

# Métodos Estatísticos

## Capítulo 4

### Resumos e exemplos

Amostras aleatórias .....	<b>2</b>
Teorema do Limite Central (TLC) .....	<b>2</b>

### Exercícios

1 .....	<b>3</b>
2 .....	<b>4</b>
3 .....	<b>5</b>
4 .....	<b>6</b>
5 .....	<b>7</b>

## Capítulo 4

### Amostra aleatória

Uma amostra aleatória de v.a.  $X$  é um conjunto finito de  $n$  v.a.  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , tais que

- $X_1, X_2, \dots, X_n$  não independentes;
- $X_1, X_2, \dots, X_n$  têm a mesma distribuição de  $X$ ;

Podemos dizer que  $X_1, X_2, \dots, X_n$  são independentes e identicamente distribuídas com  $X$   
iid

### Teorema do Limite Central (TLC)

- Se  $X_1, X_2, \dots, X_n$  são variáveis iid de uma v.a.  $X$ ;
- Se  $n > 30$ ;
- Se têm uma média  $\mu$  e desvio-padrão  $\sigma$ ;

Então:

$$\frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{V(\bar{X})}} \sim N(0, 1)$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i; E(X) = \mu; V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Regras gerais

- Se não estiver centrada e reduzida, segue uma distribuição normal:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \underbrace{\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}} \sim N(0, 1)$$

Usar para determinar  
quantidade média

→ Decompor uma TLC:

$$\frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{V(\bar{X})}} \sim N(0, 1) = \frac{\underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i}_{\text{multiplicar por } nm \text{ para remover } n} - \mu}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} \sim N(0, 1) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} \sim N(0, 1)$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^n X_i}_{\text{Usar para determinar quantidade Total}} \sim N(n\mu, \sqrt{n} \cdot \sigma)$$

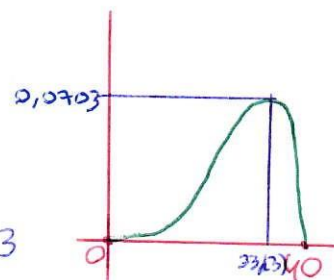
Usar para determinar  
quantidade Total

1)  $X =$  "Quantidade de chuva que cai por dia, em  $l/m^2$ ";

$$f(x) = \begin{cases} \frac{21}{8192 \cdot 10^7} \cdot (40x^5 - x^6), & \text{se } 0 \leq x \leq 40 \\ 0, & \text{se c.c.} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \int_0^{40} x \cdot f(x) dx = 30$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \int_0^{40} x^2 \cdot f(x) dx - \int_0^{40} x \cdot f(x) dx^2 = 33,33$$



Seja  $X_1, X_2, \dots, X_{100}$  uma amostra aleatória de  $X$

$X_i =$  "Quantidade de chuva que cai no dia  $i$ , em  $l/m^2$ ";

a)  $X_1, X_2, \dots, X_{100}$  têm que ser variáveis aleatórias iid com  $X$

b) Considere  $\bar{X}_{100} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} X_i = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{100}}{100}$

i)  $E(\bar{X}_{100}) = E\left(\frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} E(X_i) = \frac{1}{100} \cdot 100 \cdot 30 = 30$   
 $100 \cdot E(X) = 30$

$V(\bar{X}_{100}) = V\left(\frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \left(\frac{1}{100}\right)^2 \sum_{i=1}^{100} V(X_i) = \frac{1}{100^2} \cdot 100 \cdot 33,33 = 0,3333$   
 $100 \cdot V(X) = 33,33$

ii)  $\frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{V(\bar{X})}} \sim N(0,1) = \frac{\bar{X}_{100} - 30}{\sqrt{0,3333}} = \frac{\bar{X}_{100} - 30}{0,577} \sim N(0,1)$

ou  $\bar{X}_{100} \sim N\left(30, \frac{\sqrt{33,33}}{\sqrt{100}}\right) \Rightarrow \frac{\bar{X}_{100} - 30}{0,577} \sim N(0,1)$   
 $= 0,577$

iii) Se  $\frac{\bar{X}_{100} - 30}{0,577} \sim N(0,1)$  então  $\bar{X} \sim N(30; 0,577)$

$$\begin{aligned} P(28,5 < \bar{X} < 31,5) &= P\left(\frac{28,5 - 30}{0,577} < \frac{\bar{X}_{100} - 30}{0,577} < \frac{31,5 - 30}{0,577}\right) = P(-2,5997 < Z < 2,5997) \\ &\approx P(Z < 2,6) - P(-2,6 < Z) = P(Z < 2,6) - 1 + P(Z < 2,6) \\ &\approx 0,9953 - 1 + 0,9953 = 0,9906 \end{aligned}$$

Z	0,00
2,6	0,9953

R: Em aproximadamente 99% dos 100 dias observados, a quantidade média de chuva, em  $l/m^2$ , ficou-se entre  $28,5 l/m^2$  e  $31,5 l/m^2$

