Métodos Estatísticos
Capítulo 2

Página – resumos e exemplos:

- 2 – Lei de Probabilidade de X, Função distribuição
- 3 – Esperança, variância, desvio-padrão, covariância
- 9 – Binomial
- 10 e 11 – Hipergeométrica e aproximação para Binomial
- 12 – Poisson e Estabilidade de Poisson
- 13 – Hipergeométrica aproximada a Binomial aproximada a Poisson
- 15 – Variáveis aleatórias bidimensionais discretas (os exercícios das tabelas)

Página – exercícios:

- 4 – 1 a)
- 5 – 1 b) c)
- 6 – 2
- 7 – 3
- 8 – 4, 5
- 9 – 7, 8
- 10 – 9, 10, 11
- 11 – 12, 13, 14
- 12 – 14 (alternativo)
- 13 – 15, 16
- 14 – 17, 18
- 15 – 19 a) b)
- 16 – 19 c) d)
- 17 – 20
- 18 – 21
- 19 – 22

(exercício 6 é suposto ser no Excel)

18-3

Capítulo 2 Variáveis Aleatórias e Distribuições de Probabilidades Discretas

$\mathcal{E} \rightarrow$ uma experiência aleatória

$\Omega \rightarrow$ espaço de resultados associado à experiência $\mathcal{E}$

$$\begin{array}{l} \Omega \xrightarrow{\;X\;} \mathbb{R} \\ \omega \longrightarrow X(\omega) \end{array}$$

Lei de Probabilidade de X

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\;p\;} [0,1]$$

Nota

variável aleatória

$$\begin{array}{l} \Omega \xrightarrow{\;X\;} \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] \\ \omega \longrightarrow X(\omega) \longrightarrow p(X(\omega)) \equiv p_X(\omega) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \equiv p(X=\omega) \end{array}$$

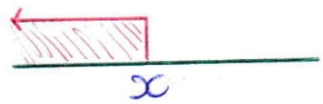
Suporte de X $S_X = \{$ valor que a v.a. X assume com probabilidade positiva $\}$

A v.a. X diz-se discreta se o seu suporte é finito ou enumerável

$$p(x) = \begin{cases} P(X=x) & , \text{ se } x \in S_X \\ 0 & , \text{ se } x \notin S_X \text{ (caso contrário, c.c.)} \end{cases}$$

Propriedade $\rightarrow \sum_{x \in S} p(x) = 1$

Função distribuição
$$\begin{cases} \mathbb{R} \xrightarrow{\;F\;} [0,1] \\ x \longrightarrow F(x) = P(X \leq x) \\ \qquad\qquad = \sum_{\substack{a \in S \\ a \leq x}} P(x=a) \end{cases}$$



Independência da v.a. (discreta ou contínua)

$X_1, X_2, \ldots, X_m$ são independentes $\leftrightarrow P(X_1 \leq x_1 \cap \ldots \cap X_m \leq x_m)$
$= P(x_1 \leq x_1) \cdot \ldots \cdot P(X_m \leq x_m)$

Esperança ou valor esperado ou valor médio

X v.a. discreta $\rightarrow E(X) = \sum_{x \in S} x \cdot P(X=x)$

Variância

X v.a. discreta $\rightarrow V(X) = E\left[(x - E(X))^2\right]$

Desvio Padrão $\longrightarrow \sigma(X) = \sqrt{V(x)}$

Exemplo
(valores com o mesmo peso)

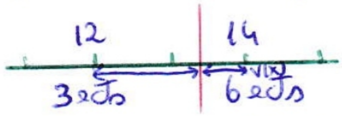
$E(X) = 13$

$$E(X) = \sum_{x \in S} x \cdot P(x)$$
$$= 12 \cdot \frac{1}{2} + 14 \cdot \frac{1}{2}$$
$$= \frac{12+14}{2} = 13$$

$$V(X) = (12-13)^2 \cdot \frac{1}{2} + (14-13)^2 \cdot \frac{1}{2}$$
$$= 1$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1} = 1$$

(valores com pesos diferentes)



$$E(X) = \sum_{x \in S} x \cdot P(X=x)$$
$$= 12 \cdot \frac{3}{9} + 14 \cdot \frac{6}{9}$$
$$= \frac{12 \cdot 3 + 14 \cdot 6}{9} = 13,(3)$$

$$V(X) = (12 - 13,(3))^2 \cdot \frac{3}{9} + (14 - 13,(3))^2 \cdot \frac{6}{9}$$
$$\simeq 0,89$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0,89} \simeq 0,94$$

Propriedades ($C \in \mathbb{R}$ (constante))

1- $E(C \cdot X) = C \cdot E(X)$

2- $E(C) = C$

3- $E(X+C) = E(X) + C$

4- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

1- $V(C \cdot X) = C^2 \cdot V(X)$

2- $V(C) = \emptyset$

3- $V(X+C) = V(X)$

5- $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

---

(1) Covariância entre X e $Y \rightarrow cov(X,Y) = E\left[(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))\right]$
$$= E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$$

(1.1) $cov(X,X) = E[(X - E(X)) \cdot (X - E(X))]$
$$= E(X^2) - [E(X)]^2 = V(X)$$

(2) X, Y v.a. ind $\Rightarrow cov(X,Y) = \emptyset$

$cov(X,Y) \neq \emptyset \Rightarrow X, Y$ <u>não</u> são ind

1) $\mathcal{E}$ = lançar 3x uma moeda ao ar

Ω = K = "sair coroa" $\{ccc, cck, ckc, kcc,$
c = "sair cara" $ckk, kck, kkc, kkk\}$

X = "número Total de caras"

Caso 1: moeda equilibrada

$\Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R} \xrightarrow{f} [0,1]$

$\boxed{ccc} \to 3 \to \frac{1}{8}$

$\boxed{\begin{matrix} cck \\ ckc \\ kcc \end{matrix}} \to 2 \to \frac{3}{8}$

$\boxed{\begin{matrix} ckk \\ kck \\ kkc \end{matrix}} \to 1 \to \frac{3}{8}$

$\boxed{kkk} \to 0 \to \frac{1}{8}$

$\# \Omega = 8 \qquad \# S_x = 4$

$S_x = \{0, 1, 2, 3\}$

$P(X=1) \Rightarrow$ "sair cara 1 vez" $\quad \boxed{c}\ k\ k$

$3 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = {}^3C_1 = \frac{3!}{1! \cdot (3-1)!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 3$

