Métodos Estatísticos
Capítulo 1

Resumos e exemplos

Exercícios

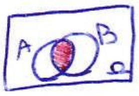
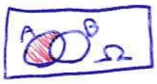
1ª frequência matéria (4-3)

Experiência aleatória ($\mathcal{E}$) → É um processo capaz de produzir pelo menos 2 resultados, com incerteza quanto ao que ocorrerá.

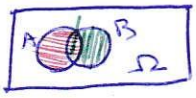
Espaço dos Resultados (Ω) → É o conjunto de todos os resultados possíveis da experiência aleatória.

Acontecimento → É um subconjunto de Ω

Nota: um acontecimento elementar é um acontecimento com 1 único elemento.

- Interseção $A \cap B$  • Pertence a A e B;
- Reunião $A \cup B$  • Pertence pelo menos a um dos conjuntos;
- Diferença $A \setminus B$  • Pertence a A mas não a B;
- Complementar $\bar{A} = \Omega \setminus A$ 

Probabilidade
- Definição clássica: $P(A) = \dfrac{\#A}{\#\Omega}$ } se Ω finito e os acontecimentos elementares são equiprováveis
- Definição axiomática

Propriedades
- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$ 
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ 
- A e B são independentes se $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- $P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B)$
- $P(A \cup B / C) = P(A/C) + P(B/C) - P(A \cap B / C)$

exe 1 5 lâmpadas, nº 3 e 5 defeituosas

$\mathcal{E}$ = "Extrair duas lâmpadas, uma a seguir à outra, sem reposição."

a) $\Omega = \{ (1,2), (1,3), (1,4), (1,5),$
$(2,1), (2,3), (2,4), (2,5),$
$(3,1), (3,2), (3,4), (3,5),$
$(4,1), (4,2), (4,3), (4,5) \} = \{ (i,j) : i,j \in \{1,2,3,4,5\}, i \neq j \}$

1º \ 2º	1	2	3	4	5
1	—	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
2	(2,1)	—	(2,3)	(2,4)	(2,5)
3	(3,1)	(3,2)	—	(3,4)	(3,5)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	—	(4,5)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	—

$\# \Omega = 20$

b) A = "saída de lâmpada defeituosa na 1ª tiragem";
$= \{ (3,1), (3,2), (3,4), (3,5)$
$(5,1), (5,2), (5,3), (5,4) \}$ $\# A = 8$

B = "saída de lâmpada defeituosa na 2ª tiragem";
$= \{ (1,3), (2,3), (4,3), (5,3),$
$(1,5), (2,5), (3,5), (4,5) \}$ $\# B = 8$
$= \{ (i,j) : j \in \{3,5\}, i \in \{1,2,3,4,5\}, i \neq j \}$

C = "saída de 2 lâmpadas defeituosas";
$= \{ (3,5), (5,3) \}$ $\# C = 2$

D = "não sair qualquer lâmpada defeituosa"
$= \{ (1,2), (1,4),$
$(2,1), (2,4),$ $\# D = 6$
$(4,1), (4,2) \}$

c) $P(A) = \frac{\# A}{\# \Omega} = \frac{8}{20} = \frac{4}{10} = 0,4 = 40\%$

$P(B) = \frac{\# B}{\# \Omega} = \frac{8}{20} = 0,4 = 40\%$

$P(C) = \frac{\# C}{\# \Omega} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0,1 = 10\%$

$P(D) = \frac{\# D}{\# \Omega} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0,3 = 30\%$

exe 2 k = coroa, c = cara

$\Omega = \{ (c,c,c), (c,c,k), (c,k,c), (c,k,k),$
$(k,c,c), (k,c,k), (k,k,c), (k,k,k) \}$ $\# 8$

a) $P(c = 2) = \frac{3}{8} = 0,375$

b) $P(c \geq 1) = \frac{7}{8} = 0,875$

exe 3

$\mathcal{E}$ = "lançar 1 moeda e 1 dado equilibrado, simultaneamente";

a) $\Omega = \{(CA,1),(CA,2),(CA,3),(CA,4),(CA,5),(CA,6),$
$(CO,1),(CO,2),(CO,3),(CO,4),(CO,5),(CO,6)\}$

$= \{(i,j): i \in \{CA, CO\}, j \in \{1,2,3,4,5,6\}\} \quad \#\Omega = 12$

b) A = "sair coroa e número par"

