Métodos Estatísticos
Capítulo 3

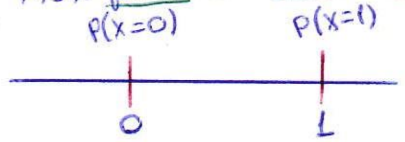
Resumos e exemplos

Exercícios

Capítulo 3 - V.a. Contínuas

V.a. discretas (Cap 1 e 2)

X, S_X finito ou enumerável



$S_X = \{0,1\} \qquad \sum_{m \in S_X} P(X=m) = 1$

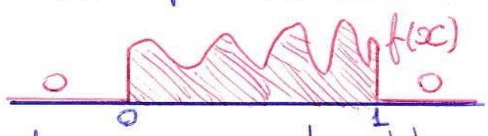
1. $P(X \leq a) = \sum_{\substack{m \in S_X \\ m \leq a}} P(X=m)$

2. $E(X) = \sum_{x \in S_X} x \cdot P(X=x)$

3. $F(x) = P(X \leq x)$

V.a. Contínuas

X, S_X não é finito nem enumerável



$f(x) \rightarrow$ função densidade

$f(x) \neq P(X=x)$

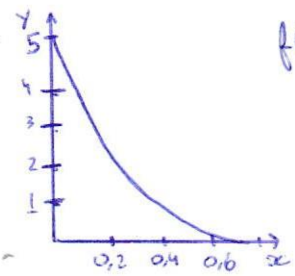
$S_X = [0,1] \qquad \int_0^1 f(x)\,dx = 1$

1. $P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$

2. $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx$

3. $F(x) = P(X \leq x)$

1)

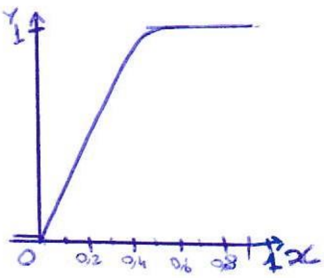


$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \vee x > 1 \end{cases}$

X = "a quantidade de combustível procurado por semana"

a) $P(X \leq 0{,}5) = \int_{-\infty}^{0,5} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^{0,5} 5(1-x)^4\,dx = -5 \left.\frac{(1-x)}{5}\right]_0^{0,5} = -0{,}5^5 - (-1) = 0{,}9688$

b) $F(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ 1-(1-x)^5 & , 0 \leq x < 1 \\ 1 & , x \geq 1 \end{cases}$



i) $P(0{,}2 < X < 0{,}5) = P(X < 0{,}5) - P(X < 0{,}2)$

$= F(0{,}5) - F(0{,}2) = 1-(1-0{,}5)^5 - 1-(1-0{,}2)^5$

$= 0{,}2964 \simeq 30\%$

ii) C = "Capacidade do depósito"

$P(X \geq C) = 0{,}05 \Leftrightarrow 1 - P(X < C) = 0{,}05$

$\Leftrightarrow F(C) = 0{,}95 \Leftrightarrow 1-(1-C)^5 = 0{,}95$

$\Leftrightarrow -(1-C)^5 = -0{,}05 \Leftrightarrow (1-C)^5 = 0{,}05$

$\Leftrightarrow 1 - C = \sqrt[5]{0{,}05} \Leftrightarrow C \simeq 0{,}45072$

2) $X =$ "Tempo, em horas, de acesso à internet de uma pessoa"

$$f(x) = \begin{cases} x/25 & , 0 \leq x \leq 5 \\ \frac{10-x}{25} & , 5 < x \leq 10 \\ 0 & , cc \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{x^2}{50} & , 0 \leq x \leq 5 \\ 1 - \frac{(10-x)^2}{50} & , 5 \leq x \leq 10 \\ 1 & , x \geq 10 \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx = 5$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx = \frac{175}{6}$$

