqrt{e^x - 1} + C.$$

**8. Proof.**

由  $f$  在  $[0, 1]$  上连续且  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ , 以及  $\alpha_i > 0$ ,  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ , 对每个  $k = 1, 2, \dots, n-1$ , 由介值定理可取

$$x_k \in (0, 1) \quad \text{使得} \quad f(x_k) = \sum_{i=1}^k \alpha_i.$$

令  $x_0 = 0$ ,  $x_n = 1$ . 则在每个区间  $[x_{i-1}, x_i]$  上, 应用中值定理得: 存在  $\beta_i \in (x_{i-1}, x_i)$  使

$$f'(\beta_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{\alpha_i}{x_i - x_{i-1}}.$$

因此

$$x_i - x_{i-1} = \frac{\alpha_i}{f'(\beta_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

对  $i = 1$  到  $n$  累加, 得

$$x_n - x_0 = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{f'(\beta_i)} = 1.$$

于是

$$\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{f'(\beta_i)} = 1.$$

且每个  $\beta_i$  位于不同的开区间  $(x_{i-1}, x_i)$ , 故互不相同. 证毕.

华中科技大学群专业交流群



---

---

## CHAPTER 25

---

### 2011 年转专业考试真题

#### 1 解答题

1. 证明: 对任意  $x, y \in R$  有  $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$ , 则对每个  $n \in N, \forall a, b \in R$ , 有:  
 $|f(a) - f(b)| \leq \frac{1}{n} |a - b|^2$ .

2. 设  $x_n = (1 + a)(1 + a^2) \cdots (1 + a^{2^n})$ , 其中  $|a| < 1$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

3. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x - 1}}$

4. 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续,  $f(0) = 1, g(x) = \int_0^{\sin x} f(tx^2)dt$ , 求  $g'(x)$ , 并求  $g'(0)$ .

5. 设  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  有定义, 对任意  $x, y \in (0, +\infty)$  有  $f(xy) = f(x)f(y)$  且  $f'(1) = n > 0$ , 求  $f(x)$ .

6. 计算不定积分:  $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx$

7. 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续在  $(0, 1)$  内可导, 且  $f(0) = 0, f(1) = 1$ , 又  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  是满足  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$  的正数. 证明: 在  $(0, 1)$  中存在互不相同的数  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  满足  $\frac{\alpha_1}{f'(\beta_1)} + \frac{\alpha_2}{f'(\beta_2)} + \dots + \frac{\alpha_n}{f'(\beta_n)} = 1$

8. 证明: 若  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上可微,  $f(0) = 0, 0 \leq f'(x) \leq 1$ , 则  $\left(\int_0^1 f(x) dx\right)^2 \geq \int_0^1 f^3(x) dx$

9. 证明: 对任意正整数  $n$ , 有  $\frac{2}{3}n\sqrt{n} < \sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n} < \frac{4n+3}{6}\sqrt{n}$

---

---

## CHAPTER 26

---

### 2011 年转专业考试真题参考答案

#### 1 解答题

1. **Proof.** 令  $a, b \in \mathbb{R}$  和  $n \in \mathbb{N}$ . 在区间  $[a, b]$  上等分出  $n$  段, 设

$$x_k = a + \frac{k}{n}(b - a), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

则显然

$$x_0 = a, \quad x_n = b, \quad x_k - x_{k-1} = \frac{b - a}{n}.$$

由题设对任意  $x, y$  有  $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$  以及三角不等式,

$$\begin{aligned} |f(a) - f(b)| &= |f(x_0) - f(x_n)| \leq \sum_{k=1}^n |f(x_{k-1}) - f(x_k)| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |x_{k-1} - x_k|^2 = n \left( \frac{|b - a|}{n} \right)^2 = \frac{1}{n} |b - a|^2. \end{aligned}$$

因此对每个  $n \in \mathbb{N}$  以及任意  $a, b \in \mathbb{R}$ , 均有

$$|f(a) - f(b)| \leq \frac{1}{n} |a - b|^2.$$

证毕.

