Métodos Estatísticos
Capítulo 3

Resumos e exemplos

Variáveis Aleatórias Continuas **2**

Distribuição Normal **6**

Binomial aproximada a Normal **9**

Exercícios

1............ **2**

2............ **3**

3............ **4**

4, 5............ **5**

6............ **6**

7, 8, 9............ **7**

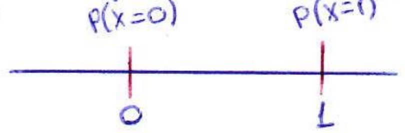
10 .... **8**

11 .... **9**

Capítulo 3 - V.a. Contínuas

V.a. discretas (Cap 1 e 2)

X, S_X finito ou enumerável



$S_X = \{0, 1\} \quad \sum_{m \in S_X} P(X=m) = 1$

1. $P(X \leq a) = \sum_{\substack{m \in S_X \\ m \leq a}} P(X=m)$

2. $E(X) = \sum_{x \in S_X} x \cdot P(X=x)$

3. $F(x) = P(X \leq x)$

V.a. contínuas

X, S_X não é finito nem enumerável

$f(x) \rightarrow$ função densidade

$f(x) \neq P(X=x)$

$S_X = [0, 1] \quad \int_0^1 f(x)\,dx = 1$

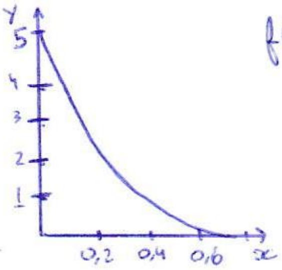
1. $P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$

2. $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx$

3. $F(x) = P(X \leq x)$

---

1)

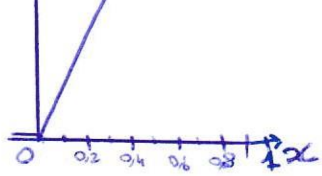


$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \vee x > 1 \end{cases}$

X = "a quantidade de combustível procurado por semana"

a) $P(X \leq 0{,}5) = \int_{-\infty}^{0,5} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^{0,5} 5(1-x)^4\,dx = -5\left.\frac{(1-x)}{5}\right]_0^{0,5} = -0{,}5^5 - (-1) = 0{,}9688$

b) $F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1-(1-x)^5 & , 0 \leq x < 1 \\ 1 & , x \geq 1 \end{cases}$



i) $P(0{,}2 < X < 0{,}5) = P(X < 0{,}5) - P(X < 0{,}2)$

$= F(0{,}5) - F(0{,}2) = 1-(1-0{,}5)^5 - 1-(1-0{,}2)^5$

$= 0{,}2964 \simeq 30\%$

ii) C = "Capacidade do depósito"

$P(X \geq C) = 0{,}05 \Leftrightarrow 1 - P(X < C) = 0{,}05$

$\Leftrightarrow F(C) = 0{,}95 \Leftrightarrow 1-(1-C)^5 = 0{,}95$

$\Leftrightarrow -(1-C)^5 = -0{,}05 \Leftrightarrow (1-C)^5 = 0{,}05$

$\Leftrightarrow 1-C = \sqrt[5]{0{,}05} \Leftrightarrow C \simeq 0{,}45072$

2) X = "Tempo, em horas, de acesso à internet de uma pessoa"

$$f(x) = \begin{cases} x/25 & , 0 \leq x \leq 5 \\ \frac{10-x}{25} & , 5 < x \leq 10 \\ 0 & , cc \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{x^2}{50} & , 0 \leq x \leq 5 \\ 1 - \frac{(10-x)^2}{50} & , 5 \leq x \leq 10 \\ 1 & , x \geq 10 \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx = 5$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx = \frac{175}{6}$$

a) Considere $Y = 2X - 5$

$$E(Y) = E(2X-5) = -5 + 2E(X) = -5 + 2 \cdot 5 = 5$$

$$V(Y) = V(2X-5) = 2^2 \cdot V(X) = 4V(X) = 4\left[E(X^2) - E^2(X)\right] = 4\left[\frac{175}{6} - 5^2\right] = \frac{50}{3}$$

b) $A = (X \geq 5)$, $B = (X < 5)$, $C = (2{,}5 \leq X < 7{,}5)$

i) $P(A) = P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - \frac{5^2}{50} = \frac{1}{2}$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\overbrace{P(X \geq 5 \cap X < 5)}^{\text{impossível} \; = 0}}{P(X<5)}$$