a) Considere $Y = 2X - 5$

$$E(Y) = E(2X-5) = -5 + 2E(X) = -5 + 2 \cdot 5 = 5$$

$$V(Y) = V(2X-5) = 2^2 \cdot V(X) = 4V(X) = 4\left[E(X^2) - E^2(X)\right] = 4\left[\frac{175}{6} - 5^2\right] = \frac{50}{3}$$

b) $A = (X \geq 5)$, $B = (X < 5)$, $C = (2{,}5 \leq X < 7{,}5)$

i) $P(A) = P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - \frac{5^2}{50} = \frac{1}{2}$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\overbrace{P(X \geq 5 \cap X < 5)}^{\text{impossível}\ = 0}}{P(X<5)}$$

$$P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(X \geq 5 \cap 2{,}5 \leq X < 7{,}5)}{P(2{,}5 \leq X < 7{,}5)} = \frac{P(5 \leq X < 7{,}5)}{P(2{,}5 \leq X < 7{,}5)}$$

$$= \frac{P(X < 7{,}5) - P(X<5)}{P(X<7{,}5) - P(X<2{,}5)} = \frac{F(7{,}5) - F(5)}{F(7{,}5) - F(2{,}5)}$$

$$= \frac{1 - \frac{2{,}5^2}{50} - \frac{5^2}{50}}{1 - \frac{2{,}5^2}{50} - \frac{2{,}5^2}{50}} = 0{,}5$$

ii) $P(A/B) = P(A) \Rightarrow 0 \neq \frac{1}{2}$, logo não são independentes

ou

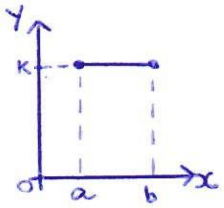
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$\Leftrightarrow P(X \geq 5 \cap X < 5) = P(X \geq 5) \cdot P(X<5)$

$\Leftrightarrow P(\emptyset) = (1 - F(5)) \cdot F(5)$

$\Leftrightarrow 0 \neq 0{,}5 \cdot 0{,}5$

$\Leftrightarrow 0 \neq 0{,}25$, logo não são independentes

3) 

$f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus]a, b[$

a) $f(x) = \begin{cases} K, & x \in [a,b] \\ 0, & x \in]-\infty, a[\cap]b, +\infty[\end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{a} 0\,dx + \int_{a}^{b} K\,dx + \int_{b}^{+\infty} 0\,dx = 1$$

$$\Leftrightarrow [Kx]_a^b = 1 \Leftrightarrow Kb - Ka = 1 \Leftrightarrow K = \frac{1}{b-a}$$

b) $$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b x\,dx = \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{(b-a)(b-a)}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx = \dots = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b$$

$$= \frac{b^3-a^3}{3(b-a)}$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{b^3-a^2}{3(b-a)} - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

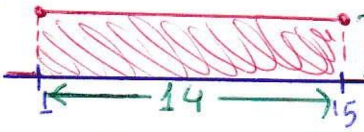
$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \frac{|b-a|}{2\sqrt{3}}$$

c) $$F(\mu) = P(X \leqslant \mu) = \int_{-\infty}^{\mu} f(x)\,dx = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\mu} 0\,dx, & \mu < a \\ \int_{-\infty}^{a} 0\,dx + \int_a^x \frac{1}{b-a}\,dx, & a \leqslant \mu < b \\ \int_{-\infty}^{a} 0\,dx + \int_a^b \frac{1}{b-a}\,dx + \int_b 0\,dx, & \mu \geqslant b \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \mu < a \\ \frac{1}{b-a} \cdot [x]_a^{\mu}, & a \leqslant \mu < b \\ \frac{1}{b-a} \cdot [x]_a^b, & \mu \geqslant b \end{cases} = \begin{cases} 0, & \mu < a \\ \frac{\mu-a}{b-a}, & a \leqslant \mu < b \\ 1, & \mu \geqslant b \end{cases}$$

