Métodos Estatísticos
Capítulo 4

Resumos e exemplos

Exercícios

Capitulo 4

Amostra aleatória

Uma amostra aleatoria de v.a. X é um conjunto finito de n v.a. $X_1, X_2 \dots X_n$, Tais que

→ $X_1, X_2 \dots X_n$ são independentes;
→ $X_1, X_2 \dots X_n$ Têm a mesma distribuição de X;

Podemos dizer que $X_1, X_2 \dots X_n$ são independentes e identicamente distribuidas com X
iid

Teorema do Limite Central (TLC)

- Se $X_1, X_2 \dots X_n$ são variáveis iid de uma v.a. X;
- Se $n > 30$;
- Se Tem uma média μ e desvio-padrão σ;

Então: $$\frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{V(\bar{X})}} \dot{\sim} N(0,1)$$

$$\boxed{\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \; ; \; E(X) = \mu \; ; \; V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}}$$

Regras gerais

- Se não estiver centrada e reduzida e seguir uma distribuição normal:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu ; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \underbrace{\sqrt{n}\,\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)}_{\text{Usar para determinar quantidade média}}$$

→ Decompor uma TLC:

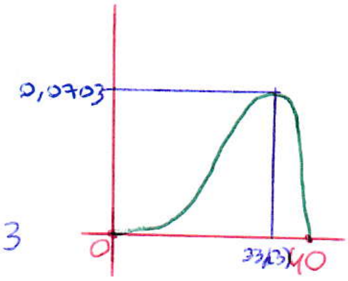
$$\frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{V(\bar{X})}} \dot{\sim} N(0,1) = \frac{\times n \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right)}{\times n \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} \dot{\sim} N(0,1) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\cdot\sigma} \dot{\sim} N(0,1)$$

multiplicar por $\boxed{n}$ para remover

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} X_i \dot{\sim} N(n\mu, \sqrt{n}\cdot\sigma)}_{\text{Usar para determinar quantidade Total}}$$

1) X = "Quantidade de chuva que cai por dia, em l/m^2";

$$f(x) = \begin{cases} \frac{21}{8192 \cdot 10^7} \cdot (40x^5 - x^6), & \text{se } 0 \leq x \leq 40 \\ 0 & \text{, se c.c.} \end{cases}$$



$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx = \int_0^{40} x \cdot f(x)\, dx = 30$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \int_0^{40} x^2 \cdot f(x)\, dx - \int_0^{40} x \cdot f(x) dx^{\,2} = 33,33$$

Seja $X_1, X_2 \dots X_{100}$ uma amostra aleatória de X

X_i = "Quantidade de chuva que cai no dia i, em l/m^2";

a) $X_1, X_2 \dots X_{100}$ têm que ser variáveis aleatórias iid com X

b) Considere $\overline{X}_{100} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} X_i = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{100}}{100}$

i) $$E(\overline{X}_{100}) = E\left(\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \frac{1}{100} \underbrace{\sum_{i=1}^{100}}_{100 \cdot} \underbrace{E(X_i)}_{E(X)=30} = \frac{1}{100} \cdot 100 \cdot 30 = 30$$

$$V(\overline{X}_{100}) = V\left(\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \left(\frac{1}{100}\right)^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{100}}_{100 \cdot} \underbrace{V(X_i)}_{V(X)=33,33} = \frac{1}{100^2} \cdot 100 \cdot 33,33 = 0,3333$$

ii) $$\frac{\overline{X} - E(\overline{X}_{100})}{\sqrt{V(\overline{X}_{100})}} \dot\sim N(0,1) = \frac{\overline{X}_{100} - 30}{\sqrt{0,3333}} = \frac{\overline{X}_{100} - 30}{0,577} \dot\sim N(0,1)$$

ou $$\overline{X}_{100} \dot\sim N\Big(30, \underbrace{\boxed{\frac{\sqrt{33,33}}{\sqrt{100}}}}_{=0,577}\Big) \Rightarrow \frac{\overline{X}_{100} - 30}{0,577} \dot\sim N(0,1)$$

iii) Se $\frac{\overline{X}_{100} - 30}{0,577} \dot\sim N(0,1)$ então $\overline{X} \sim N(30; 0,577)$

$$P(28,5 < \overline{X} < 31,5) = P\left(\frac{28,5 - 30}{0,577} < \frac{\overline{X}_{100} - 30}{0,577} < \frac{31,5 - 30}{0,577}\right) = P(-2,5997 < Z < 2,5997)$$

$$\simeq P(Z < 2,6) - P(-2,6 < Z) = P(Z < 2,6) - 1 + P(Z < 2,6)$$

$$\simeq 0,9953 - 1 + 0,9953 = 0,9906$$

Z	0,00
2,6	0,9953

R: Em aproximadamente 99% dos 100 dias observados, a quantidade média de chuva, em l/m^2, situa-se entre 28,5 l/m^2 e 31,5 l/m^2

2) X = "Energia, em J, de uma partícula"

$X \sim \mathcal{E}(2) \longrightarrow E(X) = \frac{1}{2}$ e $V(X) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ } (Ver Tabela distribuições 1.1)

Lei da energia do sistema $\beta = \sum_{i=1}^{1600} X_i$

a) Como $X_1, X_2 \dots X_{1600}$ são iid com média $\frac{1}{2}$ e desvio-padrão $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$, então podemos aplicar TLC:

$$\frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{V(\bar{X})}} \stackrel{.}{\sim} N(0,1) \left\{ \begin{array}{l} E(\bar{X}) = E(X) = \frac{1}{2} \\ V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{1600} = \frac{\frac{1}{4}}{1600} = \frac{1}{6400} \end{array} \right.$$

$$= \frac{\frac{1}{1600}\sum_{i=1}^{1600} X_i - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{6400}}} \stackrel{.}{\sim} N(0,1) = \frac{\frac{1}{1600}\sum_{i=1}^{1600} X_i - \frac{1}{2}}{\frac{1}{80}} \begin{array}{l} \times 1600 \\ \times 1600 \end{array} \stackrel{.}{\sim} N(0,1)$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{1600} X_i - 800}{20} \stackrel{.}{\sim} N(0,1) = \sum_{i=1}^{1600} X_i \stackrel{.}{\sim} N(800, 20)$$

b) $$P\left(780 < \sum_{i=1}^{1600} X_i < 840\right) = P\left(\frac{780-800}{20} < \frac{\sum_{i=1}^{1600} X_i - 800}{20} < \frac{840-800}{20}\right)$$

$$= P(-1 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(-1 < Z) = P(Z < 2) - 1 + P(Z < 1)$$

$$= 0{,}9772 - 1 + 0{,}8413 = 0{,}8185$$