ELSEVIER

SÉRIE Campus > < SBC SOCIEDADE BRASILEIRA DE COMPUTAÇÃO

JOÃO NUNES de SOUZA

LÓGICA para CIÊNCIA da COMPUTAÇÃO

Fundamentos de linguagem, semântica e sistemas de dedução

Lógica para ciência da
99246 UESC
UESC
99246

> Inclui mais de 700 exercícios com respostas selecionadas

EDITORA CAMPUS

Prefácio

O que é Lógica? O que significa estudar Lógica? Qual a sua definição? Ao iniciar este estudo, vários autores apresentam definições populares sobre o tema. Conforme [Mendelson, 1987]: *Lógica é a análise de métodos de raciocínio*. No estudo desses métodos a Lógica está interessada principalmente na forma e não no conteúdo dos argumentos. Considere por exemplo os argumentos:

- Todo homem é mortal. Sócrates é um homem. Portanto, Sócrates é mortal.
- Todo cão late. Totó é um cão. Portanto, Totó late.

Do ponto de vista da Lógica, esses argumentos têm a mesma estrutura ou forma.

- Todo X é Y. Z é X. Portanto, Z é Y.

A Lógica é o estudo de tais estruturas. Alguns autores [Andrews, 1996] dizem que a Lógica é essencialmente o estudo da natureza do raciocínio e as formas de incrementar sua utilização.

No excelente livro *Convite à Filosofia* [Chauí, 2002] é apresentada a definição.

*"**Lógica:** conhecimento das formas gerais e regras gerais do pensamento correto e verdadeiro, independentemente dos conteúdos pensados; regras para demonstração científica verdadeira; regras para pensamentos não-científicos; regras sobre o modo de expor o conhecimento; regras para verificação da verdade ou falsidade de um pensamento etc."*

A finalidade deste livro não é o estudo da Lógica do ponto de vista filosófico, mas a apresentação dos principais fundamentos da Lógica clássica necessários aos estudantes de Computação e áreas correlatas. Entretanto, mesmo considerando esse contexto restrito, ao longo do estudo proposto neste livro o leitor é convidado a checar a definição acima sempre que possível. O leitor verificará que as regras citadas na definição da Lógica têm aplicações imediatas em Computação.

A Lógica clássica considerada neste livro é apenas uma entre as inúmeras lógicas existentes. Entretanto, o seu estudo é importante pois é a introdução clássica ao estudo de todas as lógicas. Dessa forma, este livro é também uma introdução ao estudo dos fundamentos de Lógica Matemática e de suas aplicações em inúmeras áreas da Computação, Matemática, Filosofia etc.

O livro não requer nenhum pré-requisito, nem mesmo maturidade matemática, podendo ser utilizado como texto em disciplinas introdutórias de graduação. Mesmo sendo introdutório, dá-se ênfase na apresentação matemática rigorosa e no

desenvolvimento de demonstrações mais elementares. Algumas demonstrações que requerem técnicas mais avançadas são omitidas como, por exemplo, o teorema da completude na Lógica de Predicados. Nestes casos são relatadas apenas algumas análises de resultados.

O livro começou a ser escrito a partir de notas de aulas das disciplinas de Lógica para Ciência da Computação lecionadas na graduação e na pós-graduação, a partir de 1991 até os dias atuais, na Universidade Federal de Uberlândia. Em mais de dez anos lecionando Lógica para alunos de graduação e pós-graduação, foi possível determinar com clareza suas dificuldades. Nesse sentido, podem ser omitidas demonstrações que requerem habilidades técnicas dos alunos iniciantes, mas os conceitos fundamentais devem ser enfatizados. Para os alunos da pós-graduação o enfoque é diferente. Neste caso são consideradas com detalhes todas as demonstrações; os exercícios mais difíceis, e o livro podem ser complementados com outras referências. Partindo de inúmeras dúvidas dos alunos e de questões elaboradas em provas, são propostos mais de 700 itens de exercícios com sugestões e soluções dos mais importantes. Eles formam o complemento da teoria apresentada e são indispensáveis para um melhor aprendizado da Lógica.

O material elaborado durante as aulas tomou a forma de livro em janeiro de 1997, em Sergipe. Inicialmente nos quiosques das praias de Atalaia e Sarney, em Aracaju, sob a brisa do mar e tomando água de coco. Depois, no sertão, em Nossa Senhora das Dores, sob um calor de 39,99° C.

Este livro é dividido em duas partes. Na primeira, é considerada a Lógica Proposicional clássica e na segunda a Lógica de Predicados clássica. A divisão da Lógica em Proposicional e de Predicados é uma divisão freqüentemente seguida pela maioria dos autores. Em cada parte, o estudo da Lógica segue, fundamentalmente, os três passos básicos:

1. Especificação de uma linguagem, a partir da qual o conhecimento é representado. Nesta representação são considerados os conceitos de sintaxe e semântica associados à linguagem.
2. Estudo de métodos que produzam ou verifiquem as fórmulas ou argumentos válidos. Tem-se a verificação do conceito semântico de validade a partir de expressões sintáticas da linguagem.
3. Definição de sistemas de dedução formal onde são consideradas as noções de prova e conseqüência lógica. A noção de prova estabelece formas para a derivação de novos argumentos a partir daqueles representados previamente, o que também define a noção de conseqüência lógica.

O Capítulo 1 considera o estudo da linguagem da Lógica Proposicional, que corresponde ao passo 1 no estudo da Lógica Proposicional. A semântica da Lógica Proposicional é considerada nos Capítulos 2 e 3. O estudo de alguns mecanismos que verificam argumentos válidos é visto no Capítulo 4. O Capítulo 5 apresenta um estudo introdutório do princípio da indução finita. Este é um dos principais conceitos utilizados em Matemática e Ciência da Computação e sua utilização ocorre em

várias partes do restante do livro. No Capítulo 6, por exemplo, que trata das relações semânticas dos conectivos da Lógica Proposicional, há várias demonstrações que utilizam o princípio da indução finita. No Capítulo 7 são considerados dois sistemas de dedução formal. Um sistema axiomático e o sistema de dedução natural de Gentzen. Há vários tipos de sistemas de dedução estudados na lógica clássica. Os sistemas formais apresentados no Capítulo 7 são simples e apresentam as noções de prova e conseqüência lógica, indicadas no passo 3 do estudo da Lógica. Concluindo o estudo da Lógica Proposicional, o Capítulo 8 considera os métodos de dedução tableaux semânticos e resolução na Lógica Proposicional, que são mais adequados à implementação em computadores.

Na segunda parte do livro tem-se uma seqüência de passos análoga àquela apresentada até o Capítulo 8, só que neste caso é considerada a Lógica de Predicados. O Capítulo 9 apresenta a linguagem da Lógica de Predicados, considerando apenas os elementos sintáticos. A semântica e os mecanismos que verificam fórmulas válidas na Lógica de Predicados são considerados nos Capítulos 10 e 11. O Capítulo 12 apresenta uma extensão do sistema de dedução axiomática estudado no Capítulo 7, considerando conceitos da Lógica de Predicados. Nos Capítulos 13 e 14 são apresentados os sistemas de dedução tableaux semânticos e resolução na Lógica de Predicados. O último capítulo considera os métodos de dedução utilizados em programação lógica, que são casos particulares da resolução na Lógica de Predicados.

Este livro pode ser utilizado como texto básico em diversas disciplinas de Lógica. Uma disciplina de dois semestres para alunos do início da graduação pode considerar até o Capítulo 8 no primeiro semestre e o restante do livro no segundo semestre. Em um curso elementar, demonstrações sobre completude e correção podem ser omitidas. Neste caso, são consideradas apenas demonstrações elementares que utilizam a indução finita. As demonstrações sobre equivalência de diferentes tipos de indução finita, por exemplo, são omitidas. Nos dois casos, é necessário enfatizar os exercícios, que são fundamentais para o entendimento dos conceitos apresentados. O material deste livro também pode ser utilizado em uma disciplina semestral de final de graduação, que apresentaria toda a Lógica Proposicional e de Predicados. Neste caso, talvez o tempo não seja suficiente para a apresentação de todos os conceitos, definições e soluções de exercícios em sala de aula. Uma boa parte de trabalho deve ser proposta aos alunos. Em uma leitura rápida, apenas considerando os conceitos fundamentais da Lógica, alguns capítulos como 5, 6, 11, 12 e 15 podem até ser omitidos, sem se comprometer, por isso, o entendimento do resto do livro.

Em disciplinas de pós-graduação este livro pode ser utilizado como referência para a introdução dos conceitos. Nesse caso é recomendável complementar o estudo com outros livros que tratam de resultados e demonstrações que também são fundamentais na Lógica e que não são consideradas com profundidade neste livro.

Finalmente, este livro pode ser utilizado não apenas por alunos de Ciência da Computação, mas por todos aqueles que se interessam pelo conhecimento da Lógica, como filósofos, matemáticos, físicos, engenheiros, advogados etc.

Agradeço aos meus alunos de Ciência da Computação da Universidade Federal de Uberlândia, aproximadamente 900, que nos últimos anos utilizaram este livro e

deram sugestões para o seu aprimoramento. O pessoal da Faculdade de Computação também deve ser lembrado. A minha família é a lógica que fundamenta todo este trabalho servindo como inspiração. João Paulo e Tiago certamente ainda não compreendem o conteúdo deste livro mas ajudaram. Meu tio sempre foi um padrão para o meu comportamento. Como reconhecimento, os nomes de vários alunos, amigos e colegas aparecem nos exercícios.

As correções e sugestões para o aprimoramento deste texto são **muito**, mas **muito** bem-vindas. O autor disponibiliza aos professores material para apresentação do conteúdo deste livro em sala de aula. Entre em contato: nunes@ufu.br.

JOÃO NUNES DE SOUZA
Uberlândia, agosto de 2002

Sumário

PARTE 1
LÓGICA PROPOSICIONAL

CAPÍTULO 1 *A linguagem da Lógica Proposicional* 3

Introdução 3
Alfabeto 4
Fórmulas 4
Exercícios 8
Sugestões e soluções de exercícios selecionados 9

CAPÍTULO 2 *A semântica da Lógica Proposicional* 11

Introdução 11
Interpretação 12
Interpretação de Fórmulas 13
Exercícios 20
Sugestões e soluções de exercícios selecionados 24

CAPÍTULO 3 *Propriedades semânticas da Lógica Proposicional* 26

Introdução 26
Propriedades Semânticas 26
Relações entre as Propriedades Semânticas 32
Equivalências 36
Exercícios 40
Sugestões e soluções de exercícios selecionados 44

CAPÍTULO 4 *Métodos para determinação da validade de fórmulas da Lógica Proposicional* 47

Introdução 47
Método da Tabela Verdade 47
Método da Árvore Semântica 49
Método da Negação ou Absurdo 51
Exercícios 55
Sugestões e soluções de exercícios selecionados 61

CAPÍTULO 5 *O princípio da indução finita na Lógica* 63
Introdução 63
Condições Necessárias e Suficientes 63
Um Paradigma que Descreve o Princípio da Indução 66
A Primeira Forma do Princípio da Indução Finita 67
A Segunda Forma do Princípio da Indução Finita 69
O Princípio da Indução na Lógica 71
Exercícios 75
Sugestões e soluções de exercícios selecionados 77

CAPÍTULO 6 *Relações semânticas entre os conectivos da Lógica Proposicional* 79
Introdução 79
Conjuntos de Conectivos Completos 79
Exercícios 91
Sugestões e soluções de exercícios selecionados 93

CAPÍTULO 7 *Um sistema axiomático e um sistema de dedução natural na Lógica Proposicional* 95
Introdução 95
O Sistema Axiomático Pa 96
Conseqüência Lógica em Pa 98
Completude do Sistema Axiomático Pa 109
O Sistema de Dedução Natural Na 117
Conseqüência Lógica em Na 119
Completude do Sistema de Dedução Natural Na 126
Exercícios 127
Sugestões e soluções de exercícios selecionados 128

CAPÍTULO 8 *Tableaux semânticos e resolução na Lógica Proposicional* 131
Introdução 131
Tableaux Semânticos na Lógica Proposicional 131
Conseqüência Lógica em Tableaux Semânticos 136
Resolução na Lógica Proposicional 144
Conseqüência Lógica na Resolução 148
Exercícios 153
Sugestões e soluções de exercícios selecionados 157

PARTE 2
LÓGICA DE PREDICADOS

CAPÍTULO 9 *A linguagem da Lógica de Predicados* 163
Introdução 163
Alfabeto 164
Elementos Básicos da Linguagem 165
Fórmulas 167
O Princípio da Indução na Lógica de Predicados 172
Exercícios 176
Sugestões e soluções de exercícios selecionados 177

CAPÍTULO 10 *A semântica da Lógica de Predicados* 179
Introdução 179
Interpretação das Variáveis, Funções e Predicados 180
Regras Semânticas para Interpretação de Fórmulas sem Quantificadores 182
Regras Semânticas para Interpretação de Fórmulas com Quantificadores 184
Exercícios 195
Sugestões e soluções de exercícios selecionados 198

CAPÍTULO 11 *Propriedades semânticas da Lógica de Predicados* 201
Introdução 201
Propriedades Semânticas 201
Satisfatibilidade de Fórmulas 201
Validade de fórmulas 203
Implicações e Equivalências entre Fórmulas 209
Exercícios 212
Sugestões e soluções de exercícios selecionados 215

CAPÍTULO 12 *Um sistema axiomático na Lógica de Predicados* 220
Introdução 220
O Sistema Axiomático Par 220
Conseqüência Lógica em Par 224
Completude do Sistema Axiomático Par 230
Exercícios 231
Sugestões e soluções de exercícios selecionados 231

CAPÍTULO 13 *Tableaux semânticos na Lógica de Predicados* 233
Introdução 233
Tableaux Semânticos na Lógica de Predicados 233
Conseqüência Lógica em Tableaux Semânticos 236

Exercícios 242
Sugestões e soluções de exercícios selecionados. 245

CAPÍTULO 14 *Resolução na Lógica de Predicados* 248
Introdução. 248
Forma Prenex 249
Skolemização. 254
Algoritmo da Unificação 258
Resolução na Lógica de Predicados. 265
Conseqüência Lógica na Resolução 268
Exercícios 278
Sugestões e soluções de exercícios selecionados. 283

CAPÍTULO 15 *Programação Lógica* 286
Introdução. 286
Sintaxe da Programação Lógica. 286
Resolução-SLD 289
Procedimentos de Refutação-SLD 295
Exercícios 300
Sugestões e soluções de exercícios selecionados. 301

Bibliografia 304

Índice 307

PARTE 1

Lógica Proposicional

CAPÍTULO 1

A linguagem da Lógica Proposicional

Introdução

Este capítulo inicia o estudo da Lógica Proposicional. O estudo desta lógica e também da Lógica de Predicados, considerada na segunda parte deste livro, segue fundamentalmente os três passos básicos.

1) Especificação de uma linguagem, a partir da qual o conhecimento é representado. Esta representação considera os conceitos de sintaxe e semântica associados à linguagem.
2) Estudo de métodos que produzam ou verifiquem as fórmulas ou argumentos válidos. A verificação do conceito semântico de validade de expressões sintáticas da linguagem é um exemplo deste estudo.
3) Definição de sistemas de dedução formal onde são consideradas as noções de prova e conseqüência lógica. A noção de prova estabelece formas para a derivação de novos argumentos a partir daqueles representados previamente, o que também define a noção de conseqüência lógica.

Neste capítulo são analisados os elementos fundamentais da sintaxe da linguagem da Lógica Proposicional. Esta análise corresponde ao início do estudo do item 1 dos três passos básicos do estudo da lógica. Os capítulos posteriores tratam da continuidade desta análise, considerando os outros passos.

A definição da linguagem da Lógica Proposicional é semelhante à definição de outras linguagens, como por exemplo, a linguagem da língua portuguesa. O alfabeto, que é constituído pelos símbolos que formam as palavras da linguagem, é definido inicialmente. No caso da língua portuguesa ele é formado pelo conjunto de letras {a, b, ..., z, A, B, ..., Z}. Em seguida, as palavras da linguagem são definidas. As palavras são formadas pela concatenação de letras do alfabeto. Entretanto, não é qualquer concatenação de letras que forma uma palavra da linguagem. A concatenação das letras "d" e "e" forma a palavra: "de", que pertence à linguagem da língua portuguesa. Por outro lado, a concatenação das letras "e" e "d", cujo resultado é

"ed" não forma uma palavra desta linguagem. A definição da linguagem da Lógica Proposicional segue estes passos. Inicialmente, o alfabeto da linguagem é considerado e posteriormente os elementos que equivalem às palavras. Na linguagem da Lógica Proposicional, o equivalente a uma palavra é uma fórmula.

Alfabeto

O alfabeto da linguagem da Lógica Proposicional é definido pelo conjunto de símbolos descritos a seguir.

Definição (alfabeto). O alfabeto da Lógica Proposicional é constituído por:

- Símbolos de pontuação: (,).
- Símbolos de verdade: *true*, *false*.
- Símbolos proposicionais: P, Q, R, S, P_1, Q_1, R_1, S_1, P_2, Q_2, ...
- Conectivos proposicionais: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

Observe que o alfabeto da linguagem da Lógica Proposicional é constituído de infinitos símbolos. Isto não ocorre no alfabeto da língua portuguesa. O alfabeto acima é também dividido em quatro classes de símbolos.

Os símbolos para pontuação (e), que são diferentes daqueles utilizados no alfabeto da língua portuguesa.

Os símbolos de verdade são as palavras da língua inglesa *true* e *false*, que no presente contexto são consideradas apenas como símbolos. Há livros onde tais símbolos são representados de forma diferente.

Os conectivos proposicionais são símbolos utilizados freqüentemente na matemática e possuem as seguintes denominações. O símbolo $\neg$ é denominado por "não", $\vee$ por "ou", $\wedge$ por "e", $\rightarrow$ por "se então" ou "implica" e o símbolo $\leftrightarrow$ é denominado por "se somente se", "iff" ou "bi-implicação".

A razão da escolha dos símbolos *true*, *false* e dos conectivos proposicionais se justifica a partir de seus significados semânticos, conforme análise feita a partir do Capítulo 2.

Fórmulas

O conjunto das fórmulas da Lógica Proposicional, que são formadas pela concatenação de símbolos do alfabeto, é definido a seguir. Como ocorre na língua portuguesa, não é qualquer concatenação de símbolos que é uma fórmula.

Definição (fórmula). As fórmulas da linguagem da Lógica Proposicional são construídas a partir dos símbolos do alfabeto conforme as regras a seguir.

- Todo símbolo de verdade é uma fórmula.
- Todo símbolo proposicional é uma fórmula.
- Se H é uma fórmula então ($\neg$H), a negação de H, é uma fórmula.

- Se H e G são fórmulas então $(H \vee G)$ é uma fórmula. Esta fórmula é a disjunção das fórmulas H e G.
- Se H e G são fórmulas então $(H \wedge G)$ é uma fórmula. Esta fórmula é a conjunção das fórmulas H e G.
- Se H e G são fórmulas então $(H \rightarrow G)$ é uma fórmula. Neste caso, H é o antecedente e G o conseqüente da fórmula $(H \rightarrow G)$.
- Se H e G são fórmulas então $(H \leftrightarrow G)$ é uma fórmula. Neste caso, H é o lado esquerdo e G o lado direito da fórmula $(H \leftrightarrow G)$.

Na definição acima, cada item define uma regra para a construção de fórmulas a partir de fórmulas mais simples. As fórmulas mais elementares são consideradas nos dois primeiros itens. Elas são os símbolos de verdade e proposicionais. Em seguida, utilizando as outras regras, é possível obter um conjunto infinito de fórmulas a partir daquelas mais elementares. Além disso, na formação das fórmulas, os símbolos de pontuação são utilizados.

Exemplo (construção de fórmulas). A definição anterior considera que os símbolos P, Q e *true* são fórmulas. A partir das fórmulas P e Q, obtém-se a fórmula $(P \vee Q)$. Utilizando as fórmulas $(P \vee Q)$ e *true*, obtém-se a fórmula:

$$((P \vee Q) \rightarrow \mathit{true}).$$

Este raciocínio segue indefinidamente e infinitas fórmulas podem ser obtidas. Novamente, ocorre outra diferença entre a linguagem da Lógica Proposicional e a linguagem da língua portuguesa onde há um número finito de palavras. Além disso, na língua portuguesa não existe um método para a obtenção das palavras da linguagem.

Exemplo (fórmulas mal formadas). As concatenações dos símbolos a seguir não constituem fórmulas. Neste caso, não é possível obtê-las a partir das regras da definição anterior

$$PR, \quad (R\ \mathit{true} \leftrightarrow) \quad \text{e} \quad (\mathit{true} \rightarrow \leftrightarrow (R\ \mathit{true} \rightarrow)).$$

Na língua portuguesa é freqüente a omissão de símbolos de pontuação, o que nem sempre altera a compreensão dos significados das sentenças. Algo análogo também é considerado na Lógica Proposicional.

Notação. No que se segue, os parênteses ou símbolos de pontuação das fórmulas são omitidos quando não há problemas sobre a interpretação das fórmulas. Além disso, as fórmulas podem ser escritas utilizando várias linhas para uma melhor leitura. Assim, a fórmula

$$(((P \vee R) \rightarrow \mathit{true}) \leftrightarrow (Q \wedge S))$$

pode ser reescrita como

$$\begin{array}{c} (P \vee R) \rightarrow \mathit{true} \\ \leftrightarrow \\ Q \wedge S \end{array}$$

ou ainda como

$$((P \vee R) \rightarrow \mathit{true}) \leftrightarrow (Q \wedge S).$$

Uma outra forma de simplificar a escrita das fórmulas é considerar a ordem de precedência dos conectivos. Como na aritmética, há uma precedência entre os conectivos proposicionais, o que possibilita a eliminação de símbolos de pontuação das fórmulas. Na aritmética, a expressão

$$2 + 4 \times 5$$

equivale a

$$(2 + (4 \times 5)).$$

Isto ocorre porque a multiplicação tem precedência sobre a adição. Neste caso, a multiplicação é executada inicialmente. Isto significa que, ao colocar os parênteses, eles são colocados inicialmente perto da multiplicação. Na aritmética, há também operações sem relação de precedência como a multiplicação e a divisão. A expressão

$$4 \times 6 \div 3$$

tem duas interpretações:

$$((4 \times 6) \div 3) \text{ ou } (4 \times (6 \div 3)).$$

A ordem de precedência dos conectivos proposicionais é definida a seguir. A utilização da ordem de precedência permite a simplificação das fórmulas com a eliminação de símbolos de pontuação.

Definição (ordem de precedência). Na Lógica Proposicional, a ordem de precedência dos conectivos proposicionais é definida por:

- maior precedência: $\neg$
- precedência intermediária: $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
- menor precedência: $\wedge$, $\vee$

O conectivo $\neg$ tem precedência sobre os outros. Isto significa que na ausência de símbolos de pontuação, ele deve ser considerado primeiro. Como na aritmética, há conectivos proposicionais que não possuem relação de precedência. Os conectivos $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ não possuem precedência de um sobre o outro e a fórmula

$$P \rightarrow Q \leftrightarrow R$$

possui duas interpretações

$$((P \rightarrow Q) \leftrightarrow R) \text{ ou } (P \rightarrow (Q \leftrightarrow R)).$$

Neste caso, várias linhas são utilizadas para eliminar ambigüidades. A fórmula $((P \rightarrow Q) \leftrightarrow R)$ pode ser escrita como

$$\begin{array}{c} P \rightarrow Q \\ \leftrightarrow \\ R \end{array}$$

Observe que não se está considerando o significado das fórmulas. Neste ponto, cada fórmula é vista apenas como uma concatenação de símbolos. Isto equivale a apresentar a palavra da língua portuguesa "saudade" a uma pessoa que não sabe português. A pessoa sabe que "saudade" pertence à língua portuguesa porque está no dicionário. Entretanto, é necessário mais informações para que ela saiba o significado desta palavra. As fórmulas estão sendo apresentadas apenas sintaticamente e não se está considerando ainda seu significado semântico.

Alguns elementos sintáticos definidos a partir das fórmulas da Lógica Proposicional, como o comprimento e as subfórmulas, são considerados a seguir. O comprimento de uma fórmula da Lógica Proposicional é um conceito freqüentemente utilizado em demonstrações que utilizam indução finita, como será visto a partir do Capítulo 5.

Definição (comprimento de uma fórmula). O comprimento de uma fórmula H da Lógica Proposicional, denotado por comp[H], é definido como se segue.

- Se H é um símbolo proposicional ou de verdade então comp[H] = 1
- Se H e G são fórmulas da Lógica Proposicional, então

$$\begin{aligned} \text{comp}[\neg H] &= \text{comp}[H] + 1 \\ \text{comp}[H \vee G] &= \text{comp}[H] + \text{comp}[G] + 1 \\ \text{comp}[H \wedge G] &= \text{comp}[H] + \text{comp}[G] + 1 \\ \text{comp}[H \rightarrow G] &= \text{comp}[H] + \text{comp}[G] + 1 \\ \text{comp}[H \leftrightarrow G] &= \text{comp}[H] + \text{comp}[G] + 1 \end{aligned}$$

Na definição acima, os símbolos de pontuação não são considerados no cálculo do comprimento. O comprimento de uma fórmula é obtido contando apenas os símbolos proposicionais, de verdade e os conectivos proposicionais.

Exemplo (comprimento de uma fórmula). As fórmulas

$$(P \rightarrow Q) \text{ e } ((P \wedge Q) \leftrightarrow R)$$

têm comprimentos iguais a 3 e 5, respectivamente.

Definição (subfórmula). Seja H uma fórmula da Lógica Proposicional. Uma subfórmula de H é definida por.

- H é uma subfórmula de H.
- Se H = $(\neg G)$, então G é uma subfórmula de H.
- Se H é uma fórmula do tipo: $(G \vee E)$, $(G \wedge E)$, $(G \rightarrow E)$ ou $(G \leftrightarrow E)$, então G e E são subfórmulas de H.
- Se G é subfórmula de H, então toda subfórmula de G é subfórmula de H.

Informalmente, uma subfórmula de H é um pedaço de H que é fórmula.

Exercícios

1) Considere as concatenações de símbolos do alfabeto da Lógica Proposicional dadas a seguir. Identifique aquelas que são fórmulas da Lógica Proposicional. Considere a forma simplificada de representação de fórmulas, onde os símbolos de pontuação podem ser omitidos.
   a) $(PQ \vee \mathit{true})$
   b) $(P \wedge Q) \rightarrow ((Q \leftrightarrow P) \vee \neg\neg R)$
   c) $\neg\neg P$
   d) $\vee Q$
   e) $(P \wedge Q) \rightarrow ((Q \leftrightarrow \neg R))$

2) Responda as questões a seguir, justificando suas respostas.
   a) Existe fórmula sem símbolo de pontuação?
   b) Quantos tipos de símbolos possui o alfabeto da Lógica Proposicional? Quais são estes símbolos?
   c) Existe fórmula da Lógica Proposicional com algum conectivo, mas sem símbolo de pontuação?

3) Determine o comprimento e as subfórmulas das fórmulas a seguir.
   a) $((\neg\neg P \vee Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)) \wedge \mathit{true}$
   b) $P \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)))$
   c) $((P \rightarrow \neg P) \leftrightarrow \neg P) \vee Q$
   d) $\neg(P \rightarrow \neg P)$

4) Elimine o maior número possível de símbolos de pontuação das fórmulas a seguir, mantendo a representação da fórmula original.
   a) $((\neg(\neg P)) \leftrightarrow ((\neg((\neg(\neg(P \vee Q))) \rightarrow R)) \wedge P))$
   b) $(\neg P \rightarrow (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg\neg R \vee \neg P))$
   c) $((P \vee Q) \rightarrow (P \rightarrow (\neg Q)))$

5) Considere as concatenações de símbolos a seguir. A partir da introdução de símbolos de pontuação, identifique quais fórmulas da Lógica Proposicional é possível obter.
   a) $P \vee \neg Q \rightarrow R \leftrightarrow \neg R$
   b) $Q \rightarrow \neg P \wedge Q$
   c) $\neg P \vee Q \leftrightarrow Q$
   d) $\neg\neg P \rightarrow Q \leftrightarrow P \wedge P \rightarrow \neg\neg R$

6) Conforme a definição de fórmula, os conectivos proposicionais diferentes de $\neg$ devem ser escritos na forma infixa. Isto é, o conectivo $\wedge$ por exemplo, deve ser escrito entre dois símbolos proposicionais ou duas fórmulas. A definição de fórmula na Lógica Proposicional poderia ser modificada, possibilitando escrever os conectivos na notação prefixa, conforme indicado pelas correspondências a seguir.

   $(\neg P)$ corresponde à $\neg P$ na notação prefixa. Neste caso, apenas os símbolos de pontuação são omitidos.

   $(P \wedge Q)$ corresponde a $\wedge PQ$. Neste caso, o conectivo $\wedge$ é colocado no início da fórmula e os símbolos de pontuação são omitidos.

   $(P \vee Q)$ corresponde a $\vee PQ$,

   $(P \rightarrow Q)$ corresponde a $\rightarrow PQ$ e

   $(P \leftrightarrow Q)$ corresponde a $\leftrightarrow PQ$.

A utilização dos conectivos na forma prefixa determina uma notação denominada notação polonesa.

a) Escreva as fórmulas dos exercícios 3 e 4 utilizando a notação polonesa.

b) Determine quais seqüências de símbolos, indicadas a seguir, são fórmulas da Lógica Proposicional que utilizam a notação polonesa. No caso em que a seqüência de símbolos é uma fórmula, reescreva-a utilizando a notação convencional.

$\vee \rightarrow PQ \leftrightarrow R \rightarrow \vee PQ \neg S$

$\rightarrow\leftrightarrow PQ \vee \rightarrow PQ \rightarrow \neg RR$

$\rightarrow \neg P \neg QR \wedge \wedge PQ \vee \neg R \neg P$

$\leftrightarrow \rightarrow \neg P \vee QR \leftrightarrow \wedge PQ \vee \neg \neg R \neg P$

7) Responda, justificando sua resposta.

a) É possível encontrar uma fórmula H, da Lógica Proposicional, que corresponda a duas fórmulas diferentes escrita na notação polonesa?

b) É possível encontrar uma fórmula H escrita na notação polonesa, que corresponda a duas fórmulas diferentes da Lógica Proposicional?

8) Faça os exercícios 6 e 7 considerando a notação pós-fixa, indicada pelas correspondências.

$(\neg P)$ corresponde a $P\neg$,

$(P \wedge Q)$ corresponde a $PQ\wedge$,

$(P \vee Q)$ corresponde a $PQ\vee$,

$(P \rightarrow Q)$ corresponde a $PQ\rightarrow$ e

$(P \leftrightarrow Q)$ corresponde a $PQ\leftrightarrow$.

9) Qual a paridade do número de símbolos de pontuação de uma fórmula da Lógica Proposicional?

10) Seja H uma fórmula que não contém o conectivo $\neg$.

a) Qual a paridade de comp[H]?

b) Qual a relação entre comp[H] e o número de conectivos de H?

Sugestões e soluções de exercícios selecionados

1) a) Não é fórmula.

b) É fórmula.

c) É fórmula.

d) Não é fórmula.

e) É fórmula.

2) a) Sim, por exemplo, as fórmulas P, *true*, etc.

c) Não.

3) a) 11

4) a) $\neg\neg P \leftrightarrow (\neg(\neg\neg(P \vee Q) \rightarrow R) \wedge P)$

5) c) $((\neg P) \vee (Q \leftrightarrow Q))$

6) a) A fórmula do item a) do exercício 4 é escrita como:

$\leftrightarrow\wedge\neg\rightarrow\neg\neg\vee PQRP\neg\neg P$

b) $\leftrightarrow \rightarrow \neg P \vee QR \leftrightarrow \wedge PQ \vee \neg \neg R \neg P$

7) a) Não
   b) Não

9) Par

10) a) comp[H] é um número ímpar.
    b) comp[H] é o dobro do número de conectivos de H, mais um.

CAPÍTULO 2

A semântica da Lógica Proposicional

Introdução

Um conceito fundamental em Lógica e também em Ciência da Computação é aquele que diferencia os objetos do seu significado. Este capítulo considera o início do estudo da semântica da Lógica Proposicional, onde se associa a cada objeto sintático um significado. Assim, quando se escreve a fórmula $(P \wedge Q)$, dependendo dos significados de P e Q esta fórmula pode ser verdadeira ou falsa, tendo diferentes significados semânticos. Considere, por exemplo, que o símbolo sintático P representa

"Está chovendo"

e Q representa

"A rua está molhada".

Além disso, suponha que o significado semântico do conectivo proposicional $\wedge$ seja o da inclusão dos fatos, isto é, para que a fórmula $(P \wedge Q)$ seja verdadeira, os significados de P e Q devem ser verdadeiros. Considerando isso, a fórmula $(P \wedge Q)$ pode ou não ser verdadeira. Isto depende das condições climáticas atuais, que determinam se a interpretação de P é verdadeira ou falsa, o que é indicado por

$$I[P] = T \text{ ou } I[P] = F$$

e também se

$$I[Q] = T \text{ ou } I[Q] = F.$$

No caso em que $I[P] = T$, $I[Q] = F$ e $\wedge$ é interpretado como a conjunção dos fatos, então

$$I[(P \wedge Q)] = F.$$

A representação acima pode ser modificada e neste caso outros resultados são obtidos. Considere, por exemplo:

- O símbolo P representa "Há um rapaz inteligente no curso de Ciência da Computação".
- O símbolo Q representa "NÃO há rapaz inteligente no curso de Ciência da Computação".
- O símbolo $\vee$ significa "OU".
- O símbolo $\wedge$ significa "E".

Neste caso, a fórmula $(P \wedge Q)$ é interpretada como falsa e a fórmula $(P \vee Q)$ como verdadeira. Os símbolos sintáticos definem as fórmulas, que neste caso estão associados a significados semânticos. Neste contexto, cada fórmula sintática está associada a um significado e o "mundo lógico" é dividido em duas partes: o mundo sintático e o mundo semântico. O primeiro é constituído pelos símbolos do alfabeto e as fórmulas consideradas apenas como concatenações de símbolos que representam afirmações. O mundo semântico é onde se define o significado dos símbolos e fórmulas do mundo sintático. Esta visão é importante em Ciência da Computação, pois o computador é uma máquina estritamente sintática, sendo necessário dar um significado ou semântica aos símbolos por ela manipulados. Além disso, o ato de programar pode ser considerado como a tradução de um conhecimento semântico para um programa sintático que é manipulado pela máquina.

Este capítulo considera a análise da semântica das fórmulas da Lógica Proposicional. Isto é feito também de forma análoga ao que ocorre na língua portuguesa. A palavra "rede", por exemplo, pode ter vários significados: o objeto que pescadores utilizam para pescar ou um conjunto de computadores interligados. Dependendo da pessoa ou contexto, uma ou outra interpretação pode ser considerada. Isto significa que a concatenação sintática das letras "r", "e", "d", "e", nesta ordem, é diferente de seus possíveis significados. A palavra "rede" é apenas um objeto sintático diferente de sua interpretação. O estudo da semântica das fórmulas da Lógica Proposicional é considerado a seguir.

Interpretação

O significado ou semântica dos elementos sintáticos da linguagem da Lógica Proposicional clássica é determinado por uma função I denominada interpretação. Esta função associa a cada fórmula da Lógica Proposicional um valor de verdade "verdadeiro" ou "falso", que é representado, respectivamente, por T e F. Isso significa que, na Lógica Proposicional clássica, as fórmulas possuem apenas dois tipos de significado. Devido a esse fato, ela é denominada lógica bivalente. Ela possui apenas dois estados semânticos, o "verdadeiro" e o "falso". Na Lógica Proposicional é possível representar fatos como:

"Meu tio mora em São Paulo"

que pode ser interpretado como verdadeiro ou falso. Entretanto, há fatos cujo resultado da interpretação não é nem verdadeiro e nem falso. Considere, por exemplo, a asserção:

"Esta sentença é falsa".

Neste caso, o resultado da interpretação da sentença não é verdadeiro e nem falso. Isto significa que não é possível representar este tipo de conhecimento na Lógica Proposicional. Fatos como este são representados em outros tipos de lógica.

Observe também que na língua portuguesa é possível ter mais de dois significados diferentes para a mesma palavra, o que é diferente do contexto da Lógica Proposicional, onde os possíveis significados das fórmulas são T e F.

A definição da interpretação dos símbolos do alfabeto da Lógica Proposicional é considerada a seguir. Esta definição utiliza o conceito de função binária.

Definição (função binária). Uma função é binária se seu contradomínio possui apenas dois elementos.

Definição (interpretação). Uma interpretação I, na Lógica Proposicional, é uma função binária tal que,

- o domínio de I é constituído pelo conjunto das fórmulas da Lógica Proposicional,
- o contradomínio de I é o conjunto {T,F},
- o valor da interpretação I, tendo como argumentos os símbolos de verdade é dado por I[*true*] = T e I[*false*] = F e
- dado um símbolo proposicional P, então I[P] $\in$ {T,F}.

Pela definição de função, a interpretação I está necessariamente definida em todos os elementos de seu domínio. Isto significa que, dado um símbolo proposicional P, então ocorre uma das possibilidades I[P] = T ou I[P] = F.

Os significados dos símbolos de verdade e proposicionais são iguais a T ou F. Isto é uma limitação pois nem tudo pode ser interpretado como sendo verdadeiro ou falso. Há exercícios, no final deste capítulo, que consideram afirmações que não são verdadeiras e nem falsas. Isto significa que tais afirmações não podem ser representadas na Lógica Proposicional clássica.

O estudo e aplicação de outros tipos de lógica onde são consideradas outras formas de semântica é uma importante área de pesquisa em Ciência da Computação.

Finalmente, observe que a interpretação dos símbolos de verdade é fixa. Isto é, para qualquer interpretação I, I[*true*]=T e I[*false*]=F ou seja, todas as interpretações têm a mesma opinião sobre os significados dos símbolos de verdade *true* e *false*.

Interpretação de Fórmulas

Na seção anterior foi analisado como se determina o significado dos símbolos de verdade e proposicionais da Lógica Proposicional. As regras para a interpretação das fórmulas são definidas a seguir. Observe que as fórmulas são formadas pela concatenação de símbolos do alfabeto. Logo, a definição da interpretação das fórmulas é feita a partir da definição da interpretação desses símbolos. A interpretação das

fórmulas é feita a partir de um conjunto de regras semânticas, obtidas a partir dos significados semânticos dos símbolos proposicionais, de verdade e dos conectivos proposicionais.

Os procedimentos para interpretar as fórmulas da Lógica Proposicional a partir dos elementos que as constituem são considerados a seguir.

Definição (interpretação de fórmulas). Dadas uma fórmula E e uma interpretação I, então o significado de E, indicado por I[E], é determinado pelas regras:

- Se E = P, onde P é um símbolo proposicional, então I[E] = I[P] e I[P] $\in$ {T, F}.
- Se E = *true*, então I[E] = I[*true*] = T. Se E = *false*, então I[E] = I[*false*] = F.
- Seja H uma fórmula. Se E = $\neg$H, então

  I[E] = I[$\neg$H] = T se I[H] = F e
  I[E] = I[$\neg$H] = F se I[H] = T.
- Sejam H e G duas fórmulas. Se E = (H $\vee$ G), então

  I[E] = I[H $\vee$ G] = T se I[H] = T e/ou I[G] = T e
  I[E] = I[H $\vee$ G] = F se I[H] = F e I[G] = F.
- Sejam H e G duas fórmulas. Se E = (H $\wedge$ G), então

  I[E] = I[H $\wedge$ G] = T se I[H] = T e I[G] = T e
  I[E] = I[H $\wedge$ G] = F se I[H] = F e/ou I[G] = F.
- Sejam H e G duas fórmulas. Se E = (H $\rightarrow$ G), então

  I[E] = I[H $\rightarrow$ G] = T se I[H] = F e/ou I[G] = T e
  I[E] = I[H $\rightarrow$ G] = F se I[H] = T e I[G] = F.
- Sejam H e G duas fórmulas. Se E = (H $\leftrightarrow$ G), então

  I[E] = I[H $\leftrightarrow$ G] = T se I[H] = I[G] e
  I[E] = I[H $\leftrightarrow$ G] = F se I[H] $\neq$ I[G].

Conforme as regras semânticas, que determinam a interpretação das fórmulas, o valor de I[$\neg$H] é o oposto de I[H]. O valor de I[H $\vee$ G] é igual a T, se e somente se

$$I[H] = T \text{ e/ou } I[G] = T.$$

Neste caso, I[H $\vee$ G]=T se as interpretações de H e de G são iguais a T ou apenas uma delas igual a T. Por outro lado, o valor de I[H $\wedge$ G] é igual a T, somente quando

$$I[H]=T \text{ e } I[G]=T.$$

Para determinar o valor de I[H $\leftrightarrow$ G], basta checar se

$$I[H] = I[G].$$

Em caso afirmativo, o resultado é I[H $\leftrightarrow$ G] = T, caso contrário I[H $\leftrightarrow$ G] = F.

As regras semânticas determinam, por exemplo, o significado de $(H \wedge G)$ a partir de $I[H]$ e $I[G]$ e não $I[\wedge]$, que seria o significado do conectivo $\wedge$. A definição determina o significado da fórmula $(H \wedge G)$.

Na Lógica Proposicional não se tem o significado dos conectivos considerados isoladamente. Entretanto, para simplificar, o significado de $(H \wedge G)$, é denotado como o significado de $\wedge$. As regras semânticas também são representadas por tabelas, denominadas tabelas verdade. Estas tabelas são associadas aos conectivos proposicionais e às fórmulas da Lógica Proposicional. No último caso, as tabelas são construídas a partir das tabelas associadas aos conectivos proposicionais.

As tabelas verdade associadas aos conectivos proposicionais são definidas pela tabela a seguir. Neste caso, H e G são fórmulas da Lógica Proposicional. A tabela indica, por exemplo, que dada uma interpretação I, se $I[H] = T$ e $I[G] = F$, então $I[\neg H] = F$, $I[H \vee G] = T$ e assim por diante, como é indicado na segunda linha da tabela.

Tabela 1 Tabela verdade associada a conectivos.

H	G	$\neg H$	$H \vee G$	$H \wedge G$	$H \rightarrow G$	$H \leftrightarrow G$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	T	F	T	F
F	F	T	F	F	T	T

Dada uma fórmula H da Lógica Proposicional, as tabelas verdade são utilizadas na construção de uma tabela verdade associada a H. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo (tabela verdade associada a uma fórmula). Considere a fórmula

$$H = ((\neg P) \vee Q) \rightarrow (Q \wedge P).$$

A tabela verdade associada a H é dada por:

Tabela 2 Tabela verdade associada a fórmulas.

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$Q \wedge P$	H
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	F	F
F	F	T	T	F	F

Observe que a coluna da fórmula H é obtida a partir das colunas intermediárias

$$\neg P,\ \neg P \vee Q \text{ e } Q \wedge P.$$

A definição dos significados dos conectivos $\neg$, $\vee$, $\wedge$, e $\leftrightarrow$ está associada aos significados de: "não", "ou", "e" e "se e somente se", respectivamente. Entretanto, o mesmo não ocorre com o significado do conectivo $\rightarrow$. Uma análise do significado de $\rightarrow$ é considerada a seguir.

A semântica do conectivo $\rightarrow$. Sejam H e G duas fórmulas. A fórmula $(H \rightarrow G)$ possui a seguinte tabela verdade:

Tabela 3 Tabela verdade associada ao conectivo $\rightarrow$.

H	G	$H \rightarrow G$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Esta tabela é obtida a partir da definição do significado do conectivo $\rightarrow$. Conforme a tabela,

$$I[H \rightarrow G] = T \text{ quando } I[H] = T \text{ e } I[G] = T$$

o que é "razoável" pois é verdadeiro que um enunciado verdadeiro implica outro verdadeiro. Neste caso, se as interpretações de H e G são verdadeiras, então a interpretação da fórmula $(H \rightarrow G)$ também é verdadeira. Observe que $I[H \rightarrow G]$ representa a interpretação da fórmula $(H \rightarrow G)$ como um todo. Isto é, o significado de toda a inferência é verdadeiro quando os significados das fórmulas H e G são verdadeiros. Conforme a segunda linha da tabela

$$I[H \rightarrow G] = F \text{ quando } I[H] = T \text{ e } I[G] = F.$$

Neste caso, é falso concluir um enunciado falso a partir de outro verdadeiro. Isto é "intuitivamente" correto pois uma inferência que conclui um falso a partir de um verdadeiro é uma inferência falsa. Suponha que H representa "está chovendo" e que G representa "a rua está molhada". A implicação,

"se está chovendo então a rua está molhada"

é verdadeira pois se H é verdadeira (está chovendo), então necessariamente G é verdadeira (a rua está molhada). Caso ocorresse H verdadeira (está chovendo) e G falsa (a rua não está molhada), então a implicação:

"se está chovendo então a rua está molhada"

seria uma implicação falsa. Neste caso, se um enunciado falso é concluído a partir de outro verdadeiro, então a implicação utilizada deve ser falsa.

A análise das outras linhas da tabela verdade, que definem $I[H \rightarrow G]$, não é tão imediata como as primeiras linhas analisadas acima. Nas linhas 3 e 4

$$I[H \rightarrow G] = T, \text{ dado que } I[H] = F$$

independentemente do valor de I[G]. Isto justifica porque a partir de um enunciado falso é possível concluir qualquer outro tipo de enunciado. Em outras palavras, a partir de um antecedente falso, uma inferência que conclui fatos verdadeiros ou falsos é uma inferência verdadeira.

Uma outra justificativa é a seguinte. Considere a fórmula

$$(P \rightarrow (P \vee Q)).$$

Informalmente, esta fórmula diz que P implica (P ou Q). Como qualquer argumento deve implicar em si mesmo, a fórmula acima deve ser verdadeira independentemente dos significados de P e Q. Neste caso, P deve implicar P mais qualquer outro fato. Assim, na tabela a seguir,

Tabela 4 Tabela verdade associada ao conectivo →.

P	Q	$P \vee Q$	$P \rightarrow (P \vee Q)$
			T
			T
			T
			T

a coluna da fórmula

$$(P \rightarrow (P \vee Q))$$

deve ser uma coluna que possui apenas valores iguais a T. Considere que a Tabela 3, que define o significado de $(H \rightarrow G)$, fosse modificada para:

Tabela 5 Tabela verdade associada ao conectivo →.

H	G	$H \rightarrow G$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Observe a diferença entre a Tabela 5 e a Tabela 3, que define $I[H \rightarrow G]$. Os valores de verdade, que estão na coluna da fórmula $(H \rightarrow G)$ nas duas últimas linhas, foram modificados. Se a semântica da fórmula $(H \rightarrow G)$ fosse definida conforme a tabela anterior e as correspondências a seguir fossem utilizadas $H = P$ e $G = (P \vee Q)$, então a tabela verdade associada à fórmula

$$(P \rightarrow (P \vee Q))$$

seria preenchida como se segue,

Tabela 6 Tabela verdade associada ao conectivo →.

P	Q	P ∨ Q	P → (P ∨ Q)
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	F
F	F	F	F

Logo, o significado da fórmula

$$(P \rightarrow (P \vee Q))$$

não seria verdadeiro, independentemente dos significados de P e Q.

O que está acontecendo? A modificação da definição de I[H → G] da Tabela 3 para a tabela 5 faz com que I[P → (P ∨ Q)] seja igual a F nas linhas 3 e 4 da Tabela 6. Portanto, o correto é considerar a Tabela 3 como definição da semântica do conectivo →. Neste caso, utilizando a Tabela 3 e as correspondências

$$H = P \text{ e } G = (P \vee Q)$$

obtém-se

Tabela 7 Tabela verdade associada ao conectivo →.

P	Q	P ∨ Q	P → (P ∨ Q)
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

que está de acordo com o fato intuitivo de que a fórmula

$$(P \rightarrow (P \vee Q))$$

deve ter um significado semântico verdadeiro independentemente dos significados de P e Q.

Considere uma outra análise da semântica do conectivo →. Suponha

P = "x é um número real maior que 10" e
Q = "x^2 é um número real maior que 100".

Neste caso, I[P → Q]=T pois se I[P]=T, então I[Q]=T. Se é verdade que $x > 10$, então também é verdade que $x^2 > 100$.

Conforme a tabela a seguir (Tabela 8), I[P→Q]=T na primeira linha, na terceira e na quarta. A segunda linha não ocorre pois neste caso I[H → G] = F.

Dado que I[P → Q]=T e I[P]=T, então pela primeira linha da tabela é possível concluir que I[Q]=T. Isto significa que se $x>10$, como I[P → Q]=T, então $x^2 > 100$.

Mas o que ocorre se é falso que $x > 10$ ou seja I[$x > 10$]=F? Neste caso, $x \leq 10$. É possível ter, por exemplo,

$$x = 5 \text{ ou } x = -20.$$

Tabela 8 Tabela verdade associada ao conectivo $\rightarrow$.

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

No caso em que $x = 5$, tem-se $x^2 = 25$. Logo, $x^2 \leq 100$ e $I[x^2 > 100]=F$. Mas no caso em que $x = -20$, tem-se $x^2 = 400$. Logo, $x^2 \geq 100$ e $I[x^2 > 100]=T$. Portanto, se $I[x > 10]=F$, nada se pode concluir a respeito de $I[x^2 > 100]$, mesmo tendo que $I[P \rightarrow Q]=T$. É possível ter $I[x^2 > 100]=T$ ou $I[x^2 > 100]=F$, dependendo do valor de x. Tais casos são expressos na tabela do conectivo $\rightarrow$ na terceira e quarta linhas.

A causalidade e a semântica do conectivo $\rightarrow$. Conforme a tabela do conectivo $\rightarrow$, se $I[G]=T$, então $I[H \rightarrow G]=T$ independente do valor de $I[H]$. Da mesma forma, se $I[H]=F$, então $I[H \rightarrow G]=T$ independente do valor de $I[G]$. Isto significa que o conectivo $\rightarrow$ não expressa a semântica da causalidade. Não é necessária a relação de causa e efeito entre H e G para que se tenha $I[H \rightarrow G]=T$. Suponha por exemplo que

Q = "o sol é redondo"

e que I seja uma interpretação razoável tal que $I[Q]=T$. Neste caso, $I[P \rightarrow Q]=T$ para qualquer enunciado que P esteja representando. Até mesmo o enunciado estranho

P = "Maluf é honesto".

Neste caso $I[P \rightarrow Q]=T$ e não há relação de causa e efeito entre P e Q. Suponha agora

R = "é possível dois objetos diferentes ocuparem o mesmo local no espaço".

Seja I uma interpretação intuitiva tal que $I[R]=F$. Neste caso, $I[R \rightarrow S]=T$ para qualquer enunciado que S esteja representando. Suponha

S = "a lua é redonda".

Neste caso $I[R \rightarrow S]=T$ e também não há relação de causa e efeito entre R e S.

Exemplo (interpretação de uma fórmula). Considere a fórmula

$$H = ((\neg P) \vee (\neg Q)) \rightarrow R$$

e uma interpretação I dada por

$$I[P] = T,\ I[Q] = F,\ I[R] = T,\ I[S] = F.$$

Para determinar o significado semântico de H conforme I, isto é, $I[H]$, considere a tabela

Tabela 9 Tabela verdade associada à fórmula H.

P	Q	R	S	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$	H
T	F	T	F	F	T	T	T

Na tabela acima as interpretações são feitas, passo a passo, utilizando as regras semânticas definidas anteriormente. Inicialmente, são interpretados os símbolos proposicionais, em seguida subfórmulas que ocorrem em H, até que finalmente se obtém a interpretação de H.

Exemplo (interpretação de uma fórmula). Considere as fórmulas

$$E = ((\neg P) \wedge Q) \rightarrow (R \vee P) \text{ e}$$
$$H = (\mathit{false} \rightarrow P)$$

e as interpretações I e J definidas a seguir:

$$I[P] = T,\ I[Q] = F,\ I[R] = T,\ I[P_1] = F,$$
$$J[P] = F,\ J[Q] = T,\ J[R] = F.$$

Neste caso, I interpreta a fórmula E conforme a tabela

Tabela 10 Tabela verdade associada à fórmula E e interpretação I.

P	Q	R	$\neg P$	$\neg P \wedge Q$	$R \vee P$	E
T	F	T	F	F	T	T

A interpretação J interpreta E conforme a tabela

Tabela 11 Tabela verdade associada à fórmula E e interpretação J.

P	Q	R	$\neg P$	$\neg P \wedge Q$	$R \vee P$	E
F	T	F	T	T	F	F

As interpretações I e J interpretam o antecedente da fórmula H como sendo F. Devido a este fato, os resultados I[H] = T e J[H] = T são obtidos. Este fato é geral. Isto é, quando uma interpretação interpreta o antecedente de uma implicação como sendo F, então a implicação é interpretada como sendo T. Isto significa que independentemente dos valores de I[P] e J[P], os resultados I[H] = T e J[H] = T são obtidos. Analogamente, $I[P \rightarrow \mathit{true}] = T$ e $J[P \rightarrow \mathit{true}] = T$.

Exercícios

1) Qual a diferença entre os símbolos?
   a) *true* e T,
   b) *false* e F,

c) $\rightarrow$ e $\Rightarrow$
d) $\leftrightarrow$ e $\Leftrightarrow$

Os símbolos $\Rightarrow$ e $\Leftrightarrow$ são aqueles utilizados freqüentemente em demonstrações na Matemática.

2) Comente, do ponto de vista lógico, a diferença entre sintaxe e semântica.

3) A interpretação do conectivo $\vee$, na Lógica Proposicional, corresponde ao exato significado da palavra "ou"? Justifique sua resposta. Nessa análise, considere, por exemplo, o significado da sentença: "Vou ao teatro OU ao cinema" como sendo verdadeiro. Desse fato, é possível concluir que irei ao teatro e ao cinema ao mesmo tempo?

4) Seja I uma interpretação e a fórmula $H = (P \rightarrow Q)$.
   a) Se $I[H] = T$, o que se pode concluir a respeito de $I[P]$ e $I[Q]$?
   b) Se $I[H] = T$ e $I[P] = T$, o que se pode concluir a respeito de $I[Q]$?
   c) Se $I[Q] = T$, o que se pode concluir a respeito de $I[H]$?
   d) Se $I[H] = T$ e $I[P] = F$, o que se pode concluir a respeito de $I[Q]$?
   e) Se $I[Q] = F$ e $I[P] = T$, o que se pode concluir a respeito de $I[H]$?

5) Considere as fórmulas a seguir:
   a) $(\neg P \vee Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)$
   b) $P \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)))$
   c) $(P \rightarrow \neg Q) \leftrightarrow \neg P$
   d) $(Q \rightarrow \neg P)$
   e) $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow R)$
   f) $(R \wedge \neg P) \leftrightarrow (P \wedge R)$
   g) $(P \rightarrow Q) \rightarrow (((P \wedge Q) \leftrightarrow P) \wedge ((P \vee Q) \leftrightarrow Q))$
   h) $(\mathit{false} \rightarrow Q) \leftrightarrow R$
   i) $\mathit{true} \rightarrow Q$
   j) $(P \rightarrow \mathit{false}) \leftrightarrow R$
   k) $P \rightarrow \mathit{true}$

   - Determine a tabela verdade associada a cada fórmula.
   - Seja I uma interpretação tal que $I[P] = T$, $I[Q] = F$ e $I[R] = F$, o que se pode concluir a respeito do valor de verdade de cada fórmula?
   - Seja J uma interpretação que interpreta todas as fórmulas acima como sendo verdadeiras. Além disso, $J[P] = T$. O que se pode concluir a respeito de $J[Q]$ e $J[R]$, em cada um dos casos?

6) Seja I uma interpretação tal que: $I[P \rightarrow Q] = T$. O que se pode deduzir a respeito dos resultados das interpretações a seguir?
   a) $I[(P \vee R) \rightarrow (Q \vee R)]$
   b) $I[(P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge R)]$
   c) $I[(\neg P \vee Q) \rightarrow (P \vee Q)]$

   Repita este exercício supondo $I[P \rightarrow Q] = F$ $I[P]=T$ e $I[Q]=F$

7) Seja I uma interpretação tal que: $I[P \leftrightarrow Q] = T$. O que se pode deduzir a respeito dos resultados das interpretações a seguir?
   a) $I[\neg P \wedge Q]$ $I[P \leftrightarrow Q]=T$ se $I[P]=I[Q]$ então
   b) $I[P \vee \neg Q]$ $I[P]=T$ e $I[Q]=F$ $T[P]=T$ então $T[Q]=T$ e
   c) $I[Q \rightarrow P]$ $T[P]=F$ então $T[Q]=F$
   d) $I[(P \wedge R) \leftrightarrow (Q \wedge R)]$
   e) $I[(P \vee R) \leftrightarrow (Q \vee R)]$

   Repita este exercício supondo $I[P \leftrightarrow Q] = F$.

8) Seja H a fórmula a seguir e I uma interpretação.

$$H = ((P \rightarrow Q) \rightarrow (((P \wedge Q) \leftrightarrow P) \wedge ((P \vee Q) \leftrightarrow Q))) \rightarrow P$$

a) Se I[P] = F o que se pode concluir a respeito de I[H]? I[H]=F
b) Se I[P] = T o que se pode concluir a respeito de I[H]? I[H]=T

9) Seja H uma fórmula da Lógica Proposicional. Justifique a afirmação a seguir. Cada linha da tabela verdade associada a H corresponde a uma interpretação diferente para H.

10) Escreva as sentenças a seguir utilizando a linguagem da Lógica Proposicional. Utilize símbolos proposicionais para representar sentenças atômicas.
a) Se eu sou feliz, você é infeliz e se você é infeliz, eu não sou feliz.
b) José virá à festa e Maria não gostará ou José não virá à festa e Maria gostará da festa.
c) A novela será exibida, a menos que seja exibido o programa político.
d) Se chover irei para casa, caso contrário, ficarei no escritório.
e) Se Maria é bonita, inteligente e sensível e se Rodrigo ama Maria, então ele é feliz.
f) Se Sr. Oscar é feliz, Sra. Oscar é infeliz e se Sra. Grotta é feliz, Sr. Grotta é infeliz.
g) Maurício virá à festa e Kátia não virá ou Maurício não virá a festa e Kátia ficará infeliz.
h) Irei ao teatro somente se for uma peça de comédia.
i) Se minha namorada vier, irei ao teatro somente se for uma peça de comédia.

11) Caso seja possível, escreva as sentenças a seguir utilizando a linguagem da Lógica Proposicional. Na impossibilidade, justifique.
a) Todo homem é mortal.
b) Possivelmente, irei ao cinema.
c) Fui gordo, hoje sou magro.
d) Existe no curso de Ciência da Computação um aluno admirado por todos.
e) Existe um aluno em minha sala que não gosta de nenhum colega.
f) Existe aluno de Ciência da Computação que é detestado por seus colegas.
g) Necessariamente algum político é desonesto.
h) Amanhã irei ao cinema e depois irei ao teatro.
i) Quase todo político é desonesto.
j) Adalton sempre foi amigo de João Augusto.
k) Toda regra tem exceção.
l) Quase todo funcionário da Algar é um talento.
m) Poucos funcionários da Algar não são empreendedores.
n) O presidente da Algar é admirado por seus colaboradores.

Os exercícios a seguir são curiosidades que utilizam raciocínio lógico na solução.

12) (Após a morte) Após a morte, o espírito de um homem foi conduzido às portarias do céu e do inferno. Nesse local, havia duas portas exatamente iguais. Uma para o céu e outra para o inferno. Havia também dois porteiros, um perfeitamente honesto e outro completamente mentiroso. Os porteiros se conheciam, isto é, o mentiroso sabia que o outro era honesto e vice-versa. Entretanto, o espírito do homem que morreu não os conhecia. Como que o espírito descobriu a porta do céu fazendo uma única pergunta para um dos porteiros? Após a descoberta da porta do céu, o espírito não necessariamente foi para o céu. Atualmente há inúmeros espíritos que gostam de um inferninho.

13) (Proposta complicada) O Sr. Justino, apesar de trabalhador, não estava indo bem nos negócios. Devia muito dinheiro a um agiota da cidade. O agiota, um sucesso na vida profissional, era baixinho, barrigudo e careca. Tinha mau hálito, dentadura amarelada

e um par de óculos bem grossos. Estava sempre usando um terno preto, com os ombros esbranquiçados pela caspa. No fim de semana o agiota foi ao encontro de Justino. Queria um acerto de contas. O agiota, Justino e sua filha, uma linda moça no esplendor de sua juventude, saíram andando por uma estrada cheia de pedras brancas e pretas. Naquele momento, o agiota fez uma proposta a Justino. "Sr. Justino, quero fazer-lhe uma proposta. Caso aceite o jogo determinado pela proposta, perdoarei a dívida. Caso contrário, terá que pagá-la integralmente e à vista. A proposta consiste em colocar duas pedras, uma preta e uma branca, no interior deste saco de pano. Em seguida, sua filha retirará uma pedra. Se a pedra for preta ela se casará comigo. Caso contrário, ela estará livre. Quero deixar claro que sua dívida será perdoada pelo simples fato de aceitar o jogo." O Sr. Justino pensou por um momento e aceitou o jogo. Mas o agiota trapaceou e pegou duas pedras pretas e as colocou no saco. Entretanto, a bela filha do Sr. Justino percebeu a trapaça do agiota. Mais inteligente que o agiota, ela usou o fato de haver apenas pedras pretas no interior do saco. Fez "ALGUMA COISA" e se saiu muito bem. O que a filha do Sr. Justino fez para se livrar daquele casamento? Lembre que a filha do Sr. Justino estuda Lógica desde o jardim-de-infância.

14) (Perdido na floresta) Um colecionador de borboletas andava pela floresta à procura dos belos insetos. De repente ele foi capturado por índios antropófagos e levado ao centro da aldeia. Lá, os índios prepararam um caldeirão com tempero à vontade. Salsa, pimenta-do-reino, alho, cebola etc. Ao lado do caldeirão se encontrava o chefe da tribo, que aprendera Lógica pela Internet. Ele se dirigiu ao colecionador, fazendo a seguinte proposta: "Sr. Colecionador, faça uma afirmação! Se a sua afirmação for verdadeira, então o senhor será cozido em fogo brando neste caldeirão e em seguida devorado pelos companheiros da tribo. Por outro lado, se sua afirmação for falsa, então o Sr. será comido vivo." O colecionador ficou aflito. Mas ele, assim como o chefe da tribo, também sabia um pouco de lógica. O colecionador fez uma afirmação e foi libertado pelo chefe. Qual a afirmação feita por ele? Esta questão mostra que nem toda afirmação pode ser interpretada como verdadeira ou falsa, como ocorre na Lógica Proposicional clássica.

15) (Nem tudo é verdadeiro ou falso) Na Lógica Proposicional, as fórmulas são interpretadas como sendo verdadeiras ou falsas. Entretanto, há sentenças, escritas em português, que não são verdadeiras e nem falsas. Não é possível interpretar todos os fatos como verdadeiros ou falsos. Escreva uma sentença que não é verdadeira e nem falsa.

16) (Na terra dos honestos e mentirosos) Um turista está andando pela terra dos homens honestos e mentirosos. Lá, as pessoas são radicais e se classificam em duas categorias. São perfeitamente honestas ou completamente mentirosas. Elas só falam mentiras ou só falam verdades. Chegou a hora do almoço e o turista se encontra em uma encruzilhada à procura de um restaurante. Nesta encruzilhada há duas estradas: uma para um restaurante e a outra para "lugar algum". Ali, há também um homem nativo. Naturalmente, o turista não sabe se aquele homem é honesto ou mentiroso. Como o turista descobre o caminho para o restaurante fazendo uma única pergunta ao homem da encruzilhada?

17) (Trabalhadores, capitalistas e estudantes) O turista do exercício anterior continua suas férias. Desta vez ele está em férias por um país onde cada pessoa é classificada como trabalhador, capitalista ou estudante. Os trabalhadores são honestos e só falam a verdade. Os capitalistas, ao contrário, são desonestos e mentem sempre. Os estudantes agem como trabalhadores e capitalistas. Às vezes são honestos, mas podem agir de forma desonesta também. Como no exercício anterior, chegou a hora do almoço e o turista se encontra em uma encruzilhada à procura de um restaurante. Nesta encruzilhada há duas

entradas: uma para um restaurante e a outra para um abismo. Ali, há um trabalhador, um capitalista e um estudante. Apenas olhando para aqueles nativos não é possível ao turista identificá-los. Portanto, ele não sabe quem é honesto ou mentiroso. Como o turista descobre o caminho para o restaurante fazendo apenas duas perguntas? Cada pergunta deve ser dirigida a uma única pessoa que se encontra na encruzilhada.

Sugestões e soluções de exercícios selecionados

1) a) *true* é um símbolo sintático e T é um símbolo semântico.
   c) $\rightarrow$ é um símbolo sintático e $\Rightarrow$ é um símbolo semântico.
2) sintaxe = símbolos e semântica = significado.
4) a) Nada se pode concluir a respeito dos valores de verdade I[P] e I[Q].
   b) I[Q] = T
   c) I[H] = T
   d) Nada se pode concluir a respeito de I[Q]?
   e) I[H] = F
5) a) $I[(\neg P \vee Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)] = T$. Nada se pode concluir a respeito de J[Q] e J[R].
6) a) $I[(P \vee R) \rightarrow (Q \vee R)] = T$
   b) $I[(P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge R)] = T$
   c) Nada se pode concluir a respeito de $I[(\neg P \vee Q) \rightarrow (P \vee Q)]$
8) a) I[H] = F
   b) I[H] = T
10) a) Considere as associações: P = eu sou feliz, Q = você é feliz. Neste caso, a representação é dada por $(P \rightarrow \neg Q) \wedge (\neg Q \rightarrow \neg P)$
   b) Considere as associações: P = José virá à festa, Q = Maria gostará da festa. Nesse caso, a representação é dada por $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$.
11) A rigor, qualquer uma das sentenças pode ser representada na Lógica Proposicional. Basta representar toda a sentença por um símbolo proposicional. Desconsiderando esse tipo de representação trivial algumas sentenças não podem ser representadas na Lógica Proposicional.
   a) Não é possível representar devido ao quantificador "todo", que é considerado apenas na Lógica de Predicados.
   b) Não é possível representar a semântica de "possivelmente" que é considerada apenas na Lógica Modal.
   c) Não é possível representar pois o "tempo" não é considerado na Lógica Proposicional.
   d) Não é possível representar devido ao quantificador "existe", que é considerado apenas na Lógica de Predicados
   l) Não é possível representar pois "quase todo" é uma quantificação desconsiderada na Lógica Proposicional.
   m) Não é possível representar pois "poucos" é uma quantificação desconsiderada na Lógica Proposicional.
17) Uma solução para este problema, que pode servir como paradigma para a solução dos outros exercícios, é apresentada a seguir. Inicialmente, é feita a seguinte pergunta a um dos indivíduos.

   1ª pergunta: Qual o caminho para o restaurante que cada um dos outros indivíduos me indicará?

Para simplificar a análise das respostas, considere as seguintes correspondências:

- R ⇔ Caminho para o restaurante,
- A ⇔ Caminho para o abismo,
- NR ⇔ Não é possível responder.

A primeira pergunta pode ser feita ao operário, ao estudante ou ao capitalista. Logo, há várias possibilidades de conjuntos de respostas.

i) Se a primeira pergunta for feita ao estudante, haverá três possibilidades de listas de respostas:

Respostas possíveis do estudante: {R, A}, {R, R}, {A, A}.

O primeiro conjunto de respostas, por exemplo, determina que um dos indivíduos indica o caminho para o restaurante e o outro o caminho do abismo. Observe que o estudante fala a verdade e/ou mente sobre as respostas dos outros indivíduos. Desta forma, ele sabe que o capitalista sempre indicará o caminho para o abismo e que o operário indicará o caminho correto, representados respectivamente por A e R. Logo, há três possibilidades:

a) Ele fala a verdade sobre as respostas do operário e do capitalista: Respostas {R, A}.
b) Ele mente sobre tais respostas: Resposta {A, R}.
c) Ele mente sobre a resposta de um indivíduo: Respostas {A, A} e {R, R}.

ii) Se a primeira pergunta for feita ao capitalista, ocorre apenas o conjunto de respostas: {A, NR}. Neste caso, como o capitalista sempre mente, ele muda a resposta do operário de R para A e nada responde sobre o caminho indicado pelo estudante.

iii) Se a primeira pergunta for feita ao operário, ele sabe que o capitalista mente e indica o caminho A. Também neste caso, o operário nada responde sobre o caminho indicado pelo estudante. Logo, o conjunto de respostas é {A, NR}. Concluindo, a partir dos possíveis conjuntos de respostas para a primeira pergunta, é possível dividir o conjunto de indivíduos que se encontram na encruzilhada {estudante, operário, capitalista} em dois subconjuntos: {estudante} e {operário, capitalista}. Observe que o resultado deste fato é a identificação do estudante. Em seguida, é feita a segunda pergunta para um dos indivíduos que não é o estudante.

2ª pergunta: Qual o caminho para o restaurante que o outro indivíduo me indicaria?

Neste caso, o "outro indivíduo" citado na pergunta anterior não pode ser o estudante. O turista deve indicar explicitamente o indivíduo, que não é o estudante. Se a segunda pergunta for feita ao operário, a resposta será: [A], pois ele é honesto e sabe que o capitalista mente. Se a segunda pergunta for feita ao capitalista, a resposta também será: [A]. O capitalista sabe que o operário responderia [R], mas como ele mente, sua resposta será [A]. Para finalizar, após a resposta da segunda pergunta, basta o turista seguir o caminho oposto àquele indicado nesta resposta.

CAPÍTULO 3

Propriedades semânticas da Lógica Proposicional

Introdução

Este capítulo considera uma análise de propriedades semânticas que relacionam os resultados das interpretações das fórmulas. São relações obtidas no mundo semântico, mas a partir de fórmulas que pertencem ao mundo sintático. O estudo das relações entre propriedades semânticas e sintáticas, também denominada teoria dos modelos, é um dos enfoques Centrais da Lógica, sendo essa umas das principais razões da aplicação da lógica à Computação. No restante deste livro, essa relação é analisada sob inúmeros pontos de vista. Um conjunto de propriedades semânticas é definido inicialmente.

Propriedades Semânticas

Um conjunto de propriedades semânticas, fundamentais no estudo da lógica, é definido a seguir.

Definição (propriedades semânticas básicas). As propriedades semânticas básicas são definidas a seguir:

- Uma fórmula H é uma tautologia ou é válida se e somente se para toda interpretação I,

$$I[H] = T.$$

- Uma fórmula H é factível ou satisfatível se e somente se existe pelo menos uma interpretação I, tal que

$$I[H] = T.$$

- Uma fórmula H é contraditória se e somente se para toda interpretação I,

$$I[H] = F$$

- Dadas duas fórmulas H e G, H implica G se e somente se para toda interpretação I,

$$\text{se } I[H] = T \text{ então } I[G] = T.$$

- Dadas duas fórmulas H e G, H equivale a G se e somente se para toda interpretação I,

$$I[H] = I[G].$$

- Dada uma fórmula H e uma interpretação I, então I satisfaz H se

$$I[H] = T.$$

- Um conjunto de fórmulas $\beta=\{H_1,H_2.....H_n\}$ é satisfatível se e somente se existe uma interpretação I, tal que

$$I[H_1] = I[H_2] =...= I[H_n] = T.$$

Neste caso, I satisfaz o conjunto de fórmulas, o que é indicado por $I[\beta]=T$. Dado um conjunto de fórmulas vazio, então toda interpretação I satisfaz este conjunto.

Uma fórmula H é uma tautologia ou é válida quando qualquer interpretação I interpreta H como sendo verdadeira. $I[H] = T$ para toda interpretação I. Observe que a validade é muito mais que veracidade. Uma fórmula G pode ser verdadeira segundo uma interpretação J, isto é, $J[G] = T$, mas não ser válida. Neste caso, G é apenas factível ou satisfatível e pode existir uma outra interpretação I tal que $I[G] = F$.

Exemplo (tautologia). A fórmula $H = P \vee \neg P$ é uma tautologia. Observe que para toda interpretação I, $I[H] = T$ pois

$$\begin{aligned} I[H] = T \quad &\Leftrightarrow I[P \vee \neg P] = T \\ &\Leftrightarrow I[P] = T \text{ e/ou } I[\neg P] = T \\ &\Leftrightarrow I[P] = T \text{ e/ou } I[P] = F. \end{aligned}$$

Como I é uma função binária tal que $I[P] \in \{T,F\}$, então $I[P] = T$ ou $I[P] = F$. Portanto, a afirmação $I[P] = T$ e/ou $I[P] = F$ é verdadeira. Logo, $I[H] = T$.

Exemplo (satisfatibilidade). A fórmula $H = (P \vee Q)$ é satisfatível. Neste caso, há interpretações que interpretam H como verdadeira e interpretações que interpretam como falsa. Considere I e J duas interpretações tais que

$$\begin{aligned} I[P] = T, I[Q] = F, \\ J[P] = F, J[Q] = F. \end{aligned}$$

Logo,

$$I[H] = T \text{ e } J[H] = F.$$

Portanto H é satisfatível, mas não é tautologia.

Uma fórmula é contraditória quando não há interpretações que a interpretem como sendo igual a T. Esta propriedade é o oposto da validade ou tautologia. Uma fórmula H é uma tautologia quando todas as interpretações a interpretam como sendo T. Por outro lado, uma fórmula G é contraditória quando todas as interpretações a interpretam como sendo F.

Exemplo (contradição). A fórmula $H = (P \wedge \neg P)$ é contraditória. Suponha que exista uma interpretação I tal que $I[H] = T$. Mas,

$$\begin{aligned} I[H] = T &\Leftrightarrow I[P \wedge \neg P] = T \\ &\Leftrightarrow I[P] = T \text{ e } I[\neg P] = T \\ &\Leftrightarrow I[P] = T \text{ e } I[P] = F. \end{aligned}$$

Como a interpretação I é uma função binária, ocorre apenas uma das possibilidades

$$I[P] = T \text{ ou } I[P] = F.$$

Logo, a afirmação

$$I[P] = T \text{ e } I[P] = F$$

é uma afirmação falsa. Portanto, é falso que $I[H]=T$. Logo, $I[H] = F$.

Exemplo (validade, satisfatibilidade, contradição). Considere as fórmulas

$$\begin{aligned} H_1 &= P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge Q \rightarrow Q \\ H_2 &= P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge Q \rightarrow \neg Q \\ H_3 &= (P \vee \neg P) \rightarrow (Q \wedge \neg Q) \end{aligned}$$

a) A fórmula H_1 é uma tautologia pois

$$I[P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge Q] = T \Rightarrow I[Q] = T$$

Logo,

$$I[P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge Q \rightarrow Q] = T$$

para toda interpretação I.

b) A fórmula H_2 é factível, mas não é uma tautologia. Considere I uma interpretação tal que

$$I[Q] = F$$

Neste caso,

$$I[P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge Q] = F \text{ e } I[\neg Q] = T$$

Logo,

$$I[P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge Q \rightarrow \neg Q] = T$$

c) A fórmula H_3 é contraditória pois para toda interpretação I,

$$I[P \vee \neg P] = T \text{ e } I[Q \wedge \neg Q] = F$$

Logo,

$$I[(P \vee \neg P) \rightarrow (Q \wedge \neg Q)] = F$$

Conforme a definição, H implica G quando para toda interpretação I,

$$\text{se } I[H] = T \text{ então } I[G] = T.$$

Observe que a definição não diz que para toda interpretação I

$$I[H] = I[G] \text{ ou que } I[H] = T \text{ e } I[G] = T.$$

Alunos que estão iniciando o estudo da Lógica freqüentemente cometem tais erros. A definição de implicação é a seguinte: dada uma interpretação I, **se** (observe o "se") I interpreta H como sendo igual a T, **então** (observe o então), I interpreta G como sendo igual a T. Deve-se enfatizar que isto não quer dizer que, para toda interpretação I, as interpretações de H e G segundo I coincidem ou são iguais a T. Além disso, caso exista uma interpretação J tal que J[H] = F, então nada pode ser dito sobre J[G]. Neste caso é possível ter J[G] = T ou J[G] = F.

Exemplo (implicação). Considere as fórmulas

$$E = ((P \wedge Q) \vee Q),$$
$$H = (P \wedge Q) \text{ e } G = (P \rightarrow Q).$$

A tabela verdade associada a estas fórmulas é

Tabela 1 Tabela verdade associada às fórmulas E, H e G conforme I.

P	Q	E	H	G
T	T	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	F	T
F	F	F	F	T

E IMPLICA G
G Ñ IMPLICA E
E Ñ IMPLICA H
H IMPLICA E
H IMPLICA G
G Ñ IMPLICA H

Conforme a tabela, E implica G pois se I[E] = T, então I[G] = T. Por outro lado, E não implica em H pois a terceira linha contém I[E] = T e I[H] = F. As conclusões H implica G, H implica E, G não implica E e G não implica H são obtidas a partir de uma análise das linhas da tabela.

