

# Métodos Estatísticos

## Capítulo 2

### Resumos e exemplos

Lei de Probabilidade de X, Função distribuição .....	2
Esperança, variância, desvio-padrão, covariância .....	3
Binomial .....	9
Hipergeométrica e aproximação para Binomial .....	10
Hipergeométrica e aproximação para Binomial .....	11
Poisson e Estabilidade de Poisson .....	12
Hipergeométrica aproximada a Binomial aproximada a Poisson .....	13
Variáveis aleatórias bidimensionais discretas .....	15

### Exercícios

1 a) .....	4
1 b) c).....	5
2.....	6
3.....	7
4, 5.....	8
7, 8.....	9
9, 10, 11.....	10
12, 13, 14.....	11
14 alternativo.....	12
15, 16.....	13
17, 18.....	14
19 a) b) .....	15
19 c) d) .....	16
20 .....	17
21 .....	18
22 .....	19

(exercício 6 é suposto ser no Excel)

## Capítulo 2 Variáveis Aleatórias e Distribuições de Probabilidades Discretas

$\mathcal{E}$  → uma experiência aleatória

$\Omega$  → espaço de resultados associado à experiência  $\mathcal{E}$

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{x} & \mathbb{R} \\ w & \xrightarrow{} & x(w) \end{array}$$

### Lei de Probabilidade de $X$

$$\Omega \xrightarrow{P} [0, 1]$$

Nota  $\downarrow$  variável aleatória

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{x} & \mathbb{R} \\ w & \xrightarrow{} & x(w) \end{array} \xrightarrow{\quad P \quad} [0, 1] \quad p(x(w)) \equiv p_x(w) \equiv p(X=w)$$

Supónte de  $X$   $S_X = \{ \text{valor que a v.a. } X \text{ assume com probabilidade positiva} \}$

A v.a.  $X$  dig-se discreta se o seu supónte é finito ou enumerável

$$p(x) = \begin{cases} P(X=x), & \text{se } x \in S_X \\ 0, & \text{se } x \notin S_X \text{ (caso contrário, c.c.)} \end{cases}$$

Propriedade  $\rightarrow \sum_{x \in S} p(x) = 1$

Função distribuição  $\left\{ \begin{array}{l} \Omega \xrightarrow{F} [0, 1] \\ x \rightarrow F(x) = P(X \leq x) \\ = \sum_{\substack{a \in S \\ a \leq x}} p(a) \end{array} \right.$

Independência da v.a. (discreta ou contínua)

$$x_1, x_2, \dots, x_m \text{ não independentes} \Leftrightarrow P(x_1 \leq x_1 \cap \dots \cap x_m \leq x_m) = P(x_1 \leq x_1) \cdot \dots \cdot P(x_m \leq x_m)$$

Esperança ou valor esperado ou valor médio

$$\text{X v.a. discreta} \rightarrow E(x) = \sum_{x \in S} x \cdot P(x=x)$$

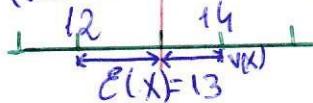
Variância

$$\text{X v.a. discreta} \rightarrow V(x) = E[(x - E(x))^2]$$

$$\text{Desvio Padrão} \rightarrow \sigma(x) = \sqrt{V(x)}$$

Exemplo

(valores com mesmo peso)



$$E(x) = \sum_{x \in S} x \cdot P(x)$$

$$= 12 \cdot \frac{1}{2} + 14 \cdot \frac{1}{2}$$

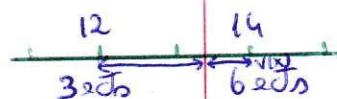
$$= \frac{12+14}{2} = 13$$

$$V(x) = (12-13)^2 \cdot \frac{1}{2} + (14-13)^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 1$$

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{1} = 1$$

(valores com pesos diferentes)



$$E(x) = \sum_{x \in S} x \cdot P(x=x)$$

$$= 12 \cdot \frac{3}{9} + 14 \cdot \frac{6}{9}$$

$$= \frac{12 \cdot 3 + 14 \cdot 6}{9} = 13(3)$$

$$V(x) = (12-13(3))^2 \cdot \frac{3}{9} + (14-13(3))^2 \cdot \frac{6}{9}$$

$$\approx 0,89$$

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{0,89} \approx 0,94$$

Propriedades ( $C \in \mathbb{R}$  (constante))

$$1 - E(c \cdot x) = c \cdot E(x)$$

$$2 - E(C) = C$$

$$3 - E(x+c) = E(x) + c$$

$$4 - E(x+y) = E(x) + E(y)$$

$$1 - V(c \cdot x) = c^2 \cdot V(x)$$

$$2 - V(C) = 0$$

$$3 - V(x+c) = V(x)$$

$$V(x+y) = V(x) + V(y)$$

$$\pm 2 \operatorname{cov}(x, y)$$

$$5 - V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 \leftarrow$$

$$\textcircled{1} \quad \text{Variância entre } x \text{ e } y \Rightarrow \operatorname{cov}(x, y) = E[(x - E(x)) \cdot (y - E(y))]$$

$$= E(xy) - E(x) \cdot E(y)$$

$$\textcircled{1.1} \quad \operatorname{cov}(x, x) = E[(x - E(x)) \cdot (x - E(x))]$$

$$= E(x^2) - [E(x)]^2 = V(x) \leftarrow$$

$$\textcircled{2} \quad X, Y \text{ v.a. ind} \Rightarrow \operatorname{cov}(x, y) = 0$$

$$\operatorname{cov}(x, y) \neq 0 \Rightarrow X, Y \text{ não são ind}$$

Coeficiente de Correlação

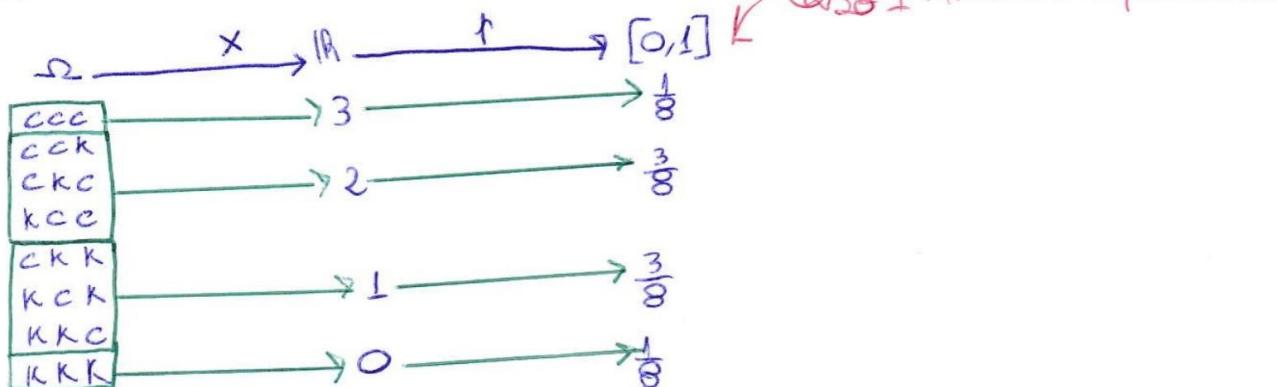
$$P_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{\sqrt{V(x) \cdot V(y)}}$$