Enunciado diz moeda viciada!

a) $\begin{cases} P(c) = 2 \cdot P(K) \\ P(C) + P(K) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ 2 \cdot P(K) + P(K) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(C) = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ P(K) = 1/3 \end{cases}$

—//—

$\Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R} \xrightarrow{f} [0,1]$

$\boxed{ccc} \to 3 \to P(X=3) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$

$\boxed{\begin{matrix} cck \\ ckc \\ kcc \end{matrix}} \to 2 \to P(X=2) = 3 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{12}{27}$

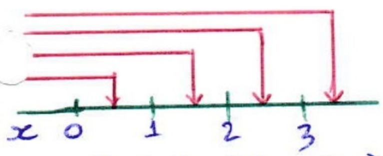
$\boxed{\begin{matrix} ckk \\ kck \\ kkc \end{matrix}} \to 1 \to P(X=1) = 3 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{6}{27}$

$\boxed{kkk} \to 0 \to P(X=0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$

x	0	1	2	3	c.c
$P(X=x)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$	0

ou $f(x) = P(X=x) = \begin{cases} P(X=x), x \in S = \{0,1,2,3\} \\ 0, cc \end{cases} = \begin{cases} \frac{8}{27}, & x=3 \\ \frac{12}{27}, & x=2 \\ \frac{6}{27}, & x=1 \\ \frac{1}{27}, & x=0 \\ 0, & c.c. \end{cases}$

b) $F(x) = P(X \leq x)$



$x < 0: F(x) = P(X \leq x) = 0$

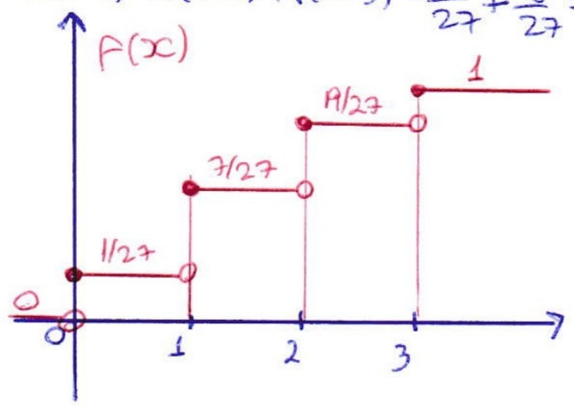
$0 \leq x < 1: F(x) = P(X \leq x) = P(X=0) = \frac{1}{27}$

$1 \leq x < 2: F(x) = P(X \leq x) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{1}{27} + \frac{6}{27} = \frac{7}{27}$

$2 \leq x < 3: F(x) = P(X \leq x) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \frac{7}{27} + \frac{12}{27} = \frac{19}{27}$

$3 \leq x: F(x) = P(X \leq x) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = \frac{19}{27} + \frac{6}{27} = 1$

$$F(x) \begin{cases} 0 \;, & x < 0 \\ 1/27 \;, & 0 \leq x < 1 \\ 7/27 \;, & 1 \leq x < 2 \\ 19/27 \;, & 2 \leq x < 3 \\ 1 \;, & 3 \leq x \end{cases}$$



c) P("só saírem coroas nos 3 lançamentos")

$= P(X=3)$

$= 8/27$

P("saírem, no máximo, de sair 2 coroas")

$= P(X \leq 2)$

$= F(2)$

$= P(X=0) + P(X=1) + P(X=1)$

$= 19/27$

2) $X =$ "número de computadores utilizados diariamente numa empresa"

a) $P(X=x) = \begin{cases} \dfrac{K 2^x}{x!}, & x=1,2,3,4 \\ \emptyset, & c.c. \end{cases} = \begin{cases} K \cdot 2, & x=1 \\ K \cdot \dfrac{2^2}{2} = 2K, & x=2 \\ K \cdot \dfrac{2^3}{3!} = \dfrac{4}{3}K, & x=3 \\ K \cdot \dfrac{2^4}{4!} = \dfrac{2}{3}K, & x=4 \end{cases}$

Se $\sum_{x \in S} P(X=x) = 1$

$\rightarrow P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 1$

$\Leftrightarrow 2K + 2K + \frac{4}{3}K + \frac{2}{3}K = 1$

$\Leftrightarrow 4K + \frac{6}{3}K = 1 \Leftrightarrow K = \frac{1}{6}$

Então

$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{2^x}{x!}, & x=1,2,3,4 \\ \emptyset, & c.c. \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{2}{6} = \dfrac{6}{18}, & x=1 \\ \dfrac{2}{6} = \dfrac{6}{18}, & x=2 \\ \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{4}{3} = \dfrac{4}{18}, & x=3 \\ \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{18}, & x=4 \end{cases}$

b) $F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x<1 \\ \dfrac{6}{18}, & 1 \leq x < 2 \\ \dfrac{6}{18} + \dfrac{6}{18} = \dfrac{12}{18}, & 2 \leq x < 3 \\ \dfrac{6}{18} + \dfrac{6}{18} + \dfrac{4}{18} = \dfrac{16}{18}, & 3 \leq x < 4 \\ \dfrac{6}{18} + \dfrac{6}{18} + \dfrac{4}{18} + \dfrac{2}{18} = 1, & 4 \leq x \end{cases}$