Exemplo (implicação). As fórmulas

$$H = (P \wedge Q) \text{ e } G = P$$

são tais que H implica G. A demonstração desta implicação pode ser feita a partir de tabelas verdade ou como se segue. Considere uma interpretação I tal que I[H] = T. É demonstrado a seguir que I[G] = T.

$$\begin{aligned} I[H] = T &\Leftrightarrow I\,[P \wedge Q] = T \\ &\Leftrightarrow = I[P] = T \text{ e } I[Q] = T \\ &\Rightarrow I[P] = T. \end{aligned}$$

Portanto, se I[H] = T então I[P] = T ou seja I[G] = T. Isto é, a fórmula H implica a fórmula G. Considere duas interpretações I e J tais que,

$$I[P] = T,\ I[Q] = F,\ I[R] = F$$
$$J[P] = F,\ J[Q] = T,\ J[R] = T.$$

Neste caso,

$$I[H] = F,\ J[H] = F,\ I[G] = T \text{ e } J[G] = F.$$

Portanto, mesmo tendo que H implica G, quando H é interpretada como sendo F, nada se pode concluir sobre a interpretação de G.

Exemplo (equivalência). As fórmulas

$$H = (\neg P \wedge \neg Q) \text{ e } G = \neg(P \vee Q)$$

são equivalentes. Esta equivalência estabelece um importante resultado denominado Lei de De Morgan. Dada uma interpretação I,

$$\begin{aligned} I[H] = T &\Leftrightarrow I[\neg P \wedge \neg Q] = T \\ &\Leftrightarrow I[\neg P] = T \text{ e } I[\neg Q] = T \\ &\Leftrightarrow I[P] = F \text{ e } I[Q] = F \\ &\Leftrightarrow I[P \vee Q] = F \\ &\Leftrightarrow I[\neg(P \vee Q)] = T \\ &\Leftrightarrow I[G] = T. \end{aligned}$$

Logo,

$$I[H] = T \Leftrightarrow I[G] = T.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} I[H] = F &\Leftrightarrow I[\neg P \wedge \neg Q] = F \\ &\Leftrightarrow I[\neg P] = F \text{ e/ou } I[\neg Q] = F \\ &\Leftrightarrow I[P] = T \text{ e/ou } I[Q] = T \\ &\Leftrightarrow I[(P \vee Q)] = T \\ &\Leftrightarrow I[\neg(P \vee Q)] = F \\ &\Leftrightarrow I[G] = F. \end{aligned}$$

Logo,

$$I[H] = F \Leftrightarrow I[G] = F.$$

Portanto, I[H] = I[G], isto é, H e G são equivalentes.

Como será visto mais adiante, para demonstrar que I[H] = I[G], basta demonstrar que

$$I[H] = F \Leftrightarrow I[G] = F$$

ou que

$$I[H] = T \Leftrightarrow I[G] = T.$$

Não é necessário demonstrar as duas equivalências. Uma outra forma de demonstrar que H equivale a G é construir uma tabela verdade associada a H e G e verificar que as suas colunas coincidem. Observe a tabela a seguir, onde as colunas das fórmulas

$$(\neg P \wedge \neg Q) \text{ e } \neg(P \vee Q)$$

coincidem. Isto significa que para toda interpretação I,

$$I[\neg P \wedge \neg Q] = I[\neg(P \vee Q)]$$

Tabela 2 (tabela verdade associada às fórmulas $(\neg P \wedge \neg Q)$ e $\neg(P \vee Q)$).

P	Q	$\neg P \wedge \neg Q$	$\neg(P \vee Q)$
T	T	F	F
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	T	T

Satisfatibilidade de conjunto de fórmulas. Um conjunto de fórmulas

$$\{H_1, H_2 \ldots\ldots H_n\}$$

é satisfatível quando existe pelo menos uma interpretação I que interpreta as fórmulas $H_1, H_2 \ldots\ldots H_n$ como sendo iguais a T. Conjuntos de fórmulas satisfatíveis são importantes em Ciência da Computação. Os programas lógicos são conjuntos de fórmulas satisfatíveis. Isto significa que deve haver pelo menos uma interpretação que satisfaça o programa. Normalmente, essa interpretação existe e é dada pelo programador, que certamente acredita e interpreta as fórmulas de seu programa como sendo verdadeiras.

Exemplo (insatisfatibilidade). O conjunto de fórmulas

$$H_1 = P,\ H_2 = \neg P \text{ e } H_3 = Q$$

é insatisfatível ou seja, ele não é satisfatível. Dada uma interpretação I, se $I[H_1] = T$, então $I[H_2]=F$ e vice-versa. Isto significa que não é possível encontrar uma interpretação que interprete H_1 e H_2 como sendo iguais a T. Logo, o conjunto de fórmulas $\{P, \neg P, Q\}$ é insatisfatível.

Exemplo (satisfatibilidade). O conjunto de fórmulas

$$E = (P \rightarrow Q),$$
$$H = (Q \rightarrow R) \text{ e}$$
$$G = (R \rightarrow P)$$

é satisfatível. Isto ocorre porque existe pelo menos uma interpretação I, tal que

$$I[E] = I[H] = I[G] = T.$$

Basta escolher a interpretação I, tal que

$$I[P] = I[Q] = I[R] = F.$$

Exemplo (insatisfatibilidade). O conjunto de fórmulas

$$\begin{aligned} H_1 &= (P \rightarrow Q), \\ H_2 &= (Q \rightarrow R), \\ H_3 &= (R \rightarrow S), \\ H_4 &= (S \rightarrow P) \text{ e} \\ H_5 &= \neg(S \rightarrow Q) \end{aligned}$$

é insatisfatível. Suponha por absurdo, que existe uma interpretação I, tal que para todo I, $I[H_i]=T$. Mas,

$$\begin{aligned} I[H_5] = T &\Leftrightarrow I[\neg(S \rightarrow Q)] = T \\ &\Leftrightarrow I[S \rightarrow Q] = F \\ &\Leftrightarrow I[S] = T \text{ e } I[Q] = F \\ I[H_1] = T &\Leftrightarrow I[P \rightarrow Q] = T \\ &\Leftrightarrow I[P] = F \text{ e/ou } I[Q] = T \end{aligned}$$

Como $I[Q] = F$, logo, $I[P] = F$.

$$\begin{aligned} I[H_4] = T &\Leftrightarrow I[S \rightarrow P] = T \\ &\Leftrightarrow I[S] = F \text{ e/ou } I[P] = T \end{aligned}$$

Como $I[P] = F$, logo, $I[S] = F$, o que é um absurdo pois já foi concluído anteriormente que $I[S]=T$. Observe que não é possível ter $I[S] = T$ e $I[S] = F$ ao mesmo tempo.

Relações entre as Propriedades Semânticas

As propriedades semânticas das fórmulas estão relacionadas entre si. Já foi dito, por exemplo, que a validade é o oposto da contradição. Esta seção demonstra um conjunto de resultados sobre estas relações.

Proposição (validade e contradição). Dada uma fórmula H, então

$$H \text{ é válida} \Leftrightarrow \neg H \text{ é contraditória.}$$

A equivalência diz que H é válida se e somente se $\neg H$ é contraditória. Observe que o símbolo $\Leftrightarrow$ está substituindo o texto "se e somente se". Observe também que não há relação entre símbolos $\Leftrightarrow$ e $\leftrightarrow$. O símbolo $\leftrightarrow$ pertence à sintaxe da Lógica Proposicional. Por outro lado, o símbolo $\Leftrightarrow$ é utilizado para relacionar elementos

da semântica. Esta é a razão para se ter representações diferentes. O conectivo $\leftrightarrow$ é o "se e somente se" da sintaxe da lógica, enquanto o símbolo $\Leftrightarrow$ é o "se e somente se" da semântica.

Demonstração
Tem-se que:

$$\begin{aligned} H \text{ é válida } &\Leftrightarrow \text{para toda interpretação I, } I[H] = T \\ &\Leftrightarrow \text{para toda interpretação I, } I[\neg H] = F \\ &\Leftrightarrow \neg H \text{ é contraditória.} \end{aligned}$$

Portanto,

$$H \text{ é válida} \Leftrightarrow \neg H \text{ é contraditória.}$$

Notação. Neste livro, o ponto-e-vírgula ";" é utilizado para representar o texto "tal que". Assim, o texto

"não existe interpretação I; $I[\neg H] = T$"

equivale a

"não existe interpretação I tal que $I[\neg H] = T$"

Observe ainda o esquema da demonstração. Ela é feita a partir de passos elementares. Nesse caso, os passos elementares são representados pela equivalência entre as linhas. O que justifica a passagem de uma linha a outra é, geralmente, um raciocínio elementar, muitas vezes determinado por uma definição ou resultado obtido anteriormente. A validade é também relacionada com outras propriedades conforme as proposições a seguir.

Proposição (validade e factibilidade). Dada uma fórmula H,

$$H \text{ é tautologia} \Rightarrow H \text{ é satisfatível}$$

Esta proposição diz que se H é tautologia, então H é satisfatível. Analogamente à proposição anterior, o símbolo $\Rightarrow$ está substituindo o texto "se-então". Novamente, não há relação entre os símbolos $\Rightarrow$ e $\rightarrow$. O símbolo $\rightarrow$ pertence à sintaxe da Lógica Proposicional e $\Rightarrow$ é utilizado para relacionar elementos da semântica. O conectivo $\rightarrow$ é o "se-então" da sintaxe lógica, enquanto $\Rightarrow$ é o "se-então" da semântica.

Demonstração
A demonstração é análoga à demonstração da proposição anterior.

$$\begin{aligned} H \text{ é tautologia} &\Leftrightarrow \text{para toda interpretação I, } I[H] = T \\ &\Rightarrow \text{existe interpretação I; } I[H] = T \end{aligned}$$

Observe que nesta demonstração, a afirmação "H é tautologia" equivale a "para toda interpretação I, tal que I[H] = T". Entretanto, esta última afirmação apenas implica, mas não equivale à afirmação "existe interpretação I; I[H] = T". Devido a esse fato,

$$\text{H é tautologia} \Rightarrow \text{é satisfatível.}$$

Mas não se tem que

$$\text{H é tautologia} \Leftrightarrow \text{H é satisfatível.}$$

Proposição (validade e contradição). Dada uma fórmula H, então

a) H é tautologia $\Leftrightarrow$ $\neg$H é contraditória
b) $\neg$H não é satisfatível $\Leftrightarrow$ $\neg$H é contraditória

Demonstração
Esta demonstração também é análoga às demonstrações das proposições anteriores. Demonstração do item a).

$$\begin{aligned}\text{H é tautologia} &\Leftrightarrow \text{para toda interpretação I, I[H] = T}\\ &\Leftrightarrow \text{para toda interpretação I, I[}\neg\text{H] = F}\\ &\Leftrightarrow \neg\text{H é contraditória.}\end{aligned}$$

Demonstração do item b). Já foi demonstrado que

$$\text{H é tautologia} \Leftrightarrow \neg\text{H não é satisfatível}$$

Conforme o item a),

$$\text{H é tautologia} \Leftrightarrow \neg\text{H é contraditória}$$

Logo, a partir das equivalências acima, é possível concluir

$$\neg\text{H não é satisfatível} \Leftrightarrow \neg\text{H é contraditória}$$

Observe que nesta demonstração são utilizados apenas resultados de outras proposições e não se consideram as definições dos conceitos. A utilização de resultados de proposições já demonstradas é comum em demonstrações na lógica e na matemática em geral. A proposição a seguir demonstra a relação entre a implicação e o conectivo $\rightarrow$.

Proposição (implicação e o conectivo $\rightarrow$). Dadas duas fórmulas H e G, então

$$\text{H implica G} \Leftrightarrow (\text{H} \rightarrow \text{G}) \text{ é tautologia.}$$

Demonstração
Considere a seqüência de equivalências

$$\begin{aligned}\text{H implica G} &\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow \text{para toda interpretação I, se I[H] = T, então I[G] = T}\\ &\Leftrightarrow \text{para toda interpretação I, I[H} \rightarrow \text{G] = T}\\ &\Leftrightarrow (\text{H} \rightarrow \text{G}) \text{ é tautologia.}\end{aligned}$$

Portanto, H implica G $\Leftrightarrow$ (H $\rightarrow$ G) é tautologia.

A proposição anterior relaciona a implicação com o conectivo $\rightarrow$ e validade. De forma análoga a equivalência também está relacionada ao conectivo $\leftrightarrow$ e validade, conforme indicado na proposição a seguir.

Proposição (equivalência e o conectivo $\leftrightarrow$). Dadas as fórmulas H e G,

H equivale a G $\Leftrightarrow$ (H$\leftrightarrow$G) é tautologia.

Demonstração

Considere a seqüência de equivalências

H equivale a G $\Leftrightarrow$ para toda interpretação I, I[H] = I[G]
$\Leftrightarrow$ para toda interpretação I, I[H $\leftrightarrow$ G] = T
$\Leftrightarrow$ (H $\leftrightarrow$ G) é tautologia.

Portanto, H equivale a G $\Leftrightarrow$ (H $\leftrightarrow$ G) é tautologia.

A relação entre equivalência e implicação é considerada na próxima proposição.

Proposição (equivalência e implicação). Dadas duas fórmulas H e G,

H equivale a G $\Leftrightarrow$ H implica G e G implica H.

Demonstração

Considere inicialmente que H equivale a G.

H equivale a G $\Leftrightarrow$ para toda interpretação I, I[H] = I[G].
$\Leftrightarrow$ para toda interpretação I, se I[H] = T, então I[G] = T e se I[G] = T, então I[H] = T,
$\Leftrightarrow$ H implica G e G implica H

Portanto, H equivale a G $\Leftrightarrow$ H implica G e G implica H

Proposição (transitividade da equivalência). Dadas as fórmulas E, H e G,

se E equivale a H e H equivale a G, então E equivale a G

Demonstração

Considere inicialmente os resultados

E equivale a H $\Leftrightarrow$ (E $\leftrightarrow$ H) é tautologia e

H equivale a G $\Leftrightarrow$ (H $\leftrightarrow$ G) é tautologia.

Mas se (E $\leftrightarrow$ H) e (H $\leftrightarrow$ G) são tautologias, então, para toda interpretação I, I[E]=I[H] e I[H]=I[G]. Logo, para toda interpretação I, I[E]=I[G]. Logo, (E $\leftrightarrow$ G) é tautologia. Portanto, E equivale a G.

Proposição (satisfatibilidade e factibilidade). Seja $\{H_1, H_2,...,H_n\}$ um conjunto de fórmulas.

$\{H_1,H_2,...,H_n\}$é satisfatível $\Leftrightarrow$ $(H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n)$ é satisfatível.

Demonstração

$\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ é satisfatível $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ existe interpretação I; $I[H_1] = I[H_2] = \ldots = I[H_n] = T$

$\Leftrightarrow$ existe interpretação I; $I[H_1 \wedge H_2] = T$, $I[H_3] = T$, ... $= I[H_n] = T$ seguindo este raciocínio,

$\Leftrightarrow$ existe interpretação I; $I[H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n] = T$

$\Leftrightarrow$ $(H_1 \wedge H_2 \ldots \wedge H_n)$ é satisfatível.

Equivalências

Esta seção demonstra um conjunto de resultados sobre equivalências entre fórmulas da Lógica Proposicional. Um dos objetivos é demonstrar que na lógica, e em geral na Matemática, nem tudo que parece ser verdadeiro é de fato verdadeiro. Além disso, as técnicas utilizadas nas demonstrações a seguir são até mesmo mais importantes que os resultados propriamente ditos. Tais técnicas são utilizadas em inúmeras demonstrações.

Sejam H e G duas fórmulas. Conforme proposição demonstrada anteriormente,

$$H \text{ equivale a } G \Leftrightarrow (H \leftrightarrow G) \text{ é tautologia.}$$

A partir do resultado acima, que é correto, poderia se esperar que a conjectura a seguir, que é análoga, também o fosse.

Conjectura (equivalência e validade). Sejam H e G fórmulas da Lógica Proposicional, então

$$H \text{ equivale a } G \Leftrightarrow \{H \text{ é tautologia} \Leftrightarrow G \text{ é tautologia}\}.$$

Uma conjectura é uma asserção a respeito da validade de uma afirmação. A conjectura acima afirma que

$$H \text{ equivale a } G \text{ se e somente se, } \{H \text{ é tautologia} \Leftrightarrow G \text{ é tautologia}\}.$$

Observe que a conjectura é obtida da afirmação

$$H \text{ equivale a } G \Leftrightarrow (H \leftrightarrow G) \text{ é tautologia,}$$

trocando

$$\text{“}(H \leftrightarrow G) \text{ é tautologia”}$$

por

$$\text{“}H \text{ é tautologia} \Leftrightarrow G \text{ é tautologia”}.$$

A conjectura parece ser válida, mas não é. Inicialmente, observe que a conjectura é uma bi-implicação que pode ser dividida nas duas implicações:

$$H \text{ equivale a } G \Rightarrow \{H \text{ é tautologia} \Leftrightarrow G \text{ é tautologia}\}.$$
$$\{H \text{ é tautologia} \Leftrightarrow G \text{ é tautologia}\} \Rightarrow H \text{ equivale a } G.$$

A segunda implicação não é válida, conforme é demonstrado pelo contra-exemplo a seguir. Geralmente, uma boa estratégia para demonstrar a falsidade de uma afirmação é a definição de um contra-exemplo.

Contra-exemplo (equivalência e validade). Este contra-exemplo considera duas fórmulas H e G que contradizem a implicação

$$\{H \text{ é tautologia} \Leftrightarrow G \text{ é tautologia}\} \Rightarrow H \text{ equivale a } G.$$

Suponha,

$$H = P \text{ e } G = Q.$$

Observe que H e G não são equivalentes. Logo, para tais fórmulas, o conseqüente da implicação anterior é falso. Neste caso a afirmação que diz

$$H \text{ equivale a } G$$

é uma afirmação falsa. Por outro lado, como H e G não são válidas, então o antecedente da implicação anterior é verdadeiro. Neste caso que a afirmação

$$H \text{ é tautologia}$$

é uma afirmação falsa se H = P. O mesmo ocorre com a afirmação

$$G \text{ é tautologia},$$

que é falsa se G = Q. No antecedente da implicação

$$\{H \text{ é tautologia} \Leftrightarrow G \text{ é tautologia}\} \Rightarrow H \text{ equivale a } G.$$

a afirmação

$$\{H \text{ é tautologia} \Leftrightarrow G \text{ é tautologia}\}$$

é verdadeira pois ela expressa a equivalência das afirmações

$$H \text{ é tautologia e } G \text{ é tautologia}$$

que são ambas falsas. Como

$$\text{Falso} \Leftrightarrow \text{Falso}$$

é verdadeiro, então para as fórmulas H = P e G = Q o antecedente da implicação é verdadeiro. Portanto, a implicação

$$\{H \text{ é tautologia} \Leftrightarrow G \text{ é tautologia}\} \Rightarrow H \text{ equivale a } G.$$

é uma implicação do tipo

$$\text{verdadeiro} \Rightarrow \text{falso},$$

sendo portanto uma implicação falsa.

A conclusão é que a conjectura indicada anteriormente é falsa. Apesar de a segunda implicação ser falsa, o mesmo não ocorre com a primeira implicação indicada na proposição a seguir.

Proposição 1 (equivalência e validade). Sejam H e G duas fórmulas.

$$\text{H equivale a G} \Rightarrow \{\text{H é tautologia} \Leftrightarrow \text{G é tautologia}\}.$$

Comentário. A demonstração desta implicação é feita por partes. São consideradas a seguir duas outras proposições, denominadas prop2 e prop3, tais que

$$\text{prop3} \Rightarrow \text{prop2 e}$$
$$\text{prop2} \Rightarrow \text{prop1}.$$

Assim, para demonstrar a proposição 1, alguns passos são considerados. Inicialmente é demonstrado que a proposição 2 implica a proposição 1. Em uma notação simplificada os resultados

$$\text{prop2},$$
$$\text{prop2} \Rightarrow \text{prop1}$$

é demonstrado. Em seguida, são demonstrados

$$\text{prop3},$$
$$\text{prop3} \Rightarrow \text{prop2}.$$

A partir destes resultados tem-se a seqüência

$$\text{prop3},$$
$$\text{prop3} \Rightarrow \text{prop2},$$
$$\text{prop2} \Rightarrow \text{prop1}$$

Portanto, na demonstração da proposição 1, o problema proposto é transformado inicialmente na proposição 2 tal que

$$\text{prop2} \Rightarrow \text{prop1}.$$

Em seguida, o problema proposto em prop2 é novamente transformado em outra proposição, indicada por prop3 tal que

$$\text{prop3} \Rightarrow \text{prop2}.$$

A transformação de um problema em outro é uma técnica freqüentemente utilizada em demonstrações na Matemática e na Lógica. As proposições 2 e 3 são consideradas a seguir.

Proposição 2 (implicação e validade). Sejam H e G duas fórmulas, então

$$\text{H implica G} \Rightarrow \{\text{H é tautologia} \Rightarrow \text{G é tautologia}\}.$$

Comentários. Qual a razão em demonstrar esta proposição? Observe que a implicação

$$\text{H implica G} \Rightarrow \{\text{H é tautologia} \Rightarrow \text{G é tautologia}\}.$$

também pode ser escrita como:

$$G \text{ implica } H \Rightarrow \{G \text{ é tautologia} \Rightarrow H \text{ é tautologia}\}.$$

onde H é trocado por G e vice-versa. A partir destas duas últimas implicações, a implicação

$$H \text{ equivale a } G \Rightarrow \{H \text{ é tautologia} \Leftrightarrow G \text{ é tautologia}\}.$$

é imediatamente concluída, pois se H implica G e G implica H, então H equivale a G. Além disso se

$$\{H \text{ é tautologia} \Rightarrow G \text{ é tautologia}\}$$

e se

$$\{G \text{ é tautologia} \Rightarrow H \text{ é tautologia}\},$$

conclui-se que

$$\{H \text{ é tautologia} \Leftrightarrow G \text{ é tautologia}\}.$$

Portanto,

$$\text{prop2} \Rightarrow \text{prop1}.$$

Considere o lema cujo resultado é utilizado a seguir.

Lema (implicação). Dadas três fórmulas A, B e C, então

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \text{ equivale a } ((A \wedge B) \rightarrow C).$$

Demonstração. Esta demonstração é imediata a partir da Tabela 3. Observe que as colunas das fórmulas

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \text{ e } ((A \wedge B) \rightarrow C)$$

coincidem.

Tabela 3 Tabela verdade associada às fórmulas $(A \rightarrow (B \rightarrow C))$ e $((A \wedge B) \rightarrow C)$.

A	B	C	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	$(A \wedge B) \rightarrow C$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	F
T	F	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T
F	F	F	T	T

Comentário. Qual a razão em se demonstrar a equivalência destas fórmulas? Observe inicialmente que a implicação da proposição 2

$$H \text{ implica } G \Rightarrow \{H \text{ é tautologia} \Rightarrow G \text{ é tautologia}\}.$$

é uma sentença do tipo

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)),$$

que é equivalente a

$$((A \wedge B) \rightarrow C).$$

Portanto a implicação anterior é equivalente a

$$\{\{\text{H implica G}\} \text{ e } \{\text{H é tautologia}\}\} \Rightarrow \{\text{G é tautologia}\}.$$

Logo, para demonstrar a proposição 2 basta demonstrar a última implicação, que também é indicada na proposição a seguir. Observe que o lema demonstra que

$$\text{prop3} \Rightarrow \text{prop2}.$$

Proposição 3 (implicação e validade). Sejam H e G duas fórmulas, então

$$\{\{\text{H implica G}\} \text{ e } \{\text{H é tautologia}\}\} \Rightarrow \{\text{G é tautologia}\}.$$

Demonstração. Suponha que

$$\{\text{H implica G}\}$$

e

$$\{\text{H é tautologia}\}.$$

É demonstrado a seguir que G é tautologia. Mas,

$$\text{G é tautologia} \Leftrightarrow \text{para toda interpretação I, I[G] = T}.$$

Assim, demonstrar que G é válida basta demonstrar que

$$\text{para toda interpretação I, I[G] = T}.$$

Seja então I uma interpretação qualquer. Como H é tautologia, então, pela definição de tautologia, I[H] = T. Por outro lado, como H implica G, então, pela definição de implicação, I[G] = T. Portanto, para toda interpretação I, I[G] = T, isto é, G é tautologia.

Comentário. Observe que

$$\text{prop3} \Rightarrow \text{prop2 e}$$
$$\text{prop2} \Rightarrow \text{prop1}.$$

Como a proposição 3 foi demonstrada, a validade da proposição 1 é obtida. A implicação presente na conjectura inicial é o resultado indicado em prop1.

Exercícios

1) Demonstre se as afirmações são verdadeiras.
   a) Se $(E \leftrightarrow G)$ e $(G \leftrightarrow H)$ são tautologias, então $(E \leftrightarrow H)$ é tautologia.
   b) $(E \leftrightarrow G)$ é tautologia se e somente se $(E \wedge G)$ é tautologia ou $(\neg E \wedge \neg G)$ é tautologia.

c) Se $I[E \leftrightarrow G]=T$, então $I[E \wedge G]=T$ ou $I[\neg E \wedge \neg G]=T$.

d) $\neg(E \leftrightarrow G)$ é tautologia se e somente se E e $\neg G$ são tautologias.

e) Se $I[\neg(E \rightarrow G)]=T$, então $I[E]=I[\neg G]=T$.

f) Comente a relação entre os resultados dos itens b) e c) com os itens d) e e) respectivamente.

2) Sejam H e G as fórmulas indicadas a seguir. Identifique, justificando sua resposta, os casos em que H implica G.

a) $H = P \wedge Q$, $G = P$

b) $H = P \vee Q$, $G = P$

c) $H = P \vee \neg Q$, $G = \mathit{false}$

d) $H = \mathit{false}$, $G = P$

e) $H = P$, $G = \mathit{true}$

3) Considere as fórmulas $H_1,\ldots,H_{10}$, que são formadas utilizando os símbolos proposicionais P e Q e possuem a tabela verdade a seguir:

Tabela 4 Tabela verdade associada às fórmulas $H_1,\ldots,H_{10}$.

P	Q	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	H_7	H_8	H_9	H_{10}
T	T	T	T	T	T	F	T	F	T	F	F
T	F	T	T	T	F	T	T	F	F	T	F
F	T	T	T	F	T	T	F	T	F	T	F
F	F	T	F	T	T	T	F	T	T	F	F

a) Identifique os valores de i tais que Hi implica Hj para todo j.

b) Identifique os valores de i tais que Hi não implica Hj para todo j.

c) Identifique valores de i, j, k diferentes entre si, tais que Hi implica Hj e Hj implica Hk. Certifique-se de que Hi implica Hk.

d) Existem valores de i, j diferentes entre si, tais que Hi implica Hj e Hj implica Hi? Como deve ser a relação entre as colunas de Hi e Hj para que essas relações de implicação ocorram?

e) Existem valores de i, j tais que Hi implica Hj e Hj não implica Hi?

f) Existem valores de i, j, k diferentes entre si, tais que Hi implica Hj, Hj implica Hk e Hk implica Hi? Como deve ser a relação entre as colunas de Hi, Hj e Hk para que essas relações de implicação ocorram?

g) O conjunto de fórmulas $\{H_2,H_3,H_4,H_5\}$ é satisfatível?

h) Qual o maior conjunto obtido das fórmulas $H_1,\ldots,H_{10}$, que é satisfatível?

I) Identifique as fórmulas Hi, que são tautologias, que são satisfatíveis e que são contraditórias.

j) Construa as fórmulas $H_1,\ldots,H_{10}$ a partir dos símbolos proposicionais P e Q.

4) Considere as fórmulas H e G, que são formadas utilizando apenas os símbolos proposicionais P e Q e a tabela associada.

Tabela 5 Tabela verdade associada às fórmulas H e G.

P	Q	H	G
T	T		
T	F		
F	T		
F	F		

a) Como deve ser a relação entre as colunas de H e G para que H seja equivalente a G?
b) Como deve ser a relação entre as colunas de H e G para que H implique G?

5) Considere as fórmulas: A, B, C e D. Demonstre que
$\{A, B, C, D\}$ é insatisfatível $\Leftrightarrow \neg(A \wedge B \wedge C \wedge D)$ é tautologia.

6) Foi demonstrado, neste capítulo, que
H é tautologia $\Leftrightarrow \neg$H é contraditória e $\neg$H não é satisfatível $\Leftrightarrow \neg$H é contraditória.
Utilizando a mesma técnica de demonstração, demonstre se são verdadeiras ou falsas as afirmações a seguir.
a) H não é satisfatível $\Leftrightarrow$ H é contraditória.
b) H é satisfatível $\Leftrightarrow$ H não é contraditória.
c) $\neg$H é tautologia $\Leftrightarrow$ H é contraditória.
d) H não é tautologia $\Leftrightarrow$ H é contraditória.

7) Sejam H e G as fórmulas indicadas a seguir. Identifique, justificando sua resposta, os casos em que H é equivalente a G.
a) $H = P$, $G = Q$
b) $H = P$, $G = P$
c) $H = ((P \rightarrow Q) \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow S)$, $G = \mathit{true}$
d) $H = (P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$, $G = \mathit{true}$
e) H é tautologia, $G = \mathit{true}$
f) H é contraditória, $G = \mathit{false}$
g) H é contraditória, G é contraditória
h) H é tautologia, G é tautologia
i) H é satisfatível, G é satisfatível

8) Seja H uma fórmula. Classifique as afirmações a seguir em verdadeiras ou falsas, justificando sua resposta.
a) H é satisfatível $\Leftrightarrow \neg$H é satisfatível
b) H é contraditória $\Leftrightarrow \neg$H é satisfatível
c) H é tautologia $\Leftrightarrow \neg$H é contraditória
d) H é tautologia $\Leftrightarrow$ H é satisfatível
e) H é contraditória $\Rightarrow \neg$H é satisfatível
f) H é tautologia $\Rightarrow H \wedge G$ equivale a G
g) H é tautologia $\Leftrightarrow H \wedge G$ equivale a G
h) H é tautologia $\Rightarrow H \vee G$ equivale a G
i) $H \vee G$ equivale a G $\Rightarrow$ H é tautologia
j) H é satisfatível $\Rightarrow (H \vee G)$ equivale a G
k) H implica G e G é tautologia $\Rightarrow$ H é tautologia
l) H implica G e H é tautologia $\Rightarrow$ G é tautologia

m) H é satisfatível $\Rightarrow$ $H \wedge G$ equivale a G
n) H é tautologia ou G é tautologia $\Rightarrow$ se $\neg H$ é contraditória, então G é tautologia

9) Demonstre se as implicações a seguir são verdadeiras ou falsas.
a) H é satisfatível $\Rightarrow$ H é tautologia
b) H equivale a G $\Rightarrow$ H implica G
c) H implica G $\Rightarrow$ H equivale a G
d) H implica G $\Rightarrow$ $(H \vee E)$ implica $(G \vee E)$
e) H implica G $\Rightarrow$ $(H \wedge E)$ implica $(G \wedge E)$
f) H implica G $\Rightarrow$ $(G \rightarrow E)$ implica $(H \rightarrow E)$
g) $(H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n)$ é tautologia $\Rightarrow$ $\{H_1, H_2, ..., H_n\}$ é satisfatível
h) $\{H_1, H_2, ..., H_n\}$ é satisfatível $\Rightarrow$ $(H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n)$ é tautologia
i) $\{H_1, H_2, ..., H_n\}$ é satisfatível $\Rightarrow$ $(H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n)$ é satisfatível
j) $\{H_1, H_2, ..., H_n\}$ é insatisfatível $\Leftrightarrow$ $\neg(H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n)$ é tautologia
k) $\{H_1, H_2, ..., H_n\}$ é satisfatível $\Rightarrow$ $H_1, H_2 ..... H_n$ são equivalentes entre si
l) H é satisfatível $\Rightarrow$ existem infinitas interpretações I, tais que $I[H] = T$.
m) As fórmulas contraditórias são equivalentes entre si.
n) As fórmulas válidas são equivalentes entre si.
o) As fórmulas satisfatíveis são equivalentes entre si.
p) H é satisfatível $\Rightarrow$ $\neg H$ é satisfatível?
q) Toda tautologia é uma fórmula factível.
r) H implica G $\Rightarrow$ $(H \rightarrow E)$ implica $(G \rightarrow E)$.

10) Dadas as fórmulas H e G, demonstre que
a) H é contraditória $\Rightarrow$ $(H \rightarrow G)$ é válida.
b) H é tautologia e G é contraditória $\Rightarrow$ $(H \rightarrow G)$ é contraditória.
c) Demonstre se é verdadeiro ou falso o inverso das implicações expressas nos itens a) e b).

11) Seja I uma interpretação e as fórmulas H e G. Demonstre que:
a) Se $I[H] = T$ e $I[H \rightarrow G] = T$, então $I[G]=T$.
b) Se $I[H \rightarrow G] = T$, então não necessariamente $I[G] = T$.

12) Dadas as fórmulas H e G, demonstre que:
a) H implica G $\Leftrightarrow$ não existe interpretação I; $I[H] = T$ e $I[G] = F$.
b) H não implica G $\Leftrightarrow$ $\exists$ interpretação I; $I[H] = T$ e $I[G] = F$.
c) H implica G $\Leftrightarrow$ $\exists$ interpretação I; $I[H] = F$ e/ou $I[G] = T$.

13) Classifique as afirmações a seguir em verdadeiras ou falsas. Justifique suas respostas.
a) Dada uma fórmula contraditória H, é possível encontrar uma interpretação I tal que $I[H] = T$.
b) Se H é uma tautologia, então não existe interpretação I tal que $I[\neg H] = T$.
c) Se $\{H_1, H_2, ..., H_n\}$ é um conjunto satisfatível de fórmulas, então para toda interpretação I, $I[H_i] = T$

14) Sejam H e G duas fórmulas tais que H implica G. A partir deste fato, é possível concluir que para toda interpretação I, $I[H] = T$ e $I[G] = T$? Justifique sua resposta.

15) Considere os conjuntos de fórmulas a seguir: Determine quais conjuntos são satisfatíveis.
a) $\{P, \neg P\}$

b) $\{S \rightarrow Q, P \vee \neg(S \wedge P), S\}$
c) $\{\neg(\neg Q \vee P), P \vee \neg R, Q \rightarrow \neg R\}$
d) $\{(\neg Q \wedge R) \rightarrow P, Q \rightarrow (\neg P \rightarrow R), P \leftrightarrow \neg R\}$
e) $\{P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, R \rightarrow S, S \rightarrow P\}$
f) $\{P \rightarrow Q, (P \wedge R) \rightarrow (P \wedge Q \wedge R), (Q \vee R \vee S)\}$
g) $\{P \rightarrow Q, \neg(Q \wedge \neg R), R \rightarrow S, \neg(S \wedge P)\}$

16) É possível encontrar duas fórmulas H e G que contradizem as afirmações:
a) H equivale a G $\Rightarrow$ {H é tautologia $\Leftrightarrow$ G é tautologia}.
b) H equivale a G $\Leftrightarrow$ {H $\leftrightarrow$ G é tautologia}.
c) H equivale a G $\Leftrightarrow$ {H é tautologia $\Leftrightarrow$ G é tautologia}.

17) Suponha que H implica G e H equivale a $\neg$E. Demonstre se o conjunto de fórmulas

$$\{\neg G, E \rightarrow \neg H, H\}$$

é satisfatível.

18) Considere os conjuntos de argumentos indicados a seguir. Que conjuntos de argumentos são satisfatíveis?
a) Marcos não está feliz ou se Sílvia foi ao baile, então Marcos também foi ao baile. Se Marcos está feliz, então Sílvia não foi ao baile. Se Marcos foi ao baile, então Sílvia também foi ao baile.
b) Um casamento é feliz se e somente se os noivos têm objetivos comuns. Os noivos têm objetivos comuns se e somente se os noivos cursam disciplinas em áreas comuns. Há divórcio se e somente se o casamento é infeliz. Há divórcio se e somente os noivos não cursam disciplinas em áreas comuns.
Comente, do ponto de vista lógico:
a) A diferença entre validade e veracidade.
b) A diferença entre falsidade e contradição.

Sugestões e soluções de exercícios selecionados

1) a) Suponha que $(E \leftrightarrow G)$ e $(G \leftrightarrow H)$ são tautologias. Mas,
$(E \leftrightarrow G)$ é tautologia $\Leftrightarrow \forall$ interpretação I, $I[E] = I[G]$
$(G \leftrightarrow H)$ é tautologia $\Leftrightarrow \forall$ interpretação I, $I[G] = I[H]$
Como $I[E] = I[G]$ e $I[G] = I[H]$, então $I[E] = I[H]$. Portanto, $\forall$ interpretação I, $I[E] = I[H]$, o que significa que $(E \leftrightarrow H)$ é tautologia.
b) Esta afirmação não é verdadeira. Considere o contra-exemplo $E = P$ e $G = \neg\neg P$. Neste caso, $(P \leftrightarrow \neg\neg P)$ é tautologia, mas nenhuma das fórmulas $(P \wedge \neg\neg P)$ e $(\neg P \wedge \neg\neg\neg P)$ são tautologias.
c) Afirmação verdadeira.
d) Afirmação falsa.
e) Afirmação verdadeira.

2) a) Sim
b) Não
c) Não
d) Sim
e) Sim

4) a) Colunas iguais.
b) Se ocorre T na coluna de H, então necessariamente ocorre T na coluna de G.

5) $\{A, B, C, D\}$ é insatisfatível $\Leftrightarrow$ não existe interpretação
$\Leftrightarrow$ I; $I[A]=I[B]=I[C]=I[D]=T$.
$\Leftrightarrow$ $\forall$ interpretação I, $I[A]=F$ ou $I[B]=F$ ou $I[C]=F$ ou $I[D]=F$
$\Leftrightarrow$ $\forall$ interpretação I, $I[A \wedge B \wedge C \wedge D]=F$
$\Leftrightarrow$ $\forall$ interpretação I, $I[\neg(A \wedge B \wedge C \wedge D)]=T$
$\Leftrightarrow$ $\neg(A \wedge B \wedge C \wedge D)$ é tautologia.

7) a) Não
b) Sim
c) Não
d) Sim
e) Sim
f) Sim
g) Sim
h) Sim
i) Não

8) a) Falsa
b) Falsa
c) Verdadeira
d) Falsa
e) Verdadeira
f) Verdadeira
g) Falsa
h) Falsa
i) Falsa
j) Falsa
k) Falsa
l) Verdadeira
m) Falsa
n) Falsa

9) a) Falsa
b) Verdadeira
c) Falsa
d) Verdadeira
e) Verdadeira
f) Verdadeira
g) Verdadeira
h) Falsa
i) Verdadeira
j) Verdadeira
k) Falsa
l) Verdadeira
m) Verdadeira
n) Verdadeira
o) Falsa
p) Falsa

q) Verdadeira
r) Falsa

10) a) H é contraditória $\Leftrightarrow \forall$ int. I, I[H]=F
$\Leftrightarrow \forall$ int. I, I[H $\rightarrow$ G]=T
$\Rightarrow$ (H $\rightarrow$ G) é válida.

b) H é tautologia e G é contraditória
$\Leftrightarrow \forall$ int. I, I[H]=T e $\forall$ int. I, I[G]=F
$\Rightarrow \forall$ int. I, I[H $\rightarrow$ G]=F
$\Rightarrow$ (H $\rightarrow$ G) é contraditória.

c) Falso em a) e verdadeiro em b).

13) a) Falsa
b) Verdadeira
c) Falsa

14) Não

15) a) Não é satisfatível.
b) Satisfatível
c) Satisfatível
d) Satisfatível
e) Satisfatível
f) Satisfatível
g) Não é satisfatível

16) a) Não
b) Não
c) Sim

17) O conjunto não é satisfatível. Suponha que $\{\neg G, E \rightarrow \neg H, H\}$ seja satisfatível. Logo, $\exists$ int. I; $I[\neg G]=I[E \rightarrow \neg H]=I[H]=T$. Mas se I[H]=T, como H implica G, então I[G]=T, o que é um absurdo pois $I[\neg G]=T$.

18) a) Considere as associações: P = Marcos está feliz, Q = Sílvia foi ao baile, R = Marcos foi ao baile. O conjunto é representado pelo conjunto de fórmulas

$$\{\neg P \vee (Q \rightarrow R), P \rightarrow \neg Q, R \rightarrow Q\}$$

CAPÍTULO 4

Métodos para determinação da validade de fórmulas da Lógica Proposicional

Introdução

Um dos passos freqüentemente utilizados no estudo da lógica corresponde à análise dos mecanismos que produzam ou verifiquem os argumentos válidos representados na linguagem da lógica. Este capítulo analisa três métodos para a determinação da validade de fórmulas da Lógica Proposicional. Os métodos da tabela verdade, da árvore semântica e da negação ou absurdo são considerados. Como é visto a seguir, esses métodos se equivalem em muitos aspectos. Entretanto, dependendo da fórmula, há métodos mais eficientes na demonstração da validade. Os princípios definidos pelo método da negação ou absurdo são gerais e podem ser utilizados em outros tipos de demonstração, como demonstrações por refutação. Esta técnica de demonstração é comum em várias áreas da Computação e na Matemática.

Método da Tabela Verdade

O método da tabela verdade é o método da força bruta utilizado na determinação da validade de fórmulas da Lógica Proposicional. Dada uma fórmula H, suponha P_1, P_2, ..., P_n, seus símbolos proposicionais. No método da tabela verdade são consideradas todas as possibilidades de valores de verdade associados a esses símbolos proposicionais. A primeira linha da tabela é definida na Tabela 1.

Tabela 1 Tabela verdade associada à fórmula H.

P_1	P_2	....	P_n	H

As outras linhas da tabela são preenchidas com todas as possíveis combinações de valores de verdade dos símbolos proposicionais. Assim, para determinar a vali-

dade de H, são consideradas todas as possibilidades $I[P_i] = T$, ou $I[P_i] = F$ para i tal que $1 \leq i \leq n$. Se H possui n símbolos proposicionais, ocorrem 2^n possibilidades. Devido a este fato, o método da tabela verdade não é indicado para fórmulas com muitos símbolos proposicionais.

Exemplo (leis de De Morgan). Este exemplo demonstra a validade das leis de De Morgan utilizando tabelas verdade. A primeira lei de De Morgan é definida pela fórmula

$$H = \neg(P \wedge Q) \leftrightarrow ((\neg P) \vee (\neg Q)),$$

que é uma tautologia. Essa lei define uma regra para a distribuição do conectivo $\neg$ em uma conjunção. Observe que o conectivo $\wedge$ se transforma em $\vee$. A tabela verdade associada a H é

Tabela 2 Tabela verdade associada às fórmulas $\neg(P \wedge Q)$, $(\neg P \vee \neg Q)$ e H.

P	Q	$\neg(P \wedge Q)$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$	H
T	T	F	F	T
T	F	T	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Na Tabela 2 a primeira linha indica que

se $I[P] = T$ e $I[Q] = T$, então $I[\neg(P \wedge Q)] = F$, $I[(\neg P) \vee (\neg Q)] = F$ e $I[H] = T$.

Observe também que a coluna da fórmula H contém apenas o símbolo de verdade T. Isto significa que, para qualquer combinação de valores de verdade para os símbolos P e Q, a fórmula H é interpretada como verdadeira. Em outras palavras, para qualquer interpretação I, $I[H] = T$. Portanto, H é uma tautologia. Além disso, como H é uma tautologia, então

$$\neg(P \wedge Q) \text{ equivale a } (\neg P \vee \neg Q).$$

A segunda lei de De Morgan é definida pela fórmula G a seguir, que também é uma tautologia

$$G = \neg(P \vee Q) \leftrightarrow ((\neg P) \wedge (\neg Q)).$$

Observe como a segunda lei de De Morgan é similar à primeira. Neste caso, a lei é uma regra para a distribuição do conectivo $\neg$ em uma disjunção, onde o conectivo $\vee$ se transforma em $\wedge$. A tabela verdade associada a G é

Tabela 3 Tabela verdade associada às fórmulas $\neg(P \vee Q)$, $(\neg P \wedge \neg Q)$ e G.

P	Q	$\neg(P \vee Q)$	$(\neg P) \wedge (\neg Q)$	G
T	T	F	F	T
T	F	F	F	T
F	T	F	F	T
F	F	T	T	T

A Tabela 3 é análoga àquela indicada na primeira lei de De Morgan. A coluna da fórmula G contém apenas o símbolo de verdade T. Logo, G é uma tautologia e

$$\neg(P \vee Q) \text{ equivale a } (\neg P) \wedge (\neg Q).$$

A partir da tabela verdade associada a uma fórmula H várias propriedades semânticas são obtidas. Se a coluna de H contém apenas o símbolo T, então H é uma tautologia. Por outro lado, se a coluna de H contém apenas o símbolo F, então H é contraditória. Finalmente, a fórmula H é satisfatível quando há pelo menos um símbolo T em sua coluna. O método da tabela verdade é aplicável a fórmulas que contêm um pequeno número de símbolos proposicionais. Nestes casos, as tabelas são pequenas. Entretanto, quando a fórmula contém muitos símbolos proposicionais isso não ocorre. Considere a fórmula

$$H = P_1 \rightarrow ((P_2 \wedge P_3) \rightarrow ((P_4 \wedge P_5) \rightarrow ((P_6 \wedge P_7) \rightarrow P_8))).$$

Neste caso, há 8 símbolos proposicionais e a tabela verdade associada a H possui 256 linhas. Uma tabela um "pouco" grande para ser elaborada manualmente.

Método da Árvore Semântica

O método da árvore semântica determina a validade de uma fórmula a partir da estrutura de dados denominada árvore. Uma árvore é um conjunto de nós ou vértices ligados por arestas conforme indicado na figura a seguir, onde os nós estão rotulados por números inteiros. Os nós finais, 2, 6, 7 e 5 são denominados por folhas e o nó 1 é a raiz da árvore.

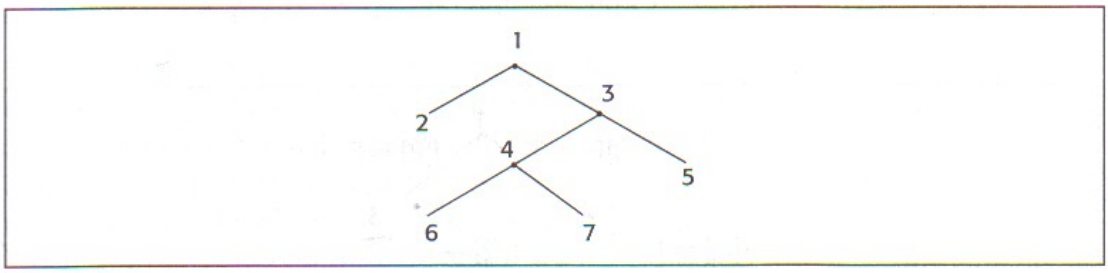


Figura 1 Exemplo de árvore.

O exemplo a seguir determina a validade de uma fórmula utilizando o método da árvore semântica.

Exemplo (lei da contraposição). Este exemplo demonstra que a fórmula

$$H = (P \rightarrow Q) \leftrightarrow ((\neg Q) \rightarrow (\neg P))$$

é uma tautologia utilizando o método da árvore semântica.

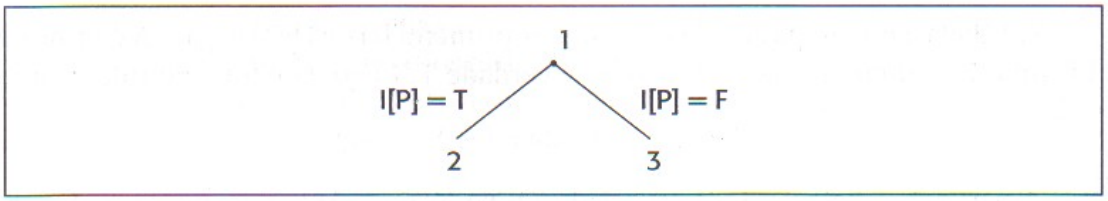


Figura 2 Início da árvore semântica.

A Figura 2 indica a árvore inicial. Na árvore semântica inicial as arestas são rotuladas por I[P] = T e I[P] = F, que são as duas possibilidades de valor de verdade para P. O nó número 2 corresponde à fórmula

$$\text{Nó } 2 = (P \rightarrow Q) \leftrightarrow ((\neg Q) \rightarrow (\neg P)).$$
$$\qquad\qquad T \qquad\qquad\qquad\qquad T$$

Observe que na fórmula acima o significado de P é colocado abaixo do símbolo. A partir do significado de P, é determinado o significado $(\neg P)$, como é indicado a seguir:

$$\text{Nó } 2 = (P \rightarrow Q) \leftrightarrow ((\neg Q) \rightarrow (\neg P)).$$
$$\qquad\qquad T \qquad\qquad\qquad\qquad FT$$

Analogamente, o nó 3 corresponde à fórmula:

$$\text{Nó } 3 = (P \rightarrow Q) \leftrightarrow ((\neg Q) \rightarrow (\neg P)).$$
$$\qquad\qquad F\ T\ T\ T \qquad\qquad T\ TF$$

Observe que, neste caso, apenas com o significado de P é obtido T abaixo do conectivo $\leftrightarrow$, o que significa que H é verdadeira quando P é falso, independente de Q.

A seguir, a árvore anterior é estendida obtendo

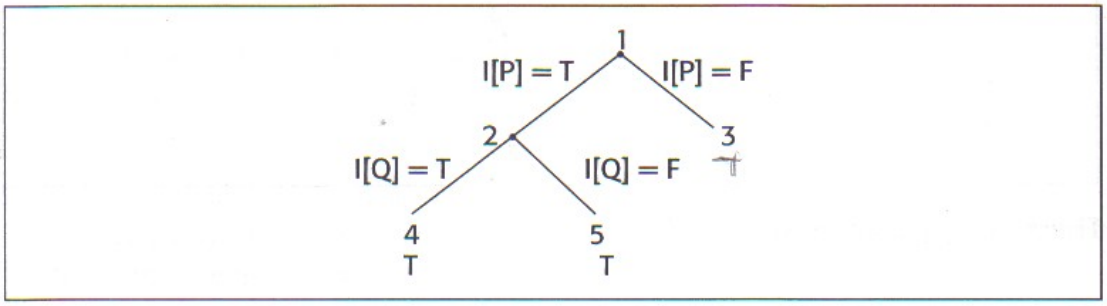


Figura 3 Desenvolvimento da árvore semântica.

O nó 4 corresponde à fórmula:

$$\text{Nó } 4 = (P \rightarrow Q) \leftrightarrow ((\neg Q) \rightarrow (\neg P))$$
$$\qquad\qquad T\ T\ T\ T \qquad FT\ T \qquad FT$$

Neste caso, todos os significados estão determinados. Um símbolo T abaixo do conectivo $\leftrightarrow$ significa que a fórmula H é verdadeira quando P e Q são verdadeiros. O símbolo semântico T é escrito abaixo do nó 4, na árvore semântica. Seguindo esse raciocínio, o nó 5 corresponde à fórmula:

$$\text{Nó } 5 = (P \rightarrow Q) \leftrightarrow ((\neg Q) \rightarrow (\neg P)).$$
$$\quad\quad\quad T\ F\ F\ T \quad\quad TF\ \ F\ \ FT$$

Novamente, abaixo do conectivo $\leftrightarrow$ é escrito o símbolo semântico T. Este símbolo é escrito abaixo do nó 5 na árvore semântica.

A conclusão é que a fórmula é uma tautologia pois o símbolo T aparece em todas as folhas da árvore.

A validade da fórmula H, indicada acima, define a lei da contraposição. Esta lei tem conseqüências importantes em métodos de demonstração. Como H é uma tautologia, então

$$(P \rightarrow Q) \text{ equivale a } (\neg Q \rightarrow \neg P).$$

Logo,

$$P \text{ implica } Q \Leftrightarrow \neg Q \text{ implica } \neg P.$$

Neste sentido, se o objetivo é demonstrar que P implica Q, é possível considerar equivalentemente $\neg Q$ implica $\neg P$. Há duas possibilidades de demonstração para uma implicação.

Finalmente, observe que se as folhas da árvore semântica resultante estiverem todas rotuladas com F, então a fórmula objeto da análise é contraditória. Se pelo menos uma folha estiver rotulada com T, então a fórmula e satisfatível.

Método da Negação ou Absurdo

O método da negação ou absurdo, analisado a seguir, é um método geral de demonstração, que neste contexto é utilizado para demonstrar a validade de fórmulas da Lógica Proposicional. Neste método é considerada inicialmente a negação daquilo que se pretende demonstrar. Assim, dada uma fórmula H, se o objetivo é demonstrar sua validade, supõe-se que H não é uma tautologia. A partir desta suposição, é utilizado um conjunto de deduções para concluir um fato contraditório ou absurdo. Desta forma, como se obtém um absurdo, a conclusão é que a suposição inicial é falsa. Em outras palavras, se a suposição inicial diz que H não é uma tautologia e após uma seqüência de deduções é concluído um absurdo, então a não-validade de H é um absurdo. Portanto, a conclusão final é que H é uma tautologia. O exemplo a seguir ilustra o método, que também é denominado refutação.

Exemplo (lei da transitividade). Este exemplo demonstra a validade da lei da transitividade para o conectivo $\rightarrow$. Esta lei é definida pela fórmula H a seguir, que é uma tautologia.

$$H = ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$$

Observe que a transitividade diz que se $(P \rightarrow Q)$ e $(Q \rightarrow R)$ são fórmulas verdadeiras, então $(P \rightarrow R)$ também é uma fórmula verdadeira. A demonstração da validade de H segundo o método da negação ou absurdo segue os passos a seguir. Suponha, por absurdo que H não é uma tautologia. Logo, é possível interpretar H como sendo falsa, isto é, existe uma interpretação I tal que I[H] = F. Este fato é denotado colocando o símbolo F abaixo do conectivo $\rightarrow$ na fórmula H, como é indicado a seguir.

$$H = ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R).$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad F$$

Como I[H] = F, então

$$I[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)] = T \text{ e } I[(P \rightarrow R)] = F.$$

Isto é, o antecedente de H é verdadeiro e o conseqüente é falso segundo a interpretação I. Isto é indicado colocando T e F no antecedente e no conseqüente de H, respectivamente.

$$H = ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R).$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad T \qquad\qquad\qquad\qquad F \quad F$$

A partir desses valores de verdade, os valores de verdade das outras subfórmulas são obtidos. Assim, o próximo passo é dado pela fórmula a seguir.

$$H = ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R).$$
$$\qquad\quad T \quad T \quad T \qquad F \quad T \quad F \quad F$$

Neste ponto, já é possível concluir que I[P] = T e I[R] = F. Estes valores de verdade são distribuídos pela fórmula:

$$H = ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R).$$
$$\quad T \quad T \quad T \quad T \qquad F \quad F \quad F \quad T \quad F \quad F$$

Observe que na fórmula anterior há duas subfórmulas:

$$(P \rightarrow Q) \text{ e } (Q \rightarrow R)$$
$$T \quad T \qquad\qquad T \quad F$$

A partir da subfórmula $(P \rightarrow Q)$, o resultado I[Q] = T é concluído. Entretanto, da subfórmula $(Q \rightarrow R)$, outro resultado, I[Q] = F é obtido. Logo, há um absurdo pois Q não pode ser interpretado como verdadeiro e falso ao mesmo tempo, o que é indicado na fórmula a seguir.

$$H = ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R).$$
$$T \quad T \quad T \quad T \quad F \quad T \quad F \qquad F \quad T \quad F \quad F$$
$$\qquad\qquad ☹ \qquad\qquad ☹$$

Portanto a suposição inicial é falsa, isto é, não existe interpretação I tal que I[H] = F. Não é possível interpretar H como sendo falsa. Logo, H é uma tautologia.

Demonstração da contradição. Dada uma fórmula H, o método da negação ou absurdo também se aplica para demonstrar se H é contraditória. Neste caso, a afirmação inicial deve ser negada. Logo, para demonstrar que H é contraditória, deve-se inicialmente supor que H não é contraditória, isto é, que existe pelo menos uma interpretação I tal que I[H] = T. O raciocínio segue de maneira análoga ao descrito acima. Caso se obtenha uma contradição ou absurdo, então está demonstrado que H é contraditória.

Aplicação do método às fórmulas com conectivo →. O método da negação ou absurdo se aplica nos casos em que se tem a negação do conectivo →. Neste caso, supondo a falsidade da fórmula composta por →, obtém uma única possibilidade para os significados do antecedente e do conseqüente. O antecedente deve ser verdadeiro e o conseqüente falso. Geralmente, a existência de uma única possibilidade para os significados simplifica a demonstração.

Aplicação do método às fórmulas com conectivo ∧. A observação anterior se aplica analogamente às fórmulas que contêm o conectivo ∧. Neste caso, o método da negação ou absurdo se aplica nos casos em que se tem a veracidade do conectivo ∧. Supondo a veracidade da fórmula A ∧ B, obtém uma única possibilidade para os significados das subfórmulas A e B que compõem a conjunção. Estas subfórmulas devem ser verdadeiras. De forma análoga, supondo a falsidade da fórmula A ∨ B, obtém-se uma única possibilidade para os significados de A e B.

Generalização do método. O método da negação ou absurdo é utilizado nesta seção na demonstração da validade ou contradição de fórmulas da Lógica Proposicional. Entretanto, ele possui ampla aplicação em outros tipos de demonstrações. Nesses casos é negada a afirmação que se deseja demonstrar. Após um conjunto de deduções, caso se obtenha um absurdo, então a afirmação inicial é verdadeira.

A ausência do absurdo. No método da negação ou absurdo, supõe-se inicialmente a negação da asserção que se pretende demonstrar. Caso se obtenha um absurdo, no final da demonstração, é concluída a veracidade da asserção. Entretanto, podem ocorrer casos em que este absurdo não é obtido. Nestes casos, como não se obtém o absurdo procurado, nada se pode concluir sobre a veracidade da asserção inicial.

Exemplo (ausência de absurdo). Este exemplo utiliza o método da negação ou absurdo para demonstrar se a fórmula H é uma tautologia.

$$H = (P \rightarrow Q) \leftrightarrow ((\neg P) \rightarrow (\neg Q))$$

Neste caso, supõe por absurdo que H não é uma tautologia. Tal fato é expresso pelo símbolo F sob o conectivo ↔ em H, conforme indicado a seguir.

$$H = (P \rightarrow Q) \underset{F}{\leftrightarrow} ((\neg P) \rightarrow (\neg Q))$$

A partir desta situação, há duas possibilidades:

Possibilidade 1: $H = (P \rightarrow Q) \leftrightarrow ((\neg P) \rightarrow (\neg Q))$

T F F

Desenvolvendo esta possibilidade, obtém-se:

$$H = (P \rightarrow Q) \leftrightarrow ((\neg P) \rightarrow (\neg Q))$$
$$F\ T\ T\ F \quad TF\ F \quad F\ T$$

onde não há nenhum absurdo.

Possibilidade 2: $H = (P \rightarrow Q) \leftrightarrow ((\neg P) \rightarrow (\neg Q))$

F F T

Analogamente ao que ocorre na possibilidade 1, desenvolvendo a possibilidade 2 não se obtém nenhum absurdo, conforme é indicado a seguir:

$$H = (P \rightarrow Q) \leftrightarrow ((\neg P) \rightarrow (\neg Q))$$
$$T\ F\ F\ F \quad FT\ T \quad TF$$

Como não é obtido absurdo em nenhuma possibilidade, não se pode concluir que H é uma tautologia. De fato, H não é uma tautologia, pois a partir dos significados obtidos é possível obter interpretação I tal que I[H]=F. Considere, por exemplo, a possibilidade 1, onde I[P] = F e I[Q] = T. Neste caso, I[H]=F.

Exemplo (ausência de absurdo). Este exemplo utiliza o método da negação ou absurdo para demonstrar se a fórmula H é uma tautologia.

$$H = (P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$$

Neste caso, supõe por absurdo que H não é uma tautologia. Tal fato é expresso pelo símbolo F sob o conectivo $\leftrightarrow$ em H, conforme indicado a seguir.

$$H = (P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$$
$$F$$

A partir desta situação, há duas possibilidades:

Possibilidade 1:

$$H = (P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$$
$$T \quad F \quad F$$

Desenvolvendo esta possibilidade, obtém

$$H = (P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$$
$$T\ T_F\ F \quad F \quad FT\ F\ F$$

onde ocorre um absurdo. Se houvesse apenas esta possibilidade a ser considerada, poderia se concluir que H é uma tautologia. Mas não é isto que ocorre. Analisando a próxima possibilidade é verificada a ausência de absurdo.

Possibilidade 2:

$$\begin{array}{c} H = (P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q) \\ \quad\quad F \quad\quad F \quad\quad T \end{array}$$

Desenvolvendo esta possibilidade, obtém-se:

$$\begin{array}{c} H = (P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q) \\ \quad F\,F\,T \quad F \quad TF\,T\,T \end{array}$$

onde não há nenhum absurdo. Como nesta possibilidade não ocorre absurdo, H não é tautologia. Isto ocorre pois se I[P]=F e I[Q]=T, então I[H]=F.

Observe que H seria tautologia somente no caso da presença de absurdos em todas as possibilidades.

Este capítulo analisou um conjunto de métodos para a determinação da validade de fórmulas da Lógica Proposicional. Foi demonstrado, por exemplo, que a fórmula $(P \vee (\neg P))$ é uma tautologia. Utilizando a mesma demonstração é possível concluir que $(Q \vee (\neg Q))$ também é uma tautologia. Observe que as estruturas sintáticas destas fórmulas são idênticas. A única diferença é a troca do símbolo P por Q. Assim, a demonstração da validade de $(Q \vee (\neg Q))$ é idêntica à demonstração da validade de $(P \vee (\neg P))$. A nova demonstração é obtida trocando o símbolo P por Q. Neste sentido, são considerados os esquemas de fórmulas, que representam conjuntos de fórmulas. As fórmulas $(P \vee \neg P)$ e $(Q \vee \neg Q)$ são representadas pelo esquema $H \vee (\neg H)$ onde H é uma fórmula da Lógica Proposicional. Observe que o esquema de fórmula acima representa também as fórmulas

$$((P \rightarrow Q) \vee (\neg(P \rightarrow Q))) \text{ ou } ((P \wedge R) \vee (\neg(P \wedge R)))$$

A demonstração da validade de um esquema de fórmula segue os mesmos passos indicados pelos métodos analisados neste capítulo. Ao se demonstrar que o esquema de fórmula $(H \vee \neg H)$ é uma tautologia, está se demonstrando a validade de inúmeras fórmulas, como, por exemplo, as fórmulas indicadas acima.

Observação. Neste livro, os esquemas de fórmulas são denominados simplesmente por fórmulas.

Exercícios

Demonstre, utilizando qualquer um dos métodos estudados neste capítulo, que as fórmulas a seguir são tautologias.

Leis de negação.

1) $(\neg(\neg H)) \leftrightarrow H$, $\neg(H \rightarrow G) \leftrightarrow (H \wedge (\neg G))$, $\neg(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow (\neg H \leftrightarrow G)$, $\neg(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow (H \leftrightarrow \neg G)$

Leis de definição de conectivos.

2) $(H \vee G) \leftrightarrow (\neg H \rightarrow G)$, $(H \vee G) \leftrightarrow ((H \rightarrow G) \rightarrow G)$, $(H \wedge G) \leftrightarrow (H \leftrightarrow (H \rightarrow G))$
3) $(H \rightarrow G) \leftrightarrow (\neg H \vee G)$, $(H \rightarrow G) \leftrightarrow \neg(H \wedge \neg G)$.
4) $(H \rightarrow G) \leftrightarrow (H \leftrightarrow (H \wedge G))$, $(H \rightarrow G) \leftrightarrow (\neg G \rightarrow \neg H)$

5) $(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow ((H \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow H))$, $(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow ((\neg H \vee G) \wedge (H \vee \neg G))$,
6) $(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow ((H \wedge G) \vee (\neg H \wedge \neg G))$

Leis de distributividade.

7) $(H \wedge (G \vee E)) \leftrightarrow ((H \wedge G) \vee (H \wedge E))$, $(H \vee (G \wedge E)) \leftrightarrow ((H \vee G) \wedge (H \vee E))$

Leis de comutatividade.

8) $(H \wedge G) \leftrightarrow (G \wedge H)$, $(H \vee G) \leftrightarrow (G \vee H)$, $(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow (G \leftrightarrow H)$

Leis de associatividade.

9) $((H \wedge G) \wedge H) \leftrightarrow (H \wedge (G \wedge H))$, $((H \vee G) \vee H) \leftrightarrow (H \vee (G \vee H))$,
$((H \leftrightarrow G) \leftrightarrow H) \leftrightarrow (H \leftrightarrow (G \leftrightarrow H))$

Leis de transitividade.

10) $((H \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow H)) \rightarrow (H \rightarrow H)$, $((H \leftrightarrow G) \wedge (G \leftrightarrow H)) \rightarrow (H \leftrightarrow H)$
11) $(H \vee (H \wedge G)) \leftrightarrow H$, $(H \wedge (H \vee G)) \leftrightarrow H$.

Outras leis.

12) $(\neg H) \vee H$, $H \rightarrow H$, $H \leftrightarrow H$, $H \leftrightarrow (H \wedge H)$, $H \leftrightarrow (H \vee H)$, $H \leftrightarrow (H \wedge (H \vee G))$,
$H \leftrightarrow (H \vee (H \wedge G))$
13) $(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow ((\neg H) \leftrightarrow (\neg G))$, $((H \wedge G) \rightarrow H) \leftrightarrow (H \rightarrow (G \rightarrow H))$, $H \rightarrow (G \rightarrow (H \rightarrow H))$
14) $H \rightarrow (H \vee G)$, $(H \wedge G) \rightarrow H$

Leis dos valores de verdade.

15) $(\neg \mathit{true}) \leftrightarrow \mathit{false}$, $(\neg \mathit{false}) \leftrightarrow \mathit{true}$, $(H \wedge \mathit{true}) \leftrightarrow H$, $(H \wedge \mathit{false}) \leftrightarrow \mathit{false}$,
$(H \vee \mathit{true}) \leftrightarrow \mathit{true}$
16) $(H \vee \mathit{false}) \leftrightarrow H$, $(H \rightarrow \mathit{false}) \leftrightarrow (\neg H)$, $(H \rightarrow \mathit{true}) \leftrightarrow \mathit{true}$, $(\mathit{true} \rightarrow H) \leftrightarrow H$
17) $(\mathit{false} \rightarrow H) \leftrightarrow \mathit{true}$, $H \leftrightarrow (\mathit{true} \leftrightarrow H)$, $H \leftrightarrow (\mathit{false} \leftrightarrow (\neg H))$
18) Considere G uma das fórmulas indicadas a seguir.
   a) $\neg P \vee Q$
   b) $\neg Q \rightarrow P$
   c) $P \leftrightarrow Q$
   d) $P \rightarrow Q$
   e) $\neg Q \rightarrow \neg P$
   f) $P \wedge \neg Q$

   Determine, utilizando o método da negação ou absurdo, os casos em que:
   i) $(P \wedge Q)$ implica G
   ii) $(P \rightarrow Q)$ implica G
   iii) $(P \vee Q)$ implica G
   iv) $(P \leftrightarrow Q)$ implica G
19) Demonstre se as fórmulas a seguir são tautologias.
   $H = P_1 \rightarrow (P_2 \rightarrow (P_3 \rightarrow (P_4 \rightarrow (P_5 \rightarrow (P_6 \rightarrow (P_7 \rightarrow P_1))))))$
   $G = (((P \wedge S) \leftrightarrow P) \leftrightarrow (P \rightarrow P_1)) \rightarrow ((((P \wedge Q) \leftrightarrow P) \wedge ((P \vee R) \leftrightarrow R)) \rightarrow P)$
   $E = P_1 \rightarrow ((P_2 \wedge P_3) \rightarrow ((P_4 \wedge P_5) \rightarrow ((P_6 \wedge P_7) \rightarrow P_8)))$

20) Considere a fórmula H,

$$H = \neg((P \wedge Q) \vee R \vee S) \wedge (P_1 \wedge Q_1)$$

a) Construa uma árvore semântica associada a H e identifique se H é uma tautologia, é satisfatível ou contraditória.

b) Quantas linhas tem a tabela verdade associada a H?

21) a) Demonstre, utilizando o método da negação ou absurdo, se as fórmulas a seguir são tautologias ou não.

$$G = (\neg P \rightarrow Q) \rightarrow ((\neg Q \rightarrow P) \wedge (P \vee Q))$$
$$H = (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow R)$$
$$G = H \leftrightarrow (H \vee G)$$

b) Na demonstração que G não é tautologia, quando se considera I[H] = T, obtém-se absurdo. Mas quando I[H] = F não é observado nenhum absurdo. Comente o significado de tais fatos.

22) Considere as fórmulas H a seguir:

$$H = (P \wedge Q) \rightarrow (R \wedge S)$$
$$H = \neg((P \wedge Q) \vee R \vee S) \wedge (P_1 \wedge Q_1)$$

a) Construa a árvore semântica associada a cada fórmula H.

b) Identifique, a partir da árvore semântica determinada no item anterior, uma interpretação I tal que I[H] = F e uma interpretação J tal que J[H] = T.

23) a) Considere as fórmulas a seguir:

$$H = (\neg(P \vee \neg Q) \vee R) \vee (R \rightarrow (Q \rightarrow P))$$
$$E = (((P \wedge S) \leftrightarrow P) \leftrightarrow (P \rightarrow P_1)) \rightarrow ((((P \wedge Q) \leftrightarrow P) \wedge ((P \wedge R) \leftrightarrow R) \rightarrow P)$$
$$G = (P \vee Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$

Utilize o método da negação ou absurdo para demonstrar se tais fórmulas são tautologias. No caso em que a fórmula não for uma tautologia, utilize o resultado do método para identificar uma interpretação, que interpreta a fórmula como sendo falsa.

b) Suponha que I[P]=T, o que se pode concluir a respeito de I[H], I[G], onde

$$H = ((((P \wedge S) \leftrightarrow P_2) \leftrightarrow (P_3 \rightarrow P_4)) \rightarrow ((((P \wedge Q) \leftrightarrow P_1) \wedge ((P_5 \wedge R_1) \leftrightarrow R) \rightarrow P)) \rightarrow ((P_4 \wedge P) \leftrightarrow P_4)$$

$$G = (((R \vee (S \leftrightarrow P_1)) \rightarrow ((P_2 \vee S_1) \leftrightarrow R_3)) \rightarrow P) \wedge (\neg P \leftrightarrow (\neg P \rightarrow ((R_5 \rightarrow P) \leftrightarrow (S \wedge P)))) \ ?$$

24) (Alírio indeciso) Considere as três afirmações a seguir.

H_1: Se Alírio toma vinho e o vinho está ruim, ele fica com ressaca.

H_2: Se Alírio fica com ressaca, então ele fica triste e vai para casa.

H_3: Alírio vai ao seu encontro romântico com Virgínia ou ele fica triste e vai para casa.

Suponha que as três afirmações anteriores são verdadeiras. A partir deste fato, qual das afirmações a seguir também é verdadeira.

G_1: Se Alírio toma vinho e este está ruim, então ele perde seu encontro romântico com Virgínia.

G_2: Se Alírio fica com ressaca e vai para casa, então ele não perde seu encontro romântico com Virgínia.

G_3: Se o vinho está ruim, então Alírio não o toma ou ele não fica com ressaca.
G_4: Se o vinho está ruim ou Alírio fica com ressaca, então ele fica triste.
G_5: Se Alírio toma vinho e vai para casa, então ele não fica triste se o vinho está ruim.

25) (Grandes amores) Utilize os princípios da Lógica Proposicional para responder as seguintes questões.

i) Suponha que as duas afirmações, a seguir, são verdadeiras.
   1) Ricardo ama Lúcia ou Elaine.
   2) Se Ricardo ama Lúcia, então ele também ama Elaine.
   Conclui-se, necessariamente, que Ricardo ama Lúcia?
   Conclui-se, necessariamente, que Ricardo ama Elaine?

ii) Suponha que alguém faça a seguinte pergunta ao Ricardo:
   a) "É realmente verdade que se você ama Lúcia, então você também ama Elaine?"
   Suponha que Ricardo responda o seguinte:
   b) "Se isto é verdade, então amo Lúcia."
   Conclui-se deste diálogo que Ricardo ama Lúcia?
   Conclui-se deste diálogo que Ricardo ama Elaine?

iii) Suponha que alguém faça a seguinte pergunta ao Ricardo.
   a) "É realmente verdade que se você ama Lúcia, então você também ama Elaine?"
   Suponha que Ricardo responda o seguinte:
   b) "Se isto é verdade, então amo Lúcia e se eu amo Lúcia, então isto é verdade."
   Conclui-se deste diálogo que Ricardo necessariamente ama Lúcia?
   Conclui-se deste diálogo que Ricardo necessariamente ama Elaine?

iv) Suponha que Clotilde, aquela que sabe da vida de todos, faça as seguintes afirmações.
   Com certeza Ricardo ama Lúcia e Elaine.
   É possível a partir da afirmação de Clotilde concluir a afirmação a seguir?
   Dizer que Ricardo ama Lúcia equivale a dizer que
   se Ricardo ama Lúcia então ele também ama Elaine.

v) Suponha que Clotilde modifique sua opinião e afirme que
   Ricardo ama Lúcia ou Elaine.
   Pode-se concluir que a afirmação de Clotilde equivale à afirmação a seguir?
   Se Ricardo não ama Lúcia então ele ama Elaine.

vi) A partir deste instante, há mais uma pessoa, a Patrícia. Há três meninas: Lúcia, Elaine e Patrícia. Suponha que os fatos sejam verdadeiros.
   a) Ricardo ama pelo menos uma das três meninas.
   b) Se Ricardo ama Lúcia, mas não ama Patrícia, então ele também ama Elaine.
   c) Ricardo ama Patrícia e Elaine ou não ama nenhuma das duas meninas.
   d) Se Ricardo ama Patrícia, então ele também ama Lúcia.
   A partir destes fatos, qual das meninas Ricardo necessariamente ama?

26) Considere as sentenças a seguir:
   H_1: Se Adriane não é inteligente, então Joyce é linda.
   H_2: Se Joyce não é loura, então Érica é interessante.
   H_3: Se Érica é linda ou interessante, então Adriane é inteligente.
   H_4: Se Luciana não é inteligente, então Érica é interessante.
   H_5: Se Luciana é linda, então Érica é interessante.

Suponha que as sentenças acima são verdadeiras. A partir deste fato, deduza o atributo de cada uma das meninas. Considere na solução as restrições a seguir.

a) Há uma correspondência biunívoca entre pessoas e atributos.
b) Na solução, conclui-se que Joyce é loura.

27) Utilize os princípios da Lógica Proposicional para responder a seguinte questão. Suponha que a afirmação a seguir é verdadeira.

Se Júlio ama Simone,
então Júlio é um sortudo.

A partir deste fato, o que se pode concluir a respeito da afirmação a seguir?

Se Júlio não ama Simone ou é um sortudo,
então ele ama Simone ou é um sortudo.

28) Quatro detetives, Ana, Teresa, Cynthia e Melo, estão investigando as causas de um assassinato e cada um deles concluiu uma das afirmações a seguir:

Ana : Se há pouco sangue na cena do crime, então o matador é um profissional.
Teresa : Houve poucos ruídos no momento do crime ou o matador não é um profissional.
Cynthia : A vítima estava toda ensangüentada ou houve muitos ruídos no momento do crime.
Melo: Houve pouco sangue na cena do crime.

Determine se o conjunto de conclusões dos detetives é satisfatível.

29) Os quatro detetives do exercício anterior modificam suas opiniões e concluem.

Ana: Se há sangue na cena do crime, então o matador é um profissional.
Teresa: É falso que há sangue na cena do crime e o matador não é um profissional.
Cynthia: O matador não é um profissional e há sangue na cena do crime.
Melo: Há sangue na cena do crime.

a) Determine se o conjunto de conclusões dos detetives é satisfatível.
b) Determine se, a partir das conclusões de Teresa e Melo, pode-se concluir que o matador é profissional.
c) Determine se as conclusões das detetives Ana e Teresa são equivalentes.

30) Identifique, justificando sua resposta, se os argumentos a seguir são válidos ou não. Atenção! As justificativas devem ser dadas utilizando as definições formais de validade e implicação.

i) Se Irani me beija, fico louco(a)!
Irani não me beijou.
Portanto, não fiquei louco(a).

ii) Se Irani me beija, fico louco(a)!
Não fiquei louco(a).
Portanto, Irani não me beijou.

31) Determine, entre as afirmações a seguir, quais estão logicamente corretas.

a) Se Fidel é comunista, ele é ateu. Fidel é ateu, portanto ele é comunista.
b) Se a temperatura e os ventos permanecerem constantes, não choverá. A temperatura não permaneceu constante. Logo, se chover significa que os ventos não permaneceram constantes.

c) Se Fernandinho (aquele das Alagoas) ganhar as eleições, a corrupção aumentará se a impunidade permanecer alta. Se Fernandinho ganhar as eleições, a impunidade permanecerá alta. Portanto, se Fernandinho ganhar as eleições, a corrupção aumentará.

d) Se os investimentos em Uberlândia permanecerem constantes, os gastos da prefeitura aumentarão ou crescerá o desemprego. Se os gastos da prefeitura não aumentarem, os impostos municipais poderão ser reduzidos. Se os impostos municipais forem reduzidos e os investimentos em Uberlândia permanecerem constantes, não haverá desemprego. Portanto, os gastos da prefeitura não aumentarão.

e) Se x é positivo, então y é negativo. Se z é negativo, então y é negativo. Portanto, se x é positivo ou z é negativo, então y é negativo.

f) Se Dázio ama Carmem e Carmem é bonita, inteligente e sensível, então Dázio é feliz. Logo, se Dázio não é feliz, então Carmem não é bonita, inteligente e sensível.

g) Se Katielly está bonita, então Tony está feliz e se Tony está feliz, Danillo está preocupado. Se Danillo está preocupado, então Katielly está bonita. Portanto, não é verdade que se Danillo está preocupado, então Tony está feliz.