$$P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(X \geq 5 \cap 2{,}5 \leq X < 7{,}5)}{P(2{,}5 \leq X < 7{,}5)} = \frac{P(5 \leq X < 7{,}5)}{P(2{,}5 \leq X < 7{,}5)}$$

$$= \frac{P(X < 7{,}5) - P(X < 5)}{P(X < 7{,}5) - P(X < 2{,}5)} = \frac{F(7{,}5) - F(5)}{F(7{,}5) - F(2{,}5)}$$

$$= \frac{1 - \frac{2{,}5^2}{50} - \frac{5^2}{50}}{1 - \frac{2{,}5^2}{50} - \frac{2{,}5^2}{50}} = 0{,}5$$

ii) $P(A/B) = P(A) \Rightarrow 0 \neq \frac{1}{2}$, logo não são independentes

ou

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

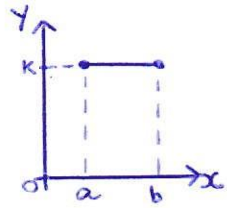
$\Leftrightarrow P(X \geq 5 \cap X < 5) = P(X \geq 5) \cdot P(X < 5)$

$\Leftrightarrow P(0) = (1 - F(5)) \cdot F(5)$

$\Leftrightarrow 0 \neq 0{,}5 \cdot 0{,}5$

$\Leftrightarrow 0 \neq 0{,}25$, logo não são independentes

3)



$f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus]a, b[$

a) $f(x) = \begin{cases} K, x \in [a, b] \\ 0, x \in]-\infty, a[\cap] b, +\infty[\end{cases}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{a} 0\,dx + \int_{a}^{b} K\,dx + \int_{b}^{+\infty} 0\,dx = 1$

$\Leftrightarrow [Kx]_a^b = 1 \Leftrightarrow Kb - Ka = 1 \Leftrightarrow K = \frac{1}{b-a}$

b) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b x\,dx = \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b$

$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{(b-a)(b-a)}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$

$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx = \dots = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b$

$= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)}$

$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{b^3 - a^2}{3(b-a)} - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$

$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \frac{|b-a|}{2\sqrt{3}}$

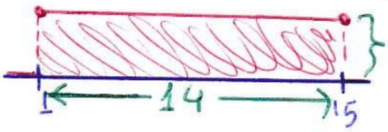
c)

$F(\mu) = P(X \leq \mu) = \int_{-\infty}^{\mu} f(x)\,dx = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\mu} 0\,dx, & \mu < a \\ \int_{-\infty}^{a} 0\,dx + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}\,dx, & a \leq \mu < b \\ \int_{-\infty}^{a} 0\,dx + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}\,dx + \int_{b}^{a} 0\,dx, & \mu \geq b \end{cases}$

$= \begin{cases} 0, \mu < a \\ \frac{1}{b-a} \cdot [x]_a^{\mu}, a \leq \mu < b \\ \frac{1}{b-a} \cdot [x]_a^b, \mu \geq b \end{cases} = \begin{cases} 0, \mu < a \\ \frac{\mu - a}{b-a}, a \leq \mu < b \\ 1, \mu \geq b \end{cases}$

4) $X =$ "comprimento de um cabo" , $X \sim U_{[1,15]}$

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \cdot 1\!\!1_{[a,b]}(x) \begin{cases} \frac{1}{b-a} \cdot 1 & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{se cc} \end{cases} \rightarrow \frac{1}{15-1} \cdot 1 = \frac{1}{14}$$



$14 \cdot x = 1$
$\Leftrightarrow x = \frac{1}{14}$

a) $E(X) = \frac{1+15}{2} = 8 \leftarrow$ (média)

Mediana (md): $P(X \leq md) = 0{,}5$ e $P(X \geq md) = 0{,}5$

$$F(md) = 0{,}5 \Leftrightarrow \int_1^{md} f(x)\,dx = 0{,}5$$

$$\Leftrightarrow \int_1^{md} \frac{1}{14}\,dx = 0{,}5 \Leftrightarrow \frac{1}{14} \cdot [x]_1^{md} = 0{,}5$$

$$\Leftrightarrow md - 1 = 0{,}5 \cdot 14 \Leftrightarrow md = 8$$

b) $V(X) = \frac{(15-1)^2}{12} = \frac{49}{3}$; $\sigma = \sqrt{\frac{49}{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$

c) $P(X>5) = \int_5^{+\infty} f(x)\,dx = \int_5^{15} \frac{1}{14}\,dx = \left[\frac{x}{14}\right]_5^{15} = \frac{15}{14} - \frac{5}{14} = \frac{5}{7}$