1)  $E = \text{lancar 3x una moeda ao ar}$

$$\Omega = \{ \text{C.C.C, C.C.K, C.K.C, K.C.C, C.K.K, K.K.C, K.K.K} \}$$

$$C = \{ \text{KKK, KCK, CKC, CCC} \}$$

$X = \text{"número total de caras"}$



$$\#\Omega = 8$$

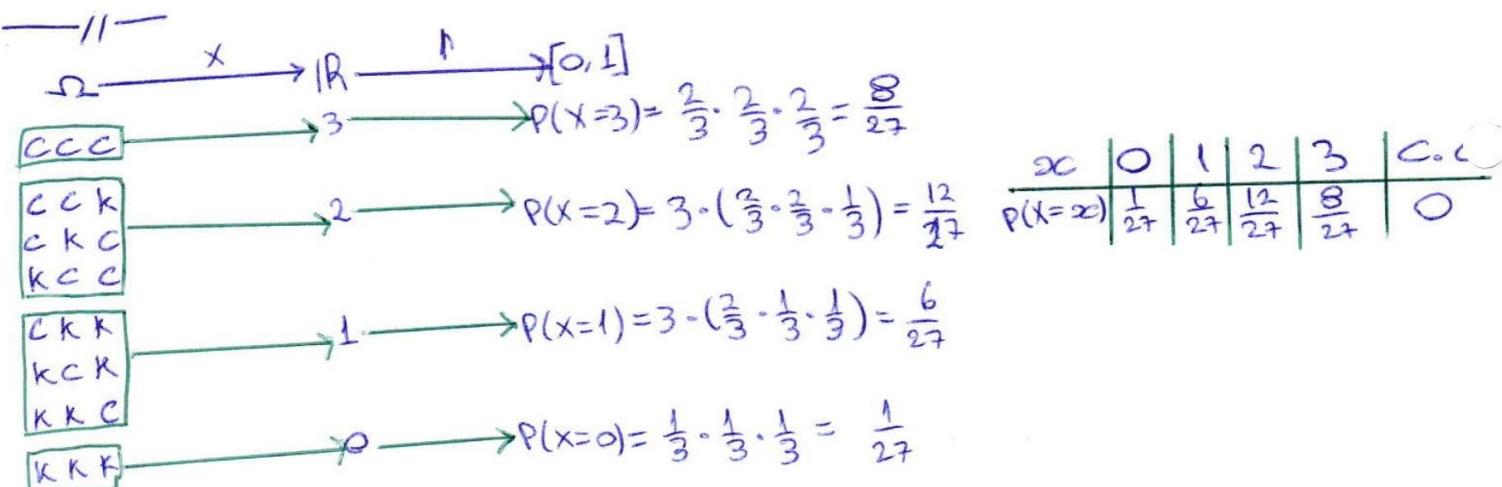
$$\#S_x = 4$$

$$S_x = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$P(X=1) \rightarrow \text{min caras + 1 vez} = 3 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = {}^3C_1 = \frac{3!}{1!(3-1)!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 3$$

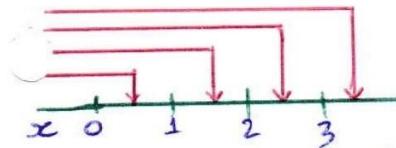
Enunciado dig moeda niciada!

$$\begin{aligned} \text{(a)) } P(C) &= 2 \cdot P(K) \\ P(C) + P(K) &= 1 \end{aligned} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} P(C) = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ P(K) = \frac{1}{3} \end{array} \right.$$



$$\text{ou } P(x) = P(X=x) = \begin{cases} P(X=x), x \in S \\ 0, \text{cc} \end{cases} = \begin{cases} \frac{8}{27}, x=3 \\ \frac{12}{27}, x=2 \\ \frac{6}{27}, x=1 \\ \frac{1}{27}, x=0 \\ 0, \text{c.c.} \end{cases}$$

b)  $F(x) = P(X \leq x)$



$$x < 0: F(x) = P(X \leq x) = 0$$

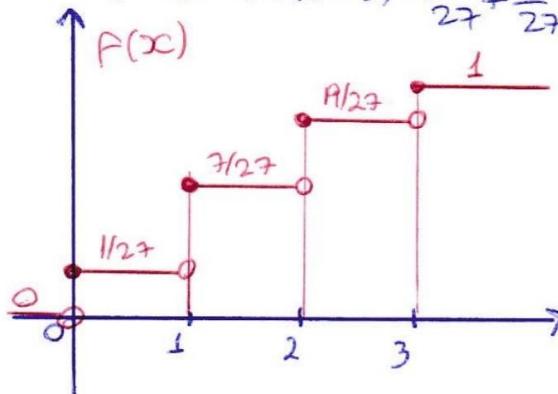
$$0 \leq x < 1: F(x) = P(X \leq x) = P(X=0) = \frac{1}{27}$$

$$1 \leq x < 2: F(x) = P(X \leq x) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{1}{27} + \frac{6}{27} = \frac{7}{27}$$

$$2 \leq x < 3: F(x) = P(X \leq x) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \frac{1}{27} + \frac{6}{27} + \frac{12}{27} = \frac{19}{27}$$

$$3 \leq x: F(x) = P(X \leq x) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = \frac{19}{27} + \frac{6}{27} = 1$$

$$F(x) \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{27}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{7}{27}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{19}{27}, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$



c)  $P(\text{"nó saírem com os 3 lances mentes})$

$$= P(X=3)$$

$$= \frac{1}{27}$$

$P(\text{"nó saírem no máximo, de entre 2 lances})$

$$= P(X \leq 2)$$

$$= F(2)$$

$$= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$= \frac{19}{27}$$

2)  $x = \text{número de computadores utilizados diariamente numa empresa}$

$$a) P(x=x) = \begin{cases} \frac{k \cdot 2^x}{x!}, & x=1,2,3,4 \\ \emptyset, \text{c.c.} \end{cases} = \begin{cases} k \cdot 2, & x=1 \\ k \cdot \frac{2^2}{2} = 2k, & x=2 \\ k \cdot \frac{2^3}{3!} = \frac{4}{3}k, & x=3 \\ k \cdot \frac{2^4}{4!} = \frac{2}{3}k, & x=4 \end{cases}$$

$$\text{Se } \sum_{x \in S} P(x=x) = 1$$

$$\rightarrow P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) + P(x=4) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2k + 2k + \frac{4}{3}k + \frac{2}{3}k = 1$$

$$\Leftrightarrow 4k + \frac{6}{3}k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{6}$$