32) Considere o seguinte conjunto de argumentos:

Se Godofredo ama Gripilina.

então é possível concluir que:

Se Gripilina é bonita, inteligente e sensível,

então Godofredo é feliz.

Demonstre, utilizando conceitos da Lógica Proposicional, se a partir do conjunto de argumentos acima, podemos concluir que:

Godofredo não ama Gripilina ou

Gripilina não é bonita, não é inteligente e nem sensível ou

Godofredo é feliz.

33) Considere cinco alunas de Ciência da Computação: Letícia, Fernanda, Flávia, Lívia, Marília e as afirmações

a) Se Letícia não é linda, Fernanda não é inteligente.

b) Se Flávia não é sensível, Lívia é charmosa.

c) Se Marília é sensível, Letícia não é linda.

d) Se Lívia é charmosa, Fernanda é inteligente.

e) Flávia e Marília possuem as mesmas qualidades.

f) Se Fernanda não é linda, Lívia não é charmosa.

Encontre, pelo menos um conjunto de qualidades para quatro meninas, que sejam coerentes com as afirmações.

34) Jânio e Nicanor, sergipanos autênticos, afirmam o seguinte.

Jânio: Se o que vale é a emoção, então vivo a vida.

Nicanor: O que vale é a emoção e não vivo a vida.

Qual das duas situações ocorre?

a) As afirmações de Jânio e Nicanor são equivalentes.

b) A afirmação de Nicanor equivale à negação da afirmação de Jânio.

Sugestões e soluções de exercícios selecionados

19) Utilizando o método da negação ou absurdo, tem-se.

$$H = P_1 \to (P_2 \to (P_3 \to (P_4 \to (P_5 \to (P_6 \to (P_7 \to P_1))))))$$
$$\quad T \;\; F \;\; T \;\; F \;\; T \;\; F \;\; T \;\; F \;\; T \;\; F \;\; T \;\; F \;\; T \;\; F \;\; T_{F\ \text{absurdo}}$$

Portanto, H é tautologia.

$$G: (((P \wedge S) \leftrightarrow P) \leftrightarrow (P \to P_1)) \to ((((P \wedge Q) \leftrightarrow P) \wedge ((P \vee R) \leftrightarrow R)) \to P)$$
$$\quad F\;F \quad T\;F \;\; T \;\; F\;T \quad F \quad F\;F \quad T\;F \;\; T \;\; F \quad T \quad F\;F$$

Independente da interpretação dos símbolos S, P_1, Q e R não há absurdo, logo G não é tautologia.

23) a) Considere a fórmula

$$G = (P \vee Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$
$$\quad F\;F\;F \quad F \quad T\;F\;F \quad F$$

G não é uma tautologia. Dado I tal que I[P]=F e I[Q]=F, então I[G]=F. Os valores de verdade de P e Q estão abaixo dos símbolos P e Q respectivamente.

b) I[H]=T.

24) Traduza os fatos para a linguagem da Lógica Proposicional. Considere, por exemplo, as correspondências P_1 = Alírio toma vinho, P_2 = Alírio fica com ressaca, Determine correspondências para todos os fatos. Utilizando tais correspondências, defina as fórmulas da lógica proposicional $H_1, H_2, H_3, G_1, \ldots, G_5$. O conjunto de fórmulas $\{H_1, H_2, H_3\}$ implica em uma fórmula G_i se e somente se a fórmula $(H_1 \wedge H_2 \wedge H_3) \to G_i$ é uma tautologia. Quando isto ocorre, se H_1, H_2 e H_3 são verdadeiras, então G_i também é verdadeira.

25) i) Considere as associações: P = Ricardo ama Lúcia, Q = Ricardo ama Elaine

$$(\,(P \vee Q) \wedge (P \to Q)\,) \to P$$
$$\quad F\;T \;\; T \;\; T \quad F\;T \qquad F \;\; F$$

Como não há absurdo, então Ricardo não necessariamente ama Lúcia.

$$(\,(P \vee Q) \wedge (P \to Q)\,) \to Q$$
$$\quad F\;F \;\; F \;\; T_F\;F \;\; T \;\; F \qquad F \;\; F$$

Como há absurdo, então Ricardo necessariamente ama Elaine.

iii)

$$(((P \to Q) \to P) \wedge (P \to (P \to Q))) \to P$$
$$\quad F\;F_T \qquad T \;\; F \;\; T \quad F\;T \qquad\qquad F \;\; F$$

Como há absurdo, então Ricardo necessariamente ama Lúcia.

$$(((P \to Q) \to P) \wedge (P \to (P \to Q))) \to Q$$
$$\quad F \quad T \quad T \quad T \qquad F \quad F \;\; F$$

Há dois casos a considerar. I[P]=T ou I[P]=F

$$(((P \to Q) \to P) \wedge (P \to (P \to Q))) \to Q$$
$$\quad F\;T \;\; F \quad T_F\;F \quad T \quad T \quad F \qquad F \;\; F$$

Se I[P]=F, ocorre absurdo.

$$(((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \wedge (P \rightarrow (P \rightarrow Q))) \rightarrow Q$$
$$\quad T\ F\ F \quad T\ T \quad T\ T\ T \quad T\ F\ F \quad F\ F$$

Se I[P]=T, também ocorre absurdo. Portanto, Ricardo necessariamente ama Elaine.

iv) Neste caso, o diálogo é expresso por $(P \wedge Q) \rightarrow (P \leftrightarrow (P \rightarrow Q))$

v) Neste caso, o diálogo é expresso por $(\rceil P \vee Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)$

29) Considere as associações: P = há sangue na cena do crime, Q = o matador é um profissional.

Ana: $P \rightarrow Q$

Teresa: $\neg(P \wedge \neg Q)$

Cynthia: $\neg Q \wedge P$

Melo: P

a) O conjunto de conclusões não é satisfatível.

b) Basta determinar se $(\neg(P \wedge \neg Q) \wedge P) \rightarrow Q$ é uma tautologia.

c) Basta determinar se $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q)$ é uma tautologia.

30) Transforme a afirmações para fórmulas da lógica proposicional. Em seguida, identifique a validade das implicações.

31) Considere as associações: P = os investimentos em Uberlândia permanecerão constantes, Q = os gastos de prefeitura aumentarão, R = crescerá o desemprego. S = os impostos municipais poderão ser reduzidos. A representação na Lógica Proposicional é a seguinte:

$$((P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge (\neg Q \rightarrow S) \wedge ((S \wedge P) \rightarrow \neg R)) \rightarrow \rceil Q$$
$$F\ T \quad F \quad T \quad TF\ T\ T\ T \quad T\ F\ F \quad T \quad F\ F$$

Como não há absurdo, os argumentos não são válidos.

CAPÍTULO 5

O princípio da indução finita na Lógica

Introdução

Este capítulo considera o estudo do princípio da indução finita. Este princípio é um dos principais métodos utilizados na demonstração de resultados em diversas áreas da Computação e da Matemática. Em Computação, o princípio da indução é utilizado para demonstrar importantes resultados em linguagens formais, na teoria dos algoritmos, na teoria dos códigos, em Lógica etc. A análise do princípio da indução finita não faz parte dos três passos fundamentais no estudo da Lógica. Entretanto, devido à sua importância geral e utilização na demonstração de resultados em Lógica, o seu estudo é considerado em detalhes.

Condições Necessárias e Suficientes

Os termos "necessidade" e "suficiência", amplamente difundidos na análise lógica e matemática, são utilizados para denotar a implicação e a equivalência. O estudo do princípio da indução tem como ponto de partida a definição de tais termos cujos significados são considerados a seguir, a partir de alguns paradigmas.

Paradigmas que descrevem a necessidade e a suficiência. Quais são as condições necessárias para alguém se tornar um juiz? Uma condição necessária é que o indivíduo tenha se formado em um curso de direito. Este fato pode ser representado por

$$\text{juiz} \rightarrow \text{formado em direito}$$

o que significa que se o indivíduo é juiz, então ele é formado em direito. Mas apenas ser formado em direito não é suficiente para ser juiz. Para ser juiz é também necessário que o indivíduo tenha sido aprovado no exame da Ordem dos Advogados. Se o indivíduo é juiz, então ele é formado em direito e foi aprovado no exame da Ordem, o que é representado por

$$\text{juiz} \rightarrow (\text{formado em direito}) \wedge (\text{exame OAB})$$

As duas condições citadas são necessárias para alguém ser juiz, mas não são suficientes. Além delas é necessário que o profissional tenha dois anos de experiência em advocacia e tenha sido aprovado em concurso público para juiz. Tem-se que

juiz → (formado em direito) ∧ (exame OAB) ∧ (concurso público) ∧ (experiência)

Portanto, para ser juiz é necessário ser advogado, ter sido aprovado no exame da OAB, ter sido aprovado em concurso público para juiz e ter experiência de pelo menos dois anos advogando. Neste caso, as condições necessárias são também suficientes para alguém ser juiz, pois

(formado em direito) ∧ (exame OAB) ∧ (concurso público) ∧ (experiência) → juiz

Observe que a condição suficiente é o antecedente da implicação e a condição necessária é o conseqüente.

Uma outra situação onde a necessidade e a suficiência ocorrem é a seguinte. Que condições são necessárias para um aluno ser aprovado em Lógica? Quais são as condições suficientes? Certamente, identificar tais condições é importante para os alunos. Suponha que todo aluno que já foi aprovado em Lógica é estudioso. Tal fato pode ser representado por

aluno aprovado → aluno estudioso

Isto significa que ser estudioso é uma condição necessária para ser aprovado em Lógica. Mas apenas ser estudioso não é suficiente para ser aprovado. Suponha também que para ser aprovado é necessário ter um bom método de estudo. Isto significa que

aluno aprovado → tem bom método de estudo

Saber o princípio da indução também é outra condição necessária para ser aprovado em Lógica, o que é expresso por

aluno aprovado → aluno que sabe indução finita

Mas um aluno estudioso, que tem bom método de estudo e sabe indução finita será aprovado em Lógica? As três condições indicadas acima são necessárias para ser aprovado em Lógica? Mas será que elas são também suficientes? É difícil identificar todas as condições suficientes para ser aprovado. Tem-se apenas que as condições são necessárias mas não são suficientes. Neste caso,

aluno aprovado → (estudioso) ∧ (tem método) ∧ (sabe indução finita)

mas

(estudioso)∧(tem método) ∧ (sabe indução finita)
não implica ser aprovado em lógica

Considere um conjunto com n dominós enfileirados conforme a figura a seguir.

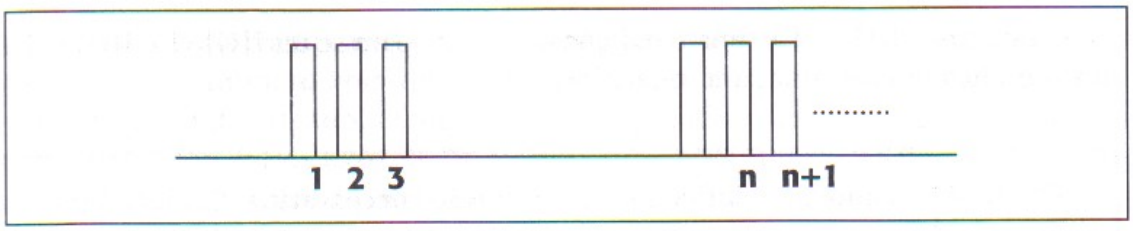


Figura 1 Uma fila de dominós.

Os dominós são enumerados e dispostos de tal forma que se o dominó número n é derrubado para a direita, então o subseqüente (número n+1) também é derrubado para direita. Considere a seguinte questão.

Que condição é suficiente para que o dominó n caia?

Se qualquer um dos dominós que precedem o dominó número n cair para a direita, então este também é derrubado. Portanto, há várias condições suficientes para que o dominó número n seja derrubado. Uma delas é a seguinte.

Uma condição suficiente para que o dominó número n caia é que o dominó 1 seja derrubado para a direita.

Basta que o dominó número 1 caia para a direita e isto é suficiente para que o mesmo ocorra com o dominó número n. Em uma linguagem lógica, isto significa:

se "dominó número 1 é derrubado para direita",
então "dominó número n cai".

Portanto, em uma linguagem lógica, o antecedente de uma implicação é uma condição suficiente para o conseqüente. Considere uma outra questão.

Qual é uma condição necessária para que o dominó número 1 possa ser derrubado para a direita?

Em outras palavras, o que deve ser permitido ocorrer para que o dominó número 1 possa ser derrubado para a direita? Se não for permitido derrubar o dominó número n, por exemplo, não será possível derrubar o dominó número 1. Portanto, a queda do dominó número n deve ser permitida, para que o dominó número 1 possa ser derrubado para direita. Logo, uma condição necessária para que o dominó número 1 possa cair para direita é que seja permitida a queda do dominó número n. Considerando a implicação

se dominó número 1 é derrubado para a direita, então dominó número n cai.

O conseqüente de uma implicação é uma condição necessária para que o antecedente possa ocorrer. Isto é, a condição necessária é aquela condição sem a qual nada pode ocorrer. A ocorrência da condição necessária no conseqüente deve ser permitida para que o antecedente ocorra.

A condição suficiente é o antecedente da implicação e a condição necessária é o conseqüente. Considere duas fórmulas H e G tais que H implica G. Por definição,

H implica G $\Leftrightarrow$ para toda interpretação de I, se I[H] = T, então I[G] = T.

Neste caso, I[H] = T é uma condição suficiente para se ter I[G]=T e I[G] = T é uma condição necessária para se ter I[H] = T.

Definição (condição suficiente e condição necessária). Dadas duas fórmulas H e G tais que H implica G, então H é uma condição suficiente para G e G é uma condição necessária para H.

No caso em que H equivale a G, tem-se que H implica G e G implica H. Logo, H é uma condição necessária e suficiente para G. Da mesma forma, G também é uma condição necessária e suficiente para H.

Um Paradigma que Descreve o Princípio da Indução

Esta seção apresenta um paradigma que descreve o princípio da indução. O objetivo é facilitar o entendimento deste princípio a partir de um paradigma simples. Considere novamente um conjunto infinito de dominós enumerados e enfileirados conforme a figura anterior. Um conjunto de condições suficientes para que todos os dominós sejam derrubados é indicado a seguir. Observe que há outros conjuntos de condições suficientes. Desta forma, o conjunto a seguir é denominado primeira forma.

Definição (condições suficientes, primeira forma).
i) Condição básica. O dominó número um é derrubado para a direita.
ii) Condição indutiva. Seja n um número arbitrário. Se o dominó número n é derrubado para direita, então o dominó número (n+1) também é derrubado para a direita.

Observe que as duas condições acima são imprescindíveis para garantir que todos os dominós sejam derrubados. Se apenas a condição básica (i) é verdadeira, então não se pode garantir que todos os dominós são derrubados. Pode ocorrer, por exemplo, a situação descrita na figura a seguir.

Figura 2 Uma fila de dominós.

Observe que neste caso o dominó número um é derrubado, mas ele está longe do dominó número dois, que não é derrubado. Desta forma, apenas o dominó número um é derrubado. O mesmo ocorre quando apenas a condição indutiva ii) é verdadeira. Neste caso, as distâncias entre os dominós é tal que se um dominó qualquer é derrubado, então o subseqüente também é derrubado. Entretanto, se o primeiro dominó não é derrubado não se pode garantir a derrubada dos outros. Além das condições básica e indutiva, indicadas na primeira forma em i) e ii), há outros tipos de condições que também são suficientes para a derrubada de todos os dominós. Um outro conjunto de condições suficientes é indicado a seguir.

Definição (condições suficientes: segunda forma).
i) Condição básica. O dominó número um é derrubado para a direita.
ii) Condição indutiva. Seja n um número arbitrário. Se todos os dominós, até o número n, são derrubados para a direita então o dominó número (n+1) também é derrubado para a direita.

Observe que as condições básicas da primeira e da segunda forma coincidem. Entretanto, a condição indutiva é ligeiramente modificada. Na segunda forma, se todos os dominós, até o número n, são derrubados, então o dominó número (n+1) também é derrubado. Na primeira forma, é considerada apenas a derrubada do dominó número n, o que determina a derrubada do dominó número n+1. Por outro lado, na segunda forma, o que provoca a derrubada do dominó número n+1 é a queda dos dominós 1,2,...,n.

O princípio da indução finita possui duas formas que correspondem às condições suficientes consideradas nesta seção. As duas formas do princípio da indução são definidas a seguir.

A Primeira Forma do Princípio da Indução Finita

A indução finita é um princípio utilizado freqüentemente nas demonstrações de resultados em matemática, lógica, teoria da computação etc. Como será visto a seguir, o princípio da indução finita é utilizado para demonstrar, por exemplo, que a igualdade

$$(1+2+...+n) = n(n+1)/2$$

é verdadeira para todo n. Em outras palavras, supondo que a asserção A(n) represente a igualdade acima, a indução finita é utilizada para demonstrar que A(n) é verdadeira para todo n. Suponha então que

$$A(n) \text{ representa a igualdade } (1+2+...+n) = n(n+1)/2,$$

o que pode ser representado de forma esquemática como

$$A(n) = \{(1+2+...+n) = n(n+1)/2\}.$$

A definição da primeira forma do princípio da indução finita é considerada a seguir. Esta definição se fundamenta na primeira forma das condições suficientes consideradas no paradigma da seção anterior. Além disso, considera-se A(n) é uma asserção qualquer que se refere a um inteiro n. O caso acima é um caso particular onde

$$A(n) = \{(1+2+...+n) = n(n+1)/2\}$$

Definição (primeira forma do princípio da indução finita). Suponha que para cada inteiro n, $n \geq 1$, seja dada a asserção A(n). Além disso, suponha que seja possível demonstrar as duas propriedades a seguir:
i) Base da indução. A asserção A(1) é verdadeira.
ii) Passo da indução. Para cada inteiro $n \geq 1$, se A(n) é verdadeira, então A(n+1) também é verdadeira.
Conclui-se que a asserção A(n) é verdadeira para todo inteiro n.

As propriedades (i) e (ii) do princípio da indução finita correspondem, respectivamente, às condições básica e indutiva do paradigma da seção anterior e são denominadas, por base de indução e passo de indução. Em termos do paradigma, o princípio da indução é considerado como se segue. Inicialmente, há dois fatos.

i) O dominó número 1 é derrubado ou seja A(1) é verdadeira.
ii) Para cada inteiro $n \geq 1$ se o dominó número n é derrubado ou seja A(n) é verdadeira, então A(n+1) também é verdadeira. Isto é, o dominó número n+1 também é derrubado.

Se os fatos acima são verdadeiros, A(n) é verdadeira para todo n. Em outras palavras, isto significa que todos os dominós são derrubados.

O que é o princípio da indução finita? Em uma forma esquemática o princípio da indução é representado pela implicação

$$[\text{base} + \text{passo}] \Rightarrow \forall\, n\, A(n).$$

O princípio corresponde à aceitação da validade desta implicação. Observe que tal validade pode ser questionada pois a base e o passo da indução consideram apenas valores finitos para n, como

$$A(1) \text{ e } A(n) \Rightarrow A(n+1).$$

Por outro lado, o conseqüente considera qualquer valor de n. Há infinitas possibilidades para n. Neste sentido, o princípio corresponde concluir algo infinito ($\forall$ n), a partir de premissas finitas.

Exemplo (utilização do princípio da indução). Este exemplo demonstra, utilizando o princípio da indução finita, a validade da igualdade

$$(1+ 2 +...+ n) = n\,(n+1)/2.$$

Neste caso, a asserção A(n) corresponde à referida igualdade. Portanto, para demonstrar que A(n) é verdadeira para todo n, é necessário demonstrar as propriedades (i) e (ii) da primeira forma do princípio da indução.

i) Demonstração da base de indução: Fazendo n=1 na asserção A(n) obtém-se a igualdade

$$1 = 1(1 + 1)/2 \text{ ou seja, } 1 = 1.$$

Portanto a base da indução é verdadeira.

(ii) Demonstração do passo da indução. Neste caso, para cada inteiro n, é demonstrado que se A(n) é verdadeira, então A(n+1) também é verdadeira. Em outras palavras, se a igualdade

$$(1 + 2 + \ldots + n) = n(n+1)/2$$

é verdadeira para um n fixo (A(n) verdadeira), então, a partir desta igualdade, deve ser demonstrada a igualdade

$$(1 + 2 + \ldots + n + (n+1)) = (n+1)((n+1)+1)/2,$$

que é representada por A(n+1). Considere a seguinte seqüência de igualdades.

$$(1 + 2 + \ldots + n + (n+1)) = (1 + 2 + \ldots + n) + (n+1)$$

Mas como

$$(1 + 2 + \ldots + n) = n(n+1)/2$$

então

$$(1 + 2 + \ldots + n + (n+1)) = (n(n+1)/2) + (n+1)$$

de onde é concluído que A(n+1) é verdadeira ou seja

$$(1 + 2 + \ldots + n + (n+1)) = (n+1)((n+1) + 1)/2$$

Portanto, como a base e o passo da indução são válidos, a asserção A(n) é verdadeira para todo n, $n \geq 1$. Logo,

$$(1 + 2 + \ldots + n) = n(n+1)/2$$

é verdadeira para todo n, $n \geq 1$.

A Segunda Forma do Princípio da Indução Finita

A partir da segunda forma das condições suficientes, há uma outra definição para o princípio da indução finita. Esta nova definição, denominada segunda forma do princípio, é equivalente à primeira forma, como será demonstrado mais adiante.

Definição (segunda forma do princípio da indução finita). Suponha que, para cada inteiro $n \geq 1$, seja dada a asserção A(n). Além disso, suponha que seja possível demonstrar as duas propriedades a seguir.
i) Base da indução. A asserção A(1) é verdadeira.
ii) Passo da indução Para cada inteiro $n \geq 1$, se A(k) é verdadeira para todo k; $1 \leq k \leq n$, então A(n+1) também é verdadeira.
Conclui-se então que a asserção A(n) é verdadeira para todo inteiro n.

Analogamente à primeira forma do princípio da indução finita, as propriedades i) e ii) são denominadas, respectivamente, por base da indução e passo da indução.

O princípio da indução, na primeira e segunda formas, é expresso como a implicação.

[Base + Passo da indução] $\Rightarrow$ [A(n) é verdadeira para todo n].

Admitir o princípio da indução finita, significa aceitar como válida a implicação acima. Assim, considerando tal implicação como válida, para demonstrar que

[A(n) é verdadeira para todo n]

basta demonstrar que

[Base + Passo da indução]

também é verdadeiro. Isto ocorre porque se a implicação é considerada válida e se a base e o passo da indução são verdadeiros, então necessariamente a afirmação

[A(n) é verdadeira para todo n]

também é verdadeira. Observe que é impossível se ter:

[Base + Passo da indução] $\Rightarrow$ [A(n) é verdadeiro para todo n].
T T F

Isto é, antecedente verdadeiro, implicação verdadeira e conseqüente falso.

O passo da indução, definido pela propriedade ii), também é uma implicação. Observe o se-então conforme é indicado a seguir

Passo da indução na primeira forma. Para cada inteiro $n \geq 1$,

se A(n) é verdadeira, então A(n+1) também é verdadeira.

Passo da indução na segunda forma. Para cada inteiro $n \geq 1$,

se A(k) é verdadeira para todo k; $1 \leq k \leq n$, então A(n+1) também é verdadeira.

Para demonstrar a validade de uma implicação deste tipo, supõe-se, inicialmente, a validade do antecedente, que também é denominado como hipótese de indução. Na primeira forma supõe-se que

"A(n) é verdadeira para algum inteiro n fixo"

Já na segunda forma, suponha que

"Para um inteiro n fixo, $n \geq 1$, A(k) é verdadeira para todo inteiro k; $1 \leq k \leq n$."

Em seguida, a partir da hipótese de indução, o conseqüente da implicação é demonstrado. Neste caso, na primeira e na segunda forma do princípio da indução, o conseqüente é dado por

"A(n+1) também é verdadeira".

O paradoxo que não existe. Na demonstração da primeira forma do passo da indução, supõe-se, inicialmente, a hipótese de indução. Isto é, supõe-se que A(n) é ver-

dadeira para n fixo. Em seguida a asserção A(n+1) também é demonstrada. A suposição da hipótese de indução pode parecer um paradoxo, pois o objetivo final é demonstrar a validade de A(n) para todo inteiro n. Isto parece com a hipótese de indução onde se supõe A(n) verdadeira para um inteiro fixo, $n \geq 1$. Neste sentido, poderia parecer que está se supondo aquilo que é o objetivo da demonstração. O paradoxo não existe. Na demonstração do passo da indução, o objetivo é apenas a demonstração da implicação se então. A suposição do antecedente desta implicação tem um objetivo específico na demonstração da validade do se-então. Inicialmente, supõe-se a validade do antecedente da implicação e, em seguida, é demonstrado que o seu conseqüente também é verdadeiro. Observe que neste processo, em momento algum, é utilizado o resultado final a ser demonstrado. Do ponto de vista do paradigma, está sendo demonstrado que o dominó número n (hipótese de indução) derruba o dominó número (n+1) para qualquer n. Isto é diferente de se ter o resultado: todos os dominós são derrubados. Em outras palavras, quando uma implicação (se A então B) é válida, isto não significa que a fórmula A seja verdadeira.

O Princípio da Indução na Lógica

Em geral, várias propriedades da Lógica são demonstradas utilizando o princípio da indução finita. A proposição a seguir estabelece a forma de aplicação deste princípio na demonstração de propriedades de fórmulas da Lógica Proposicional. Freqüentemente, este princípio é denominado como indução no comprimento das fórmulas.

Proposição (o princípio da indução na Lógica Proposicional). Seja B[E] uma asserção que se refere a uma fórmula E da Lógica Proposicional. Se as duas propriedades a) e b) a seguir são verdadeiras, então conclui-se que B[E] é verdadeira para qualquer fórmula E.

a) Base da indução. B[P] é verdadeira para todo símbolo proposicional, B[*false*] é verdadeira e B[*true*] é verdadeira.
b) Passo da indução. Sejam G e H duas fórmulas. Se B[G] e B[H] são verdadeiras, então $B[\neg H]$, $B[G \vee H]$, $B[G \wedge H]$, $B[G \rightarrow H]$ e $B[G \leftrightarrow H]$ são verdadeiras.

Comentário. A proposição acima, que é o princípio da indução na Lógica, expressa uma implicação. Analogamente ao princípio da indução finita, o princípio da indução na Lógica é uma implicação do tipo

[Base lógica + Passo lógico] $\Rightarrow$ [para toda fórmula E, B[E] é verdadeira]

ou de forma simplificada

{B-log + P-log} $\Rightarrow \forall$ E, B[E]

A proposição acima estabelece a validade desta implicação cuja demonstração é feita utilizando a segunda forma do princípio da indução finita, que também é uma implicação, conforme indicado a seguir

[Base + Passo] $\Rightarrow$ [para todo inteiro n, A(n) é verdadeira]

ou de forma simplificada

$$Ba + Pa \Rightarrow \forall\ n, A(n).$$

Demonstração da proposição. Considere inicialmente a asserção A(n) tal que,

$$A(n) = \{B[E] \text{ para toda fórmula E tal que comp}[E]=n\}$$

Logo, provar que B[E] é verdadeira para toda fórmula E, equivale a provar que A(n) é verdadeira para todo $n \geq 1$. Isto significa, utilizando a notação acima, que

$$\{\forall\ E, B[E]\} \text{ equivale a } \{\forall\ n, A(n)\}$$

A demonstração do princípio da indução na Lógica consiste em demonstrar a implicação

$$[\{Ba + Pa\} \Rightarrow \forall\ n, A(n)] \Rightarrow [\{B\text{-log} + P\text{-log}\} \Rightarrow \forall\ E, B[E]]$$

que equivale à implicação

$$[[\{Ba + Pa\} \Rightarrow \forall\ n, A(n)] \text{ e } \{B\text{-log} + P\text{-log}\}] \Rightarrow \forall\ E, B[E]$$

pois

$$(A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow D) \text{ equivale a } (((A \rightarrow B) \wedge C) \rightarrow D).$$

Além disso. Como $\{\forall\ E, B[E]\}$ equivale a $\{\forall\ n, A(n)\}$, a implicação acima se reduz a

$$[[\{Ba + Pa\} \Rightarrow \forall\ n, A(n)] \text{ e } \{B\text{-log} + P\text{-log}\}\ ] \Rightarrow \forall\ n, A(n)$$

Para demonstrar a implicação anterior, é necessário supor seu antecedente e demonstrar o conseqüente. Portanto, suponha a implicação

$$[\{Ba + Pa\} \Rightarrow \forall\ n, A(n)]$$

e o fato

$$\{B\text{-log} + P\text{-log}\}$$

Em seguida o conseqüente $\forall\ n, A(n)$ é demonstrado. Mas como este conseqüente coincide com o conseqüente da implicação

$$[\{Ba + Pa\} \Rightarrow \forall\ n, A(n),$$

para demonstrar

$$[[\{Ba + Pa\} \Rightarrow \forall\ n, A(n)] \text{ e } \{B\text{-log} + P\text{-log}\}\ ] \Rightarrow \forall\ n, A(n)]$$

basta demonstrar que

$$\{B\text{-log} + P\text{-log}\} \Rightarrow \{Ba + Pa\}$$

onde se tem as correspondências

- B-log = B[P] é verdadeira para todo símbolo proposicional, B[*false*] é verdadeira e B[*true*] é verdadeira.
- P-log = Sejam G e H duas fórmulas. Se B[G] e B[H] são verdadeiras, então $B[\neg H]$, $B[G \vee H]$, $B[G \wedge H]$, $B[G \rightarrow H]$ e $B[G \leftrightarrow H]$ são verdadeiras.
- Ba = A(1) é verdadeira.

- Pa = Para cada inteiro $n \geq 1$, se $A(k)$ é verdadeira para todo inteiro k satisfazendo $1 \leq k \leq n$, então $A(n+1)$ também é verdadeira.

Considerando a correspondência

$$A(n) \Leftrightarrow B[E] \text{ para toda fórmula E tal que } comp[E]=n.$$

tem-se que

$$A(1) \Leftrightarrow B[E] \text{ para toda fórmula E tal que } comp[E]=1.$$

Como $comp[E]=1 \Leftrightarrow$ E é um símbolo proposicional ou de verdade, então B-log equivale a Ba. Resta provar que P-log $\Rightarrow$ Pa. Esquematicamente, P-log e Pa são as implicações

- P-log = $\{B[G] \text{ e } B[H]\} \Rightarrow \{B[\neg H], B[G \vee H], B[G \wedge H], B[G \rightarrow H] \text{ e } B[G \leftrightarrow H]\}$
- Pa = $A(k),\ 1 \leq k \leq n \Rightarrow A(n+1)$

Novamente, é necessário demonstrar que uma implicação implica em outra. A implicação P-log implica na implicação Pa. Neste caso, P-log $\Rightarrow$ Pa equivale a implicação

$$\{\{B[G] \text{ e } B[H]\} \Rightarrow \{B[\neg H], B[G \vee H], B[G \wedge H], B[G \rightarrow H], B[G \leftrightarrow H]\} \text{e} \{A(k), 1 \leq k \leq n\}\} \Rightarrow A(n+1)$$

Observe que para demonstrar esta implicação é necessário supor seu antecedente e demonstrar $A(n+1)$. A partir da correspondência

$$A(n) \Leftrightarrow B[E] \text{ para toda fórmula E tal que } comp[E]=n.$$

tem-se que

$A(k),\ 1 \leq k \leq n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow B[H], B[G]$ para fórmulas H e G tais que $comp[H] \leq n$ e $comp[G] \leq n$.

Portanto,

$$\{A(k), 1 \leq k \leq n\} \text{ equivale a}$$
$$\{B[G] \text{ e } B[H]\} \text{ para fórmulas H e G tais que } comp[H] \leq n \text{ e } comp[G] \leq n.$$

Como

$$\{B[G] \text{ e } B[H]\} \Rightarrow \{B[\neg H], B[G \vee H], B[G \wedge H], B[G \rightarrow H] B[G \leftrightarrow H]\},$$

são concluídas as asserções

$$B[\neg H], B[G \vee H], B[G \wedge H], B[G \rightarrow H] \text{ e } B[G \leftrightarrow H] B[G \rightarrow H]\}$$

para fórmulas H e G tais que $comp[H] \leq n$ e $comp[G] \leq n$. A última conclusão equivale a $A(n+1)$ pois se $comp[\neg H]=n+1$ então $comp[H]=n$ e se $comp[G \vee H]=n+1$, então $comp[G] \leq n$ e $comp[H] \leq n$ e assim por diante. Portanto P-log implica Pa e o princípio da indução na lógica está demonstrado.

Proposição (números de conectivos e parênteses). Seja E uma fórmula da Lógica Proposicional. Considere $\alpha(E)$ o número de conectivos da fórmula E e $\beta(E)$ o número de parênteses de E. Tem-se que para toda fórmula E, $\beta(E) = 2\alpha(E)$

Demonstração. Dada uma fórmula E, seja B[E] a asserção: $\beta(E) = 2\alpha(E)$, isto é,

$$B[E] = \text{“}\beta(E) = 2\alpha(E)\text{”}$$

Portanto, dada uma fórmula E, para demonstrar que o seu número de parênteses é o dobro do número de conectivos, é necessário demonstrar que B[E] é verdadeira para toda fórmula E. Utilizando o princípio da indução no comprimento das fórmulas é necessário demonstrar a base e o passo da indução.

Demonstração da base da indução. B[E] é verdadeira se E é um símbolo proposicional ou de verdade. Dado um símbolo proposicional ou um símbolo de verdade, o seu número de parênteses e de conectivos é igual a zero. Logo, a base da indução é claramente verdadeira.

Demonstração do passo da indução. Sejam G e H duas fórmulas. Deve-se demonstrar que se

$$B[G] \text{ e } B[H]$$

são verdadeiras, então

$$B[(G \vee H)],\ B[(G \wedge H)],\ B[(G \rightarrow H)],\ B[(G \leftrightarrow H)] \text{ e } B[(\neg G)]$$

são verdadeiras. Suponha então que B[G] e B[H] são verdadeiras. Isto é,

$$\beta(H) = 2\alpha(H) \text{ e}$$
$$\beta(G) = 2\alpha(G)$$

É demonstrado a seguir que $B[(G \vee H)]$ também é verdadeira. Observe que

$$\beta((H \vee G)) = \beta(H) + \beta(G) + 2$$
$$\alpha((H \vee G)) = \alpha(H) + \alpha(G) + 1$$

utilizando tais igualdades.

$$\begin{aligned}\beta((H \vee G)) &= \beta(H) + \beta(G) + 2\\ &= 2\alpha(H) + 2\alpha(G) + 2\\ &= 2(\alpha(H) + \alpha(G) + 1)\\ &= 2\alpha(H \vee G)\end{aligned}$$

isto é,

$$\beta((H \vee G)) = 2\,\alpha((H \vee G))$$

ou seja, $B[(H \vee G)]$ é verdadeira. Utilizando um raciocínio análogo, as asserções

$$B[(\neg H)],\ B[(G \wedge H)],\ B[(G \rightarrow H)] \text{ e } B[(G \leftrightarrow H)]$$

também são demonstradas. Portanto, a base e o passo da indução são verdadeiros. Logo, pelo princípio da indução, B[E] é verdadeira para toda fórmula E.

Exercícios

1) Demonstre se os argumentos a seguir são válidos (estes argumentos foram freqüentemente utilizados pelos americanos na guerra do Vietnã).

   Uma condição necessária e suficiente para que os comunistas conquistem o Vietnã é que o Camboja e a Tailândia também sejam conquistados.

   Para a conquista de toda Ásia pelos comunistas é suficiente que o Camboja e a Tailândia sejam conquistados.

   Vietnã não será conquistado pelos comunistas se os americanos permanecerem por lá.

   Os comunistas não devem conquistar toda a Ásia.

   Portanto, os americanos não devem sair do Vietnã.

2) Demonstre que a primeira forma do princípio da indução finita é equivalente à segunda forma.

3) Este exercício considera uma demonstração que utiliza o princípio da indução. É demonstrado que os elementos de qualquer conjunto são iguais entre si. Evidentemente esta demonstração está errada, pois é falso que os elementos de qualquer conjunto são iguais entre si. Identifique o ERRO da seguinte demonstração.

   Seja A(n) a asserção a seguir.

   A(n) = "n elementos quaisquer são iguais entre si".

   É demonstrado que para todo inteiro n, A(n) é uma asserção verdadeira. Nesta demonstração, a primeira forma do princípio da indução finita é utilizada.

   Base da indução: A(1) é verdadeiro, pois o elemento de qualquer conjunto unitário é igual a ele próprio. Isto é, um elemento é igual a si próprio.

   Passo da indução: Suponha que a hipótese de indução é verdadeira. Isto é, A(n) é verdadeira para um inteiro fixo $n \geq 1$. Em outras palavras, dado um conjunto, se este conjunto possui n elementos, então tais elementos são iguais entre si. Em seguida a asserção A(n+1) é demonstrada. Isto é, todo conjunto com (n +1) elementos é tal que todos os seus elementos são iguais entre si. Considere um conjunto qualquer $\Phi = \{a_1,\ldots,a_n,a_{n+1}\}$ com (n+1) elementos. É demonstrado a seguir que os elementos de Φ são iguais entre si. Sejam ψ e Ω os conjuntos a seguir $\psi = \{a_1,\ldots,a_n\}$ e $\Omega = \{a_2,\ldots,a_{n+1}\}$. O conjunto ψ é formado pelos n primeiros elementos de Φ e o conjunto Ω é formado pelos n últimos elementos de Φ. Como ψ e Ω possuem n elementos, então, conforme a hipótese de indução, tais elementos são iguais entre si. Logo, $a_1=\ldots=a_n$ e $a_2=\ldots=a_{n+1}$. Mas a partir destas igualdades conclui-se que $a_1=\ldots=a_n=a_{n+1}$. Isto é, todos os elementos de Φ são iguais entre si. Como Φ é um conjunto qualquer com n+1 elementos, então A(n+1) é verdadeira. Logo, o passo da indução é verdadeiro.

   Como a base da indução e o passo da indução são verdadeiros, então a asserção A(n) é verdadeira para todo n. Ou seja, para todo inteiro n, se Φ é um conjunto com n elementos, então tais elementos são iguais entre si. Isto é, n elementos quaisquer são iguais entre si.

   Encontre o erro da demonstração.

4) Demonstre, utilizando o princípio da indução, que

   a) Para todo número natural n, $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.
   b) Para todo número natural n, 3 divide $n^3 - n$.
   c) Para todo número natural n tal que $n \geq 5$, $2^n > n^2$.
   d) Para todo número natural n tal que $n \geq 4$, $n! > 2^n$.
   e) Para todo número natural n, n é primo ou é produto de primos.

5) Demonstre, utilizando o princípio da indução, que o número de parênteses contidos em uma fórmula H é um número par (para cada "abre" parênteses há um "fecha" parêntese).
6) Considere E uma fórmula que contém somente conectivos $\wedge, \vee, \rightarrow$ e $\leftrightarrow$.
   a) Seja $\alpha(E)$ o número de conectivos contidos em E e $\beta(E)$ o número de símbolos proposicionais e de verdade. Demonstre, utilizando o princípio da indução, que $\beta(E) = \alpha(E) + 1$
   b) Demonstre que comp[E] é um número ímpar.
7) Dada uma fórmula E, se A é uma subfórmula de E, demonstre, utilizando indução finita, que

$$\text{comp}[A] \leq \text{comp}[E]$$

8) Considere uma função f, definida no alfabeto da Lógica Proposicional, tal que

$$f(\neg) = 0,\ f(\vee) = 0,\ f(\wedge) = 0,\ f(\rightarrow) = 0,\ f(\leftrightarrow) = 0$$
$$f(P) = 0, \text{ para todo símbolo proposicional}$$
$$f(\textit{true}) = f(\textit{false}) = 0$$
$$f(\ (\ ) = 1$$
$$f(\ )\ ) = -1$$

Além disso, dada uma concatenação de símbolos $S_1, \ldots, S_n$, então

$$f(S_1 \ldots S_n) = f(S_1) + \ldots + f(S_n)$$

Demonstre, utilizando o princípio da indução, que para qualquer fórmula E da Lógica Proposicional, f(E) = 0.

9) Considere uma função f, definida no alfabeto da Lógica Proposicional, tal que

$$f(\neg) = 0,\ f(\vee) = 2,\ f(\wedge) = 4,\ f(\rightarrow) = 6,\ f(\leftrightarrow) = 8$$
$$f(P) = 0, \text{ para todo símbolo proposicional}$$
$$f(\textit{true}) = f(\textit{false}) = 4$$
$$f(\ (\ ) = 5$$
$$f(\ )\ ) = -5$$

Além disso, dada uma concatenação de símbolos $S_1, \ldots S_n$, então

$$f(S_1 \ldots S_n) = f(S_1) + \ldots + f(S_n)$$

Demonstre, utilizando o princípio da indução, que
   a) para qualquer fórmula E da Lógica Proposicional, f(E) é um número par.
   b) para qualquer fórmula E da Lógica Proposicional, se A é subfórmula de E, então $f(A) \leq f(E)$.
   c) Redefina a função f para demonstrar que para qualquer fórmula E, seu número de abre parênteses é igual ao número de fecha parênteses.

Sugestões e soluções de exercícios selecionados

2) Neste exercício, é necessário demonstrar que a implicação expressa pela primeira forma do princípio da indução finita implica a implicação expressa pela segunda forma e vice-versa. Há duas implicações, que podem ser representadas como se segue:

Primeira forma: $A \Rightarrow B$.
Segunda forma: $C \Rightarrow B$.

Observe que o conseqüente destas implicações coincide. Para demonstrar que $(A \Rightarrow B)$ implica $(C \Rightarrow B)$, basta demonstrar que C implica A. Por outro lado, para demonstrar que $(C \Rightarrow B)$ implica $(A \Rightarrow B)$ é necessário demonstrar que A implica C.
A primeira forma é dada pela implicação $[\text{base1} \wedge \text{passo1}] \Rightarrow \forall\, n\, A(n)$
e a segunda forma pela implicação $[\text{base2} \wedge \text{passo2}] \Rightarrow \forall\, n\, A(n)$.
Demonstre que

$$\{[\text{base1} \wedge \text{passo1}] \Rightarrow \forall\, n\, A(n)\} \text{ implica } \{[\text{base2} \wedge \text{passo2}] \Rightarrow \forall\, n\, A(n)\}$$

A demonstração desta implicação equivale à demonstração de

$$\{[[\text{base1} \wedge \text{passo1}] \Rightarrow \forall\, n\, A(n)] \wedge [\text{base2} \wedge \text{passo2}]\} \text{ implica } \forall\, n\, A(n)$$

Para demonstrar a implicação acima, suponha inicialmente as afirmações

$$[[\text{base1} \wedge \text{passo1}] \Rightarrow \forall\, n\, A(n)] \text{ e } [\text{base2} \wedge \text{passo2}]$$

e é demonstrado que $\forall\, n\, A(n)$. Neste caso, como se tem $[\text{base2} \wedge \text{passo2}]$, então é necessário demonstrar que

$$[\text{base2} \wedge \text{passo2}] \text{ implica } [\text{base1} \wedge \text{passo1}]$$

concluindo $[\text{base1} \wedge \text{passo1}]$. Mas como $[\text{base1} \wedge \text{passo1}] \Rightarrow \forall\, n\, A(n)$
logo, a partir de $[\text{base1} \wedge \text{passo1}]$, conclui-se $\forall\, n\, A(n)$. É demonstrado a seguir que

$$[\text{base2} \wedge \text{passo2}] \text{ implica } [\text{base1} \wedge \text{passo1}]$$

Como base1 = base2, basta demonstrar que passo2 implica passo1. Mas
Passo1 = "$A(n) \Rightarrow A(n+1)$"
Passo2 = "$A(k)$ para k; $1 \leq k \leq n$, $\Rightarrow A(n+1)$"
Logo, deve demonstrar que

"$A(k)$ para k; $1 \leq k \leq n$, $\Rightarrow A(n+1)$" implica "$A(n) \Rightarrow A(n+1)$"

que equivale a demonstrar que

"$A(k)$ para k; $1 \leq k \leq n$, $\Rightarrow A(n+1)$" e "$A(n)$" implicam $A(n+1)$"

Supondo "$A(k)$ para k; $1 \leq k \leq n$, $\Rightarrow A(n+1)$" e "$A(n)$" e fazendo $k = n$ conclui-se $A(n+1)$

3) Observe que é falso que $A(1) \Rightarrow A(2)$. Portanto o passo da indução não é válido.

5) Dada uma fórmula E, considere $\alpha(E)$ o número de parênteses de E. Deve se demonstrar que $\forall$ fórmula E, $\alpha(E)$ é par. Seja então $B[E]$ = "$\alpha(E)$ é par". Utilizando o princípio da indução, para demonstrar $\forall$ fórmula E $B[E]$, basta demonstrar a base e o passo da indução na lógica.
Base da indução.

B[P] é verdadeiro para qualquer símbolo proposicional P. Isto é óbvio pois $\alpha[P] = 0$, que é um número par. Da mesma forma, é demonstrado que B[*true*] e B[*false*] são válidas.

Passo da indução.

Suponha B[H] e B[G]. Isto é, $\alpha[H]$ e $\alpha[G]$ são números pares. Em seguida é demonstrada a validade da asserção $B[(\neg H)]$. Mas $B[(\neg H)]$ = "$\alpha[(\neg H)]$ é par". Isto é verdade pois $\alpha[(\neg H)] = 2 + \alpha[H]$ e como $\alpha[H]$ é par, então $\alpha[(\neg H)]$ é par. O mesmo raciocínio é utilizado para demonstrar $B[(H \vee G)]$ = "$\alpha[(H \vee G)]$ é par". Basta observar que $\alpha[(H \vee G)] = 2 + \alpha[H] + \alpha[G]$. Como $\alpha[H]$ e $\alpha[G]$ são números pares, então $\alpha[(H \vee G)]$ é par. De forma inteiramente análoga, as asserções $B[(H \wedge G)]$, $B[(H \rightarrow G)]$ e $B[(H \leftrightarrow G)]$ são demonstradas. Como a base e o passo da indução são válidos, então, pelo princípio da indução, $\forall$ fórmula E, B[E].

6) a) Considere B[E] = "$\beta(E) = \alpha(E) + 1$".
   b) Considere B[E] = "comp[E] é ímpar"
7) Considere B[E] = "se A é subfórmula de E, então comp[A] $\leq$ comp[E]".
8) Considere B[E] = "f(E) = 0"
9) a) Considere B[E] = "f(E) é par"
   b) Considere B[E] = "se A é subfórmula de E, então f(A) $\leq$ f(E)".

CAPÍTULO 6

Relações semânticas entre os conectivos da Lógica Proposicional

Introdução

Este capítulo considera o estudo das relações semânticas entre os conectivos da Lógica Proposicional. Nesta análise é demonstrado, por exemplo, que os conectivos $\wedge$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ podem ser expressos equivalentemente utilizando apenas $\neg$ e $\vee$. Como conseqüência, qualquer fórmula da Lógica Proposicional pode ser reescrita, de forma equivalente, utilizando apenas seus símbolos proposicionais e os conectivos $\neg$ e $\vee$. Conjuntos de conectivos com tal propriedade são denominados conjuntos completos e possuem inúmeras aplicações em Lógica e Computação.

Uma das aplicações dos conjuntos de conectivos completos é a simplificação do alfabeto da Lógica Proposicional definido no Capítulo 1. É demonstrado que aquele conjunto de conectivos é redundante. Isso significa que conectivo $\wedge$, por exemplo, pode ser representado de uma forma equivalente utilizando os conectivos $\neg$ e $\vee$. Este fato é utilizado para reduzir o conjunto de conectivos proposicionais do alfabeto, mantendo a linguagem da Lógica Proposicional inalterada. Outra aplicação ocorre em arquitetura de computadores onde são projetados circuitos eletrônicos que representam apenas um conjunto completo ou fundamental de conectivos.

Conjuntos de Conectivos Completos

Um conjunto de conectivos proposicionais Ψ é completo quando é possível expressar, equivalentemente, os conectivos $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ utilizando apenas conectivos de Ψ. A definição de conjunto de conectivos completo é dada a seguir.

Definição (conjunto de conectivos completo). Seja Ψ um conjunto de conectivos. ψ é um conjunto completo se as condições a seguir são satisfeitas. Dada uma fórmula H do tipo $\neg P$, $(P \vee Q)$, $(P \wedge Q)$, $(P \rightarrow Q)$ ou $(P \leftrightarrow Q)$, então é possível determinar uma outra fórmula G equivalente a H tal que G contém apenas conectivos do conjunto Ψ e os símbolos P e Q presentes em H.

É demonstrado a seguir que o conjunto $\{\neg, \vee\}$ é completo. Isto significa que dada uma fórmula H, do tipo

$$\neg P,\ (P \vee Q),\ (P \wedge Q),\ (P \rightarrow Q) \text{ ou } (P \leftrightarrow Q),$$

então é possível determinar uma outra fórmula G, equivalente a H, onde G possui apenas conectivos $\neg$ e $\vee$ e os símbolos proposicionais P e Q que ocorrem em H. Neste caso, G é obtida a partir de H trocando os conectivos $\wedge$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ por conectivos $\neg$ e $\vee$ conforme regras predefinidas. Observe que não é necessário trocar os conectivos $\neg$ e $\vee$, que pertencem a $\{\neg, \vee\}$. Neste caso, é dito a fórmula H é expressa equivalente pela fórmula G que é formada apenas com conectivos do conjunto $\{\neg, \vee\}$. Como $\{\neg, \vee\}$ é completo, tudo aquilo que é expresso semanticamente pelos conectivos $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ também é expresso pelos conectivos $\neg$ e $\vee$. A demonstração da completude do conjunto $\{\neg, \vee\}$ é feita pela definição das regras para trocas de conectivos. Para definir as regras de conversão dos conectivos $\wedge$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$, é observado inicialmente que

$$(P \wedge Q),\ (P \rightarrow Q) \text{ e } (P \leftrightarrow Q)$$

são equivalentes a fórmulas que possuem apenas os conectivos $\neg$ e $\vee$.

Equivalência entre $\rightarrow$ e $\{\neg, \vee\}$. Como

$$H_1 = (P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$$

é uma tautologia, então as fórmulas

$$(P \rightarrow Q) \text{ e } (\neg P \vee Q)$$

são equivalentes. Isto significa que a fórmula $(P \rightarrow Q)$ pode ser expressa equivalentemente por uma fórmula que utiliza apenas conectivos $\neg$ e $\vee$ e os símbolos proposicionais P e Q. O que é expresso do ponto de vista semântico pelo conectivo $\rightarrow$ também é expresso pelo conjunto de conectivos $\{\neg, \vee\}$.

Equivalência entre $\wedge$ e $\{\neg, \vee\}$. Como

$$H_2 = (P \wedge Q) \leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$$

é uma tautologia, então

$$(P \wedge Q) \text{ equivale a } \neg(\neg P \vee \neg Q).$$

Logo, do ponto de vista semântico, o conectivo $\wedge$ pode ser expresso equivalentemente em termos dos conectivos $\neg$ e $\vee$.

Equivalência entre $\leftrightarrow$ e $\{\neg, \vee\}$. Considere as equivalências:

$$(P \leftrightarrow Q) \text{ equivale a } ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P))$$

$$((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)) \text{ equivale a } ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)).$$

e

$$((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)) \text{ equivale a } \neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P)).$$

Portanto, como a equivalência entre fórmulas é transitiva,

$$(P \leftrightarrow Q) \text{ equivale a } \neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P)).$$

A conclusão é que o conectivo $\leftrightarrow$ pode ser expresso semanticamente pelos conectivos $\neg$ e $\vee$.

Utilizando as três equivalências anteriores, obtém-se a completude do conjunto de conectivos $\{\neg, \vee\}$. A partir da completude do conjunto $\{\neg, \vee\}$, utilizando o princípio da indução, é demonstrado que qualquer fórmula H pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas os conectivos $\neg$ e $\vee$ e os símbolos proposicionais e de verdade presentes em H. Nesta demonstração o resultado da proposição a seguir é utilizado.

Proposição (regra de substituição de subfórmulas). Sejam Eg, Eh, G e H fórmulas da Lógica Proposicional tais que:

- G e H são subfórmulas de Eg e Eh respectivamente.
- Eh é obtida de Eg substituindo as ocorrências da fórmula G em Eg, por H.

Se G equivale a H, então Eg equivale a Eh.

Demonstração. Esta demonstração utiliza o princípio da indução finita no comprimento da fórmula Eg. Dadas as fórmulas Eg, Eh, G e H, conforme o enunciado da proposição acima, seja B[Eg] a asserção:

B[Eg] = Se G equivale a H, então Eg equivale a Eh.

Para demonstrar o caso geral,

se G é equivalente a H, então Eg é equivalente a Eh

é necessário demonstrar que B[Eg] é verdadeira para toda fórmula Eg. Utilizando o princípio da indução no comprimento das fórmulas ou indução na lógica, é necessário demonstrar a base e o passo da indução.

Demonstração da base da indução.

B[P] é verdadeira para todo símbolo proposicional.
B[*false*] é verdadeira.
B[*true*] é verdadeira.

No primeiro caso, Eg = P. Isto significa que a subfórmula G também é igual ao símbolo proposicional P. Desta forma Eg = G e Eh = H. Logo,

se G equivale a H, então Eg equivale a Eh.

No segundo caso Eg = *false*. Utilizando um raciocínio análogo ao utilizado acima, conclui-se que Eg = G e Eh = H. Novamente

se G equivale a H então Eg equivale a Eh.

O caso em que Eg = *true* é análogo.

Demonstração do passo da indução. Neste caso o passo da indução é dado por.

Sejam Ag e Cg duas fórmulas,

se B[Ag] e B[Cg] são verdadeiras,

então B[(¬A)g], B[(A ∨ C)g], B[(A ∧ C)g], B[(A → C)g] e B[(A ↔ C)g] são verdadeiros.

Suponha então que B[Ag] e B[Cg] são verdadeiras. Isto é,

B[Ag] = "se G equivale a H, então Ag equivale a Ah".
B[Cg] = "se G equivale a H, então Cg equivale a Ch".

Demonstra-se a seguir que

B[(¬A)g] e B[(A ∨ C)g]

também são verdadeiras. A demonstração dos outros casos é análoga. Observe inicialmente que

B[(¬A)g] = "se G equivale a H, então (¬A)g equivale a (¬A)h".

onde (¬A)h é obtida de (¬A)g substituindo todas as ocorrências da subfórmula G em (¬A)g, por H. Para demonstrar B[(¬A)g], suponha que G equivale a H. Logo, utilizando a asserção B[Ag], tem-se que Ag equivale a Ah, o que implica que

(¬A)g equivale a (¬A)h.

Portanto B[(¬A)g] é verdadeira. Para demonstrar que a asserção

B[(A ∨ C)g]

é verdadeira, observe que

B[(A ∨ C)g] = "se G equivale a H, então (A ∨ C)g equivale a (A ∨ C)h".

onde (A ∨ C)h é obtida de (A ∨ C)g substituindo as ocorrências da subfórmula G em (A ∨ C)g por H. Para demonstrar

B[(A ∨ C)g],

suponha que G equivale a H. Logo utilizando as asserções

B[Ag] e B[Cg],

são obtidas as equivalências

Ag equivale a Ah e
Cg equivale a Ch

A partir desta equivalência conclui-se que

$$(Ag \vee Cg) \text{ equivale a } (Ah \vee Ch) \text{ e}$$
$$(A \vee C)g \text{ equivale a } (A \vee C)h$$

Logo,

$$B[(A \vee C)g]$$

é verdadeira. A demonstração dos outros casos é análoga. Logo, a base e o passo de indução são verdadeiros. Portanto, pelo princípio da indução, B[Eg] é verdadeira para toda fórmula Eg. Isto significa que se G é equivalente a H, então Eg é equivalente a Eh.

Proposição (relação semântica entre conectivos). Seja E uma fórmula qualquer da Lógica Proposicional. E pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas os conectivos $\neg$ e $\vee$ e os símbolos proposicionais e de verdade presentes em E.

Demonstração. Demonstrar esta proposição equivale a demonstrar que existe uma fórmula E1, equivalente a E, que contém apenas os conectivos $\neg$ e $\vee$ e os símbolos proposicionais e de verdade contidos em E. Dada um fórmula E, seja B[E] a asserção

B[E] = "existe uma fórmula E1 equivalente a E que contém apenas conectivos $\neg$ e $\vee$ e os símbolos proposicionais e de verdade contidos em E".

Para demonstrar que qualquer fórmula E pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas os conectivos $\neg$ e $\vee$ e os símbolos proposicionais e de verdade presentes em E, é necessário demonstrar que B[E] é verdadeira para toda fórmula E. Utilizando o princípio da indução na lógica é necessário demonstrar a base e o passo da indução.

Demonstração da base da indução.

B[P] é verdadeira para todo símbolo proposicional.

B[*false*] é verdadeira.

B[*true*] é verdadeira.

Tais afirmações são obviamente verdadeiras pois uma fórmula igual a um símbolo proposicional ou a um símbolo de verdade não contém conectivo. Neste sentido, a fórmula contém zero conectivo $\wedge$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$.

Demonstração do passo da indução. Sejam G e H duas fórmulas, se B[G] e B[H] são verdadeiras, então B[$\neg$G], B[G $\vee$ H], B[G $\wedge$ H], B[G $\rightarrow$ H] e B[G $\leftrightarrow$ H] são verdadeiras.

Suponha então que B[G] e B[H] são verdadeiras. Isto é,

B[G] = "existe uma fórmula G_1 equivalente a G que contém apenas conectivos $\neg$ e $\vee$ e os símbolos proposicionais e de verdade contidos em G".

B[H] = "existe uma fórmula H_1 equivalente a H que contém apenas conectivos $\neg$ e $\vee$ e os símbolos proposicionais e de verdade contidos em H".

Demonstra-se a seguir que B[$\neg$G] é verdadeira. Observe inicialmente que:

B[$\neg$G] = "existe uma fórmula G_2 equivalente a $\neg$G que contém apenas conectivos $\neg$ e $\vee$ e os símbolos proposicionais e de verdade contidos em $\neg$G".

Como B[G] é verdadeira então existe G_1 equivalente a G, tal que G_1 contém apenas conectivos $\neg$ e $\vee$ e os símbolos proposicionais e de verdade contidos em G. Utilizando regra de substituição de fórmulas (proposição anterior), $\neg G$ equivale a $\neg G_1$. Assim para obter a veracidade de B[$\neg$G] basta fazer $G_2 = \neg G_1$. Desta forma G_2 equivale a $\neg G$ e contém somente os conectivos $\neg$ e $\vee$ e os símbolos proposicionais e de verdade de G.

Demonstra-se a seguir que B[G $\rightarrow$ H] é verdadeira. Observe que:

B[G $\rightarrow$ H] = "existe uma fórmula G_3 equivalente a (G $\rightarrow$ H) que contém apenas conectivos $\neg$ e $\vee$ e os símbolos proposicionais e de verdade contidos em (G $\rightarrow$ H)".

Como B[G] e B[H] são verdadeiras, então existem fórmulas G_1 e H_1 tais que: G_1 equivale a G, H_1 equivale a H e G_1, H_1 contêm apenas conectivos $\neg$ e $\vee$ e os símbolos proposicionais e de verdade de G e H, respectivamente.

Conforme a regra de substituição de fórmulas (proposição anterior),
se G_1 e H_1 são equivalentes a G e H respectivamente,
então (G $\rightarrow$ H) é equivalente a ($G_1 \rightarrow H_1$).

Além disso, como

$$(G_1 \rightarrow H_1) \text{ equivale a } (\neg G_1 \vee H_1),$$

logo

$$(G \rightarrow H) \text{ equivale a } (\neg G_1 \vee H_1).$$

Dado que G_1 e H_1 contém somente os conectivos $\neg$ e $\vee$ e os símbolos proposicionais e de verdade de G e H, então ($\neg G_1 \vee H_1$) também contém somente os conectivos $\neg$ e $\vee$ e os símbolos de verdade e proposicionais de G e H. Portanto, fazendo

$$G_3 = (\neg G_1 \vee H_1)$$

Obtém-se que B[G $\rightarrow$ H] é verdadeira onde se faz $G_3 = (\neg G_1 \vee H_1)$.

A demonstração dos outros casos é análoga. Seguindo o mesmo raciocínio indicado acima, as asserções

$$B[G \vee H],\ B[G \wedge H] \text{ e } B[G \leftrightarrow H]$$

são demonstradas. Portanto a base e o passo da indução são verdadeiros. Logo, pelo princípio da indução, B[E] é verdadeira para toda fórmula E. Isto significa que E pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas os conectivos $\neg$ e $\vee$ e os símbolos proposicionais e de verdade presentes em E.

O exemplo a seguir indica como transformar fórmulas com conectivos $\rightarrow$, $\wedge$ e $\leftrightarrow$ em uma fórmula equivalente que contém apenas os conectivos $\neg$ e $\vee$ e seus símbolos.

Exemplo (transformação para conectivos $\neg$ e $\vee$). Dada uma fórmula E, este exemplo demonstra como obter uma fórmula G, equivalente a E, que contém apenas os conectivos $\neg$ e $\vee$ e os símbolos proposicionais e de verdade de E. Considere

$$E = (P \leftrightarrow Q) \vee (R \rightarrow S).$$

Utilize

$$(P \leftrightarrow Q) \text{ equivale a } \neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P))$$

e a proposição da regra de substituição de fórmulas, e obtenha a fórmula E1 equivalente a E.

$$E1 = \neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P)) \vee (R \rightarrow S)$$

Em seguida, utilize que

$$(R \rightarrow S) \text{ equivale a } (\neg R \vee S)$$

e obtenha

$$G = \neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P)) \vee (\neg R \vee S)$$

tal que G equivale a E. Observe que a fórmula G equivale a E e contém apenas os conectivos $\neg$ e $\vee$.

Proposição (conjunto de conectivos completos). Considere o conectivo *nand* definido pela correspondência:

$$(P \textit{ nand } Q) = (\neg(P \wedge Q)).$$

O conjunto {*nand*} é completo. Além disso, seja E uma fórmula qualquer da Lógica Proposicional. E pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas o conectivo *nand* e os símbolos proposicionais e de verdade presentes em E.

Demonstração. É demonstrado a seguir que o conjunto {*nand*} é completo. Observe inicialmente que os conectivos $\wedge$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ podem ser expressos equivalentemente utilizando apenas os conectivos $\neg$ e $\vee$. Utilizando tal fato, que o conjunto $\{\neg, \vee\}$ é completo, é demonstrado a seguir que os conectivos $\neg$ e $\vee$ podem ser expressos equivalentemente utilizando apenas o conectivo *nand*. Conclui-se então que {*nand*} é completo. As equivalências a seguir, que são demonstradas nos exercícios deste capítulo, demonstram que {*nand*} é completo.

$$\neg P \text{ equivale a } (P \textit{ nand } P)$$
$$(P \vee Q) \text{ equivale a } ((P \textit{ nand } P) \textit{ nand } (Q \textit{ nand } Q))$$

Dada uma fórmula E, é demonstrado a seguir, utilizando o princípio da indução, que E pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas o conectivo *nand* e os símbolos proposicionais e de verdade presentes em E. Dada uma fórmula E, seja B[E] a asserção:

B[E] = "existe uma fórmula E1, equivalente a E que contém apenas o conectivo *nand* e os símbolos proposicionais e de verdade de E".

Demonstra-se a seguir que B[E] é verdadeira para toda fórmula E. Utilizando o princípio da indução no comprimento das fórmulas, é necessário demonstrar a base e o passo da indução.

i) Demonstração da base da indução.

B[P] é verdadeira para todo símbolo proposicional.

B[*false*] é verdadeira.

B[*true*] é verdadeira.

Tais asserções são obviamente verdadeiras pois uma fórmula igual a um símbolo proposicional ou de verdade não contém conectivo. Neste sentido, ela contém zero conectivo *nand*.

ii) Demonstração do passo da indução. Sejam G e H duas fórmulas,
se B[G] e B[H] são verdadeiras,
então B[G ∨ H], B[G ∧ H], B[G → H], B[G ↔ H] e B[¬G] são verdadeiras.

Suponha então que B[G] e B[H] são verdadeiras. Isto é,

B[G] = "existe uma fórmula G_1 equivalente a G que contém apenas o conectivo *nand* e os símbolos proposicionais e de verdade de G".

B[H] = "existe uma fórmula H_1 equivalente a H que contém apenas o conectivo *nand* e os símbolos proposicionais e de verdade de H".

Demonstra-se que B[G ∨ H] e B[¬G] também são verdadeiras. Os outros casos são análogos. Observe inicialmente que:

B[¬G] = "existe uma fórmula G_2, equivalente a ¬G que contém apenas o conectivo *nand* e os símbolos proposicionais e de verdade de ¬G".

Para demonstrar que B[¬G] é verdadeira é necessário exibir a fórmula G_2 da asserção acima. Considere a equivalência

$$\neg G \text{ equivale a } (G \textit{ nand } G).$$

Como B[G] é verdadeira então existe uma fórmula G_1 equivalente a G que contém apenas o conectivo *nand* e os símbolos proposicionais e de verdade de G. Utilizando a asserção B[G] e a regra de substituição de fórmulas conclui-se que

$$\neg G \text{ equivale a } (G_1 \textit{ nand } G_1).$$

Como G_1 contém apenas o conectivo *nand* e símbolos proposicionais e de verdade de G então (G_1 *nand* G_1) também contém apenas o conectivo *nand* e os símbolos proposicionais e de verdade de G. Logo, fazendo

$$G_2 = (G_1 \textit{ nand } G_1)$$

na asserção B[¬G] conclui-se que tal asserção é verdadeira. No próximo passo, a asserção B[G ∨ H] é demonstrada.

B[G ∨ H] = "existe uma fórmula G3 equivalente a (G ∨ H) que contém apenas o conectivo *nand* e os símbolos proposicionais e de verdade de (G ∨ H)".

Inicialmente, observe que

$$(G \vee H) \text{ equivale a } (\neg G \textit{ nand } \neg H).$$

Logo

$$(G \vee H) \text{ equivale a } ((G \textit{ nand } G) \textit{ nand } (H \textit{ nand } H))$$

Utilizando as asserções B[G] e B[H] e a regra de substituição de subfórmulas, conclui-se que

$$(G \vee H) \text{ equivale a } ((G_1 \textit{ nand } G_1) \textit{ nand } (H_1 \textit{ nand } H_1))$$

onde G_1 e H_1 contêm apenas o conectivo *nand* e os símbolos proposicionais e de verdade de G e H respectivamente. Logo, $B[G \vee H]$ é verdadeira onde se considera

$$G_3 = (G_1 \textit{ nand } G_1) \textit{ nand } (H_1 \textit{ nand } H_1)$$

Para demonstrar que as asserções

$$B[G \wedge H],\ B[G \rightarrow H] \text{ e } B[G \leftrightarrow H]$$

são verdadeiras, um raciocínio análogo é utilizado. Conclui-se que a base e o passo da indução são verdadeiros. Logo, pelo princípio da indução, B[E] é verdadeira para toda fórmula E.

Na demonstração anterior duas regras são definidas. Elas são utilizadas na conversão de fórmulas em outras equivalentes que contêm apenas o conectivo *nand*.

Equivalência entre $\neg$ e {*nand*}. Tem-se a equivalência

$$\neg P \text{ equivale a } P \textit{ nand } P.$$

Equivalência entre $\vee$ e {*nand*}. Tem-se a equivalência

$$(P \vee Q) \text{ equivale a } (P \textit{ nand } P) \textit{ nand } (Q \textit{ nand } Q).$$

Exemplo (transformação para o conectivo *nand*). Dada uma fórmula H, este exemplo demonstra como obter uma fórmula G, equivalente a H, que contém apenas o conectivo *nand* e os símbolos de H. Considere a fórmula $H = P \wedge (R \rightarrow S)$. Observe as equivalências:

$$\begin{gathered}
H = P \wedge (R \rightarrow S) \text{ equivale a} \\
(P \wedge (\neg R \vee S)) \text{ equivale a} \\
\neg\neg(P \wedge \neg\neg(\neg R \vee S)) \text{ equivale a} \\
\neg\neg(P \wedge \neg(R \wedge \neg S)) \text{ equivale a} \\
\neg(P \textit{ nand } (R \textit{ nand } \neg S)) \text{ equivale a} \\
\neg(P \textit{ nand } (R \textit{ nand } (S \textit{ nand } S))) \text{ equivale a} \\
(P \textit{ nand } (R \textit{ nand } (S \textit{ nand } S))) \textit{ nand } (P \textit{ nand } (R \textit{ nand } (S \textit{ nand } S)))
\end{gathered}$$

A fórmula obtida equivale a H e contém apenas o conectivo *nand* e os símbolos de H.

O alfabeto da Lógica Proposicional é redefinido a seguir. Nesta nova definição, são considerados apenas os conectivos $\neg$ e $\vee$, que formam um conjunto de conectivos completo. Observe que essa nova definição não modifica a linguagem da Lógica Proposicional. Como é analisado nas seções anteriores, qualquer fórmula H que contém conectivos $\wedge$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ pode ser expressa equivalentemente por outra fórmula G que contém apenas os conectivos $\neg$ e $\vee$ e os símbolos proposicionais e de verdade contidos em H. Além disso, como as fórmulas *true* e $\neg$*false* são equivalen-

fabeto considera apenas o símbolo de verdade *false*. Isto é possível pois o outro símbolo de verdade *true* pode ser expresso de forma equivalente utilizando o símbolo de verdade *false* e o conectivo $\neg$, que faz parte do novo alfabeto.

Definição (alfabeto). O alfabeto da Lógica Proposicional é constituído por:

- Símbolos de pontuação: (,).
- Símbolo de verdade: *false*.
- Símbolos proposicionais: $P, Q, R, S, P_1, Q_1, R_1, S_1, P_2, Q_2 \ldots$
- Conectivos proposicionais. $\neg, \vee$

Como há outros conjuntos de conectivos completos, o alfabeto da Lógica Proposicional também pode ser redefinido de outras formas. O conjunto $\{\neg, \wedge\}$, por exemplo, é completo. Logo, na definição acima o conectivo $\vee$ pode ser trocado por $\wedge$ e outra definição equivalente é obtida. Há várias definições para o alfabeto da Lógica Proposicional, todas equivalentes e determinando uma mesma linguagem.

As fórmulas da Lógica Proposicional podem ser expressas utilizando vários tipos de conjuntos de conectivos completos. Além disso, tais fórmulas também são equivalentes a fórmulas com estruturas predefinidas, denominadas formas normais. As formas normais são definidas a seguir.

Definição (literal). Um literal na Lógica Proposicional é um símbolo proposicional ou sua negação.

As formas normais são obtidas a partir de literais.

Definição (forma normal). Há dois tipos de formas normais:

- Uma fórmula H está na forma normal disjuntiva (fnd), se é uma disjunção de conjunção de literais.
- Uma fórmula H está na forma normal conjuntiva (fnc), se é uma conjunção de disjunção de literais.

Exemplo (formas normais). Considere as fórmulas H e G a seguir:

$$H = (\neg P \wedge Q) \vee (\neg R \wedge \neg Q \wedge P) \vee (P \wedge S)$$
$$G = (\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q \vee P) \wedge (P \vee S)$$

A fórmula H está na forma normal disjuntiva e G na forma normal conjuntiva.

Exemplo (obtenção de formas normais). Considere a fórmula

$$H = (P \rightarrow Q) \wedge R.$$

Este exemplo apresenta um algoritmo para a obtenção de duas fórmulas H_1 e H_2, equivalentes a H e tais que H_1 é fnd e H_2 é fnc. O primeiro passo desta técnica é a obtenção da tabela verdade associada a H.

Tabela 1 Tabela verdade associada à fórmula $(P \rightarrow Q) \wedge R$.

P	Q	R	$(P \rightarrow Q) \wedge R$
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T
F	F	F	F

Extraia da tabela verdade as linhas que interpretam a fórmula H como T.

Tabela 2 Tabela verdade associada à fórmula $(P \rightarrow Q) \wedge R$.

P	Q	R	$(P \rightarrow Q) \wedge R$
T	T	T	T
F	T	T	T
F	F	T	T

A primeira linha da Tabela 2 indica que, para se ter uma interpretação de H igual a T, é necessário ter

$$\{I[P]=T \text{ e } I[Q] = T \text{ e } I[R] = T\}.$$

Construa, a partir deste conjunto, a conjunção de literais: $P \wedge Q \wedge R$. A segunda linha diz que se deve ter

$$\{I[P] = F \text{ e } I[Q] = T \text{ e } I[R] = T\},$$

o que determina a conjunção de literais $\neg P \wedge Q \wedge R$. Neste caso, como $I[P] = F$, considera-se $\neg P$ na conjunção. Finalmente, a terceira linha indica que para $I[H]=T$, deve-se ter

$$\{I[P] = F \text{ e } I[Q] = F \text{ e } I[R] = T\}$$

o que determina a conjunção $\neg P \wedge \neg Q \wedge R$. A partir das três linhas da tabela anterior são obtidas as conjunções de literais

$$P \wedge Q \wedge R,\ \neg P \wedge Q \wedge R \text{ e } \neg P \wedge \neg Q \wedge R.$$

A fórmula H é interpretada como verdadeira quando ocorre a primeira linha ou a segunda ou a terceira (observe a palavra ou). A disjunção destas três conjunções é a fnd associada a H. Isto é, a fórmula

$$H_1 = (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$$

equivale a H e está na forma normal disjuntiva.

A fórmula H_2 é obtida analogamente. O mesmo algoritmo, mas de forma dual, é considerado. Neste caso, o dual do conectivo $\wedge$ é $\vee$. O dual do símbolo T é F. No caso da fnd, são consideradas apenas as linhas que interpretam H como T. Neste caso, de forma dual, considere as linhas que interpretam H como F.

Tabela 3 Tabela verdade associada à fórmula $(P \rightarrow Q) \wedge R$.

P	Q	R	$(P \rightarrow Q) \wedge R$
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	F	F

A partir de cada linha determine as respectivas disjunções. Observe que na fnd, de forma dual, são determinadas as conjunções. Na primeira linha como I[P]=T, considera-se $\neg P$ na disjunção, obtendo:

Primeira linha:

$$\neg P \vee \neg Q \vee R.$$

Analogamente,

Segunda linha:

$$\neg P \vee Q \vee \neg R,$$

Terceira linha:

$$\neg P \vee Q \vee R,$$

Quarta linha:

$$P \vee \neg Q \vee R.$$

Quinta linha:

$$P \vee Q \vee R.$$

Observe nas disjunções obtidas que se I[P]=T então $\neg P$ ocorre nas disjunções e se I[P]=F, então ocorre P. Este processo é o dual daquele considerado na fnd. A fórmula H_2 é a conjunção destas disjunções. Isto é:

$$H_2 = (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R).$$

A fórmula H_2 equivale a H e está na forma normal conjuntiva.

Exercícios

1) Demonstre que as fórmulas H e G são equivalentes.

$H = (P \leftrightarrow Q) \vee (R \rightarrow S)$

$G = \neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P)) \vee (\neg R \vee S)$

2) Considere as afirmações a seguir. Demonstre quando elas forem verdadeiras ou dê uma justificativa quando forem falsas.

a) $(P \vee Q)$ pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas o conectivo $\rightarrow$, P e Q.
b) $(P \wedge Q)$ pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas o conectivo $\rightarrow$, P e Q.
c) $(P \leftrightarrow Q)$ pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas o conectivo $\rightarrow$, P e Q.
d) $(\neg P)$ pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas o conectivo $\vee$ e P.
e) $(\neg P)$ pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas o conectivo $\wedge$ e P.
f) $(P \vee Q)$ pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas o conectivo $\leftrightarrow$, P e Q.
g) $(P \wedge Q)$ pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas o conectivo $\leftrightarrow$, P e Q
h) $(P \rightarrow Q)$ pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas o conectivo $\leftrightarrow$, P e Q.
I) $(\neg P)$ pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas o conectivo $\leftrightarrow$ e P.

3) Considere os conjuntos de conectivos.

$\{\vee, \wedge\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\rightarrow, \vee\}$, $\{\vee, \neg\}$, $\{\rightarrow, \neg\}$, $\{\rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\{\rightarrow\}$, $\{\leftrightarrow\}$, $\{\rightarrow, \wedge\}$, $\{\leftrightarrow, \wedge\}$ e $\{\leftrightarrow, \vee\}$

a) Identifique quais conjuntos são completos. Para identificar se um conjunto é completo, estabeleça as regras de conversão dos conectivos.
b) No caso dos conjuntos completos, demonstre, utilizando o princípio da indução, que qualquer fórmula H pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas os conectivos do conjunto e os símbolos proposicionais e de verdade de H.