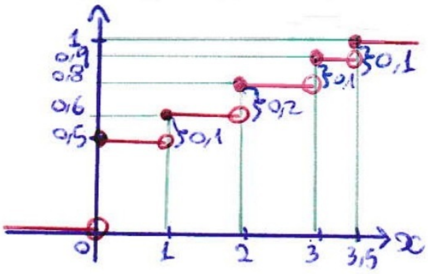
c) $P(X \leq a) \geq 0{,}8 \Leftrightarrow F(a) \geq \underset{(\times 18)}{0{,}8} \Leftrightarrow F(a) \geq \frac{14{,}4}{18} \Leftrightarrow a \geq 3$

d) $E(X) = 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2) + 3 \cdot P(X=3) + 4 \cdot P(X=4) = 1 \cdot \frac{6}{18} + 2 \cdot \frac{6}{18} + 3 \cdot \frac{4}{18} + 4 \cdot \frac{2}{18} \simeq 2{,}1$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \rightarrow V(X) = (1-2{,}1)^2 \cdot \frac{6}{18} + (2-2{,}1)^2 \cdot \frac{6}{18} + (3-2{,}1)^2 \cdot \frac{4}{18} + (4-2{,}1)^2 \cdot \frac{2}{18} \simeq 1{,}03$

$\sigma(X) = \sqrt{1{,}03} \simeq 1{,}01$

3) a)



b)

x	0	1	2	3	3,5	cc
$P(X=x)$	0,5	0,1	0,2	0,1	0,1	0

$P(2{,}5 \leqslant X \leqslant 4) = P(X \leqslant 4) - P(X \leqslant 2)$

$= F(4) - F(2) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

X é v.a. discreta pq $S_X = \{0, 1, 2, 3, 3.5\}$ é finito, $\# S_X = 5$

c) • $P(X \leqslant 1) = F(1) = 0{,}6$

ou $\hookrightarrow = P(X=0) + P(X=1) = 0{,}5 + 0{,}1 = 0{,}6$

• $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leqslant 1) = 1 - F(1) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

ou $\hookrightarrow = P(X=2) + P(X=3) + P(X=3{,}5) = 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}4$

ou $\hookrightarrow = 1 - [P(X=0) + P(X=1)] = 1 - [0{,}5 + 0{,}1] = 0{,}4$

• $P(X \geqslant 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leqslant 2) = 1 - F(2) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

ou $\hookrightarrow = P(X=3) + P(X=3{,}5) = 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}2$

• $P(2{,}5 \leqslant X \leqslant 4) = P(X=3) + P(X=3{,}5) = 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}2$

ou $\hookrightarrow = P(X \leqslant 4) - P(X < 2{,}5) = P(X < 4) - P(X \leqslant 2) = F(4) - F(2) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

• $P(X \geqslant 3{,}5) = P(X = 3{,}5) = 0{,}1$

ou $\hookrightarrow = 1 - P(X \leqslant 3) = 1 - F(3) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$

• $P(2{,}5 \leqslant X \leqslant 4 \,/\, X \geqslant 1) = \dfrac{P(2{,}5 \leqslant X \leqslant 4 \cap X \geqslant 1)}{P(X \geqslant 1)} = \dfrac{P(X=3) + P(X=3{,}5)}{1 - P(X < 1)} = \dfrac{0{,}1 + 0{,}1}{1 - P(X=0)} = 0{,}4$

d) $E(X) = \sum_{x \in S_X} x \cdot P(X=x) = 0 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}1 + 3{,}5 \cdot 0{,}1 = 1{,}15$

$V(X) = E\left[\left(x - E(x)\right)^2\right] = E(x^2) - [\underbrace{E(x)}_{1,15}]^2$

$E(x^2) = \sum x^2 \cdot P(X=x) = 0^2 \cdot 0{,}5 + 1^2 \cdot 0{,}1 + 2^2 \cdot 0{,}2 + 3^2 \cdot 0{,}1 + 3{,}5^2 \cdot 0{,}1 \simeq 3{,}03$

$V(X) = 3{,}03 - (1{,}15)^2 \simeq 1{,}70$

$\sigma(X) = \sqrt{1{,}70} \simeq 1{,}30$

e) Considere $Y = X - 1{,}15$

i) $P(Y \leqslant 1) = P(X - 1{,}15 \leqslant 1) = P(X \leqslant 2{,}15) = P(X \leqslant 2) = F_X(2) = 0{,}8$

ii) $E(Y) = E(X - 1{,}15) = E(X) - 1{,}15 = 1{,}15 - 1{,}15 = 0$

$V(Y) = V(X - 1{,}15) = V(X) \simeq 1{,}70$

5) a) $P(x=-2) + P(x=-1) + P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) = 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3} + K + \frac{1}{15} + K + \frac{1}{3} = 1$

$\Leftrightarrow 5 + 15k + 1 + 15k + 5 = 15 \Leftrightarrow 30k = 15 - 11 \Leftrightarrow k = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$

x	-2	-1	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$

b)
$$F(x) \begin{cases} 0, \text{ se } x < -2 \\ \frac{1}{3}, \text{ se } -2 \leq x < -1 \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{15} = \frac{7}{15}, \text{ se } -1 \leq x < 0 \\ \frac{7}{15} + \frac{1}{15} = \frac{8}{15}, \text{ se } 0 \leq x < 1 \\ \frac{8}{15} + \frac{2}{15} = \frac{10}{15}, \text{ se } 1 \leq x < 2 \\ \frac{10}{15} + \frac{1}{3} = 1, \text{ se } x \leq 2 \end{cases}$$

c) $V(x) = E(x^2) + [E(x)]^2$

$= \left(-2 \cdot \frac{1}{3} + -1 \cdot \frac{2}{15} + 0 \cdot \frac{1}{15} + 1 \cdot \frac{2}{15} + 2 \cdot \frac{1}{3}\right) + \left((-2)^2 \cdot \frac{1}{3} + (-1)^2 \cdot \frac{2}{15} + 0^2 \cdot \frac{1}{15} + 1^2 \cdot \frac{2}{15} + 2^2 \cdot \frac{1}{3}\right)$

$= \emptyset + \frac{44}{15} = \frac{44}{15}$

d) $P(X^2 = 4 / X \leq 1) = \frac{P(X^2 = 4 \cap X \leq 1)}{P(X \leq 1)} = \frac{P((X=-2 \cup X=2) \cap X \leq 1)}{P(X \leq 1)}$

$= \frac{P(X=-2)}{P(X \leq 1)} = \frac{P(X=-2)}{F(1)} = \frac{1/3}{10/15} = \frac{15}{30} = \frac{1}{3}$