$= \{(CO,2),(CO,4),(CO,6)\} \quad \#A=3 \;, P(A)=\frac{3}{12}=0{,}25$

B = "sair coroa e número impar"

$= \{(CA,1),(CA,3),(CA,5)\} \quad \#B=3 \;, P(B)=\frac{3}{12}=0{,}25$

C = "sair multiplo de 3"

$= \{(CA,3),(CA,6),(CO,3),(CO,6)\} \quad \#C=4 \;, P(C)=\frac{4}{12} \simeq 0{,}(3)$

Exe 4

$P(A)=0{,}3$

$P(\bar{B})=0{,}7$

$P(C)=0{,}5$

$A \cap B = C \cap B = \emptyset$

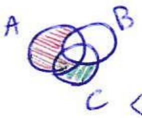
$P(A \cap C) = ?$

$P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C)$

$= (P(A)+P(B)-P(A\cap B)) + P(C) - P((A\cap C)\cup(B\cap C))$

$= P(A) + P(B) - P(A\cap B) + P(C) - [P(A\cap C) + P(B\cap C) - P(A\cap C \cap B \cap C)]$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(A\cap C) - P(B\cap C) + P(A\cap B\cap C)$



$0{,}3 + (1-0{,}7) + 0{,}5 - \emptyset - P(A\cap C) - 0 + 0 = 1$

$\Leftrightarrow 0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}5 - P(A\cap C) = 1$

$\Leftrightarrow P(A\cap C) = 0{,}1$

Exe 5

$P(A)=0{,}7$

$P(B)=0{,}6$

$P(A\cup B) - P(A\cap B) = 0{,}3$

a) $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

b) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$\Leftrightarrow P(A\cap B) + 0{,}3 = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$\Leftrightarrow 2\cdot P(A\cap B) = 0{,}7 + 0{,}6 - 0{,}3$

$\Leftrightarrow P(A\cap B) = \frac{1}{2} = 0{,}5 \Rightarrow P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$= 0{,}7 + 0{,}6 - 0{,}5 = 0{,}8$

Exe 6 A e B independentes

$P(A\cap\bar{B}) \overset{?}{=} P(A)\cdot P(\bar{B})$

$\hookrightarrow P(A\cap\bar{B}) = P(A\setminus B) = P(A) - P(A\cap B) = P(A) - P(A)\cdot P(B)$

$= P(A)\cdot(1-P(B)) = P(A)\cdot P(\bar{B})$

11-3

Probabilidade condicionada

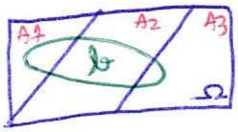
$$\underbrace{P(B/A)}_{} = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}, \text{ assumindo } P(A) \neq 0$$

probabilidade de ocorrer B, dado que ocorreu A

Teorema da Probabilidade total

$A_1, A_2, A_3 \subseteq \Omega$

formam uma partição de Ω $\begin{cases} A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega \\ A_i \cap A_j = \emptyset, \; i \neq j \end{cases}$



$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3)$$
$$= P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2) + P(B/A_3) \cdot P(A_3)$$

Teorema de Bayes

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Exe 7

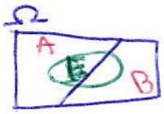
$\mathcal{E}$ = "escolher um artigo da produção da empresa"

Ω = {todos os aparelhos produzidos pela empresa}

A = "o aparelho é produzido na cadeia A"

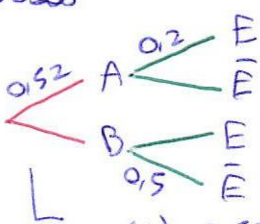
B = "o aparelho é produzido na cadeia B"

E = "o aparelho é exportado"



$A \cup B = \Omega$

$A \cap B = \emptyset$



se $P(E/A) = 0{,}2 \rightarrow P(\bar{E}/A) = 0{,}8$

se $P(E|B) = 0{,}5 \rightarrow P(\bar{E}/B) = 0{,}5$

se $P(A) = 0{,}52 \rightarrow P(B) = 0{,}48$

$P(E|A) = 0{,}2$

$P(E|B) = 0{,}5$

$P(A) = 0{,}52$

a) $P(E) = ? = P(E \cap \Omega) = P(E \cap (A \cup B)) = P(E \cap A \cup E \cap B)$