Estatística

$$b) f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} \cdot \frac{2^x}{x!}, & x=1,2,3,4 \\ \emptyset, \text{c.c.} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, & x=1 \\ \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, & x=2 \\ \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{9}, & x=3 \\ \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9}, & x=4 \end{cases}$$

$$b) F(x) = P(x \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1}{3}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, & 2 \leq x < 3 \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{16}{18}, & 3 \leq x < 4 \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = 1, & 4 \leq x \end{cases}$$

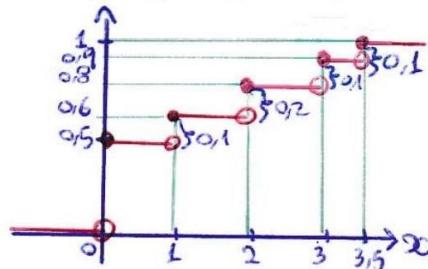
$$c) P(x \leq \alpha) \geq 0,8 \Leftrightarrow F(\alpha) \geq 0,8 \Leftrightarrow \frac{14/4}{(1+18)} \Leftrightarrow \alpha \geq 3$$

$$d) E(x) = 1 \cdot P(x=1) + 2 \cdot P(x=2) + 3 \cdot P(x=3) + 4 \cdot P(x=4) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{2}{9} + 4 \cdot \frac{1}{9} \approx 2,1$$

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} \Rightarrow V(x) = (1-2,1)^2 \cdot \frac{1}{3} + (2-2,1)^2 \cdot \frac{1}{3} + (3-2,1)^2 \cdot \frac{2}{9} + (4-2,1)^2 \cdot \frac{1}{9} \approx 1,03$$

$$\sigma(x) = \sqrt{1,03} \approx 1,01$$

3) a)



$x$	0	1	2	3	3,5	oo
$P(X=x)$	0,5	0,1	0,2	0,1	0,1	0

$$P(2,5 \leq x \leq 4) = P(x \leq 4) - P(x \leq 2)$$

$$= F(4) - F(2) = 1 - 0,8 = 0,2$$

$X$  é v.a. discrete pq  $S_x = \{0,1,2,3,3,5\}$  é finito,  $\#S_x = 5$

c)  $P(X \leq 1) = F(1) = 0,6$

$$\text{ou } \rightarrow = P(X=0) + P(X=1) = 0,5 + 0,1 = 0,6$$

•  $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - 0,6 = 0,4$

$$\text{ou } \rightarrow = P(X=2) + P(X=3) + P(X=3,5) = 0,2 + 0,1 + 0,1 = 0,4$$

$$\text{ou } \rightarrow = 1 - [P(X=0) + P(X=1)] = 1 - [0,5 + 0,1] = 0,4$$

•  $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - 0,8 = 0,2$

$$\text{ou } \rightarrow = P(X=3) + P(X=3,5) = 0,1 + 0,1 = 0,2$$

•  $P(2,5 \leq X \leq 4) = P(X=3) + P(X=3,5) = 0,1 + 0,1 = 0,2$

$$\text{ou } \rightarrow = P(X \leq 4) - P(X \leq 2,5) = P(X \leq 4) - P(X \leq 2) = F(4) - F(2) = 1 - 0,8 = 0,2$$

•  $P(X > 3,5) = P(X=3,5) = 0,1$

$$\text{ou } \rightarrow = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - 0,9 = 0,1$$

•  $P(2,5 \leq X \leq 4 | X > 1) = \frac{P(2,5 \leq X \leq 4 \cap X > 1)}{P(X > 1)} = \frac{P(X=3) + P(X=3,5)}{1 - P(X \leq 1)} = \frac{0,1 + 0,1}{1 - 0,5} = 0,4$

d)  $E(X) = \sum_{x \in S_x} x \cdot P(X=x) = 0 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,1 + 3,5 \cdot 0,1 = 1,15$

$$\sqrt{X} = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = \sum x^2 \cdot P(X=x) = 0^2 \cdot 0,5 + 1^2 \cdot 0,1 + 2^2 \cdot 0,2 + 3^2 \cdot 0,1 + 3,5^2 \cdot 0,1 \stackrel{1,15}{=} 3,03$$

$$\sqrt{X} = 3,03 - (1,15)^2 \approx 1,70$$

$$\sigma(X) = \sqrt{1,70} \approx 1,30$$

2) Considerare  $Y = X - 1,15$

i)  $P(Y \leq 1) = P(X - 1,15 \leq 1) = P(X \leq 2,15) = P(X \leq 2) = F(2) = 0,8$

ii)  $E(Y) = E(X - 1,15) = E(X) - 1,15 = 1,15 - 1,15 = 0$

$$\sqrt{Y} = \sqrt{X - 1,15} = \sqrt{X} \approx 1,70$$

$$5b) P(x=-2) + P(x=-1) + P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} + k + \frac{1}{15} + k + \frac{1}{3} = 1$$

$$\Leftrightarrow 5 + 15k + 1 + 15k + 5 = 15 \Leftrightarrow 30k = 15 - 11 \Leftrightarrow k = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$$