4)

x_i	$m-1$	m	$m+3$	$m+5$
$P(X=x_i)$	$\frac{k+1}{8}$	$\frac{k}{8}$	$\frac{k-1}{8}$	$\frac{k}{8}$

a) $\frac{k+1}{8} + \frac{k}{8} + \frac{k-1}{8} + \frac{k}{8} = 1 \Leftrightarrow \frac{4k-1}{8} = 1$

$\Leftrightarrow 4k = 8 \Leftrightarrow k = \frac{8}{4} \Leftrightarrow k = 2$

x_i	$m-1$	m	$m+3$	$m+5$
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$

$E(x) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (m-1)\frac{3}{8} + m\frac{2}{8} + (m+3)\frac{1}{8} + (m+5)\frac{2}{8} = \frac{1}{4}_{\times 2}$

$\Leftrightarrow \frac{3m - 3 + 2m + m + 3 + 2m + 10}{8} = \frac{2}{8}$

$\Leftrightarrow 8m + 10 = 2 \Leftrightarrow m = \frac{2-10}{8} \Leftrightarrow m = 1$

b)

x_i	-2	-1	2	4
$P(X=x)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$

- $E(X-2) = E(x) - 2 = \frac{1}{4} - 2 = -1{,}75$
- $V(3x-2) = 3^2 \cdot V(x) = 3^2 \cdot [E(x^2) - E(x)^2]$

$E(x^2) = (-2)^2 \cdot \frac{3}{8} + (-1)^2 \cdot \frac{2}{8} + 2^2 \cdot \frac{1}{8} + 4^2 \cdot \frac{2}{8}$

$= \frac{12}{8} + \frac{2}{8} + \frac{4}{8} + \frac{32}{8} = \frac{50}{8}$

$E(x)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

$3^2 \cdot \left(\frac{50}{8}_{\times 2} - \frac{1}{16}\right)$

$= \frac{9 \cdot (100-1)}{16} = \frac{891}{16}$

$\simeq 55{,}6875$

c)
$$F(x) \begin{cases} 0, \text{ se } x < -2 \\ \frac{3}{8}, \text{ se } -2 \leq x < -1 \\ \frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}, \text{ se } -1 \leq x < 2 \\ \frac{5}{8} + \frac{1}{8} = \frac{6}{8}, \text{ se } 2 \leq x < 4 \\ \frac{6}{8} + \frac{2}{8} = 1, \text{ se } x \geq 4 \end{cases}$$

d) $P(X \leq -5) = \emptyset$

$P(X \leq -1) = \frac{5}{8}$

$P(-1 < X \leq 3) = \frac{1}{8}$

$P(X \geq 4) = \frac{2}{8}$

$P(X < 4) = \frac{6}{8}$

$P(X \leq 6) = 1$

+ 8/04

$\mathcal{E} \rightarrow$ Experiência aleatória

repete-se $\mathcal{E}$ n vezes

$X =$ " número de sucessos que ocorreram nas (n) repetições "

X — repetições sempre nas mesmas condições $\rightarrow X \sim B(n, p)$ Binomial

$p = P($" sucesso numa ocorrência "$)$

X — repetições em condições diferentes $\rightarrow X \sim H(n, N, M)$ Hipergeométrica

N: população TOTAL; M: população associada ao sucesso

7) 20 peças $= N$

$\rightarrow$ 5 defeituosas $= M$

$\mathcal{E} =$ " retirar uma peça e analisar se é defeituosa "

repetir 6 vezes. Há reposição, então sempre mesmas condições

$X =$ " número de peças defeituosas retiradas ", $S_X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

a) $X \sim B(6, \frac{5}{20}) = X \sim B(6, 0{,}25)$

b) • $P(X \leq 0) = P(X = 0) = \binom{6}{0} 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^6 = {}^6C_0 \cdot 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^6$

$= \frac{6!}{0! \cdot (6-0)!} \cdot 1 \cdot 0{,}75^6 = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}75^6 = 0{,}1780$

ou Tabela Binomial $\rightarrow P(X \leq 0) = F(0)$

n	x\p	0,25
6	0	0,1780

• $P(2 \leq X < 4) = P(X = 2) + P(X = 3) = {}^6C_3 \cdot 0{,}25^2 + 0{,}75^4 + {}^6C_3 \cdot 0{,}25^3 \cdot 0{,}75^3$

$\simeq 0{,}2966 + 0{,}1318 \simeq 0{,}4285$

ou Tabela $\rightarrow P(2 \leq X < 4) = P(X < 4) - P(X < 2) = P(X \leq 3) - P(X \leq 1) = F(3) - F(1)$

$= 0{,}9624 - 0{,}5339 = 0{,}4285$

n	x\p	0,25
6	1	0,5339
	3	0,9624

• $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3)$

$= 1 - 0{,}9624 = 0{,}4285$

• $P(X \leq 7) = P(X \leq 6) = 1$

c) $E(X) = n \cdot p = 6 \cdot 0{,}25 = 1{,}5$

d) $\mathcal{E} =$ " extrair 1 peça e verificar se é defeituosa, sem repor ", $S_X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$X \sim H(6, 20, 5)$

$P(X = 0) = \frac{{}^5C_0 \cdot {}^{15}C_6}{{}^{20}C_6} = \frac{\frac{5!}{0! \cdot 5!} \cdot \frac{15!}{6! \cdot 9!}}{\frac{20!}{6! \cdot 4!}}$

$\simeq 0{,}129$

8) Estamos a repetir um acontecimento sempre nas mesmas condições, portanto, estamos perante uma Binomial.