4) Considere o conectivo nor definido pela correspondência: $(P \textit{ nor } Q) = \neg(P \vee Q)$

a) Construa a tabela verdade para o conectivo nor.
b) Siga os passos determinados neste capítulo e defina um conjunto de procedimentos que possibilite transformar uma fórmula H em outra equivalente, mas que contém apenas o conectivo nor e os símbolos de verdade e proposicionais de H.
c) Demonstre, utilizando o princípio da indução, que qualquer fórmula H pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas o conectivo nor e os símbolos proposicionais e de verdade de H.
d) Repita este exercício considerando o conectivo definido pela correspondência $(P \textit{ nnse } Q) = \neg(\neg P \rightarrow Q)$
e) Repita este exercício considerando o conectivo definido pela correspondência $(P \textit{ nnse } Q) = \neg(P \rightarrow \neg Q)$

5) Demonstre a validade das fórmulas a seguir.

a) $\neg P \leftrightarrow (P \textit{ nand } P)$
b) $(P \vee Q) \leftrightarrow (P \textit{ nand } \neg Q)$

6) Termine a demonstração da proposição que trata da relação semântica entre os conectivos, considerando as asserções $B[G \wedge H]$, $B[G \vee H]$ e $B[G \leftrightarrow H]$.

7) Demonstre o novo princípio da indução.

Seja B[E] uma asserção que se refere às fórmulas E da lógica. Se as duas propriedades c) e d), a seguir, são verdadeiras, então conclui-se que B[E] é verdadeira para qualquer fórmula E.

c) Base da indução. B[P] é verdadeira para todo símbolo proposicional. B[*false*] é verdadeira.

d) Passo da indução. Sejam G e H duas fórmulas. Se B[G] e B[H] são verdadeiras, então B[G $\vee$ H] e B[$\neg$G] são verdadeiras.

Observe que neste caso as propriedades c) e d) são análogas às propriedades a) e b) do princípio da indução na lógica, respectivamente. Entretanto, nas propriedades c) e d) são considerados apenas os conectivos $\neg$ e $\vee$ e o símbolo de verdade *false*.

8) Considere as fórmulas:

$H = (P \rightarrow Q) \leftrightarrow (R \wedge P)$

$G = (P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \vee Q)$

$E = (P \rightarrow Q) \rightarrow (((P \wedge Q) \leftrightarrow P) \rightarrow \wedge ((P \vee R) \leftrightarrow R)) \rightarrow P)$

Determine as fnd's e as fnc's associadas a H, G e E.

9) a) Demonstre, utilizando o princípio da indução, que toda fórmula da Lógica Proposicional é equivalente a uma fórmula fnd.

b) Demonstre, utilizando o princípio da indução, que toda fórmula da Lógica Proposicional é equivalente a uma fórmula fnc.

10) Considere as funções de verdade unárias h_1, h_2, h_3, e h_4, indicadas a seguir.

h_1 (T) = T. h_1 (F) = T.

h_2 (T) = T. h_2 (F) = F.

h_3 (T) = F. h_3 (F) = T.

h_4 (T) = F. h_4 (F) = F.

a) As funções de verdade acima podem ser representadas por fórmulas da Lógica Proposicional que possuem a mesma tabela verdade. Tem-se

P	h_3	$\neg$P
T	F	F
F	T	T

Como as colunas de $\neg$P e h_3 coincidem, então $\neg$P representa a função h_3. Identifique as fórmulas que representam as outras funções.

b) Determine todas as funções de verdade binárias sobre os valores de verdade. Entre tais funções há, por exemplo, a função g(X,Y) definida a seguir: g(T,T) = T, g (T,F) = F, g(F,T) = T e g(F,F) = T.

c) Determine as fórmulas associadas às funções de verdade binárias. A fórmula associada à função g(X, Y) acima é $(P \rightarrow Q)$ pois as colunas de g e de $(P \rightarrow Q)$, na tabela verdade a seguir coincidem.

P	Q	g	$P \rightarrow Q$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

d) Represente todas as funções de verdade binárias utilizando os conectivos $\neg$ e $\vee$. Isto significa que todas as funções de verdade binárias podem ser representadas utilizando composições das funções associadas aos conectivos $\neg$ e $\vee$.

e) É possível identificar uma função de verdade binária h, tal que todas as outras podem ser representadas como composições de h.

f) Qual o número de funções de verdade n-árias?

Sugestões e soluções de exercícios selecionados

2) Todos os itens deste exercício podem ser resolvidos utilizando os passos da solução do item a).

a) Construa inicialmente uma tabela verdade com os símbolos P e Q. Esta tabela deve conter 4 linhas, uma coluna para P e outra para Q. Adicione, completando a tabela, uma coluna para cada uma das fórmulas $P \to Q$, $Q \to P$, $P \to (P \to Q)$, $P \to (Q \to P)$, $Q \to (P \to Q)$, $Q \to (Q \to P)$, $(P \to Q) \to P$, $(P \to Q) \to Q$, $(Q \to P) \to P$, $(Q \to P) \to Q$ etc., etc,... Observe que se considera todas as fórmulas construídas a partir de P e Q utilizando o conectivo $\to$. Há infinitas fórmulas. Mas, o número máximo de colunas em uma tabela com 4 linhas é 16 (justifique), logo muitas fórmulas têm colunas idênticas pois são equivalentes. Neste caso, o número de colunas obtidas é menor que 16. $P \vee Q$ pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas o conectivo $\to$ se alguma coluna da tabela for igual à coluna de $P \vee Q$.

b) Análoga à solução de a).

c) Análoga à solução de a).

d) Pode ser resolvido utilizando os passos do item a). Mas há uma solução mais simples. Se $I[P]=T$, então $I[\neg P]=F$. Mas, se $I[P]=T$, então qualquer fórmula H que contém apenas P e $\vee$ é tal que $I[H]=T$. Não é possível negar P utilizando apenas P e $\vee$.

e) Análoga à solução do item d).

f) Análoga à solução do item a, trocando $\to$ por $\leftrightarrow$.

g) Análoga à solução do item f).

h) Análoga à solução do item f).

I) Análoga à solução do item d).

3) a) Utilize os resultados do exercício anterior.

b) Siga os passos da demonstração da proposição, que demonstra, utilizando o princípio da indução, que qualquer fórmula H pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas os conectivos do conjunto $\{\neg, \vee\}$ e os símbolos proposicionais e de verdade de H.

4) c) Análoga à demonstração da proposição que demonstra, utilizando o princípio da indução, que qualquer fórmula H pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas o conectivo *nand* e os símbolos proposicionais e de verdade de H.

7) Esta demonstração segue os princípios da demonstração do exercício 2 do Capítulo 5. Observe inicialmente que a segunda forma do princípio da indução implica o princípio da indução na lógica. Demonstre que o princípio da indução na lógica implica o novo princípio da indução. O princípio da indução na lógica é dado pela implicação

$$[\text{base-lógica} \wedge \text{passo-lógica}] \Rightarrow \forall \text{ fórmula E } B[E]$$

e o novo princípio da indução é

$$[\text{base-nova} \wedge \text{passo-novo}] \Rightarrow \forall \text{ fórmula E } B[E].$$

Deve-se demonstrar que

$$\{[\text{base-lógica} \wedge \text{passo-lógica}] \Rightarrow \forall \text{ fórmula } B[E]\} \text{ implica}$$
$$\{[\text{base-nova} \wedge \text{passo-novo}] \Rightarrow \forall \text{ fórmula } E\ B[E]\}$$

De forma inteiramente análoga àquela considerada no exercício 2 do Capítulo 5, a demonstração desta implicação equivale à demonstração de

$$[\text{base-nova} \wedge \text{passo-novo}] \text{ implica } [\text{base-lógica} \wedge \text{passo-lógica}]$$

Observe que neste caso base-nova está contida em base-lógica, como também passo-novo está contido em passo-lógica. Para demonstrar essa implicação utilize o fato de qualquer fórmula pode ser reescrita de forma equivalente utilizando apenas os conectivos $\neg$ e $\vee$.

9) a) Considere B[E] = "$\exists$ fórmula Ef, tal que Ef equivale a E e Ef é fnd".
Utilize o princípio da indução na lógica simplificado para demonstrar que $\forall$ fórmula E, B[E].

10) e) Sim, a função associada ao conectivo nor ou ao conectivo *nand*.
f) É igual a 2n.

CAPÍTULO 7

Um sistema axiomático e um sistema de dedução natural na Lógica Proposicional

Introdução

Um dos principais objetivos da lógica é o estudo de estruturas que possam ser utilizadas na representação e dedução de conhecimento.

A Lógica estabelece uma linguagem útil para representação de conhecimento, o que tem grande aplicação em Computação. Observe que a ciência da programação por exemplo, consiste no desenvolvimento de técnicas que possibilitam a representação do conhecimento. Além da linguagem útil para representação, também são analisados mecanismos que tratam da dedução de conhecimento. Se por um lado a Lógica estabelece uma linguagem útil, ela também analisa como um novo argumento é deduzido, formalmente, a partir do argumento dado *a priori*. Observe que isto também tem aplicações em Computação. A execução de um programa possibilita a dedução de um novo conhecimento a partir daquele representado *a priori*.

Neste capítulo são analisados dois sistemas de dedução da Lógica Proposicional. Estes sistemas, também denominados sistemas formais, estabelecem estruturas que permitem a representação e dedução formal de conhecimento. O primeiro sistema de dedução considerado é o sistema axiomático Pa que define uma estrutura axiomática para a Lógica Proposicional. É necessário enfatizar que o sistema de dedução axiomático Pa não é o mais adequado para implementações em computadores. Os mais adequados utilizam métodos de dedução diferentes como, por exemplo, tableaux semânticos e resolução. Entretanto, no sistema axiomático considerado a seguir as noções de prova, derivação, conseqüência lógica e completude se apresentam de forma simples. Além disso, o estudo deste tipo de sistema de dedução é considerado em vários tipos de lógicas. O segundo sistema considerado é um sistema de dedução natural, que é análogo ao sistema Pa mas não contém axiomas.

Neste capítulo são analisados dois sistemas, que definem métodos que produzem ou verificam fórmulas ou argumentos válidos. Isto corresponde ao segundo passo básico no estudo da Lógica. O terceiro passo também é considerado nos sistemas axiomático e natural. A definição das noções de prova ou demonstração é um tema central na definição destes sistemas. Existem excelentes livros que tratam de sistemas de dedução formal [Andrews, 1986], [Mendelson, 1987], [Enderton, 1972], [Dalen, 1989], [Shoenfield, 1967] e [Fitting, 1990].

O Sistema Axiomático Pa

Um sistema formal axiomático é composto por:

Definição (sistema axiomático Pa). O sistema axiomático Pa, da Lógica Proposicional, é definido pela composição dos quatro elementos:

- O alfabeto da Lógica Proposicional.
- O conjunto das fórmulas da Lógica Proposicional.
- Um subconjunto das fórmulas, que são denominadas axiomas.
- Um conjunto de regras de dedução.

Um dos objetivos do estudo do sistema Pa é o estudo formal da representação e dedução de conhecimento. É analisada a dedução de um novo conhecimento a partir de outro dado *a priori*. Esse conhecimento, fornecido de antemão, é representado por um conjunto de fórmulas, denominadas por axiomas. Os axiomas do sistema Pa são definidos a seguir.

Definição (axiomas do sistema Pa). Os axiomas do sistema Pa são fórmulas da Lógica Proposicional determinadas pelos esquemas indicados a seguir. Nestes esquemas E, G e H são fórmulas quaisquer da Lógica Proposicional.

- $Ax1 = \neg(H \vee H) \vee H$
- $Ax2 = \neg H \vee (G \vee H)$
- $Ax3 = (\neg(\neg H \vee G)) \vee ((\neg(E \vee H)) \vee (G \vee E))$

Observe que o sistema Pa possui infinitos axiomas. Eles estão representados acima por esquemas de fórmulas. Utilizando outros conectivos, tais axiomas são representados equivalentemente por:

$$Ax1 = (H \vee H) \rightarrow H$$
$$Ax2 = H \rightarrow (G \vee H)$$
$$Ax3 = (H \rightarrow G) \rightarrow ((E \vee H) \rightarrow (G \vee E))$$

O axioma A×2 pode ser escrito como:

$$A\times 2 = H \rightarrow (E \rightarrow H),$$

que é obtido fazendo $G = \neg E$.

Notação. No sistema Pa são consideradas as correspondências.

$$H \rightarrow G \text{ denota } (\neg H \vee G),$$
$$(H \rightarrow \textit{false}) \text{ denota } \neg H,$$
$$(H \leftrightarrow G) \text{ denota } (H \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow H) \text{ e}$$
$$(H \wedge G) \text{ denota } \neg(\neg H \vee \neg G).$$

Os axiomas de um sistema axiomático representam o conhecimento dado *a priori*. No caso do sistema Pa, este conhecimento é representado por axiomas que são tautologias. A validade dos axiomas A×1 e A×2 é imediata. A validade de A×3 é demonstrada pela tabela verdade a seguir. Observe que a coluna da fórmula A×3 só contém o símbolo T.

Tabela 1 Tabela verdade associada ao axioma 3.

H	G	E	$H \rightarrow G$	$E \vee H$	$G \vee E$	A × 3
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	F	T
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	F	T

No sistema Pa, o mecanismo de inferência, que permite a dedução de conhecimento, se fundamenta em um esquema de regra de inferência denominado Modus Ponens. O sistema Pa possui infinitas regras de inferência, determinadas pelo esquema Modus Ponens.

Definição (regra de inferência do sistema Pa, Modus Ponens). Dadas as fórmulas H e G, o esquema de regra de inferência do sistema Pa, denominado Modus Ponens (MP), é definido pelo procedimento a seguir: **tendo**, H e $(H \rightarrow G)$ **deduza** G.

Notação. Para representar o esquema de regra de inferência Modus Ponens, a notação a seguir é considerada

$$MP = \frac{H, (H \rightarrow G)}{G}$$

Nesta notação, o "numerador" da equação,

$$H, (H \rightarrow G),$$

é denominado por antecedente. O "denominador" é o conseqüente. Observe que o esquema de regra de inferência Modus Ponens é na verdade um conjunto infinito de regras pois as fórmulas H e G são arbitrárias. Ela determina o seguinte: a partir de dois argumentos, representados pelas fórmulas

$$H \text{ e } (H \rightarrow G),$$

dadas *a priori*, é concluído o argumento representado por G. Suponha, por exemplo, que se tenha as correspondências

H = "está chovendo"
G = "a rua está molhada"

Neste caso, se H é verdadeira, isto é, "está chovendo" e a implicação

$$(H \rightarrow G)$$

também é verdadeira, isto é,

"**se** está chovendo **então** a rua está molhada".

Então, a partir da Regra de Inferência Modus Ponens, conclui-se que G é verdadeira, isto é, "a rua está molhada". Observe que somente é possível concluir que "a rua está molhada" devido à conjunção de dois fatos: É verdade que "está chovendo" e também é verdade a implicação "**se** está chovendo **então** a rua está molhada". Se apenas a implicação fosse verdadeira, não se poderia concluir que "a rua está molhada". Assim, quando diz que

$$(H \rightarrow G)$$

é verdadeiro, nada se pode concluir sobre a veracidade de H ou G. No que se segue o esquema de regra de inferência será denominado simplesmente por regra de inferência. A regra de inferência Modus Ponens define um procedimento sintático de dedução de conhecimento, que pode ser mecanizado em linguagens de programação como PROLOG. A dedução de conhecimento efetuada em um computador é uma dedução sintática, que freqüentemente é implementada utilizando os conceitos de dedução da Lógica.

Conseqüência Lógica em Pa

O sistema axiomático Pa define uma estrutura para representação e dedução de conhecimento. Inicialmente, há o conhecimento representado pelos axiomas e mais algumas fórmulas extras denominadas hipóteses. As regras de inferência determinam

um mecanismo de inferência que é aplicado aos axiomas e às hipóteses. Os argumentos obtidos a partir da aplicação das regras de inferência sobre o conhecimento dado *a priori* no sistema é representado por um conjunto de fórmulas denominadas conseqüências lógicas. As conseqüências lógicas representam o conhecimento provado, a partir dos axiomas e hipóteses, utilizando as regras de inferência. A prova de uma fórmula no sistema Pa e a conseqüência lógica são definidas a seguir.

Definição (prova no sistema Pa). Sejam: H uma fórmula e β um conjunto de fórmulas denominadas por hipóteses. Uma prova de H a partir de β, no sistema axiomático Pa, é uma seqüência de fórmulas $H_1, H_2, \ldots, H_n$, onde se tem:

- $H = H_n$.

E para todo i tal que $1 \leq i \leq n$,

- H_i é um axioma ou
- $H_i \in \beta$ ou
- H_i é deduzida de H_j e H_k, utilizando a Regra Modus Ponens, onde $j < i$ e $k < i$. Isto é,

$$\text{MP:}\frac{H_j \quad H_k}{H_i}$$

Observe que neste caso, necessariamente, se tem que $H_k = H_j \rightarrow H_i$.

Exemplo (prova no sistema Pa). Considere o conjunto de hipóteses $\beta = \{G_1, \ldots, G_9\}$ tal que

$G_1 = (P \wedge R) \rightarrow P$
$G_2 = Q \rightarrow P_4$
$G_3 = P_1 \rightarrow Q$
$G_4 = (P_1 \wedge P_2) \rightarrow Q$
$G_5 = (P_3 \wedge R) \rightarrow R$
$G_6 = P_4 \rightarrow P$
$G_7 = P_1$
$G_8 = P_3 \rightarrow P$
$G_9 = P_2$

A seqüência de fórmulas $H_1, \ldots, H_9$ é uma prova de $(S \vee P)$ a partir de β, no sistema axiomático Pa.

$H_1 = G_7 = P_1$
$H_2 = G_3 = P_1 \rightarrow Q$
$H_3 = Q$ {resultado de MP em H_1 e H_2}
$H_4 = G_2 = Q \rightarrow P_4$
$H_5 = P_4$ {resultado de MP em H_3 e H_4}

$H_6 = G_6 = P_4 \rightarrow P$
$H_7 = P$ {resultado de MP em H_5 e H_6}
$H_8 = A\times2 = P \rightarrow (S \vee P)$
$H_9 = (S \vee P)$ {resultado de MP em H_7 e H_8}.

Na seqüência de fórmulas acima é indicada a forma de utilização da regra Modus Ponens. Observe, por exemplo, que a fórmula H_7 é deduzida das fórmulas H_5 e H_6 utilizando a regra Modus Ponens. Além disso,

$$H_8 = A\times2 = (P \rightarrow (S \vee P)).$$

Isto significa que H_8 é obtida do axioma número 2. Neste caso, é considerado

$$H = P \text{ e } G = S$$

em A×2, obtendo

$$A\times2 = (P \rightarrow (S \vee P)).$$

Notação (prova em Pa). A prova em Pa, indicada no exemplo anterior, é também representada conforme o esquema a seguir:

$$\underline{P_1, (P_1 \rightarrow Q)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{MP1}$$
$$\underline{Q, (Q \rightarrow P_4)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{MP2}$$
$$\underline{P_4, (P_4 \rightarrow P)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{MP3}$$
$$\underline{P, (P \rightarrow (S \vee P))} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{MP4}$$
$$(S \vee P)$$

No esquema anterior, a regra Modus Ponens é utilizada quatro vezes, o que é indicado por MP1, MP2, MP3 e MP4. Na aplicação de MP1, as fórmulas do antecedente são P_1 e $(P_1 \rightarrow Q)$. Observe que tais fórmulas pertencem às hipóteses β. Na segunda aplicação da regra, o antecedente é formado por Q e $(Q \rightarrow P_4)$. Neste caso, a fórmula Q é o conseqüente ou resultado da primeira aplicação da regra Modus Ponens e a fórmula $(Q \rightarrow P_4)$ pertence ao conjunto β. As outras aplicações de Modus Ponens são análogas, exceto a última, onde o antecedente da regra é composto pelas fórmulas

$$P \text{ e } (P \rightarrow (S \vee P)).$$

Neste caso, P é o resultado da terceira aplicação da regra de inferência e a fórmula

$$(P \rightarrow (S \vee P))$$

corresponde a um caso particular do axioma A×2, onde

$$H = P \text{ e } G = S.$$

Dada uma fórmula H e um conjunto de hipóteses β, suponha que H tenha uma prova a partir de β. Isto significa que o conhecimento representado por H é deduzido, utilizando Modus Ponens, a partir do conhecimento representado pelos axiomas e

pelas fórmulas do conjunto β. No caso em que o conjunto β é vazio, H é deduzida utilizando somente os axiomas e Modus Ponens.

Definição (conseqüência lógica no sistema Pa). Dada uma fórmula H e um conjunto de hipóteses β, então H é uma conseqüência lógica de β em Pa, se existe uma prova de H a partir de β.

Definição (teorema no sistema Pa). Uma fórmula H é um teorema em Pa se existe uma prova de H, em Pa, que utiliza apenas os axiomas. Neste caso, o conjunto de hipóteses é vazio.

Um teorema é uma fórmula que representa um conhecimento derivável no sistema axiomático Pa, a partir de seus axiomas. Isto é, um teorema é uma fórmula H derivável a partir de um conjunto vazio de hipóteses.

Notação. Dada uma fórmula H, se H é conseqüência lógica de um conjunto de hipóteses

$$\beta = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\},$$

então este fato é indicado pela notação

$$\beta \vdash H \quad \text{ou} \quad \{H_1, H_2, \ldots, H_n\} \vdash H$$

No caso em que H é um teorema, isto é, β é vazio, então é utilizada a notação

$$\vdash H$$

É apresentado a seguir um conjunto de proposições, cujos resultados são utilizados na demonstração do teorema da completude, que é o principal resultado deste capítulo.

Proposição 1. Sejam β um conjunto de fórmulas e A, B e C três fórmulas da Lógica Proposicional. Tem-se que

$$\{\beta \vdash (A \to B) \text{ e } \beta \vdash (C \vee A)\} \Rightarrow \{\beta \vdash (B \vee C)\}$$

Demonstração. Seja D a fórmula obtida a partir do axioma A×3 fazendo: H = A, G = B, E = C. Logo,

$$D = (A \to B) \to ((C \vee A) \to (B \vee C))$$

Como $\beta \vdash (A \to B)$, então, usando Modus Ponens, ocorre a dedução

$$\frac{(A \to B), ((A \to B) \to ((C \vee A) \to (B \vee C)))}{(C \vee A) \to (B \vee C)}$$

BIBLIOTECA 99246 UESC

isto é, obtém-se a prova $\beta \vdash (C \vee A) \rightarrow (B \vee C)$. Considerando que, $\beta \vdash (C \vee A)$ e aplicando novamente Modus Ponens,

$$\frac{(C \vee A), ((C \vee A) \rightarrow (B \vee C))}{(B \vee C)}$$

a prova $\beta \vdash (B \vee C)$ é obtida.

Proposição 2. Tem-se que $\vdash (P \vee \neg P)$.

Demonstração. Seja A a fórmula obtida a partir do axioma Ax3 fazendo

$$H = ((P \vee P), G = P \text{ e } E = \neg P.$$

Logo,

$$A = ((P \vee P) \rightarrow P) \rightarrow ((\neg P \vee (P \vee P)) \rightarrow (P \vee \neg P))$$

Seja B a fórmula obtida a partir do axioma Ax1 fazendo H = P. Logo,

$$B = (P \vee P) \rightarrow P$$

Aplicando Modus Ponens em A e B, obtém-se

$$C = (\neg P \vee (P \vee P)) \rightarrow (P \vee \neg P).$$

A subfórmula $\neg P \vee (P \vee P)$ pode ser escrita como: $P \rightarrow (P \vee P)$. Portanto,

$$C = (P \rightarrow (P \vee P)) \rightarrow (P \vee \neg P).$$

Considere a fórmula D obtida a partir do axioma Ax2 fazendo: H = P e G = P. Logo,

$$D = P \rightarrow (P \vee P).$$

Aplicando Modus Ponens em C e D a fórmula $P \vee \neg P$ é obtida. Logo, $\vdash (P \vee \neg P)$.

Proposição 3 (regra de substituição). Sejam β um conjunto de fórmulas e H uma fórmula da Lógica Proposicional tais que $\beta \vdash H$. Considere $P_1, ..., P_n$ um conjunto de símbolos proposicionais que ocorrem em H mas não ocorrem nas fórmulas de β. Seja G a fórmula obtida de H substituindo os símbolos proposicionais

$$P_1, ..., P_n$$

pelas fórmulas

$$E_1, ..., E_n$$

respectivamente. Tem-se que $\beta \vdash G$.

Comentário. Para obter a prova de G a partir de β, basta substituir os símbolos proposicionais

$$P_1, \ldots, P_n$$

pelas fórmulas

$$E_1, \ldots, E_n,$$

respectivamente, em todos os passos da prova de H a partir de β. Observe que no argumento acima é essencial que os símbolos proposicionais $P_1, \ldots, P_n$ não ocorram nas fórmulas do conjunto β. A demonstração desta proposição utiliza indução finita no comprimento da prova e é proposta como exercício.

Proposição 4. Tem-se que: $\vdash (P \rightarrow \neg\neg P)$.

Demonstração. A fórmula

$$(P \rightarrow \neg\neg P)$$

é reescrita como

$$(\neg P \vee \neg\neg P).$$

Portanto, basta demonstrar que

$$\vdash (\neg P \vee \neg\neg P).$$

Conforme a proposição 2, tem-se que

$$\vdash (P \vee \neg P).$$

Utilizando a regra de substituição e substituindo P por $\neg P$ em

$$\vdash (P \vee \neg P),$$

a prova

$$\vdash (\neg P \vee \neg\neg P)$$

é obtida.

Exemplo (regra da substituição). Este exemplo considera uma forma incorreta de utilização da regra de substituição. Considere

$$\beta = \{P, P \rightarrow Q\}$$

Aplicando Modus Ponens em β o símbolo proposicional Q é deduzido de P e $P \rightarrow Q$. Logo,

$$\beta \vdash Q$$

Aplicando de forma incorreta a regra da substituição neste resultado é possível concluir

$$\beta \vdash R$$

onde Q é substituído por R. Mas é falso que

$$\{P, P \rightarrow Q\} \vdash R$$

Neste caso, a regra da substituição foi aplicada de forma incorreta porque $Q \in \{P, P \rightarrow Q\}$ e não pode ser substituído.

Na demonstração da proposição a seguir, é utilizada uma notação diferente daquela indicada anteriormente neste capítulo. Esta nova notação é freqüentemente utilizada em demonstrações na lógica e muitas vezes simplifica a indicação da seqüência de passos.

Proposição 5. Tem-se que $\vdash (P \rightarrow P)$.

Demonstração. A notação utilizada nesta demonstração é usual em vários textos de Lógica. Cada linha da demonstração é enumerada à esquerda. Além disso, à direita de cada linha são colocadas as justificativas a partir das quais foi possível deduzir a presente linha. Tais justificativas são escritas de forma abreviada. Uma justificativa do tipo "MP; pr4, Ax3", por exemplo, significa que a regra Modus Ponens foi aplicada ao resultado da proposição 4 e ao axioma Ax3 com as devidas substituições. Observe que as substituições no axioma ficam implícitas e não são indicadas. Além disso, ex5 indica a utilização do exercício 5 deste capítulo. O leitor é convidado a detalhar todas as justificativas da prova a seguir.

1.	$\vdash (P \vee P) \rightarrow (\neg\neg P \vee P)$	MP, pr4, Ax3
2.	$\vdash (\neg\neg P \vee P) \rightarrow (\neg\neg P \vee \neg\neg P)$	MP, pr4; Ax3
3.	$\vdash \neg P \vee (P \vee P)$	Ax2
4.	$\vdash (\neg\neg P \vee P) \vee \neg P$	pr1, .1, .3
5.	$\vdash \neg\neg\neg P \vee (\neg\neg P \vee P)$	pr3, pr4; pr1 .4
6.	$\vdash (\neg\neg P \vee \neg\neg P) \vee \neg\neg\neg P$	pr1, .2, .5
7.	$\vdash \neg P \vee (\neg\neg P \vee \neg\neg P)$	pr3, ex5; pr1; .6
8.	$\vdash \neg\neg P \vee \neg P$	pr1, Ax1, .7
9.	$\vdash P \vee \neg\neg\neg P$	pr3, .8; pr1, ex5
10.	$\vdash \neg P \vee P$	pr3, ex5, pr1, .9

Nas proposições que se seguem, β é um conjunto de hipóteses e A, B e C são fórmulas.

Proposição 6. Tem-se que $\beta \vdash (A \vee B) \rightarrow (B \vee A)$.

Demonstração.

1.	$\beta \vdash (P \rightarrow P)$	pr5
2.	$\beta \vdash (B \rightarrow B)$	pr3, .1
3.	$\beta \vdash (B \rightarrow B) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow (B \vee A))$	Ax3
4.	$\beta \vdash (A \vee B) \rightarrow (B \vee A)$	MP, .2, .3

Proposição 7 (transitividade). Se $\beta \vdash (A_1 \to A_2)$ e $\beta \vdash (A_2 \to A_3)$, então $\beta \vdash (A_1 \to A_3)$.

Demonstração.

1.	$\beta \vdash (\neg A_1 \vee A_2)$	hip
2.	$\beta \vdash (A_2 \to A_3)$	hip
3.	$\beta \vdash (A_3 \vee \neg A_1)$	pr1, .1, .2
4.	$\beta \vdash (A_3 \vee \neg A_1) \to (\neg A_1 \vee A_3)$	pr6
5.	$\beta \vdash (\neg A_1 \vee A_3)$	MP, .3, .4
6.	$\beta \vdash (A_1 \to A_3)$	reescrita de .5

Proposição 8. Se $\beta \vdash (A \to C)$ e $\beta \vdash (B \to C)$, então $\beta \vdash ((A \vee B) \to C)$.

Demonstração.

1.	$\beta \vdash (B \to C)$	hip
2.	$\beta \vdash (B \to C) \to ((A \vee B) \to (C \vee A))$	Ax3
3.	$\beta \vdash (A \vee B) \to (C \vee A)$	MP, .1, .2
4.	$\beta \vdash (A \to C)$	hip
5.	$\beta \vdash (A \to C) \to ((C \vee A) \to (C \vee C))$	Ax3
6.	$\beta \vdash (C \vee A) \to (C \vee C)$	MP, .4, .5
7.	$\beta \vdash (A \vee B) \to (C \vee C)$	pr7, .3, .6
8.	$\beta \vdash (C \vee C) \to C$	Ax1
9.	$\beta \vdash (A \vee B) \to C$	pr7, .7, .8

Proposição 9. Se $\beta \vdash (A \to C)$ e $\beta \vdash (\neg A \to C)$, então $\beta \vdash C$.

Demonstração.

1.	$\beta \vdash (A \to C)$	hip
2.	$\beta \vdash (\neg A \to C)$	hip
3.	$\beta \vdash (A \vee \neg A) \to C$	pr8 .1, .2
4.	$\beta \vdash (A \vee \neg A)$	pr2
5.	$\beta \vdash C$	MP, .3, .4

Proposição 10. Se $\beta \vdash (A \to B)$ então $\beta \vdash (A \to (C \vee B))$ e $\beta \vdash (A \to (B \vee C))$.

Demonstração.

1.	$\beta \vdash (A \to B)$	hip
2.	$\beta \vdash B \to (C \vee B)$	Ax2
3.	$\beta \vdash A \to (C \vee B)$	pr7, .1, .2

4.	$\beta \vdash (C \vee B) \rightarrow (B \vee C)$	pr3, pr6
5.	$\beta \vdash A \rightarrow (B \vee C)$	pr7, .3, .4

Proposição 11 (associatividade). Tem-se que $\beta \vdash ((A \vee B) \vee C) \rightarrow (A \vee (B \vee C))$.

Demonstração.

1.	$\beta \vdash (P \rightarrow P)$	pr5
2.	$\beta \vdash A \rightarrow (A \vee (B \vee C))$	pr3, 1., pr10
3.	$\beta \vdash B \rightarrow (B \vee C)$	pr3, 1., pr10
4.	$\beta \vdash B \rightarrow (A \vee (B \vee C))$	pr10, 3.
5.	$\beta \vdash (A \vee B) \rightarrow (A \vee (B \vee C))$	pr8, 2., 4.
6.	$\beta \vdash C \rightarrow (B \vee C)$	pr3, 2., pr10
7.	$\beta \vdash C \rightarrow (A \vee (B \vee C))$	pr10, 6.
8.	$\beta \vdash ((A \vee B) \vee C) \rightarrow (A \vee (B \vee C))$	pr8, 5., 7.

Proposição 12. Se $\beta \vdash ((A \vee B) \vee C)$ então $\beta \vdash (A \vee (B \vee C))$.

Demonstração.

1.	$\beta \vdash (A \vee B) \vee C$	hip
2.	$\beta \vdash ((A \vee B) \vee C) \rightarrow (A \vee (B \vee C))$	pr11
3.	$\beta \vdash (A \vee (B \vee C))$	MP, 1., 2.

Proposição 13. Se $\beta \vdash (A \rightarrow B)$ e $\beta \vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C))$, então $\beta \vdash (A \rightarrow C)$.

Demonstração.

1.	$\beta \vdash (A \rightarrow B)$	hip
2.	$\beta \vdash (\neg A \vee (\neg B \vee C))$	hip
3.	$\beta \vdash ((\neg B \vee C) \vee \neg A)$	pr6, 2.
4.	$\beta \vdash (\neg B \vee (C \vee \neg A))$	pr12, 3.
5.	$\beta \vdash (B \rightarrow (C \vee \neg A))$	reescrita
6.	$\beta \vdash (A \rightarrow (C \vee \neg A))$	pr7, 1., 5.
7.	$\beta \vdash (\neg A \vee (C \vee \neg A))$	reescrita
8.	$\beta \vdash ((C \vee \neg A) \vee \neg A)$	pr6, 7.
9.	$\beta \vdash (C \vee (\neg A \vee \neg A))$	pr12, 8.
10.	$\beta \vdash (\neg A \vee C)$	pr1, A×1, 9.
11.	$\beta \vdash (A \rightarrow C)$	reescrita

É apresentado a seguir o teorema da dedução, cujo resultado será utilizado na demonstração do teorema da completude. Na demonstração deste teorema, o princípio da indução finita e o lema a seguir são utilizados.

Lema 1. Suponha que $\beta \cup \{A\} \vdash B$ e $B \in \beta \cup \{A\}$ ou B é axioma. Tem-se então que $\beta \vdash (A \rightarrow B)$.

Demonstração. Esta demonstração é dividida em dois casos.

Caso 1: Suponha que $B \in \beta$ ou B é axioma. Logo, $\beta \vdash B$. Utilizando

$$A\times 2 = H \rightarrow (G \rightarrow H),$$

com

$$H = B,\ G = A,$$

é obtida a prova

$$\beta \vdash B \rightarrow (A \rightarrow B).$$

Aplicando a regra Modus Ponens aos resultados

$$\beta \vdash B \text{ e } \beta \vdash B \rightarrow (A \rightarrow B),$$

a prova

$$\beta \vdash (A \rightarrow B)$$

é obtida.

Caso 2: Suponha que B = A. Neste caso, utilizando a Regra de Substituição (proposição 3) no resultado $\vdash (P \rightarrow P)$, (proposição 5), obtém-se $\vdash (A \rightarrow A)$, logo $\beta \vdash (A \rightarrow B)$.

Teorema da dedução. Seja β um conjunto de hipóteses da Lógica Proposicional.

$$\text{Se } \beta \cup \{A\} \vdash B, \text{ então } \beta \vdash (A \rightarrow B)$$

Demonstração. Tem-se que

$$\beta \cup \{A\} \vdash B$$

e é necessário demonstrar que

$$\beta \vdash (A \rightarrow B).$$

Como

$$\beta \cup \{A\} \vdash B,$$

então existe uma seqüência de fórmulas $C_1, \ldots, C_n$, que é uma prova de B a partir de $\beta \cup \{A\}$. Isto significa que $B = C_n$. É demonstrado a seguir, utilizando o princípio da indução, que

$$\beta \vdash (A \rightarrow C_i)$$

para todo inteiro i, $1 \leq i \leq n$. A partir deste fato, fazendo $i = n$, conclui-se que

$$\beta \vdash (A \rightarrow B),$$

pois $B = C_n$. A demonstração de

$$\beta \vdash (A \rightarrow C_i)$$

utiliza o princípio da indução no inteiro i ou equivalentemente o princípio da indução no comprimento da prova. Considere a asserção:

$$A(i) = \text{“se } \beta \cup \{A\} \vdash C_i, \text{ então } \beta \vdash (A \rightarrow C_i)\text{”}.$$

Demonstração da base da indução. Fazendo i=1 na asserção A(i) obtém-se:

$$A(1) = \text{“se } \beta \cup \{A\} \vdash C_1, \text{ então } \beta \vdash (A \rightarrow C_1)\text{”}.$$

Portanto, deve-se demonstrar que

$$\beta \vdash (A \rightarrow C_1),$$

tendo que

$$\beta \cup \{A\} \vdash C_1.$$

C_1 é a primeira fórmula de uma prova a partir de $\beta \cup \{A\}$, logo $C_1 \in \beta \cup \{A\}$ ou C_1 é um axioma. Neste caso, utilizando o lema anterior tem-se que $\beta \vdash (A \rightarrow C_1)$

Demonstração do passo da indução. Esta demonstração considera a segunda forma do princípio da indução. Neste caso, para cada inteiro i, $1 \leq i \leq n$ é necessário demonstrar que se A(k) é verdadeira para todo $k < i$, então A(i) também é verdadeira. Em outras palavras, se a asserção

$$A(k) = \text{“se } \beta \cup \{A\} \vdash C_k, \text{ então } \beta \vdash (A \rightarrow C_k)\text{”}$$

é verdadeira para todo $k < i$, então também é verdadeira a asserção

$$A(i) = \text{“se } \beta \cup \{A\} \vdash C_i, \text{ então } \beta \vdash (A \rightarrow C_i)\text{”}$$

Para demonstrar A(i), suponha

$$\beta \cup \{A\} \vdash C_i.$$

O resultado

$$\beta \vdash (A \rightarrow C_i)$$

é demonstrado a seguir. Neste caso, se C_i é axioma, hipótese ou é igual a A, então, utilizando o lema anterior, conclui-se que

$$\beta \vdash (A \rightarrow C_i).$$

No entanto, suponha que C_i não é axioma, nem hipótese e é diferente de A. Logo, existem as fórmulas

$$C_j, (C_j \rightarrow C_i)$$

tal que

$$C_s = (C_j \rightarrow C_i),$$

onde $j < i$, $s < i$. Isto é, as fórmulas B e $(B \rightarrow C_i)$ pertencem à prova de C_i. Neste caso, C_i é deduzida de

$$C_j, (C_j \to C_i)$$

utilizando Modus Ponens. Portanto,

$$\beta \cup \{A\} \vdash C_j \text{ e } \beta \cup \{A\} \vdash C_s.$$

Como j<i, s<i, então utilizando A(k), obtém-se que

$$\beta \vdash (A \to C_j) \text{ e } \beta \vdash (A \to C_s).$$

Logo,

$$\beta \vdash (A \to C_j) \text{ e } \beta \vdash (A \to (C_j \to C_i)).$$

Utilizando a proposição 13, conclui-se o resultado

$$\beta \vdash (A \to C_i).$$

Proposição 14. Tem-se que $\vdash (\neg A \to (\neg B \to \neg(A \vee B)))$.

Demonstração.

1.	$\vdash A \to \neg\neg A$	pr3, pr4
2.	$\vdash B \to \neg\neg B$	pr3, pr4
3.	$\vdash A \to (\neg\neg A \vee \neg\neg B)$	pr10, .1
4.	$\vdash B \to (\neg\neg A \vee \neg\neg B)$	pr10, .2
5.	$\vdash (A \vee B) \to (\neg\neg A \vee \neg\neg B)$	pr8, 3., 4.
6.	$\vdash (\neg\neg A \vee \neg\neg B) \vee \neg(A \vee B)$	pr6, 5.
7.	$\vdash \neg\neg A \vee (\neg\neg B \vee \neg(A \vee B))$	pr11, 6.
8.	$\vdash \neg A \to (\neg B \to \neg(A \vee B))$	reescrita

Proposição 15. Tem-se que $\vdash A \to (\neg A \to B)$.

Demonstração.

1.	$\vdash A \to \neg\neg A$	pr3, pr4
2.	$\vdash A \to (\neg\neg A \vee B)$	pr10, .1
3.	$\vdash A \to (\neg A \to B)$	reescrita

Completude do Sistema Axiomático Pa

Na definição do sistema axiomático Pa é escolhido um conjunto de axiomas e a regra de inferência Modus Ponens. Uma questão importante é a seguinte. Por que foram escolhidos os axiomas A×1, A×2, A×3 e a Regra de Inferência Modus Ponens? Outros axiomas e regras também poderiam ser escolhidos. Entretanto, há pelo menos duas razões para esta escolha.

1) O sistema axiomático deve ser correto ou seja, todo teorema deve ser uma tautologia.

Isto significa que os argumentos deduzidos a partir dos axiomas, utilizando as regras de inferência, devem ser válidos. Observe que um sistema axiomático de dedução não correto não poderia ter aplicações. Neste caso, haveria a dedução de argumentos não-válidos a partir dos axiomas. Portanto, a correção é o primeiro elemento a ser obtido na definição de um sistema axiomático de dedução de conhecimento. A segunda razão é a seguinte.

2) O sistema axiomático deve ser completo, ou seja, toda tautologia deve ser um teorema.

Dada uma tautologia qualquer, se o sistema axiomático é completo, então a tautologia é um teorema. Isto significa que existe, no sistema axiomático, uma prova desta tautologia a partir dos axiomas. Observe que muitas vezes pode ser fácil identificar se uma fórmula é uma tautologia. Entretanto, a partir da tautologia, determinar a sua prova utilizando os axiomas do sistema axiomático pode não ser tão fácil. A denominação "sistema completo" se deve a este fato. Toda tautologia pode ser derivada no sistema axiomático. Os teoremas a seguir formalizam as questões acima.

Teorema da Correção. Seja H uma fórmula da Lógica Proposicional, se $\vdash$ H então H é uma tautologia,

Demonstração. Observe inicialmente que os axiomas Ax1, Ax2 e Ax3 são tautologias, como já foi demonstrado anteriormente. Na regra Modus Ponens, a fórmula G é deduzida de duas outras fórmulas: H e $(H \rightarrow G)$. Isto é

$$\frac{H, (H \rightarrow G)}{G}$$

Mas se

$$H \text{ e } (H \rightarrow G)$$

são tautologias, então G também é tautologia. Isto é, a partir de tautologias, utilizando Modus Ponens, são deduzidas apenas tautologias (ver exercícios). Se $\vdash$ H, então existe uma seqüência

$$H_1, ..., H_n$$

tal que $H = H_n$. Além disso, dada uma fórmula H_i desta seqüência, então há duas possibilidades:

a) H_i é um axioma e portanto uma tautologia ou
b) H_i é deduzida, utilizando Modus Ponens, de fórmulas anteriores na seqüência. Considerando que a regra Modus Ponens mantém a validade, logo, para todo i, Hi também é tautologia. Portanto, H é uma tautologia.

Esta demonstração pode ser feita de forma mais rigorosa utilizando indução no comprimento da prova (ver exercícios).

Teorema da Completude. Seja H uma fórmula da Lógica Proposicional. Se H é uma tautologia então $\vdash$ H.

A demonstração deste teorema utiliza o teorema da dedução, o princípio da indução finita e os conceitos considerados a seguir. Além disso, nesta demonstração considera-se que H não contém símbolos de verdade. O caso em que H contém símbolos de verdade é análogo.

Definição (base associada a uma fórmula). Seja H uma fórmula e $P_1,...,P_n$ os símbolos proposicionais contidos em H. Dada uma interpretação I, então a base associada a H conforme I, denotada por Bas[H, I] é um conjunto de literais, definidos a partir de $P_1,...,P_n$ como se segue:
Se $I[P_i] = T$, então $P_i \in Bas[H,I]$
Se $I[P_i] = F$, então $\neg P_i \in Bas[H,I]$

Exemplos (base associada a uma fórmula). Considere a fórmula

$$H = \neg(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P).$$

Seja também I uma interpretação tal que:

$$I[P] = T \text{ e } I[Q] = F.$$

Neste caso,

$$Bas[H,I] = \{P, \neg Q\}.$$

Lema 2. Seja H uma fórmula e $P_1, ... P_n$ os símbolos proposicionais contidos em H. Dada uma interpretação I, então:
a) $I[H] = T \Rightarrow Bas[H,I] \vdash H$.
b) $I[H] = F \Rightarrow Bas[H,I] \vdash \neg H$.

Antes de se apresentar a demonstração do lema, considere o exemplo a seguir.

Exemplo. Sejam H e I, respectivamente, a fórmula e a interpretação do exemplo anterior. Neste caso, I[H] = T. Logo, a partir do resultado determinado pelo Lema 2 acima.

$$\{P, \neg Q\} \vdash \neg(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$$

Demonstração do Lema 2. O conjunto de conectivos $\{\neg, \rightarrow\}$ é completo. Assim, nesta demonstração as fórmulas são escritas utilizando apenas $\neg$ e $\rightarrow$. Além disso, esta demonstração utiliza indução no número de conectivos $\neg$ e $\rightarrow$ que ocorrem em H. Considere a notação

$$Nc(H) = \text{número de conectivos } \neg \text{ e } \rightarrow \text{ em H.}$$

Seja A(n) a asserção definida a seguir:

A(n) = "Se Nc(H) = n,

então
a) $I[H] = T \Rightarrow Bas[H,I] \vdash H$.
b) $I[H] = F \Rightarrow Bas[H,I] \vdash \neg H$".

Base da indução. Neste caso, deve-se demonstrar que A(0) é verdadeira.

A(0) = "Se Nc(H) = 0,

então

a) $I[H] = T \Rightarrow Bas[H,I] \vdash H$.

b) $I[H] = F \Rightarrow Bas[H,I] \vdash \neg H$".

Como $Nc(H) = 0$, então H é um símbolo proposicional ou de verdade. Observe que isto ocorre porque as fórmulas consideradas possuem apenas conectivos $\neg$ e $\rightarrow$. Considere o caso em que $H = P$. Nesse caso:

a) Se $I[H] = T$ então $Bas[H,I] \vdash P$

b) Se $I[H] = F$ então $Bas[H,I] \vdash \neg P$

Mas, como $\{P\} \vdash P$ e $\{\neg P\} \vdash \neg P$, tem-se que:

a) Se $I[H] = T$ então $Bas[H,I] = \{P\} \Rightarrow Bas[H,I] \vdash P \Rightarrow Bas[H,I] \vdash H$

b) Se $I[H] = F$ então $Bas[H,I] \vdash \{\neg P\} \Rightarrow Bas[H,I] \vdash \neg P \Rightarrow Bas[H,I] \vdash \neg H$

Portanto, A(0) é verdadeira.

Passo da indução. É considerada a segunda forma do princípio da indução:

se A(j) é verdadeira para todo j tal que $j < n$, então A(n) é verdadeira.

Há vários casos a considerar:

Caso 1. Suponha que $H=\neg G$ tal que $Nc(H)=n$. Logo, $Nc(G)<n$. Como A(j) é verdadeira para todo j tal que $j < n$, então

a) $I[G] = T \Rightarrow B[G,I] \vdash G$

b) $I[G] = F \Rightarrow B[G,I] \vdash \neg G$

Por outro lado, como $B[G,I] = B[H,I]$, então

a) $I[H] = T \Rightarrow I[G] = F$
$\Rightarrow B[G,I] \vdash \neg G$
$\Rightarrow B[H,I] \vdash \neg G$
$\Rightarrow B[H,I] \vdash H$

Portanto, $I[H] = T \Rightarrow B[H,I] \vdash H$

b) $I[H] = F \Rightarrow I[G] = T$
$\Rightarrow B[G,I] \vdash G$
$\Rightarrow B[H,I] \vdash G$, utilizando prop3 e prop4, tem-se
$\vdash G \rightarrow \neg\neg G$. Aplicando MP,
$\Rightarrow B[H,I] \vdash \neg H$

Portanto, $I[H] = F \Rightarrow B[H,I] \vdash \neg H$

Caso 2. Suponha que

$$H= (E \rightarrow G)$$

tal que

$$Nc(H) = n.$$

Logo,

$$Nc(E) < n \text{ e } Nc(G) < n,$$

Como A(j) é verdadeira para todo j tal que j < n, então

a) $I[E] = T \Rightarrow B[E,I] \vdash E$
b) $I[E] = F \Rightarrow B[E,I] \vdash \neg E$
c) $I[G] = T \Rightarrow B[G,I] \vdash G$
d) $I[G] = F \Rightarrow B[G,I] \vdash \neg G$

Por outro lado, como

$$B[H,I] = B[E,I] \cup B[G,I],$$

então

a) $I[H] = F \Rightarrow I[E] = T \text{ e } I[G]=F$
$\Rightarrow B[E,I] \vdash E \text{ e } B[G,I] \vdash \neg G$
$\Rightarrow B[H,I] \vdash E \text{ e } B[H,I] \vdash \neg G$

Conforme a proposição 14,

$$\vdash (E \rightarrow (\neg G \rightarrow \neg(E \rightarrow G))).$$

Aplicando Modus Ponens duas vezes, conclui-se que

$$B[H,I] \vdash \neg(E \rightarrow G),$$

isto é,

$$B[H,I] \vdash \neg H$$

b) Se I[H] = T, então há dois casos a considerar: I[E] = F ou I[G] = T.

$$I[E] = F \Rightarrow B[E,I] \vdash \neg E$$
$$\Rightarrow B[H,I] \vdash \neg E$$

Utilizando a proposição 15,

$$\vdash (\neg E \rightarrow (E \rightarrow G)),$$

e Modus Ponens, conclui-se que

$$B[H,I] \vdash (E \rightarrow G),$$

isto é,

$$B[H,I] \vdash H.$$

No outro caso,

$$I[G] = T \Rightarrow B[G,I] \vdash G$$
$$\Rightarrow B[H,I] \vdash G$$
$$\Rightarrow B[H,I] \cup \{E\} \vdash G$$

Utilizando o teorema da dedução, conclui-se que

$$B[H,I] \vdash (E \rightarrow G),$$

isto é,

$$B[H,I] \vdash H.$$

Portanto, o passo da indução está demonstrado, e a demonstração está concluída.

Demonstração do Teorema da Completude. Seja H uma tautologia. É demonstrado a seguir que H é um teorema, isto é $\vdash H$. Sejam $P_1,\ldots,P_n$ os símbolos proposicionais de H e a tabela verdade a seguir.

Tabela 2 Tabela verdade associada aos símbolos $P_1,\ldots,P_n$.

P_1	P_2	.....	P_{n-1}	P_n
T	T	.....	T	T
T	T	.....	T	F
.....	.....	.....	....	....
F	F	.....	F	T
F	F	.....	F	F

Os símbolos proposicionais de H são apresentados na primeira linha da tabela, e nas outras todas as combinações possíveis de interpretações destes símbolos. Cada linha define uma interpretação diferente para $P_1,\ldots,P_n$, o que totaliza 2^n interpretações. Neste caso, se I_1 é a interpretação definida pela primeira linha e I_2n definida pela última linha, então

$$I_1[P_1]=I_1[P_2]=\ldots=I_1[P_n]=T \text{ e } I_{2n}[P_1]=I_{2n}[P_2]=\ldots=I_{2n}[P_n]=F.$$

Dado um símbolo P_i, existem vários pares de interpretações I_{ci} e J_{ci} tais que;

$$I_{ci}[P_j] = J_{ci}[P_j] \text{ se } P_j \neq P_i, \text{ e } I_{ci}[P_i] = T \text{ e } J_{ci}[P_i] = F.$$

As interpretações I_{ci} e J_{ci} são denominadas as interpretações complementares de P_i. Observe que para qualquer símbolo P_i, a metade das interpretações definidas pela tabela interpretam P_i como T e a outra metade como F. Para qualquer símbolo P_i há 2^{n-1} pares de interpretações complementares. Considere I_{cn} e J_{cn} duas interpretações complementares de P_n. Logo,

$$Bas[H,I_{cn}] = \{P_1',\ldots\ldots,P_{n-1}', P_n\}$$
$$Bas[H,J_{cn}] = \{P_1',\ldots\ldots,P_{n-1}', \neg P_n\}$$

e para i<n,

$$P_j' = P_j \text{ se } I_{cn}[P_j] = J_{cn}[P_j] = T$$
$$P_j' = \neg P_j \text{ se } I_{cn}[P_j] = J_{cn}[P_j] = F$$

Como H é uma tautologia, $I_{cn}[H] = J_{cn}[H] = T$, Utilizando o Lema 2, $B[H,I_{cn}] \vdash H$ e $B[H, J_{cn}] \vdash H$, isto é

$$\{P_1', \ldots, P_{n-1}', P_n\} \vdash H$$
$$\{P_1', \ldots, P_{n-1}', \neg P_n\} \vdash H$$

Utilizando o teorema da dedução, conclui-se

$$\{P_1', \ldots, P_{n-1}'\} \vdash (P_n \rightarrow H)$$
$$\{P_1', \ldots, P_{n-1}'\} \vdash (\neg P_n \rightarrow H)$$

Conforme o exercício 9 deste capítulo

$$\vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow ((\neg P \rightarrow Q) \rightarrow Q).$$

Aplicando o teorema da substituição, trocando P por P_n, Q por H e a regra Modus Ponens duas vezes, conclui-se

$$\{P_1', \ldots, P_{n-1}'\} \vdash H$$

Se $P_{n-1}' = P_{n-1}$, o raciocínio acima pode ser modificado, escolhendo duas outras interpretações complementares I_{cn}' e J_{cn}' de P_n tais que $I'_{cn}[P_{n-1}] = J'_{cn}[P_{n-1}] = F$, obtendo

$$\{P_1'', \ldots, P_{n-1}''\} \vdash H$$

onde $P_{n-1}'' = \neg P_{n-1}$. Isto significa que o raciocínio acima pode ser repetido para obter

$$\{P_1', \ldots, P_{n-1}'\} \vdash H \text{ ou}$$
$$\{P_1'', \ldots, P_{n-1}''\} \vdash H$$

com $P_i' = P_i$ ou $P_i' = \neg P_i$ e $P_i'' = P_i$ ou $P_i'' = \neg P_i$ para todo i tal que $1 \leq i \leq n-2$. Considerando duas deduções do tipo

$$\{P_1', \ldots, P_{n-2}', P_{n-1}\} \vdash H$$
$$\{P_1', \ldots, P_{n-2}', \neg P_{n-1}\} \vdash H$$

e utilizando novamente o resultado

$$\vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow ((\neg P \rightarrow Q) \rightarrow Q),$$

conclui-se

$$\{P_1', \ldots, P_{n-2}'\} \vdash H$$

Repetindo este processo n-2 vezes, conclui-se $\vdash H$. Isto é, H é um teorema do sistema axiomático Pa.

Na demonstração do teorema da completude, dada uma tautologia H, é demonstrada a existência de uma prova para H no sistema axiomático Pa. Entretanto, tal prova não é exibida. Esse tipo de demonstração é comum em matemática. A demonstração da existência de um objeto sem que ele se torne explícito.

Os teoremas da correção e da completude são teoremas centrais no estudo da Lógica. Eles relacionam fatos do mundo sintático, como $\vdash H$, a fatos do mundo semântico como "H é uma tautologia". Os dois teoremas dizem que, no sistema axiomático Pa, H é um teorema se e somente se H é uma tautologia. Isto é, o sistema axiomático Pa é correto e completo. Uma conseqüência da correção, por exemplo, é analisada a seguir.

Definição (consistência). Um sistema axiomático é consistente se e somente se, dada uma fórmula H, não se pode ter $\vdash H$ e $\vdash \neg H$. Isto é, H e $\neg H$ não podem ser teoremas ao mesmo tempo.

Teorema (consistência). O sistema axiomático Pa é consistente.

Demonstração. Suponha que $\vdash H$. Logo, pelo teorema da correção, H é uma tautologia e portanto $\neg H$ é contraditória. Mas, se $\neg H$ é contraditória, então não se pode ter $\vdash \neg H$. Pois caso ocorresse $\vdash \neg H$, então novamente pelo teorema da correção $\neg H$ seria uma tautologia. Mas é impossível se ter H e $\neg H$ como tautologias ao mesmo tempo.

Definição (consistência). Um conjunto de fórmulas Γ é consistente se e somente se não existe fórmula H tal que $\Gamma \vdash H$ e $\Gamma \vdash \neg H$. Isto é, H e $\neg H$ não podem ser deduzidas de Γ.

Teorema (consistência e satisfatibilidade). Um conjunto de fórmulas é consistente se e somente se é satisfatível.

Demonstração. Seja Γ um conjunto de fórmulas.

Se Γ é consistente, então não existe H tal que $\Gamma \vdash H$ e $\Gamma \vdash \neg H$. Suponha por absurdo que Γ não é satisfatível. Logo, não existe interpretação I que satisfaz as fórmulas de Γ. Neste caso, não existe interpretação I que satisfaz Γ e $I[H] = F$ ou $I[\neg H] = F$. Logo, H e $\neg H$ são conseqüências lógicas de Γ. Utilizando o teorema da dedução e da completude, conclui-se que $\Gamma \vdash H$ e $\Gamma \vdash \neg H$, o que é um absurdo pois Γ é consistente. Portanto, Γ é satisfatível.

Se Γ é satisfatível, existe interpretação I que satisfaz Γ. Suponha por absurdo que Γ não seja consistente. Logo existe H tal que $\Gamma \vdash H$ e $\Gamma \vdash \neg H$. Utilizando o teorema da correção, H e $\neg H$ são conseqüências lógicas de Γ. Mas como I satisfaz Γ, então $I[H] = I[\neg H] = T$, o que é um absurdo. Portanto, Γ é consistente.

O Sistema de Dedução Natural Na

O sistema de dedução natural Na é composto por:

Definição (sistema de dedução natural Na). O sistema de dedução natural Na, da Lógica Proposicional, é definido pela composição dos três elementos:

- O alfabeto da Lógica Proposicional.
- O conjunto das fórmulas da Lógica Proposicional.
- Um conjunto de regras de dedução.

Observe que o sistema de dedução natural Na não contém axiomas. Neste sistema, a dedução de conhecimento é feita utilizando apenas regras de inferência. O conhecimento que no sistema Pa é representado pelos axiomas, em Na é representado nas regras de inferência. Este tipo de representação de conhecimento é comum em Lógica, ocorrendo em inúmeros sistemas de dedução como tableaux semânticos e resolução. Como será visto nos capítulos seguintes, os sistemas de dedução tableaux semânticos e resolução não contêm axiomas, mas apenas regras de inferência como no sistema Na. As regras de inferência do sistema Na foram definidas por Gentzen e representam a idéia intuitiva de dedução de conhecimento do ponto de vista sintático, como também o significado construtivo dos conectivos.

Definição (regras de inferência do sistema Na). Dadas as fórmulas E, H e G, os esquemas de regras de inferência do sistema Na são definidos recursivamente por:

$$(\neg I) = \frac{\begin{array}{c}\cancel{H}\\ |\\ \textit{false}\end{array}}{\neg H} \qquad (\neg E) = \frac{H,\ \neg H}{\textit{false}}$$

$$(\wedge I) = \frac{H\ ,G}{H \wedge G} \qquad (\wedge E) = \frac{H \wedge G}{H}, \quad \frac{H \wedge G}{G}$$

$$(\vee I) = \frac{H}{H \vee G} \quad \frac{G}{H \vee G} \qquad (\vee E) = \frac{H \vee G \quad \begin{array}{c}\cancel{H}\\ D_1\\ E\end{array} \quad \begin{array}{c}\cancel{G}\\ D_2\\ E\end{array}}{E}$$

$$(\rightarrow I) = \frac{\begin{array}{c}\cancel{H}\\ |\\ G\end{array}}{H \rightarrow G} \qquad (\rightarrow E) = \frac{H,\ H \rightarrow G}{G}$$

$$(\leftrightarrow \mathrm{I}) = \frac{\begin{array}{c}\mathrm{H}\\ |\\ \mathrm{G}\end{array} \quad \begin{array}{c}\mathrm{G}\\ |\\ \mathrm{H}\end{array}}{\mathrm{H} \leftrightarrow \mathrm{G}} \qquad (\leftrightarrow \mathrm{E}) = \frac{\mathrm{H},\ \mathrm{H} \leftrightarrow \mathrm{G}}{\mathrm{G}} \qquad \frac{\mathrm{G},\ \mathrm{H} \leftrightarrow \mathrm{G}}{\mathrm{H}}$$

$$(\mathit{false}) = \frac{\mathit{false}}{\mathrm{H}} \qquad (\mathrm{RAA}) = \frac{\begin{array}{c}\neg\cancel{\mathrm{H}}\\ |\\ \mathit{false}\end{array}}{\mathrm{H}}$$

Para representar os esquemas de regras de inferência do sistema Na a mesma notação do sistema Pa é utilizada. As fórmulas acima do traço são as premissas e abaixo as conclusões. Na regra ($\rightarrow$ E), a fórmula G é concluída a partir das premissas H e H $\rightarrow$ G. Observe que ($\rightarrow$ E) é a regra Modus Ponens do sistema Pa. Além disso, nas regras de inferência acima, $\neg$H é uma abreviação da fórmula

$$\mathrm{H} \rightarrow \mathit{false}.$$

Observe que a fórmula acima denota a $\neg$H e no sistema Na,

$$\neg\mathrm{H} \text{ denota } \mathrm{H} \rightarrow \mathit{false}.$$

O mesmo ocorre com os conectivos $\vee$ e $\leftrightarrow$.

$$\mathrm{P} \vee \mathrm{Q} \text{ denota } \neg(\neg\mathrm{P} \wedge \neg\mathrm{Q}) \text{ e}$$
$$\mathrm{P} \leftrightarrow \mathrm{Q} \text{ é uma denotação de } (\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}) \wedge (\mathrm{Q} \rightarrow \mathrm{P}).$$

Isto significa que no sistema Na os conectivos utilizados são

$$\{\neg, \wedge, \rightarrow\},$$

que é um conjunto completo. No sistema de dedução natural há duas categorias de regras. As regras de introdução

$$(\wedge\mathrm{I}),\ (\vee\mathrm{I}),\ (\neg\mathrm{I}) \text{ e } (\leftrightarrow\mathrm{I})$$

e regras de eliminação

$$(\wedge\mathrm{E}),\ (\vee\mathrm{E}),\ (\neg\mathrm{E}) \text{ e } (\leftrightarrow\mathrm{E}).$$

As regras de introdução introduzem o conectivo correspondente. A regra ($\wedge$I) introduz na derivação o conectivo $\wedge$, pois a partir das premissas H e G conclui-se H$\wedge$G. As regras de eliminação determinam a eliminação do conectivo correspondente. A regra ($\wedge$E) elimina o conectivo $\wedge$, pois a partir da premissa H$\wedge$G, conclui-se H ou conclui-se G. Observe que há dois tipos de regras ($\wedge$E), uma que conclui H e outra que conclui G. Na regra ($\vee$E), tendo como premissa H$\vee$G e as derivações

$$\{H,D_1,E\} \text{ e } \{G,D_2,E\},$$

conclui-se a fórmula E. O significado desta regra é o seguinte: Se há duas derivações

$$\{H,D_1,E\} \text{ e } \{G,D_2,E\}$$

de E, uma a partir de H e outra a partir de G e, além disso, se a fórmula $H \vee G$ é também uma premissa, então conclui-se E. Observe também que nesta regra as premissas H e G são eliminadas, o que é indicado riscando a fórmula ao meio. Na regra ($\rightarrow$ I) tendo como premissa a derivação

$$\{H,D_1,G\},$$

conclui-se $H \rightarrow G$. Isto significa que se há uma derivação de G a partir de H, conclui-se $H \rightarrow G$, ou seja H implica G. Na regra Redução ao Absurdo, denotada por RAA, a partir da derivação

$$\{\neg H,D_1, \textit{false}\},$$

conclui-se H. Esta regra representa a mesma idéia do método da negação ou absurdo. Inicialmente a hipótese H é negada, o que é indicado por $\neg H$. Tendo obtido uma seqüência de fórmulas a partir de $\neg H$, onde a última é *false*, conclui-se H. Além disso, a fórmula $\neg H$ é retirada da seqüência de dedução, o que é indicado por

$$\cancel{\neg H}, \text{ (fórmula riscada ao meio).}$$

Neste contexto, *false* equivale ao absurdo obtido a partir de $\neg H$, sendo esta a razão do nome da regra "Redução ao Absurdo". Como em RAA, nas regras ($\rightarrow$ I) e ($\neg$I) a hipótese inicial também é retirada da derivação após a conclusão, o que é indicado riscando a fórmula H. A regra (*false*) determina que é possível concluir qualquer fórmula H a partir de *false*. Isto equivale a dizer que a partir de um absurdo, representado por *false*, conclui-se qualquer fórmula.

Finalmente, observe que a definição das regras de inferência utiliza o conceito de derivação, que é definido na próxima seção. A definição de derivação, por sua vez, também utiliza o conceito de regras de inferência. São dois conceitos definidos recursivamente.

Conseqüência Lógica em Na

Como no sistema Pa, o sistema Na também define uma estrutura para representação e dedução de conhecimento. Em Na o conhecimento dado *a priori* é representado nas regras de inferência e pelas hipóteses. Os argumentos obtidos a partir da aplicação das regras de inferência sobre as hipóteses são representados por um conjunto de fórmulas denominadas conseqüências lógicas. A derivação e a prova de uma fórmula no sistema Na são definidos a seguir. Em seguida, a definição de conseqüência lógica é considerada.

Definição (derivação no sistema Na). Uma derivação no sistema Na é definida recursivamente por:

- Toda fórmula H da Lógica Proposicional é uma derivação em Na.

Sejam D_1, D_2 e D_3 derivações em Na; as estruturas a seguir também são derivações em Na.

- Derivações ($\neg$)

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{H}\cdot\\ D_1\\ \mathit{false}\end{array}}{\neg H} \qquad \dfrac{\begin{array}{cc} D_1 & D_2\\ \neg H & H\end{array}}{\mathit{false}}$$

- Derivações ($\wedge$).

$$\dfrac{\begin{array}{cc} D_1 & D_2\\ H & G\end{array}}{H \wedge G} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} D_1\\ H \wedge G\end{array}}{H} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} D_1\\ H \wedge G\end{array}}{G}$$

- Derivações ($\vee$)

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1\\ H\end{array}}{H \vee G} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} D_2\\ G\end{array}}{H \vee G} \qquad \dfrac{\begin{array}{ccc} & \cancel{H} & \cancel{G}\\ D_3 & D_1 & D_2\\ H \vee G & E & E\end{array}}{E}$$

- Derivações ($\rightarrow$)

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{H}\cdot\\ D_1\\ G\end{array}}{H \rightarrow G} \qquad \dfrac{\begin{array}{cc} D_1 & D_2\\ H & H \rightarrow G\end{array}}{G}$$

- Derivações ($\leftrightarrow$)

$$\dfrac{\begin{array}{cc} H & G\\ D_1 & D_2\\ G & H\end{array}}{H \leftrightarrow G} \qquad \dfrac{\begin{array}{cc} D_1 & D_2\\ H & H \leftrightarrow G\end{array}}{G} \qquad \dfrac{\begin{array}{cc} D_1 & D_2\\ G & H \leftrightarrow G\end{array}}{H}$$

- Derivações (*false*) e RAA.

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1\\ \mathit{false}\end{array}}{H} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\cancel{H}\cdot\\ D_1\\ \mathit{false}\end{array}}{H}$$

Uma derivação em Na não é uma seqüência de fórmulas como ocorre com as provas no sistema Pa. A estrutura que melhor representa uma derivação é a árvore, conforme indicado no exemplo a seguir.

Exemplo (derivação no sistema Na). Este exemplo considera a derivação de $(P \wedge Q) \rightarrow (Q \wedge P)$.

$$\dfrac{\dfrac{\cancel{P \wedge Q}\ (\wedge E) \qquad \cancel{P \wedge Q}\ (\wedge E)}{Q \qquad\qquad P\ (\wedge I)}}{Q \wedge P \qquad (\rightarrow I)}$$

$$(P \wedge Q) \rightarrow (Q \wedge P)$$

A construção de uma derivação em Na é feita pela aplicação das regras de inferência, de forma análoga à aplicação da regra Modus Ponens em Pa. No exemplo acima, inicialmente a regra $(\wedge E)$ é aplicada à fórmula $(P \wedge Q)$ deduzindo Q e também P. Em seguida, a partir de P e Q, aplicando a regra $(\wedge I)$, a fórmula $(Q \wedge P)$ é deduzida. Finalmente, a regra $(\rightarrow I)$ é aplicada às premissas

$$(P \wedge Q) \text{ e } (Q \wedge P)$$

deduzindo

$$(P \wedge Q) \rightarrow (Q \wedge P).$$

Uma árvore que representa a derivação acima é dada por

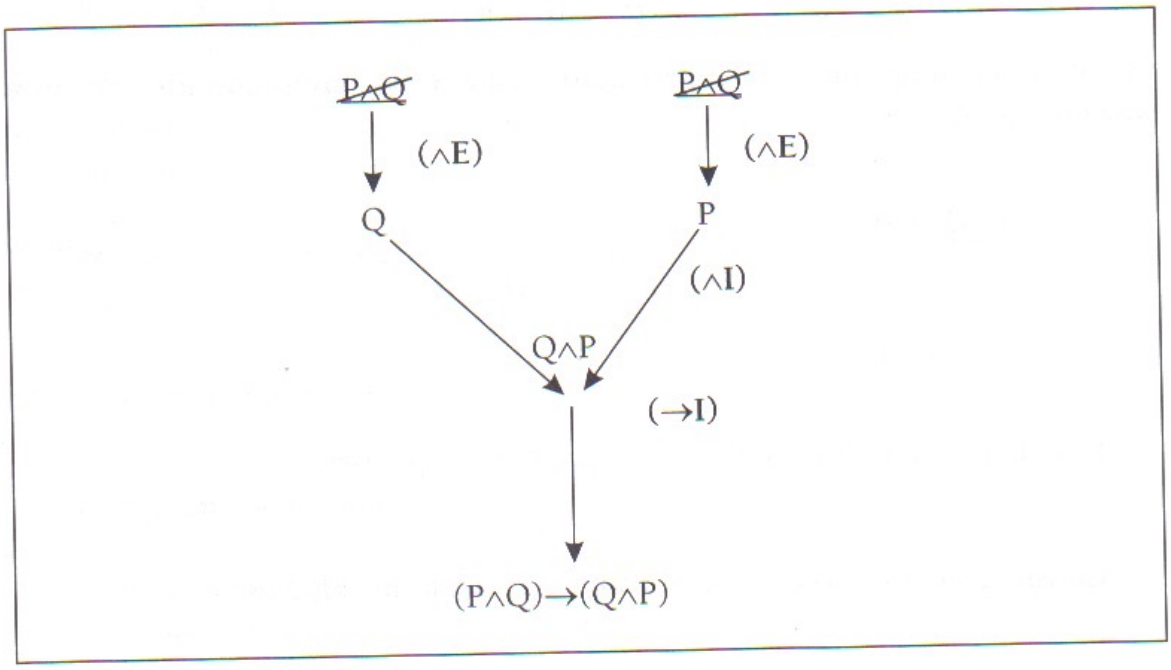


Figura 1 Derivação de $(P \wedge Q) \rightarrow (Q \wedge P)$.

Uma derivação em Na não é uma seqüência de fórmulas como ocorre com as provas no sistema Pa. A estrutura que melhor representa uma derivação é a árvore, conforme indicado no exemplo a seguir.

Exemplo (derivação no sistema Na). Este exemplo considera a derivação de $(P \wedge Q) \rightarrow (Q \wedge P)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{P \wedge Q}\ (\wedge E)}{Q} \qquad \dfrac{\cancel{P \wedge Q}\ (\wedge E)}{P}}{Q \wedge P\ (\wedge I)}}{(P \wedge Q) \rightarrow (Q \wedge P)\ (\rightarrow I)}$$

A construção de uma derivação em Na é feita pela aplicação das regras de inferência, de forma análoga à aplicação da regra Modus Ponens em Pa. No exemplo acima, inicialmente a regra $(\wedge E)$ é aplicada à fórmula $(P \wedge Q)$ deduzindo Q e também P. Em seguida, a partir de P e Q, aplicando a regra $(\wedge I)$, a fórmula $(Q \wedge P)$ é deduzida. Finalmente, a regra $(\rightarrow I)$ é aplicada às premissas

$$(P \wedge Q) \text{ e } (Q \wedge P)$$

deduzindo

$$(P \wedge Q) \rightarrow (Q \wedge P).$$

Uma árvore que representa a derivação acima é dada por

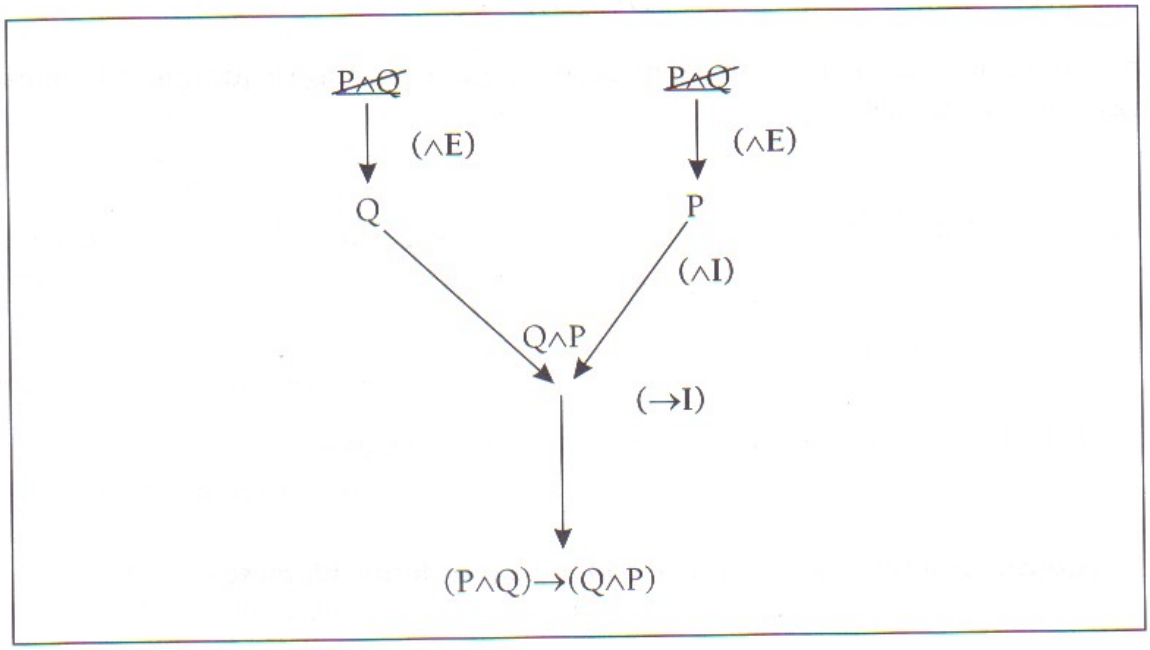


Figura 1 Derivação de $(P \wedge Q) \rightarrow (Q \wedge P)$.

Na derivação anterior, $(P \wedge Q) \rightarrow (Q \wedge P)$ é a última fórmula da derivação e $P \wedge Q$ a premissa ou hipótese inicial. Observe que devido à regra $(\rightarrow I)$, a premissa inicial é eliminada da derivação, o que é indicado riscando cada fórmula.

Definição (prova no sistema Na). Sejam H uma fórmula e β um conjunto de fórmulas denominadas por hipóteses. Uma prova de H a partir de β, no sistema de dedução natural Na, é uma derivação onde se tem:

- As regras da derivação são aplicadas tendo como premissas iniciais, fórmulas de β ou fórmulas que são eliminadas pela aplicação de regras de derivação.
- A última fórmula da derivação é H.

A prova de uma fórmula H a partir de um conjunto hipóteses β é uma derivação que tem como hipóteses iniciais fórmulas de β e fórmulas que são eliminadas. Observe que as fórmulas do conjunto de hipóteses não são eliminadas pela aplicação de regras de inferência.

Exemplo (prova no sistema Na). A derivação do exemplo anterior é uma prova de

$$(P \wedge Q) \rightarrow (Q \wedge P).$$

Neste caso, como a premissa inicial é eliminada pela aplicação da regra $(\rightarrow I)$, a prova de

$$(P \wedge Q) \rightarrow (Q \wedge P)$$

não utiliza nenhuma hipótese. A derivação a seguir é uma prova que utiliza hipóteses como premissas.

$$\dfrac{\dfrac{\underline{P \wedge Q}\ (\wedge E) \qquad P \rightarrow (Q \rightarrow R)}{Q \rightarrow R}\ (\rightarrow E)}{}$$

Esta derivação é a prova de $Q \rightarrow R$ a partir das hipóteses

$$P \wedge Q \text{ e } (P \rightarrow (Q \rightarrow R)).$$

Considere a prova a seguir, que não utiliza nenhuma hipótese

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{P\wedge Q}\ (\wedge E)}{Q} \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{P\wedge Q}\ (\wedge E)}{P} \qquad \cancel{P\to(Q\to R)}\ (\to E)}{Q\to R}\ (\to E)}{R}\ (\to I)}{(P\wedge Q)\to R}\ (\to I)}{(P\to(Q\to R))\to((P\wedge Q)\to R)}$$

Neste caso, obtém-se uma prova de

$$(P\to(Q\to R))\to((P\wedge Q)\to R),$$

que não utiliza hipóteses.