2. **Solution.**  $\frac{1}{1-a}$ .

注意到

$$(1-a)x_n = (1-a)(1+a)(1+a^2) \cdots (1+a^{2^n}) = 1 - a^{2^{n+1}},$$

故

$$x_n = \frac{1 - a^{2^{n+1}}}{1 - a} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - a},$$

因为  $|a| < 1$  时  $a^{2^{n+1}} \rightarrow 0$ , 故极限为  $\frac{1}{1-a}$ .

3. **Solution.**  $\frac{1}{\sqrt{e}}$ .

令

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x - 1}}.$$

取对数得

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)}{e^x - 1}.$$

当  $x \rightarrow 0$  时, 利用泰勒展开

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3) \Rightarrow \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + O(x^2),$$

$$\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = \ln\left(1 - \frac{x}{2} + O(x^2)\right) = -\frac{x}{2} + O(x^2),$$

同时

$$e^x - 1 = x + O(x^2).$$

因此

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{x}{2} + O(x^2)}{x + O(x^2)} = -\frac{1}{2}.$$

故

$$L = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

#### 4. Solution.

首先将积分变量替换: 令  $u = tx^2$ , 则  $t = u/x^2$ ,  $dt = du/x^2$ , 上限  $t = \sin x$  对应  $u = x^2 \sin x$ . 于是

$$g(x) = \int_0^{\sin x} f(tx^2) dt = \frac{1}{x^2} \int_0^{x^2 \sin x} f(u) du.$$

对  $x$  求导, 应用商法则及牛顿-莱布尼茨公式得

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx} [x^{-2}] \int_0^{x^2 \sin x} f(u) du + x^{-2} \frac{d}{dx} \left[ \int_0^{x^2 \sin x} f(u) du \right] \\ &= -\frac{2}{x^3} \int_0^{x^2 \sin x} f(u) du + \frac{1}{x^2} f(x^2 \sin x) \frac{d}{dx} (x^2 \sin x) \\ &= -\frac{2}{x^3} \int_0^{x^2 \sin x} f(u) du + \frac{1}{x^2} f(x^2 \sin x) (2x \sin x + x^2 \cos x). \end{aligned}$$

接着计算  $g'(0)$ . 由于  $\int_0^{x^2 \sin x} f(u) du = f(0) x^2 \sin x + o(x^3)$  且  $f(x^2 \sin x) = f(0) + o(1)$ , 故当  $x \rightarrow 0$ :

$$-\frac{2}{x^3} \int_0^{x^2 \sin x} f(u) du \sim -\frac{2}{x^3} [x^3] = -2, \quad \frac{1}{x^2} f(x^2 \sin x) (2x \sin x + x^2 \cos x) \sim \frac{1}{x^2} [1 \cdot (2x^2 + x^2)] = 3.$$

于是

$$g'(0) = (-2) + 3 = 1.$$

#### 5. Solution. $f(x) = x^n$ .

由  $f(xy) = f(x)f(y)$ , 对任意  $x > 0$ , 考察  $f$  在  $x$  处的导数:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x(1 + \frac{\Delta x}{x})) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) f(1 + \frac{\Delta x}{x}) - f(x)}{\Delta x}.$$

提取  $f(x)$  得

$$f'(x) = f(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \frac{\Delta x}{x}) - 1}{\Delta x}.$$

令  $u = \frac{\Delta x}{x}$ , 则  $\Delta x = xu$ , 当  $\Delta x \rightarrow 0$  时  $u \rightarrow 0$ , 所以上式变为

$$f'(x) = f(x) \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(1+u) - 1}{xu} = \frac{f(x)}{x} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(1+u) - 1}{u} = \frac{f(x)}{x} f'(1) = \frac{n f(x)}{x}.$$