No exercício é descrito uma moeda viciada com $P($" sair cara "$) = \frac{2}{3}$, em que vamos lançar 3 vezes e ver quantas caras no total

Ou seja: $X \sim B(3, \frac{2}{3})$

9) $\mathcal{E}$ = "Ir ao armazém buscar um portátil e registar o seu estado"

a) Repetir $\mathcal{E}$ 6 vezes, sem reposição

X = "nº de portáteis, em 20 comprados, que necessitam de assistência"

100 no total, 10 necessitam de assistência

$S = \{0, \ldots, 10\}$; $X \sim H(20, 100, 10)$

b) $P(X=0) = \dfrac{{}^{10}C_0 \cdot {}^{90}C_{20}}{{}^{100}C_{20}} \simeq 0{,}0951$

c) $P(X>5) = P(X=6) + \cdots + P(X=10) = \dfrac{\binom{10}{6}\binom{90}{14}}{\binom{100}{20}} + \cdots + \dfrac{\binom{10}{10}\binom{90}{10}}{\binom{100}{20}}$

$= \displaystyle\sum_{k=6}^{10} \frac{\binom{10}{k}\binom{90}{20-k}}{\binom{100}{20}} \; (= 0{,}0039)$

não pedido

d) Lucro $= L = 1520 \cdot 20 - 55x$

$E(L) = E(\underbrace{1520 \cdot 20}_{b}\ \underbrace{-55}_{a} x) = 30400 - 55E(x)$ $E(x) = 20 \cdot \frac{10}{100} = 2$

$= 30400 - 110 = 30290€$

10) $\mathcal{E}$ = "lançamento de um dado equilibrado", Repetir $\mathcal{E}$ 20 vezes

X = "nº de vezes que sai face 5 em 20 repetições"

a) Como o dado é equilibrado e $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, cada face tem $P = \frac{1}{6}$

$P(X=x) = {}^{20}C_x \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)^{x}}_{\text{P de sucesso } x \text{ vezes}} \cdot \underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)^{20-x}}_{\text{P de insucesso nas restantes vezes}}$, $x = 1, 2, \ldots 20$

(Ver Tabela discretas Binomial)

b) ${}^{20}C_{10} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{20-10} = \dfrac{20!}{10! \cdot (20-10)!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \cong 4{,}93 \cdot 10^{-4}$

11) $\mathcal{E}$ = "Questionar o indivíduo e se tem casa própria"

X = "nº de indivíduos, em 10, com casa própria"

$S = \{0, 1, \ldots, 9, 10\}$

$X \sim H(10, 1000, \underbrace{200}_{0{,}2 \cdot 1000}) \rightarrow P(X=6) = \dfrac{\binom{200}{6}\binom{800}{4}}{\binom{1000}{10}} = 0{,}0053$

12) X = "Habitantes que pensam que o sistema de trânsito é adequado"

$P(X) = 0{,}3$, Repetir X 20 vezes

$P(X \leq 2) \rightarrow X \sim B(20, 0{,}3) \rightarrow$

n	x/p	$0{,}3$
20	2	0,0355

13) $\mathcal{E}$ = "Observa um vidro e registar o seu estado" → Repetir 10x, condições diferentes

X = "nº de vidros defeituosos em 10"

$P(\text{"1 vidro defeituoso"}) = 0{,}1$

a) $X \sim H(10; N; 0{,}1 \cdot N)$

Assumindo que N é grande, logo $\frac{10}{N} \leq 0{,}1$ e $H(10, N, 0{,}1 \cdot N) \dot{\sim} B\left(10, \frac{0{,}1 \cdot N}{N}\right) = B(10; 0{,}1)$

$P(X=0) \cong X \sim B(10, 0{,}1) = 0{,}3487$

b) $P(2 \leq X \leq 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 1) \cong \underset{[B(10,\,0{,}1)}{F(6) - F(1)} = 0{,}2639$

c) $E(X) = 10 \cdot 0{,}1 = 1$

14) X = "nº de chamadas que chegam num período de 5 minutos à central telefónica"

$P(10) \rightarrow (E(X) = 10 \text{ e } V(X) = 10) \rightarrow \lambda = E(X) = V(X)$

a) i) $P(X=8) = P(X \leq 8) - P(X \leq 7) = 0{,}3328 - 0{,}2202 = 0{,}1126$

ii) $P(X<5) = P(X \leq 4) = 0{,}0293$

iii) $P(X \geq 3) = 1 - P(X<3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0{,}0028 = 0{,}9982$

iv) $P(X=0) = P(X \leq 0) \simeq 0{,}000$

b) Y = "nº de chamadas que chegam num período de 10 minutos"

$= X_1 + X_2$, em que X_i são iid com X

independentes e identicamente distribuídos

$Y \sim P(10+10) = P(20)$

$P(X=35) = P(X \leq 35) - P(X \leq 34) = 0{,}9992 - 0{,}9985 = 0{,}0007$

08-04 continuação

14) X = "número de chamadas que chegam à central telefónica, num período de 5 minutos"

$X \sim \mathcal{P}(10) \rightarrow \lambda = 10 \rightarrow E(X)=10$

$V(X)=10$

$P(X=x) = \dfrac{e^{-10} \cdot 10^{x}}{x!}$

$x \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,4,5,\dots\}$

a) i) $P(X=8) = \dfrac{e^{-10} \cdot 10^{8}}{8!} \simeq 0{,}1126$

ou Tabela

$P(X=8) = P(X \leq 8) - P(X \leq 7)$

$= F(8) - F(7) = 0{,}3328 - 0{,}2202$

$= 0{,}1126$

λ	x	$\cdots$ 7	8
⋮	⋮	⋮	⋮
10	$\emptyset$	0,2202	0,3328

ii) $P(X<5) = P(X \leq 4) = F(4) = 0{,}0293$

iii) $P(X \geq 3) = 1 - P(X<3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - 0{,}0028 = 0{,}9972$

iv) $P(X=\emptyset) = \dfrac{e^{-10} \cdot 10^{0}}{\emptyset!} = \dfrac{e^{-10}}{1} = e^{-10} \simeq 0{,}0000454$

ou $P(X=\emptyset) = P(X \leq 0) = F(0) \simeq 0{,}000$

b) Y = "número de chamadas recebidas, num período de 10 minutos"

!! Não posso fazer $Y = 2 \cdot X$!! $\Rightarrow$ $\underset{x_1}{5\text{min}}$ $\underset{x_2}{5\text{min}}$

x_1 = "número de chamadas nos primeiros 5 minutos"
x_2 = "número de chamadas nos segundos 5 minutos"

x_1 e x_2 independentes
$\underbrace{Y = x_1 + x_2 \sim \mathcal{P}(10+10) = \mathcal{P}(20)}$