Definição (conseqüência lógica no sistema Na). Dada uma fórmula H e um conjunto de hipóteses β, então H é uma conseqüência lógica de β em Na, se existe uma prova de H a partir de β.

Definição (teorema no sistema Na). Uma fórmula H é um teorema em Na se existe uma prova de H, em Na, que não utiliza hipóteses.

Um teorema é uma fórmula que representa um conhecimento derivável no sistema natural Na, sem a utilização de hipóteses. No sistema Pa a derivação de um teorema também não utiliza hipóteses, mas apenas axiomas. Nos dois sistemas, Pa e Na, um teorema é uma fórmula H derivável a partir de um conjunto vazio de hipóteses.

Notação. Dada uma fórmula H, se H é conseqüência lógica de um conjunto de hipóteses

$$\beta = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\},$$

então este fato é indicado pela notação

$$\beta \vdash H \quad \text{ou} \quad \{H_1, H_2, \ldots, H_n\} \vdash H$$

No caso em que H é um teorema, isto é, β é vazio, então a notação $\vdash H$ é utilizada.

Esta notação é idêntica à notação utilizada no sistema Pa. O contexto determinará qual conseqüência lógica estará sendo considerada.

Proposição 16. Tem-se, no sistema Na, que $\vdash (P \to ((P \to Q) \to Q))$.

Demonstração.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{P} \quad \cancel{P \to Q}}{Q}\,(\to E)}{(P \to Q) \to Q}\,(\to I)}{(P \to ((P \to Q) \to Q))}\,(\to I)$$

Proposição 17. Tem-se, no sistema Na, que $\vdash (P \to (\neg P \to H))$, onde H é uma fórmula qualquer.

Demonstração.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{P} \quad \cancel{\neg P}}{\mathit{false}}\,(\to E)\ \text{observe que } \neg P \text{ corresponde a } P \to \mathit{false}}{H}\,(\mathit{false})}{\neg P \to H}\,(\to I)}{P \to (\neg P \to H)}\,(\to I)$$

Proposição 18. Tem-se no sistema Na a lei da contraposição
$\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$.

Demonstração.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{P} \quad \cancel{P \to Q}}{Q}\,(\to E) \quad \cancel{\neg Q}}{\mathit{false}}\,(\neg E)\ \text{observe que } \neg Q \text{ corresponde a } Q \to \mathit{false}}{\neg P}\,(\mathrm{RAA})}{\neg Q \to \neg P}\,(\to I)}{(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}\,(\to I)$$

Proposição 19. Tem-se no sistema Na que $\vdash \neg(P \leftrightarrow \neg P)$

Demonstração.

$$
\begin{array}{lll}
\cancel{P \leftrightarrow \neg P} & (\wedge E) & \\
\cancel{P} \quad P \rightarrow \neg P & (\rightarrow E) & \cancel{P \leftrightarrow \neg P} \quad (\wedge E) \\
\neg P \quad \cancel{P} & (\neg E) & \cancel{P} \quad P \rightarrow \neg P \quad (\rightarrow E) \\
\textit{false} & (\neg I) \quad \cancel{P \leftrightarrow \neg P} \quad (\wedge E) & \neg P \quad \cancel{P} \quad (\neg E) \\
\neg P & \neg P \rightarrow P \ (\rightarrow E) & \textit{false} \quad (\rightarrow I) \\
P & & \neg P \quad (\neg E) \\
\textit{false} & (\neg I) & \\
\neg(P \leftrightarrow \neg P) & &
\end{array}
$$

Algumas regras de inferência podem ser deduzidas de outras. Tem-se que

$\{(\wedge I), (\wedge E), (\rightarrow I), (\rightarrow E), (\textit{false}), (RAA)\} \Rightarrow \{(\vee I), (\vee E), (\neg I), (\neg E), (\leftrightarrow I), (\leftrightarrow E)\}$

Proposição 20. Tem-se que $\{(\rightarrow E)\} \Rightarrow \{(\neg E)\}$

Demonstração. Observe inicialmente que

$$(\neg E) = \frac{H \quad \neg H}{\textit{false}}$$

Para demonstrar que $\{(\rightarrow E)\} \Rightarrow \{(\neg E)\}$, é necessário concluir *false* a partir de H e $\neg H$ utilizando apenas a regra de $\{(\rightarrow E)\}$. Na derivação a seguir, que conclui *false*, a fórmula $\neg H$ é substituída por $H \rightarrow$ *false*.

$$\frac{H \quad H \rightarrow \textit{false}}{\textit{false}} \quad (\rightarrow E)$$

Proposição 21. Tem-se que $\{(\wedge I)\ (\rightarrow E), (\textit{false}), (RAA)\} \Rightarrow \{(\vee E)\}$.

Demonstração. Neste caso, a regra

$$(\vee E) = \frac{H \vee G \quad \begin{array}{c}\cancel{H} \\ D_1\end{array} \quad \begin{array}{c}\cancel{G} \\ D_2\end{array}}{E}$$

Deve ser deduzida utilizando as regras

$$(\wedge I)\ (\rightarrow E),\ (\textit{false})\ \text{e}\ (RAA)$$

Esta demonstração é feita considerando como premissa inicial a fórmula $H \vee G$ e as derivações

$$\{H, D_1, E\}\ \text{e}\ \{G, D_2, E\}.$$

Em seguida, utilizando as regras acima conclui-se a fórmula E.

Nesta demonstração, a fórmula $H \vee G$ é escrita como $\neg(\neg H \wedge \neg G)$. Considere a derivação.

$$\begin{array}{lll}
\cancel{H} & \cancel{G} & \\
D_1 & D_2 & \\
\underline{E \quad \cancel{\neg E}}\ (\neg E) & \underline{E \quad \cancel{\neg E}} & (\neg E) \\
\underline{\textit{false}}\quad (\textit{false}) & \underline{\textit{false}} & (\textit{false}) \\
\underline{\neg H \qquad\qquad\qquad\qquad \neg G} & & (\wedge I) \\
\underline{\neg H \wedge \neg G \qquad\qquad \neg(\neg H \wedge \neg G)} & & (\neg E) \\
\underline{\textit{false}} & & (RAA) \\
E & &
\end{array}$$

Conclui-se desta derivação que

$$\{(\wedge I)\ (\neg E),\ (\textit{false}),\ (RAA)\ \} \Rightarrow \{(\vee E)\}.$$

Mas como

$$\{(\rightarrow E)\ \} \Rightarrow \{(\neg E)\},\ \text{então}\ \{(\wedge I)\ (\rightarrow E),\ (\textit{false}),\ (RAA)\} \Rightarrow \{(\vee E)\}.$$

Completude do Sistema de Dedução Natural Na

Analogamente ao sistema axiomático Pa, o sistema de dedução natural Na também é completo. As regras de Na são definidas de tal forma a se obter um sistema formal completo. Isto significa que em Na todo teorema é uma tautologia e toda tautologia é um teorema. Esta importante propriedade demonstra que um sistema formal pode ser completo mesmo na ausência de axiomas, tendo apenas regras de inferência como o sistema Na. Neste caso, o conhecimento representado nos axiomas é considerado pelas regras de inferência. Nos próximos capítulos deste livro serão considerados os sistemas de dedução tableaux semânticos e resolução que contêm apenas regras de inferência. Como ocorre com Na, tais sistemas também são completos.

Teorema da Correção. Seja H uma fórmula da Lógica Proposicional, se $\vdash H$ em Na então H é uma tautologia.

Demonstração. Dada uma regra do sistema Na, se as premissas são válidas, então a conclusão também é válida. A demonstração deste fato é proposta como exercício no final deste capítulo. As regras de Na mantêm a validade das fórmulas. Isto significa que, para toda interpretação I, se I satisfaz o conjunto de hipóteses β e $\beta \vdash H$, então $I[H] = T$. Logo, não existe interpretação I que satisfaz o conjunto de hipóteses β onde $\beta \vdash H$ e $I[H] = F$. Como $\vdash H$, então β é um conjunto vazio e na derivação de H todas as premissas são eliminadas. Como β é vazio, então toda interpretação I satisfaz o conjunto de hipóteses. Portanto, $I[H] = T$ para toda interpretação I. Logo H é tautologia. A demonstração rigorosa deste teorema utiliza indução finita e é também proposta como exercício.

Teorema da Completude. Seja H uma fórmula da Lógica Proposicional. Se H é uma tautologia então $\vdash H$ em Na.

Comentário. A demonstração deste teorema não é considerada neste livro, podendo ser encontrada em [Dalen, 1989].

Teorema (consistência). O sistema de dedução natural Na é consistente.

Demonstração. A demonstração deste teorema é análoga à demonstração do teorema da consistência no sistema Pa. Neste caso, são utilizados os teoremas da correção e completude do sistema Na.

Exercícios

1) Dadas duas fórmulas H e G, demonstre que se H e G são tautologias, então o resultado da aplicação da regra Modus Ponens a H e G também é uma tautologia. Em outras palavras:

   Se H e G são tautologias e $\dfrac{H,\ G}{E}$ MP
   então E é uma tautologia.

   Observação: Observe que a fórmula G é necessariamente do tipo: $G = H \rightarrow E$.

2) Responda, justificando nos sistemas Pa e Na.
   a) Por que uma derivação é um procedimento puramente sintático?
   b) Seja β um conjunto de fórmulas. Se $\beta \vdash H$, então é possível concluir que H é uma tautologia?
   c) Seja β um conjunto de fórmulas. Considere que $\beta \vdash H$. Que condições o conjunto de fórmulas β deve satisfazer para que necessariamente H seja uma tautologia?
   d) Se H é tautologia, então $\beta \vdash H$ para qualquer conjunto β.

3) Considere as afirmações a seguir nos sistemas Pa e Na. Demonstre quando forem verdadeiras ou caso contrário, dê um contra-exemplo.
   a) Se $\beta \vdash H$ e $\beta \subset \varphi$, então $\varphi \vdash H$.
   b) Se $\beta \vdash H$ e $\beta \supset \varphi$, então $\varphi \vdash H$.
   c) Considere o sistema Na. Se $\beta \vdash H \wedge G$, então $\beta \vdash H$ e $\beta \vdash G$.
   d) Se $\beta \cup \{H\} \vdash H$ então $\beta \vdash H \rightarrow G$.
   e) Se $\beta \vdash H$ e $\varphi \vdash H \rightarrow G$, então $\beta \cup \varphi \vdash G$.
   f) Considere o sistema Na. Se $\beta \vdash$ *false* então $\beta \vdash H$.

g) Se $\beta \vdash$ *false* então β é insatisfatível.
h) Considere o sistema Na. Se $\beta \cup \{\neg H\} \vdash$ *false* então $\beta \vdash H$.
i) Se $\beta \cap \varphi \vdash H$, então $\varphi \vdash H$.
j) Se $\beta \cup \varphi \vdash H$, então $\varphi \vdash H$.

4) Considere os sistemas Pa e Na. Existe conjunto de fórmulas β tal que $\beta \vdash H$ e $\beta \vdash \neg H$ para alguma fórmula H? Isto é, H e $\neg H$ são conseqüências lógicas de β.
5) Demonstre em Pa que $\vdash (\neg\neg P \rightarrow P)$.
6) Demonstre em Pa que se $\beta \vdash (A \vee B)$ então $\beta \vdash (B \vee A)$.
7) (Regra de Transitividade) Demonstre em Pa que se $\beta \vdash (H_1 \rightarrow H_2)$,.....,$\beta \vdash (H_{n-1} \rightarrow H_n)$ então $\beta \vdash (H_1 \rightarrow H_n)$.
8) Considere um sistema axiomático Pb onde se tem Modus Ponens, a Regra da Substituição e $\vdash (H \rightarrow (H \rightarrow G))$. Demonstre que Pb é inconsistente.
9) Demonstre em Pa que $\vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow ((\neg P \rightarrow Q) \rightarrow Q)$
10) O comprimento de uma prova $\beta \vdash H$ em Pa é definido como o número de fórmulas da seqüência que define a prova. Se esta prova é $H_1, \ldots, H_n$, o seu comprimento é igual a n. Isto é comp$[\beta \vdash H] = n$.
    a) Defina o princípio da indução finita em Pa, como o princípio da indução no comprimento da prova.
    b) Demonstre a validade do princípio da indução em Pa.
11) Demonstre, no sistema Na, que
    $\{(\wedge I), (\wedge E), (\rightarrow I), (\rightarrow E), (\textit{false}), (RAA)\} \Rightarrow \{(\vee I), (\vee E), (\neg I), (\neg E), (\leftrightarrow I), (\leftrightarrow E)\}$
12) Demonstre em Na que $\vdash P \rightarrow \neg\neg P$
13) Demonstre em Na que $\vdash P \rightarrow (Q \rightarrow P)$
14) Demonstre em Na que $\vdash P \rightarrow \neg\neg P$
15) Demonstre em Na que $\vdash \neg\neg P \rightarrow P$
16) Demonstre em Pa a regra da substituição utilizando o princípio da indução na Lógica.
17) a) O tamanho de uma prova em Na é o tamanho da derivação que define a prova. O tamanho de uma derivação em Na é definido como o número de símbolos proposicionais e de verdade presentes na derivação. Dada uma derivação D, defina recursivamente tam(D) como o tamanho de D.
    b) Defina o princípio da indução finita em Na, como o princípio da indução em tam(D).
    c) Demonstre a validade do princípio da indução em Na.
18) Complete e demonstre o teorema da correção em Pa, utilizando o princípio da indução no comprimento da prova.
19) Demonstre que as regras do sistema Na mantêm a validade das fórmulas.
20) Complete e demonstre o teorema da correção em Na, utilizando o princípio da indução no comprimento da prova.
21) Repita, passo a passo, a demonstração do teorema da completude em Pa no caso particular em que H contém apenas os símbolos proposicionais P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5

Sugestões e soluções de exercícios selecionados

1) É necessário demonstrar que se H e $H \rightarrow G$ são tautologias, então G é tautologia. Para demonstrar, basta utilizar a definição de tautologia.

$$H \text{ é tautologia} \Leftrightarrow \forall \text{ int. } I[H] = T$$

$$H \rightarrow G \text{ é tautologia} \Leftrightarrow \forall \text{ int. I se } I[H]=T, \text{ então } I[G]=T$$

Portanto, $\forall$ int. $I[H]=T$ e $\forall$ int. I se $I[H]=T$, então $I[G]=T$. Conclui-se que $\forall$ int. I, $I[G]=T$. Portanto G é tautologia.

2) a) Não considera o significado das fórmulas.
   b) Não pois nem toda fórmula de β é uma tautologia.
   c) As fórmulas de β utilizadas na derivação $\beta \vdash H$ devem ser tautologias.
   d) Sim. Pelo teorema da completude $\vdash H$, logo $\beta \vdash H$ para qualquer conjunto β.

3) a) Suponha $\beta \vdash H$. Logo, existe uma prova de H a partir de β. Para demonstrar $\varphi \vdash H$ basta considerar a prova de H a partir de β. Como $\beta \subset \varphi$, esta prova demonstra que $\varphi \vdash H$.
   b) Falso pois se $\beta \vdash H$, então existe prova de H a partir de β. Como $\beta \supset \varphi$, então não necessariamente existe prova de H a partir de φ.
   c) Basta utilizar a regra ($\wedge$E).
   d) Utilizando o teorema da dedução este problema é escrito na forma: se $\beta \vdash H \rightarrow H$ então $\beta \vdash H \rightarrow G$, o que é falso. Observe que $H \rightarrow H$ pode ser uma conseqüência lógica de β sem que $H \rightarrow G$ seja uma conseqüência lógica de β.
   e) Se $\beta \vdash H$ e $\varphi \vdash H \rightarrow G$, então $\beta \cup \varphi \vdash H$ e $\beta \cup \varphi \vdash H \rightarrow G$. Utilizando a regra Modus Ponens, conclui-se $\beta \cup \varphi \vdash G$.
   f) Basta utilizar a regra (*false*).
   g) Suponha que β seja satisfatível. Logo $\exists$ interpretação I tal que $I[\beta]=T$. Mas se $\beta \vdash$ *false*, então I[*false*]=T, o que é absurdo. Portanto β é insatisfatível.
   h) Se $\neg H$ foi utilizado na prova de *false*, basta utilizar a regra (RAA).
   i) Se $\beta \cap \varphi \vdash H$, então como $(\beta \cap \varphi) \subset \varphi$ tem-se $\varphi \vdash H$.
   j) Falso.

4) Sim. Neste caso o conjunto β deve ser insatisfatível. Basta considerar por exemplo $\beta = \{H, \neg H\}$

5) Considere o roteiro.

1.	$\vdash$	A×3, $H = \neg P$: $G = \neg\neg\neg P$ e $E = P$
2.	$\vdash$	pr3, pr4
3.	$\vdash$	MP, .1, .2
4.	$\vdash$	pr2
5.	$\vdash$	MP, .3, 4

6) Aplique a regra Modus Ponens na hipótese $\beta \vdash H \vee G$ e no resultado da proposição 6.

7) Este exercício é uma generalização da proposição 7. Utilize a indução finita para demonstrar este caso geral.

8) Como Pb é um sistema axiomático, ele contém pelo menos um axioma. Seja A um axioma de Pb, logo $\vdash A$. Seja B uma fórmula qualquer, então a partir de $\vdash (H \rightarrow (H \rightarrow G))$, utilizando a Regra da Substituição conclui também $\vdash (A \rightarrow (A \rightarrow B))$ e $\vdash (A \rightarrow (A \rightarrow \neg B))$. Aplicando Modus Ponens a tais resultados e $\vdash A$, é possível concluir $\vdash B$ e $\vdash \neg B$. Portanto, Pb é inconsistente.

9) Consulte Mendelson, 1987, p. 32.

10) a) Considere o caso particular do princípio da indução onde A(n) = a asserção $B[\beta \vdash H]$ sobre a prova $\beta \vdash H$ é válida quando o comp$[\beta \vdash H]$ = n.
    b) Basta observar que neste caso A(n) é um caso particular do caso mais geral considerado no princípio da indução.

11) Para demonstrar por exemplo { ($\wedge$I), ($\wedge$E), ($\rightarrow$I), ($\rightarrow$E), (*false*), (RAA) } $\Rightarrow$ ($\vee$I) basta mostrar que o conseqüente de ($\vee$I) pode ser deduzido de seu antecedente utilizando as regras do conjunto {($\wedge$I), ($\wedge$E), ($\rightarrow$I), ($\rightarrow$E), (*false*), (RAA)}. De forma inteiramente análoga às outras implicações são demonstradas.
12) Inicie com as premissas P e $\neg\neg$P e aplique a regra ($\rightarrow$E) e obtenha *false*. Lembre que $\neg\neg$P denota $\neg$P$\rightarrow$*false*. Em seguida aplique ($\rightarrow$I) e obtenha $\neg$P$\rightarrow$*false* eliminando a premissa $\neg$P. Em seguida aplique novamente ($\rightarrow$I) obtendo P$\rightarrow\neg\neg$P e eliminando a premissa P.
13) Inicie com a derivação {Q, D_1, P} como premissa e aplique a regra ($\rightarrow$I), eliminando Q e obtendo Q $\rightarrow$ P. Em seguida aplique ($\rightarrow$I) novamente, eliminado P e obtendo P $\rightarrow$ (Q $\rightarrow$ P)
14) Inicie com as premissas P e $\neg$P. Aplique a regra ($\rightarrow$E), obtendo *false*. Lembre que $\neg$P é uma denotação de P$\rightarrow$*false*. Em seguida aplique (*false*) e obtenha Q. Em seguida, aplique ($\rightarrow$I) duas vezes obtendo P $\rightarrow$ ($\neg$P $\rightarrow$ Q) e eliminando as premissas.
15) Inicie com as premissas $\neg$P e $\neg\neg$P. Aplique a regra ($\rightarrow$E), obtendo *false*. Lembre que $\neg\neg$P é uma denotação de $\neg$P$\rightarrow$*false*. Em seguida aplique (RAA) e obtenha P, eliminando a premissa $\neg$P. Em seguida, aplique ($\rightarrow$I) e obtenha $\neg\neg$P $\rightarrow$ $\neg$P eliminando a outra premissa $\neg\neg$P.
16) Considere indução no comprimento da prova. O comprimento de uma prova Pa é definido como o número de fórmulas da seqüência que define a prova. Neste caso, seja A(n) = Regra da Substituição válida quando o comp[$\beta\vdash$ H] = n. Utilize a primeira forma do princípio da indução.
17) Este exercício é análogo ao exercício 10.
18) Considere A(n) = o teorema da correção é válido para provas de comprimento n.
19) Para cada regra, demonstre que se seu antecedente é válido então o conseqüente também é válido.
20) Considere A(n) = o teorema da correção é válido para provas de tamanho n.

CAPÍTULO 8

Tableaux semânticos e resolução na Lógica Proposicional

Introdução

O estudo da Lógica Proposicional, desenvolvido até o capítulo anterior, apresentou os três passos básicos: especificação da linguagem, estudo de métodos que produzam ou verifiquem as fórmulas ou argumentos válidos e definição de noções de prova ou demonstração. No capítulo anterior foram apresentados os sistemas Pa e Na, definidos a partir da linguagem da Lógica Proposicional e que apresenta métodos que verificam fórmulas e noções de prova. Do ponto de vista conceitual, tais sistemas apresentam o terceiro passo básico do estudo da Lógica. Entretanto, a noção de prova definida nos sistemas Pa e Na, não é adequada a implementações em computadores. Imagine a seguinte questão. Fazer com que um computador determine automaticamente, em Pa, a prova do teorema $\vdash (P \rightarrow P)$ apresentada no capítulo anterior. Até a presente data ainda não foi descoberta uma implementação eficaz, que realize a mecanização proposta.

Os tableaux semânticos e a resolução são sistemas de dedução, que também estabelecem estruturas que permitem a representação e a dedução formal de conhecimento. Entretanto, diferentemente dos sistemas axiomático Pa e de dedução natural Na, os tableaux semânticos e a resolução são mais adequados para implementações em computadores.

Tableaux Semânticos na Lógica Proposicional

Um tableau semântico na Lógica Proposicional é uma seqüência de fórmulas construída de acordo com certas regras e geralmente apresentada sob a forma de uma árvore. Os elementos básicos que compõem esta árvore são definidos a seguir.

Definição (elementos básicos de um tableau semântico). Os elementos básicos de um tableau semântico na Lógica Proposicional são definidos pela composição dos elementos:

- O alfabeto da Lógica Proposicional.
- O conjunto das fórmulas da Lógica Proposicional.
- Um conjunto de regras de dedução.

Observe que os elementos básicos de um tableau semântico determinam sua estrutura, que coincide com a estrutura do sistema de dedução natural Na. Nos dois casos, tem-se a linguagem da Lógica Proposicional e as fórmulas que definem os axiomas não estão presentes. O tableau semântico contém apenas regras de dedução, que definem o mecanismo de inferência, permitindo a dedução de conhecimento. As regras são definidas a seguir.

Definição (regras de inferência do tableau semântico). Sejam A e B duas fórmulas da Lógica Proposicional. As regras de inferência do tableau semântico na Lógica Proposicional são R_1, ..., R_9 indicadas a seguir.

$R_1 = A \wedge B$
A
B

$R_2 = A \vee B$
$A \quad B$

$R_3 = A \rightarrow B$
$\neg A \quad B$

$R_4 = A \leftrightarrow B$
$A \wedge B \quad \neg A \wedge \neg B$

$R_5 = \neg\neg A$
A

$R_6 = \neg(A \wedge B)$
$\neg A \quad \neg B$

$R_7 = \neg(A \vee B)$
$\neg A$
$\neg B$

$R_8 = \neg(A \rightarrow B)$
A
$\neg B$

$R_9 = \neg(A \leftrightarrow B)$
$\neg A \wedge B \quad A \wedge \neg B$

O método de prova nos tableaux semânticos é diferente dos utilizados nos sistemas Pa e Na. Neste caso, a prova é feita utilizando o método da negação ou absurdo. Assim, para provar uma fórmula A, é considerada inicialmente a sua negação $\neg A$. Em seguida, o tableau semântico associado a $\neg A$ é construído. Devido a este fato, tal sistema também é denominado como um sistema de refutação. O tableau semântico é construído a partir de $\neg A$ utilizando as regras de dedução, cuja aplicação decompõe a fórmula $\neg A$ em subfórmulas. Considere o exemplo a seguir, onde se tem a construção de um tableau.

Exemplo. (construção de um tableau semântico). Considere o conjunto de fórmulas:

$$\{(A \vee B), (A \wedge \neg B)\}.$$

O tableau semântico construído a partir destas fórmulas é dado por

.1	$A \vee B$		
.2	$A \wedge \neg B$		
.3	A	B	R_2, .1
.4	A	A	R_1, .2
.5	$\neg B$	$\neg B$	R_1, .2

Figura 1 Tableau associado a $\{(A \vee B), (A \wedge \neg B)\}$.

O tableau semântico é inicializado com as fórmulas

$$(A \vee B) \text{ e } (A \wedge \neg B),$$

que são as fórmulas .1 e .2. Em seguida, a regra R_2 é aplicada à fórmula .1, obtendo-se as fórmulas .3. Finalmente, a regra R_1 é aplicada à formula .2 e são obtidas as fórmulas .4 e .5. Observe que a aplicação da regra R_2 faz com que o tableau semântico se bifurque em dois ramos. O mesmo não ocorre com a aplicação de R_1, cujos resultados são repetidos nos dois ramos do tableau. Este tableau também pode ser construído pela aplicação de R_1 e depois R_2. Neste caso, o resultado é o tableau

.1	$A \vee B$		
.2	$A \wedge \neg B$		
.3	A		R_1, .2
.4	$\neg B$		R_1, .2
.5	A	B	R_2, .1

Figura 2 Tableau associado a $\{(A \vee B), (A \wedge \neg B)\}$.

No último tableau, R_2 é aplicada após R_1. Isto significa que a bifurcação da árvore é postergada. Em geral, a aplicação de uma regra a um tableau é feita considerando qualquer uma das fórmulas presentes na árvore. Entretanto, uma boa heurística na construção do tableau é aplicar inicialmente regras que não bifurcam a árvore.

Heurística (aplicação de regras). Aplique preferencialmente as regras

$$R_1, R_5, R_7 \text{ e } R_8,$$

que não bifurcam o tableau.

A construção de um tableau semântico é definida recursivamente a seguir.

Definição (construção de um tableau semântico). Um tableau semântico, na Lógica Proposicional, é construído como se segue. Seja $\{A_1,\ldots,A_n\}$ um conjunto de fórmulas.

- A árvore a seguir, com apenas um ramo, é um tableau associado a $\{A_1,\ldots,A_n\}$.

$$\begin{array}{ll} .1 & A_1 \\ .2 & A_2 \\ & \vdots \\ .n & A_n \end{array}$$

- Seja Tree um tableau associado a $\{A_1,\ldots,A_n\}$. Se Tree* é a árvore resultante da aplicação de uma das regras $R_1, \ldots, R_9$ à árvore Tree, então Tree* é também um tableau associado a $\{A_1,\ldots,A_n\}$.

Exemplo (construção de um tableau semântico). Considere o conjunto de fórmulas.

$$\{(A \rightarrow B), \neg(A \vee B), \neg(C \rightarrow A)\}.$$

Conforme a definição anterior, a árvore de apenas um ramo Tree1, é um tableau associado ao conjunto de fórmulas anteriores.

$$\begin{array}{ll} .1 & A \rightarrow B \\ .2 & \neg(A \vee B) \\ .3 & \neg(C \rightarrow A) \end{array}$$

Figura 3 Tableau semântico Tree 1.

O resultado da aplicação de R_7 a Tree1 é dado por Tree2.

.1	$A \rightarrow B$	
.2	$\neg(A \vee B)$	
.3	$\neg(C \rightarrow A)$	
.4	$\neg A$	R_7, .2
.5	$\neg B$	R_7, .2

Figura 4 Tableau semântico Tree 2.

O tableau Tree3, a seguir, é o resultado da aplicação de R_3 a Tree2.

.1	$A \rightarrow B$		
.2	$\neg(A \vee B)$		
.3	$\neg(C \rightarrow A)$		
.4	A		R_7, .2
.5	$\neg B$		R_7, .2
.6	$\neg A$	B	R_3, .1

Figura 5 Tableau semântico Tree 3.

Finalmente, após a aplicação de R_8 à árvore Tree3, tem-se

.1	$A \rightarrow B$		
.2	$\neg(A \vee B)$		
.3	$\neg(C \rightarrow A)$		
.4	$\neg A$		R_7, .2
.5	$\neg B$		R_7, .2
.6	$\neg A$	B	R_3, .1
.7	C	C	R_8, .3
.8	$\neg A$	$\neg A$	R_8, .3

Figura 6 Tableau semântico Tree 4.

O tableau resultante contém dois ramos. Neste caso, o ramo à direita contém as fórmulas $\neg B$ e B. O ramo à esquerda não contém nenhuma fórmula juntamente com sua negação. Esta é uma propriedade importante a ser identificada nos ramos de um tableau.

Definição (ramo fechado e aberto). Um ramo em um tableau é fechado se ele contém uma fórmula A e sua negação $\neg A$ ou contém o símbolo de verdade *false*. Um ramo é aberto quando não é fechado.

Definição (tableau fechado). Um tableau é fechado quando todos os seus ramos são fechados. Caso contrário, ele é aberto.

Observe que o tableau do exemplo anterior não é fechado.

Conseqüência Lógica em Tableaux Semânticos

Os tableaux semânticos definem uma estrutura para representação e dedução de conhecimento. Utilizando as regras de inferência, são construídas árvores que determinam um mecanismo de inferência. É definido a seguir a prova de uma fórmula utilizando tableau semântico. Em seguida, a definição de conseqüência lógica é considerada.

Definição (prova e teorema em tableaux semânticos). Seja H uma fórmula. Uma prova de H utilizando tableaux semânticos é um tableau fechado associado a $\neg H$. Neste caso, H é um teorema do sistema de tableaux semânticos.

Exemplo (prova em tableaux semânticos). Considere a fórmula

$$H = \neg((P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q) \wedge \neg\neg P).$$

O tableau da Figura 7, que é fechado, é uma prova de H.

Observe que o tableau é inicializado com a negação da fórmula H, que é igual a

$$\neg\neg((P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q) \wedge \neg\neg P).$$

Após a aplicação das regras, todos os seus ramos são fechados, o que constitui uma prova de H. Considere agora a fórmula

$$G = (\neg(P \leftrightarrow Q) \vee \neg\neg P).$$

Neste caso, não é possível obter um tableau fechado associado a $\neg G$, conforme indicado na Figura 8.

.1	$\neg\neg((P \to Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q) \wedge \neg\neg P)$	$\neg H$
.2	$(P \to Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q) \wedge \neg\neg P$	R_5, .1
.3	$P \to Q$	R_1, .2
.4	$\neg(P \leftrightarrow Q)$	R_1, .2
.5	$\neg\neg P$	R_1, .2
.6	P	R_5, .5
.7	$\neg P$ fech. / Q	R_3, .3
.8	$P \wedge \neg Q$ / $\neg P \wedge Q$	R_9, .4
.9	P / $\neg P$	R_1, .8
.10	$\neg Q$ fech. / Q fech.	R_1, .8

Figura 7 Tableau semântico fechado.

.1	$\neg(\neg(P \leftrightarrow Q) \vee \neg\neg P)$	
.2	$\neg(P \leftrightarrow Q)$	R_7, .1
.3	$\neg\neg P$	R_7, .1
.4	P	R_5, .3
.5	$P \wedge \neg Q$ / $\neg P \wedge Q$	R_9, .2
.6	P / $\neg P$	R_1, .5
.7	$\neg Q$ aberto / Q fech.	R_1, .5

Figura 8 Tableau semântico aberto.

Portanto, não se tem uma prova de G, utilizando tableaux semânticos. Observe que a fórmula H é uma tautologia e o mesmo não ocorre com G. Isto não é uma coincidência pois dada uma tautologia, então existe uma prova desta tautologia utilizando tableaux semânticos. Este importante resultado é expresso pelo teorema da completude.

Teorema da Completude. Seja H uma fórmula da Lógica Proposicional. Se H é uma tautologia então existe uma prova de H no sistema de tableaux semânticos.

Comentário. A demonstração deste teorema não é considerada neste texto, podendo ser encontrada em [Fitting, 1990].

O sistema de tableaux semânticos também é correto. Todo teorema é uma tautologia. Isto significa que dada uma fórmula H, se o tableau associado a $\neg H$ é fechado, então H é uma tautologia. Em outras palavras, os argumentos provados utilizando tableaux semânticos são válidos.

Teorema da Correção. Seja H uma fórmula da Lógica Proposicional. Se existe uma prova de H utilizando tableaux semânticos, então H é uma tautologia,

Demonstração. Esta demonstração é análoga à demonstração da correção do sistema axiomático Pa. Inicialmente, observe que as regras $R_1, \ldots, R_9$ podem ser escritas de forma análoga à regra Modus Ponens, como se segue, onde a bifurcação é indicada pela palavra "ou".

$R_1 \equiv \dfrac{A \wedge B}{\begin{array}{c}A\\B\end{array}}$	$R_2 \equiv \dfrac{A \vee B}{A \text{ ou } B}$	$R_3 \equiv \dfrac{A \rightarrow B}{\neg A \text{ ou } B}$
$R_4 \equiv \dfrac{A \leftrightarrow B}{(A \wedge B) \text{ ou } (\neg A \wedge \neg B)}$	$R_5 \equiv \dfrac{\neg\neg A}{A}$	$R_6 \equiv \dfrac{\neg(A \wedge B)}{\neg A \text{ ou } \neg B}$
$R_7 \equiv \dfrac{\neg(A \vee B)}{\begin{array}{c}\neg A\\\neg B\end{array}}$	$R_8 \equiv \dfrac{\neg(A \rightarrow B)}{\begin{array}{c}A\\\neg B\end{array}}$	$R_9 \equiv \dfrac{\neg(A \leftrightarrow B)}{(A \wedge \neg B) \text{ ou } (\neg A \wedge B)}$

Dada uma interpretação qualquer I, de forma análoga à regra Modus Ponens, se o "numerador" de qualquer uma das regras

$$R_1, \ldots, R_9$$

é interpretado por I como sendo T, então seu "denominador" também é interpretado como sendo T. Considere a regra R_1, por exemplo, se

$$I[A \wedge B] = T,$$

então

$$I[A] = T \text{ e } I[B] = T.$$

No caso de R_2, se

$$I[A \vee B] = T,$$

então

$$I[A] = T \text{ ou } I[B] = T.$$

Suponha então que existe uma prova de H, utilizando tableau semântico. Logo, existe um tableau fechado associado a $\neg H$. Isto é, existe uma árvore fechada, obtida a partir de $\neg H$, utilizando as regras

$$R_1, \ldots, R_9.$$

Suponha, por absurdo, que H não é uma tautologia, logo existe uma interpretação I tal que

$$I[H] = F,$$

isto é,

$$I[\neg H] = T.$$

Como a prova de H é uma árvore a partir de

$$\neg H \text{ e } I[\neg H] = T,$$

então I interpreta todas as fórmulas de pelo menos um ramo desta árvore como sendo T. Mas a árvore é fechada, isto é, em todos os seus ramos há fórmulas do tipo A e $\neg A$. Isto significa que necessariamente

$$I[A] = T \text{ e } I[\neg A] = T,$$

para alguma fórmula A, o que é um absurdo. Logo H é uma tautologia.

Definição (conseqüência lógica em tableaux semânticos). Dada uma fórmula H e um conjunto de hipóteses

$$\beta = \{A_1, \ldots A_n\},$$

então H é uma conseqüência lógica de β, nos tableaux semânticos, se existe uma prova de

$$(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow H$$

utilizando tableaux semânticos.

Notação. Dada uma fórmula H, se H é conseqüência lógica de um conjunto de hipóteses $\beta = \{A_1,\ldots,A_n\}$, nos tableaux semânticos, então este fato é indicado pela notação

$$\beta \vdash H \quad \text{ou} \quad \{A_1,\ldots,A_n\} \vdash H$$

Observe que a notação acima é idêntica àquela utilizada para conseqüência lógica no sistema Pa. O sistema que estiver sendo considerado, Pa, Na ou tableaux semânticos, deve ficar claro no contexto.

Exemplo (conseqüência lógica em tableaux semânticos). Considere os argumentos.

Guga é determinado.

Guga é inteligente.

Se Guga é determinado e atleta, ele não é um perdedor.

Guga é um atleta se é um amante do tênis.

Guga é amante do tênis se é inteligente.

A afirmação "Guga não é um perdedor" é uma conseqüência lógica dos argumentos acima?

Uma prova utilizando tableaux semânticos é feita para responder essa questão. Considere inicialmente as seguintes correspondências:

P = Guga é determinado,

Q = Guga é inteligente,

R = Guga é atleta,

P_1 = Guga é um perdedor e

Q_1 = Guga é amante do tênis.

A partir de tais correspondências, os argumentos são traduzidos para a Lógica Proposicional como:

$$H = (P \wedge Q \wedge ((P \wedge R) \rightarrow \neg P_1) \wedge (Q_1 \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow Q_1)) \rightarrow \neg P_1.$$

Deve-se então provar se H é ou não uma tautologia. Em outras palavras, deve-se provar se $\vdash$ H.

Como o tableau da Figura 9 é fechado, então H é uma tautologia e a conseqüência lógica ocorre.

Exemplo (conseqüência lógica em tableaux semânticos). Considere os argumentos.

Se Guga joga uma partida de tênis, a torcida comparece se o ingresso é barato.

Se Guga joga uma partida de tênis, o ingresso é barato.

O argumento "Se Guga joga uma partida de tênis, a torcida comparece" é uma conseqüência lógica dos argumentos acima?

Os tableaux semânticos são considerados novamente para responder a questão sobre a conseqüência lógica. Para representar os argumentos na Lógica Proposicional, considere as seguintes correspondências.

P = Guga joga uma partida de tênis,
Q = A torcida comparece e
R = O ingresso é barato.

.1	$\neg((P \wedge Q \wedge ((P \wedge R) \rightarrow \neg P_1) \wedge (Q_1 \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow Q_1)) \rightarrow \neg P_1)$	$\neg H$
.2	$P \wedge Q \wedge ((P \wedge R) \rightarrow \neg P_1) \wedge (Q_1 \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow Q_1)$	R_8, .1
.3	$\neg\neg P_1$	R_8, .1
.4	P	R_1, .2
.5	Q	R_1, .2
.6	$(P \wedge R) \rightarrow \neg P_1$	R_1, .2
.7	$(Q_1 \rightarrow R)$	R_1, .2
.8	$(Q \rightarrow Q_1)$	R_1, .2
.9	P_1	R_5, .3
.10	$\neg Q$ fech. $\quad Q_1$	R_3, .8
.11	$\neg Q_1$ fech. $\quad R$	R_3, .7
.12	$\neg(P \wedge R)$ $\quad \neg P_1$ fech.	R_3, .6
.13	$\neg P$ fech. $\quad \neg R$ fech.	R_6, .12

Figura 9 Tableau semântico fechado.

A partir de tais correspondências, os argumentos são traduzidos para a Lógica Proposicional como:

$$G = ((P \rightarrow (R \rightarrow Q)) \wedge (P \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow Q).$$

Deve-se então provar se G é ou não uma tautologia ou seja se $\vdash G$.

Como o tableau da Figura 10 é fechado, então $\vdash G$ e pelo teorema da correção G é uma tautologia. Portanto, a conseqüência lógica ocorre.

Exemplo (conjunto satisfatível). Este exemplo demonstra, utilizando tableaux semânticos, que o conjunto de fórmulas a seguir é insatisfatível.

$$\beta = \{\neg A \vee B, \neg(B \vee \neg C), C \rightarrow D, \neg(\neg A \vee D)\}.$$

Observe que β é insatisfatível se e somente se não existe interpretação I tal que

$I[\neg A \vee B] = I[\neg(B \vee \neg C)] = I[C \rightarrow D] = I[\neg(\neg A \vee D)] = T \Leftrightarrow$
$\forall$ I, $I[(\neg A \vee B) \wedge \neg(B \vee \neg C) \wedge (C \rightarrow D) \wedge \neg(\neg A \vee D)] = F \Leftrightarrow$
$\forall$ I, $I[\neg((\neg A \vee B) \wedge \neg(B \vee \neg C) \wedge (C \rightarrow D) \wedge \neg(\neg A \vee D))] = T \Leftrightarrow$
$H = \neg((\neg A \vee B) \wedge \neg(B \vee \neg C) \wedge (C \rightarrow D) \wedge \neg(\neg A \vee D))$ é tautologia.

.1	$\neg(((P \to (R \to Q)) \wedge (P \to R)) \to (P \to Q))$	$\neg G$
.2	$(P \to (R \to Q)) \wedge (P \to R)$	R_8, .1
.3	$\neg(P \to Q)$	R_8, .1
.4	P	R_8, .3
.5	$\neg Q$	R_8, .3
.6	$P \to (R \to Q)$	R_1, .2
.7	$P \to R$	R_1, .2
.8	$\neg P$ $(R \to Q)$	R_3, .6
.9	fech.	
	$\neg P$ R	R_3, .7
	fech.	
.10	$\neg R$ Q	R_3, .8
	fech. fech.	

Figura 10 Tableau semântico fechado.

A demonstração de que a fórmula H é uma tautologia, isto é $\vdash H$, segue o desenvolvimento dos exemplos anteriores.

.1	$\neg\neg((\neg A \vee B) \wedge \neg(B \vee \neg C) \wedge (C \to D) \wedge \neg(\neg A \vee D))$	$\neg H$
.2	$(\neg A \vee B) \wedge \neg(B \vee \neg C) \wedge (C \to D) \wedge \neg(\neg A \vee D)$	R_5, .1
.3	$\neg A \vee B$	R_1, .2
.4	$\neg(B \vee \neg C)$	R_1, .2
.5	$C \to D$	R_1, .2
.6	$\neg(\neg A \vee D)$	R_1, .2
.7	$\neg B$	R_7, .4
.8	$\neg\neg C$	R_7, .4
.9	$\neg\neg A$	R_7, .6
.10	$\neg D$	R_7, .6
.11	C	R_5, .8
.12	A	R_5, .9
.13	$\neg C$ D	R_3, .5
	fech. fech.	

Figura 11 Tableau semântico fechado.

Como o tableau da Figura 11 é fechado, então $\vdash$ H e pelo teorema da correção H é uma tautologia. Logo, o conjunto de fórmulas β é insatisfatível. Observe que no tableau deste exemplo (Figura 11), não foi aplicada nenhuma regra à fórmula .3. Isto significa que a fórmula H sem a subfórmula $\neg A \vee B$ também é uma tautologia. Portanto, o conjunto de fórmulas

$$\{\neg(B \vee \neg C) \wedge (C \rightarrow D) \wedge \neg(\neg A \vee D)\}$$

também é insatisfatível. Usando o mesmo raciocínio, é possível verificar que

$$E = \neg((\neg A \vee B) \wedge \neg(B \vee \neg C) \wedge \neg(\neg A \vee D))$$

é tautologia e concluir que o conjunto

$$\{\neg A \vee B, \neg(B \vee \neg C), \neg(\neg A \vee D)\}$$

é insatisfatível.

A prova utilizando tableaux semânticos é feita pelo método da negação ou absurdo. Para provar que uma fórmula H é uma tautologia, considera-se inicialmente a sua negação $\neg H$. Em seguida, o tableau semântico associado a $\neg H$ é construído. O absurdo corresponde à obtenção, em todos os ramos do tableau, de uma fórmula A e sua negação $\neg A$. O que ocorre se o tableau é construído a partir da fórmula H e não de sua negação? Considere a tautologia

$$H = (A \vee \neg A) \vee (A \rightarrow B).$$

Neste caso, todo tableau associado a $\neg H$ é fechado. Entretanto, conforme a Figura 12, o tableau associado a H não é fechado.

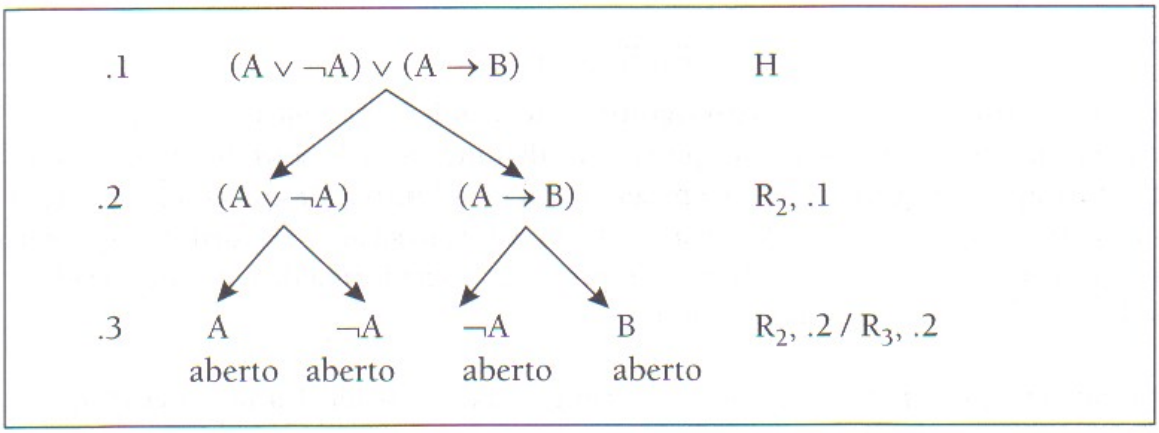


Figura 12 Tableau semântico aberto.

O tableau acima possui todos os seus ramos abertos. Poderia-se concluir que se todo tableau associado a H possui apenas ramos abertos, então H é tautologia. Mas, isto é falso! A fórmula

$$G = (B \wedge \neg B) \vee (A \rightarrow A)$$

é uma tautologia e um tableau associado a G é dado pela Figura 13, em que há um ramo fechado e dois abertos.

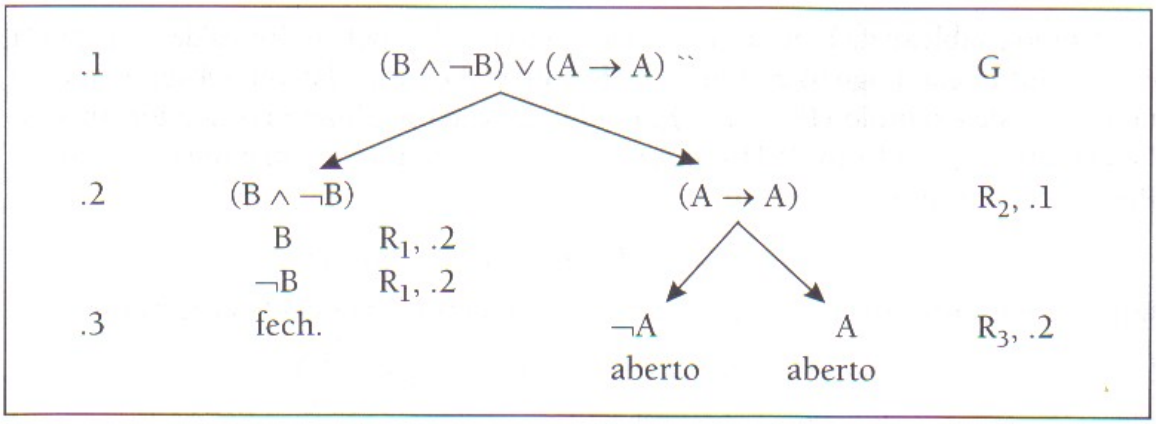


Figura 13 Tableau semântico com ramos fechado e aberto.

Portanto, dada uma fórmula H, se o tableau associado a H não é fechado, nada se pode concluir sobre a validade de H. Por outro lado, se o tableau associado a H é fechado então H é contraditória, isto é, ¬H é uma tautologia.

Resolução na Lógica Proposicional

A resolução na Lógica Proposicional é um método de prova desenvolvido por Robinson nos anos 60 e desde então houve inúmeras pesquisas e implementações utilizando tal método. A linguagem de programação Prolog, por exemplo, se fundamenta na resolução. Conforme análise a seguir, a resolução pode ser considerada como o dual dos tableaux semânticos. Observe que nos tableaux semânticos são aplicadas preferencialmente as regras

$$R_1, R_5, R_7 \text{ e } R_8,$$

que não bifurcam o tableau. Isto significa que o tableau é construído de forma eficiente para fórmulas que são conjunções de disjunções de literais. Neste caso, a regra R_1 é aplicada inicialmente e em seguida R_2. As bifurcações da árvore ocorrem mais próximas das folhas. De forma dual, a resolução se aplica a fórmulas que são conjunções de disjunções de literais, representadas na forma de conjunto de cláusulas, conforme é analisado a seguir.

Notação (representação na forma de conjuntos). Considere a fórmula H, que é uma conjunção de disjunção de literais.

$$H = (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee P).$$

Esta fórmula é representada na forma de conjuntos como

$$H = \{\{P, \neg Q, R\}, \{P, \neg Q\}, \{P\}\}.$$

Nesta notação, H é um conjunto de conjunto de literais. As vírgulas mais internas representam o conectivo ∨ e as mais externas o conectivo ∧. A disjunção

$$(P \vee \neg Q \vee R)$$

é representada por

$$\{P, \neg Q, R\}.$$

e a disjunção

$$(P \vee P)$$

por $\{P\}$. No último caso, $\{P\}$ é a representação de $(P \vee P)$ pois na notação de conjuntos

$$\{P, P\} = \{P\}.$$

Isto ocorre porque não se representa duplicidade na notação de conjuntos.

Definição (cláusula). Uma cláusula, na Lógica Proposicional, é uma disjunção de literais. Utilizando a notação de conjuntos, uma cláusula é um conjunto finito de literais.

Exemplo (cláusula). Uma cláusula é um conjunto finito de literais. Os conjuntos a seguir são cláusulas. $C_1 = \{P, \neg Q, R\}$, $C_2 = \{P, \neg Q\}$, $C_3 = \{P\}$.

Definição (literais complementares). Dois literais são complementares se um é a negação do outro.

Definição (resolvente de duas cláusulas). Considere duas cláusulas

$$C_1 = \{A_1,\ldots,A_n\}, \text{ e } C_2 = \{B_1,\ldots,B_n\},$$

que possuem literais complementares. Suponha λ um literal em C_1 tal que seu complementar, $\neg\lambda$, pertence a C_2. O resolvente de C_1 e C_2, denominado por $Res(C_1,C_2)$, é definido por:

$$Res(C_1,C_2) = (C_1 - \lambda) \cup (C_2 - \neg\lambda).$$

Se $Res(C_1,C_2) = \{\ \}$, tem-se um resolvente vazio ou trivial.

Exemplo (resolvente de duas cláusulas). Considere as duas cláusulas

$$C_1 = \{P, \neg Q, R\} \text{ e } C_2 = \{\neg P, R\}.$$

O resolvente de C_1 e C_2 é dado por

$$res(C_1,C_2) = \{\neg Q, R\}.$$

Observe que o resolvente destas duas cláusulas é também uma cláusula. Considere as duas cláusulas

$$D_1 = \{P\} \text{ e } D_2 = \{\neg P\}.$$

O resolvente de D_1 e D_2 é dado por .res(D_1,D_2) = { }. Neste caso, o resolvente das duas cláusulas é a cláusula vazia. Dadas as cláusulas

$$E_1 = \{P , \neg Q\} \text{ e } E_2 = \{\neg P, Q\},$$

o resolvente de E_1 e E_2 é a cláusula.

$$res(E_1,E_2) = \{\neg Q, Q\}.$$

Neste último caso, a regra de resolução não elimina todos os literais das cláusulas mesmo eles sendo complementares.

O método da resolução na Lógica Proposicional, como o tableau semântico e o sistema axiomático Pa, utiliza a linguagem da Lógica Proposicional como elemento básico. A partir desta linguagem, a resolução considera o conjunto das cláusulas da Lógica Proposicional e a regra de resolução.

Definição (elementos básicos da resolução). Os elementos básicos da resolução, na Lógica Proposicional, são definidos pela composição dos elementos:

- O alfabeto da Lógica Proposicional.
- O conjunto das cláusulas da Lógica Proposicional.
- A regra de resolução.

A resolução é um método de dedução, que também define uma estrutura para representação e dedução de conhecimento. Como nos tableaux semânticos, não se tem axiomas, mas apenas uma regra de inferência. A regra de resolução é utilizada na prova de argumentos a partir do conhecimento representado no sistema. A prova feita aplicando a regra de resolução sobre um conjunto de cláusulas.

O mecanismo de inferência da resolução utiliza apenas uma regra. Ela é similar à Modus Ponens, mas é mais adequada às implementações em computadores. A regra de resolução é definida a seguir.

Definição (regra de resolução). Dadas duas cláusulas

$$C_1 = \{A_1,...,A_n\}, C_2 = \{B_1,...,B_n\},$$

a regra de resolução aplicada a C_1 e C_2 é definida pelo procedimento a seguir:

tendo, C_1 e C_2 deduza res(C_1,C_2).

Para provar a satisfatibilidade de um conjunto de cláusulas, a regra de resolução é aplicada repetidamente, até que se consiga a cláusula vazia. Esta aplicação re-

petida da regra de resolução determina uma expansão por resolução, conforme o exemplo a seguir.

Exemplo (expansão por resolução). Considere o conjunto de cláusulas:

$$\{\{\neg P, Q, R\},\{P, R\},\{P, \neg R\}\}.$$

Uma expansão por resolução sobre este conjunto é indicada a seguir.

.1	$\{\neg P, Q, R\}$	
.2	$\{P, R\}$	
.3	$\{P, \neg R\}$	
.4	$\{Q, R\}$	Res(.1, .2)
.5	$\{Q, P\}$	Res(.3, .4)
.6	$\{P\}$	Res(.2, .3)

A expansão acima é obtida por três aplicações da regra de resolução. Observe que neste caso não é possível obter a cláusula vazia.

O conceito de expansão por resolução é definido, recursivamente, a seguir.

Definição (construção de uma expansão por resolução). Uma expansão por resolução na Lógica Proposicional é construída como se segue. Seja

$$\{A_1,....,A_n\}$$

um conjunto de cláusulas.

- A estrutura a seguir é uma expansão por resolução sobre $\{A_1,....,A_n\}$.

.1	A_1
.2	A_2
	.
	.
	.
.n	A_n

- Seja Exp uma expansão por resolução sobre $\{A_1,....,A_n\}$. Se Exp* é a estrutura resultante da adição de $Res(A_i, A_j)$, $i,j \leq n$, $i \neq j$, à expansão Exp, então Exp* é também uma expansão por resolução sobre $\{A_1,....,A_n\}$.

Exemplo (expansão por resolução). Considere o conjunto de cláusulas:

$$\{\{\neg P,Q\},\{P,R\},\{P,\neg Q\}, \{\neg Q,\neg R\}\}.$$

Uma expansão por resolução sobre este conjunto é indicada a seguir.

.1	$\{\neg P,Q\}$
.2	$\{P,R\}$
.3	$\{P,\neg Q\}$

.4	$\{\neg Q,\neg R\}$	
.5	$\{Q,R\}$	Res(.1,.2)
.6	$\{P,R\}$	Res(.3,.5)
.7	$\{Q,R\}$	Res(.1,.6)
.8	$\{R,\neg R\}$	Res(.4,.7)

A expansão por resolução resultante não contém a cláusula vazia. A obtenção da cláusula vazia é uma propriedade importante. Tal fato é análogo à obtenção de um tableau fechado.

Definição (expansão fechada). Uma expansão por resolução é fechada se ela contém a cláusula vazia.

Conseqüência Lógica na Resolução

A conseqüência lógica na resolução é definida de forma análoga à conseqüência nos tableaux semânticos. Tem-se conceitos análogos onde tableaux semânticos são substituídos por expansões por resolução. A prova de uma fórmula H utilizando a resolução e conseqüência lógica são definidas a seguir.

Definição (forma clausal). Dada uma fórmula H, a forma clausal associada a H é uma fórmula Hc tal que Hc é uma conjunção de cláusulas e Hc é equivalente a H.

Toda fórmula da Lógica Proposicional possui uma forma clausal associada. Em outras palavras, dado H é possível determinar uma conjunção de cláusulas equivalente Hc. A demonstração deste fato utiliza indução finita e é proposta como exercício.

Definição (prova por resolução). Seja H uma fórmula e $\neg$Hc a forma clausal associada a $\neg$H. Uma prova de H por resolução é uma expansão por resolução fechada sobre $\neg$Hc. Neste caso, H é um teorema do sistema de resolução.

Exemplo (prova por resolução). Considere a fórmula

$$H = ((P_1 \vee P_2 \vee P_3) \wedge (P_1 \rightarrow P_4) \wedge (P_2 \rightarrow P_4) \wedge (P_3 \rightarrow P_4)) \rightarrow P_4$$

Este exemplo exibe, utilizando resolução, uma prova de H. O primeiro passo é determinar uma forma clausal $\neg$Hc associada a $\neg$H. A fórmula $\neg$Hc é determinada considerando as equivalências a seguir.

$\neg H = \neg(((P_1 \vee P_2 \vee P_3) \wedge (P_1 \rightarrow P_4) \wedge (P_2 \rightarrow P_4) \wedge (P_3 \rightarrow P_4)) \rightarrow P_4)$ equivale a

$\neg(\neg((P_1 \vee P_2 \vee P_3) \wedge (\neg P_1 \vee P_4) \wedge (\neg P_2 \vee P_4) \wedge (\neg P_3 \vee P_4)) \vee P_4)$ equivale a

$(P_1 \vee P_2 \vee P_3) \wedge (\neg P_1 \vee P_4) \wedge (\neg P_2 \vee P_4) \wedge (\neg P_3 \vee P_4) \wedge \neg P_4 = \neg Hc$

Observe que a fórmula $\neg Hc$ é uma conjunção de cláusulas e é representada na notação de conjuntos como

$$\neg Hc = \{\{P_1,P_2,P_3\}, \{\neg P_1,P_4\}, \{\neg P_2,P_4\}, \{\neg P_3,P_4\}, \{\neg P_4\}\}$$

O próximo passo é desenvolver uma expansão por resolução sobre $\neg Hc$.

.1	$\{P_1, P_2, P_3\}$	
.2	$\{\neg P_1, P_4\}$	
.3	$\{\neg P_2, P_4\}$	
.4	$\{\neg P_3, P_4\}$	
.5	$\{\neg P_4\}$	
.6	$\{P_2, P_3, P_4\}$	Res(.1,.2)
.7	$\{P_3,P_4\}$	Res(.3,.6)
.8	$\{P_4\}$	Res(.4,.7)
.9	$\{\ \}$	Res(.5,.8)

A expansão por resolução obtida é fechada, o que constitui uma prova de H.

Exemplo (prova por resolução). Considere as fórmulas

$$G = ((P_1 \vee P_2) \wedge (P_1 \rightarrow P_4) \wedge (P_2 \rightarrow P_4) \wedge (P_3 \rightarrow P_4)) \rightarrow P_3$$

Neste caso, qualquer expansão por resolução associada a $\neg Gc$ não é fechada. A forma clausal $\neg Gc$ associada a $\neg G$ é determinada considerando as equivalências a seguir.

$\neg G = \neg(((P_1 \vee P_2) \wedge (P_1 \rightarrow P_4) \wedge (P_2 \rightarrow P_4) \wedge (P_3 \rightarrow P_4)) \rightarrow P_3)$ equivale a

$\neg(\neg((P_1 \vee P_2) \wedge (\neg P_1 \vee P_4) \wedge (\neg P_2 \vee P_4) \wedge (\neg P_3 \vee P_4)) \vee P_3)$ equivale a

$(P_1 \vee P_2) \wedge (\neg P_1 \vee P_4) \wedge (\neg P_2 \vee P_4) \wedge (\neg P_3 \vee P_4) \wedge \neg P_3 = \neg Gc$

A representação de $\neg Gc$ na notação de conjuntos é:

$$\neg Gc = \{\{P_1,P_2\}, \{\neg P_1,P_4\}, \{\neg P_2,P_4\}, \{\neg P_3,P_4\}, \{\neg P_3\}\}$$

Uma expansão por resolução sobre $\neg Gc$ é dada por

.1	$\{P_1, P_2\}$	
.2	$\{\neg P_1, P_4\}$	
.3	$\{\neg P_2, P_4\}$	
.4	$\{\neg P_3, P_4\}$	
.5	$\{\neg P_3\}$	
.6	$\{P_2,P_4\}$	Res(.1,.2)
.7	$\{P_4\}$	Res(.3,.6)

A expansão por resolução obtida não é fechada. Portanto, não se tem a prova de G.

De forma análoga ao que ocorre nos tableaux semânticos, tem-se na resolução dos teoremas da completude e da correção.

Teorema da Completude. Seja H uma fórmula da Lógica Proposicional. Se H é uma tautologia então existe uma prova de H por resolução.

Comentário. A demonstração deste teorema não é considerada neste texto, podendo ser encontrada em [Fitting, 1990].

A prova por resolução também é correta. Todo teorema é uma tautologia. Isto significa que dada uma fórmula H, se uma expansão por resolução associada a $\neg H$ é fechada, então H é uma tautologia. Os argumentos provados utilizando a resolução são válidos.

Teorema da Correção. Seja H uma fórmula da Lógica Proposicional. Se existe uma prova de H, por resolução, então H é uma tautologia,

Demonstração. Esta demonstração é análoga às demonstrações da correção no sistema axiomático Pa e nos tableaux semânticos, sendo proposta como exercício.

Definição (conseqüência lógica por resolução). Dada uma fórmula H e um conjunto de hipóteses

$$\beta = \{A_1, ..., A_n\},$$

então H é uma conseqüência lógica de β, por resolução, se existe uma prova de

$$(A_1 \wedge ... \wedge A_n) \rightarrow H$$

por resolução.

Notação. Dada uma fórmula H, se H é conseqüência lógica de um conjunto de hipóteses

$$\beta = \{A_1,...,A_n\},$$

por resolução, então este fato é indicado pela notação

$$\beta \vdash H \quad \text{ou} \quad \{A_1,...,A_n\} \vdash H.$$

A notação acima é idêntica às notações utilizadas para conseqüência lógica nos sistemas Pa e Na e nos tableaux semânticos. O sistema que estiver sendo considerado, Pa, Na, tableaux semânticos ou resolução deve ficar claro no contexto.

Exemplo (conseqüência lógica por resolução). Considere novamente os argumentos.

Guga é determinado.
Guga é inteligente.

Se Guga é determinado e atleta, ele não é um perdedor.
Guga é um atleta se é um amante do tênis.
Guga é amante do tênis se é inteligente.

A afirmação "Guga não é um perdedor" é uma conseqüência lógica dos argumentos acima?

Demonstra-se a seguir, utilizando resolução, que a conseqüência lógica ocorre. Conforme foi analisado anteriormente, a representação dos argumentos na Lógica Proposicional é dada por

$$H = (P \wedge Q \wedge ((P \wedge R) \rightarrow \neg P_1) \wedge (Q_1 \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow Q_1)) \rightarrow \neg P_1$$

A forma clausal associada a $\neg H$ é obtida pelas equivalências.

$\neg H = \neg((P \wedge Q \wedge ((P \wedge R) \rightarrow \neg P_1) \wedge (Q_1 \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow Q_1)) \rightarrow \neg P_1)$ equivale a

$\neg(\neg(P \wedge Q \wedge ((P \wedge R) \rightarrow \neg P_1) \wedge (Q_1 \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow Q_1)) \vee \neg P_1)$ equivale a

$P \wedge Q \wedge ((P \wedge R) \rightarrow \neg P_1) \wedge (Q_1 \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow Q_1) \wedge P_1$ equivale a

$P \wedge Q \wedge (\neg(P \wedge R) \vee \neg P_1) \wedge (\neg Q_1 \vee R) \wedge (\neg Q \vee Q_1) \wedge P_1$ equivale a

$P \wedge Q \wedge (\neg P \vee \neg R \vee \neg P_1) \wedge (\neg Q_1 \vee R) \wedge (\neg Q \vee Q_1) \wedge P_1 = \neg Hc$.

Na notação de conjuntos $\neg Hc$ é dada por

$$\neg Hc = \{P, Q, \{\neg P, \neg R, \neg P_1\}, \{\neg Q_1, R\}, \{\neg Q, Q_1\}, \{P_1\}\}$$

Uma expansão por resolução sobre $\neg Hc$ é indicada a seguir

.1	$\{P\}$	
.2	$\{Q\}$	
.3	$\{\neg P, \neg R, \neg P_1\}$	
.4	$\{\neg Q_1, R\}$	
.5	$\{\neg Q, Q_1\}$	
.6	$\{P_1\}$	
.7	$\{\neg Q, R\}$	Res(.4,.5)
.8	$\{\neg P, \neg P_1, \neg Q\}$	Res(.3,.7)
.9	$\{\neg P_1, \neg Q\}$	Res(.1,.8)
.10	$\{\neg Q\}$	Res(.6,.9)
.11	$\{\ \}$	Res(.2, .10)

A expansão obtida é fechada, portanto $\vdash H$. Logo, pelo teorema da correção, H é uma tautologia.

Exemplo (conseqüência lógica por resolução). Considere novamente os argumentos.

Se Guga joga uma partida de tênis, a torcida comparece se o ingresso é barato.
Se Guga joga uma partida de tênis, o ingresso é barato.

A afirmação "se Guga joga uma partida de tênis, a torcida comparece" é uma conseqüência lógica dos argumentos acima?

É demonstrado a seguir, utilizando resolução, que a conseqüência ocorre. A representação deste argumento, na Lógica Proposicional, é dada por:

$$G = ((P \rightarrow (R \rightarrow Q)) \wedge (P \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow Q).$$

A forma clausal associada a $\neg G$ é obtida pelas equivalências.

$\neg G = \neg(((P \rightarrow (R \rightarrow Q)) \wedge (P \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow Q))$ equivale a

$\neg(\neg((P \rightarrow (R \rightarrow Q)) \wedge (P \rightarrow R)) \vee (P \rightarrow Q))$ equivale a

$((P \rightarrow (R \rightarrow Q)) \wedge (P \rightarrow R)) \wedge \neg(P \rightarrow Q)$ equivale a

$(P \rightarrow (R \rightarrow Q)) \wedge (P \rightarrow R) \wedge \neg(P \rightarrow Q)$ equivale a

$(\neg P \vee (\neg R \vee Q)) \wedge (\neg P \vee R) \wedge \neg(\neg P \vee Q)$ equivale a

$(\neg P \vee \neg R \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge P \wedge \neg Q = \neg Gc$

Na notação de conjuntos $\neg Gc$ é dada por

$$\neg Gc = \{\{\neg P, \neg R, Q\}, \{\neg P, R\}, \{P\}, \{\neg Q\}\}$$

Uma expansão por resolução sobre $\neg Gc$ é dada por:

.1	$\{\neg P, \neg R, Q\}$	
.2	$\{\neg P, R\}$	
.3	$\{P\}$	
.4	$\{\neg Q\}$	
.5	$\{R\}$	Res(.2, .3)
.6	$\{\neg P, Q\}$	Res(.1, .5)
.7	$\{Q\}$	Res(.3, .6)
	$\{\ \}$	Res(.4, .7)

A expansão obtida é fechada, portanto $\vdash G$. Logo, pelo teorema da correção, G é uma tautologia.

Exemplo (conjunto satisfatível). Este exemplo demonstra, utilizando resolução, que o conjunto de fórmulas

$$\beta = \{\neg P \vee Q, \neg(Q \vee \neg R), R \rightarrow P_1, \neg(\neg P \vee P_1)\}$$

é insatisfatível. Conforme analisado anteriormente, β é insatisfatível se e somente se

$$H = \neg((\neg P \vee Q) \wedge \neg(Q \vee \neg R) \wedge (R \rightarrow P_1) \wedge \neg(\neg P \vee P_1))$$

é tautologia. Mas H é uma tautologia se e somente se a negação de sua forma clausal $\neg Hc$ tem uma expansão por resolução fechada. Neste caso $\neg Hc$ é dada por:

$$\neg Hc = (\neg P \vee Q) \wedge \neg Q \wedge R \wedge (\neg R \vee P_1) \wedge P \wedge \neg P_1$$

$$\neg Hc = \{\{\neg P, Q\}, \{\neg Q\}, \{R\}, \{\neg R, P_1\}, \{P\}, \{\neg P_1\}\}$$

cuja expansão por resolução é:

.1	$\{\neg P, Q\}$	
.2	$\{\neg Q\}$	
.3	$\{R\}$	
.4	$\{\neg R, P_1\}$	
.5	$\{P\}$	
.6	$\{\neg P_1\}$	
.7	$\{Q\}$	Res(.1,.5)
.8	$\{\ \}$	Res(.2,.7)

A expansão obtida é fechada. Logo $\vdash H$ e pelo teorema da correção, H é uma tautologia. Portanto, β é insatisfatível.

As provas por resolução são análogas às provas que utilizam tableaux semânticos. Nos dois casos é utilizado o método da negação ou absurdo. Na resolução, a obtenção da cláusula vazia corresponde à expansão fechada que é o dual do tableau semântico fechado. Tableau fechado é um conceito dual da expansão por resolução fechada. O que ocorre se não é possível obter uma expansão por resolução sobre $\neg H$ fechada? Neste caso, devido ao teorema da completude, H não é uma tautologia.

Exercícios

1) Considere as regras $R_1,\ldots,R_9$ do tableau semântico. Demonstre que:
   $\{R_1, R_2, R_5\} \Rightarrow \{R_3, R_4, R_7, R_8, R_9\}$
2) Faça duas demonstrações, uma utilizando tableaux semânticos e outra a resolução e demonstre que as fórmulas a seguir são tautologias.
   Observação. Dada uma fórmula H, as duas primeiras propriedades são importantes na obtenção da forma clausal e das formas normais associadas a uma fórmula H.
   a) $(H \wedge (G \vee H)) \leftrightarrow ((H \wedge G) \vee (H \wedge H))$
   b) $(H \vee (G \wedge H)) \leftrightarrow ((H \vee G) \wedge (H \vee H))$
   c) $(\neg(\neg H)) \leftrightarrow H$
   d) $\neg(H \rightarrow G) \leftrightarrow (H \wedge (\neg G))$
   e) $\neg(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow (\neg H \leftrightarrow G)$
   f) $\neg(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow (H \leftrightarrow \neg G)$
   g) $(H \vee G) \leftrightarrow (\neg H \rightarrow G)$
   h) $(H \vee G) \leftrightarrow ((H \rightarrow G) \rightarrow G)$
   I) $(H \wedge G) \leftrightarrow (H \leftrightarrow (H \rightarrow G))$
   j) $(H \rightarrow G) \leftrightarrow (\neg H \vee G)$
   k) $(H \rightarrow G) \leftrightarrow \neg(H \wedge \neg G)$
   l) $(H \rightarrow G) \leftrightarrow (H \leftrightarrow (H \wedge G))$
   m) $(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow ((H \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow H))$
   n) $(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow ((\neg H \vee G) \wedge (H \vee \neg G))$
   o) $(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow ((H \wedge G) \vee (\neg H \wedge \neg G))$
   p) $(H \wedge G) \leftrightarrow (G \wedge H)$
   q) $(H \vee G) \leftrightarrow (G \vee H)$
   r) $(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow (G \leftrightarrow H)$
   s) $((H \wedge G) \wedge H) \leftrightarrow (H \wedge (G \wedge H))$

t) $((H \vee G) \vee H) \leftrightarrow (H \vee (G \vee H))$
u) $((H \leftrightarrow G) \leftrightarrow H) \leftrightarrow (H \leftrightarrow (G \leftrightarrow H))$
v) $((H \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow H)) \rightarrow (H \rightarrow H)$
w) $((H \leftrightarrow G) \wedge (G \leftrightarrow H)) \rightarrow (H \leftrightarrow H)$
x) $(\neg H) \vee H$
y) $H \rightarrow H$
z) $H \leftrightarrow H$
aa) $H \leftrightarrow (H \wedge H)$
bb) $H \leftrightarrow (H \vee H)$
cc) $H \leftrightarrow (H \wedge (H \vee G))$
dd) $H \leftrightarrow (H \vee (H \wedge G))$
ee) $(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow ((\neg H) \leftrightarrow (\neg G))$
ff) $((H \wedge G) \rightarrow H) \leftrightarrow (H \rightarrow (G \rightarrow H))$
gg) $H \rightarrow (G \rightarrow (H \rightarrow H))$
hh) $H \rightarrow (H \vee G), (H \wedge G) \rightarrow H$
ii) $(\neg \mathit{true}) \leftrightarrow \mathit{false}$
jj) $(\neg \mathit{false}) \leftrightarrow \mathit{true}$
kk) $(H \wedge \mathit{true}) \leftrightarrow H$
ll) $(H \wedge \mathit{false}) \leftrightarrow \mathit{false}$
mm) $(H \vee \mathit{true}) \leftrightarrow \mathit{true}$
nn) $(H \vee \mathit{false}) \leftrightarrow H$
oo) $(H \rightarrow \mathit{false}) \leftrightarrow (\neg H)$
pp) $(H \rightarrow \mathit{true}) \leftrightarrow \mathit{true}$
qq) $(\mathit{true} \rightarrow H) \leftrightarrow H$
rr) $(\mathit{false} \rightarrow H) \leftrightarrow \mathit{true}$
ss) $H \leftrightarrow (\mathit{true} \leftrightarrow H)$
tt) $H \leftrightarrow (\mathit{false} \leftrightarrow (\neg H))$

3) Faça duas demonstrações, uma utilizando tableaux semânticos e outra a resolução e determine se os conjuntos de fórmulas são satisfatíveis.

a) $\{\neg(P \rightarrow Q), \neg P \vee Q\}$
b) $\{P \wedge Q, \neg P \wedge Q\}$
c) $\{P \wedge Q, \neg P \vee Q\}$
d) $\{P \rightarrow Q, P \vee Q, \neg Q\}$
e) $\{P \rightarrow Q, Q \rightarrow P\}$
f) $\{P_1 \rightarrow P_2, P_2 \rightarrow P_3, P_3 \rightarrow P_4, P_4 \rightarrow P_1\}$
g) $\{P_1 \rightarrow P_2, P_2 \leftrightarrow P_3, P_3 \leftrightarrow P_4, P_4 \rightarrow P_1\}$
h) $\{P_1 \rightarrow P_2, P_2 \rightarrow P_3, P_3 \rightarrow P_4, P_1 \wedge \neg P_4\}$
I) $\{P_1 \rightarrow P_2, P_2 \rightarrow P_3, P_3 \rightarrow P_4, P_1 \vee P_4\}$
j) $\{(P_1 \wedge P_2) \rightarrow P_3, \neg P_1 \rightarrow P_4, P_2 \wedge \neg P_3 \wedge \neg P_4\}$
k) $\{P_1 \vee P_2, P_1 \vee (P_2 \wedge P_3), P_1 \rightarrow \neg P_3\}$
l) $\{\neg P_1 \vee P_2, P_2 \wedge \neg P_3, P_3 \rightarrow P_4, P_5 \vee \neg P_4, P_1 \wedge \neg P_5\}$
m) $\{\neg P_2 \rightarrow \neg P_1, P_2 \rightarrow P_3, \neg P_4 \rightarrow \neg P_3, P_4 \wedge \neg P_1\}$
n) $\{P_1 \leftrightarrow P_2, P_2 \leftrightarrow P_3, \neg P_3, \neg P_1\}$
o) $\{P_2 \rightarrow P_1, \neg P_2 \rightarrow P_1, P_1\}$
p) $\{P_2 \rightarrow P_1, \neg P_2 \rightarrow P_1, \neg P_1\}$

q) $\{P_1 \rightarrow P_2, P_1 \rightarrow (P_2 \vee P_3), P_1, \neg P_3\}$

r) $\{P_1 \rightarrow P_2, P_1 \vee P_3 \vee P_4, \neg P_3 \vee (P_4 \wedge P_1), (P_3 \wedge \neg P_4) \rightarrow \neg P_5, \neg(\neg P_4 \rightarrow P_2)\}$

s) $\{\neg P_1 \wedge (\neg P_2 \vee P_3), P_2 \wedge P_3, P_3 \rightarrow P_4, P_4 \vee \neg P_1, \neg P_4 \wedge P_1\}$

t) $\{P_1 \vee \neg P_2 \vee P_3, P_1 \vee \neg P_3, P_1 \rightarrow P_2\}$

u) $\{P \rightarrow Q, \neg(Q \wedge \neg R), R \rightarrow S, \neg(S \wedge P)\}$

v) $\{(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow R)\}$

w) $\{P, \neg P\}$

x) $\{S \rightarrow Q, P \vee \neg(S \wedge P), S\}$

y) $\{\neg(\neg Q \vee P), P \vee \neg R, Q \rightarrow \neg R\}$

z) $\{(\neg Q \wedge R) \rightarrow P, Q \rightarrow (\neg P \rightarrow R), P \leftrightarrow \neg R\}$

aa) $\{P \rightarrow Q, (P \wedge R) \rightarrow (P \wedge Q \wedge R), (Q \vee R \vee S)\}$

bb) $\{P \rightarrow Q, \neg(Q \wedge \neg R), R \rightarrow S, \neg(S \wedge P)\}$

4) Faça duas demonstrações. Uma utilizando tableaux semânticos e outra a resolução e determine se cada conjunto de argumentos é satisfatível.

a) José não foi intimidado ou se Flávia faltou ao serviço, então um bilhete foi encontrado. Flávia não faltou ao serviço se José foi intimidado. Se um bilhete foi encontrado, então Flávia faltou ao serviço.

b) Um casamento é feliz se e somente se os noivos têm objetivos comuns. Os noivos têm objetivos comuns se e somente se os noivos cursam disciplinas em áreas comuns. Há divórcio se e somente se o casamento é infeliz. Há divórcio se e somente se os noivos não cursam disciplinas em áreas comuns.

c) Quatro detetives, João Paulo, Tiago, Paloma e Juliana, estão investigando as causas de um assassinato e cada um deles concluiu uma das afirmações a seguir:

João Paulo: Se há pouco sangue na cena do crime, o matador é um profissional.