4) $X =$ "comprimento de um cabo" , $X \sim U_{[1,15]}$

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}(x) \begin{cases} \frac{1}{b-a} \cdot 1 & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{se cc} \end{cases} \rightarrow \frac{1}{15-1} \cdot 1 = \frac{1}{14}$$



$14 \cdot x = 1$
$\Leftrightarrow x = \frac{1}{14}$

a) $E(X) = \frac{1+15}{2} = 8 \leftarrow$ (média)

Mediana (md): $P(X \leq md) = 0{,}5$ e $P(X \geq md) = 0{,}5$

$$F(md) = 0{,}5 \Leftrightarrow \int_1^{md} f(x)\,dx = 0{,}5$$

$$\Leftrightarrow \int_1^{md} \frac{1}{14}\,dx = 0{,}5 \Leftrightarrow \frac{1}{14} \cdot [x]_1^{md} = 0{,}5$$

$$\Leftrightarrow md - 1 = 0{,}5 \cdot 14 \Leftrightarrow md = 8$$

b) $V(X) = \frac{(15-1)^2}{12} = \frac{49}{3}$; $\sigma = \sqrt{\frac{49}{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$

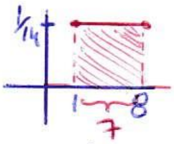
c) $P(X>5) = \int_5^{+\infty} f(x)\,dx = \int_5^{15} \frac{1}{14}\,dx = \left[\frac{x}{14}\right]_5^{15} = \frac{15}{14} - \frac{5}{14} = \frac{5}{7}$

d) $P(0 \leq x \leq 8) = \int_0^8 f(x)\,dx + \int_0^1 0\,dx + \int_1^8 \frac{1}{14}\,dx = 0 + \frac{1}{14}[x]_1^8 = \frac{1}{14}(8-1) = 0{,}5$

ou

Como mediana $= 8$, então $x<8$ contém metade dos casos

$$\int_1^8 \frac{1}{14}\,dx = \left[\frac{x}{14}\right]_1^8 = \frac{7}{14} = 0{,}5$$

ou  Área $= 7 \cdot \frac{1}{14} = 0{,}5$

5) $X =$ "a duração, em milhares de horas, de uma componente"

$X \sim \mathcal{E}(0,1)$

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}1 \cdot e^{-0{,}1x}, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-0{,}1x}, & x > 0 \end{cases}$$

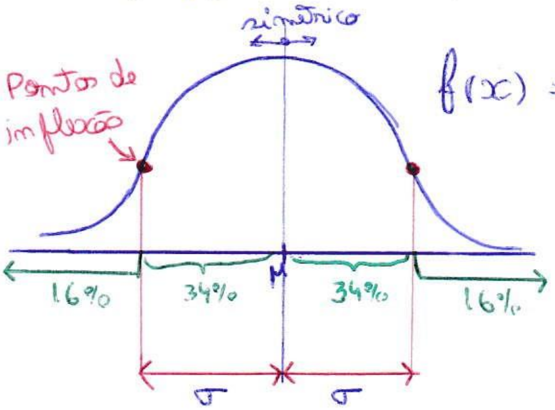
a) $P(X<4) = F(4) = 1 - e^{-0{,}1 \cdot 4} = 0{,}3297$

b) $E(x) = \frac{1}{0{,}1} = 10$; $V(x) = \frac{1}{(0{,}1)^2} = 100 \rightarrow \sigma = \sqrt{100} = 10$

Distribuição Normal

$$N(\mu, \sigma) \quad \begin{cases} E(x) = \mu \\ V(x) = \sigma^2 \end{cases}$$

μ ↑ média σ ↑ desvio - padrão



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$X \sim N(0,1)$ Normal Standard (Centrada e reduzida)

$\underbrace{\text{Centrada}}_{\mu=0}$ $\underbrace{\text{reduzida}}_{\sigma=1}$

Se não tiver centrada nem reduzida $\Rightarrow$

$$X \sim N(\mu, \sigma) \rightarrow \underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{\text{nova V.a. } Z} \sim N(0,1)$$