$Y \sim \mathcal{P}(20)$

$P(Y=35) = P(Y \leq 35) - P(Y \leq 34)$

$= F_Y(35) - F_Y(34)$

$= 0{,}0007$

λ	x	$\cdots$ 4	5
⋮	⋮	⋮	⋮
20	30	0,9985	0,9992

Regra: Estabilidade de Poisson

$x_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$

$x_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ $\longrightarrow$ $x_1 + x_2$ também tem distribuição de poisson de $\lambda_1 + \lambda_2$

x_1, x_2 independentes

$\hookrightarrow x_1 + x_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$

9

15-04

exe 15) X_M = "número de visitantes no período da manhã";

X_T = "número de visitantes no período da tarde";

$S_{X_M} = \{0,1,2,3,\dots\} = \mathbb{N}_0$

$S_{X_T} = \{0,1,2,3,\dots\} = \mathbb{N}_0$

X_M e X_T têm distribuição de poisson

$$\left.\begin{array}{l} E(X_M)=3 \rightarrow X_M \sim P(3) \\ E(X_T)=15 \rightarrow X_T \sim P(15) \end{array}\right\} X_M \text{ e } X_T \text{ independentes}$$

a) $P(X_M \geq 5) = 1 - P(X_M < 5) = 1 - P(X_M \leq 4) = 1 - F(4) = 1 - 0,8153 = 0,1847$

b) Y = "número de visitantes durante 1 dia"

se $X_M \sim P(3)$, $X_T \sim P(15)$, X_M e X_T independentes, então $Y \sim P(3+15) = P(18)$

$$P(Y<31) = P(Y \leq 30) = F_{\lambda=18}(30) = 0,9967$$

c) $P(X_M=5 \cap X_T=20) = P(X_M=5) \cdot P(X_T=20)$ (independentes)

$= [P(X_M \leq 5) - P(X_M \leq 4)] \cdot [P(X_T \leq 20) - P(X_T \leq 19)]$

$= [\underset{\lambda=3}{F(5)} - \underset{\lambda=3}{F(4)}] \cdot [\underset{\lambda=15}{F(20)} - \underset{\lambda=15}{F(19)}] = (0,9161 - 0,8153) \cdot (0,9170 - 0,8752)$

$= 0,1008 \cdot 0,0418 \cong 0,0042$

16) Há a produção de N livros com várias edições. Observar uma edição de 100 000 exemplares, em que:

$\mathcal{E}$ = "Observar 1 livro e registar o seu estado", repetir 10^5 em condições diferentes

X = "nº de livros em 10^5 exemplares que estão mal encadernados"

$X \sim H(10^5, N, 10^{-4} \cdot N)$

Aprox $\frac{10^5}{N} \leq 0,1$

$\dot\sim B(10^5, 10^{-4})$ ← raro

$\dot\sim P(10^5, 10^{-4})$

a) $P(X=5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 4) = 0,0671 - 0,0293 = 0,0378$

b) $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0,0103 = 0,9897$

c) $P(X \leq 2) = 0,0028$

17) $X \sim P(2) \Rightarrow E(X) = 2$

$X =$ " nº de petroleiros que chegam por dia a uma refinaria ";

Se $X > 3$ os excedentes seguem para outro porto.

a) $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0{,}8571 = 0{,}1429$

b) $X \sim P(2) \rightarrow E(X) = V(X) = \lambda = 2$

c) $P(X = \phi) = P(X \leq 0) = 0{,}1353$

$P(X=1) = P(X \leq 1) - P(X \leq 0) = 0{,}2707$

$P(X=2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 1) = 0{,}2707$

$P(X=3) = P(X \leq 3) - P(X \leq 2) = 0{,}1804$

- Como a soma de uma $P = 1$, e $(X=0 + X=1 + X=2) > 0{,}5$, então $X > 3$ é sempre menor
- Como $P(X=1) = P(X=2)$, e são ambos os maiores, o nº mais provável são 1 e 2.

d) $P(X \leq 3 + c) = 0{,}95$

λ	x	5
2	0	0,9834

$\rightarrow 3 + c = 5 \Leftrightarrow c = 2$

↳ para $P(2)$ é o menor $> 0{,}95$

e) $Y =$ " nº de petroleiros que são atendidos por dia "

y	0	1	2	3	cc
$P(Y=y)$	$P(X=0)$ $= 0{,}1353$	$P(X=1)$ $= 0{,}2707$	$P(X=2)$ $= 0{,}2707$	$P(X \geq 3)$ $= 1 - P(X<3) = 0{,}3233$	ϕ

f) $E(Y) = 0 \cdot 0{,}1353 + 1 \cdot 0{,}2707 + 2 \cdot 0{,}2707 + 3 \cdot 0{,}3233$
$= 1{,}782$

18) $X =$ " nº de acidentes de trabalho, por mês, numa obra de construção civil "

$X \sim P(2) \rightarrow E(X) = V(X) = \lambda = 2$

a) $P(X=0) = P(X \leq 0) = 0{,}1353$

b) $P(X_1 + X_2 + X_3 \geq 6) = P(X_S \geq 6) = 1 - P(X_S \leq 5) = 1 - 0{,}4457 = 0{,}5543$

↳ X soma

$X_i, i = 1,2,3$

↳ " nº de acidentes no i-ésimo mês "

$X_i \sim P(2) \rightarrow P(2+2+2) = P(6)$

c) $\mathcal{E} =$ " Observar a obra um mês e registar se ocorreram acidentes "

$Y =$ " nº de meses, em 6, em que não ocorrem acidentes "

$S_Y = \{0, 1, 2, \ldots, 6\}$ $\quad Y \sim B(6, P(X=\phi)) = B(6; 0{,}1353)$

Binomial pois estão a repetir 6 vezes, em condições independentes, a $P(X=\phi)$

$P(Y=4) = P(Y \leq 4) - P(Y \leq 3)$

Como $\lambda = 0{,}1353$ não existe nas tabelas, usar um valor próximo (normalmente usar o acima, mas ambos podem)

$0{,}1353 \nearrow 0{,}15 \rightarrow F(4) - F(3) = 0{,}9996 - 0{,}9941 = 0{,}0055$

ou

$\searrow 0{,}10 \rightarrow F(4) - F(3) = 1 - 0{,}9992 = 0{,}0008$

calculadora: 0,0038

como se justificou o valor não existir, o exercício é contado para 100%

Variáveis aleatórias bidimensionais (vectores aleatórios de dimensão 2)

(X, Y) Só vamos considerar v.a. bidimensionais <u>discretas</u>

v.a. ↲ ↳ v.a.