Tiago: Houve poucos ruídos no momento do crime ou o matador não é um profissional.

Paloma: A vítima estava toda ensangüentada ou houve muitos ruídos no momento do crime.

Juliana: Houve pouco sangue na cena do crime.

d) Os quatro detetives do exercício anterior modificam suas opiniões e concluem.

João Paulo: Se há sangue na cena do crime, então o matador é um profissional.

Tiago: É falso que: há sangue na cena do crime e o matador não é um profissional.

Paloma: O matador não é um profissional e há sangue na cena do crime.

Juliana: Há sangue na cena do crime.

Além de determinar a satisfatibilidade dos argumentos, determine também.

- Se a partir das conclusões de Tiago e Juliana pode se concluir que o matador é profissional.
- Se as conclusões dos detetives João Paulo e Tiago são equivalentes.

5) Faça duas demonstrações. Uma utilizando tableaux semânticos e outra a resolução e determine se os argumentos são válidos?

a) Se a Marcinha emite um olhar 43 para o Tom, ele fica vermelho se e somente se o pessoal da sala estiver percebendo as flechas no ar. O pessoal da sala percebe flechas no

ar e Tom está vermelho. Portanto, Marcinha não emitiu um olhar 43 para Tom.

b) Se Anilton está de férias e o dia está ensolarado, ele irá a igreja. Ele irá para fazenda ou Goiânia. Não há igreja na fazenda. Há igreja em Goiânia. Anilton está de férias e foi para fazenda. Portanto, o dia não está ensolarado.

c) Se Sr. Machado mora em Coromandel, ele vive em Minas, Sr. Machado mora em Coromandel. Portanto, Sr. Machado vive em Minas.

d) Se professor Marcelo dá uma palestra, seus alunos comparecerão se o ingresso for barato e não estiver chovendo. . Se professor Marcelo dá uma palestra, o ingresso será barato. Portanto, se professor Marcelo dá uma palestra, seus alunos comparecerão ou estará chovendo.

e) Se minha namorada vier, irei ao teatro somente se for uma peça de comédia.

f) Se Sandra ama Paris, então ela é feliz.

A partir deste fato, o que se pode concluir a respeito da afirmação a seguir.

Se Sandra não ama Paris ou é feliz, então ela ama Paris ou é feliz.

g) Se Agostinho ama Marciana, então podemos concluir que:

se Marciana é bonita, inteligente e sensível,
então Agostinho é feliz.

A partir do conjunto de argumentos acima, podemos concluir que:

Agostinho não ama Marciana, ou

Marciana não é bonita, não é inteligente e nem é sensível, ou

Agostinho é feliz.

h) Se Agnaldo é otimista, então Sílvio é pessimista. Se Sílvio é otimista então Wilson é otimista. Portanto, se Agnaldo é otimista ou Wilson é pessimista, então Sílvio é pessimista.

i) Se Bethânia está bonita, então Marcelo estará tranqüilo se o Ricardão estiver longe. Bethânia não está estudando ou Marcelo está tranqüilo.

Portanto,

se Marcelo está intranqüilo, então temos que:

Bethânia não está estudando,

e

Bethânia não está bonita ou o Ricardão está perto.

j) Se a linda de Araguari me beija, fico louco! A linda de Araguari não me beijou. Portanto, não fiquei louco.

k) Se a linda de Patrocínio me beija, fico louco! Não fiquei louco. Portanto, a linda de Patrocínio não me beijou.

l) Se Lênin é comunista, ele é ateu. Lênin é ateu, portanto ele é comunista.

m) Se houver economia de energia e investimentos em hidrelétricas, não haverá apagão. Não houve economia de energia. Logo, se houver apagão significa que não haverá investimentos em hidrelétricas.

n) Se Fernandinho (aquele das Alagoas) ganhar as eleições, a corrupção aumentará se a impunidade permanecer alta. Se Fernandinho ganhar as eleições, a impunidade permanecerá alta. Portanto, se Fernandinho ganhar as eleições, a corrupção aumentará.

o) Se os investimentos em Uberlândia permanecerem constantes, os gastos da prefeitura aumentarão ou crescerá o desemprego. Se os gastos da prefeitura não aumentarem, os impostos municipais poderão ser reduzidos. Se os impostos municipais

forem reduzidos e os investimentos em Uberlândia permanecerem constantes, não haverá desemprego. Portanto, os gastos da prefeitura não aumentarão.

p) Se Rita está bonita, então Etiene está feliz e se Etiene está feliz, Stephane está preocupado. Portanto, se Stephane está preocupado, então Rita está bonita e não é verdade que se Etiene está preocupado, então Roxane está feliz.

q) Denise ama Victor ou Hugo. Se Denise ama Victor, então ela também ama Hugo. Conclui-se que Denise necessariamente ama Victor.

6) Demonstre, utilizando indução, que toda fórmula da Lógica Proposicional possui uma forma clausal associada.

7) Demonstre o teorema da correção na resolução.

8) Seja H uma fórmula. Responda, justificando, se as afirmações a seguir são verdadeiras. Utilize os teoremas da completude e da correção.

a) Se todo tableau associado a $\neg H$ possui ramo aberto, então H não é tautologia.

b) Se não existe tableau associado a $\neg H$ com ramo fechado, então H não é tautologia.

c) Se existe tableau associado a $\neg H$ com todos os ramos abertos, então H não é tautologia.

d) Se existe tableau associado a $\neg H$ com ramo fechado, então H é tautologia.

e) Se existe tableau associado a $\neg H$ com todos os ramos fechados, então H é tautologia.

f) Se todo tableau associado a $\neg H$ possui ramo fechado e aberto, então H é tautologia.

g) Se todo tableau associado a $\neg H$ possui ramo aberto, então H não é contraditória.

h) Se não existe tableau associado a $\neg H$ com ramo fechado, então H não é contraditória.

i) Se existe tableau associado a $\neg H$ com todos os ramos abertos, então H não é contraditória.

j) Se existe tableau associado a $\neg H$ com ramo fechado, então H é contraditória.

k) Se existe tableau associado a $\neg H$ com todos os ramos fechados, então H é contraditória.

l) Se todo tableau associado a $\neg H$ possui ramo fechado e aberto, então H é contraditória.

m) Se toda expansão por resolução associada a $\neg Hc$ é aberta, então H não é tautologia.

n) Se não existe expansão por resolução associada a $\neg Hc$ fechada, então H não é tautologia.

o) Se existe expansão por resolução associada a $\neg Hc$ fechada, então H não é tautologia.

p) Se existe expansão por resolução associada a $\neg Hc$ fechada, então H é tautologia.

q) Se existe expansão por resolução associada a Hc fechada, então H é contraditória.

r) Se toda expansão por resolução associada a Hc é aberta, então H é tautologia.

s) Se não existe expansão por resolução associada a Hc fechada, então H é contraditória.

Sugestões e soluções de exercícios selecionados

1) Para demonstrar por exemplo que $\{R_1, R_2, R_5\} \Rightarrow R_3$, demonstre que o conseqüente de R_3 pode ser obtido a partir de seu antecedente utilizando apenas as regras R_1, R_2 e R_3. Transforme o antecedente $(A \rightarrow B)$ em $(\neg A \vee B)$.

4) Em cada item deste exercício as sentenças devem ser inicialmente representadas na Lógica Proposicional. Nesta representação, sentenças do tipo "se A então B", "B se A" são representadas por "$A \rightarrow B$". Observe que em sentenças do tipo "se A, então B" a palavra "então" pode ser omitida tendo uma sentença da forma "Se há pouco sangue na

cena do crime, o matador é um profissional". Após a representação de cada conjunto de sentenças, obtém-se por exemplo um conjunto da forma $\beta=\{H, G, E\}$. Neste caso, β não é satisfatível $\Leftrightarrow \forall$ int. I, $I[H]=F$ ou $I[G]=F$ ou $I[E]=F \Leftrightarrow \forall$ int. I, $I[H \wedge G \wedge E]=F \Leftrightarrow$ $\forall$ int. I, $I[\neg(H \wedge G \wedge E)]=T \Leftrightarrow \neg(H \wedge G \wedge E)$ é tautologia.

Portanto, em cada item se a negação da conjunção das afirmações for uma tautologia, o conjunto de afirmações não é satisfatível. Caso contrário ele é satisfatível. Para demonstrar se $\neg(H \wedge G \wedge E)$ é tautologia utilizando tableaux semânticos basta iniciar o tableau com a fórmula $(H \wedge G \wedge E)$. Para demonstrar se $\neg(H \wedge G \wedge E)$ é tautologia utilizando resolução deve-se iniciar a resolução com o conjunto $\{H, G, E\}$.

5) Em cada item deste exercício as sentenças devem ser inicialmente representadas na Lógica Proposicional. Veja as observações do exercício anterior. Em vários itens tem-se um conjunto de sentenças seguidas por uma conclusão, que geralmente ocorre após a palavra "portanto". A representação final nestes casos são sentenças do tipo $(H \wedge G \wedge E) \rightarrow A$. Utilizando tableau, a validade da fórmula é demonstrada iniciando o tableau com $\neg((H \wedge G \wedge E) \rightarrow A)$. No caso da resolução é necessário determinar a forma clausal de $\neg((H \wedge G \wedge E) \rightarrow A)$ que é equivalente a $(H \wedge G \wedge E \wedge \neg A)$. Observe que a última fórmula é transformada em uma fórmula clausal se H, G, E e $\neg A$ são transformada em disjunções de literais.

6) Considere $B[E] = \exists$ fórmula Ec tal que Ec está na forma clausal e Ec equivale a E.

7) Suponha que existe uma prova de H por resolução. Logo, existe uma expansão por resolução fechada a partir de $\neg Hc$ onde $\neg Hc$ é a forma clausal de $\neg H$. Neste caso, como H equivale a Hc, então $\neg H$ equivale a $\neg Hc$. Portanto, H é tautologia $\Leftrightarrow$ Hc é tautologia ou equivalentemente, $\neg H$ é contraditória $\Leftrightarrow \neg Hc$ é contraditória. Deve-se demonstrar que se a expansão por resolução a partir de $\neg Hc$ é fechada, então $\neg Hc$ é contraditória, concluindo-se que $\neg H$ é contraditória e H é tautologia. Considere então que a expansão por resolução a partir de $\neg Hc$ é fechada. Suponha por absurdo que $\exists$ int. I tal que $I[\neg Hc]=T$. Como a regra da resolução mantém a validade, então o resultado de sua aplicação sobre $\neg Hc$ também deve ser igual a T. Como a expansão é fechada, a última cláusula é vazia, que equivale a fórmula *false*. Portanto, se $I[\neg Hc]=T$, então $I[false]=T$, o que é um absurdo. Logo, não existe interpretação I tal que $I[\neg Hc]=T$, isto é $\forall$ int. I, $I[\neg Hc]=F$. Conclui-se que Hc é tautologia e portanto que H é tautologia.

Obs.: Uma demonstração mais rigorosa do teorema da correção deve usar indução finita.

8) a) Verdadeira pois a partir de um ramo aberto do tableau é possível determinar uma interpretação I tal que $I[H]=F$.

b) Verdadeira. Se não existe tableau associado a $\neg H$ com ramo fechado, então todo tableau tem ramo aberto, logo, pelo item a), H não é tautologia.

c) Verdadeira. A justificativa é a mesma do item a).

d) Falsa. Se existe tableau associado a $\neg H$ com ramo fechado, isto não significa que não haja ramo aberto. Caso haja ramo aberto, então H não é tautologia.

e) Verdadeira. Se existe tableau associado a $\neg H$ com todos os ramos fechados, então tem-se uma prova de H utilizando tableau. Logo, pelo teorema da correção, H é tautologia.

f) Falsa. Como todo tableau associado a $\neg H$ possui ramo aberto, então, conforme item a), H não é tautologia.

g) Falsa. Se todo tableau associado a $\neg H$ possui ramo aberto, então H não é tautologia. Mas isto não significa que H não é contraditória.

h) Falsa. Se não existe tableau associado a ¬H com ramo fechado, então todos os ramos de todos os tableaux são abertos. Neste caso, sempre existe ramo aberto logo, H não é tautologia, podendo se satisfatível ou contraditória.

i) Verdadeira. Se existe tableau associado a ¬H com todos os ramos abertos, então a partir de ¬H, utilizando o método do tableau para prova, não se chega a nenhuma contradição (o ramo fechado é quem determina a contradição). Isto significa que ∀ int. I, I[¬H]=T não é uma afirmação contraditória. Portanto, ∀ int. I, I[¬H]=T, logo H é contraditória.

j) Falsa. Se existe tableau associado a ¬H com ramo fechado, pode ocorrer o caso em que todos os ramos são fechados. Neste caso, H é tautologia.

k) Falsa. Se existe tableau associado a ¬H com todos os ramos fechados, então, pela mesma justificativa do item e), H é tautologia.

l) Falsa. Se todo tableau associado a ¬H possui ramo fechado e aberto, então, devido à presença de ramo aberto, H não é tautologia, podendo ser factível ou contraditória.

m) Verdadeira. Se toda expansão por resolução associada a ¬Hc é aberta, significa que não existe expansão associada a ¬Hc fechada. Logo, não é possível obter uma contradição de I[¬Hc]=T sendo I[Hc]=F isto é, Hc e H não são tautologias.

n) Verdadeira. Se não existe expansão por resolução associada a ¬Hc fechada, significa que todas são abertas. Logo, pelo item m), H não é tautologia.

o) Falsa. Se existe expansão por resolução associada a ¬Hc fechada, então existe uma prova por resolução de H. Logo, pelo teorema da correção, H é tautologia.

p) Verdadeira. Se existe expansão por resolução associada a ¬Hc fechada, existe uma prova de H por resolução. Logo, H é tautologia.

q) Verdadeira. Se existe expansão por resolução associada a Hc fechada, então, conforme item p), ¬H é tautologia. Logo, H é contraditória.

r) Falsa. Se toda expansão por resolução associada a Hc é aberta, então ¬H não é tautologia. Isto não significa e que H seja tautologia.

s) Falsa. Se não existe expansão por resolução associada a Hc fechada, então todas são abertas. Logo, pelo item r), ¬H não é tautologia. Isto não significa que H seja contraditória.

PARTE 2

Lógica de Predicados

CAPÍTULO 9

A linguagem da Lógica de Predicados

Introdução

Este capítulo inicia a segunda parte do livro, onde se considera o estudo da Lógica de Predicados. Os passos a serem seguidos são análogos àqueles considerados na primeira parte. Inicialmente, é definida a linguagem da Lógica de Predicados analisando-a do ponto de vista sintático e semântico. Também são considerados os mecanismos que verificam fórmulas válidas. Em seguida são considerados os sistemas de dedução da Lógica de Predicados, que são extensões dos sistemas da Lógica Proposicional.

Neste capítulo são analisados os fundamentos da linguagem da Lógica de Predicados. A definição desta linguagem é semelhante à definição de outras linguagens. Como na linguagem da Lógica Proposicional, o alfabeto é definido inicialmente e em seguida os outros elementos da linguagem. A linguagem da Lógica de Predicados é mais rica que a da Lógica Proposicional pois além de conter os objetos desta, a linguagem da Lógica de Predicados contém quantificadores, símbolos funcionais e de predicados. Neste sentido, a Lógica de Predicados é uma extensão da Lógica Proposicional, o que lhe confere um maior poder de representação. Existem, por exemplo, vários tipos de inferências, que não possuem representações adequadas na Lógica Proposicional mas podem ser representadas na Lógica de Predicados. Considere, por exemplo:

- Todo aluno de Computação é inteligente. Luciano é aluno de Computação. Logo, Luciano é inteligente.
- A adição de dois números ímpares quaisquer é um número par.

A dificuldade em representar tais inferências na Lógica Proposicional se deve às quantificações indicadas pelas palavras: "todo" e "qualquer". A linguagem da Lógica de Predicados estende a linguagem da Lógica Proposicional possibilitando a representação deste tipo de quantificação. Além disso, são consideradas também funções, predicados e variáveis, de forma análoga ao Cálculo Diferencial.

Alfabeto

O alfabeto da linguagem da Lógica de Predicados é definido pelo conjunto de símbolos descritos a seguir.

Definição (alfabeto). O alfabeto da Lógica de Predicados é constituído por:

- Símbolos de pontuação: (,).
- Símbolo de verdade: *false*.
- Um conjunto enumerável de símbolos para variáveis: $x, y, z, w, x_1, y_1, z_1, w_1, x_2, \ldots$
- Um conjunto enumerável de símbolos para funções: $f, g, h, f_1, g_1, h_1, f_2, g_2, \ldots$
- Um conjunto enumerável de símbolos para predicados: $p, q, r, p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, \ldots$
- Conectivos: $\neg, \vee, \forall, \exists$.

Associado a cada símbolo para função ou predicado, tem-se um número inteiro não-negativo k. Este número indica a aridade ou número de argumentos da função ou predicado.

O alfabeto da linguagem da Lógica de Predicados é uma extensão do alfabeto da Lógica Proposicional. Além dos infinitos símbolos contidos no alfabeto da linguagem da Lógica Proposicional, ele ainda contém infinitos símbolos para funções, predicados, variáveis etc.

As variáveis. Os símbolos para variáveis formam um novo conjunto que não ocorre na Lógica Proposicional. Como é visto mais adiante, as variáveis têm um papel importante na Lógica de Predicados e em Ciência da Computação. Em programação Lógica, por exemplo, as variáveis são utilizadas na determinação das respostas dos programas.

As funções e os predicados. Os símbolos para funções e para predicados não ocorrem na Lógica Proposicional. A presença de tais símbolos na Lógica de Predicados possibilita um maior poder de representação em relação à Lógica Proposicional. Na Lógica, na Matemática e em Ciência da Computação os conceitos de função e predicado são fundamentais. Em Ciência da Computação há linguagens que se baseiam no conceito de função, como as linguagens funcionais SCHEME e LISP.

As constantes e símbolos proposicionais. Cada símbolo para função ou predicado possui um número k, não-negativo, associado. Quando $k = 0$, tem-se uma função ou predicado com zero argumento. As funções com zero argumentos ou aridade nula representam constantes. Da mesma forma, os predicados com aridade zero representam os símbolos proposicionais, que ocorrem no alfabeto da Linguagem Proposicional.

Notação. Os símbolos para funções zero-árias (com aridade nula) são denominados constantes. Elas são representadas por $a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2$, etc.

Os símbolos para predicados zero-ários são denominados símbolos proposicionais. Eles são representados por

$$P, Q, R, S, P_1, Q_1, R_1, S_1, P_2, Q_2, \text{etc.}$$

Como há infinitos símbolos para funções com aridade zero, há infinitas constantes. Da mesma forma, há infinitos símbolos proposicionais.

Os conectivos. O conjunto dos conectivos contém $\neg$ e $\vee$, que correspondem à versão simplificada do alfabeto da Lógica Proposicional. Além destes conectivos há também $\forall$ e $\exists$, que representam os quantificadores universal (para todo) e existencial (existe), respectivamente. Como será analisado mais adiante, tais quantificadores ampliam o poder de representação da Lógica de Predicados, como também a complexidade das demonstrações.

Na linguagem da Lógica de Predicados, os outros conectivos $\wedge$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ são definidos a partir de $\neg$ e $\vee$, conforme é indicado na Lógica Proposicional. Além disso, o símbolo de verdade *true* também é definido a partir de *false* pois

$$true = \neg false.$$

Elementos Básicos da Linguagem

Na linguagem da Lógica de Predicados ocorrem vários elementos básicos necessários à definição de fórmula. Esta seção considera a definição desses elementos. Inicialmente, observe que na língua portuguesa há sentenças cuja interpretação é um valor de verdade e outras um objeto. A sentença

A capital de Minas Gerais é Belo Horizonte?

é uma questão cujo resultado da interpretação é um valor de verdade. Neste caso, o valor de verdade é verdadeiro, pois Belo Horizonte é realmente a capital de Minas Gerais. Por outro lado, o resultado da interpretação da sentença

Qual a capital do Brasil?

não é um valor de verdade. O resultado é Brasília, que é um objeto. Na linguagem da Lógica de Predicados, as sentenças que representam objetos são os termos. As fórmulas representam sentenças cuja interpretação é um valor de verdade.

Os termos, átomos e fórmulas são definidos a seguir. A interpretação de termos, átomos e fórmulas da linguagem da Lógica de Predicados será analisada nos capítulos posteriores.

Definição (termo). Os termos da linguagem da Lógica de Predicados são construídos segundo as regras a seguir.

- As variáveis são termos.
- Se $t_1, t_2, ..., t_n$ são termos e f é um símbolo para função n-ária, então $f(t_1, t_2, ..., t_n)$ é um termo.

As variáveis são termos pois os resultados de suas interpretações representam objetos. Da mesma forma, o resultado da aplicação de uma função a um conjunto de termos é um termo.

Exemplo (termos).

a) Uma variável x é um termo.
b) Uma constante "a" é um termo, pois é uma função zero-ária. Neste caso, tem-se uma função aplicada a zero termo.
c) Se f é uma função binária, então f(x,a) é um termo pois "x" e "a" são termos. A aplicação de uma função binária "f" aos termos "x" e "a" é um termo. Observe que se "f" não for uma função binária, então f(x,a) não é um termo.
d) Sejam g e f funções ternária e binária respectivamente. Neste caso, g(y, f(x,a), c) é um termo. Os argumentos da função g acima são termos. A aplicação da função g a estes termos é também um termo. Neste caso, como f é binária, então a concatenação de símbolos f(y,x,z) não é um termo pois f deve conter exatamente dois argumentos.
e) h(x,y,z) é um termo. Neste caso é considerado implicitamente que h é ternária.

Exemplo (termos). Este exemplo considera funções e constantes que representam elementos da aritmética como funções de adição, de subtração e números naturais. Os símbolos que representam tais funções não pertencem ao alfabeto da Lógica de Predicados. Mas com fins didáticos é considerado um abuso de linguagem. Como é visto adiante, esta nova notação possibilita uma diferenciação entre a interpretação do resultado de uma função e de um predicado. Nesta notação são considerados os símbolos para função: "+" e "–"; e as constantes: 1, 2, 3, etc. Tem-se que:

a) x, 9, y, 10 são termos pois variáveis e constantes são termos.
b) +(5, 8) é um termo pois a função + aplicada a dois termos é um termo. Neste caso, o resultado é igual a 13, isto é, o resultado é um novo termo.
c) +(–(8, 7), 3) também é um termo. A adição aplicada aos termos –(8,7) e 3 é um termo. O resultado é igual a 4, que é um termo.

Observe que neste exemplo a notação utilizada para as funções é a notação prefixa. As equivalências entre notação prefixa e infixa são

+(5, 8) corresponde a (5 + 8),
–(8, 7) corresponde a (8 – 7).

Os átomos, que representam expressões cuja interpretação é um valor de verdade, são definidos a seguir.

Definição (átomo). Os átomos da linguagem da Lógica de Predicados são construídos segundo as regras a seguir.

- O símbolo de verdade *false* é um átomo.
- Se $t_1, t_2, ..., t_n$ são termos e p é um símbolo para predicado n-ário, então, $p(t_1, t_2, ..., t_n)$ é um átomo.

Exemplo (átomos). Este exemplo considera um conjunto de átomos. Alguns deles são construídos a partir dos termos indicados nos exemplos anteriores.

a) O símbolo de verdade *false* é um átomo.
b) O símbolo proposicional P é um átomo pois é um predicado zero-ário. Tem-se neste caso um predicado aplicado a zero termo.
c) Se p é um predicado binário, então p(f(x, a), x) é um átomo. Observe que "x", "a" e f(x, a) são termos. A aplicação de "p" aos termos f(x, a) e x é um átomo. Observe também que se "p" não for binário, então a expressão acima não é um átomo.
d) q(x, y, z) é um átomo. Neste caso é considerado implicitamente que q é ternário.
e) Para simplificar a notação, considera-se que *true* é um átomo. Observe que isto é um abuso de linguagem pois *true* = ¬*false*.

Exemplo (átomos). Este exemplo considera novamente um abuso de linguagem, pois são considerados os predicados da aritmética "maior que" e "diferente", representados pelos símbolos > e ≠, respectivamente.

a) A expressão aritmética >(+(5, 8), 3) representa um átomo. A função adição. + aplicada a dois termos é um termo. Por outro lado, o predicado > aplicado aos termos +(5, 8) e 3 é um átomo. Neste caso, o resultado da aplicação do predicado > aos termos +(5, 8) e 3 é igual ao valor de verdade T.
b) A expressão aritmética ≠(–(8, 7), 3) é um átomo. A desigualdade ≠ é um predicado. A aplicação de ≠ aos termos –(8, 7) e 3 é um átomo. O resultado da interpretação deste átomo é igual ao valor de verdade T.

Observe que nos exemplos anteriores os resultados das interpretações dos átomos são valores de verdade. Já os resultados das interpretações dos termos são objetos.

Fórmulas

As fórmulas da Lógica de Predicados são definidas a seguir. A construção das fórmulas é feita a partir da concatenação de átomos e conectivos. Entretanto, como ocorre na Lógica Proposicional, não é qualquer concatenação de símbolos que é uma fórmula.

Definição (fórmula). As fórmulas da linguagem da Lógica de Predicados são construídas conforme as regras a seguir.

- Todo átomo é uma fórmula.
- Se H é uma fórmula, então (¬H) é uma fórmula.
- Se H e G são fórmulas, então (H ∨ G) é uma fórmula.
- Se H é uma fórmula e x uma variável, então ((∀x)H) e ((∃x)H) são fórmulas.

Na definição anterior, cada item define uma regra para construção de fórmulas, a partir de fórmulas mais simples. As fórmulas mais elementares, que são os átomos, são consideradas inicialmente. Em seguida, utilizando os conectivos

$$\neg, \vee, \forall \text{ e } \exists,$$

obtém-se fórmulas mais complexas. Como o conjunto de conectivos $\{\neg, \vee\}$ é completo, então é possível obter fórmulas com os conectivos

$$\wedge, \rightarrow \text{ e } \leftrightarrow.$$

Exemplo (construção de fórmulas)

a) Os átomos p(x), R e *false* são fórmulas.
b) Como R e p(x) são fórmulas, obtém-se a fórmula $((\neg p(x) \vee R))$
c) Conforme é analisado na primeira parte do livro, esta fórmula equivale a $(p(x) \rightarrow R)$. Seguindo este raciocínio, são construídas fórmulas utilizando os conectivos $\wedge$ e $\leftrightarrow$.
d) Como $(p(x) \rightarrow R)$ é uma fórmula, então $((\forall x)(p(x) \rightarrow R))$ também é uma fórmula.

Este raciocínio segue indefinidamente, e inúmeras fórmulas podem ser obtidas.

Definição (expressão). Uma expressão da Lógica de Predicados é um termo ou uma fórmula.

Uma expressão na Lógica de Predicados é uma concatenação válida de símbolos do alfabeto, podendo ser um termo ou uma fórmula. Dada uma expressão, as partes que a compõem possuem denominações especiais, conforme a definição a seguir.

Definição (subtermo, subfórmula, subexpressão). Os elementos a seguir definem as partes de um termo ou fórmula E.

- Se E = x, então a variável x é um subtermo de E
- Se $E = f(t_1, t_2,...,t_n)$ então t_i e $f(t_1, t_2,...,t_n)$ são subtermos de E.
- Se t_1 é subtermo de t_2 e t_2 é subtermo de E, então t_1 é subtermo de E.
- Se H é uma fórmula e $E = (\neg H)$ então H e $(\neg H)$ são subfórmulas de E.
- Se H e G são fórmulas e E é uma das fórmulas $(H \vee G)$, $(H \wedge G)$, $(H \rightarrow G)$ ou $(H \leftrightarrow G)$, então H, G e E são subfórmulas de E.
- Se H é uma fórmula, x uma variável, Q um dos quantificadores $\forall$ ou $\exists$ e $E = ((Qx)H)$, então H e $((Qx)H)$ são subfórmulas de E.
- Se H_1 é subfórmula de H_2 e H_2 é subfórmula de E, então H_1 é subfórmula de E.
- Todo subtermo ou subfórmula é também uma subexpressão.

Dados dois termos E e t, então t é um subtermo de E se t é uma parte de E. Neste caso, E pode ser igual ou diferente de t. No último caso, t é um subtermo próprio de E. Da mesma forma, dadas duas fórmulas H e G, então G é uma subfórmula de H se G é uma parte de H. Como no caso dos termos, G pode ser igual ou diferente de H. No último caso, G é uma subfórmula própria de H.

Exemplo (subfórmula). Considere as fórmulas

$$H = (((\forall x)p(x)) \rightarrow (p(x)) \wedge ((\forall y)r(y))) \text{ e } G = p(x).$$

A subfórmula G ocorre duas vezes em H.

Definição (literal). Um literal na Lógica de Predicados é um átomo ou a negação de um átomo. Um átomo é um literal positivo. A negação de um átomo é um literal negativo.

Exemplo (literal). *true* é um literal negativo, pois é igual a negação de *false*. Entretanto, para simplificar, a notação, o símbolo *true* é considerado como parte do alfabeto sendo um literal positivo. Esta simplificação também foi considerada na Lógica Proposicional.

Definição (forma normal). Seja H uma fórmula da Lógica de Predicados.

- H está na forma normal conjuntiva, fnc, se é uma conjunção de disjunções de literais.
- H está na forma normal disjuntiva, fnd, se é uma disjunção de conjunções de literais.

A definição anterior é análoga àquela considerada na Lógica Proposicional. Além disso, mesmo havendo quantificadores na Lógica de Predicados, fórmulas na fnc e na fnd não os consideram.

Notação. No que se segue, analogamente à Lógica Proposicional, os parênteses das fórmulas são omitidos quando não há problemas sobre suas interpretações. As fórmulas também podem ser escritas utilizando várias linhas para uma melhor leitura.

Na Lógica de Predicados, há uma ordem de precedência entre os conectivos que também possibilita a simplificação das fórmulas. A ordem de precedência dos conectivos

$$\neg, \vee, \wedge, \rightarrow \text{ e } \leftrightarrow$$

é a mesma considerada na Lógica Proposicional e os conectivos $\forall$ e $\exists$ possuem precedências equivalentes.

Definição (ordem de precedência). Na Lógica de Predicados, a ordem de precedência dos conectivos é a seguinte:

- Maior precedência: $\neg$.
- Precedência intermediária superior: $\forall$, $\exists$.
- Precedência intermediária inferior: $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.
- Precedência inferior: $\vee$, $\wedge$.

Como na Lógica Proposicional, a ordem de precedência dos conectivos é utilizada para simplificar as fórmulas, retirando símbolos de pontuação.

Exemplo (precedência). Este exemplo considera, a simplificação de uma fórmula pela eliminação de símbolos de pontuação. Considerando a ordem de precedência dos conectivos, a concatenação de símbolos

$$G = (\forall x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow (\exists z)\neg q(z) \wedge r(y)$$

representa a fórmula

$$H = (((((\forall x)((\exists y)p(x,y))) \rightarrow (\exists z)(\neg q(z))) \wedge r(y)).$$

A obtenção de H a partir de G é feita considerando a ordem de precedência dos conectivos.

Correspondência entre quantificadores. Conforme é analisado na Lógica Proposicional, os conectivos

$$\neg, \wedge, \rightarrow \text{ e } \leftrightarrow$$

podem ser definidos a partir dos conectivos $\neg$ e $\vee$. Analogamente, é possível definir o quantificador existencial $\exists$ a partir do quantificador universal $\forall$ e vice-versa. Isto significa que o alfabeto da Lógica de Predicados pode ser simplificado considerando apenas os conectivos $\neg$, $\vee$, $\forall$. Considere inicialmente a afirmação

Existe aluna de Ciência da Computação que é bonita.

Além disso, suponha que o domínio das pessoas consideradas seja o conjunto dos alunos de Ciência da Computação. Esta afirmação pode ser representada na Lógica de Predicados como

$$(\exists x)p(x),$$

onde

p(x) é verdadeiro se e somente se x é bonita

e $(\exists x)$ é o quantificador existencial "existe x". Se a afirmação acima é verdadeira, então

$$(\forall x)\neg p(x)$$

é falsa. Observe que esta fórmula representa a afirmação

Toda aluna de Ciência da Computação é feia.

Mas se

$$(\forall x)\neg p(x)$$

é falsa, então a sua negação

$$\neg((\forall x)\neg p(x))$$

é verdadeira. Isto é, é falso que toda aluna de Ciência da Computação é feia ou seja, pelo menos uma aluna é bonita. Portanto, as afirmações a seguir são equivalentes.

a) $(\exists x)p(x)$, que é interpretada como: Existe aluna de Ciência da Computação que é bonita.

b) $\neg(\forall x)\neg p(x)$, que é interpretada como: É falso que toda aluna de Ciência da Computação é feia.

Seguindo um raciocínio análogo o quantificador $\forall$ é definido a partir de $\exists$.

Definição (correspondência entre quantificadores). Sejam uma fórmula H e uma variável x.
Os quantificadores existencial $\exists$ e universal $\forall$ se relacionam pelas correspondências:

$$((\forall x)H) = \neg((\exists x)(\neg H))$$
$$((\exists x)H) = \neg((\forall x)(\neg H))$$

Qualquer um dos quantificadores pode ser definido a partir do outro utilizando as correspondências da definição anterior. O quantificador existencial é definido a partir de uma correspondência entre a fórmula

$$((\exists x)H)$$

e a fórmula

$$\neg((\forall x)(\neg H)).$$

Observe que

$$\neg((\forall x)(\neg H))$$

contém apenas os conectivos $\neg$ e $\forall$, que pertencem ao alfabeto simplificado da Lógica de Predicados. Tem-se a definição de um novo conectivo a partir dos conectivos do alfabeto.

Da mesma forma o quantificador $\forall$ é definido a partir de $\exists$ pela correspondência

$$((\forall x)H) = \neg((\exists x)(\neg H)).$$

Comprimento de uma fórmula. O comprimento de uma fórmula da Lógica de Predicados é definido a seguir. Como na Lógica Proposicional, este conceito é utilizado na demonstração de inúmeros resultados, principalmente aqueles que utilizam o princípio da indução finita. A definição do comprimento de uma fórmula na Lógica de Predicados é uma extensão do referido conceito na Lógica Proposicional.

Definição (comprimento de uma fórmula). Dada uma fórmula H da Lógica de Predicados, o comprimento de H, denotado por comp[H], é definido como se segue:

- Se H é um átomo, então comp[H] = 1.
- Se H = ¬G, então comp[¬G] = 1 + comp[G].
- Se H = E ☺ G, onde ☺ é um dos conectivos ∨, ∧, →, ↔, então comp[E ☺ G] = 1 + comp[E] + comp[G].
- Se H = (Qx)G, onde Q é um dos quantificadores ∀ ou ∃, então comp[(Qx)G] = 1 + comp[G].

Para simplificar a definição do comprimento de uma fórmula, considera-se que todos os conectivos

$$\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall \text{ e } \exists$$

e o símbolo de verdade *true* fazem parte do alfabeto. Observe que isto é um abuso de notação pois o alfabeto pode ser simplificado considerando apenas os conectivos ¬, ∨ e ∀ e o símbolo de verdade *false*. Além disso, a rigor *true* não é um átomo, mas a negação do átomo *false*. Esta simplificação também é considerada na Lógica Proposicional.

Exemplo (comprimento de uma fórmula). Este exemplo considera duas fórmulas e seus respectivos comprimentos. Se

$$H = (p(x) \rightarrow q(y)),$$

então

$$\text{comp}[H] = 1+\text{comp}[p(x)]+\text{comp}[q(y)] = 3.$$

Se $G = (\forall x)p(x) \leftrightarrow (\exists y)q(y)$, então

$$\begin{aligned}\text{comp}[G] &= 1+\text{comp}[(\forall x)p(x)]+\text{comp}[(\exists y)q(y)]\\ &= 1+1+\text{comp}[p(x)]+1+\text{comp}[q(y)] = 5.\end{aligned}$$

O Princípio da Indução na Lógica de Predicados

Como na Lógica Proposicional, também na Lógica de Predicados várias propriedades são demonstradas utilizando o princípio da indução finita. A proposição a seguir estabelece a forma de aplicação deste princípio na demonstração de propriedades de fórmulas da Lógica de Predicados. Este princípio também é denominado como indução no comprimento das fórmulas.

Proposição (princípio da indução na Lógica de Predicados). Seja B[E] uma asserção que se refere a uma fórmula E da Lógica de Predicados. Se as duas propriedades a) e b) a seguir são verdadeiras, então conclui-se que B[E] é verdadeira para qualquer fórmula E.

a) Base da Indução. B[A] é verdadeira para todo átomo A.

b) Passo da indução. Sejam G e H duas fórmulas. Se B[G] e B[H] são verdadeiras, então B[¬H], B[G∨H] e B[(∀x)H] são verdadeiras.

Demonstração. Esta demonstração é proposta como exercício.

A base do princípio da indução na Lógica de Predicados considera as fórmulas de comprimento igual a um. Neste caso, tais fórmulas são átomos da forma $p(t_1,...,t_n)$ ou símbolo de verdade *false*. Observe que no alfabeto simplificado da Lógica de Predicados *true* não é um átomo. No passo da indução são considerados apenas os conectivos ¬, ∨ e ∀, que formam um conjunto completo.

Proposição (comprimento de uma fórmula). Sejam H e G duas fórmulas da Lógica de Predicados. Se G é uma subfórmula de H, então comp[G] ≤ comp[H].

Demonstração. O princípio da indução no comprimento das fórmulas é utilizado nesta demonstração, que é proposta como exercício no final do capítulo. Observe que este mesmo resultado foi considerado na Lógica Proposicional. Entretanto, neste contexto as fórmulas consideradas pertencem à Lógica de Predicados.

Classificações de variáveis. As variáveis que ocorrem nas fórmulas da Lógica de Predicados possuem várias classificações. Elas podem ocorrer na forma livre ou ligada. Além disso, dependendo da classificação das variáveis de uma fórmula, tem-se a classificação da fórmula propriamente dita. Nesta seção, é analisada a classificação das ocorrências das variáveis nas fórmulas da Lógica de Predicados. As seções posteriores consideram também a classificação das fórmulas a partir da natureza de suas variáveis.

Para determinar se a ocorrência de uma variável é livre ou ligada é necessário determinar os escopos dos quantificadores que ocorrem na fórmula. O conceito de escopo é definido a seguir.

Definição (escopo de um quantificador). Seja E uma fórmula da Lógica de Predicados.

- Se (∀x)H é uma subfórmula de E, então o escopo de (∀x) em E é a subfórmula H.
- Se (∃x)H é uma subfórmula de E, então o escopo de (∃x) em E é a subfórmula H.

A palavra escopo significa também abrangência. Neste sentido, o escopo de um quantificador significa a sua abrangência ou domínio de influência.

Exemplo (escopo de um quantificador). Considere a fórmula a seguir.

$$E = (\forall x)(\exists y)((\forall z)p(x, y, w, z) \rightarrow (\forall y)q(z, y, x, z_1)).$$

Neste caso

a) escopo do quantificador $(\forall x)$ em E é
$(\exists y)((\forall z)p(x, y, w, z) \rightarrow (\forall y)q(z, y, x, z_1))$

b) escopo do quantificador $(\exists y)$ em E é
$((\forall z)p(x, y, w, z) \rightarrow (\forall y)q(z, y, x, z_1))$

c) escopo do quantificador $(\forall z)$ em E é $p(x, y, w, z)$. Observe que neste caso o escopo de $(\forall z)$ não é o restante da fórmula E, a partir de $(\forall z)$.

d) escopo do quantificador $(\forall y)$ em E é $q(z, y, x, z_1)$.

O escopo de um quantificador em uma fórmula E é a subfórmula de E referida pelo quantificador. O escopo é a abrangência ou domínio do quantificador. A subfórmula

$$((\forall z)p(x, y, w, z) \rightarrow (\forall y)(z, y, x, z_1))$$

é o escopo de $(\exists y)$. Observe que esta é a subfórmula de E referida pelo quantificador $(\exists y)$, que está quantificando sob o seu escopo. Da mesma forma, o quantificador $(\forall z)$ está quantificando apenas sobre a subfórmula $p(x, y, w, z)$ e não sobre o restante da fórmula E, a partir de $(\forall z)$.

Dada uma variável x em uma fórmula E, esta pode ocorrer livre ou ligada em E, conforme é definido a seguir.

Definição (ocorrência livre e ligada). Sejam x uma variável e E uma fórmula.

- Uma ocorrência de x em E é ligada se x está no escopo de um quantificador $(\forall x)$ ou $(\exists x)$ em E.
- Uma ocorrência de x em E é livre se não for ligada.

Observe que as ocorrências das variáveis dos quantificadores não são livres e nem ligadas, isto é, a variável x em $(\forall x)$ e $(\exists x)$ não é classificada.

Exemplo (ocorrência livre e ligada). Considere a fórmula do exemplo anterior.

$$E = (\forall x)(\exists y)((\forall z)p(x_g, y_g, w_v, z_g) \rightarrow (\forall y)q(z_v, y_g, x_g, z_{1v}))$$

As variáveis livres são indicadas pelo índice "v" e as variáveis ligadas por "g". Observe que a variável z ocorre ligada em

$$p(x, y, w, z)$$

e livre em

$$q(z, y, x, z_1).$$

A ocorrência de z em

$$p(x, y, w, z)$$

está no escopo de $(\forall z)$ e a ocorrência de z em

$$q(z,y,x,z_1)$$

não está no escopo de nenhum quantificador. A ocorrência da variável y em

$$q(z,y,x,z_1)$$

é uma ocorrência ligada. Neste caso, y está no escopo de dois quantificadores $(\exists y)$ e $(\forall y)$. Quando isto acontece, a ocorrência da variável y está ligada pelo quantificador mais próximo, isto é, y está ligada por $(\forall y)$. Finalmente, as variáveis que ocorrem nos quantificadores não são livres e nem ligadas.

Definição (variável livre e ligada). Sejam x uma variável e E uma fórmula que contém x.

- A variável x é ligada em E se existe pelo menos uma ocorrência ligada de x em E.
- A variável x é livre em E se existe pelo menos uma ocorrência livre de x em E.

Exemplo (variável livre e ligada). Considere a fórmula E do exemplo anterior. Neste caso, as variáveis x, y, e z são ligadas em E. As variáveis z, w e z_1 são livres em E. Observe que a variável z é livre e ligada em E pois há uma ocorrência livre e uma ocorrência ligada de z em E.

Definição (símbolo livre). Dada uma fórmula E, os seus símbolos livres são as variáveis que ocorrem livres em E, os símbolos de função e os símbolos de predicado.

Os símbolos livres de uma fórmula são todos os seus símbolos, exceto as variáveis ligadas, as variáveis dos quantificadores, os conectivos, os símbolos de verdade e os de pontuação.

Exemplo (símbolos livres). O conjunto

$$\{w, z, z_1, p, q\}$$

é formado pelos símbolos livres da fórmula E do exemplo anterior. Observe que as variáveis ligadas não são símbolos livres.

A partir da classificação das variáveis de uma fórmula, tem-se a classificação da fórmula que as contém.

Definição (fórmula fechada). Uma fórmula é fechada quando não possui variáveis livres.

Exemplo (fórmula fechada). A fórmula E do exemplo anterior não é uma fórmula fechada pois ela contém variáveis livres. Mas a fórmula a seguir, obtida de E, é fechada.

$$E_1 = (\forall w)(\exists z)(\forall z_1)(\forall x)(\exists y)((\forall x)p(x, y, w, z) \rightarrow (\exists y)q(z, y, x, z_1))$$

A fórmula E_1 é obtida a partir da fórmula E, adicionando os quantificadores $(\forall w)$, $(\forall z)$ e $(\forall z_1)$ no seu início. As ocorrências livres de w, z e z_1 na fórmula E passam a ocorrências ligadas em E_1 obtida pela adição dos quantificadores.

Dada uma fórmula H da Lógica de Predicados, obtém-se dois tipos de fórmulas a partir de H, o fecho universal e o fecho existencial de H.

Definição (fecho de uma fórmula). Seja H uma fórmula da Lógica de Predicados e $\{x_1, ..., x_n\}$ o conjunto das variáveis livres em H.

- o fecho universal de H, indicado por $(\forall^*)H$, é dado pela fórmula $(\forall x_1) \ldots (\forall x_n)H$
- o fecho existencial de H, indicado por $(\exists^*)H$, é dado pela fórmula $(\exists x_1) \ldots (\exists x_n)H$

Exemplo (fecho de uma fórmula). A fórmula E_1, do exemplo anterior, é o fecho universal da fórmula E. Por outro lado, o fecho existencial de E é dado pela fórmula

$$E_2 = (\exists w)(\exists z)(\exists z_1)(\forall x)(\exists y)((\forall x)p(x, y, w, z) \rightarrow (\forall y)q(z, y, x, z_1))$$

A fórmula E_2 é obtida a partir da fórmula E, adicionando os quantificadores existenciais nas variáveis livres.

Dada uma fórmula fechada H, como H não possui variáveis livres, então o seu fecho universal, ou existencial, é igual a H. Isto é, se H é uma fórmula fechada, então $(\forall^*)H = (\exists^*)H = H$.

Exercícios

1) Responda, justificando sua resposta, as seguintes questões:
   a) Todo termo é uma fórmula?
   b) Todo literal é uma expressão?
   c) Toda expressão é um literal?
2) Seja E a fórmula a seguir:
   $E = (\forall w)(\forall z)(\forall z_1)(\forall x)(\exists y)((\forall x)p(x,y,w,z) \rightarrow (\forall y)q(z,y,x,z_1))$
   a) Determine todas as subfórmulas de E.
   b) Determine todas as subexpressões de E.
3) Reescreva os parênteses das fórmulas a seguir.
   a) $(\forall x)p(x) \vee \neg(\forall x)q(x) \rightarrow r(y)$
   b) $(\exists z)p(z) \leftrightarrow \neg q(y)$
   c) $(\exists x)(\forall x)\neg p(x)$

4) Elimine o máximo de símbolos de pontuação das fórmulas a seguir, mantendo a fórmula original.
   a) $((\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)))$
   b) $(((\forall x)p(x) \rightarrow q(y)) \rightarrow ((\forall z)q(z)))$
   c) $(((\exists y)((\forall z)p(z)) \wedge r(z)) \vee ((\forall x)q(x)))$
5) Demonstre o princípio da indução na Lógica de Predicados.
6) Seja H uma fórmula e G uma subfórmula de H
   a) Em que condições se tem comp [G] < comp [H]
   b) Demonstre, utilizando o princípio da indução finita, que comp [G] ≤ comp [H].
7) Seja E uma fórmula e x uma variável. Responda justificando sua resposta.
   a) É possível haver ocorrências de x em E livres e ligadas?
   b) É possível a variável x ser livre e ligada em E ao mesmo tempo?
8) Dê exemplo de uma expressão H na qual uma variável x ocorre livre e ligada.
9) Responda:
   a) Existe fórmula ou expressão sem símbolo livre?
   b) Quais são os símbolos livres de uma fórmula fechada?
   c) Toda variável é símbolo livre?
10) Determine o fecho universal e existencial das fórmulas a seguir:
   a) $F_1 = p\ (x, y)$
   b) $F_2 = (\exists\ x)p(x, y)$
   c) $F_3 = (\exists\ y)(\exists\ x)p(x, y)$
11) Dê exemplos:
   a) de uma fórmula cujo fecho existencial contém apenas quantificadores universais.
   b) de uma fórmula cujo fecho universal ou existencial não contém quantificadores.
   c) de uma fórmula cujo fecho universal ou existencial é igual a ela própria.

Sugestões e soluções de exercícios selecionados

1) a) Não.
   b) Sim.
   c) Não.
3) a) $((\forall x)p(x) \vee ((\neg(\forall x)q(x)) \rightarrow r(y)))$
4) a) $(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$
5) O princípio da indução na Lógica de Predicados é um princípio da indução no comprimento das fórmulas. Considere A(n) = a asserção B[E] é verdadeira para fórmulas tais que comp[E]=n. Demonstre que neste caso o princípio da indução na lógica é apenas um caso particular da segunda forma do princípio da indução. Demonstre que

$$[\text{base-forma2} \wedge \text{passo-forma2}] \Rightarrow \forall\ n\ A(n)$$

implica

$$[\text{base-lógica-pred} \wedge \text{passo-lógica-pred}] \Rightarrow \forall\ \text{form. E}\ B[E].$$

A demonstração desta implicação equivale à demonstração de

$$\{[[\text{base-forma2} \wedge \text{passo-forma2}] \Rightarrow \forall\ n\ A(n)] \wedge [\text{base-lógica-pred} \wedge \text{passo-lógica-pred}]\} \Rightarrow \forall\ \text{fórmula E}\ B[E]$$

Para demonstrar a implicação anterior, suponha inicialmente as afirmações

$$[[\text{base-forma2} \wedge \text{passo-forma2}] \Rightarrow \forall\ n\ A(n)\ ] \text{ e}$$
$$[\text{base-lógica-pred} \wedge \text{passo-lógica-pred}]$$

e demonstre que $\forall$ fórmula E B[E]. Como $\forall$ n A(n) equivale a $\forall$ fórmula E B[E], deve se demonstrar que

$$[\text{base-lógica-pred} \wedge \text{passo-lógica-pred}] \text{ implica}$$
$$[\text{base-forma2} \wedge \text{passo-forma2}]$$

6) Seja H uma fórmula e G uma subfórmula de H
   a) Quando $G \neq H$
   b) Considere o princípio da indução na Lógica de Predicados e
   B[E] = "se G é subfórmula de H, então comp [G] $\leq$ comp [H]".
7) a) Sim. Em uma mesma fórmula x pode ocorrer no escopo de um quantificador em x, na forma ligada e também fora do escopo de quantificadores, na forma livre. Observe que uma determinada ocorrência não pode ser ligada e livre ao mesmo tempo.
   b) Sim. Neste caso basta que haja duas ocorrências de x em E, uma ligada e a outra livre.
8) $(\exists x)p(x) \vee q(x)$.
9) a) Sim. H = *false*.
   b) Os símbolos de predicado e de funções.
   c) Não. As variáveis ligadas não são símbolos livres.
10) a) Fecho universal: $(\forall x)(\forall y)p\ (x, y)$. Fecho existencial: $(\exists x)(\exists y)p(x, y)$
    b) Fecho universal: $(\forall y)(\exists x)p\ (x, y)$. Fecho existencial: $(\exists y)(\exists x)p(x, y)$
    c) Fecho universal e existencial: $(\exists\ y)(\exists\ x)p(x, y)$
11) a) $H = (\forall x)p(x)$.
    b) $H = p(a)$
    c) Qualquer fórmula fechada.

CAPÍTULO 10

útil

A semântica da Lógica de Predicados

Introdução

Após a definição da linguagem da Lógica de Predicados, ou seja, de sua sintaxe, o próximo passo é a analise da semântica. De forma análoga àquela considerada na Lógica Proposicional, é definida a seguir a semântica das fórmulas e sua relação com a sintaxe, associando significados semânticos aos símbolos sintáticos. Como a Lógica de Predicados contém quantificadores, variáveis, funções e predicados, as definições das estruturas de interpretação são mais elaboradas. Considere, por exemplo, a fórmula

$$H = (\forall x)(\exists y)p(x, y).$$

Inicialmente, para interpretar essa fórmula é necessário estabelecer o significado do símbolo de predicado p. Suponha uma interpretação I tal que I[p] = < ou seja,

$$I[p(x, y)] = T \Leftrightarrow I[x] < I[y] \Leftrightarrow x_I < y_I.$$

O símbolo p é interpretado por I como sendo o predicado semântico "menor que". Considerando também a interpretação canônica dos quantificadores $\forall$ e $\exists$, a interpretação I interpreta H como sendo

$$I[H] = \text{"para todo } x_I\text{"}, \text{"existe } y_I\text{" tal que } (x_I < y_I).$$

Ainda não é possível determinar se I[H] é verdadeiro ou falso. É necessário estabelecer que números x_I e y_I estão sendo considerados. Em outras palavras, é necessário determinar o domínio U dos números x_I e y_I. Suponha, por exemplo, que o domínio U seja dado por $U=[0,\infty)$. Neste caso, I[H] = T, pois é verdade que

$$\text{"para todo } x_I\text{"}, x_I \in [0,\infty), \text{"existe } y_I\text{"}, y_I \in [0,\infty), \text{ tal que } (x_I < y_I).$$

Portanto a interpretação I interpreta H como sendo verdadeira, quando $U = [0, \infty)$. Considere uma interpretação J cujo domínio é $Uj = (-\infty, 0]$ e J[p] = <. Neste caso, J[H]= F. Observe que a mudança do domínio faz com que a interpretação de H seja falsa. É falso que

$$\text{"para todo } x_J\text{"}, x_J \in (-\infty, 0], \text{"existe } y_J\text{"}, y_J \in (-\infty, 0] \text{ tal que } (x_J < y_J).$$

Esta afirmação é falsa pois

$$\text{se } x_J = 0, \text{ não existe } y_J \text{ tal que } y_J \in (-\infty, 0] \text{ e } (x_J < y_J).$$

Finalmente, observe que não é necessário ter os resultados das interpretações de x e y para se obter I[H] ou J[H]. Isto se deve ao fato de que x e y não são símbolos livres em H. Neste caso, é necessário definir apenas a interpretação do símbolo livre p. Considere a fórmula

$$G = (\forall x)p(x, y).$$

Neste caso, os símbolos livres de G são "p" e "y". Para determinar J[G] é necessário definir J[p] e J[y]. Considere a interpretação J, sobre o domínio $U = (-\infty, 0]$, tal que,

$$J[p] = \leq \text{ e } J[y] = -5.$$

Observe que J[G] = F, pois é falso que

$$\text{"para todo } x_J\text{"}, x_J \in (-\infty, 0], \text{ então } (x_J \leq -5).$$

Neste caso, a variável y é um símbolo livre de G, que é interpretada como sendo -5. Entretanto,

$$\text{se } y_J = 0, \text{ então } J[G] = T.$$

Considerando a análise anterior, para interpretar uma fórmula H com quantificadores é necessário observar

- domínio da interpretação,
- valor da interpretação dos símbolos livres de H.

Tais conceitos são formalizados a partir da próxima seção.

Interpretação das Variáveis, Funções e Predicados

As fórmulas da Lógica de Predicados contêm símbolos que não ocorrem nas fórmulas da Lógica Proposicional. Assim, o significado semântico destas fórmulas é obtido de uma forma diferente daquela considerada na Lógica Proposicional. Inicialmente, são consideradas as definições de interpretação de termos e átomos. Posteriormente, a interpretação das fórmulas da Lógica de Predicados é considerada.

Definição (interpretação de variáveis, funções e predicados). Seja U um conjunto não-vazio. Uma interpretação I sobre o domínio U, na lógica de predicados, é uma função tal que:

- O domínio da função I é o conjunto dos símbolos de função, de predicados e das expressões da Lógica de Predicados.
- Para toda variável x, se $I[x] = x_I$, então $x_I \in U$.
- Para todo símbolo de função f, n-ário, se $I[f] = f_I$, então f_I é uma função n-ária em U, isto é, $f_I : U^n \rightarrow U$.
- Para todo símbolo de predicado p, n-ário, se $I[p] = p_I$, então p_I é um predicado n-ário em U, isto é, $p_I : U^n \rightarrow \{T, F\}$.
- No caso em que E é uma expressão, I[E] é definida por um conjunto de regras semânticas consideradas mais adiante.

Observe que a palavra domínio é utilizada na definição anterior com dois significados diferentes. Tem-se uma interpretação sobre um "domínio" U. Neste caso, "domínio" representa o mundo semântico da interpretação. Por outro lado, o "domínio" da função I é o conjunto dos símbolos de função, de predicado e expressões. Neste caso, "domínio" se refere ao conceito matemático relativo às funções. No contexto da Lógica é comum ter um símbolo sintático com vários significados.

O domínio de uma interpretação é um conjunto não-vazio, onde se tem o resultado da interpretação dos termos da linguagem da Lógica. Em um domínio vazio não é possível dar valores aos resultados das interpretações destes termos.

Considere I como uma função. Ela tem como domínio os elementos da linguagem que são interpretados. Tais elementos são as variáveis, funções, predicados e expressões. As expressões também são interpretadas e serão consideradas mais adiante.

A interpretação de uma função zero-ária é igual à interpretação de uma constante. Neste caso, para toda constante b, se $I[b] = b_I$, então $b_I \in U$. A constante b_I é uma função zero-ária em U.

A interpretação das variáveis é feita de forma análoga. Se $I[x] = x_I$, então $x_I \in U$. Isto é, o resultado da interpretação de uma variável também é um elemento do domínio.

A interpretação de um predicado zero-ário é igual à interpretação de um símbolo proposicional. Para todo símbolo proposicional P, se $I[P] = P_I$, então $P_I \in \{T, F\}$. Observe que o caso dos símbolos proposicionais se reduz ao que ocorre na Lógica Proposicional.

A interpretação na Lógica de Predicados é uma extensão do mesmo conceito na Lógica Proposicional. Uma interpretação I é uma função definida em todos os símbolos do seu domínio. Logo, dado, por exemplo, um símbolo para função f, então necessariamente existe f_I tal que $I[f] = f_I$, onde f_I é uma função em U. Isto significa que a interpretação I possui uma "opinião formada" sobre a semântica de todos os símbolos de função, de predicados e das expressões. Em lógicas não-clássicas isto nem sempre ocorre. É possível ter I[f] indefinido, o que significa que I não possui uma "opinião formada" sobre f.

Finalmente, observe a diferença entre as interpretações de funções e predicados. Se f é um símbolo para função n-ário, $I[f] = f_I$ onde

$$f_I : U^n \rightarrow U$$

Neste caso o contradomínio de f_I é igual a U. Por outro lado se p é um símbolo para predicado n-ário, $I[p] = p_I$ onde

$$p_I : U^n \rightarrow \{T, F\}$$

Neste caso o contradomínio de p_I é igual a {T, F}. A diferença entre os contradomínios de f_I e p_I é o que caracteriza funções e predicados.

Regras Semânticas para Interpretação de Fórmulas sem Quantificadores

A seção anterior define o significado semântico de variáveis, funções e predicados. A seguir, são consideradas as regras semânticas básicas que definem a interpretação de fórmulas sem quantificadores no seu início. Estas regras definem a interpretação de expressões da lógica de predicados, que não possuem quantificadores no seu início. Analogamente ao que ocorre na Lógica Proposicional, a definição da interpretação das expressões é feita, inicialmente, a partir da definição da interpretação dos símbolos do alfabeto. Em seguida, as regras semânticas determinam procedimentos para a interpretação de fórmulas, a partir dos elementos que a constituem.

Definição (regras semânticas para interpretação de fórmulas sem quantificadores no início). Seja E uma expressão e I uma interpretação sobre o domínio U. A interpretação de E conforme I, indicada por I[E], é determinada pelas regras:

- Se E = *false*, então I[E] = I[*false*] = F.
- Se $E = f(t_1,...,t_n)$ onde $f(t_1, ..., t_n)$ é um termo, então $I[E] = I[f(t_1,...,t_n)]\ f_I(t_{1I}, ..., t_{nI})$ onde $I[f] = f_I$ e para todo termo t_i, $I[t_i] = t_{iI}$.
- Se $E = p(t_1,...,t_n)$ onde $p(t_1, ..., t_n)$ é um átomo, então $I[E] = I[p(t_1,...,t_n)] = p_I(t_{1I},...,t_{nI})$ onde $I[p] = p_I$ e para todo termo t_i, $I[t_i] = t_{iI}$.
- Se $E = \neg H$ onde H é uma fórmula, então $I[E] = I[\neg H] = T$ se $I[H] = F$ e $I[E] = I[\neg H] = F$ se $I[H] = T$.
- Se $E = H \vee G$, onde H e G são duas fórmulas, então $I[E] = I[H \vee G] = T$ se $I[H] = T$ e/ou $I[G] = T$ e $I[E] = I[H \vee G] = F$ se $I[H] = I[G] = F$.
- Os casos em que $E = (\forall x)H$ e $E = (\exists x)H$ são considerados adiante.

O conjunto de conectivos $\{\neg, \vee\}$ é completo. Logo, os outros conectivos podem ser definidos a partir deles. Neste sentido, a partir das regras semânticas acima, são deduzidas as regras semânticas para os conectivos $\wedge$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$, que são análogas àquelas definidas na Lógica Proposicional. As regras semânticas definidas acima também podem ser representadas por tabelas, como é feito na Lógica Proposicional. Tem-se, associada a cada conectivo, uma tabela verdade.

Exemplo (interpretação de expressões). Considere as fórmulas

$$H = (\neg p(x,y,a,b)) \rightarrow r(f(x), g(y)) \text{ e}$$
$$G = p(x, y,a,b) \rightarrow (q(x,y) \wedge r(y,a))$$

Considere também a interpretação I, sobre o domínio dos números inteiros $\mathbb{Z}$, tal que:

$$I[x] = 3,\ I[y] = 2,\ I[a] = 0,\ I[b] = 1,$$
$$I[p(x,y,z,w)] = T \Leftrightarrow x_I \cdot y_I > z_I \cdot w_I,$$

$$I[q(x,y)] = T \Leftrightarrow x_I < y_I,$$
$$I[r(x,y)] = T \Leftrightarrow x_I > y_I,$$
$$I[f(x)] = (x_I + 1) \text{ e } I[g(x) = (x_I - 2).$$

Na definição acima, os resultados das interpretações das variáveis possuem índice "I", isto é,

$$I[x] = x_I.$$

Deve-se enfatizar que x não é igual a x_I. O objeto x_I é o significado da variável x. Além disso, x_I pertence ao domínio U, que é igual ao conjunto dos números inteiros, e x é um elemento do alfabeto da Lógica de Predicados. A interpretação do átomo

$$p(x, y, z, w)$$

tem como resultado o valor de verdade da expressão semântica

$$(x_I \cdot y_I > z_I \cdot w_I).$$

Isto significa que

$$I[p(x, y, z, w)] = T$$

se e somente se a relação

$$(x_I \cdot y_I > z_I \cdot w_I)$$

é verdadeira. As interpretações dos outros átomos e termos seguem as mesmas convenções. Para determinar o significado semântico de H e G conforme I, isto é, I[H] e I[G], considere a tabela a seguir.

Semântica	3	2	0	1	T	4	0	F	T	T	F
Sintaxe	x	y	a	b	p(x,y,a,b)	f(x)	g(y)	q(x,y)	r(y,a)	H	G

A tabela anterior indica que

$$I[x] = 3, I[y] = 2, ..., I[H] = T \text{ e } I[G] = F.$$

Observe que os resultados das interpretações dos termos f(x) e g(y) são números inteiros e portanto elementos do domínio de I. O resultado da interpretação das fórmulas H e G e dos átomos

$$p(x, y, a, b), q(x, y) \text{ e } r(y, a)$$

são valores de verdade. Tais fatos caracterizam diferenças nas interpretações de termos e fórmulas.

Na definição de uma interpretação na Lógica de Predicados é necessário observar a coerência entre o domínio e a interpretação dos objetos sintáticos. O exemplo a seguir trata deste fato.

Exemplo (domínio de interpretação). Seja I uma interpretação sobre os naturais, tal que

$$I[a] = 25, I[b] = 5, I[f(x, y)] = (x_I \div y_I).$$

Observe que I interpreta a constante "a" como sendo 25, a constante "b" como sendo 5 e "f" como sendo a função divisão. Desta forma, f(a,b) é interpretada como sendo 5, isto é, I[f(a,b)]=5. Conforme a definição, deve se ter $I[f] = f_I$ onde

$$f_I: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}.$$

Entretanto, se I[c] = 0, então I[f(x,c)] não está definida. Logo, o domínio de f_I é igual a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^+$. Além disso, para $(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^+$, tem-se $f(x,y) \in \mathbb{Q}$, onde $\mathbb{Q}$ é o conjunto dos racionais. Portanto, neste caso

$$f_I : \mathbb{N}\times\mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{Q},$$

que é diferente da forma exigida pela definição de interpretação, dada por

$$f_I : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}.$$

Portanto, se o domínio de I é igual ao conjunto dos números naturais, não se pode definir I[f] como a função divisão. O mesmo problema ocorre se uma função g é interpretada como a raiz quadrada no domínio dos naturais. Neste caso,

$$I[g] = \sqrt{}$$

e

$$I[g(a)] = g_I(25) = 5 \in \mathbb{N},$$

mas

$$I[g(b)] = g_I(5) \notin \mathbb{N}.$$

Logo,

$$g_I : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+.$$

O contradomínio de g_I não é o conjunto dos naturais.

Regras Semânticas para Interpretação de Fórmulas com Quantificadores

Esta seção define a interpretação de fórmulas com quantificadores universais e existenciais. Na definição de interpretação de fórmulas com quantificadores é necessário o conceito de interpretação estendida analisado a seguir. Considere inicialmente um paradigma que facilita a compreensão do conceito de interpretação estendida.

O paradigma. Suponha que cada indivíduo seja associado a uma interpretação que relaciona objetos sintáticos e semânticos. Seja então I uma interpretação associada a um indivíduo, que tem opinião formada sobre os elementos de seu mundo sintático. Dadas as variáveis x e y, então I[x] e I[y] estão definidas. Suponha, por exemplo, que

$$I[x] = 5 \text{ e } I[y] = 1.$$

Isto é, o indivíduo interpreta x e y como sendo os números 5 e 1, respectivamente. Uma outra pessoa pode convencer este indivíduo que x deve ser interpretado como 7 e não como 5. O indivíduo com esta nova opinião sobre o valor semântico de x é associado a uma nova interpretação, que é indicada por

$$<x \leftarrow 7>I.$$

Nesta notação, tem-se a interpretação I mais a extensão $<x \leftarrow 7>$. Desta forma

$$<x \leftarrow 7>I[x] = 7 \text{ e } <x \leftarrow 7>I[y] = 1,$$

mesmo tendo $I[x] = 5$. Observe que o indivíduo continua interpretando y como sendo 1. Em seguida, se o indivíduo se convencer que a interpretação de x deve ser 8, a interpretação associada a ele se modifica novamente. A nova interpretação é dada por

$$<x \leftarrow 8><x \leftarrow 7>I,$$

onde

$$<x \leftarrow 8><x \leftarrow 7>I[x] = 8 \text{ e } <x \leftarrow 8><x \leftarrow 7>I[y] = 1.$$

Novamente, y continua sendo interpretada como sendo 1. Finalmente, se a interpretação de y é modificada para 4, então a interpretação associada ao indivíduo se modifica para

$$<y \leftarrow 4><x \leftarrow 8><x \leftarrow 7>I,$$

onde

$$<y \leftarrow 4><x \leftarrow 8><x \leftarrow 7>I[x] = 8 \text{ e } <y \leftarrow 4><x \leftarrow 8><x \leftarrow 7>I[y] = 4.$$

Seguindo este raciocínio, conclui-se que a extensão mais à esquerda tem precedência sobre as outras. Além disso, quando não há extensão sobre uma variável, o valor semântico original é considerado. A definição a seguir é uma formalização de tais conceitos.

Definição (interpretação estendida). Seja I uma interpretação sobre um domínio U. Considere x uma variável da Lógica de Predicados e d um elemento de U. Uma extensão de I conforme x e d é uma interpretação sobre U, denotada por $<x \leftarrow d>I$, tal que:

$$<x \leftarrow d>I[\gamma] = d \text{ se } \gamma = x \text{ e } <x \leftarrow d>I[\gamma] = I[\gamma] \text{ se } \gamma \neq x,$$

onde γ é uma variável qualquer.

Na definição anterior γ é uma variável da Lógica de Predicados. No caso em que $\gamma = x$,

$$<x \leftarrow d>I[\gamma] = <x \leftarrow d>I[x]=d.$$

Por outro lado, se $\gamma \neq x$, então

$$<x \leftarrow d>I[\gamma]=I[\gamma].$$

A interpretação estendida $<x \leftarrow d>I$ atribui a uma expressão ou a um símbolo do alfabeto da Lógica de Predicados, diferente de y o valor $I[\gamma]$ originalmente atribuído por I. Isto significa que $<x \leftarrow d>I$ é idêntica a I, exceto para a variável x, que é interpretada como d. A interpretação $< x \leftarrow d>I$ é igual a I mais a extensão $<x \leftarrow d>$. Observe que esta notação é análoga àquela que trata da composição de funções no cálculo.

Exemplo (interpretação estendida). Este exemplo considera a extensão de uma interpretação sobre o domínio dos números naturais $\mathbb{N}$, tal que

$$I[x] = 4,\ I[a] = 5,\ I[y] = 4,\ I[f] = +\ \text{e}\ I[p] = >.$$

Neste caso

$$<x \leftarrow 2>I[y] = 4,$$
$$<x \leftarrow 2>I[f] = f,$$
$$<y \leftarrow 9><x \leftarrow 2>I[x] = 2,$$
$$<x \leftarrow 7><y \leftarrow 9><x \leftarrow 2>I[y] = 9,$$
$$<x \leftarrow 7><y \leftarrow 9><x \leftarrow 2>I[x] = 7\ \text{e}$$
$$<y \leftarrow 1><x \leftarrow 7><y \leftarrow 9><x \leftarrow 2>I[y] = 1.$$

Observe que na igualdade

$$<x \leftarrow 7><y \leftarrow 9><x \leftarrow 2>I[x] = 7,$$

a extensão $<x \leftarrow 7>$ tem precedência sobre a extensão $<x \leftarrow 2>$. Isto ocorre porque a interpretação $<x \leftarrow 7><y \leftarrow 9><x \leftarrow 2>I$ é uma extensão da interpretação $<y \leftarrow 9><x \leftarrow 2>I$. O mesmo ocorre com a igualdade

$$<y \leftarrow 1><x \leftarrow 7><y \leftarrow 9><x \leftarrow 2>I[y] = 1,$$

onde a extensão$<y \leftarrow 1>$ tem precedência sobre a extensão $<y \leftarrow 9>$. Novamente, isto ocorre porque a interpretação

$$<y \leftarrow 1><x \leftarrow 7><y \leftarrow 9><x \leftarrow 2>I$$

é uma extensão da interpretação

$$<x \leftarrow 7><y \leftarrow 9><x \leftarrow 2>I.$$

A extensão mais à esquerda tem precedência sobre a extensão que ocorre mais à direita. Dada uma interpretação I sobre um domínio U, as interpretações estendidas

$$<x \leftarrow d><y \leftarrow e>I \quad \text{e} \quad <y \leftarrow e><x \leftarrow d>I$$

são equivalentes quando $x \neq y$. No caso em que $x = y$, as interpretações são equivalentes somente quando $e = d$. É considerada a seguir a definição das regras semânticas para interpretação de fórmulas com quantificadores, utilizando o conceito de extensão definido acima.

Como os quantificadores existenciais são definidos a partir dos quantificadores universais, seria possível considerar apenas a definição de interpretação de fórmulas com quantificadores universais. Entretanto, para simplificar o estudo, são definidas as interpretações de fórmulas com os dois tipos de quantificadores. Esta definição é redundante, isto é, uma parte da definição pode ser deduzida de outra.

Definição (regras semânticas para interpretação de fórmulas com quantificadores). Sejam: H uma fórmula, x uma variável e I uma interpretação sobre o domínio U. Os valores semânticos de $I[(\forall x)H]$ e $I[(\exists x)H]$ são determinadas pelas regras:

- $I[(\forall x)H] = T \Leftrightarrow$ "$\forall$" $d \in U$, $<x \leftarrow d>I[H] = T$
- $I[(\forall x)H] = F \Leftrightarrow$ "$\exists$" $d \in U$; $<x \leftarrow d>I[H] = F$
- $I[(\exists x)H] = T \Leftrightarrow$ "$\exists$" $d \in U$; $<x \leftarrow d>I[H] = T$
- $I[(\exists x)H] = F \Leftrightarrow$ "$\forall$" $d \in U$, $<x \leftarrow d>I[H] = F$

Nas regras semânticas para interpretação de fórmulas com quantificadores há uma diferença entre os símbolos $\forall$ e "$\forall$". O primeiro é um conectivo do alfabeto da Lógica de Predicados sendo portanto um símbolo sintático. Por outro lado, "$\forall$" é um símbolo semântico que significa "para todo" e está quantificado sobre objetos semânticos. O símbolo "$\forall$" se refere a elementos do domínio U que são objetos semânticos. Da mesma forma, $\exists$ é um símbolo sintático definido a partir de símbolos do alfabeto. O símbolo "$\exists$" é semântico e significa "existe". No que se segue, os símbolos "$\forall$" e "$\exists$" serão indicados apenas por $\forall$ e $\exists$, respectivamente. Entretanto, é necessário estar ciente de suas diferenças.

Na definição anterior, $I[(\forall x)H] = T$ equivale dizer que para qualquer interpretação da variável x em H, a fórmula H é interpretada como sendo verdadeira. Isto é expresso considerando a extensão da interpretação I. Assim, quando d assume qualquer valor no domínio U, a interpretação $<x \leftarrow d>I$ interpreta x como sendo qualquer valor em U. Logo, as afirmações a seguir são equivalentes.

- Para qualquer interpretação da variável x em H, a fórmula H é interpretada como sendo verdadeira.
- $\forall\, d \in U$, $<x \leftarrow d>I[H] = T$.

$I[(\exists x)H] = T$ equivale dizer que existe um valor para a interpretação de x em H, tal que H é interpretada como sendo verdadeira. A existência deste valor é expressa por:

$$\exists\, d \in U \text{ tal que } <x \leftarrow d>I[H] = T.$$

Observe que neste caso,

$$<x \leftarrow d>I[x] = d,$$

ou seja, x é interpretada como sendo d. Na definição anterior,

$$I[(\forall x)H] = F$$

equivale dizer que é falso que para toda interpretação de x em H, a fórmula é interpretada como sendo verdadeira. Em outras palavras, existe pelo menos uma interpretação de x tal que H é interpretada por I como sendo falsa. Tais fatos são expressos por

$$\exists\, d \in U, <x \leftarrow d>I[H] = F.$$

Neste caso, quando x é interpretado por I como sendo d, H é interpretado como sendo F. Finalmente,

$$I[(\exists x)H] = F$$

equivale dizer que é falso que existe alguma interpretação para x em H, tal que H possa ser interpretada como sendo verdadeira. Isto significa que para toda interpretação de x em H, a fórmula H é interpretada como sendo falsa, o que é expresso por:

$$\forall\ d \in U;\ \langle x \leftarrow d\rangle I[H] = F$$

Exemplo (interpretação de fórmulas com quantificadores). Este exemplo considera a interpretação de fórmulas com quantificadores. Seja I uma interpretação sobre o conjunto aluno-CC, que denota os alunos de Ciência da Computação. Suponha que

$$I[p(x)] = T \Leftrightarrow x_1 \text{ é inteligente.}$$

Considere $H_1 = (\forall x)p(x)$. Neste caso, $I[H] = T$ significa dizer que todo aluno de Ciência da Computação é inteligente. Mas,

$$\begin{aligned} I[H_1] = T &\Leftrightarrow I[(\forall x)p(x)] = T \\ &\Leftrightarrow \forall\ d \in \text{aluno-CC, } d \text{ é inteligente} \\ &\Leftrightarrow \forall\ d \in \text{aluno-CC, } p_I(d) = T \\ &\Leftrightarrow \forall\ d \in \text{aluno-CC, } \langle x \leftarrow d\rangle I[p(x)] = T \end{aligned}$$

Portanto, dizer que todo aluno de Ciência da Computação é inteligente equivale dizer

$$\forall\ d \in \text{aluno-CC, } \langle x \leftarrow d\rangle I[p(x)] = T$$

ou seja,

$\forall\ d \in$ aluno-CC, se x é interpretado como d, então p(x) é interpretado como T.

O caso $I[H_1] = F$ significa dizer que é falso que todo aluno de Ciência da Computação é inteligente. Isto significa que existe algum aluno idiota. Mas,

$$\begin{aligned} I[H_1] = F &\Leftrightarrow I[(\forall x)p(x)] = F \\ &\Leftrightarrow \exists\ d \in \text{aluno-CC, } d \text{ é idiota} \\ &\Leftrightarrow \exists\ d \in \text{aluno-CC, } p_I(d) = F \\ &\Leftrightarrow \exists\ d \in \text{aluno-CC, } \langle x \leftarrow d\rangle I[p(x)] = F \end{aligned}$$

Portanto, dizer que é falso que todo aluno de Ciência da Computação é inteligente equivale dizer

$$\exists\ d \in \text{aluno-CC, } \langle x \leftarrow d\rangle I[p(x)] = F$$

ou seja,

$\exists\ d \in$ aluno-CC; se x é interpretado como d, então p(x) é interpretado como F.