6) X = "tensão corrente elétrica" , $N(220, 2)$

a) $P(X > 223) = P\Big(\underbrace{\frac{X-220}{2} > \frac{223-220}{2}\Big) = P(Z}_{\text{nova V.a. } Z \sim N(0,1)} > 1{,}5) = 1 - P(Z \leq 1{,}5)$

Tabela das Normal

Z	0,00
1,5	0,9372

1,5,0

$= 1 - 0{,}9372 = 0{,}0668$

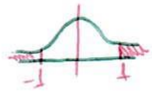
b) $P(220 < X < 223) = P\left(\frac{220-220}{2} < \frac{X-220}{2} < \frac{223-220}{2}\right)$

$= P(0 < Z < 1{,}5) = P(Z < 1{,}5) - P(0 < Z) = P(Z < 1{,}5) - 1 - P(Z < 0)$

$= 0{,}9332 - 1 - 0{,}5 = 0{,}9332 = 0{,}4332$

c) $P(X < 218) = P\left(\frac{X-220}{2} < \frac{218-220}{2}\right) = P(Z < -1) = P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1)$

$= 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$



d) $P(X \leq 223 / X > 221) = \dfrac{P(X \leq 223 \cap X > 221)}{P(X > 221)}$

$$= \frac{P\left(\frac{X-220}{2} \leq \frac{223-220}{2} \cap \frac{X-220}{2} > \frac{221-220}{2}\right)}{P\left(\frac{X-220}{2}\right)} = \frac{P(Z \leq 1{,}5 \cap Z > 0{,}5)}{P(Z > 0{,}5)}$$

$$= \frac{P(Z \leq 1{,}5) - P(Z \leq 0{,}5)}{P(Z > 0{,}5)} = \frac{0{,}9332 - 0{,}6915}{1 - 0{,}6915} \simeq 0{,}7885$$

7) $X =$ "Comprimento de um parafuso", $N(0{,}25\ ,\ 0{,}02)$

Se $X \notin\ ]0{,}2\ ;\ 0{,}28[$ é considerado defeituoso

$$P(X \leq 0{,}2 \cup X \geq 0{,}28) = P(X \leq 0{,}2) + P(X \geq 0{,}28)$$

$$= P\left(\frac{X-0{,}25}{0{,}02} \leq \frac{0{,}2-0{,}25}{0{,}02}\right) + 1 - P\left(\frac{X-0{,}25}{0{,}02} < \frac{0{,}28-0{,}25}{0{,}02}\right)$$

$$= P(Z \leq -2{,}5) + 1 - P(Z<1{,}5) = 1-P(Z<2{,}5)+1-P(Z<1{,}5)$$

$$= 1-0{,}9938+1-0{,}9332 = 0{,}0062+0{,}0668 = 0{,}0730$$

8) $X =$ "Erro de medição do raio de 1 círculo, em mm", $X \sim N(0,\sigma)$

a) σ: $P(X>6{,}45) = 0{,}0985 \Leftrightarrow P\left(\frac{X-0}{\sigma} > \frac{6{,}45-0}{\sigma}\right) = 0{,}0985$

$$\Leftrightarrow P\left(Z > \frac{6{,}45}{\sigma}\right) = 0{,}0985 \Leftrightarrow 1-P\left(Z < \frac{6{,}45}{\sigma}\right) = 0{,}0985$$