Exerc 19) X = "número de defeitos numa peça"
Y = "número da fábrica que produz a peça"

Y \ X	0	1	2	3
1	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{4}{16}$

significa $P(X=3 \cap Y=2)$
$=P(X=3, Y=2)$

Como há uma relação entre defeitos e a fábrica, então X e Y <u>não</u> são independentes.

$S_X = \{0, 1, 2, 3\}$

$S_Y = \{1, 2\}$

Y \ X	0	1	2	3	
1	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$P(Y=1)=0{,}5$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{4}{16}$	$P(Y=2)=0{,}5$
	$P(X=0)=\frac{3}{16}$	$P(X=1)=\frac{2}{16}$	$P(X=2)=\frac{5}{16}$	$P(X=3)=\frac{6}{16}$	$\Sigma=0{,}5+0{,}5=1$

$\Sigma = \frac{3+2+5+6}{16} = 1$

$P(Y=1) = \sum_{x \in S_X} P(X=x, Y=1)$
$= P(X=0,Y=1) + P(X=1,Y=1) + P(X=2,Y=1)$
$+ P(X=3,Y=1) = \frac{2}{16} + \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{2}{16} = 0{,}5$

$P(Y=2) = \sum_{x \in S_X} P(X=x, Y=2)$
ou $1-0{,}5=0{,}5$

$P(X=0) = \sum_{y \in S_Y} P(X=0, Y=y) = P(X=0, Y=1) + P(X=0, Y=2) = \frac{2}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$

a)

y	1	2	c.c.
$P(Y=y)$	0,5	0,5	$\emptyset$

$S_Y = \{1,2\}$

x	0	1	2	3	c.c.
$P(X=x)$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\emptyset$

$S_X = \{0,1,2,3\}$

b) $P(X=2) = \frac{5}{16}$; $P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) = \frac{5+6}{16} = \frac{11}{16}$;

$P(X \leq Y) = P(X=0, Y=1) + P(X=0, Y=2)$
$+ P(X=1, Y=1) + P(X=1, Y=2)$
$+ P(X=2, Y=2) = \frac{2+1+1+1+2}{16} = \frac{7}{16}$;

$P(Y=3) = \emptyset$ pq $S_Y = \{1,2\}$

c) $E(X) = \sum x \, P(X=x) = 0 \cdot \frac{3}{16} + 1 \cdot \frac{2}{16} + 2 \cdot \frac{5}{16} + 3 \cdot \frac{6}{16} = 1{,}875$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$= 0^2 \cdot \frac{3}{16} + 1^2 \cdot \frac{2}{16} + 2^2 \cdot \frac{5}{16} + 3^2 \cdot \frac{6}{16} - 1{,}875^2 = 4{,}75 - 1{,}875^2 = 1{,}234$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1{,}234} \simeq 1{,}11$

(Dado na pergunta: $E(Y) = 1{,}5$; $V(Y) = 0{,}25$;)

$cov(X,Y) = \underbrace{E(X \cdot Y)} - \underbrace{E(X)}_{\to 1{,}875} \cdot \underbrace{E(Y)}_{\to 1{,}5}$

$\sum_x \sum_y x y \, P(X=x, Y=y)$

$= 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} + 0 \cdot 2 \cdot \frac{1}{16}$

$+ 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{16}$

$+ 2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{16} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8}$

$+ 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4}$

$= 2{,}9375$

$cov(X,Y) = 2{,}9375 - 1{,}875 \cdot 1{,}5 = 0{,}125$

d) $cov(X,Y) \neq 0$ então X e Y não são independentes, ou seja, o número de defeitos numa peça não é independente da fábrica onde é produzido.

e) $P(X>0 \mid Y=2) = \frac{P(X>0 \cap Y=2)}{P(Y=2)} = \frac{P(X=1, Y=2) + P(X=2, Y=2) + P(X=3, Y=2)}{P(Y=2)}$

$= \frac{\frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4}}{1/2} = \frac{7}{8}$

20)

X \ Y	-1	0	1
-1	-	p	-
0	1/4	-	1/4
1	-	1/4	-

$S_{(X,Y)} = \}(-1,0), (0,-1), (0,1), (1,0)\{$

a) $\sum_{x \in S} \sum_{y \in S} P(X=x, Y=y) = 1 \Leftrightarrow p + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{4}$ Soma de Todas as probabilidades = 1

b)

X \ Y	-1	0	1	Px
-1	-	$\frac{1}{4}$	-	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{4}$	-	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$
1	-	$\frac{1}{4}$	-	$\frac{1}{4}$
Py	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\Sigma = 1$ / $\Sigma = 1$

x	-1	0	1	c.c.
P(X=x)	1/4	2/4	1/4	0

y	-1	0	1	c.c.
P(Y=y)	1/4	2/4	1/4	0

As v.a. X e Y têm a mesma função de probabilidade

c) $P(X=x \mid Y=0) = \frac{P(X=x \cap Y=0)}{P(Y=0)} = \begin{cases} \frac{P(X=-1, Y=0)}{P(Y=0)}, & x=-1 \\ \frac{P(X=1, Y=0)}{P(Y=0)}, & x=1 \\ \emptyset, & \text{c.c.} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2} = 0{,}5, & x=-1 \\ \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2} = 0{,}5, & x=1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}5, & x=-1 \text{ ou } x=1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$

d) $\text{Cov}(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$

$E(X \cdot Y) = (-1) \cdot \emptyset \cdot \frac{1}{4} + \emptyset \cdot (-1) \cdot \frac{1}{4} + \emptyset \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \emptyset \cdot \frac{1}{4} = \emptyset$