Considere $H_2 = (\exists x)p(x)$. Neste caso, $I[H_2] = T$ significa dizer que existe aluno de Ciência da Computação que é inteligente. Mas,

$$\begin{aligned} I[H_2] = T &\Leftrightarrow I[(\exists x)p(x)] = T \\ &\Leftrightarrow \exists\, d \in \text{aluno-CC};\ d \text{ é inteligente} \\ &\Leftrightarrow \exists\, d \in \text{aluno-CC};\ p_I(d) = T \\ &\Leftrightarrow \exists\, d \in \text{aluno-CC};\ \langle x \leftarrow d\rangle I[p(x)] = T \end{aligned}$$

Portanto, dizer que existe aluno de Ciência da Computação que é inteligente equivale dizer

$$\exists\, d \in \text{aluno-CC};\ \langle x \leftarrow d\rangle I[p(x)] = T$$

ou seja,

$\exists\, d \in$ aluno-CC tal que se x é interpretado como d, então
p(x) é interpretado como T.

O caso $I[H_2] = F$ significa dizer que é falso que existe aluno de Ciência da Computação que é inteligente. Isto significa que é falso que existe aluno inteligente ou seja, todo aluno é idiota. Mas,

$$\begin{aligned} I[H_2] = F &\Leftrightarrow I[(\exists x)p(x)] = F \\ &\Leftrightarrow \forall\, d \in \text{aluno-CC},\ d \text{ é idiota} \\ &\Leftrightarrow \forall\, d \in \text{aluno-CC},\ p_I(d) = F \\ &\Leftrightarrow \forall\, d \in \text{aluno-CC},\ \langle x \leftarrow d\rangle I[p(x)] = F \end{aligned}$$

Portanto, dizer que é falso que existe aluno de Ciência da Computação que é inteligente equivale dizer

$$\forall\, d \in \text{aluno-CC},\ \langle x \leftarrow d\rangle I[p(x)] = F$$

ou seja,

$\forall\, d \in$ aluno-CC; se x é interpretado como d, então
p(x) é interpretado como F
$\forall\, d \in$ aluno-CC; se x é interpretado como d, x_1 é idiota.

Exemplo (interpretação de fórmulas com quantificadores). Este exemplo considera a interpretação de fórmula com quantificadores. Seja I uma interpretação sobre o domínio dos números naturais $\mathbb{N}$, tal que

$$I[x] = 3,\ I[a] = 5,\ I[y] = 4,\ I[f] = +\ \text{e}\ I[p] = <.$$

a) Considere a fórmula

$$G = (\forall x)p(x,y).$$

Informalmente, considerando a interpretação I, I[G] = F pois I[G] equivale à afirmação

"Para todo número natural x, x < 4".

Evidentemente, esta afirmação é falsa, ou seja, deve-se ter I[G] = F. A demonstração deste fato é dada a seguir:

$$\begin{aligned} I[G] = F &\Leftrightarrow I[(\forall x)p(x, y)] = F \\ &\Leftrightarrow \exists\, d \in \mathbb{N};\ \langle x \leftarrow d\rangle I[p(x, y)] = F \\ &\Leftrightarrow \exists\, d \in \mathbb{N};\ d < 4 \text{ é falso.} \end{aligned}$$

A última afirmação,

$$\text{“}\exists\, d \in \mathbb{N};\ d < 4 \text{ é falso”},$$

é verdadeira, pois existe um numero natural tal que $d < 4$ é falso. No caso em que $d = 7$, por exemplo, tem-se que $d < 4$ é falso. Logo, como a última afirmação é verdadeira, então a afirmação equivalente, $I[G] = F$, também é verdadeira. Isto significa que a interpretação de G segundo I é falsa. Observe que na interpretação G não é necessário utilizar que $I[x] = 3$. Quando a fórmula

$$(\forall x)p(x, y)$$

é interpretada por I, é utilizada a interpretação estendida $<x \leftarrow d>I$. Neste caso, o valor de $I[x]$ não é utilizado, pois $<x \leftarrow d>I[x] = d$.

b) Seja a fórmula

$$E = (\forall x)(\exists y)p(x, y).$$

Informalmente, $I[E]$ significa para todo número natural x, existe outro natural y tal que $x < y$. Essa afirmação é verdadeira, logo $I[E] = T$. A demonstração deste fato é dada a seguir:

$$\begin{aligned} I[E] = T &\Leftrightarrow I[(\forall x)(\exists y)p(x, y)] = T \\ &\Leftrightarrow \forall\, d \in \mathbb{N}, <x \leftarrow d>I[(\exists y)p(x, y)] = T \\ &\Leftrightarrow \forall\, d \in \mathbb{N}, \exists\, c \in \mathbb{N};\ <y \leftarrow c><x \leftarrow d>I[p(x, y)] = T \\ &\Leftrightarrow \forall\, d \in \mathbb{N}, \exists\, c \in \mathbb{N};\ d < c \text{ é verdadeiro.} \end{aligned}$$

Novamente, a última afirmação,

$$\text{“}\forall\, d \in \mathbb{N}, \exists\, c \in \mathbb{N};\ d < c \text{ é verdadeiro”}$$

é uma afirmação verdadeira pois para todo número natural d, existe um outro número natural c tal que $d < c$ é verdadeiro. Isso ocorre porque não existe um número natural maior que todos os outros. Como a última afirmação é verdadeira, então a afirmação equivalente $I[E] = T$ também é verdadeira. Observe o que ocorre quando se supõe que $I[E] = F$.

$$\begin{aligned} I[E] = F &\Leftrightarrow I[(\forall x)(\exists y)p(x, y)] = F \\ &\Leftrightarrow \exists\, d \in \mathbb{N}, <x \leftarrow d>I[(\exists y)p(x, y)] = F \\ &\Leftrightarrow \exists\, d \in \mathbb{N}, \forall\, c \in \mathbb{N};\ <y \leftarrow c><x \leftarrow d>I[p(x, y)] = F \\ &\Leftrightarrow \exists\, d \in \mathbb{N}, \forall\, c \in \mathbb{N};\ d < c \text{ é falso} \\ &\Leftrightarrow \exists\, d \in \mathbb{N}, \forall\, c \in \mathbb{N};\ d \geq c \text{ é verdadeiro} \end{aligned}$$

Neste caso, a última afirmação

$$\text{“}\exists\, d \in \mathbb{N}, \forall\, c \in \mathbb{N};\ d \geq c \text{ é verdadeiro”}$$

é falsa pois é falso que existe um número natural d, que é maior que todos os outros naturais. Caso esta afirmação fosse verdadeira, então existiria um número natural d

maior ou igual a todos os outros números naturais. Portanto, como a última afirmação é falsa, então é falso que I[E] = F. Conclui-se que I[E] = T. Observe a colocação das extensões no desenvolvimento anterior. Inicialmente, tem-se

$$I[(\forall x)(\exists y)p(x, y)] = F \Leftrightarrow \exists\, d \in \mathbb{N}, <x \leftarrow d>I[(\exists y)p(x, y)] = F.$$

Nesta equivalência, é considerado o primeiro quantificador da fórmula

$$(\forall x)(\exists y)p(x, y)$$

e a definição

$$I[(\forall x)H] = F$$

é utilizada. Neste caso, a fórmula H da definição é igual a

$$(\exists y)p(x, y).$$

Em seguida tem-se a equivalência

$$\exists\, d \in \mathbb{N}; <x \leftarrow d>I[(\exists y)p(x,y)] = F \Leftrightarrow \exists\, d \in \mathbb{N}, \forall\, c \in \mathbb{N};$$
$$<y \leftarrow c><x \leftarrow d>I[p(x,y)] = F.$$

Esta equivalência é obtida considerando

$$<x \leftarrow d>I[(\exists y)p(x,y)] = F$$

e a definição para

$$I[(\exists y)H] = F.$$

Neste caso, é considerada a interpretação I (na definição) como sendo $<x \leftarrow d>I$ e a fórmula H (na definição) como sendo p(x, y). Assim, a extensão correspondente a $(\exists y)$ é colocada à esquerda da extensão $<x \leftarrow d>$, sendo obtida a interpretação

$$<y \leftarrow c><x \leftarrow d>I.$$

Observe que a ordem das extensões obtidas no desenvolvimento das equivalências é o inverso da ordem dos quantificadores sintáticos na fórmula. Por outro lado, a ordem dos quantificadores semânticos é a mesma dos quantificadores sintáticos.

Além disso, na interpretação da fórmula E acima não é necessário utilizar que I[x] = 3 e I[y] = 4, pois as ocorrências de x e y em E são ligadas. Neste caso, quando

$$(\forall x)(\exists y)p(x, y)$$

é interpretada por I, é utilizada a interpretação estendida $<y \leftarrow c><x \leftarrow d>I$ e os valores de I[x] e I[y] não são utilizados, pois

$$<y \leftarrow c><x \leftarrow d>I[x] = d \text{ e } <y \leftarrow c><x \leftarrow d>I[y] = c.$$

c) Considere a fórmula $E_1 = E \wedge G$, onde E e G são as fórmulas anteriores. Neste caso, utilizando a regra semântica para o conectivo $\wedge$, tem-se

$$I[E_1] = F, \text{ pois } I[G] = F \text{ e } I[E] = T.$$

Na interpretação de E_1 são utilizadas inicialmente as regras semânticas para os quantificadores e são obtidos os resultados de I[E] e I[G]. Em seguida, utilizando a regra semântica para o conectivo $\wedge$ é determinado $I[E_1]$.

As fórmulas apresentadas neste exemplo não contêm os símbolos "f" e "a". Logo, não é necessário utilizar as interpretações destes símbolos na interpretação destas fórmulas. Isto é, não se utiliza que I[f] = + e I[a] = 5, para interpretar as fórmulas E e G.

Exemplo (interpretação de fórmula com quantificador). Seja I uma interpretação sobre o domínio U dos números racionais $\mathbb{Q}^*$, diferentes de zero, tal que

$$I[a] = 1,\ I[b] = 25,\ I[x] = 13,\ I[y] = 77,\ I[f] = \div,\ I[p] = <.$$

Observe que a função divisão, que é o resultado da interpretação de f, I[f] = ÷, pode ser definida no conjunto dos racionais diferentes de zero. Neste sentido, a interpretação I está corretamente definida.

a) Dada a fórmula $H_1 = (\forall x)p(x, y)$, então

$$I[H_1] = T \Leftrightarrow I[(\forall x)p(x, y)] = T \Leftrightarrow \forall\, d \in \mathbb{Q}, <x \leftarrow d>I[p(x, y)] = T$$
$$\Leftrightarrow \forall\, d \in \mathbb{Q}, d < 77 \text{ é verdadeiro.}$$

Neste caso, a afirmação

"$\forall\, d \in \mathbb{Q}$, d < 77 é verdadeiro"

é falsa pois é possível escolher d = 80 e neste caso, d < 77 é falso. Uma outra forma de analisar esta afirmação é escrevê-la na forma equivalente

"d < 77 é verdadeiro $\forall\, d \in \mathbb{Q}$"

onde o quantificador semântico $\forall$ é escrito no final. Novamente a afirmação é falsa pois não é o caso que "d < 77 é verdadeiro" para qualquer número racional.

Portanto, como a afirmação final é falsa, a suposição inicial $I[H_1] = T$ também é falsa. Conclui-se que $I\,[H_1] = F$. O desenvolvimento a seguir supõe inicialmente a interpretação de H_1 como sendo falsa.

$$I[H_1] = F \Leftrightarrow I[(\forall x)p(x, y)] = F \Leftrightarrow \exists\, d \in \mathbb{Q}; <x \leftarrow d>I[p(x, y)] = F$$
$$\Leftrightarrow \exists\, d \in \mathbb{Q}, d < 77 \text{ é falso.}$$

Neste caso, a afirmação

"$\exists\, d \in \mathbb{Q}$, d < 77 é falso"

é verdadeira pois é possível escolher d = 80 e neste caso, d < 77 é falso. A forma equivalente desta afirmação é

"d < 77 é falso para algum $d \in \mathbb{Q}$",

que também é verdadeira. Considerando inicialmente $I[H_1]$=F é obtida uma afirmação final verdadeira. Portanto é verdadeiro que $I[H_1]$=F.

b) Dada a fórmula $H_2 = (\exists x)p(x, y)$, então

$$I[H_2] = T \Leftrightarrow I[(\exists x)p(x, y)] = T \Leftrightarrow \exists\, d \in \mathbb{Q}; <x \leftarrow d>I[p(x, y)] = T$$
$$\Leftrightarrow \exists\, d \in \mathbb{Q}, d < 77 \text{ é verdadeiro.}$$

Neste caso, as afirmações equivalentes

"$\exists$ d $\in \mathbb{Q}$, d < 77 é verdadeiro" e
"d < 77 é verdadeiro para algum d $\in \mathbb{Q}$",

são verdadeiras pois é possível escolher d = 60 e neste caso, d < 77 é verdadeiro. Portanto, como a afirmação final é verdadeira, a suposição inicial $I[H_2] = T$ também é verdadeira. O desenvolvimento a seguir supõe inicialmente a interpretação de H_2 como sendo falsa.

$$I[H_2] = F \Leftrightarrow I[(\exists x)p(x,y)] = F \Leftrightarrow \forall\, d \in \mathbb{Q};\ \langle x \leftarrow d\rangle I[p(x, y)] = F$$
$$\Leftrightarrow \forall\, d \in \mathbb{Q},\ d < 77 \text{ é falso.}$$

Neste caso, as afirmações equivalentes

"$\forall$ d $\in \mathbb{Q}$, d < 77 é falso" e
"d < 77 é falso $\forall$ d $\in \mathbb{Q}$"

são falsas pois é possível escolher d = 70 e, neste caso, d < 77 é verdadeiro. Considerando inicialmente $I[H_2]$=F é obtida uma afirmação final falsa. Portanto é falso que $I[H_2]$=F, logo é verdadeiro que $I[H_2]$=T.

c) Considere a fórmula

$$G = (\forall x)(\exists y)p(x, y) \rightarrow p(b, f(a, b)).$$

Demonstra-se que I[G] = T. Suponha por absurdo que I[G] = F. Mas,

$$I[G] = F \quad \Leftrightarrow I[(\forall x)(\exists y)p(x, y) \rightarrow p(b,f(a, b))] = F$$
$$\Leftrightarrow I[(\forall x)(\exists y)p(x, y)] = T \text{ e } I[p(b,f(a, b))] = F$$

Observe que I[p(b,f(a,b))] equivale à afirmação "25 < (1 ÷ 25)", que é falsa. Por outro lado,

$$I[(\forall x)(\exists y)p(x, y)] = T \Leftrightarrow \forall\, d \in \mathbb{Q},\ \langle x \leftarrow d\rangle I[(\exists y)p(x, y)] = T$$
$$\Leftrightarrow \forall\, d \in \mathbb{Q}, \exists\, c \in \mathbb{Q},\ \langle y \leftarrow c\rangle\langle x \leftarrow d\rangle I[p(x, y)] = T$$
$$\Leftrightarrow \forall\, d \in \mathbb{Q}, \exists\, c \in \mathbb{Q};\ d < c \text{ é verdadeiro.}$$

Como a última afirmação é verdadeira, então

$$I[(\forall x)(\exists y)p(x,y)] = T.$$

Mas, como

$$I[(\forall x)(\exists y)p(x, y)] = T \text{ e } I[p(b, f(a, b))] = F,$$

conclui-se que I [G]=F. Nesta demonstração não se utiliza que I[x] = 13 e I[y] = 77, pois x e y ocorrem ligadas em G.

d) Considere a fórmula

$$H = (\forall x)(\exists y)p(x, y) \rightarrow p(f(a, b),b)).$$

Demonstra-se que I[H] = T. Suponha por absurdo que I [H] = F. Mas,

$$I[H] = F \Leftrightarrow I[(\forall x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow p(f(a, b),b)] = F$$
$$\Leftrightarrow I[(\forall x)(\exists y)p(x,y)] = T \text{ e } I[p(f(a, b),b)] = F$$

Como foi demonstrado anteriormente,

$$I[(\forall x)(\exists y)p(x, y) = T.$$

Por outro lado

$$I[p(f(a, b),b)] \text{ equivale a } (1 \div 25) < 25,$$

o que é verdadeiro, contradizendo $I[p(f(a, b),b)] = F$. Portanto, $I[H] = T$.

e) Considere a fórmula

$$H_3 = (\forall x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow p(x, y).$$

Neste caso, como há concorrências livres de x e y em H_3, para se calcular $I[H_3]$ é necessário utilizar os valores das interpretações $I[x]$ e $I[y]$ dadas por $I[x] = 13$ e $I[y] = 77$. Neste caso, $I[p(x, y)] = T$ e $I[H_3] = T$.

f) Considere a fórmula

$$H_4 = (\forall x)((\exists y)p(x, y) \rightarrow p(x, y)).$$

Neste caso, apenas a variável y ocorre livre. Logo, para se calcular $I[H_4]$, é necessário utilizar que $I[y] = 77$. $I[H_2] = F$ como é demonstrado a seguir.

$$I[H_4] = F \Leftrightarrow I[(\forall x)(\exists y)p(x, y) \rightarrow p(x, y))] = F$$
$$\Leftrightarrow \exists\, d \in \mathbb{Q} <x \leftarrow d>I[(\exists y)p(x, y) \rightarrow p(x, y)] = F$$
$$\Leftrightarrow \exists\, d \in \mathbb{Q}, <x \leftarrow d>I[(\exists y)p(x, y)] = T \text{ e } <x \leftarrow d>I[p(x, y)] = F$$
$$\Leftrightarrow \exists\, d \in \mathbb{Q}, \exists\, c \in \mathbb{Q}, <y \leftarrow c><x \leftarrow d>I[p(x,y)] = T \text{ e}$$
$$\Leftrightarrow <x \leftarrow d>I[p(x, y)] = F$$
$$\Leftrightarrow \exists\, d \in \mathbb{Q}, \exists\, c \in \mathbb{Q}, (d < c) \text{ é verdadeiro e } (d < 77) \text{ é falso.}$$

A última afirmação é verdadeira. Basta considerar $d = 100$ $c = 200$. Neste caso, existem, no conjunto dos números racionais, valores "c" e "d" tais que "d" é menor que "c" e "d" não é menor que 77.

g) Considere a fórmula

$$E = (\forall x)(\exists y)p(x, y) \rightarrow p(f(a, b),x).$$

Neste caso, para qualquer valor x_I tal que $(1 \div 25) < x_I$, tem-se que

$$I[p(f(a, b),x)] = T \text{ e } I[E] = T$$

Suponha por absurdo que $I[E] = F$.

$$I[E] = F \Leftrightarrow I[(\forall x)(\exists y)p(x, y) \rightarrow p(f(a, b),x)] = F$$
$$\Leftrightarrow I[(\forall x)(\exists y)p(x, y)] = T \text{ e } I[p(f(a, b),x)] = F$$

Como foi demonstrado anteriormente,

$$I[(\forall x)(\exists y)p(x,y)] = T.$$

Por outro lado

$$I[p(f(a,b),x)] \text{ equivale a } (1 \div 25) < x_I.$$

Portanto nos casos em que $(1 \div 25) < x_I$, $I[p(f(a,b),x)] = T$ o que contradiz a afirmação $I[p(f(a,b),x) = F$. Portanto, $I[E] = T$. Nos casos em que $(1 \div 25) \geq x_I$. $I[E] = F$.

Observação. Não existe uma padronização da definição da semântica na Lógica de Predicados. Freqüentemente, é definida uma estrutura na qual as variáveis são interpretadas separadamente dos outros objetos que compõem as fórmulas como pode ser visto em [Enderton, 1972] e [Shoenfield, 1967]. Este enfoque é diferente deste considerado neste livro, onde os objetos que compõem as fórmulas são interpretados pela mesma estrutura denominada interpretação. Entretanto, mesmo não havendo padronização das definições, todas são equivalentes e têm como fundamento as formalizações de Tarski, que tratam de satisfatibilidade e verdade.

Representação de sentenças na lógica de predicados

Considere a sentença:

Todo homem é mortal.

Para representar esta sentença na lógica de predicado é necessário definir inicialmente uma interpretação I sobre o domínio dos homens e um predicado p(x) tal que x

$$I[p(x)] = T \Leftrightarrow x_I \text{ é mortal}$$

Neste caso a senteça é representada pela fórmula

$$(\forall x)\ p(x)$$

A mesma sentença pode ser representada por outra fórmula.

Considere a interpretação J sobre o domínio de todos os objetos da Terra e os predicados q(x) e p(x) tais que

$$J[p(x)] = T \Leftrightarrow x_j \text{ é mortal}$$
$$J[q(x)]\ [\ T \Leftarrow x_j \text{ é homem}$$

Neste caso, a sentença é representada pela fórmula

$$(\forall x)(q(x) \rightarrow p(x))$$

Observe que a mudança da interpretação modifica a representação na lógica de predicados da sentença.

Todo homem é mortal

Isto significa que as representações de sentenças por fórmulas não são únicas.

Exercícios

1) Seja I uma interpretação sobre os números naturais $\mathbb{N}$, tal que $I[a] = 1$, $I[x] = 1$, $I[p] = <$, $I[f] = f_I$ onde $f_I(d) = d + 1$, $I[q(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é par. Além disso, o valor de $I[y]$ é desconhecido.

Seja J uma interpretação sobre os números inteiros $\mathbb{Z}$, tal que:
$J[a] = 0, J[x] = -1, J[y] = 0, J[p] = <$ e $J[f] = f_J$ onde $f_J(d) = d + 1$.
Determine, quando for possível, as interpretações das fórmulas a seguir conforme I e J.

a) $p(x,a)$
b) $p(x,a) \wedge p(x,f(x))$
c) $(\exists y)p(y,x)$
d) $(\forall y)(p(y,a) \vee p(f(y),y))$
e) $(\forall x)(\exists y)p(x,y)$
f) $(\exists y)(\forall x)p(x,y)$
g) $(\forall x)(\exists x)q(x)$
h) $(\exists x)(\forall x)q(x)$

2) Seja I uma interpretação sobre o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, tal que $I[a] = 5$, $I[b] = 3$, $I[x] = 7$, $I[p(x)] = T \Leftrightarrow x_I < 9$, $I[r(x)] = T \Leftrightarrow x_I > 4$, $I[q(x)] = T \Leftrightarrow x_I = 7$.
Determine o resultado da interpretação de cada uma das fórmulas a seguir segundo I.

a) $(\exists x)(p(x) \rightarrow (\exists x)r(x)) \leftrightarrow ((\forall x)p(x) \rightarrow (\exists x)r(x))$
b) $(\forall x)(p(x) \rightarrow (\forall z)r(x)) \leftrightarrow ((\forall x)p(x) \vee (\forall x)r(x))$
c) $((\forall x)p(x) \vee (\forall z)(\forall x)r(x)) \rightarrow (\forall x)(p(x) \vee (\exists x)r(x))$
d) $(\exists z)(p(x) \leftrightarrow r(x)) \leftrightarrow ((\exists x)p(x) \leftrightarrow (\exists x)r(x))$
e) $(\exists z)(p(x) \rightarrow (\exists x)p(a)) \vee (p(x) \rightarrow (\forall x)p(b))$
f) $(p(x) \wedge q(x)) \leftrightarrow (\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$
g) $(\exists x)(p(x) \rightarrow (\exists x)r(x)) \leftrightarrow ((\forall x)p(x) \rightarrow (\exists x)r(b))$
h) $((\exists x)p(x) \rightarrow r(b)) \leftrightarrow ((\forall x)p(x) \rightarrow r(b))$

3) Sejam H e G as duas fórmulas a seguir. Nestas fórmulas $x_1, \ldots, x_8$ são as únicas variáveis que ocorrem em $H_1, \ldots, H_8$ respectivamente. Demonstre que se $I[H] = F$, então $I[G] = F$.

$H = (\exists x_1)H_1 \rightarrow ((\exists x_2)H_2 \rightarrow ((\exists x_3)H_3 \rightarrow ((\exists x_4)H_4 \rightarrow ((\exists x_5)H_5 \rightarrow ((\exists x_6)H_6 \rightarrow ((\exists x_7)H_7 \rightarrow ((\exists x_8)H_8)))))))$
$G = (\forall *)((H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \wedge H_4 \wedge H_5 \wedge H_6 \wedge H_7) \rightarrow H_8)$

4) Sejam I e J interpretações sobre o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, tais que:
$I[p(x,y,z,w)] = T \Leftrightarrow x_I + y_I > z_I + w_I$, $I[z] = 5, I[a] = 2, I[b] = 7, I[w] = 9$,
$J[p(x,y,z,w)] = T \Leftrightarrow x_I + y_I < z_I + w_I$, $J[z] = 5, J[a] = 2, J[b] = 7, J[w] = 9, J[y] = 8$
Considere a fórmula $E = (\forall x)(\exists y)p(x,y,z,w) \rightarrow (\forall z)\, p(z,b,y,x)$

a) Caso seja possível, determine I[E] e J[E]. Justifique sua resposta.
b) No caso em que não é possível determinar o resultado da interpretação, defina uma extensão da interpretação a partir da qual é possível determinar o resultado pretendido.

5) Se possível, determine interpretações que interpretam as fórmulas a seguir como verdadeiras e como falsas. Justifique suas respostas.

a) $(\forall x)(\exists y)p(x,y,z) \rightarrow (\exists y)(\forall z)p(x,y,z)$
b) $(\forall x)p(x) \leftrightarrow (\exists y)q(y)$
c) $(\forall x)(\forall x)p(x,y) \rightarrow (\exists y)q(z)$

6) a) Quais os resultados informais das interpretações de H_1, H_2 e H_3, onde I é uma interpretação sobre o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, tal que:
$I[a] = 0, I[q(x,y)] = T \Leftrightarrow x_I < y_I$, $I[p(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é um número primo, $I[r] =$ "=" (r é interpretado como a igualdade) e $I[f] = *$ (f é interpretada como o produto).
$H_1 = (\forall x)(\exists y)(q(x,y) \wedge p(y))$
$H_2 = (\forall x)(q(a,x) \rightarrow (\exists z)r(f(z,z),x))$
$H_3 = (\forall x)(\forall y)(\neg r(x,a) \rightarrow (\exists z)r(f(x,z),y))$

b) Quais os resultados informais das interpretações de H_1, H_2 e H_3, onde I é uma interpretação sobre o domínio U dos alunos de Ciências da Computação, tal que:
$I[p(x,y)] = T \Leftrightarrow x_I$ ama y_I , $I[q(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ morreu de AIDS.
$H_1 = (\exists y)(\forall x)p(x,y) \rightarrow (\forall y)(\exists x)p(x,y)$
$H_2 = (\exists x)(\forall y)\neg p(x,y)$
$H_3 = (\forall *)(p(x,y) \rightarrow (p(y,z) \rightarrow (p(z,w) \rightarrow q(w))))$

c) Quais os resultados informais das interpretações de H_1, H_2 e H_3, onde I é uma interpretação sobre o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, tal que:
$I[p(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é um número par, $I[q(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é um número ímpar,
$I[f(x,y)] = x_I + y_I$.
$H_1 = (\forall x)(\forall y)((p(x) \wedge p(y)) \rightarrow p(f(x,y)))$
$H_2 = (\forall x)(\forall y)((p(x) \wedge q(y)) \rightarrow q(f(x,y)))$
$H_3 = (\forall x)(\forall y)((p(x) \wedge q(y)) \rightarrow p(f(x,y)))$

d) Qual o resultado informal da interpretação de H onde I é uma interpretação sobre o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ tal que:
$I[p(x,y)] = T \Leftrightarrow x_I = y_I$, $I[f] = +$, $I[a] = 1$.
$H = (\forall x)(\exists y)(p(x,f(y,y)) \vee p(x,f(f(y,y),a)))$

7) Utilize as regras semânticas para quantificadores e desenvolva as afirmações a seguir:
a) $I[(\forall x)(\forall y)H] = T$
b) $I[(\forall x)(\forall y)H] = F$
c) $I[(\forall x)(\exists y)H] = T$
d) $I[(\forall x)(\exists y)H] = F$
e) $I[(\exists x)(\forall y)H] = T$
f) $I[(\exists x)(\forall y)H] = F$

8) Sejam I e J duas interpretações sobre os naturais $\mathbb{N}$, tais que
$I[p] = J[p] = \leq$, $I[y] = J[y] = 4$, $I[x] = 0$, $J[x] = 9$. Demonstre que:
a) $I[p(x,y)] \neq J[p(x,y)]$
b) $I[(\forall x)p(x,y)] = J[(\forall x)p(x,y)]$
c) $I[(\forall y)p(x,y)] \neq J[(\forall y)p(x,y)]$

9) Traduza as sentenças a seguir para fórmulas da Lógica de Predicados.
a) Uma condição necessária e suficiente para que um indivíduo seja produtivo é que ele seja esforçado, trabalhe muito e tenha inspirações.
b) Todo homem prefere as mulheres bonitas, inteligentes e sensíveis, como Rosa. É por isso que o professor Sérgio prefere sua amada Rosa.
c) As filhas do professor Pedro são lindas e meigas.
d) As filhas do professor Ilmério são lindas e inteligentes e todos os rapazes da Computação querem namorá-las.
e) Nem todo pássaro voa.
f) Todo político é desonesto.
g) Se toda panela tem seu "terço", toda pessoa tem seu amado (obs. esta é uma expressão nordestina).
h) Toda pessoa ama alguém, mas não existe ninguém que ame todas.
i) Se existe um barbeiro na cidade que não barbeia a quem se barbeia a si próprio, então não existe alguém para barbear o barbeiro.
j) Não existe conjunto que contém a si próprio.
k) Todo macaco tem seu galho.
l) Toda pessoa que com ferro fere com ferro será ferida.

m) De nada vale a vida de um homem que vive a vida envolvida na vida de uma mulher da vida.
n) Quem não se ama não ama ninguém.
o) Toda Patricinha de Uberlândia, que vai ao shopping tem celular, pele lisa e cheiro de alface.
p) Patricinha de Uberlândia não gosta de Patricinha de Uberaba.
q) Nenhuma Patricinha no shopping usa tênis kichute.
r) Todo irmão do pai de Pedro é seu tio.
s) Pedro tem um tio que é mais novo que seu irmão e mora em Israel.
t) Jamil admira a irmã do cunhado de seu tio, que mora no Líbano.
u) Rispoli admira o neto de seu neto, mas nem conhece o neto de seu filho.
v) Os irmãos de Cláudio são gaúchos e torcem pelo Grêmio como ele.
w) Faina e Cláudio são amigos. Mas nem todo amigo de Faina é amigo de Cláudio e vice-versa.
x) Autran é um bom pai e ama todos os seus filhos.
y) Os filhos de Ana são os filhos de Nicolau. Ana ama seus filhos. Márcio é filho de Nicolau. Portanto, Ana ama Márcio.

10) Caso seja possível, escreva as sentenças a seguir utilizando a linguagem da Lógica de Predicados. Na impossibilidade, justifique. Observe que este exercício foi proposto no contexto da Lógica Proposicional.
a) Todo homem é mortal.
b) Possivelmente, irei ao cinema.
c) Fui gordo, hoje sou magro.
d) Existe no curso de Ciência da Computação um aluno admirado por todos.
e) Existe um aluno em minha sala que não gosta de nenhum colega.
f) Existe aluno de Ciência da computação que é detestado por seus colegas.
g) Necessariamente algum político é desonesto.
h) Amanhã irei ao cinema e depois irei ao teatro.
i) Quase todo político é desonesto.
j) Adalton sempre foi amigo de João Augusto.
k) Toda regra tem exceção.
l) Quase todo funcionário da Algar é um talento.
m) Poucos funcionários da Algar não são empreendedores.
n) O presidente da Algar é admirado por seus colaboradores.

11) Demonstre que a segunda forma do princípio da indução implica no princípio da indução na Lógica de Predicados.

Sugestões e soluções de exercícios selecionados

2) A solução deste exercício segue um padrão. Dada uma fórmula H, suponha que I[H] = T ou I[H] = F. A escolha entre estas duas opções depende dos conectivos envolvidos. Se H é do tipo $A \rightarrow B$, considere I[H] = F, pois neste caso necessariamente I[A] = T e I[B] = F. Se $H = A \vee B$, então considere I[H] = F. Logo, I[A] = F e I[B] = F. Se H é do tipo $A \leftrightarrow B$, a princípio, sem uma análise das fórmulas A e B, não é possível preterir uma das suposições I[H] = T ou I[H] = F. Em qualquer dos casos são deduzidas duas possibilidades para I[A] e I[B]. Após a suposição I[H] = T ou I[H] = F, as definições são aplicadas. Se for obtido um absurdo, o valor de I[H] é o oposto daquele suposto inicialmente. Quando não se obtém absurdo, é possível interpretar H conforme a suposição inicial.

e) Suponha $I[(\exists z)(p(x) \rightarrow (\exists x)p(a)) \vee (p(x) \rightarrow (\forall x)p(b))] = F$
$\Leftrightarrow I[(\exists z)(p(x) \rightarrow (\exists x)p(a))] = F$ e $I[p(x) \rightarrow (\forall x)p(b)] = F$
$\Leftrightarrow \exists\, d_1 \in D; <x \leftarrow d_1 > I[p(x) \rightarrow (\exists x)p(a)] = F$ e $I[p(x)] = T$ e
$I[(\forall x)p(b)] = F$
$\Leftrightarrow \exists\, d_1 \in D; <x \leftarrow d_1 > I[p(x)]=T$ e $<x \leftarrow d_1 > I[(\exists x)p(a)] = F$ e
$I[p(x)] = T$ e $I[(\forall x)p(b)] = F$
$\Leftrightarrow \exists\, d_1 \in D; <x \leftarrow d_1 > I[p(x)]=T$ e $\forall\, d_2 \in D;$
$<x \leftarrow d_2 ><x \leftarrow d_1 > I[p(a)] = F$ e $I[p(x)] = T$ e
$\exists\, d_3 \in D; <x \leftarrow d_3 > I[p(b)] = F$
$\Leftrightarrow \exists\, d_1 \in D; p_I(d_1)=T$ e $p_I(a_I) = F$ e $p_I(x_I) = T$ e $p_I(b_I) = F$
Como $I[a] = a_I = 5$, tem-se $p_I(a_I) = T$. Portanto, a última afirmação é falsa. Logo,
$I[(\exists z)(p(x) \rightarrow (\exists x)p(a)) \vee (p(x) \rightarrow (\forall x)p(b))] = T$

3) Observe que H implica G $\Leftrightarrow$ (H $\rightarrow$ G) é tautologia. Demonstre supondo por absurdo que (H $\rightarrow$ G) não é tautologia. Observe também que
$G = (\forall x_1)...(\forall x_8)((H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \wedge H_4 \wedge H_5 \wedge H_6 \wedge H_7) \rightarrow H_8)$

4) a) É possível determinar I[E] se é conhecido o valor de I nas variáveis livres de E. O mesmo ocorre para J[E].

5) a) Sejam I e J duas interpretações sobre os naturais tais que
$I[p(x,y,z)]=T \Leftrightarrow (x_I+y_I)>z_I$ $I[z]=5$, $I[x]=5$,
$J[p(x,y,z)]=T \Leftrightarrow (y_I+z_I)\leq x_I$ $J[z]=0$, $J[x]=5$.
Neste caso, $I[(\forall x)(\exists y)p(x,y,z)]=T$ e $I[(\exists y)(\forall z)p(x,y,z)]=F$. Logo,
$I[(\forall x)(\exists y)p(x,y,z) \rightarrow (\exists y)(\forall z)p(x,y,z)]=F$.
Por outro lado, $J[(\forall x)(\exists y)p(x,y,z)]=T$ e $J[(\exists y)(\forall z)p(x,y,z)]=F$.
Logo, $J[(\forall x)(\exists y)p(x,y,z) \rightarrow (\exists y)(\forall z)p(x,y,z)]=F$. Demonstre, utilizando as definições, cada uma das igualdades.

6) a) $I[H_1]$= dado um número real qualquer, existe outro maior que é primo.
$I[H_2]$= dado um número real qualquer, se ele é positivo então existe outro que é igual a sua raiz quadrada.
$I[H_3]$= dados dois números reais x e y, se x é diferente de zero, então é possível dividir y por x.
b) $I[H_1]$= se existe o "bem amado" no curso de computação, então todo aluno de computação é amado por alguém.
$I[H_2]$= existe um aluno de computação que não gosta de nenhum outro.
$I[H_3]$= dados quatro alunos de computação quaisquer, x, y, z, w, se x ama y e y ama z e z ama w, então w vai morrer de AIDS.
c) $I[H_1]$= dados dois números naturais quaisquer, que são pares, sua soma também é par.
$I[H_2]$= dados dois números naturais quaisquer, um par e outro ímpar, então sua soma é ímpar.
$I[H_3]$= dados dois números naturais quaisquer, que são ímpares, sua soma é par.
d) I[H] = todo número natural é par ou ímpar.

7) a) $I[(\forall x)(\forall y)H] = T \Leftrightarrow \forall\, d_1 \in D, \forall\, d_2 \in D, <y \leftarrow d_2><x \leftarrow d_1> I[H]=T$. Observe que as extensões estão na ordem inversa dos quantificadores.

8) Demonstre que:
a) $I[p(x, y)]=T$, $J[p(x, y)]=F$
b) $I[(\forall x)p(x, y)]=F$, $J[(\forall x)p(x, y)]=F$
c) $I[(\forall y)p(x, y)]=T$, $J[(\forall y)p(x, y)]=F$

9) a) Seja I uma interpretação sobre o conjunto das pessoas tal que $I[p(x)]=T \Leftrightarrow x_I$ é produtivo, $I[q(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é esforçado, trabalhe muito e tenha inspirações. A tradução da sentença na Lógica de Predicados é
$(\forall x)(p(x) \leftrightarrow q(x))$

c) Seja I uma interpretação cujo domínio é formado pelas filhas do professor Pedro. Suponha que $I[p(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é linda e meiga. A tradução da sentença é dada por $(\forall x)p(x)$. Suponha uma interpretação J sobre o domínio das pessoas tal que $J[a]$ = Pedro, $J[p(x,y)] = T \Leftrightarrow x_I$ é filha de y_I, $J[q(x)]=T \Leftrightarrow x_I$ é linda, $J[r(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é meiga. Neste caso a sentença é traduzida em $(\forall x)(p(x,a) \rightarrow (q(x) \wedge r(x))$. Observe que a tradução de uma sentença não é única e depende do domínio da interpretação.

i) Seja I uma interpretação sobre o conjunto de pessoas da cidade. Suponha $I[p(x)]=T \Leftrightarrow x_I$ é barbeiro, $I[q(x,y)]=T \Leftrightarrow x_I$ barbeia y_I. A tradução da sentença é
$(\exists x)((p(x) \wedge (\forall y)(q(y,y) \rightarrow \neg q(x,y)) \rightarrow \neg(\exists z)q(z,x)))$

j) Seja I uma interpretação sobre o conjunto dos conjuntos. Suponha $I[p(x, y)] = T \Leftrightarrow x_I$ contém y_I. A sentença é traduzida em $(\forall x) \neg p(x,x)$.

10) Desconsiderando representações triviais, tem-se:

b) Não é possível representar, pois "possivelmente" é considerado apenas na Lógica Modal

c) Não é possível representar, pois o "tempo" não é considerado na Lógica de Predicados clássica.

g) Não é possível representar, pois "necessariamente" é considerado apenas na Lógica Modal.

l) Não é possível representar, pois a quantificação "quase todo" não é considerada na Lógica de Predicados clássica.

m) Não é possível representar, pois a quantificação "pouco" não é considerada na Lógica de Predicados clássica.

CAPÍTULO 11

Propriedades semânticas da Lógica de Predicados

Introdução

Este capítulo considera a análise de algumas propriedades semânticas das fórmulas da Lógica de Predicados. Na Lógica Proposicional foram consideradas as propriedades semânticas que relacionam os resultados das interpretações das fórmulas. Na Lógica de Predicados, as propriedades semânticas também relacionam tais resultados. Entretanto, na Lógica de Predicados, os métodos utilizados para identificar estas propriedades são diferentes daqueles considerados na Lógica Proposicional.

Propriedades Semânticas

O conjunto de propriedades semânticas da Lógica de Predicados é análogo àquele definido no Capítulo 3, para a Lógica Proposicional. Na Lógica de Predicados ocorrem os mesmos conceitos: tautologia, satisfatibilidade, implicação, equivalência etc. Além disso, as relações entre tais propriedades também são análogas, tendo por exemplo:

- $(H \rightarrow G)$ é uma tautologia $\Leftrightarrow$ H implica G
- $(H \leftrightarrow G)$ é uma tautologia $\Leftrightarrow$ H equivale a G

Considerando tal fato, as relações acima e aquelas demonstradas na Lógica Proposicional também são válidas na Lógica de Predicados. Mesmo tendo um conjunto de propriedades semânticas análogas às da Lógica Proposicional, as técnicas utilizadas nas demonstrações destas propriedades são diferentes na Lógica de Predicados. Devido à presença de quantificadores, variáveis, funções e predicados, nem sempre é possível utilizar tabelas verdade para demonstrar, por exemplo, a validade de fórmulas da Lógica de Predicados.

Satisfatibilidade de Fórmulas

Esta seção considera a determinação da factibilidade ou satisfatibilidade de fórmulas da lógica de Predicados. Uma fórmula H é satisfatível quando existe pelo menos uma interpretação I tal que $I[H] = T$.

Exemplo (satisfatibilidade). As fórmulas H_1, H_2, H_3 e H_4, definidas a seguir, são satisfatíveis pois as interpretações I_1, I_2, I_3 e I_4 são tais que

$$I_1[H_1] = I_2[H_2] = I_3[H_3] = I_4[H_4] = T.$$

a) $H_1 = p(x,y)$, I_1 é uma interpretação sobre os naturais $\mathbb{N}$, tal que

$$I_1[p] = \text{“<”}, I_1[x] = 5 \text{ e } I_1[y] = 9.$$

b) $H_2 = (\forall x)p(x,y)$, I_2 é uma interpretação sobre os naturais $\mathbb{N}$, tal que

$$I_2[p] = \text{“}\geq\text{”}, \text{ e } I_2[y] = 0.$$

c) $H_3 = (\forall x)(\exists y)p(x,y)$, I_3 é uma interpretação sobre os naturais $\mathbb{N}$, tal que

$$I_3[p] = \text{“<”}.$$

d) $H_4 = (\forall x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow p(x,y)$, I_4 é uma interpretação sobre os naturais $\mathbb{N}$, tal que:

$$I_4[p] = \text{“<”}, I_4[x] = 5 \text{ e } I_4[y] = 9.$$

Observe que $I_4[H_4] = T$ pois

$$I_4\,[(\forall x)(\exists y)p(x,y)] = T \text{ e } I_4[p(x,y)] = T.$$

Exemplo (satisfatibilidade). Considere a fórmula

$$H = \neg\,((\forall x)p(x,y)) \leftrightarrow (\exists x)(\neg p(x,z)).$$

A fórmula H é satisfatível. Nem sempre é fácil identificar imediatamente se uma fórmula é ou não satisfatível. Para demonstrar este fato, é definida uma interpretação I tal que I[H]=T. Seja I uma interpretação sobre o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, tal que:

$$I[p(x,y)] = T \Leftrightarrow x_I \text{ e } y_I \text{ são números pares.}$$
$$I[y] = 4,\ I[z] = 6.$$

Observe inicialmente, que I está definida para todos os símbolos livres de H. Além disso,

$$I[H] = T \Leftrightarrow I[\neg((\forall x)p(x,y))] = I[(\exists x)(\neg p(x,z))]$$

É demonstrado a seguir que

$$I[\neg\,((\forall x)p(x,y))] = T \text{ e } I[(\exists x)(\neg p(x,z))] = T$$

Mas,

$$\begin{aligned} I[\neg((\forall x)p(x,y))] = T \quad & \Leftrightarrow I[(\forall x)p(x,y)] = F \\ & \Leftrightarrow \exists\, d \in \mathbb{N};\ \langle x \leftarrow d\rangle I[p(x,y)] = F \\ & \Leftrightarrow \exists\, d \in \mathbb{N};\ d \text{ e/ou } 4 \text{ são números ímpares} \\ & \Leftrightarrow \exists\, d \in \mathbb{N};\ d \text{ é um número ímpar.} \end{aligned}$$

Como a última afirmação é verdadeira, conclui-se que $I[\neg((\forall x)p(x,y))] = T$. Por outro lado.

$$\begin{aligned} I[(\exists x)(\neg p(x,z))] = T \quad & \Leftrightarrow \exists\, d \in \mathbb{N}: \langle x \leftarrow d \rangle I[\neg p(x,z)] = T \\ & \Leftrightarrow \exists\, d \in \mathbb{N}: \langle x \leftarrow d \rangle I[p(x,z)] = F \\ & \Leftrightarrow \exists\, d \in \mathbb{N}: \text{d e/ou 6 são números ímpares} \\ & \Leftrightarrow \exists\, d \in \mathbb{N}: \text{d é um número ímpar.} \end{aligned}$$

Como a última afirmação é verdadeira, conclui-se que: $I[(\exists x)(\neg p(x,z))] = T$. Logo:

$$I[\neg((\forall x)p(x,z))] = I[(\exists x)(\neg p(x,z))] = T, \text{ isto é, } I[H] = T.$$

Validade de fórmulas

Esta seção considera a determinação da validade e não-validade de fórmulas da lógica de Predicados.

Exemplo (não-validade). Considere novamente a fórmula

$$H = \neg\, ((\forall x)p(x,y)) \leftrightarrow (\exists x)(\neg p(x,z))$$

analisada no exemplo anterior. Ela é satisfatível, mas não é uma tautologia. Por definição

$$H \text{ não é válida} \Leftrightarrow \exists \text{ interpretação } J;\ J[H] = F.$$

Mas

$$J[H] = F \Leftrightarrow J[\neg(\forall x)p(x,y)] \neq J[(\exists x)(\neg p(x,z))]$$

É necessário então definir uma interpretação J tal que:

$$J[\neg((\forall x)p(x,y))] \neq J[(\exists x)(\neg p(x,z))]$$

e então concluir que $J[H] = F$. Observe que

$$\begin{aligned} J[\neg((\forall x)p(x,y))] = T \quad & \Leftrightarrow J[(\forall x)p\,(x,y)] = F \\ & \Leftrightarrow \exists\, d \in \mathbb{N};\ \langle x \leftarrow d \rangle J[p(x,y)] = F \\ & \Leftrightarrow \exists\, d \in \mathbb{N};\ p_J(d,y_J) \text{ é falso.} \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} J[(\exists x)(\neg p(x,z))] = T \quad & \Leftrightarrow \exists\, d \in \mathbb{N};\ \langle x \leftarrow d \rangle J[\neg p(x,z)] = T \\ & \Leftrightarrow \exists\, d \in \mathbb{N};\ \langle x \leftarrow d \rangle J[p(x,z)] = F \\ & \Leftrightarrow \exists\, d \in \mathbb{N}; p_J(d,z_J) \text{ é falso.} \end{aligned}$$

A interpretação J deve ser tal que a afirmação

$$\text{“}\exists\, d \in \mathbb{N}\ ;\ p_J(d,y_J) \text{ é falso”}$$

seja falsa e a afirmação

$$\text{“}\exists\, d \in N;\ p_J(d,z_J) \text{ é falso”}$$

seja verdadeira. Desta forma,

$$J[\neg((\forall x)p(x, y))] \neq J[(\exists x)(\neg p(x, z))].$$

Seja então J uma interpretação sobre o domínio U = {A, B, C, D} tal que J[p] é definida pelo diagrama a seguir:

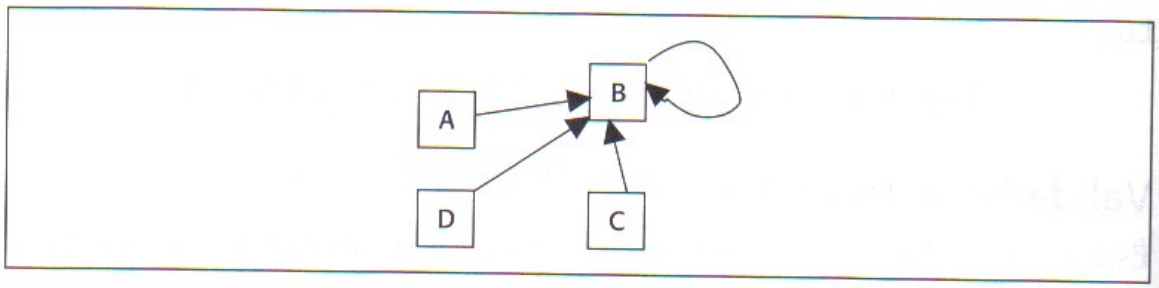


Figura 1 Interpretação do predicado p.

No diagrama da Figura 1, convenciona-se que $p_J(r, s)$ é verdadeiro, ($p_J(r, s) = T$), se somente se, há uma seta de r para s. Neste caso,

$$p_J(B,B) = p_J(A,B) = p_J(C,B) = p_J(D,B) = T$$

e entre os valores falsos há, por exemplo,

$$p_J(B,A) = p_J(B,C) = p_J(A,C) = p_J(C,C) = p_J(C,D) = F.$$

Além disso considera que J[y] = B e J[z] = A. Para a interpretação J,

$$\text{“}\exists\, d \in U;\ p_J(d,y_J) = F\text{” equivale a “}\exists\, d \in U;\ p_J(d,B) = F\text{”}$$

pois J[y] = B. Tal afirmação é falsa, pois

$$\text{“}\forall\, d \in U,\ p_J(d,B) = T\text{”}.$$

Por outro lado,

$$\text{“}\exists\, d \in U;\ p_J(d,z_J) = F\text{” equivale a “}\exists\, d \in U;\ p_J(d,A) = F\text{”},$$

o que é verdadeiro, pois para d = A, por exemplo, tem-se $p_J(d,A) = F$

Lema (igualdade e interpretação). Sejam H e G duas fórmulas da Lógica de Predicados e I uma interpretação.

$$\{I[H] = I[G]\} \Leftrightarrow \{I[H] = T \Leftrightarrow I[G] = T\}$$

Demonstração. Para demonstrar a equivalência acima, são considerados os dois sentidos da bi-implicação.

$$\text{caso 1 } \{I[H] = I[G]\} \Rightarrow \{I[H] = T \Leftrightarrow I[G] = T\}$$
$$\text{caso 2 } \{I[H] = T \Leftrightarrow I[G] = T\} \Rightarrow \{I[H] = I[G]\}$$

Demonstração do caso 1 Neste caso, I[H] =I[G] e demonstra-se que

$$I[H] = T \Leftrightarrow I[G] = T.$$

Suponha então que I[H] = T. Logo, como I[H] =I[G], conclui-se que I[G]= T. Se I[G] = T, então pelo mesmo raciocínio, como I[H] =I[G], conclui-se que I[H] = T.

Demonstração do caso 2 Neste caso,

$$\{I[H] = T \Leftrightarrow I[G] = T\}$$

e demonstra-se I[H] = I[G]. Para demonstrar esta igualdade, duas possibilidades são consideradas I[H] = T ou I[H] = F. Se ocorre a primeira possibilidade, I[H] = T, então, como

$$\{I[H] = T \Leftrightarrow I[G] = T\},$$

tem-se que I[G] = T. Logo, I[H] = I[G]. Se ocorre a segunda possibilidade, I[H] = F, então I[G] = F. Caso contrário, se I[G] = T, então como

$$\{I[H] = T \Leftrightarrow I[G] = T\},$$

conclui-se que I[H] = T. Mas I[H] = T é um absurdo pois neste caso I[H] = F.

O lema anterior também é expresso conforme o corolário.

Corolário (igualdade e interpretação). *Sejam H e G duas fórmulas da Lógica de Predicados e I uma interpretação.*

$$\{I[H] = I[G]\} \Leftrightarrow \{I[H] = F \Leftrightarrow I[G] = F\}.$$

Demonstração. Análoga à demonstração do lema anterior.

O próximo exemplo determina a validade de uma fórmula.

Exemplo (tautologia). Considere a fórmula

$$G = \neg((\forall x)p(x)) \leftrightarrow (\exists x)(\neg p(x)).$$

Observe que a formula G é semelhante à fórmula H do exemplo anterior. A fórmula H não é uma tautologia, mas G é uma tautologia, conforme é demonstrado a seguir. Por definição, G é uma tautologia se e somente se ∀ interpretação J, J[G] = T. Mas

$$J[G] = T \Leftrightarrow J[\neg((\forall x)p(x))] = J[(\exists x)(\neg p(x))].$$

Conforme o lema anterior,

$$J[\neg((\forall x)p(x))] = J[(\exists x)(\neg p(x))] \Leftrightarrow \{J[\neg((\forall x)p(x))] = T \Leftrightarrow J[(\exists x)(\neg p(x))] = T\}$$

Mas,

$$\begin{aligned} J[\neg((\forall x)p(x))] = T &\Leftrightarrow J[(\forall x)p(x)] = F \\ &\Leftrightarrow \exists\, d \in U;\ \langle x \leftarrow d\rangle J[p(x)] = F \\ J[(\exists x)(\neg p(x))] = T &\Leftrightarrow \exists\, d \in U;\ \langle x \leftarrow d\rangle J[\neg p(x)] = T \\ &\Leftrightarrow \exists\, d \in U;\ \langle x \leftarrow d\rangle J[p(x)] = F \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} J[\neg((\forall x)p(x))] = T &\Leftrightarrow \exists\, d \in U;\ \langle x \leftarrow d\rangle J[p(x)] = F \\ &\Leftrightarrow J[(\exists x)(\neg p(x))] = T. \end{aligned}$$

Logo,

$$J[\neg((\forall x)p(x))] = T \Leftrightarrow J[(\exists x)(\neg p(x))] = T$$

e portanto $J[G] = T$. Como J é uma interpretação arbitrária, então G é uma tautologia.

Exemplo (tautologia). Considere a fórmula

$$H = (\exists y)(\forall x)q(x,y) \rightarrow (\forall x)(\exists y)q(x,y).$$

A fórmula H é uma tautologia. Suponha por contradição que H não é uma tautologia. Logo, por definição, existe uma interpretação I sobre um domínio U, tal que $I[H] = F$. Mas,

$$\begin{aligned} I[H] = F &\Leftrightarrow I[(\exists y)(\forall x)q(x,y) \rightarrow (\forall x)(\exists y)q(x,y)] = F \\ &\Leftrightarrow I[(\exists y)(\forall x)q(x,y)] = T \text{ e } I[(\forall x)(\exists y)q(x,y)] = F. \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} I[(\exists y)(\forall x)q(x, y)] = T &\Leftrightarrow \exists\, d \in U;\ \langle y \leftarrow d\rangle I[(\forall x)q(x,y)] = T \\ &\Leftrightarrow \exists\, d \in U;\ \forall\, e \in U,\ \langle x \leftarrow e\rangle\langle y \leftarrow d\rangle I[q(x,y)] = T \\ &\Leftrightarrow \exists\, d \in U;\ \forall\, e \in U,\ q_I(e,d) = T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I[(\forall x)(\exists y)q(x, y)] = F &\Leftrightarrow \exists\, r \in U;\ \langle x \leftarrow r\rangle I[(\exists y)q(x,y)] = F \\ &\Leftrightarrow \exists\, r \in U;\ \forall\, s \in U,\ \langle y \leftarrow s\rangle\langle x \leftarrow r\rangle I[q(x,y)] = F \\ &\Leftrightarrow \exists\, r \in U;\ \forall\, s \in U,\ q_I(r,s) = F. \end{aligned}$$

As afirmações

$$\text{“}\exists\, d \in U;\ \forall\, e \in U,\ q_I(e,d) = T\text{” e “}\exists\, r \in U;\ \forall\, s \in U,\ q_I(r,s) = F\text{”}$$

são contraditórias entre si. Como ilustração, considere um caso particular onde esta contradição é identificada. Seja I uma interpretação sobre

$$U = \{A,B,C,D\},$$

tal que $I[q]$ é definida pelo diagrama a seguir, conforme convenções indicadas anteriormente.

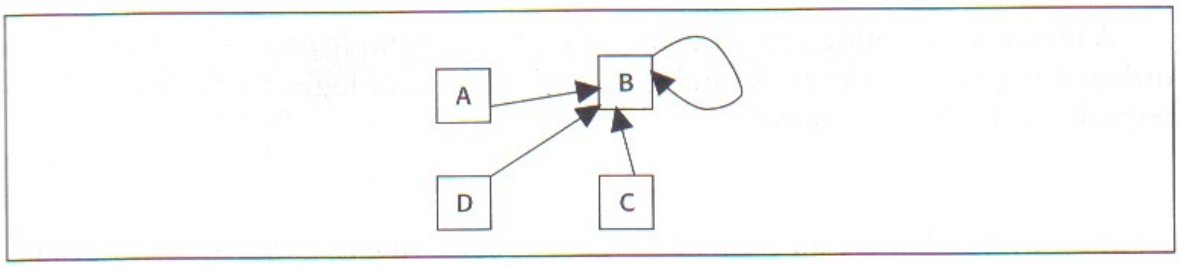


Figura 2 Interpretação do predicado q.

Este diagrama satisfaz a afirmação

$$\text{“}\exists\, d \in U;\ \forall\, e \in U,\ q_I(e,d) = T\text{”}.$$

Neste caso, fazendo d = B, então

$$\text{“}\forall\, e \in \{A,B,C,D\},\ q_I(e,B) = T\text{”}.$$

Por outro lado, a afirmação

$$\text{“}\exists\, r \in U;\ \forall\, s \in U,\ q_I(r,s) = F\text{”}$$

não é satisfeita. Esta afirmação diz que

$$\text{“}\exists\, r \in \{A,B,C,D\} \text{ tal que } \forall\, s \in \{A,B,C,D\},\ q_I(r,s) = F\text{”}.$$

Em outras palavras, existe um elemento r, tal que não sai nenhuma seta a partir dele. Mas isto é impossível devido à existência do elemento d = A, como é indicado acima. Uma outra forma de fazer a análise acima, é considerar uma interpretação I sobre o domínio dos alunos de Ciência da Computação tal que,

$$I[q(x,y)] = T \Leftrightarrow x_I \text{ gosta de } y_I.$$

Suponha então que exista um aluno de Ciência da Computação que é amado por todos: “o bem amado”. Isto significa que

$$\text{“}\exists\, d \in U;\ \forall\, c \in U,\ c \text{ gosta de } d\text{”}$$

ou seja,

$$\text{“}\exists\, d \in U;\ \forall\, c \in U,\ q_I(c,d) = T\text{”}.$$

Mas se existe o “Bem amado”, então a afirmação

$$\text{“}\exists\, r \in U;\ \forall\, s \in U,\ r \text{ não gosta de } s\text{”}$$

é falsa pois neste caso, r deveria gostar pelo menos do “Bem amado”. Portanto se existe o “Bem amado”, afirmação

$$\text{“}\exists\, r \in U;\ \forall\, s \in U,\ q_I(r,s) = F\text{”}$$

é falsa.

Exemplo (não-validade). Considere a fórmula

$$E = (\forall x)(\exists y)q(x,y) \rightarrow (\exists y)(\forall x)q(x,y).$$

A fórmula E é obtida a partir de H, definida no exemplo anterior, invertendo a ordem dos quantificadores. A fórmula E não é uma tautologia. Considere uma interpretação I sobre o domínio

$$U = \{A,B,C,D\},$$

tal que I[q] é dada pelo diagrama da Figura 3, conforme as convenções indicadas anteriormente.

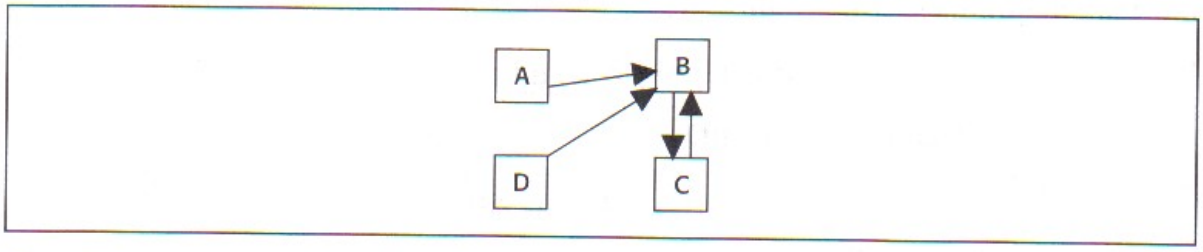


Figura 3 Interpretação do predicado q.

Observe que:

$$\begin{aligned} I[(\forall x)(\exists y)q(x, y)] = T \quad & \Leftrightarrow \forall\, d \in U, <x \leftarrow d>I[(\exists y)q(x,y)] = T \\ & \Leftrightarrow \forall\, d \in U, \exists\, e \in U; <y \leftarrow e><x \leftarrow d>I[q(x,y)] = T \\ & \Leftrightarrow \forall\, d \in U, \exists\, e \in U; q_I(d,e) = T \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} I[(\exists y)(\forall x)q(x, y)] = F \quad & \Leftrightarrow \forall\, r \in U, <s \leftarrow r>I[(\forall x)q(x,y)] = F \\ & \Leftrightarrow \forall\, r \in U, \exists\, s \in U; <x \leftarrow s><y \leftarrow r>I[q(x,y)] = F \\ & \Leftrightarrow \forall\, r \in U, \exists\, s \in U; q_I(s,r) = F \end{aligned}$$

As afirmações

$$\text{“}\forall\, d \in U, \exists\, e \in U; q_I(d,e) = T\text{” e “}\forall\, r \in U, \exists\, s \in U; q_I(s,r) = F\text{”}$$

são satisfeitas pelo diagrama anterior. A primeira afirmação diz que

“para todo d ∈ {A, B, C, D}, existe e ∈ {A, B, C, D} tal que há uma seta de d para e”.

O diagrama satisfaz esta afirmação pois se d = A, basta considerar e = B. Se d = B, então e = C e assim por diante. Analogamente, a segunda afirmação diz que

“para todo r ∈ {A, B, C, D}, existe s ∈ {A, B, C, D} tal que não há seta de s para r”.

A segunda afirmação também é verdadeira. Neste caso, se r = A, então s = C e assim por diante. Portanto, como as afirmações acima são satisfeitas pelo diagrama, conclui-se que I[E] = F.

Implicações e Equivalências entre Fórmulas

Algumas implicações e equivalências entre fórmulas da lógica de predicados são analisadas a seguir.

Exemplo (implicação). Tem-se que

$$H = (\forall x)p(x) \text{ implica } G = p(a).$$

Conforme a definição,

$$H \text{ implica } G \Leftrightarrow \forall\ I, \text{ se } I[H] = T \text{ então } I[G] = T.$$

Seja então uma interpretação I, sobre um domínio U, tal que I[H] = T. É demonstrado a seguir que I[G] = T.

$$\begin{aligned} I[H] = T \quad & \Leftrightarrow I[(\forall x)p(x)] = T \\ & \Leftrightarrow \forall\ d \in U, <x \leftarrow d>I[p(x)] = T \\ & \Leftrightarrow \forall\ d \in U, p_I(d) = T \\ & \Rightarrow p_I(a_I) = T \\ & \Leftrightarrow I[p(a)] = T \\ & \Leftrightarrow I[G] = T \end{aligned}$$

Portanto, se I[H] = T, então I[G] = T. Logo, H implica G.

Exemplo (implicação). Tem-se que

$$H \text{ é tautologia implica } G(\forall x)\ H \text{ é tautologia.}$$

Neste caso, G é a generalização de H. Seja I uma interpretação sobre um domínio U. É demonstrado a seguir que I[G] = T. Como H é tautologia então ∀ interpretação I, I[H] = T

$$\text{Logo, } \forall\ d \in U, < x \leftarrow d > I[H] = T \Leftrightarrow$$

∀ interpretação I, I (∀x) H] = T
Portanto, se H é tautologia, então G é tautologia

Exemplo (insatisfatibilidade). Considere as fórmulas

$$H = (\forall x)(\exists y)p(x,y) \text{ e } Hs = (\forall x)p(x,f(x)),$$

onde f é uma função qualquer. Tem-se que

$$H \text{ é insatisfatível} \Leftrightarrow Hs \text{ é insatisfatível.}$$

Como será visto no Capítulo 14, a fórmula Hs corresponde à skolemização de H. Além disso, o resultado deste exemplo pode ser generalizado para qualquer fórmula H.

$$H \text{ é insatisfatível} \Leftrightarrow \forall\ I, I[H] = F$$

$$
\begin{aligned}
I[H] = F \quad & \Leftrightarrow I[(\forall x)(\exists y)p(x,y)] = F \\
& \Leftrightarrow \exists\, d \in U;\ <x \leftarrow d>I[(\exists y)p(x,y)] = F \\
& \Leftrightarrow \exists\, d \in U;\ \forall\, b \in U\ <y \leftarrow b><x \leftarrow d>I[p(x,y)] = F \\
& \Leftrightarrow \exists\, d \in U;\ \forall\, b \in U\ p_I(d,b) = F
\end{aligned}
$$

Portanto, existe $d \in U$ tal que para qualquer escolha de b, tem-se que $p_I(d,b) = F$. Seja então f uma função tal que $f_I(d) = b$, logo $p_I(d,f_I(d)) = F$. Continuando o desenvolvimento acima,

$$
\begin{aligned}
I[H] = F \quad & \Leftrightarrow \exists\, d \in U;\ \forall\, b \in U\ p_I(d, b) = F \\
& \Leftrightarrow \exists\, d \in U;\ p_I(d, f_I(d)) = F, \text{ onde f é uma função qualquer.} \\
& \Leftrightarrow \exists\, d \in U;\ <x \leftarrow d>I[p(x, f(x))] = F \\
& \Leftrightarrow I[(\forall x)p(x, f(x))] = F \\
& \Leftrightarrow I[Hs] = F
\end{aligned}
$$

Como I é uma interpretação qualquer, conclui-se que $\forall$ I, I[Hs] = F. Portanto,

$$H \text{ é insatisfatível} \Leftrightarrow Hs \text{ é insatisfatível.}$$

O lema a seguir estabelece um resultado que é utilizado em demonstrações sobre propriedades semânticas das fórmulas.

Lema (interpretação estendida e variável ligada). Seja H uma fórmula na qual a variável x não ocorre livre. Dada uma interpretação I sobre um domínio U, então

$$\forall\, d \in U,\ <x \leftarrow d>I[H] = I[H]$$

Demonstração. A demonstração deste lema utiliza indução no comprimento das fórmulas e é proposta como exercício.

Exemplo (interpretação estendida e variável ligada). O resultado do lema anterior diz, por exemplo, que

$$\forall\, d \in U,\ <x \leftarrow d>I[(\forall x)p(x)] = I[(\forall x)p(x)].$$

A demonstração desta igualdade é feita a seguir.

$$
\begin{aligned}
& \{\ <x \leftarrow d>I[(\forall x)p(x)] = I[(\forall x)p(x)]\} \\
\Leftrightarrow\ & \{<x \leftarrow d>I[(\forall x)p(x)] = T \Leftrightarrow I[(\forall x)p(x)] = T\}.
\end{aligned}
$$

Mas,

$$
\begin{aligned}
<x \leftarrow d>I[(\forall x)p(x)] = T \quad & \Leftrightarrow \forall\, c \in U\ <x \leftarrow c><x \leftarrow d>I[p(x)] = T \\
& \Leftrightarrow \forall\, c \in U\ <x \leftarrow c>I[p(x)] = T \\
& \Leftrightarrow I[(\forall x)p(x)] = T
\end{aligned}
$$

Observe que nas equivalências acima, é utilizado que

$$<x \leftarrow c><x \leftarrow d>I = <x \leftarrow c>I.$$

O próximo exemplo considera a equivalência entre fórmulas.

Exemplo (equivalência). Considere uma fórmula H onde x não ocorre livre e uma fórmula G qualquer. As fórmulas

$$E_1 = (\forall x)(H \vee G) \text{ e } E_2 = (H \vee (\forall x)G)$$

são equivalentes. Mas,

$$\begin{aligned} E_1 \text{ equivale a } E_2 &\Leftrightarrow \forall\, I,\ I[E_1] = I[E_2] \\ &\Leftrightarrow \forall\, I,\ \{\, I[E_1] = T \Leftrightarrow I[E_2] = T\}. \end{aligned}$$

Seja I uma interpretação sobre um domínio U, tal que $I[E_1] = T$. Mas,

$$\begin{aligned} I[E_1] = T &\Leftrightarrow I[(\forall x)(H \vee G)] = T \\ &\Leftrightarrow \forall\, d \in U, <x \leftarrow d>I[H \vee G] = T \\ &\Leftrightarrow \forall\, d \in U, <x \leftarrow d>I[H] = T \text{ e/ou } <x \leftarrow d>I[G] = T \end{aligned}$$

Como x não ocorre livre em H, então

$$\forall\, d \in U, <x \leftarrow d>I[H] = I[H].$$

Isto é,

$$\forall\, d \in U, <x \leftarrow d>I[H] = T \Leftrightarrow I[H] = T$$

Logo,

$$\begin{aligned} I[E_1] = T &\Leftrightarrow \forall\, d \in U, I[H] = T \text{ e/ou } <x \leftarrow d>I[G] = T \\ &\Leftrightarrow I[H] = T \text{ e/ou } \forall\, d \in U, <x \leftarrow d>I[G] = T \\ &\Leftrightarrow I[H] = T \text{ e/ou } I[(\forall x)G] = T \\ &\Leftrightarrow I[H \vee (\forall x)G] = T \\ &\Leftrightarrow I[E_2] = T \end{aligned}$$

Portanto,

$$I[E_1] = T \Leftrightarrow I[E_2] = T.$$

Logo, $I[E_1] = I[E_2]$, isto é, E_1 equivale a E_2.

Exemplo (equivalência). As fórmulas

$$H = (\exists x)(p(x) \rightarrow r(x)) \text{ e } G = (\forall x)p(x) \rightarrow (\exists x)r(x)$$

são equivalentes. Seja I uma interpretação sobre um domínio U, tal que $I[H] = F$. Mas,

$$\begin{aligned} I[H] = F &\Leftrightarrow I[(\exists x)(p(x) \rightarrow r(x))] = F \\ &\Leftrightarrow \forall\, d \in U, <x \leftarrow d>I[p(x) \rightarrow r(x)] = F \\ &\Leftrightarrow \forall\, d \in U, <x \leftarrow d>I[p(x)] = T \text{ e } <x \leftarrow d>I[r(x)] = F \\ &\Leftrightarrow \forall\, d \in U, <x \leftarrow d>I[p(x)] = T \text{ e } \forall\, d \in U <x \leftarrow d>I[r(x)] = F \\ &\Leftrightarrow I[(\forall x)p(x)] = T \text{ e } I[(\exists x)r(x)] = F \\ &\Leftrightarrow I[(\forall x)p(x) \rightarrow (\exists x)r(x)] = F \\ &\Leftrightarrow I[G] = F \end{aligned}$$

Logo,

$$I[H] = F \Leftrightarrow I[G] = F,$$

concluindo que $I[H] = I[G]$ e que H equivale a G.

Exercícios

1) Demonstre que as fórmulas H e G a seguir são equivalentes.
   a) $H = (\forall x)(\forall y)p(x,y,z)$, $G = (\forall y)(\forall x)p(x,y,z)$
   b) $H = (\exists x)(\exists y)p(x,y,z)$, $G = (\exists y)(\exists x)p(x,y,z)$
   c) $H = \neg(\exists y)p(x)$, $G = (\forall y)\neg p(y)$
   d) $H = (\exists x)p(x)$, $G = (\exists y)p(y)$
   e) $H = (\forall x)p(x)$, $G = (\forall y)p(y)$
   f) $H = (\forall x)(\forall x)p(x)$, $G = (\forall x)p(x)$
2) Demonstre que as fórmulas a seguir são tautologias.
   a) $H = (\forall x)p(x) \rightarrow p(a)$
   b) $H = p(a) \rightarrow (\exists x)p(x)$
3) Demonstre que a fórmula $H = (\forall x)(\neg(\forall y)q(x,y)) \rightarrow (\neg(\forall y)q(y,y))$ não é uma tautologia.
4) Algumas das fórmulas a seguir são tautologias, outras não. Para cada fórmula demonstre se ela é uma tautologia ou defina uma interpretação que a interprete como sendo falsa.
   a) $p(x) \rightarrow (\forall x)p(x)$
   b) $(\forall x)p(x) \rightarrow (\exists x)p(x)$
   c) $(\exists x)(p(x) \rightarrow q(x)) \rightarrow ((\exists x)p(x) \rightarrow (\exists x)q(x))$
   d) $(\forall x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow (\exists y)p(y,y)$
   e) $(\exists x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow (\exists y)p(y,y)$
   f) $(\exists x)(p(x) \rightarrow r(x)) \leftrightarrow ((\forall x)p(x) \rightarrow (\exists x)r(x))$
   g) $(\forall x)(p(x) \vee r(x)) \rightarrow ((\forall x)p(x) \vee (\forall x)r(x))$
   h) $((\forall x)p(x) \vee (\forall x)r(x)) \rightarrow (\forall x)(p(x) \vee r(x))$
   I) $(\exists x)(p(x) \leftrightarrow r(x)) \leftrightarrow ((\exists x)p(x) \leftrightarrow (\exists x)r(x))$
   j) $(\exists x)((p(x) \rightarrow p(a)) \wedge (p(x) \rightarrow p(b)))$
   k) $(\exists x)(\forall y)((q(x,y) \wedge q(y,x)) \rightarrow (q(x,x) \leftrightarrow q(y,y)))$
   l) $(\forall x)(p(x) \wedge q(x)) \leftrightarrow (\forall x)(p(x) \rightarrow \neg q(x))$
   m) $(\forall x)(p(x,a) \rightarrow (\forall x)q(x,b)) \leftrightarrow ((\exists x)p(x,b) \rightarrow (\forall x)q(x,a))$
   n) $(\forall x)(p(x,a) \rightarrow (\forall x)q(x,b)) \leftrightarrow ((\exists x)p(x,a) \rightarrow (\forall x)q(x,b))$
   o) $(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)) \leftrightarrow ((\exists x)p(x) \rightarrow (\forall x)q(x))$
   p) $(\forall y)p(y) \rightarrow (\forall x)p(x)$
   q) $(\exists x)p(x) \rightarrow p(x)$
   r) $(\forall x)p(x) \rightarrow p(x)$
   s) $p(x) \rightarrow (\exists x)p(x)$
5) Considere a fórmula

   $E = (\forall x)(H \rightarrow G) \leftrightarrow (\exists x)(H \rightarrow G)$.

   Responda se as questões a seguir são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas como se segue: Se a questão é verdadeira, então demonstre-a, caso contrário, dê um contra-exemplo.
   a) É possível definir duas fórmulas H e G tais que E é uma tautologia?
   b) É possível definir duas fórmulas H e G tais que E não é uma tautologia?

6) Seja E uma fórmula na qual a variável x não ocorre livre. Dada uma interpretação I sobre U, demonstre que $\forall\, d \in U$, $<x \leftarrow d>I[E] = I[E]$
Sugestão: Utilize o princípio da indução na Lógica de Predicados.

7) Seja G uma fórmula na qual a variável x *não* ocorre livre. Demonstre que os pares de fórmulas a seguir são equivalentes.
   a) $(\forall x)G$ e G
   b) $(\exists x)G$ e G
   c) $(\forall x)(H \wedge G)$ e $((\forall x)H \wedge G)$
   d) $(\exists x)(H \wedge G)$ e $((\exists x)H \wedge G)$
   e) $(\forall x)(H \vee G)$ e $((\forall x)H \vee G)$
   f) $(\exists x)(H \vee G)$ e $((\exists x)H \vee G)$
   g) $(\forall x)(H \rightarrow G)$ e $((\exists x)H \rightarrow G)$
   h) $(\forall x)(G \rightarrow H)$ e $(G \rightarrow (\forall x)H)$
   i) $(\exists x)(H \rightarrow G)$ e $((\forall x)H \rightarrow G)$
   j) $(\exists x)(G \rightarrow H)$ e $(G \rightarrow (\exists x)H)$

8) Sejam H e G duas fórmulas. Demonstre que:
   a) Se $E_1 = (\forall x)(H \wedge G)$ e $E_2 = (\forall x)H \wedge (\forall x)G$, então E_1 equivale a E_2.
   b) Se $E_1 = (\forall x)(H \vee G)$ e $E_2 = (\forall x)H \vee (\forall x)G$ então E_2 implica E_1, mas E_1 não implica E_2.
   c) Se $E_1 = (\exists x)(H \vee G)$ e $E_2 = (\exists x)H \vee (\exists x)G$ então E_1 equivale a E_2.
   d) Se $E_1 = (\exists x)(H \rightarrow G)$ e $E_2 = (\forall x)H \rightarrow (\exists x)G$, então E_1 equivale a E_2.
   e) Se $E_1 = (\forall x)(H \rightarrow G)$ e $E_2 = (\exists x)H \rightarrow (\forall x)G$, então E_2 implica E_1, mas E_1 não implica E_2.
   f) Considere as fórmulas. $E_1 = (\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$, $E_2 = (\forall x)p(x) \rightarrow (\forall x)q(x)$
   Demonstre se for verdadeiro e dê contra-exemplo se for falso.
   I) E_1 implica E_2
   j) E_2 implica E_1

9) Demonstre que:
   a) $\forall\, d \in D$ $<x \leftarrow d>I[(\exists y)(\forall x)p(x,y)] = I[(\exists y)(\forall x)p(x,y)]$
   b) $\forall\, d \in D$ $<x \leftarrow d>I[(\forall x)p(x,y)] = I[(\forall x)p(x,y)]$
   c) $\forall\, d \in D$ $<x \leftarrow d>I[q(y)] = I[q(y)]$

10) a) Considere a fórmula $H = p(x) \wedge \neg(\forall x)p(x)$.
   Demonstre que H é satisfatível e $(\forall^*)H$ é contraditória.
   b) Defina uma fórmula G tal que G não é tautologia, mas $(\exists^*)G$ é uma tautologia.