Z	0,09
1,2	0,9015

$$\Leftrightarrow \underbrace{P\left(Z < \frac{6{,}45}{\sigma}\right) = 0{,}9015}_{\text{procurar na tabela}} \Leftrightarrow \frac{6{,}45}{\sigma} = 1{,}29 \Leftrightarrow \sigma = 5$$

b) $X \sim N(0,5)$, $P(-1<X<1) = P\left(\frac{-1-0}{5} < \frac{X-0}{5} < \frac{1-0}{5}\right) = P\left(-\frac{1}{5} < Z < \frac{1}{5}\right)$

$$= P\left(Z \leq \frac{1}{5}\right) - P\left(Z \leq -\frac{1}{5}\right) = P(Z \leq 0{,}2) - 1 + P(Z \leq 0{,}2)$$

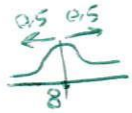
$$= 0{,}5793 - 1 + 0{,}5793 = 0{,}1586$$

9) $X_1 =$ "Tempo de entrega na 1ª etapa", $X_1 \sim N(24,4)$ $\quad X_1, X_2$ independentes

$X_2 =$ "Tempo de entrega na 2ª etapa", $X_2 \sim N(8,3)$

a) $P(X_1>12) = P\left(\frac{X_1-24}{4} > \frac{12-24}{4}\right) = P(Z>-3) = P(Z<3) = 0{,}998650$

b) $P(X_2 \leq 8 / X_1 > 24) \overset{\text{indep.}}{=} P(X_2 \leq 8) = 0{,}5$ media=8 →



c) $P(X_1+X_2>48) \rightarrow \mu = E(X_1+X_2) = 24+8 = 32$

$\sigma = \sqrt{V(X_1+X_2)} = \sqrt{V(X_1)+V(X_2)} = \sqrt{4^2+3^2} = 5$

$(X_1+X_2) \sim N(32,5)$

$$P\left(\frac{(X_1+X_2)-32}{5} > \frac{48-32}{5}\right) = P(Z>3{,}2) = 1-P(Z \leq 3{,}2) = 1-0{,}999313 = 0{,}000687$$

10) X_A = "Tempo de combustão da fita de diametro A, em segundos"
X_B = "Tempo de combustão da fita de diametro B, em segundos"

$X_A \sim N(420, 80)$
X_A e X_B independentes
$X_B \sim N(280, 45)$

a) $P(400 < X_A < 480) = P\left(\frac{400-420}{80} < Z < \frac{480-420}{80}\right)$

$= P(-0{,}25 < Z < 0{,}75)$

$= P(Z < 0{,}75) - P(Z < -0{,}25)$

$= P(Z \leq 0{,}75) - P(Z > 0{,}25)$

$= P(Z \leq 0{,}75) - 1 + P(Z \leq 0{,}25)$

$= 0{,}7734 - 1 + 0{,}5987$

$= 0{,}3721$

Z	...	0,05
⋮		⋮
0,2	...	0,5987
⋮		⋮
0,7	...	0,7734

b) $P(X_B > X_A) = P(\underbrace{X_B - X_A}_{\text{nova v.a. } Y} > 0)$

Y = "diferença de tempo entre combustão das fitas A e B, em segundos"

$Y = X_B - X_A \rightarrow Y \sim N(280-420, \sqrt{45^2+80^2})$
$= Y \sim N(-140, \sqrt{8425})$

$P(Y > 0) = 1 - P(Y \leq 0) = 1 - P\left(Z \leq \frac{0+140}{\sqrt{8425}}\right)$

$= 1 - P(Z \leq 1{,}53) = 1 - 0{,}9370$

$= 0{,}0630$

11) X = "Peso de uma peça", $X \sim N(140, \sqrt{625}) = N(140, 25)$

a) $$P(X>120 / X\leqslant 150) = \frac{P(X>120 \cap X\leqslant 150)}{P(X\leqslant 150)} = \frac{P(X\leqslant 150) - P(X<120)}{P(X\leqslant 150)}$$

$$= \frac{P\left(\frac{X-140}{25} \leqslant \frac{150-140}{25}\right) - P\left(\frac{X-140}{25} < \frac{120-140}{25}\right)}{P\left(\frac{X-140}{25} \leqslant \frac{150-140}{25}\right)} = \frac{P(Z\leqslant 0{,}4) - P(Z<-0{,}8)}{P(Z<0{,}4)}$$