$= P(E \cap A) + P(E \cap A) - P(E \cap A \cap B)$

$= P(A) \cdot P(E/A) + P(B) \cdot P(E/B) - 0$

$= 0{,}52 \cdot 0{,}2 + 0{,}48 \cdot 0{,}5 = 0{,}344$

b) $P(B/\bar{E}) = \dfrac{P(B \cap \bar{E})}{P(\bar{E})} = \dfrac{P(\bar{E}/B) \cdot P(B)}{P(\bar{E})} = \dfrac{[1 - P(E/B)] \cdot P(B)}{1 - P(E)}$

$= \dfrac{0{,}5 \cdot 0{,}48}{0{,}656} = 0{,}366$

Ex 8)

$\mathcal{E}$ = "escolher uma chamada para o INEM, ao acaso"

Ω = {todas as chamadas recebidas pelo INEM}

M = "Chamada é efetuada no período da manhã"

T = " " " tarde "

N = " " " noite "

F = "chamada é falsa"

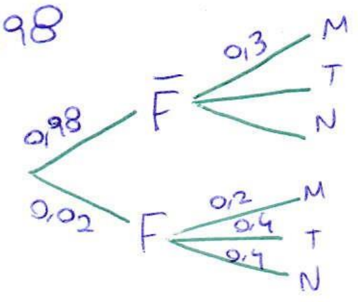
$P(F) = 0{,}02 \Rightarrow P(\bar{F}) = 0{,}98$

$P(M|F) = 0{,}2$

$P(T|F) = 0{,}4$

$P(N|F) = 0{,}4$

$P(M|\bar{F}) = 0{,}3$



a) $P(M) = P(M \cap F) + P(M \cap \bar{F})$

$= P(F) \cdot P(M/F) + P(\bar{F}) \cdot P(M/\bar{F})$

$= 0{,}02 \cdot 0{,}2 + 0{,}98 \cdot 0{,}3$

$= 0{,}298$

b) Dado que: $P(T) = 0{,}4$, $P(N|\bar{F}) = ?$

$P(T) = P(T \cap F) + P(T \cap \bar{F}) = 0{,}02 \cdot 0{,}4 + 0{,}98 \cdot P(T/\bar{F})$

$\Leftrightarrow 0{,}4 = 0{,}008 + 0{,}98 \cdot P(T/\bar{F})$

$\Leftrightarrow P(T/\bar{F}) = \dfrac{0{,}4 - 0{,}008}{0{,}98} = 0{,}4$

$P(N|\bar{F}) = 1 - 0{,}3 - 0{,}4 = 0{,}3$

Ex 10

$\mathcal{E}$ = "escolher, aleatoriamente, uma válvula da TV da produção"

Ω = {válvula da TV da produção}

A = "válvula da marca A"

B = " " B"

C = " " C"

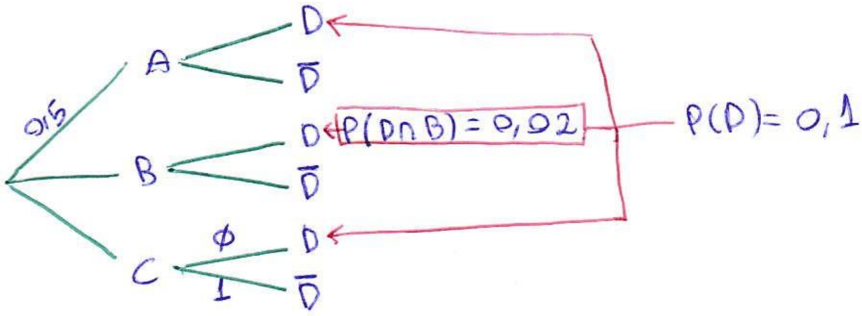
D = "válvula é defeituosa"

$P(A) = 0{,}5$

$P(D) = 0{,}1$

$P(D/C) = \emptyset$

$P(D \cap B) = 0{,}02$



a) $P(D/A) = ? = \dfrac{P(D \cap A)}{P(A)} \Rightarrow P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C)$

$\Leftrightarrow 0{,}1 = P(D \cap A) + 0{,}02 + P(C) \cdot \emptyset$

$\Leftrightarrow P(D \cap A) = 0{,}1 - 0{,}02 = 0{,}08$

$P(D/A) = \dfrac{0{,}08}{0{,}5} = 0{,}16$ $\boxed{\text{ou } P(D/A) = \dfrac{P(D \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0{,}1 - 0{,}02}{0{,}5} = 0{,}16}$ D A/B

b) $P(\bar{B}/D) = P(A/D) + P(C/D) = \dfrac{P(A \cap D)}{P(D)} + \dfrac{P(C \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0{,}5 \cdot 0{,}16}{0{,}1} = 0{,}8$