2)  $X =$  "Energia, em J, de uma partícula"

$$X \sim \mathcal{E}(2) \rightarrow E(X) = \frac{1}{2} \text{ e } V(X) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \quad \left\{ \text{(Ver Tabela Distribuições 1.1)} \right\}$$

$$\text{Lei da Energia do sistema } \beta = \sum_{i=1}^{1600} x_i$$

a) Como  $x_1, x_2, \dots, x_{1600}$  são iid com média  $\frac{1}{2}$  e desvio-padrão  $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ , então podemos aplicar TLC:

$$\frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{V(\bar{X})}} \sim N(0,1) \quad \left\{ \begin{array}{l} E(\bar{X}) = E(X) = \frac{1}{2} \\ V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{1600} = \frac{\frac{1}{4}}{1600} = \frac{1}{6400} \end{array} \right.$$

$$= \frac{\frac{1}{1600} \sum_{i=1}^{1600} x_i - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{6400}}} \sim N(0,1) = \frac{\frac{1}{1600} \sum_{i=1}^{1600} x_i - \frac{1}{2}}{\frac{1}{80}} \sim N(0,1)$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{1600} x_i - 800}{20} \sim N(0,1) = \frac{\sum_{i=1}^{1600} x_i}{20} \sim N(800, 20)$$

$$b) P(780 < \sum_{i=1}^{1600} x_i < 840) = P\left(\frac{780-800}{20} < \frac{\sum_{i=1}^{1600} x_i - 800}{20} < \frac{840-800}{20}\right)$$

$$= P(-1 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < -1) = P(Z < 2) - 1 + P(Z < 1)$$

$$= 0,9772 - 1 + 0,8413 = 0,8185$$



3)  $X =$  "Erro da medição do raio de um círculo, em mm";

$X \sim N(0, 5)$ ;  $X_1, X_2, \dots, X_{10}$  uma amostra aleatória de  $X$ , são independentes entre si e têm a mesma distribuição de  $X$ ;

$$T_1 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{10}}{10} \text{ média amostral } \bar{X}_{10}$$

$$T_2 = \frac{5X_1 + 5X_{10}}{10} = \frac{5}{10} X_1 + \frac{5}{10} X_{10} = \frac{1}{2} X_1 + \frac{1}{2} X_{10} \text{ média de } X_1 \text{ e } X_{10}$$

a)  $T_1 = \frac{1}{10} (X_1 + X_2 + \dots + X_{10})$ , com  $X_1, X_2, \dots, X_{10}$  a serem iid, pela estabilidade da Normal,  $T_1$  também terá distribuição Normal.

$$T_1 \sim N(\mu, \sigma)$$

$$\begin{aligned} E(T_1) &= E\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{10}}{10}\right) = \frac{1}{10} E(X_1 + \dots + X_{10}) = \frac{1}{10} E(\underbrace{E(X_1)}_{=E(X)} + \dots + \underbrace{E(X_{10})}_{=E(X)}) \\ &= \frac{1}{10} E(E(X) + \dots + E(X)) = \frac{1}{10} \cdot 10 \cdot E(X) = E(X) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(T_1) &= V\left(\frac{X_1 + \dots + X_{10}}{10}\right) = \frac{1}{10^2} V(X_1 + \dots + X_{10}) = \frac{1}{10^2} (V(X_1) + \dots + V(X_{10})) \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{as } X_i \text{ são independentes}} \\ &= \frac{1}{10^2} (V(X) + \dots + V(X)) = \frac{1}{10^2} \cdot 10 \cdot V(X) = \frac{V(X)}{10} \end{aligned}$$

$$\sigma = V(T_1) = \frac{V(X)}{10} = \frac{\sqrt{V(X)}}{\sqrt{10}} = \frac{\sigma_{T_1}}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}}$$

$$T_1 \sim N\left(0, \frac{5}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\begin{aligned} b) P(T_1 > 3) &= P\left(\frac{T_1 - 0}{5/\sqrt{10}} > \frac{3 - 0}{5/\sqrt{10}}\right) = P(Z > 1,9) = 1 - F_Z(1,9) = 1 - 0,9713 \\ &= 0,0287 \simeq 3\% \end{aligned}$$

Exe 4)  $X$  é uma média (v.a.r)

$$E(X) = \frac{2}{3}; V(X) = \frac{8}{9}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_m \text{ iid } \Rightarrow \bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i$$

a) Como  $x_1, x_2, \dots, x_m$  são iid e uma amostra de  $X$ , pelo T.C:

$$\frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{V(\bar{X})}} \sim N(0,1) \text{ lim que } \begin{cases} E(\bar{X}) = E(X) = \frac{2}{3} \\ V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{m} = \frac{8/9}{m} = \frac{8}{9m} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{X} - \frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{8}{9m}}} \sim N(0,1) \Leftrightarrow \bar{X} \sim N\left(\frac{2}{3}, \sqrt{\frac{8}{9m}}\right) = N\left(\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{m}}\right)$$

\*)  $?_m: P(\bar{X}_m > 0,8) \leq 0,0119$

$$\Leftrightarrow P\left(\underbrace{\frac{\bar{X} - \frac{2}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{m}}}}_{Z \sim N(0,1)} > \underbrace{\frac{0,8 - \frac{2}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{m}}}}_{?}\right) < 0,0119$$

$$\Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{0,8 - \frac{2}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{m}}}\right) > 1 - 0,0119$$

$$\Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{0,8 - \frac{2}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{m}}}\right) > 0,9881$$

procurar na tabela

Inversa Normal  $F_Z^{-1}$

0,06	
2,2	0,9881

$$\Leftrightarrow \frac{0,8 - \frac{2}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{m}}} > 2,26$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{m} \frac{0,8 - \frac{2}{3}}{2\sqrt{2}} > 2,26$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m} > \frac{2,26 \cdot 2\sqrt{2}}{3(0,8 - \frac{2}{3})}$$

$$\Leftrightarrow m > 15,98^2$$

$$\Leftrightarrow m > 255,38$$

$$\Leftrightarrow m \gg 256$$

5)  $X =$  "Concentração diária de um poluente, em nanogramas por metro cúbico"  
 $X \sim N(100, 9,27)$

$$a) P(X > 120) = 1 - P(X \leq 120)$$

$$= 1 - P\left(\frac{X - 100}{9,27} \leq \frac{120 - 100}{9,27}\right)$$

$$= 1 - P(Z \leq 2,06)$$

$z$	
2,0	0,9803

$$= 1 - F_Z(2,06)$$

$$= 1 - 9803 = 0,0197$$