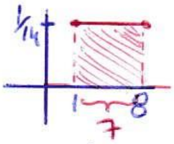
d) $P(0 \leq x \leq 8) = \int_0^8 f(x)\,dx + \int_0^1 0\,dx + \int_1^8 \frac{1}{14}\,dx = 0 + \frac{1}{14}[x]_1^8 = \frac{1}{14}(8-1) = 0{,}5$

ou

Como mediana $= 8$, então $x<8$ contém metade dos casos

$$\int_1^8 \frac{1}{14}\,dx = \left[\frac{x}{14}\right]_1^8 = \frac{7}{14} = 0{,}5$$

ou



Área $= 7 \cdot \frac{1}{14} = 0{,}5$

5) $X =$ "a duração, em milhares de horas, de uma componente"

$X \sim \mathcal{E}(0{,}1)$

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}1 \cdot e^{-0{,}1x}, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-0{,}1x}, & x > 0 \end{cases}$$

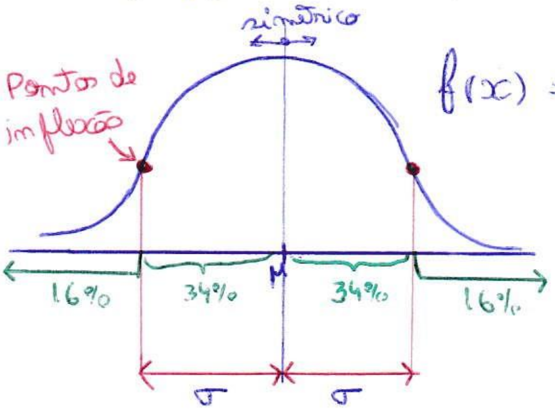
a) $P(X<4) = F(4) = 1 - e^{-0{,}1 \cdot 4} = 0{,}3297$

b) $E(x) = \frac{1}{0{,}1} = 10$; $V(x) = \frac{1}{(0{,}1)^2} = 100 \rightarrow \sigma = \sqrt{100} = 10$

Distribuição Normal

$$N(\mu, \sigma) \begin{cases} E(x) = \mu \\ V(x) = \sigma^2 \end{cases}$$

μ ↑ média, σ ↑ desvio-padrão



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$X \sim N(0,1)$ Normal Standard ($\underbrace{\text{Centrada}}_{\mu=0}$ e $\underbrace{\text{reduzida}}_{\sigma=1}$)

Se não tiver centrada nem reduzida ⇒

$$X \sim N(\mu, \sigma) \rightarrow \underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{\text{nova v.a. } Z} \sim N(0,1)$$

6) X = "tensão corrente elétrica", $N(220, 2)$

a) $P(X > 223) = P\Big(\underbrace{\frac{X-220}{2} > \frac{223-220}{2}\Big) = P(Z}_{\text{nova v.a. } Z \sim N(0,1)} > 1{,}5) = 1 - P(Z \leqslant 1{,}5)$

Tabela da Normal

1,50

Z	0,00
1,5	0,9372

$= 1 - 0{,}9372 = 0{,}0668$

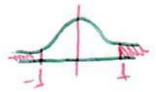
b) $P(220 < X < 223) = P\left(\frac{220-220}{2} < \frac{X-220}{2} < \frac{223-220}{2}\right)$

$= P(0 < Z < 1{,}5) = P(Z < 1{,}5) - P(0 < Z) = P(Z < 1{,}5) - 1 - P(Z < 0)$

$= 0{,}9332 - 1 - 0{,}5 = 0{,}9332 = 0{,}4332$

c) $P(X < 218) = P\left(\frac{X-220}{2} < \frac{218-220}{2}\right) = P(Z < -1) = P(Z > 1) = 1 - P(Z \leqslant 1)$

$= 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$



d) $P(X \leqslant 223 / X > 221) = \frac{P(X \leqslant 223 \cap X > 221)}{P(X > 221)}$

$= \frac{P\left(\frac{X-220}{2} \leqslant \frac{223-220}{2} \cap \frac{X-220}{2} > \frac{221-220}{2}\right)}{P\left(\frac{X-220}{2}\right)} = \frac{P(Z \leqslant 1{,}5 \cap Z > 0{,}5)}{P(Z > 0{,}5)}$