$\boxed{\text{ou } P(\bar{B}/D) = 1 - P(B/D) = 1 - \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = 1 - \frac{0{,}02}{0{,}1} = 0{,}8}$

c) Dado que: $P(C/\bar{D}) = 0{,}4$, $P(C) = ?$

$P(C) = P(C \cap D) + P(C \cap \bar{D}) = \emptyset + P(C/\bar{D}) \cdot P(\bar{D}) = 0{,}4 \cdot 0{,}9 = 0{,}36$

12) I1 = "impressa em I1" $P(I1) = 0{,}7$

I2 = "impressa em I2" $P(I2) = P(\overline{I1}) = 0{,}3$

DM = "defeito de moldagem" $P(DM) = 0{,}4$ $P(DM \cap DI) = P(DM) \cdot P(DI)$ pq são independentes

DI = "defeito de impressão" $P(DI/I1) = 0{,}05$; $P(DI/I2) = 0{,}02$;

a) $P(DI) = P(DI \cap I1) + P(DI \cap I2)$

$= P(DI/I1) \cdot P(I1) + P(DI/I2) \cdot I2$

$= 0{,}05 \cdot 0{,}7 + 0{,}02 \cdot 0{,}3$

$= 0{,}041$

b) $P(DM \cup DI) = P(DM) + P(DI) - P(DM \cap DI)$

$= 0{,}4 + 0{,}041 - (0{,}4 \cdot 0{,}041)$

$= 0{,}4246$

c) $P(I1/DI) = \dfrac{P(I1 \cap DI)}{P(DI)}$

$= \dfrac{P(DI/I1) \cdot P(I1)}{P(DI)}$

$= \dfrac{0{,}05 \cdot 0{,}7}{0{,}041} = 0{,}8537$

Exe 9

$C =$ "Peça bêm colocada"

$P(C) = 0{,}02 \rightarrow P(\bar{C}) = 0{,}98$

$F =$ "Aciona falha"

$P(F/C) = 0{,}005$

$P(F/\bar{C}) = 0{,}99$

a) $P(F) = P(F \cap C) + P(P \cap \bar{C}) = P(F/C) \cdot P(C) + P(F/\bar{C}) \cdot F(\bar{C})$

$= 0{,}99 \cdot 0{,}02 + 0{,}005 \cdot 0{,}98 = 0{,}0247$

b) $P(\bar{C}/\bar{F}) = \dfrac{P(\bar{C} \cap F)}{P(F)} = \dfrac{P(F/\bar{C}) \cdot P(\bar{C})}{P(F)} = \dfrac{0{,}99 \cdot 0{,}98}{0{,}0247} = 0{,}8016$

Exe 11

$A =$ "ligado a rede A" $P(A) = 0{,}5$ $P(S/A) = 0{,}8$

$B =$ "ligado a rede B" $P(B) = 0{,}4$ $P(C/S) = 0{,}10$

$C =$ "ligado a rede C" $P(C) = 0{,}1$

$S =$ "Satisfeito" $P(S) = 0{,}70$

a) $P(S/B) = ? \rightarrow P(S) = P(S \cap A) + P(S \cap B) + P(S \cap C)$

$\Leftrightarrow P(S) = P(S/A) \cdot P(A) + P(S/B) \cdot P(B) + P(S/C) \cdot P(C)$

$\Leftrightarrow 0{,}7 = 0{,}8 \cdot 0{,}5 + P(S/B) \cdot 0{,}4 + 0{,}1 \cdot 0{,}7$

$\Leftrightarrow P(S/B) = \dfrac{0{,}7 - 0{,}8 \cdot 0{,}5 - 0{,}1 \cdot 0{,}7}{0{,}4} = 0{,}575$

b) $P(\bar{S}/\bar{C}) = \dfrac{P(\bar{S} \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \dfrac{P(\overline{S \cup C})}{P(\bar{C})} = \dfrac{1 - P(S \cup C)}{P(\bar{C})} = \dfrac{1 - [P(S) + P(C) - P(S \cap C)]}{1 - P(C)}$

$= \dfrac{1 - P(S) - P(C) + P(S \cap C)}{1 - P(C)} = \dfrac{1 - 0{,}7 - 0{,}1 + P(C/S) \cdot P(S)}{1 \cdot 0{,}1}$

$= \dfrac{0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}7}{0{,}9} = 0{,}3$