$x$	-2	-1	0	1	2
$P(x=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$

b)  $F(x) \begin{cases} 0, \text{ if } x < -2 \\ \frac{1}{3}, \text{ if } -2 \leq x < -1 \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{15} = \frac{7}{15}, \text{ if } -1 \leq x < 0 \\ \frac{7}{15} + \frac{1}{15} = \frac{8}{15}, \text{ if } 0 \leq x < 1 \\ \frac{8}{15} + \frac{2}{15} = \frac{10}{15}, \text{ if } 1 \leq x < 2 \\ \frac{10}{15} + \frac{1}{3} = 1, \text{ if } x \geq 2 \end{cases}$

$$c) V(x) = E(x^2) + [E(x)]^2$$

$$= \left( -2 \cdot \frac{1}{3} + -1 \cdot \frac{2}{15} + 0 \cdot \frac{1}{15} + 1 \cdot \frac{2}{15} + 2 \cdot \frac{1}{3} \right) + (-2)^2 \cdot \frac{1}{3} + (-1)^2 \cdot \frac{2}{15} + 0^2 \cdot \frac{1}{15} + 1^2 \cdot \frac{2}{15} + 2^2 \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \emptyset + \frac{44}{15} = \frac{44}{15}$$

d)  $P(x^2=4 / x \leq 1) = \frac{P(x^2=4 \cap x \leq 1)}{P(x \leq 1)} = \frac{P((x=-2 \cup x=2) \cap x \leq 1)}{P(x \leq 1)}$

$$= \frac{P(x=-2)}{P(x \leq 1)} = \frac{P(x=-2)}{F(1)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{10}{15}} = \frac{15}{30} = \frac{1}{3}$$

4) a)  $\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline x_i & m-1 & m & m+3 & m+5 \\ \hline P(x=x_i) & \frac{k+1}{8} & \frac{k}{8} & \frac{k-1}{8} & \frac{k}{8} \\ \hline \end{array}$

$$\frac{k+1}{8} + \frac{k}{8} + \frac{k-1}{8} + \frac{k}{8} = 1 \Leftrightarrow \frac{4k-1}{8} = 1 \Leftrightarrow 4k = 8 \Leftrightarrow k = \frac{8}{4} \Leftrightarrow k = 2$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline x_i & m-1 & m & m+3 & m+5 \\ \hline P(x=x_i) & \frac{3}{8} & \frac{2}{8} & \frac{1}{8} & \frac{2}{8} \\ \hline \end{array}$$

$$E(x) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (m-1)\frac{3}{8} + m\frac{2}{8} + (m+3)\frac{1}{8} + (m+5)\frac{2}{8} = \frac{1}{4} \times 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3m-3 + 2m + m+3 + 2m+10}{8} = \frac{2}{8} \Leftrightarrow 8m + 10 = 2 \Leftrightarrow m = \frac{2-10}{8} \Leftrightarrow m = -1$$

b)  $\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline x_i & -2 & -1 & 2 & 4 \\ \hline P(x=x_i) & \frac{3}{8} & \frac{2}{8} & \frac{1}{8} & \frac{2}{8} \\ \hline \end{array}$

$$E(x-2) = E(x) - 2 = \frac{1}{4} - 2 = -1,75$$

$$V(3x-2) = 3^2 \cdot V(x) = 3^2 \cdot [E(x^2) - E(x)]^2$$

$$E(x^2) = (-2)^2 \cdot \frac{3}{8} + (-1)^2 \cdot \frac{2}{8} + 2^2 \cdot \frac{1}{8} + 4^2 \cdot \frac{2}{8}$$

$$= \frac{12}{8} + \frac{2}{8} + \frac{4}{8} + \frac{32}{8} = \frac{50}{8}$$

c)  $F(x) \begin{cases} 0, \text{ if } x < -2 \\ \frac{3}{8}, \text{ if } -2 \leq x < -1 \\ \frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}, \text{ if } -1 \leq x < 2 \\ \frac{5}{8} + \frac{1}{8} = \frac{6}{8}, \text{ if } 2 \leq x < 4 \\ \frac{6}{8} + \frac{2}{8} = 1, \text{ if } x \geq 4 \end{cases}$

$$\begin{aligned} E(x)^2 &= \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \\ &\quad \times 2 \\ &= 3^2 \cdot \left(\frac{50}{8} - \frac{1}{16}\right) \\ &= 9 \cdot \frac{(100-1)}{16} = \frac{891}{16} \\ &\approx 55,6875 \end{aligned}$$

d)  $P(x \leq -5) = \emptyset$   
 $P(x \leq -1) = \frac{5}{8}$   
 $P(-1 < x \leq 3) = \frac{1}{8}$   
 $P(x \geq 4) = \frac{1}{8}$   
 $P(x < 4) = \frac{6}{8}$   
 $P(x \leq 6) = 1$

$E \rightarrow$  Experiência aleatória

repete-se  $E$   $n$  vezes

$X =$  número de sucessos que ocorreram nas  $n$  repetições

repetições sempre nas mesmas condições  $\rightarrow X \sim B(n, p)$  Binomial

$f = P(\text{sucesso numa ocorrência})$

$X$    
 repetições sem condições diferentes  $\rightarrow X \sim H(n, N, M)$  Hipergeométrico

população Total  $\leftarrow$  população amostrada ao sucesso

7) 20 peças = N  $E =$  retirar uma peça e analisar se é defeituosa

$\rightarrow 5$  defeituosas = M  $\rightarrow$  repetir 6 vezes. Há reposição, então sempre mesmas condições

$X =$  número de peças defeituosas retiradas,  $S_x = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$a) X \sim B(6, \frac{5}{20}) = X \sim B(6, 0,25)$$

$$b) P(X \leq 0) = P(X=0) = \binom{6}{0} 0,25^0 \cdot 0,75^6 = {}^6C_0 \cdot 0,25^0 \cdot 0,75^6 \\ = \frac{6!}{0!(6-0)!} \cdot 1 \cdot 0,75^6 = 1 \cdot 1 \cdot 0,75^6 = 0,1780$$

ou Tabela Binomial  $\rightarrow P(X \leq 0) = F(0)$

m	$x \setminus P$	— 0,25
6	0	0,1780

$$\bullet P(2 \leq X \leq 4) = P(X=2) + P(X=3) = {}^6C_2 \cdot 0,25^2 \cdot 0,75^4 + {}^6C_3 \cdot 0,25^3 \cdot 0,75^3 \\ \approx 0,2966 + 0,1318 \approx 0,4285$$

ou Tabela  $\rightarrow P(2 \leq X \leq 4) = P(X \leq 4) - P(X < 2) = P(X \leq 3) - P(X \leq 1) = F(3) - F(1)$

m	$x \setminus P$	— 0,25	= 0,9624 - 0,5339 = 0,4285
6	1	0,5339	
	3	0,9624	

$$\bullet P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) \\ = 1 - 0,9624 = 0,4285$$

$$\bullet P(X \leq 7) = P(X \leq 6) = 1$$

$$c) E(X) = m \cdot p = 6 \cdot 0,25 = 1,5$$

d)  $E =$  extrair 1 peça e verificar se é defeituosa, sem reposição,  $S_x = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$$X \sim H(6, 20, 5)$$

$$P(X=0) = \frac{{}^5C_0 \cdot {}^{15}C_6}{{}^{20}C_6} = \frac{5!}{0! \cdot 5!} \cdot \frac{15!}{6! \cdot 9!} \\ \frac{20!}{6! \cdot 4!}$$

$$\approx 0,129$$

b) Estamos a repetir um acontecimento sempre nas mesmas condições, portanto, estamos perante uma Binomial.