$= \frac{P(Z \leqslant 1{,}5) - P(Z \leqslant 0{,}5)}{P(Z > 0{,}5)} = \frac{0{,}9332 - 0{,}6915}{1 - 0{,}6915} \simeq 0{,}7885$

7) X = "Comprimento de um parafuso", $N(0{,}25\ ,\ 0{,}02)$

Se $X \notin]0{,}2 ; 0{,}28[$ é considerado defeituoso

$$P(X \leq 0{,}2 \cup X \geq 0{,}28) = P(X \leq 0{,}2) + P(X \geq 0{,}28)$$
$$= P\left(\frac{X-0{,}25}{0{,}02} \leq \frac{0{,}2-0{,}25}{0{,}02}\right) + 1 - P\left(\frac{X-0{,}25}{0{,}02} < \frac{0{,}28-0{,}25}{0{,}02}\right)$$
$$= P(Z \leq -2{,}5) + 1 - P(Z < 1{,}5) = 1 - P(Z < 2{,}5) + 1 - P(Z < 1{,}5)$$
$$= 1 - 0{,}9938 + 1 - 0{,}9332 = 0{,}0062 + 0{,}0668 = 0{,}0730$$

8) X = "Erro de medição do raio de 1 círculo, em mm", $X \sim N(0, \sigma)$

a) σ: $P(X > 6{,}45) = 0{,}0985 \Leftrightarrow P\left(\frac{X-0}{\sigma} > \frac{6{,}45-0}{\sigma}\right) = 0{,}0985$

$\Leftrightarrow P\left(Z > \frac{6{,}45}{\sigma}\right) = 0{,}0985 \Leftrightarrow 1 - P\left(Z < \frac{6{,}45}{\sigma}\right) = 0{,}0985$

Z	0,09
1,2	0,9015

$\Leftrightarrow \underbrace{P\left(Z < \frac{6{,}45}{\sigma}\right) = 0{,}9015}_{\text{procurar na tabela}} \Leftrightarrow \frac{6{,}45}{\sigma} = 1{,}29 \Leftrightarrow \sigma = 5$

b) $X \sim N(0, 5)$, $P(-1 < X < 1) = P\left(\frac{-1-0}{5} < \frac{X-0}{5} < \frac{1-0}{5}\right) = P\left(-\frac{1}{5} < Z < \frac{1}{5}\right)$

$= P\left(Z \leq \frac{1}{5}\right) - P\left(Z \leq -\frac{1}{5}\right) = P(Z \leq 0{,}2) - 1 + P(Z \leq 0{,}2)$

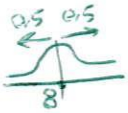
$= 0{,}5793 - 1 + 0{,}5793 = 0{,}1586$

9) X_1 = "Tempo de entrega na 1ª etapa", $X_1 \sim N(24, 4)$ X_1, X_2 independentes

X_2 = "Tempo de entrega na 2ª etapa", $X_2 \sim N(8, 3)$

a) $P(X_1 > 12) = P\left(\frac{X_1-24}{4} > \frac{12-24}{4}\right) = P(Z > -3) = P(Z < 3) = 0{,}998650$

b) $P(X_2 \leq 8 / X_1 > 24) \underset{\text{indep.}}{=} P(X_2 \leq 8) = 0{,}5$ media = 8 $\rightarrow$



c) $P(X_1 + X_2 > 48)$ $\rightarrow$ $\mu = E(X_1+X_2) = 24 + 8 = 32$

$(X_1+X_2) \sim N(32, 5)$ $\leftarrow$ $\sigma = \sqrt{V(X_1+X_2)} = \sqrt{V(X_1)+V(X_2)} = \sqrt{4^2+3^2} = 5$

$$P\left(\frac{(X_1+X_2)-32}{5} > \frac{48-32}{5}\right) = P(Z > 3{,}2) = 1 - P(Z \leq 3{,}2) = 1 - 0{,}999313 = 0{,}000687$$

10) X_A = "Tempo de combustão da fita de diametro A, em segundos"

X_B = "Tempo de combustão da fita de diametro B, em segundos"

$X_A \sim N(420, 80)$

$X_B \sim N(280, 45)$

X_A e X_B independentes

a) $P(400 < X_A < 480) = P\left(\frac{400-420}{80} < Z < \frac{480-420}{80}\right)$