$$= \frac{P(Z\leqslant 0{,}4) - 1 + P(Z<0{,}8)}{P(Z<0{,}4)} = \frac{0{,}6554 - 1 + 0{,}7881}{0{,}6554} \simeq 0{,}6767$$

b) Peso de 50 peças = $\sum_{i=1}^{50} X_i$, com X_i independentes

Peso da caixa vazia = $Y \sim N(1000, 20)$

P("peso caixa completa" $> 8500 = P(Y + \sum_{i=1}^{50} X_i > 8500)$

$$E\left(\sum_{i=1}^{50} X_i\right) = \sum_{i=1}^{50} E(X_i) = \sum_{i=1}^{50} 140 = 7000$$

$$V\left(\sum_{i=1}^{50} X_i\right) \underset{\text{indp}}{=} \sum_{i=1}^{50} V(X_i) = \sum_{i=1}^{50} 25^2 = 31250 \rightarrow \sigma = \sqrt{31250} = 20$$

$$Y + \sum_{i=1}^{50} X_i \sim N\left(1000+7000, \sqrt{31250+20^2}\right) = N(8000, 177{,}904)$$

$$P\left(Y+\sum_{i=1}^{50} > 8500\right) = P\left(Z > \frac{8500-8000}{177{,}904}\right)$$

$$= 1 - P(Z\leqslant 2{,}810) = 1 - 0{,}9975 = 0{,}0025$$

c) C = "Escolher uma peça da caixa e se pesa mais de 150g"

Como cada peça é independente e com reposição, temos uma Binomial

Repetir C 50 vezes pois cada caixa tem 50 peças

$C \sim B(50, P(X>150))$ $\swarrow 1 - 0{,}6554$

$= C \sim B(50, 0{,}3446)$

$\downarrow$ $p \in \left]0{,}1, 0{,}9\right[$ com $50>20$

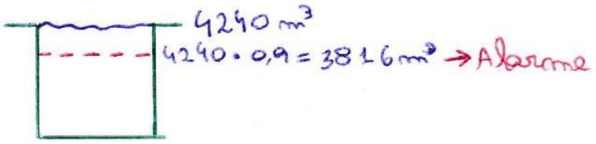
$$C \,\dot\sim\, N\left(50\cdot 0{,}3446, \sqrt{50\cdot 0{,}3446\cdot(1-0{,}3446)}\right)$$

$$= C \,\dot\sim\, N(17{,}23, 3{,}36)$$

$$P(C\leqslant 1) = P\left(\frac{C-17{,}23}{3{,}36} \leqslant \frac{1-17{,}23}{3{,}36}\right) = P(Z\leqslant -4{,}83) = 1 - P(Z<4{,}83) = 1-1 \simeq 0$$

Tabelas terminam em 4,09
Como 4,09 = 0,99978 e 4,83 > 4,09
então $F(4{,}83) \cong 1$

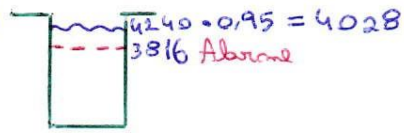
12) X = "Consumo diário de água numa localidade", $X \sim N(200, 10)$



a) $P(200 < X < 210) = P\left(\frac{200-200}{10} < \frac{X-200}{10} < \frac{210-200}{10}\right) = P(0 < Z < 1)$

$= P(Z<1) - P(0<Z) = P(Z<1) - 1 + P(Z<0) = 0{,}8413 - 1 + 0{,}5 = 0{,}3413$

b)



A = "Abastecimento de água diário", $A \sim N(100, 30)$

A e X são independentes

$P(\text{"alarme acionado"}) = P(\text{"nível da água"} < 3816) = P(\underbrace{4028 - X + A}_{\text{quantidade inicial} - \text{consumo} + \text{abastecimento}} < 3816)$