No exercício se descreve uma moeda justa com  $P(\text{caro}) = \frac{2}{3}$ , em que vamos lançar 3 vezes e ver quantas caras no total

De reja:  $X \sim B(3, \frac{2}{3})$

9)  $E =$  "In a armazém buscar um portátil e registrar o seu estado"

a) Repetir  $E$  6 vezes, nem reposição

$X =$  "nº de portáteis, em 20 comprados, que mantêm a assistência" 100 no total, 10 necessitam de assistência

$$S = \{0, \dots, 10\}; X \sim H(20, 10, 10)$$

$$b) P(X=0) = \frac{\binom{10}{0} \cdot \binom{90}{20}}{\binom{100}{20}} \approx 0,0951$$

$$c) P(X>5) = P(X=6) + \dots + P(X=10) = \frac{\binom{10}{6} \binom{90}{14}}{\binom{100}{20}} + \dots + \frac{\binom{10}{10} \binom{90}{10}}{\binom{100}{20}}$$

$$= \sum_{k=6}^{10} \frac{\binom{10}{k} \binom{90}{20-k}}{\binom{100}{20}} (= 0,0039) \quad \text{mão pedida}$$

$$d) \text{Lucro} = L = 1520 \cdot 20 - 55x$$

$$E(L) = E(\underbrace{1520 \cdot 20}_b - \underbrace{55x}_a) = 30400 - 55E(x) = 20 \cdot \frac{10}{100} = 2$$

$$= 30400 - 110 = 30290 \text{€}$$

10)  $E =$  "Jogar uma face 5 em 20 repetições", Repetir  $E$  20 vezes

$X =$  "nº de vezes que sai face 5 em 20 repetições"

a) Como o dado é equilíbrio e  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , cada face tem  $P = \frac{1}{6}$

$$P(X=x) = \binom{20}{x} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)^x}_{\text{P de sair } x \text{ vezes}} \cdot \underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)^{20-x}}_{\text{P de não sair } x \text{ vezes}}, \quad x=1, 2, \dots, 20$$

(Ver Tabela dos vetores Binomial)

$$b) \binom{20}{10} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{20-10} = \frac{20!}{10! \cdot (20-10)!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 4,93 \cdot 10^{-4}$$

11)  $E =$  "Questionar 10 indivíduos se têm casa própria"

$X =$  "nº de indivíduos, em 10, com casa própria"

$$S = \{0, 1, \dots, 9, 10\}$$

$$X \sim H(10, 1000, \underbrace{200}_{0,2 \cdot 1000}) \rightarrow P(X=6) = \frac{\binom{200}{6} \binom{800}{4}}{\binom{1000}{10}} = 0,0053$$

12)  $X =$  "Habitantes que pensam que o sistema de trânsito é adequado"

$P(X) = 0,3$ , Repetir  $X$  20 vezes

$$P(X \leq 2) \rightarrow X \sim B(20, 0,3) \rightarrow \begin{array}{c|cc|c} m & x/p & \\ \hline 20 & 2 & \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 0,3 & \\ \hline 0,0355 & \end{array}$$

13)  $E =$  "Observa um vidro e registre o seu estado"  $\rightarrow$  Repetir 10x, condições diferentes  
 $X =$  "nº de vidros defeituosos em 10"

$$P(\text{"1 vidro defeituoso"}) = 0,1$$

a)  $X \sim H(10; N; 0,1 \cdot N)$

Assumindo que  $N$  é grande, logo  $\frac{10}{N} \leq 0,1 \Rightarrow H(10, N, 0,1 \cdot N) \approx B(10, \frac{0,1 \cdot N}{N}) = B(10, 0,1)$

$$\therefore P(X=0) \approx X \sim B(10, 0,1) = 0,3487$$

b)  $P(2 \leq X \leq 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 1) \approx F(6) - F(1) = 0,2639$   
 $[B(10, 0,1)]$

c)  $E(X) = 10 \cdot 0,1 = 1$

14)  $X =$  "nº de chamadas que chegam num período de 5 minutos à central telefônica"

$$X(10) \rightarrow (E(X)=10 \text{ e } V(X)=10) \rightarrow \lambda = E(X) = V(X)$$

i)  $P(X=8) = P(X \leq 8) - P(X \leq 7) = 0,3328 - 0,2202 = 0,1126$

ii)  $P(X \leq 5) = P(X \leq 4) = 0,0293$

iii)  $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0,0028 = 0,9972$

iv)  $P(X=0) = P(X \leq 0) \approx \emptyset, \emptyset \emptyset \emptyset$

b)  $Y =$  "nº de chamadas que chegam num período de 10 minutos"

$= X_1 + X_2$ , com que  $X_i$  são iid com  $X$

$\therefore P(10+10) = P(20)$  independentes e identicamente distribuídos

$$P(X=35) = P(X \leq 35) - P(X \leq 34) = 0,9992 - 0,9985 = 0,0007$$

08-04 Continuação

14)  $X =$  "número de chamadas que chegam à central telefônica, num período de 5 minutos"

$$X \sim P(10) \rightarrow \lambda = 10 \rightarrow E(X) = 10 \\ V(X) = 10$$

$$P(X=x) = \frac{e^{-10} \cdot 10^x}{x!}$$

$$x \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

$$\text{a) i)} P(X=8) = \frac{e^{-10} \cdot 10^8}{8!} \approx 0,1126$$

ou Tabela

$$P(X=8) = P(X \leq 8) - P(X \leq 7)$$

$$= F(8) - F(7) = 0,3328 - 0,2202$$

$$= 0,1126$$

$\lambda$	$x$	$P(X=x)$
10	8	0,3328

$$\text{ii)} P(X < 5) = P(X \leq 4) = F(4) = 0,0293$$

$$\text{iii)} P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - 0,0028 = 0,9972$$

$$\text{iv)} P(X=\emptyset) = \frac{e^{-10} \cdot 10^0}{\emptyset!} = \frac{e^{-10}}{1} = e^{-10} \approx 0,0000454$$

ou  
 $P(X=\emptyset) = P(X \leq 0) = F(0) \approx 0,000$

b)  $Y =$  "número de chamadas recebidas, num período de 10 minutos"