$E(X) = (-1) \cdot \frac{1}{4} + \emptyset \cdot \frac{2}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} = \emptyset$

$E(Y) = (-1) \cdot \frac{1}{4} + \emptyset \cdot \frac{2}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} = \emptyset$

$\text{Cov}(X,Y) = \emptyset - \emptyset \cdot \emptyset = \emptyset$

Como deu zero, não podemos tirar conclusões quanto à independência

$P(X=0, Y=0) = \emptyset$

$P(X=0) \cdot P(Y=0) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{4}{16}$ $\quad \emptyset \neq \frac{4}{16}$ então não são independentes

21) $f(x,y) = \frac{x+y}{32}$; $x = 1, 2$; $y = 1, 2, 3, 4$;

a)

X \ Y	1	2	3	4
1	$\frac{2}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{5}{32}$
2	$\frac{3}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{6}{32}$

X	1	2	c.c
$P(X=x)$	$\frac{14}{32}$	$\frac{18}{32}$	$\emptyset$

Y	1	2	3	4	c.c.
$P(Y=y)$	$\frac{5}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{11}{32}$	$\emptyset$

b)
- $P(X>Y) = P(X=2 \cap Y=1) = \frac{3}{32}$
- $P(Y=2X) = P(X=1 \cap Y=2) + P(X=2 \cap Y=4) = \frac{3}{32} + \frac{6}{32} = \frac{9}{32}$
- $P(X+Y=3) = P(X=1 \cap Y=2) + P(X=2 \cap Y=1) = \frac{3}{32} + \frac{3}{32} = \frac{6}{32}$
- $P(X \leq 3-Y) = P(X=1 \cap Y=1) + P(X=1 \cap Y=2) + P(X=2 \cap Y=1) = \frac{2}{32} + \frac{3}{32} + \frac{3}{32} = \frac{8}{32}$
- $P(X \geq 1) = 1$
- $P(0 \leq Y \leq 3) = \frac{5}{32} + \frac{7}{32} + \frac{9}{32} = \frac{21}{32}$

c) $P(Y=y / X=2) = \frac{P(Y=y \cap X=2)}{P(X=2)} = \begin{cases} 0, \text{ se } y \notin \{1,2,3,4\} \\ \frac{3/32}{18/32} = \frac{96}{576}, \text{ se } y=1 \\ \frac{4/32}{18/32} = \frac{128}{576}, \text{ se } y=2 \\ \frac{5/32}{18/32} = \frac{160}{576}, \text{ se } y=3 \\ \frac{6/32}{18/32} = \frac{192}{576}, \text{ se } y=4 \end{cases}$

d) $P(X \cap Y) = P(X) \cdot P(Y)$

ou

$\text{Cov}(X\,Y) = 0$

ou

$P(Y=y / X=x) = P(Y=y)$

$\hookrightarrow P(Y=3 / X=2) = P(Y=2)$

$\Leftrightarrow \frac{160}{576} \neq \frac{9}{32}$

marginal

R: Como os valores são diferentes, X e Y não são independentes

22) X_1 = "nº de discos vendidos da marca 1"; X_2 = "nº de discos vendidos da marca 2"

$X_2 \backslash X_1$	0	1	2
0	0,12	0,25	0,13
1	0,05	0,30	0,01
2	0,03	0,10	0,01

a)

X_1	0	1	2
$P(X_1=x_1)$	0,20	0,60	0,15

X_2	0	1	2
$P(X_2=x_2)$	0,5	0,36	0,14

b) $E(X_1) = 0{,}20 + 1\cdot 0{,}60 + 2\cdot 0{,}15 = 0{,}90$

$E(X_2) = 0{,}0{,}5 + 1\cdot 0{,}36 + 2\cdot 0{,}14 = 0{,}64$

R: $E(X_1) > E(X_2)$, marca 1 é a mais vendida

c) $P(X_1 > X_2) = P(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) + P(X_1 = 2 \cap X_2 = 1) + P(X_1 = 2 \cap X_2 = 0) = 0{,}25 + 0{,}01 + 0{,}13 = 0{,}39$

d) $P(X_2 = x_2 / X_1 = 0) = \dfrac{P(X_2 = x_2 \cap X_1 = 0)}{P(X_1 = 0)} = \begin{cases} 0, \text{ se } x_2 \notin \{0,1,2\} \\ \dfrac{0{,}12}{0{,}20} = 0{,}60, \text{ se } x_2 = 0 \\ \dfrac{0{,}05}{0{,}20} = 0{,}25, \text{ se } x_2 = 1 \\ \dfrac{0{,}03}{0{,}20} = 0{,}15, \text{ se } x_2 = 2 \end{cases}$

e) $P(X_2 = 0 / X_1 = 0) = P(X_2 = 0)$

$\Leftrightarrow 0{,}6 \neq 0{,}5$, logo não são independentes

23) (X, Y); X e Y independentes

$X \sim B(2, 0{,}3)$; $P(Y = y) = \begin{cases} 0{,}5^{y} \cdot 0{,}5^{1-y} \rightarrow 0{,}5^{1}, & y = 0 \lor y = 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$

$0{,}5^{y+1-y}$

a)

$Y \backslash X$	0	1	2
0			
1			

$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$

$P(0,0) = P(X=0)\cdot P(Y=0) = 0{,}4900 \cdot 0{,}5 = 0{,}245$

$P(0,1) = 0{,}245$

$P(1,0) = P(X=1)\cdot P(Y=0) = (0{,}91 - 0{,}49)\cdot 0{,}5 = 0{,}21$

$P(1,1) = 0{,}21$

$P(2,0) = P(X=2)\cdot P(Y=0) = (1 - 0{,}91) \cdot 0{,}5 = 0{,}045$

$P(2,1) = 0{,}045$

b) $P(X > Y) = P(1,0) + P(2,0) + P(2,1) = 0{,}21 + 0{,}045 + 0{,}045 = 0{,}3$