$= P(-X + A < -212) = P(X - A < 212)$

$X - A \sim N(\mu, \sigma)$ $\begin{cases} E(X-A) = E(X) - E(A) = 200 - 100 = 100 \\ V(X-A) \underset{\text{indep.}}{=} V(X) + V(A) = 10^2 + 30^2 = 1000 \end{cases}$ $\Rightarrow X - A \sim N(100, \sqrt{1000})$

$P(X-A > 212) = 1 - P(X-A < 212) = 1 - P\left(\frac{X-A-100}{\sqrt{1000}} < \frac{212-100}{\sqrt{1000}}\right) = 1 - P(Z < 3{,}54) \simeq 1 - 0{,}9998 \simeq 0{,}0002$

13) $\mathcal{E}$ = "escolhe-se um rolamento e verifica-se se é defeituoso"

Repetir $\mathcal{E}$ 20x, sempre nas mesmas condições

X = "nº de rolamentos defeituosos", $X \sim B(20, \overset{20\%}{0{,}2})$

a) $P(\text{"lote rejeitado"}) = P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0{,}2061 = 0{,}7934$

n			0,20 ← % de sucesso
repetições → 20		⋮	⋮
		2 ← nº de casos	... 0,2061

b) $E(X) = 20 \cdot 0{,}20 = 4$

c) Y = "nº de rolamentos defeituosos, em 100 repetições", $Y \sim B(\underset{\text{não está na tabela}}{100}, 0{,}2)$

$Y \sim B(\underset{n > 20}{100}, \underset{]0{,}1;0{,}9[}{0{,}2})$

$E(Y) = 100 \cdot 0{,}2 = 20$

$V(Y) = 100 \cdot 0{,}2 \cdot (1 - 0{,}2) = 16$, $\sigma = \sqrt{16} = 4$

$Y \dot{\sim} N(20, 4)$

$P(Y \geq 24) \simeq P\left(\frac{Y-20}{4} \geq \frac{24-20}{4}\right) = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$

14) Aproximar Poisson à Normal

X = "Número de vírus detetados, por mês, por um departamento de informática"

$X \sim P(\lambda) \rightarrow$ Como $E(X) = 5$, então $E(X) = \lambda = 5$

$X \sim P(5)$

a) $P(X=4 / X<5) = \dfrac{P(X=4 \cap X<5)}{P(X<5)} = \dfrac{P(X=4)}{P(X\leq 4)} = \dfrac{P(X\leq 4) - P(X\leq 3)}{P(X\leq 4)}$

λ		3	4
5	0	0,2650	0,4405

$= \dfrac{0,4405 - 0,2650}{0,4405} \simeq 0,3984$

b) Y = "nº de vírus detetados em 12 meses consecutivos", $P(Y \geq 40) = ?$

Estabilidade de Poisson

$Y \sim P(X_1 + X_2 + \dots + X_{12}) \Rightarrow Y \sim P(60)$

X_1, X_2, X_3, ..., X_{12}

mês 1, mês 2, mês 3, ..., mês 12

$X_m = 5$, $\sum_{m=1}^{12} X_m = \underbrace{5+5+\dots+5}_{12\times} = 60$

Como $\lambda = 60 > 20$, podemos aproximar à Normal

$Y \sim P(60) \rightarrow \stackrel{a}{\sim} N(\lambda, \sqrt{\lambda})$

$E(Y) = \lambda = 60$

$V(Y) = \lambda = 60$

$\sigma = \sqrt{60}$

$Y \stackrel{a}{\sim} N(60, \sqrt{60})$

$P(Y \geq 40) = P\left(\dfrac{Y-60}{\sqrt{60}} \geq \dfrac{40-60}{\sqrt{60}}\right) = P(Z \geq -2,58) = P(Z \leq 2,58) \simeq 0,9951$