!! Não posso fazer  $Y = 2 \cdot X$  !!  $\Rightarrow + \frac{5\text{min}}{x_1} + \frac{5\text{min}}{x_2} \rightarrow$

$x_1 =$  "número de chamadas nos primeiros 5 minutos"  $\left. \begin{array}{l} x_1 \neq x_2 \text{ independentes} \\ Y = x_1 + x_2 \end{array} \right\}$

$x_2 =$  "número de chamadas nos segundos 5 minutos"  $\left. \begin{array}{l} Y = x_1 + x_2 \sim P(10+10) = P(20) \\ \text{também tem distribuição de Poisson} \end{array} \right\}$

$Y \sim P(20)$

$$P(Y=35) = P(Y \leq 35) - P(Y \leq 34)$$

$$= F_Y(35) - F_Y(34)$$

$$= 0,0007$$

$\lambda$	$x$	$P(Y=x)$
20	35	0,9995

Regra: Estabilidade do Poisson

$$x_1 \sim P(\lambda_1)$$

$$x_2 \sim P(\lambda_2) \rightarrow x_1 + x_2$$

$x_1, x_2$  independentes

Também tem

distribuição de Poisson

de  $\lambda_1 + \lambda_2$

$$\hookrightarrow x_1 + x_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2) \quad q$$

15-04

exce 15)

 $X_M$  = "número de visitantes no período da manhã"; $X_T$  = "número de visitantes no período da Tarde";

$$S_{X_M} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}_0$$

$$S_{X_T} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}_0$$

 $X_M$  e  $X_T$  têm distribuição de poisson

$$\left. \begin{array}{l} E(X_M) = 3 \rightarrow X_M \sim P(3) \\ E(X_T) = 15 \rightarrow X_T \sim P(15) \end{array} \right\} \quad X_M \text{ e } X_T \text{ independentes}$$

a)  $P(X_M \geq 5) = 1 - P(X_M < 5) = 1 - P(X_M \leq 4) = 1 - F(4) = 1 - 0,8153 = 0,1847$

b)  $Y = \text{"número de visitantes durante 1 dia"}$ 

$$\text{se } X_M \sim P(3)$$

$$X_T \sim P(15)$$

$$\text{então } Y \sim P(3+15) = P(18)$$

 $X_M$  e  $X_T$  independentes

$$P(Y < 31) = P(Y \leq 30) = F_{\lambda=18}(30) = 0,9967$$

c)  $P(X_M = 5 \cap X_T = 20) = P(X_M = 5) \cdot \underbrace{P(X_T = 20)}_{\text{independentes}}$

$$= [P(X_M \leq 5) - P(X_M \leq 4)] \cdot [P(X_T \leq 20) - P(X_T \leq 19)]$$

$$= [F_{\lambda=3}(5) - F_{\lambda=3}(4)] \cdot [F_{\lambda=15}(20) - F_{\lambda=15}(19)] = (0,9161 - 0,8153) \cdot (0,9170 - 0,8752)$$

$$= 0,1008 \cdot 0,0418 \approx 0,0042$$

16) Há a produção de  $N$  livros com várias edições. Observar numa edição de 100.000 exemplares, em que:

$E$  = "Observar 1 livro e registrar o seu estado", repetir  $10^5$  em condições diferentes

$X$  = "nº de livros em  $10^5$  exemplares que estão mal encadernados"

$$X \sim H(10^5, N, 10^{-4} \cdot N)$$

$$\downarrow \quad \text{Aprox } \frac{10^5}{N} < 0,1$$

$$\downarrow \quad \sim B(10^5, 10^{-4})$$

$$\downarrow \quad \uparrow \text{razão}$$

$$\downarrow \quad \sim P(10^5, 10^{-4})$$

$$\text{a) } P(X=5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 4) = 0,0671 - 0,0293 \\ = 0,0378$$

$$\text{b) } P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0,0103 \\ = 0,9897$$

$$\text{c) } P(X \leq 2) = 0,0028$$

$$(7) X \sim P(2) \Rightarrow E(X) = 2$$

$X = \text{mº de petroleiros que chegam por dia a uma refinaria};$

$\text{Se } X > 3 \text{ os excedentes seguem para outro porto.}$

$$\text{a)} P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0,8571 = 0,1429$$

$$\text{b)} X \sim P(2) \Rightarrow E(X) = V(X) = \lambda = 2$$

$$\text{c)} P(X=0) = P(X \leq 0) = 0,1353$$

$$P(X=1) = P(X \leq 1) - P(X \leq 0) = 0,2707$$

$$P(X=2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 1) = 0,2707$$

$$P(X=3) = P(X \leq 3) - P(X \leq 2) = 0,1804$$

• Como a soma de todos  $P = 1$ , e  $(X=0 + X=1 + X=2) > 0,5$ , então  $X > 3$  é sempre menor

• Como  $P(X=1) = P(X=2)$ , e ambos os maiores o mº mais provável são 1 e 2.

$$\text{d)} P(X \leq 3 + c) = 0,95$$

$\lambda$	$X$	5
2	0	0,9834
		$\rightarrow 3+c=5 \Leftrightarrow c=2$ ↳ para $P(2) \leq 0,95$