于是  $f$  满足常微分方程

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{n}{x},$$

对两边积分得

$$\ln f(x) = n \ln x + C.$$

由  $f(1) = 1$  可知  $C = 0$ , 故

$$f(x) = e^{n \ln x} = x^n, \quad x > 0.$$

**6. Solution.** 令

$$t = \sqrt{e^x - 1}, \quad e^x = t^2 + 1, \quad x = \ln(t^2 + 1), \quad dt = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} dx = \frac{t}{2} dx \Rightarrow e^x dx = 2t dt.$$

则

$$\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx = \int \frac{x (2t dt)}{t} = 2 \int x dt = 2 \int \ln(t^2 + 1) dt.$$

对  $\int \ln(t^2 + 1) dt$  分部积分,

$$\int \ln(t^2 + 1) dt = t \ln(t^2 + 1) - \int \frac{2t^2}{t^2 + 1} dt = t \ln(t^2 + 1) - 2 \int \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1}\right) dt = t \ln(t^2 + 1) - 2t + 2 \arctan t + C.$$

因此

$$2 \int \ln(t^2 + 1) dt = 2t \ln(t^2 + 1) - 4t + 4 \arctan t + C.$$

回代  $t = \sqrt{e^x - 1}$ , 得

$$\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx = 2\sqrt{e^x - 1} \ln(e^x) - 4\sqrt{e^x - 1} + 4 \arctan \sqrt{e^x - 1} + C = 2x\sqrt{e^x - 1} - 4\sqrt{e^x - 1} + 4 \arctan \sqrt{e^x - 1} + C.$$

**8. Solution.**

令

$$F(t) = \left( \int_0^t f(x) dx \right)^2 - \int_0^t f^3(x) dx, \quad t \in [0, 1].$$

显然  $F(0) = 0$ . 对  $t$  求导得

$$\begin{aligned} F'(t) &= 2 \left( \int_0^t f(x) dx \right) f(t) - f^3(t) \\ &= f(t) \left( 2 \int_0^t f(x) dx - [f(t)]^2 \right) = f(t) G(t), \end{aligned}$$

其中

$$G(t) = 2 \int_0^t f(x) dx - [f(t)]^2.$$

又由于

$$G(0) = 0, \quad G'(t) = 2f(t) - 2f(t)f'(t) = 2f(t)(1 - f'(t)) \geq 0 \quad (\text{因 } 0 \leq f'(t) \leq 1),$$

所以  $G(t) \geq 0$  对所有  $t \in [0, 1]$  成立. 再由  $f(t) \geq 0$  (从  $f(0) = 0$  且  $f' \geq 0$  得到) 可知

$$F'(t) = f(t)G(t) \geq 0,$$

故  $F(1) \geq F(0) = 0$ , 即

$$\left(\int_0^1 f(x) dx\right)^2 - \int_0^1 f^3(x) dx \geq 0,$$

从而完成证明.

**9. Proof.** 利用根函数在  $[0, n]$  上严格凹性, 对每个整数区间  $[k-1, k]$  作左右端点梯形比较:

下界: 因为  $\sqrt{x}$  在  $[k-1, k]$  上  $\sqrt{x} \geq \sqrt{k-1}$ ,

$$\sqrt{k} > \int_{k-1}^k \sqrt{x} dx.$$

对  $k = 1, 2, \dots, n$  累加得

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} > \int_0^n \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^n = \frac{2}{3}n\sqrt{n}.$$

上界: 因为  $\sqrt{x}$  在  $[k-1, k]$  上凹, 下端点梯形面积小于弦顶梯形面积, 即

$$\frac{\sqrt{k-1} + \sqrt{k}}{2} < \int_{k-1}^k \sqrt{x} dx.$$

于是

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\sqrt{k-1} + \sqrt{k}) < \int_0^n \sqrt{x} dx + \frac{1}{2}\sqrt{n} = \frac{2}{3}n\sqrt{n} + \frac{1}{2}\sqrt{n} = \frac{4n+3}{6}\sqrt{n}.$$

综上, 对任意正整数  $n$  都有

$$\frac{2}{3}n\sqrt{n} < \sum_{k=1}^n \sqrt{k} < \frac{4n+3}{6}\sqrt{n}.$$