$= P(-0{,}25 < Z < 0{,}75)$

$= P(Z < 0{,}75) - P(Z < -0{,}25)$

$= P(Z \leq 0{,}75) - P(Z > 0{,}25)$

$= P(Z \leq 0{,}75) - 1 + P(Z \leq 0{,}25)$

$= 0{,}7734 - 1 + 0{,}5987$

$= 0{,}3721$

Z	...	0,05
0,2	...	0,5987
0,7	...	0,7734

b) $P(X_B > X_A) = P(\underbrace{X_B - X_A}_{\text{nova v.a. } Y} > 0)$

Y = "diferença de tempo entre combustão das fitas A e B, em segundos"

$Y = X_B - X_A \rightarrow Y \sim N(280 - 420, \sqrt{45^2 + 80^2})$

$= Y \sim N(-140, \sqrt{8425})$

$P(Y > 0) = 1 - P(Y \leq 0) = 1 - P\left(Z \leq \frac{0+140}{\sqrt{8425}}\right)$

$= 1 - P(Z \leq 1{,}53) = 1 - 0{,}9370$

$= 0{,}0630$

11) $X =$ "Peso de uma peça", $X \sim N(140, \sqrt{625}) = N(140, 25)$

a) $P(X > 120 / X \leq 150) = \dfrac{P(X > 120 \cap X \leq 150)}{P(X \leq 150)} = \dfrac{P(X \leq 150) - P(X < 120)}{P(X \leq 150)}$

$= \dfrac{P\left(\frac{X-140}{25} \leq \frac{150-140}{25}\right) - P\left(\frac{X-140}{25} < \frac{120-140}{25}\right)}{P\left(\frac{X-140}{25} \leq \frac{150-140}{25}\right)} = \dfrac{P(Z \leq 0{,}4) - P(Z < -0{,}8)}{P(Z < 0{,}4)}$

$= \dfrac{P(Z \leq 0{,}4) - 1 + P(Z < 0{,}8)}{P(Z < 0{,}4)} = \dfrac{0{,}6554 - 1 + 0{,}7881}{0{,}6554} \simeq 0{,}6767$

b) Peso de 50 peças $= \sum_{i=1}^{50} X_i$, com X_i independentes

Peso da caixa vazia $= Y \sim N(1000, 20)$

P("peso caixa completa" $> 8500 = P(Y + \sum_{i=1}^{50} X_i > 8500)$

$E\left(\sum_{i=1}^{50} X_i\right) = \sum_{i=1}^{50} E(X_i) = \sum_{i=1}^{50} 140 = 7000$

$V\left(\sum_{i=1}^{50} X_i\right) \underset{\text{indp}}{=} \sum_{i=1}^{50} V(X_i) = \sum_{i=1}^{50} 25^2 = 31250 \rightarrow \sigma = \sqrt{31250} = 20$

$Y + \sum_{i=1}^{50} X_i \sim N(1000 + 7000, \sqrt{31250 + 20^2}) = N(8000, 177{,}904)$

$P(Y + \sum_{i=1}^{50} > 8500) = P\left(Z > \frac{8500 - 8000}{177{,}904}\right)$

$= 1 - P(Z \leq 2{,}810) = 1 - 0{,}9975 = 0{,}0025$

c) $C =$ "Escolher uma peça da caixa e se pesa mais de 150g"

Como cada peça é independente e com reposição, temos uma Binomial

Repetir C 50 vezes pois cada caixa tem 50 peças

$C \sim B(50, P(X > 150))$ $\swarrow 1 - 0{,}6554$

$= C \sim B(50, 0{,}3446)$

$\downarrow$ $p \in]0{,}1, 0{,}9[$ com $50 > 20$

$C \dot{\sim} N(50 \cdot 0{,}3446, \sqrt{50 \cdot 0{,}3446 \cdot (1 - 0{,}3446)})$

$= C \dot{\sim} N(17{,}23, 3{,}36)$

$P(C \leq 1) = P\left(\frac{C - 17{,}23}{3{,}36} \leq \frac{1 - 17{,}23}{3{,}36}\right) = P(Z \leq -4{,}83) = 1 - P(Z < 4{,}83) = 1 - 1 \simeq 0$

Tabelas terminam em 4,09
Como 4,09 = 0,99978 e 4,83 > 4,09
então $F(4{,}83) \cong 1$