2)  $Y = \text{mº de petroleiros que não atendem por dia} =$

$Y$	0	1	2	3	$c_c$
$P(Y=y)$	$P(X=0)$	$P(X=1)$	$P(X=2)$	$P(X \geq 3)$	$\phi$

$$\text{f)} E(Y) = 0 \cdot 0,1353 + 1 \cdot 0,2707 + 2 \cdot 0,2707 + 3 \cdot 0,3233 \\ = 1,782$$

$$(8) X = \text{mº de acidentes de trabalho, por mês, numa obra de construção civil} =$$

$$X \sim P(2) \Rightarrow E(X) = V(X) = \lambda = 2$$

$$\text{a)} P(X=0) = P(X \leq 0) = 0,1353$$

$$\text{b)} P(X_1 + X_2 + X_3 > 6) = P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - 0,4457 = 0,5543$$

$$X_i, i=1,2,3 \quad \hookrightarrow X \text{ soma}$$

↳ mº de acidentes no i-ésimo mês =

$$X_i \sim P(2) \Rightarrow P(2+2+2) = P(6)$$

c)  $E = \text{Observar a obra um mês e registrar se ocorreram acidentes}$

$Y = \text{mº de meses, em 6, em que não ocorrem acidentes}$

$$SY = \{0, 1, 2, \dots, 6\} \quad Y \sim B(6, P(X=\phi)) = B(6; 0,1353)$$

Binomial pois estão a repetir 6 vezes, em condições independentes, a  $P(X=\phi)$

$$P(Y=4) = P(Y \leq 4) - P(Y \leq 3)$$

Como  $\lambda = 0,1353$  não existe nas tabelas, usar um valor próximo  
(normalmente maior ou igual, mas ambos podem)

$$\rightarrow 0,15 \rightarrow F(4) - F(3) = 0,9996 - 0,9941 = 0,0055$$

$$0,1353 \quad \text{ou}$$

$$\rightarrow 0,10 \rightarrow F(4) - F(3) = 1 - 0,9992 = 0,0008$$

$$\text{Calculadora: } 0,0038$$

Como se justificou o valor não existir, o resultado é feito para 100%

## Variáveis aleatórias bidimensionais (vetores aleatórios de dimensão 2)

$(X, Y)$  Só vamos considerar v.a. bidimensionais discretas.  
 v.a.  $\leftarrow \rightarrow$  v.a.

Exce 19)  $X =$  "número de defeitos numa peça"

$Y =$  "número da fábrica que produz a peça"

Como há uma relação entre defeitos e a fábrica então

$X$  e  $Y$  não são independentes.

$$S_x = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$S_y = \{1, 2\}$$

	$X$	0	1	2	3
$Y$		$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$
1		$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$

	$X$	0	1	2	3
2		$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{4}{16}$

significa

$$\begin{aligned} P(X=3 \cap Y=2) \\ = P(X=3, Y=2) \end{aligned}$$

$Y \setminus X$	0	1	2	3
1	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{4}{16}$

$$\begin{cases} P(Y=1) = \sum_{x \in S_x} P(X=x, Y=1) \\ = P(X=0, Y=1) + P(X=1, Y=1) + P(X=2, Y=1) \\ + P(X=3, Y=1) = \frac{2}{16} + \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{2}{16} = 0,5 \\ P(Y=2) = \sum_{x \in S_x} P(X=x, Y=2) \\ \text{ou } 1 - 0,5 = 0,5 \end{cases}$$

$$P(X=\phi) = \sum_{y \in S_y} P(X=\phi, Y=y) = P(X=\phi, Y=1) + P(X=\phi, Y=2) = \frac{2}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$$

$\varphi$	1	2	C.C.
$P(Y=\varphi)$	0,5	0,5	$\varphi$

$$S_y = \{1, 2\}$$

$x$	0	1	2	3	C.C.
$P(X=x)$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\varphi$

$$S_x = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$b) P(X=2) = \frac{5}{16}; P(X>2) = P(X=2) + P(X=3) = \frac{5+6}{16} = \frac{11}{16};$$

$$P(X \leq Y) = P(X=0, Y=1) + P(X=0, Y=2) \\ + P(X=1, Y=1) + P(X=1, Y=2)$$

$$+ P(X=2, Y=2) = \frac{2+1+1+1+2}{16} = \frac{7}{16};$$

$$P(Y=3) = \varphi \text{ pq } S_y = \{1, 2\}$$

$$c) E(X) = \sum x_i P(X=x_i) = 0 \cdot \frac{3}{16} + 1 \cdot \frac{2}{16} + 2 \cdot \frac{5}{16} + 3 \cdot \frac{6}{16} = 1,875$$

$$\sigma^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= 0^2 \cdot \frac{3}{16} + 1^2 \cdot \frac{2}{16} + 2^2 \cdot \frac{5}{16} + 3^2 \cdot \frac{6}{16} - 1,875^2 = 4,75 - 1,875^2 = 1,234$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X)} = \sqrt{1,234} \approx 1,11$$

(Dá-se na pergunta:  $E(Y) = 1,5$ ;  $\sigma(Y) = 0,25$ .)

$$\text{Cov}(X,Y) = \underbrace{\sum_{x,y} x y P(X=x, Y=y)}_{\downarrow} - \underbrace{E(X) \cdot E(Y)}_{\downarrow 1,875 \quad \downarrow 1,5}$$

$$\sum_{x,y} x y P(X=x, Y=y)$$

$$= 0 \cdot 1 + \frac{1}{8} + 0 \cdot 2 \cdot \frac{1}{16}$$

$$+ 1 \cdot 1 + \frac{1}{16} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{16}$$

$$+ 2 \cdot 1 + \frac{3}{16} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8}$$

$$+ 3 \cdot 1 + \frac{1}{8} + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4}$$

$$= 2,9375$$

$$\text{Cov}(X,Y) = 2,9375 - 1,875 \cdot 1,5 = 0,125$$

d)  $\text{Cov}(X,Y) \neq 0$  então  $X$  e  $Y$  não são independentes, ou seja, o número de defeitos numa peça não é independente da fábrica onde é produzido.

$$e) P(X > 0 | Y=2) = \frac{P(X > 0 \cap Y=2)}{P(Y=2)} = \frac{P(X=1, Y=2) + P(X=2, Y=2) + P(X=3, Y=2)}{P(Y=2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4}}{1/2} = \frac{7}{8}$$

$x$	$y$	-1	0	1
-1		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
0		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$S_{(X,Y)} = \{(-1,0), (0,-1), (0,1), (1,0)\}$$

a)  $\sum_{x \in S} \sum_{y \in S} P(x=x, y=y) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$  Soma de Todas as probabilidades = 1

$x$	$y$	-1	0	1	$P_x$
-1		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
0		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$P_y$		$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\Sigma=1$
					$\Sigma=1$

$x$	-1	0	1	c.c.
$P(x=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
$y$	-1	0	1	c.c.

$y$	-1	0	1	c.c.
$P(y=y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	0

As v.a.  $X$  e  $Y$  têm a mesma função de probabilidade

$$c) P(X=\infty | Y=0) = \frac{P(X=\infty \cap Y=0)}{P(Y=0)} = \begin{cases} \frac{P(X=-1, Y=0)}{P(Y=0)}, & x = -1 \\ \frac{P(X=1, Y=0)}{P(Y=0)}, & x = 1 \\ \emptyset, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} = 0,5, x = -1 \\ \frac{1}{4} = 0,5, x = 1 \\ 0, x.c. \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0,5, x = -1 \text{ ou } x = 1 \\ 0, x.c. \end{array} \right\}$$

$$d) \text{Cov}(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$$

$$E(X \cdot Y) = (-1) \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} = \emptyset$$

$$E(X) = (-1) \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{2}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} = \emptyset$$

$$E(Y) = (-1) \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{2}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} = \emptyset$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \emptyset - \emptyset \cdot \emptyset = \emptyset$$

Como deu zero, não podemos tirar conclusões quanto à independência

$$P(X=0, Y=0) = \emptyset$$

$$P(X=0) \cdot P(Y=0) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{4}{16} \quad \emptyset \neq \frac{4}{16} \quad \text{então não são independentes}$$

$$21) f(x,y) = \frac{x+y}{32}; x=1,2; y=1,2,3,4;$$

a)

<del>X</del>	1	2	3	4
1	$\frac{2}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{5}{32}$
2	$\frac{3}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{6}{32}$

X	1	2	c.c.
P(X=x)	$\frac{14}{32}$	$\frac{18}{32}$	0

Y	1	2	3	4	c.c.
P(Y=y)	$\frac{5}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{11}{32}$	0

$$b) P(X > Y) = P(X=2 \cap Y=1) = \frac{3}{32}$$

$$\circ P(Y=2|X) = P(X=1 \cap Y=2) + P(X=2 \cap Y=1) = \frac{3}{32} + \frac{6}{32} = \frac{9}{32}$$

$$\circ P(X+Y=3) = P(X=1 \cap Y=2) + P(X=2 \cap Y=1) = \frac{3}{32} + \frac{3}{32} = \frac{6}{32}$$

$$\circ P(X \leq 3 - Y) = P(X=1 \cap Y=1) + P(X=1 \cap Y=2) + P(X=2 \cap Y=1) = \frac{2}{32} + \frac{3}{32} + \frac{3}{32} = \frac{8}{32}$$

$$\circ P(X > 1) = 1$$

$$\circ P(0 \leq Y \leq 3) = \frac{5}{32} + \frac{7}{32} + \frac{9}{32} = \frac{21}{32}$$

$$c) P(Y=y | X=2) = \frac{P(Y=y \cap X=2)}{P(X=2)} = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ se } y \notin \{1,2,3,4\} \\ \frac{3}{32}, \text{ se } y=1 \\ \frac{18}{32}, \text{ se } y=2 \\ \frac{5}{32}, \text{ se } y=3 \\ \frac{6}{32}, \text{ se } y=4 \end{array} \right.$$

$$d) P(X \cap Y) = P(X) \cdot P(Y)$$

ou

$$Cov(X,Y) = 0$$

ou

$$P(Y=y | X=\infty) = P(Y=y)$$

$$\hookrightarrow P(Y=3 | X=2) = P(Y=2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{16}{576} + \underbrace{\frac{9}{32}}_{\text{marginal}}$$

$$\frac{3}{32} = \frac{96}{576}, \text{ se } y=1$$

$$\frac{18}{32} = \frac{128}{576}, \text{ se } y=2$$

$$\frac{5}{32} = \frac{160}{576}, \text{ se } y=3$$

$$\frac{6}{32} = \frac{192}{576}, \text{ se } y=4$$

Q: Como os valores são diferentes,  $\Rightarrow Y$  não são independentes

22)  $X_1 = \text{m}^2 \text{ de discos vendidos da marca 1}; X_2 = \text{m}^2 \text{ de discos vendidos da marca 2}$

$x_2$	0	1	2
0	0,12	0,25	0,13
1	0,05	0,30	0,01
2	0,03	0,10	0,01

$x_1$	0	1	2
$P(X_1=x_1)$	0,20	0,60	0,15
$x_2$	0	1	2
$P(X_2=x_2)$	0,5	0,36	0,14

$$\text{b)} E(X_1) = 0,20 + 1 \cdot 0,60 + 2 \cdot 0,15 \\ = 0,90$$

$$E(X_2) = 0,5 + 1 \cdot 0,36 + 2 \cdot 0,14 \\ = 0,64$$

R:  $E(X_1) > E(X_2)$ , marca 1 é a mais vendida

$$\text{c)} P(X_1 > X_2) = P(X_1=1 \cap X_2=0) + P(X_1=2 \cap X_2=1) + P(X_1=2 \cap X_2=0) = 0,25 + 0,01 + 0,13 = 0,39$$

$$\text{d)} P(X_2=x_2 | X_1=0) = \frac{P(X_2=x_2 \cap X_1=0)}{P(X_1=0)} = \begin{cases} 0, \text{ se } x_2 \notin \{0, 1, 2\} \\ \frac{0,12}{0,20} = 0,60, \text{ se } X_2=0 \\ \frac{0,05}{0,20} = 0,25, \text{ se } X_2=1 \\ \frac{0,03}{0,20} = 0,15, \text{ se } X_2=2 \end{cases}$$

2)  $P(X_2=0 | X_1=0) = P(X_2=0)$   
 $\Leftrightarrow 0,6 \neq 0,5$ , logo não são independentes

23)  $(X, Y)$ ;  $X$  e  $Y$  independentes

$$X \sim N(\mu=2, \sigma^2=0,3); P(Y=y) = \begin{cases} 0,5^y \cdot 0,5^{1-y} & \text{se } y=0 \vee y=1 \\ 0, & \text{C.C.} \end{cases}$$

$x$	0	1	2
0			
1			
2			

$$P(X=x \cap Y=y) = P(X=x) \cdot P(Y=y)$$

$$P(0,0) = P(X=0) \cdot P(Y=0) = 0,49 \cdot 0,5 = 0,245$$

$$P(0,1) = 0,245$$

$$P(1,0) = P(X=1) \cdot P(Y=0) = (0,91 - 0,49) \cdot 0,5 = 0,21$$

$$P(1,1) = 0,21$$

$$P(2,0) = P(X=2) \cdot P(Y=0) = (1 - 0,91) \cdot 0,5 = 0,045$$

$$P(2,1) = 0,045$$

$$\text{b)} P(X > Y) = P(1,0) + P(2,0) + P(2,1) = 0,21 + 0,045 + 0,045 = 0,3$$