11) a) Considere as fórmulas $H = (\forall x)(\exists z)(\exists y)p(x,z,y)$ e $H_s = (\forall x)\, p\,(x,g(x),f(x))$, onde f e g são funções quaisquer, mas diferentes entre si. Demonstre que H é insatisfatível $\Leftrightarrow$ H_s é insatisfatível.
   b) Generalize este resultado.

12) a) Defina uma fórmula H tal que H é factível e $(\exists^*)H$ é uma tautologia.
   b) Defina uma fórmula G tal que G é factível e $(\exists^*)G$ não é tautologia.
   c) Responda, justificando sua resposta, se a afirmação a seguir é verdadeira ou não?
   Dado uma fórmula H, então H é satisfatível se e somente se $(\exists^*)H$ é válida.

13) Sejam H e G duas fórmulas. Demonstre que:
   a) $\neg(\forall^*)H$ equivale a $(\exists^*)\neg H$
   b) $\neg(\exists^*)H$ equivale a $(\forall^*)\neg H$
   c) $(\forall^*)H$ é tautologia $\Leftrightarrow$ H é tautologia.

d) $(\exists^*)H$ é satisfatível $\Leftrightarrow$ H é satisfatível.
e) H implica G $\Leftrightarrow (\forall^*)(H \rightarrow G)$ é tautologia.
f) H equivale a G $\Leftrightarrow (\forall^*)(H \leftrightarrow G)$ é uma tautologia.

14) Responda se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas. Justifique suas respostas.
a) $(\exists^*)H$ é tautologia $\Rightarrow$ H é tautologia.
b) H é tautologia $\Rightarrow (\exists^*)H$ é tautologia.
c) H é satisfatível $\Rightarrow (\exists^*)H$ é satisfatível.
d) $(\forall^*)H$ é satisfatível $\Rightarrow$ H é satisfatível.

15) a) Dê exemplo de uma fórmula que contenha variável livre e seja uma tautologia.
b) Dê exemplo de uma fórmula sem variáveis e símbolos de verdade e que seja uma tautologia.
c) Existe fórmula que não é tautologia, mas cujo fecho universal é uma tautologia.
d) Existe fórmula que é tautologia, mas que o fecho universal não é uma tautologia?

16) a) Determine uma fórmula H tal que as condições a seguir são satisfeitas:
i) I[H] = T para toda interpretação I sobre U, onde |U| = 2.
ii) Existe interpretação J sobre U_1, onde $|U_1| = 3$ e J[H] = F.
b) Determine uma fórmula H tal que as condições a seguir são satisfeitas:
i) I[H] = T para toda interpretação I sobre U, onde |U| = 2 ou | U | = 3.
ii) Existe interpretação J sobre U_1, onde $|U_1| = 4$ e J[H] = F.
c) Generalize os resultados dos itens a) e b).

17) Determine se os conjuntos de fórmulas a seguir são satisfatíveis.
a) $\{(\forall x)(\forall y)(p(x,y) \rightarrow \neg p(y,x)), (\forall x)(\forall y)(\forall z)((p(x,y) \wedge p(y,z)) \rightarrow p(x,z))\}$
b) $\{(\exists x)(\forall y)p(x,y), (\forall x)(\exists y)p(x,y)\}$
c) $\{(\forall x)(\forall y)(p(x,y) \rightarrow \neg p(x,y)), (\forall x)p(x,x),$
$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((p(x,y) \wedge p(y,z)) \rightarrow p(x,z))\}$
d) $\{(\forall x)(\forall y)(p(x,y) \rightarrow \neg p(y,x)), (\exists x)(\exists y)(p(x,y) \wedge \neg p(y,x))\}$

18) Determine se as asserções a seguir são válidas.
a) Todo político é "esperto". Nenhum cientista é "esperto". Portanto, nenhum cientista é político.
b) Todo homem é mortal. Sócrates é homem. Portanto, Sócrates é mortal.
c) Todo político é "esperto". Existe indivíduo "esperto", que é inteligente. Portanto, algum político é inteligente.
d) Há político honesto. Há operários honestos. Portanto, há operários que são políticos.
e) Se existe um barbeiro em Coromandel que não barbeia a quem barbeia a si próprio, então não existe ninguém para barbear o barbeiro.
f) Todo aluno de Ciência da Computação é mais inteligente que algum aluno de Engenharia. Logo, não existe aluno de Engenharia, que é mais inteligente que todos os alunos de Ciência da Computação.
g) Toda mulher bonita, inteligente e sensível é observada. Nenhuma filha de Sr. Arnaldo é observada. Mulher que não é observada não se casa, portanto, as filhas de Sr. Arnaldo não se casarão.
h) Se há fé há amor. Se há amor há paz. Se há paz há Deus. Se há Deus, nada faltará.
i) Quem não se ama, não ama ninguém.
j) Uma condição necessária e suficiente para que um indivíduo seja produtivo é que ele seja esforçado, trabalhe muito e tenha inspirações.

19) Considere as afirmações a seguir.

H_1 = Toda mulher dócil tem um amado.

H_2 = Se existe mulher dócil, toda pessoa tem um amado.

Demonstre se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas?

a) H_1 implica H_2.

b) H_2 implica H_1.

20) Considere uma interpretação sobre o conjunto das pessoas tal que.

$I[p(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é estudante

$I[p_1(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é monitor

$I[q(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é artista

$I[r(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é inteligente

$I[r_1(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é comunicativo

Traduza a sentença a seguir para a lógica de predicados.

Há monitor que é inteligente, mas não é comunicativo.

Apenas estudantes inteligentes são monitores.

Todo artista é comunicativo.

Portanto, nem todo estudante inteligente é um artista.

Sugestões e soluções de exercícios selecionados

1) Todos os itens têm soluções que seguem o padrão da solução do item a).

a) H equivale a G $\Leftrightarrow \forall$ int. I, I[H] = I[G]. Mas $I[H]=I[G] \Leftrightarrow \{I[H]=T \Leftrightarrow I[G]=T\}$.

$I[H]=T \Leftrightarrow I[(\forall x)(\forall y)p(x,y,z)] \Leftrightarrow \forall d_1 \in D, \forall d_2 \in D,$
$<y \leftarrow d_2><x \leftarrow d_1>I[p(x,y,z)]=T.$

Como $x \neq y$, $<y \leftarrow d_2><x \leftarrow d_1>I[p(x,y,z)]=T \Leftrightarrow <x \leftarrow d_1><y \leftarrow d_2>I[p(x,y,z)]=T$. Portanto,

$I[H]=T \Leftrightarrow \forall d_1 \in D, \forall d_2 \in D, <x \leftarrow d_1><y \leftarrow d_2>I[p(x,y,z)]=T \Leftrightarrow I[(\forall y)(\forall x)p(x,y,z)]=T \Leftrightarrow I[G]=T$

2) a) Suponha que existe interpretação I tal que I[H]=F. Mas $I[H]=F \Leftrightarrow I[(\forall x)p(x)]=T$ e $I[p(a)]=F$

$\Leftrightarrow \forall d \in D <x \leftarrow d>I[p(x)]=T$ e $p_1(a_1)=F \Leftrightarrow \forall d \in D\ p_1(x_1)=T$ e $p_1(a_1)=F$. A última afirmação é um absurdo. Portanto, H é uma tautologia.

3) Defina uma interpretação I sobre D = {i, j, k, m} tal que I[H]=F. Neste caso, I[q(x,y)] é definido utilizando um diagrama que contém os elementos de D. $I[q(x,y)]=T \Leftrightarrow$ existe no diagrama uma seta de x_I para y_I. Quais setas devem ser colocadas no diagrama é definido após o desenvolvimento de
$I[(\forall x)(\neg(\forall y)q(x,y)) \rightarrow (\neg(\forall y)q(y,y))]=F$ conforme as definições.

4) Em cada item, inicie o exercício supondo I[H]=F ou I[H]=T. A escolha deve ser feita a partir dos conectivos da fórmula. Se H é do tipo $H = A \rightarrow B$, escolha I[H]=F pois desta escolha decorre que I[A]=T e I[B]=F. Há apenas uma possibilidade para I[A] e I[B], o que não ocorre se I[H]=T. Observe que há conectivos em que não é possível fazer este tipo de escolha. Se $H=A \leftrightarrow B$, nos dois casos I[H]=T ou I[H]=F há várias possibilidades para I[A] e I[B].

a) Não é tautologia.

b) É tautologia.

c) Tente resolver
d) Não é tautologia.
e) Não é tautologia.
f) É tautologia.
g) Não é tautologia.
h) É tautologia.
i) Tente resolver.
j) Não é tautologia.
k) É tautologia.
l) Não é tautologia.
m) Não é tautologia.
n) É tautologia.
o) É tautologia.
p) É tautologia.
q) Não é tautologia.
r) É tautologia.

5) a) Sim. H=*true*, G=p(a).
b) Sim. H=true, G=p(x).

6) Considerando apenas fórmulas E onde a variável x não ocorre livre e I uma interpretação qualquer sobre D, seja B[E] = "$\forall$ d $\in$ U, <x $\leftarrow$ d>I[H] = I[H]". Utilize o princípio da indução na Lógica de Predicados que é igual ao princípio da indução no comprimento das fórmulas.

7) e) Sejam A=($\forall$x)(H $\vee$ G) e B=(($\forall$x)H $\vee$ G). A equivale a B $\Leftrightarrow$ $\forall$ int. I, I[A]=I[B]. Mas I[A]=I[B] $\Leftrightarrow$ {I[A]=F $\Leftrightarrow$ I[B]=F}. I[A]=F $\Leftrightarrow$ I[($\forall$x)(H $\vee$ G)]=F $\Leftrightarrow$ $\exists$ d $\in$ D <x $\leftarrow$ d>I[H $\vee$ G]=F
$\Leftrightarrow$ $\exists$ d $\in$ D <x $\leftarrow$ d>I[H]=F e <x $\leftarrow$ d>I[G]=F $\Leftrightarrow$ $\exists$ d $\in$ D <x $\leftarrow$ d>I[H]=F e I[G]=F
$\Leftrightarrow$ I[($\forall$x)H]=F e I[G]=F $\Leftrightarrow$ I[($\forall$x)H$\vee$G]=F $\Leftrightarrow$ I[B]=F. Observe que nesta demonstração é utilizado o resultado: <x $\leftarrow$ d>I[G]=I[G] pois x não ocorre livre em G.

8) b) Compare este exercício com o item e) do exercício anterior.
Para demonstrar que E_1 não implica E_2 é definido um contra-exemplo. Considere H=p(x) e G=q(x). Seja I uma interpretação sobre $\mathbb{N}$ tal que I[p(x)]=T $\Leftrightarrow$ x_I é um número par, I[q(x)]=T $\Leftrightarrow$ x_I é um número ímpar. Conforme esta interpretação I[E_1] = T e I[E_2]=F. Para demonstrar que E_2 implica E_1, suponha por absurdo que E_2 não implica E_1. Logo, $\exists$ int. I; I[E_2]=T e I[E_1]=F. Mas, I[E_2]=T $\Leftrightarrow$ I[($\forall$x)H $\vee$ ($\forall$x)G] = T $\Leftrightarrow$ I[($\forall$x)H]=T ou I[($\forall$x)G]=T $\Leftrightarrow$ $\forall$ d_1 $\in$ D <x $\leftarrow$ d_1>I[H]=T ou $\forall$ d_2 $\in$ D <x $\leftarrow$ d_2>I[G]=T Por outro lado, I[E_1]=F $\Leftrightarrow$ I[($\forall$x)(H$\vee$G)]=F $\Leftrightarrow$ $\exists$ d_3 $\in$ D <x $\leftarrow$ d_3>I[H$\vee$G]=F $\Leftrightarrow$ $\exists$ d_3 $\in$ D <x $\leftarrow$ d_3>I[H]=F e <x $\leftarrow$ d_3>I[G]=F. As afirmações "$\forall$ d_1 $\in$ D <x $\leftarrow$ d_1>I[H]=T ou $\forall$ d_2 $\in$ D <x $\leftarrow$ d_2>I[G]=T" e "$\exists$ d_3 $\in$ D <x $\leftarrow$ d_3>I[H]=F e <x $\leftarrow$ d_3>I[G]=F" são contraditórias. Portanto, E_2 implica E_1.

9) b) {$\forall$ d $\in$ D <x $\leftarrow$ d>I[($\forall$x)p(x,y)] = I[($\forall$x)p(x,y)]} $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ {$\forall$ d $\in$ D <x $\leftarrow$ d>I[($\forall$x)p(x,y)]=T $\Leftrightarrow$ I[($\forall$x)p(x,y)]=T}. Mas,
$\forall$ d $\in$ D <x $\leftarrow$ d>I[($\forall$x)p(x,y)]=T $\Leftrightarrow$ $\forall$ d_1 $\in$ D, $\forall$ d $\in$ D <x $\leftarrow$ d_1><x $\leftarrow$ d>I[p(x,y)]=T
$\Leftrightarrow$ $\forall$ d_1 $\in$ D <x $\leftarrow$ d_1>I[p(x,y)]=T $\Leftrightarrow$ I[($\forall$x)p(x,y)]=T

10) a) Seja I uma interpretação sobre $\mathbb{N}$ tal que I[p(x)]=T $\Leftrightarrow$ x_I é par, I[x]=4. Demonstre que I[H]=T.

Por outro lado, $(\forall^*)H = (\forall x)(p(x) \wedge \neg(\forall x)p(x))$. Suponha que existe interpretação I tal que $I[(\forall^*)H]=T$. Logo, $I[(\forall x)(p(x) \wedge \neg(\forall x)p(x))]=T \Leftrightarrow \forall\, d \in D$
$<x \leftarrow d>I[(p(x) \wedge \neg(\forall x)p(x))]=T \Leftrightarrow$
$\forall\, d \in D <x \leftarrow d>I[(p(x)]=T$ e $<x \leftarrow d>I[\neg(\forall x)p(x)]=T \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall\, d \in D <x \leftarrow d>I[(p(x)]=T$ e $<x \leftarrow d>I[(\forall x)p(x)]=F$
$\Leftrightarrow \forall\, d \in D <x \leftarrow d>I[p(x)]=T$ e $\exists\, d_1 \in D <x \leftarrow d_1><x \leftarrow d>I[p(x)]=F$
$\Leftrightarrow \forall\, d \in D <x \leftarrow d>I[p(x)]=T$ e $\exists\, d_1 \in D <x \leftarrow d_1>I[p(x)]=F$. Esta última afirmação é contraditória. Logo, $\forall$ interpretação I, $I[(\forall^*)H]=F$ e $(\forall^*)H$ é contraditória.

b) $G = p(x) \vee \neg(\exists x)p(x)$. As demonstrações de que G não é tautologia e $(\exists^*)G$ é uma tautologia são análogas às demonstrações do item anterior.

11) a) H é insatisfatível $\Leftrightarrow \forall$ int. I, $I[(\forall x)(\exists z)(\exists y)p(x,z,y)]=F \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists\, d_3 \in D, \forall\, d_2 \in D, \forall\, d_1 \in D; <y \leftarrow d_1><z \leftarrow d_2><x \leftarrow d_3>I[p(x,y,z)]=F$
$\Leftrightarrow \exists\, d_3 \in D, \forall\, d_2 \in D, \forall\, d_1 \in D; p_I(d_3,d_1,d_2)=F$
H_s é insatisfatível $\Leftrightarrow \forall$ int. I, $I[(\forall x)p(x,g(x),f(x))]=F$
$\Leftrightarrow \exists\, d \in D, <x \leftarrow d>I[p(x,g(x),f(x))]=F$
$\Leftrightarrow \exists\, d \in D\ p_I(d,g_I(d),f_I(d))=F$
As duas afirmações "$\exists\, d_3 \in D, \forall\, d_2 \in D, \forall\, d_1 \in D; p_I(d_3,d_2,d_1)=F$" e "$\exists\, d \in D\ p_I(d,g_I(d),f_I(d))=F$" são equivalentes pois g_I e f_I são arbitrárias e diferentes. Portanto, H é insatisfatível $\Leftrightarrow H_s$ é insatisfatível.

b) A generalização consiste em considerar p(x,y,z) uma fórmula H qualquer que contém ocorrências livres de x, y, z. Neste caso, H_s é obtida de H substituindo as ocorrências de y e z em H por g(x) e f(x) respectivamente. A demonstração do resultado geral é feita utilizando o princípio da indução onde
B[E] = "se $E = (\forall x)(\exists z)(\exists y)H$ e $E_s = (\forall x)H_s$, então E é insatisfatível $\Leftrightarrow E_s$ é insatisfatível".

12) a) $H = p(x) \vee \neg(\exists x)p(x)$. Demonstre que H é factível e $(\exists^*)H$ é uma tautologia.

b) $G = p(x)$. Demonstre que G é factível e $(\exists^*)G$ não é tautologia.

c) Não, devido ao resultado do item b).

13) Considere $x_1,\ldots,x_n$ as variáveis que ocorrem livres em H e $y_1,\ldots,y_m$ as que ocorrem em G.

a) Tem-se que $(\forall^*)H=(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)H$. $\neg(\forall^*)H$ equivale a $(\exists^*)\neg H \Leftrightarrow \forall$ int. I, $I[\neg(\forall^*)H] = I[(\exists^*)\neg H]$.
Mas, $I[\neg(\forall^*)H] = I[(\exists^*)\neg H] \Leftrightarrow \{I[\neg(\forall^*)H]=T \Leftrightarrow I[(\exists^*)\neg H]=T\}$.
$I[\neg(\forall^*)H]=T \Leftrightarrow I[(\forall^*)H]=F \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow I[(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)H]=F \Leftrightarrow \exists\, d_1 \in D,\ldots,\exists\, d_n \in D; <x_n \leftarrow d_n>\ldots<x_1 \leftarrow d_1>I[H]=F \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists\, d_1 \in D,\ldots,\exists\, d_n \in D; <x_n \leftarrow d_n>\ldots<x_1 \leftarrow d_1>I[\neg H]=T \Leftrightarrow I[(\exists^*)\neg H]=T$.
Portanto, $\neg(\forall^*)H$ equivale a $(\exists^*)\neg H$.

14) Considere $x_1,\ldots,x_n$ as variáveis que ocorrem livres em H

a) Falsa. Considere $H = p(x) \vee \neg(\exists x)p(x)$. Neste caso, $(\exists^*)H$ é tautologia e H não é tautologia. Demonstre este fato.

b) Verdadeira. Observe inicialmente que a implicação "H é tautologia $\Rightarrow (\exists^*)H$ é tautologia" equivale a "$(\exists^*)H$ não é tautologia $\Rightarrow$ H não é tautologia"
Mas $(\exists^*)H$ não é tautologia $\Leftrightarrow \exists$ int. I; $I[(\exists^*)H]=F \Leftrightarrow \exists$ int. I; $I[(\exists x_1)\ldots(\exists x_n)H]=F \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists$ int. I; $\forall\, d_1 \in D,\ldots,\forall\, d_n \in D; <x_n \leftarrow d_n>\ldots<x_1 \leftarrow d_1>I[H]=F$. Fazendo na última afirmação $J=<x_n \leftarrow d_n>\ldots<x_1 \leftarrow d_1>I$; conclui-se que $\exists$ int. J; $J[H]=F \Leftrightarrow$ H não é tautologia.

c) Verdadeira. Demonstre.

d) Verdadeira. Suponha que $(\forall^*)H$ é satisfatível.
Logo, $\exists$ int. I, $I[(\forall^*)H]=T \Leftrightarrow \exists$ int. I; $I[(\forall x_1)...(\forall x_n)H]=T \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists$ int I, $\forall d_1 \in D,...,\forall d_n \in D; <x_n \leftarrow d_n>...<x_1 \leftarrow d_1>I[H]=T$. Fazendo na última afirmação $J=<x_n \leftarrow d_n>...<x_1 \leftarrow d_1>I$; conclui-se que $\exists$ int. J; $J[H]=T \Leftrightarrow$ H é satisfatível.

15) a) $H=(p(x) \vee \neg p(x))$.
b) $H=(p(a) \vee \neg p(a))$.
c) $H=(p(x) \vee \neg(\forall x)p(x))$.
d) Não. Demonstre utilizando a mesma técnica do exercício anterior.

16) a) Seja $H = (\forall x)(\forall y)(\forall z)((p(x,x) \wedge p(y,y) \wedge \neg p(x,y)) \rightarrow p(z,z))$. Demonstre, utilizando diagramas que descrevem $I[p(x,y)]$, que $I[H] = T$ para toda interpretação I sobre U, onde $|U| = 2$. Considere uma interpretação J tal que $J[p(x,y)]$ é descrita pelo diagrama. Demonstre que $J[H] = F$.

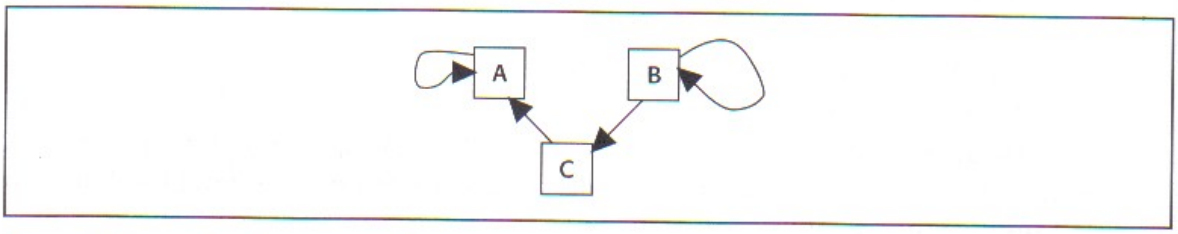


Figura 4 Interpretação do predicado p.

18) a) Seja I uma interpretação sobre o conjunto das pessoas tal que $I[p(x)]=T \Leftrightarrow x_1$ é político, $I[q(x)]=T \Leftrightarrow x_1$ é cientista, $I[r(x)]=T \Leftrightarrow x_1$ é esperto. A sentença é representada por
$H = ((\forall x)(p(x) \rightarrow r(x)) \wedge (\forall x)(q(x) \rightarrow \neg r(x))) \rightarrow \neg(\exists x)(q(x) \wedge p(x))$. O argumento é válido se $\forall$ interpretação J, $J[H]=T$. Suponha que $J[H]=F$. Mas,
$J[H]=F \Leftrightarrow J[(\forall x)(p(x) \rightarrow r(x)) \wedge (\forall x)(q(x) \rightarrow \neg r(x))]=T$ e
$J[\neg(\exists x)(q(x) \wedge p(x))]=F$
$\Leftrightarrow J[(\forall x)(p(x) \rightarrow r(x))]=T$ e $J[(\forall x)(q(x) \rightarrow \neg r(x))]=T$ e
$J[(\exists x)(q(x) \wedge p(x))]=T$
$\Leftrightarrow \forall d_1 \in D <x \leftarrow d_1>J[p(x) \rightarrow r(x)]=T$ e $\forall d_2 \in D <x \leftarrow d_2>J[q(x) \rightarrow \neg r(x)]=T$ e
$\exists d_3 \in D;$
$<x \leftarrow d_3>J[q(x) \wedge p(x)]=T$
$\Leftrightarrow \{\forall d_1 \in D <x \leftarrow d_1>J[p(x)]=F$ ou $<x \leftarrow d_1>J[r(x)]=T\}$ e
$\{\forall d_2 \in D <x \leftarrow d_2>J[q(x)]=F$ ou $<x \leftarrow d_2>J[r(x)]=F\}$ e
$\{\exists d_3 \in D; <x \leftarrow d_3>J[q(x)]=T$ e $<x \leftarrow d_3>J[p(x)]=T\}$
$\Leftrightarrow \{\forall d_1 \in D\ p_J(d_1)=F$ ou $r_J(d_1)=T\}$ e
$\{\forall d_2 \in D\ q_J(d_2)=F$ ou $r_J(d_2)=F\}$ e
$\{\exists d_3 \in D; q_J(d_3)=T$ e $p_J(d_3)=T\}$
Analise as três últimas afirmações e determine se elas são contraditórias. Caso isto ocorra, então $J[H]=T$ e o argumento é válido. Se as afirmações não são contraditórias, então H o argumento não é válido.

b) Seja I uma interpretação sobre o conjunto dos seres vivos tal que $I[p(x)]=T \Leftrightarrow x_1$ é homem, $I[q(x)]=T \Leftrightarrow x_1$ é mortal, I[a]=Sócrates. A sentença é representada por

$H = (\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)) \wedge p(a)) \rightarrow q(a)$ O argumento é válido se $\forall$ int. J, J[H]=T. Suponha que J[H]=F. Mas,

$J[H]=F \Leftrightarrow J[(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)) \wedge p(a)]=T$ e $J[q(a)]=F$

$\Leftrightarrow J[(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))]=T$ e $J[p(a)]=T$ e $J[q(a)]=F$

$\Leftrightarrow \forall\, d \in D <x \leftarrow d>J[p(x) \rightarrow q(x)]=T$ e $J[p(a)]=T$ e $J[q(a)]=F$

$\Leftrightarrow \{\forall\, d \in D$ se $<x \leftarrow d>J[p(x)]=T$ então $<x \leftarrow d>J[q(x)]=T\}$ e $J[p(a)]=T$ e $J[q(a)]=F$

$\Leftrightarrow \{$se $p_J(d)=T$ então $q_J(d)=T\}$ e $p_J(d)=T$ e $q_J(d) = F$

A última afirmação é falsa pois como $p_J(d)=T$ e {se $p_J(d)=T$ então $q_J(d)=T$}, conclui-se que $q_J(d) = T$, o que está em contradição com $q_J(d)=F$. Portanto, J[H]=T e H é tautologia. O argumento é válido.

e) Seja I uma interpretação sobre o conjunto das pessoas de Coromandel. Suponha $I[p(x)]=T \Leftrightarrow x_I$ é barbeiro, $I[q(x,y)]=T \Leftrightarrow x_I$ barbeia y_I. A tradução da sentença é dada pela fórmula

$H = (\exists x)((p(x) \wedge (\forall y)(q(y,y) \rightarrow \neg q(x,y)) \rightarrow \neg(\exists z)q(z,x)))$

A fórmula H é satisfatível mas não é válida. É possível definir uma interpretação J, diferente de I, tal que J[H]=F. Defina esta nova interpretação J.

j) Seja I uma interpretação sobre o conjunto das pessoas tal que $I[p(x)]=T \Leftrightarrow x_I$ é produtivo, $I[q(x)]=T \Leftrightarrow x_I$ é esforçado, trabalhe muito e tenha inspirações. A tradução da sentença na Lógica de Predicados é $H = (\forall x)(p(x) \leftrightarrow q(x))$. A fórmula H é satisfatível mas não é válida.

19) Seja I uma interpretação sobre o conjunto das pessoas tal que $I[p(x)]=T \Leftrightarrow x_I$ é mulher, $I[p_1(x)]=T \Leftrightarrow x_I$ é dócil, $I[q(x)]=T \Leftrightarrow x_I$ é homem, $I[r(x,y)]=T \Leftrightarrow x_I$ ama y_I. As sentenças são representadas por $H_1=(\forall x)(\ (p(x)\wedge p_1(x)) \rightarrow (\exists y)(q(y)\wedge r(y,x)))$ e $H_2=(\exists x)(p(x)\wedge p_1(x)) \rightarrow (\forall x)(\exists y)(q(y)\wedge r(y,x))$

a) Afirmação falsa. H_1 não implica H_2.

b) Afirmação verdadeira. H_2 implica H_1.

Demonstre as afirmações.

20) A sentença é representada por

$H=((\exists x)(p_1(x)\wedge r(x)\wedge\neg r_1(x))\wedge(\forall x)(p_1(x) \rightarrow (p(x)\wedge r(x)))\wedge(\forall x)(q(x) \rightarrow r_1(x)))$
$\rightarrow(\exists x)(p(x)\wedge r(x)\wedge\neg q(x))$

Demonstre se esta fórmula é uma tautologia. Suponha que exista uma int. J; J[H]=F.

CAPÍTULO 12

Um sistema axiomático na Lógica de Predicados

Introdução

No Capítulo 7 foi analisado o sistema axiomático Pa da Lógica Proposicional. Este capítulo considera uma extensão dos conceitos apresentados no sistema axiomático Pa para Lógica de Predicados, obtendo-se um novo sistema, denominado Par. O sistema Par contém estruturas que permitem a representação e dedução formal de conhecimento na Lógica de Predicados, sendo, portanto, mais rico que o sistema Pa. Observe que a Lógica de Predicados contém um alfabeto mais amplo, o que possibilita uma maior capacidade de representação e dedução de conhecimento.

O Sistema Axiomático Par

O sistema axiomático Par é um sistema definido na Lógica de Predicados.

Definição (elementos básicos do sistema axiomático Par). O sistema axiomático Par, da Lógica de Predicados, é definido pela composição dos quatro elementos:

- O alfabeto da Lógica de Predicados.
- O conjunto das fórmulas da Lógica de Predicados.
- Um subconjunto das fórmulas, que são denominadas axiomas.
- Um conjunto de regras de dedução.

Os elementos básicos do sistema Par são análogos àqueles considerados no sistema Pa. A única mas grande diferença é que em Par é utilizada a linguagem da Lógica de Predicados. Os axiomas de Par são fórmulas da Lógica de Predicados, análogas aos axiomas do sistema Pa. Além disso, além da Regra Modus Ponens, é considerada mais uma regra de dedução denominada Generalização. O conceito de substituição segura de um termo por uma variável, necessário na definição dos axiomas de Par, é considerado a seguir.

Definição (substituição segura). Sejam H uma fórmula, x uma variável e t um termo da Lógica de Predicados.

- A fórmula $H\{x \leftarrow t\}$ é a fórmula obtida de H substituindo as ocorrências livres de x em H pelo termo t.
- A substituição, indicada por $\{x \leftarrow t\}$, é dita segura para H quando toda variável de t ocorre livre em $H\{x \leftarrow t\}$.

Exemplo (substituição segura). Considere a fórmula

$$H = (\exists w)(p(x,w) \rightarrow (\forall y)q(y,w,z))$$

e os termos $t_1 = f(z)$ e $t_2 = g(w)$. Neste caso, as substituições

$$H\{x \leftarrow t_1\} = (\exists w)(p(f(z),w) \rightarrow (\forall y)q(y,w,z))$$
$$H\{z \leftarrow t_1\} = (\exists w)(p(x,w) \rightarrow (\forall y)q(y,w,f(z))).$$

são substituições seguras, pois a variável z em t_1, ocorre livre em $H\{x \leftarrow t_1\}$ e em $H\{z \leftarrow t_1\}$. Por outro lado, a substituição a seguir não é segura.

$$H\{x \leftarrow t_2\} = (\exists w)(p(g(w),w) \rightarrow (\forall y)q(y,w,z))$$

Neste caso, a variável w em t_2, não ocorre livre em $H\{x \leftarrow t_2\}$.
Finalmente,

$$H\{w \leftarrow t_2\} = (\exists w)(p(x,w) \rightarrow (\forall y)q(y,w,z)).$$

Neste caso, a variável w em t_2, não ocorre em $H\{w \leftarrow t_2\}$. Observe que a variável w ocorre somente ligada em H e $H\{w \leftarrow t_2\} = H$. Portanto, esta substituição é segura.

Definição (axiomas do sistema Par). O sistema axiomático Par possui cinco esquemas de axiomas. Os três primeiros são os mesmos esquemas de fórmulas considerados em Pa. Neste caso, as fórmulas H, G e E são fórmulas da Lógica de Predicados.

- $Ax1 = (H \vee H) \rightarrow H$
- $Ax2 = H \rightarrow (G \vee H)$
- $Ax3 = (H \rightarrow G) \rightarrow ((E \vee H) \rightarrow (G \vee E))$
- $Ax4 = (\forall x)H \rightarrow H\{x \leftarrow t\}$, onde $\{x \leftarrow t\}$ é uma substituição segura para H.
- $Ax5 = (\forall x)(H \vee G) \rightarrow (H \vee (\forall x)G)$, onde x não ocorre livre em H.

Observe que o conjunto dos axiomas de Par é uma extensão dos axiomas de Pa. Há infinitos axiomas, representados por esquemas de fórmulas, que utilizam apenas o conectivo $\forall$.

A partir do conectivo $\forall$, o conectivo $\exists$ também pode ser obtido. No axioma A×4, é necessário enfatizar que a substituição $\{x \leftarrow t\}$ deve ser segura. Um exemplo deste axioma é a fórmula

$$(\forall x)p(x) \rightarrow p(a).$$

Neste caso, a substituição considerada é $\{x \leftarrow a\}$, que é segura para $p(x)$. Por outro lado, um exemplo do axioma A×5 é a fórmula

$$(\forall x)(p(y) \vee q(x)) \rightarrow (p(y) \vee (\forall x)q(x)).$$

Validade dos Axiomas de Par. Os axiomas do sistema Par são tautologias da Lógica de Predicados. Em Par, como em Pa, o conhecimento dado *a priori* é representado por axiomas, que são tautologias. As demonstrações da validade dos axiomas A×1, A×2 e A×3 são análogas às demonstrações consideradas no sistema Pa. As demonstrações da validade dos outros axiomas são feitas a partir do lema a seguir.

Lema (substitutividade). Sejam H uma fórmula, x uma variável e t um termo, tal que $\{x \leftarrow t\}$ é uma substituição segura para H. Considere I uma interpretação sobre o domínio U.

$$\text{Se } I[H\{x \leftarrow t\}] = F \text{ e } I[t] = s, \text{ então } \langle x \leftarrow s\rangle I[H] = F$$

Demonstração. Esta demonstração utiliza indução no comprimento de H e é proposta como exercício.

Proposição (validade de axioma A×4). O axioma

$$A\times4 = (\forall x)H \rightarrow H\{x \leftarrow t\},$$

onde $\{x \leftarrow t\}$ é uma substituição segura para H, é uma tautologia.

Demonstração. Suponha por absurdo que A×4 não é uma tautologia. Mas,

A×4 não é uma tautologia $\Leftrightarrow \exists$ I sobre U; $I[A\times4] = F$ e

$$\begin{aligned} I[A\times4] = F &\Leftrightarrow I[(\forall x)H \rightarrow H\{x \leftarrow t\}] = F \\ &\Leftrightarrow I[(\forall x)H] = T \text{ e } I[H\{x \leftarrow t\}] = F \\ &\Leftrightarrow \forall\, d \in U, \langle x \leftarrow d\rangle I[H] = T \text{ e } I[H\{x \leftarrow t\}] = F. \end{aligned}$$

Seja $s \in U$ tal que $I[t] = s$. Logo, pelo lema anterior,

$$\text{se } I[H\{x \leftarrow t\}] = F, \text{ então } \langle x \leftarrow s\rangle I[H] = F.$$

Portanto, existe $s \in U$, tal que $\langle x \leftarrow s\rangle I[H] = F$. Logo,

$$\begin{aligned} I[A\times4] = F &\Leftrightarrow \forall\, d \in U, \langle x \leftarrow d\rangle I[H] = T \text{ e } I[H\{x \leftarrow t\}] = F \\ &\Rightarrow \forall\, d \in U, \langle x \leftarrow d\rangle I[H] = T \text{ e } \exists\, s \in U; \langle x \leftarrow s\rangle I[H] = F. \end{aligned}$$

As duas últimas afirmações são contraditórias. Logo, A×4 é uma tautologia.

Proposição (validade de axioma A×5). O axioma

$$A\times5 = (\forall x)(H \vee G) \rightarrow (H \vee (\forall x)G),$$

onde x não ocorre livre em H, é uma tautologia.

Demonstração. Suponha por absurdo que A×5 não é uma tautologia. Mas,

A×5 não é uma tautologia $\Leftrightarrow \exists$ I sobre U; I[A×5] = F e

$$\begin{aligned} I[A\times5] = F \quad &\Leftrightarrow I[(\forall x)(H \vee G) \rightarrow (H \vee (\forall x)G)] = F \\ &\Leftrightarrow I[(\forall x)(H \vee G)] = T \text{ e } I[H \vee (\forall x)G] = F \\ &\Leftrightarrow \forall\, d \in U, \langle x \leftarrow d\rangle I[H \vee G] = T \text{ e } I[H] = F \text{ e } I[(\forall x)G] = F \\ &\Leftrightarrow \forall\, d \in U, \langle x \leftarrow d\rangle I[H] = T \text{ e /ou } \langle x \leftarrow d\rangle I[G] = T \text{ e} \\ &\qquad I[H] = F \text{ e } I[(\forall x)G] = F \end{aligned}$$

Como x não ocorre livre em H, $\langle x \leftarrow d\rangle I[H] = I[H]$, logo

$$\begin{aligned} I[A\times5] = F \Leftrightarrow \forall\, d \in U, &\ I[H] = T \text{ e /ou } \langle x \leftarrow d\rangle I[G] = T \text{ e} \\ &\ I[H] = F \text{ e } I(\forall x)G] = F \\ \Leftrightarrow I[H] = T \text{ e/ou } \forall\, d \in U, &\ \langle x \leftarrow d\rangle I[G] = T \text{ e} \\ &\ I[H] = F \text{ e } I[(\forall x)G] = F \\ \Leftrightarrow I[H] = T \text{ e/ou } &\ I[(\forall x)G] = T \text{ e} \\ &\ I[H] = F \text{ e } I[(\forall x)G] = F \end{aligned}$$

A última afirmação é uma contradição, logo I[A×5] = T e portanto, A×5 é uma tautologia.

O sistema Par possui dois esquemas de regras de inferência: Modus Ponens e Generalização. A definição da regra Modus Ponens em Par é análoga a definição de Modus Ponens em Pa;

Definição (regras de inferência no sistema Par: Modus Ponens e Generalização).
Sejam H e G fórmulas da lógica de predicados e x uma variável.

- A regra de inferência do sistema Par, denominada Modus Ponens, é definida pelo procedimento: *tendo*, H e (H → G) *deduza* G.
- A regra de inferência do sistema Par, denominada Generalização e indicada por GE, é definida pelo procedimento: *tendo*, G *deduza* $(\forall x)G$.

Como a regra Modus Ponens, a regra de inferência Generalização, GE, é um conjunto infinito de regras, pois a fórmula H e a variável x são arbitrárias. Ela determina que se há um conhecimento representado pela fórmula H, dado *a priori*, então é possível concluir o conhecimento representado por $(\forall x)H$. Suponha, por exemplo, que se tenha deduzido a fórmula p(x). Nesta dedução, a variável x é arbitrária. Logo, a partir da regra de inferência Generalização, GE, conclui-se que $(\forall x)p(x)$.

Notação. Para representar a regra de inferência Generalização, é considerada a notação

$$GE = \frac{H}{(\forall x)H}$$

Notação. Como no sistema Pa, em Par são consideradas as correspondências.

$$H \rightarrow G \text{ denota } (\neg H \vee G),$$
$$(H \rightarrow \textit{false}) \text{ denota } \neg H,$$
$$(H \leftrightarrow G) \text{ denota } (H \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow H),$$
$$(H \wedge G) \text{ denota } \neg(\neg H \vee \neg G) \text{ e}$$
$$(\exists x)H \text{ denota } \neg(\forall x)\neg H.$$

Conseqüência Lógica em Par

Da mesma forma que o sistema Pa, o sistema de dedução Par também define uma estrutura para representação e dedução de conhecimento. Os axiomas representam o conhecimento dado *a priori* e as regras de inferência o mecanismo de inferência. O conhecimento obtido a partir da aplicação das regras de inferência, Modus Ponens e Generalização, é representado pelas fórmulas denominadas teoremas de Par. As definições de prova, conseqüência lógica e teoremas em Par são análogas àquelas apresentadas no sistema Pa.

Definição (prova no sistema Par). Sejam: H uma fórmula e β um conjunto de fórmulas denominadas de hipóteses. Uma prova de H a partir de β, no sistema axiomático Par, é uma seqüência de fórmulas $H_1, H_2, ..., H_n$, onde se tem:

- $H = H_n$.

e para todo i tal que $1 \leq i \leq n$,

- H_i é um axioma ou
- $H_i \in \beta$ ou
- H_i é deduzida de H_j e H_k, utilizando a regra Modus Ponens, onde $j<i$ e $k<i$ ou
- H_i é deduzida de H_j, utilizando a regra Generalização, onde $j<i$.

Definição (conseqüência lógica no sistema Par). Dada uma fórmula H e um conjunto de hipóteses β, então H é uma conseqüência lógica de β em Par, se existe uma prova de H a partir de β.

Definição (teorema no sistema Par). Uma fórmula H é um teorema em Par se existe uma prova de H, em Par, que utiliza apenas os axiomas. Neste caso, o conjunto de hipóteses é vazio.

A notação utilizada no sistema Pa para indicar conseqüência lógica $\beta \vdash H$ também é utilizada em Par. Como o sistema Par é uma extensão de Pa, todos os teoremas de Pa são também teoremas de Par. Logo, não há problemas em se considerar a mesma notação. Entretanto, é necessário ficar claro no contexto, qual sistema está sendo utilizado. Nas proposições que se seguem, β é um conjunto de hipóteses e A, B e C são fórmulas da Lógica de Predicados.

Proposição 1 Se x não ocorre livre em A e $\vdash (A \rightarrow B)$ então $\vdash (A \rightarrow (\forall x)B)$

Demonstração.

1.	$\vdash (\neg A \vee B)$	hip
2.	$\vdash (\forall x)(\neg A \vee B)$	GE, 1.
3.	$\vdash (\forall x)(\neg A \vee B) \rightarrow (\neg A \vee (\forall x)B)$	A×5
4.	$\vdash (\neg A \vee (\forall x)B)$	MP, .2, .3
5.	$\vdash (A \rightarrow (\forall x)B)$	reescrita

Proposição 2 $(\forall x)(\forall y)A \vdash (\forall y)(\forall x)A$.

Demonstração.

1.	$\vdash (\forall x)(\forall y)A$	hip
2.	$\vdash (\forall x)(\forall y)A \rightarrow (\forall y)A$	A×4
3.	$\vdash (\forall y)A$	MP, .1, .2
4.	$\vdash (\forall y)A \rightarrow A$	A×4
5.	$\vdash A$	MP, .3, .4
6.	$\vdash (\forall x)A$	GE, .5
7.	$\vdash (\forall y)(\forall x)A$	GE, .6

A linha 2. é o axioma 4 na forma

$$(\forall x)(\forall y)A \rightarrow (\forall y)A\{x \leftarrow x\}$$

Da mesma forma a linha 4. é o axioma 4 na forma

$$(\forall y)A \rightarrow A\{y \leftarrow y\}$$

Observe que nos dois casos a substituição é segura.

Teorema da dedução. Seja β um conjunto de hipóteses da Lógica de Predicados. Suponha que

$$\beta \cup \{A\} \vdash B$$

é uma prova que não utiliza a regra da Generalização em variáveis livres de A. Neste caso,

$$\beta \vdash (A \rightarrow B)$$

Demonstração. Esta demonstração é análoga à demonstração do teorema da dedução na Lógica Proposicional. Neste caso

$$\beta \cup \{A\} \vdash B$$

é uma prova que não utiliza a regra da Generalização em variáveis livres de A e deve-se demonstrar que

$$\beta \vdash (A \rightarrow B).$$

Como

$$\beta \cup \{A\} \vdash B,$$

então existe uma seqüência de fórmulas

$$C_1, \ldots, C_n,$$

que é uma prova de B a partir de $\beta \cup \{A\}$, onde $B = C_n$. É demonstrado a seguir, utilizando o princípio da indução, que

$$\beta \vdash (A \rightarrow C_i)$$

para todo inteiro i, $1 \leq i \leq n$. A partir deste fato, fazendo $i = n$, conclui-se que

$$\beta \vdash (A \rightarrow B),$$

pois $B = C_n$. A demonstração de $\beta \vdash (A \rightarrow C_i)$ utiliza o princípio da indução no inteiro i. Considere a asserção:

$$A(i) = \text{“se } \beta \cup \{A\} \vdash C_i, \text{ então } \beta \vdash (A \rightarrow C_i)\text{”}.$$

Demonstração da base de indução: Fazendo $i = 1$ na asserção A(i)

$$A(1) = \text{“se } \beta \cup \{A\} \vdash C_1, \text{ então } \beta \vdash (A \rightarrow C_1)\text{”}.$$

Deve-se demonstrar que

$$\beta \vdash (A \rightarrow C_1),$$

tendo que

$$\beta \cup \{A\} \vdash C_1.$$

A demonstração deste fato é idêntica à demonstração feita na Lógica Proposicional, considerando também o caso 1 onde C_1 é um axioma ou $C_1 \in \beta$ ou $C_1 = A$ e o caso 2 onde C_1 não é dos tipos indicados no caso 1.

Demonstração do passo da indução. Esta demonstração considera a segunda forma do princípio da indução. Neste caso, para cada inteiro i, $1 \leq i \leq n$ é demonstrado que se A(k) é verdadeira para todo $k < i$, então A(i) também é verdadeira. Em outras palavras, se a asserção

$$A(k) = \text{“se } \beta \cup \{A\} \vdash C_k, \text{ então } \beta \vdash (A \rightarrow C_k)\text{”}$$

é verdadeira para todo $k < i$, então também é verdadeira a asserção

$$A(i) = \text{“se } \beta \cup \{A\} \vdash C_i, \text{ então } \beta \vdash (A \rightarrow C_i)\text{”}$$

Para demonstrar A(i), suponha

$$\beta \cup \{A\} \vdash C_i$$

e demonstre a seguir que

$$\beta \vdash (A \rightarrow C_i).$$

Neste caso, se C_i é axioma, hipótese ou é igual a A, então, utilizando as mesmas demonstrações dos casos 1 e 2 da base da indução conclui-se que

$$\beta \vdash (A \rightarrow C_i).$$

Suponha então que C_i não é axioma, nem hipótese e é diferente de A. Neste caso, C_i é deduzida utilizando Modus Ponens ou Generalização. Se C_i é deduzida utilizando Modus Ponens, a demonstração de

$$\beta \vdash (A \rightarrow C_i).$$

é idêntica àquela da Lógica Proposicional. No caso em C_i é deduzida utilizando a Generalização, então

$$C_i = (\forall x)C_j.$$

onde $j < i$. Pela hipótese de indução,

$$\beta \vdash (A \rightarrow C_j).$$

Considere a prova a seguir.

1.	$\beta \vdash (A \rightarrow C_j)$	hip de indução
2.	$\beta \vdash (\forall x)(A \rightarrow C_j)$	GE, 1.
3.	$\beta \vdash (\forall x)(\neg A \vee C_j) \rightarrow (\neg A \vee (\forall x)C_j)$	A×5 , observe que x não ocorre livre em A, pois a generalização do passo anterior não é feita em variáveis livres de A.
4.	$\beta \vdash (\neg A \vee (\forall x)C_j)$	MP, 2., .3
5.	$\beta \vdash (A \rightarrow (\forall x)C_j)$	reescrita
6.	$\beta \vdash (A \rightarrow C_i)$	reescrita, $C_i = (\forall x)C_j$

Portanto, em todos os casos,

$$\beta \vdash (A \rightarrow C_i).$$

Observe que nesta demonstração é utilizado o axioma A×5, no qual x não deve ocorrer livre em A. Esta é a razão em se ter no enunciado do teorema da dedução a restrição sobre a utilização da regra Generalização.

Corolário 1 (teorema da dedução). Seja β um conjunto de hipóteses da Lógica de Predicados. Se

$$\beta \cup \{A\} \vdash B,$$

onde A é uma fórmula fechada, então

$$\beta \vdash (A \rightarrow B)$$

Demonstração. Como A é uma fórmula fechada, não possui variáveis livres. O corolário decorre imediatamente do teorema da dedução.

Poposição 3. Se x não ocorre livre em A e $A \vdash B$ então $\vdash A \rightarrow (\forall x)B$

Demostração

1. $A \vdash B$ hip
2. $\vdash A \rightarrow B$ teor. ded. 1.
3. $\vdash A \rightarrow B\ (\forall x)\ B$ pro 1, 2.

Proposição 4 $\vdash (\forall x)(\forall y)A \rightarrow (\forall y)(\forall x)A$.

Demonstração. Pela proposição 2,

$$(\forall x)(\forall y)A \vdash (\forall y)(\forall x)A.$$

Como $(\forall x)(\forall y)A$ é fechada, aplicando o corolário do teorema da dedução obtém-se que

$$\vdash (\forall x)(\forall y)A \rightarrow (\forall y)(\forall x)A.$$

Proposição 5 Suponha que x ocorra livre em A e y não ocorre em A. Tem-se que:

$$(\forall x)A \vdash (\forall y)(A\{x \leftarrow y\}).$$

Demonstração.

1.	$\vdash (\forall x)A$	hip
2.	$\vdash (\forall x)A \rightarrow A\{x \leftarrow y\}$	A×4, $\{x \leftarrow y\}$ é substituição segura para A.
3.	$\vdash A\{x \leftarrow y\}$	MP, .1, .2
4.	$\vdash (\forall y)(A\{x \leftarrow y\})$	GE

Proposição 6 $\vdash (\forall x)A \rightarrow (\forall y)(A\{x \leftarrow y\})$.

Demonstração. Pela proposição 5,

$$(\forall x)A \vdash (\forall y)(A\{x \leftarrow y\}).$$

Na demonstração da proposição 5 aplica-se a Generalização em $A\{x \leftarrow y\}$, adicionando o quantificador $(\forall x)$. Como a variável x não ocorre livre em $(\forall x)A$, é possível aplicar o teorema da dedução e obter

$$\vdash (\forall x)A \rightarrow (\forall y)(\ A\{x \leftarrow y\}).$$

Proposição 7 $\{(\forall x)\neg A, (\forall x)A\} \vdash$ *false*.

Demonstração.

1.	$\vdash (\forall x)\neg A$	hip
2.	$\vdash (\forall x)\neg A \rightarrow \neg A$	Ax4, $\{x \leftarrow x\}$ é substituição segura para A.
3.	$\vdash \neg A$	MP, .1, .2
4.	$\vdash (\forall x)A$	hip
5.	$\vdash (\forall x)A \rightarrow A$	Ax4, $\{x \leftarrow x\}$ é substituição segura para A.
6.	$\vdash A$	MP, .4, .5
7.	$\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow false)$	pr15, Capítulo 7.
8.	$\vdash (A \rightarrow false)$	MP, .3, .7
9.	$\vdash false$	MP, .6, .8

Proposição 8 $\vdash (\forall x)\neg A \rightarrow \neg(\forall x)A$.

Demonstração. Pela proposição 7,

$$\{(\forall x)\neg A, (\forall x)A\} \vdash false.$$

Na demonstração da proposição 7 não se utiliza a Generalização. Logo, é possível aplicar o teorema da dedução e obter

$$(\forall x)\neg A \vdash ((\forall x)A \rightarrow false),$$

que é reescrita como

$$(\forall x)\neg A \vdash (\neg(\forall x)A \vee false).$$

Por outro lado, (veja exercícios),

$$\vdash (\neg(\forall x)A \vee false) \rightarrow \neg(\forall x)A$$

Aplicando Modus Ponens, obtém-se

$$(\forall x)\neg A \vdash \neg(\forall x)A.$$

Aplicando novamente o teorema da dedução é demonstrado o resultado final

$$\vdash (\forall x)\neg A \rightarrow \neg(\forall x)A.$$

Proposição 9 Suponha que x ocorra livre em A Tem-se que:
$(A \rightarrow B) \vdash A \rightarrow (\forall x)B$.

Demonstração.

1.	$\vdash \neg A \vee B$	hip
2.	$\vdash (\forall x)(\neg A \vee B)$	GE, .1
3.	$\vdash (\forall x)(\neg A \vee B) \rightarrow (\neg A \vee (\forall x)B)$	Ax5
4.	$\vdash \neg A \vee (\forall x)B$	MP, .2,.3
5.	$\vdash A \rightarrow (\forall x)B$	reescrita

A proposição a seguir considera um caso em que não é possível a aplicação do teorema da dedução.

Proposição 10 Tem-se que $(\forall y)p(x,y) \vdash (\forall y)p(a,y)$.

Demonstração.

1.	$\vdash (\forall y)p(x,y)$	hip
2.	$\vdash (\forall x)(\forall y)p(x,y)$	GE, .1
3.	$\vdash (\forall x)(\forall y)p(x,y) \rightarrow (\forall y)p(a,y)$	A×4
4.	$\vdash (\forall y)p(a,y)$	MP, .2,.3

A partir da proposição 10 não é possível concluir

$$\vdash (\forall y)p(x,y) \rightarrow (\forall y)p(a,y).$$

pois na prova acima é utilizada a regra Generalização na variável x, que é livre na hipótese $(\forall y)p(x,y)$. Observe também que $(\forall y)p(x,y)$ não implica $(\forall y)p(a,y)$. Suponha uma interpretação I sobre os naturais $\mathbb{N}$ tal que

$$I[a] = 7,\ I[x] = 0 \text{ e } I[p(x,y)] = T \Leftrightarrow x_I \leq y_I.$$

Neste caso,

$$I[(\forall y)p(x,y)] = T \text{ e } I[(\forall y)p(a,y)] = F.$$

Portanto a fórmula

$$(\forall y)p(x,y) \rightarrow (\forall y)p(a,y).$$

não é uma tautologia. Logo, pelo teorema da completude, analisado a seguir, esta fórmula não tem prova em Par.

Completude do Sistema Axiomático Par

Da mesma forma que o sistema Pa, o sistema de dedução Par é definido tendo também como objetivo a sua completude e correção. A escolha dos axiomas e das regras de dedução possibilita a demonstração de sua completude. A análise da correção e completude em Par é considerada a seguir.

Teorema da correção. Seja H uma fórmula da Lógica de Predicados.
Se $\vdash$ H então H é uma tautologia,

Demonstração. Esta demonstração é análoga à demonstração do teorema da correção em Pa. Os axiomas de Par são tautologias, conforme analisado anteriormente. As regras Modus Ponens e Generalização preservam a validade das fórmulas. Logo, como os teoremas são derivados dos axiomas utilizando tais regras, tem-se que os teoremas são tautologias.

Teorema da Completude. Seja H uma fórmula da Lógica de Predicados.
Se H é uma tautologia então $\vdash$ H.

Comentário. A demonstração deste teorema não é considerada neste livro, podendo ser encontrada, por exemplo, em [Andrews, 1986] [Enderton, 1972] ou [Mendelson, 1987].

Proposição (consistência). O sistema axiomático Par é consistente.

Demonstração. A demonstração desta proposição é idêntica àquela considerada no sistema Pa.

Exercícios

1) Demonstre que a regra de inferência Generalização preserva a validade das fórmulas.
2) Demonstre que
   a) $\vdash (\neg(\forall x)A \vee \mathit{false}) \rightarrow \neg(\forall x)A$.
   b) $\vdash (\forall x)A \rightarrow A$.
   c) $\vdash (\forall x)(A \rightarrow A)$.
   d) $\{A, (\forall x)A \rightarrow B\} \vdash (\forall x)B$.
   e) $\vdash (\forall x)(\forall y)(\forall z)A \rightarrow (\forall z)(\forall y)(\forall x)A$.
   f) $\vdash (\forall x)(A \rightarrow B) \rightarrow ((\exists x)A \rightarrow (\exists x)B)$. Obs. Utilize que $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
   g) $\vdash (\forall x)A \rightarrow (\exists x)A$.
   h) $\vdash (\forall x)((A \wedge B) \rightarrow B)$
   i) $\vdash (\forall x)(A \rightarrow (A \vee B))$
3) Comente: Por que a regra de inferência GE utiliza apenas o quantificador universal? Por que não é necessário definir regra de inferência que utiliza o quantificador existencial?
4) Sejam H uma fórmula, x uma variável e t um termo, tal que $\{x \leftarrow t\}$ é uma substituição segura para H. Considere I uma interpretação sobre o domínio U.
   Demonstre que se $I[H\{x \leftarrow t\}] = F$ e $I[t] = s$, então $<x \leftarrow s>I[H] = F$
5) Demonstre o teorema da correção em Par utilizando indução finita.

Sugestões e soluções de exercícios selecionados

1) Basta demonstrar que a fórmula $H \rightarrow (\forall x)H$ é uma tautologia. Observe que no capítulo anterior foi demonstrado que $p(x) \rightarrow (\forall x)p(x)$ é tautologia.
2) a) Demonstre em Pa que $\vdash (\neg P \vee \mathit{false}) \rightarrow \neg P$. Observe que em Pa $(\neg P \vee \mathit{false})$ denota $P \rightarrow \mathit{false}$ ou $\neg P$. Utilizando esta mesma prova em Par obtenha $\vdash (\neg(\forall x)A \vee \mathit{false}) \rightarrow \neg(\forall x)A$.
   b) $(\forall x)A \rightarrow A$ é um axioma.
   c) Foi demonstrado em Pa $\vdash P \rightarrow P$. Faça a mesma demonstração em Par substituindo P por A, obtendo uma prova de $\vdash A \rightarrow A$. Finalmente, use a Gen e conclua $\vdash (\forall x)(A \rightarrow A)$.
   d) Utilize a Gen em A. Em seguida use MP com $(\forall x)A \rightarrow B$, obtendo B. Finalmente, use Gen em B e conclua $(\forall x)B$.
   e) Faça uma prova inteiramente análoga à prova de $\vdash (\forall x)(\forall y)A \rightarrow (\forall y)(\forall x)A$ analisada neste capítulo.

f) Observe inicialmente que $(\exists x)A$ é uma notação para $\neg(\forall x)\neg A$. Portanto, deve-se demonstrar que

$\vdash (\forall x)(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg(\forall x)\neg A \rightarrow \neg(\forall x)\neg B)$. Utilizando o teorema da dedução várias vezes e o resultado $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$, este problema se reduz a demonstrar que

$\{(\forall x)(A \rightarrow B), (\forall x)\neg B\} \vdash (\forall x)\neg A$.

A partir de $(\forall x)(A \rightarrow B)$, utilizando o axioma 4 e Modus Ponens obtém-se $(A \rightarrow B)$. A partir de $(\forall x)\neg B$, utilizando o axioma 4 e Modus Ponens obtém-se $\neg B$. Utilize o resultado $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ e $(A \rightarrow B)$ e deduza $(\neg B \rightarrow \neg A)$. Em seguida, utilize $\neg B$ e deduza $\neg A$. Finalmente, utilizando a Generalização em $\neg A$ tem-se $(\forall x)\neg A$.

g) Observe inicialmente que $(\exists x)A$ é denotado como $\neg(\forall x)\neg A$.

É necessário provar que $\vdash (\forall x)A \rightarrow \neg(\forall x)\neg A$. Utilizando o teorema da dedução, deve-se provar

$\{(\forall x)A\} \vdash \neg(\forall x)\neg A$. Utilizando a notação onde $\neg(\forall x)\neg A$ corresponde $(\forall x)\neg A \rightarrow$ *false*, deve-se provar

$\{(\forall x)A\} \vdash (\forall x)\neg A \rightarrow$ *false*. Utilizando novamente o teorema da dedução, deve-se provar

$\{(\forall x)A, (\forall x)\neg A\} \vdash$ *false*. A partir de $(\forall x)A$ utilizando o axioma 4, deduza A. Da mesma forma, a partir de $(\forall x)\neg A$, utilizando o axioma 4 deduza $\neg A$. Pela proposição 15 em Pa $\vdash A \rightarrow (\neg A \rightarrow$ *false*$)$. Este resultado também pode ser utilizado em Par. Aplique Modus Ponens duas vezes e conclua *false*.

h) Demonstre em Pa que $\vdash (P \wedge Q) \rightarrow Q$. Utilize a mesma prova em Par e obtenha $\vdash (A \wedge B) \rightarrow B$. Finalmente, utilize a Generalização e prove o resultado desejado.

i) Para demonstrar $\vdash (\forall x)(A \rightarrow (A \vee B))$, basta demonstrar $\vdash A \rightarrow (A \vee B)$ e depois utilizar a Generalização.

Para demonstrar $\vdash A \rightarrow (A \vee B)$, é necessário demonstrar $\{A\} \vdash A \vee B$ e depois utilizar o teorema da dedução. Para demonstrar $\{A\} \vdash A \vee B$, deve-se demonstrar $\{A\} \vdash B \vee A$ e utilizar o resultado $\vdash (B \vee A) \rightarrow (A \vee B)$ aplicando Modus Ponens. Para demonstrar $\{A\} \vdash B \vee A$, deve-se demonstrar $\vdash A \rightarrow (B \vee A)$ e utilizar o teorema da dedução. Mas $A \rightarrow (B \vee A)$ é um axioma, logo $\vdash A \rightarrow (B \vee A)$.

3) O quantificador existencial pode ser definido a partir do quantificador universal pela equivalência $(\forall x)H$ equivale a $\neg(\exists x)\neg H$

4) Considere B[E] = "$\forall$ int. I; I[t]=s, se I[E{x $\leftarrow$ t}]=F então <x $\leftarrow$ s>I[E] = F". Aplique o princípio da indução na Lógica de Predicados.

5) Considere B[E] = "se $\vdash$ E, então E é tautologia". Aplique o princípio da indução na Lógica de Predicados".

CAPÍTULO 13

Tableaux semânticos na Lógica de Predicados

Introdução

No Capítulo 8 foram analisados os tableaux semânticos na Lógica Proposicional e neste capítulo é considerada a sua extensão para a Lógica de Predicados. Esta extensão é análoga à extensão do sistema axiomático Pa para o sistema Par. O novo sistema utiliza os elementos básicos da Lógica de Predicados para definir noções de prova na Lógica de Predicados.

Tableaux Semânticos na Lógica de Predicados

Um tableau semântico na Lógica de Predicados é uma seqüência de fórmulas, que se apresenta sob a forma de uma árvore, construída de forma análoga aos tableaux da Lógica Proposicional. Os elementos básicos que compõem esta árvore são definidos a seguir.

Definição (elementos básicos de um tableau semântico). Os elementos básicos de um tableau semântico, na Lógica de Predicados, são definidos pela composição dos elementos:

- O alfabeto da Lógica de Predicados.
- O conjunto das fórmulas da Lógica de Predicados.
- Um conjunto de regras de dedução.

O tableau semântico na Lógica de Predicados utiliza a linguagem da Lógica de Predicados, sendo uma extensão do tableau semântico da Lógica Proposicional. Além disso, a construção do tableau semântico e os conceitos de tableau fechado e aberto são análogos.

Definição (regras de inferência do tableau semântico). Sejam A e B duas fórmulas da Lógica de Predicados. As regras de inferência do tableau semântico na Lógica de Predicados são $R_1, \ldots, R_{13}$. As regras $R_1, \ldots, R_9$ são as mesmas do tableau semântico da Lógica Proposicional. As outras regras são indicadas a seguir.

$$R_{10} = \frac{\neg(\forall x)A}{(\exists x)\neg A} \qquad R_{11} = \frac{\neg(\exists x)A}{(\forall x)\neg A}$$

$$R_{12} = \frac{(\exists x)A}{A(t)} \qquad R_{13} = \frac{(\forall x)A}{A(t)}$$

onde t é novo — onde t é qualquer.

As regras R_{10} e R_{11} trocam as posições da negação $\neg$ e dos quantificadores. Na regra R_{10}, tendo $\neg(\forall x)A$ é deduzido $(\exists x)\neg A$. Neste caso, o quantificador universal é transformado em um quantificador existencial.

Analogamente, em R_{11}, tendo $\neg(\exists x)A$ é deduzido $(\forall x)\neg A$. Neste caso, o quantificador existencial é transformado em um quantificador universal. Nas duas regras, os resultados têm os quantificadores no início das fórmulas. Isso é importante no método, pois as regras R_{12} e R_{13} são aplicadas apenas em fórmulas com quantificadores em seu início. Além disso, observe que $\neg(\forall x)A$ equivale a $(\exists x)\neg A$ e $\neg(\exists x)A$ equivale a $(\forall x)\neg A$. Logo, R_{10} e R_{11} mantêm a validade das fórmulas.

Na regra R_{12}, tendo $(\exists x)A$ é deduzido $A(t)$, onde t é um termo novo, que ainda não apareceu na prova. Na regra R_{13}, tendo $(\forall x)A$ é deduzido $A(t)$ onde t é um termo qualquer.

Por que na regra R_{12}, o termo t deve necessariamente ser novo? Considere, por exemplo, $A = p(x)$ e uma interpretação I sobre o domínio dos alunos de Ciência da Computação, tal que $I[p(x)] = T$ se e somente se x_I é inteligente. Neste caso

$$I[(\exists x)p(x)] = T$$

significa

existe aluno de Ciência da Computação que é inteligente.

A regra R_{12} deduz a partir de

$$(\exists x)p(x)$$

a fórmula $p(t)$. Se

$$I[(\exists x)p(x)] = T,$$

então existe termo t tal que

$$I[p(t)] = T.$$

Como toda regra deve preservar a validade das fórmulas, o que é necessário para se ter a correção do tableau semântico, t deve ser um termo tal que

$$p_I(t_I) = T.$$

t_I deve ser um aluno de Ciência da Computação, que é inteligente. Portanto, t não deve ser um termo qualquer, mas sim um termo tal que t_I é um aluno inteligente. Neste sentido, t deve ser um termo novo, que ainda não apareceu no tableau.

Na regra R_{13}, o termo t pode ser qualquer. Considere novamente

$$A = p(x)$$

e a interpretação I definida acima. Logo,

$$I[(\forall x)p(x)] = T$$

significa

"todo aluno de Ciência da Computação é inteligente".

A regra R_{13} deduz a partir de

$$(\forall x)p(x)$$

a fórmula p(t). Se

$$I[(\forall x)p(x)] = T,$$

então para todo termo t,

$$I[p(t)] = T.$$

Logo, para qualquer termo t,

$$p_I(t_I) = T.$$

Isto é, qualquer aluno de Ciência da Computação é inteligente. Portanto, neste caso a escolha de t é livre.

Exemplo. (construção de um tableau semântico). Considere a fórmula

$$H = (\forall x)(\forall y)p(x,y) \rightarrow p(a,a).$$

O tableau semântico associado a $\neg H$ é indicado na Figura 1.

.1	$\neg((\forall x)(\forall y)p(x,y) \rightarrow p(a,a))$	$\neg H$
.2	$(\forall x)(\forall y)p(x,y)$	R_8, .1
.3	$\neg p(a,a)$	R_8, .1
.4	$(\forall y)p(a,y)$	R_{13}, .2, faça t=a.
.5	$p(a,a)$	R_{13}, .4, faça t=a.
	fech.	

Figura 1 Tableau fechado.

A construção de um tableau semântico na Lógica de Predicados é análoga à construção na Lógica Proposicional. No tableau acima, R_{13} é aplicada duas vezes substituindo as variáveis pelo termo "a". Observe que este termo é escolhido livremente, mas tendo como objetivo o fechamento do tableau. A definição de tableau semântico fechado na Lógica de Predicados é idêntica àquela considerada na Lógica Proposicional.

Exemplo (construção de um tableau semântico). Considere a fórmula

$$H = (\forall x)p(x) \rightarrow (\exists y)p(y).$$

O tableau semântico associado a $\neg H$ é indicado na Figura 2.

.1	$\neg((\forall x)p(x) \rightarrow (\exists y)p(y))$	$\neg H$
.2	$(\forall x)p(x)$	R_8, .1
.3	$\neg(\exists y)p(y)$	R_8, .1
.4	$(\forall y)\neg p(y)$	R_{11}, .3
.5	$\neg p(a)$	R_{13}, .4, faça t = a
.6	$p(a)$	R_{13}, .2, faça t = a.
	fech.	

Figura 2 Tableau fechado.

Conseqüência Lógica em Tableaux Semânticos

Os tableaux semânticos na Lógica de Predicados são uma extensão dos tableaux semânticos na Lógica Proposicional. Eles definem uma estrutura para representação e dedução de conhecimento na Lógica de Predicados. Esta estrutura é definida por conceitos análogos àqueles considerados na Lógica Proposicional, no Capítulo 8, que são: prova e teorema em tableaux semânticos e conseqüência lógica em tableaux semânticos. Observe que os tableaux semânticos considerados nos exemplos anteriores são fechados, sendo provas de H. Além disso, é utilizada a mesma notação, $\beta \vdash H$, para indicar que H é uma conseqüência lógica de β. Conclui-se dos dois exemplos anteriores que

$$\vdash (\forall x)(\forall y)p(x,y) \rightarrow p(a,a) \text{ e} \vdash (\forall x)p(x) \rightarrow (\exists y)p(y).$$

Exemplo (prova em tableaux semânticos). Considere a fórmula

$$H = (\exists x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow p(a,a).$$

O tableau semântico associado a $\neg H$ é apresentado na Figura 3.

.1	$\neg((\exists x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow p(a,a))$	$\neg H$
.2	$(\exists x)(\exists y)p(x,y)$	R_8, .1
.3	$\neg p(a,a,)$	R_8, .1
.4	$(\exists y)p(t_1,y)$	R_{12}, .2, $x = t_1$, t_1 é novo, $t_1 \neq a$.
.5	$p(t_1,t_2)$	R_{12}, .4, $y = t_2$, t_2 é novo, $t_2 \neq a$, $t_2 \neq t_1$.
	fech. ?????	

Figura 3 Tableau.

No tableau anterior, na linha .3 tem-se o literal $\neg p(a,a)$. O objetivo do desenvolvimento deste tableau é a obtenção do literal $p(a,a)$, o que fecha o ramo. A regra R_{12} é aplicada duas vezes. Na primeira vez, na linha .4, obtém-se $(\exists y)p(t_1,y)$. Neste caso x é substituído por t_1, que deve ser um termo novo. Logo, $t_1 \neq a$. O mesmo ocorre na segunda aplicação de R_{12}. Deve-se ter $t_2 \neq a$ e $t_2 \neq t_1$. Portanto, o tableau não é fechado pois não se tem literais complementares em um mesmo ramo da árvore. Caso a regra R_{12} seja aplicada incorretamente, fazendo $t_1 = a$, $t_2 = a$, o tableau se torna fechado. Tem-se uma prova incorreta de H. Finalmente, observe que H não é uma tautologia. Logo não é possível haver uma prova de H utilizando tableaux semânticos na Lógica de Predicados. Esta conclusão utiliza o teorema da correção apresentado a seguir.

Teorema da Correção. Seja H uma fórmula da Lógica de Predicados. Se existe uma prova de H utilizando tableaux semânticos na Lógica de Predicados, então H é uma tautologia.

Demonstração. Esta demonstração é análoga à demonstração da correção dos tableaux semânticos na Lógica Proposicional, sendo proposta como exercício.

Teorema da Completude. Seja H uma fórmula da Lógica de predicados. Se H é uma tautologia então existe uma prova de H no sistema de tableaux semânticos.

Comentário. A demonstração deste teorema não é considerada neste texto, podendo ser encontrada em [Fitting, 1990].

Exemplo (conseqüência lógica em tableaux semânticos). Considere a fórmula

$$H = (\forall x)(p(x) \wedge q(x)) \rightarrow (\forall x)p(x).$$

É demonstrado na Figura 4, utilizando tableaux semânticos, que $\vdash H$.

.1	$\neg((\forall x)(p(x)\wedge q(x)) \rightarrow (\forall x)p(x))$	$\neg H$
.2	$(\forall x)(p(x)\wedge q(x))$	R_8, .1
.3	$\neg(\forall x)p(x)$	R_8, .1
.4	$(\exists x)\neg p(x)$	R_{10}, .3
.5	$\neg p(a)$	R_{12}, .4
.6	$p(a)\wedge q(a)$	R_{13}, .2, faça t=a.
.7	$p(a)$	R_1, .6
.8	$q(a)$	R_1, .6
	fech.	

Figura 4 Tableau fechado.

No tableau da Figura 4, foi utilizada a regra R_{12} antes da regra R_{13} e na aplicação de R_{13} é feito: t = a. Desta forma, é obtido um tableau fechado. Logo, H é uma tautologia. Considere o tableau da Figura 5 onde a ordem de aplicação das regras é invertida.

.1	$\neg((\forall x)(p(x)\wedge q(x)) \rightarrow (\forall x)p(x))$	$\neg H$
.2	$(\forall x)(p(x)\wedge q(x))$	R_8, .1
.3	$\neg(\forall x)p(x)$	R_8, .1
.4	$(\exists x)\neg p(x)$	R_{10}, .3
.5	$p(t)\wedge q(t)$	R_{13}, .2, t é qualquer.
.6	$p(t)$	R_1, .5
.7	$q(t)$	R_1, .5
.8	$\neg p(t_1)$	R_{12}, .4, t_1 é novo, $t_1 \neq t$
	aberto.	

Figura 5 Tableau aberto.

Neste caso, na aplicação de R_{13}, o termo t é qualquer. Em seguida, na aplicação de R_{12}, o termo t_1 deve ser um termo que não pertence ao tableau, $t_1 \neq t$. Logo, o tableau obtido não é fechado. Considerando os dois tableaux anteriores, dada uma tautologia H, é possível determinar tableaux abertos e fechados associados a $\neg H$. Por outro lado, se H não é uma tautologia, então pelo teorema da correção não existe tableau fechado associado a H.

Os teoremas da correção e da completude justificam as afirmações (veja exercícios).

a) Se H é tautologia, então existe tableau fechado associado a H.

b) Se H é tautologia, então pode existir tableau aberto associado a H.

c) Se H não é tautologia, então não existe tableau fechado associado a H.

d) Se H não é tautologia, então todo tableau associado a H é aberto.

e) Se um tableau associado a H é fechado, então H é tautologia.

f) Se um tableau associado a H é aberto, então não se pode concluir que H não é tautologia.

g) Se todo tableau associado a H é aberto, então H não é tautologia.

Observe que na Lógica Proposicional tais relações são mais simples, sendo dada por: H é tautologia se e somente se todo tableau associado a H é fechado. Isto significa que na Lógica Proposicional, se existe um tableau fechado associado a H, então todos os outros também são fechados.

Exemplo (conseqüência lógica em tableaux semânticos). São propostos no Capítulo 11 os exercícios.

a) Se $E_1 = (\exists x)(p(x) \rightarrow q(x))$ e $E_2 = (\forall x)p(x) \rightarrow (\exists x)q(x)$, então E_1 equivale a E_2.

b) Se $E_1 = (\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$ e $E_2 = (\exists x)p(x) \rightarrow (\forall x)q(x)$, então E_2 implica E_1, mas E_1 não implica E_2.

Tais exercícios são resolvidos, neste exemplo, utilizando tableaux semânticos.

a) Neste caso,

$$E_1 = (\exists x)(p(x) \rightarrow q(x)) \text{ e } E_2 = (\forall x)p(x) \rightarrow (\exists x)q(x).$$

Tem-se que

$$E_1 \text{ equivale a } E_2 \text{ se e somente se } (E_1 \leftrightarrow E_2) \text{ é uma tautologia.}$$

Por outro lado,

$$(E_1 \leftrightarrow E_2) \text{ é tautologia se e somente se} \vdash (E_1 \leftrightarrow E_2).$$

É demonstrado na Figura 7, utilizando tableaux semânticos, que

$$\vdash (E_1 \leftrightarrow E_2).$$

.1	$\neg((\exists x)(p(x) \rightarrow q(x)) \leftrightarrow ((\forall x)p(x) \rightarrow (\exists x)q(x)))$,				$\neg(E_1 \leftrightarrow E_2)$
.2	$(\exists x)(p(x) \rightarrow q(x)) \wedge \neg((\forall x)p(x) \rightarrow (\exists x)q(x))$		$\neg(\exists x)(p(x) \rightarrow q(x)) \wedge ((\forall x)p(x) \rightarrow (\exists x)q(x))$		R_9, .1
.3	$(\exists x)(p(x) \rightarrow q(x))$		$\neg(\exists x)(p(x) \rightarrow q(x))$		R_1, .2
.4	$\neg((\forall x)p(x) \rightarrow (\exists x)q(x))$		$(\forall x)p(x) \rightarrow (\exists x)q(x)$		R_1, .2
.5	$(\forall x)p(x)$	R_8, .4	$(\forall x)\neg(p(x) \rightarrow q(x))$		R_{11}, .3
.6	$\neg(\exists x)q(x)$	R_8, .4			
.7	$p(a) \rightarrow q(a)$	R_{12}, .3	$\neg(\forall x)p(x)$	$(\exists x)q(x)$	R_3, .4
.8	$(\forall x)\neg q(x)$	R_{11}, .6	$(\exists x)\neg p(x)$		R_{10}, .7
.9	$\neg q(a)$	R_{13}, .8	$\neg p(a)$	$q(a)$	R_{12}, .7, .8
.10	$p(a)$	R_{13}, .5	$\neg(p(a) \rightarrow q(a))$	$\neg(p(a) \rightarrow q(a))$	R_{13}, .5
.11			$p(a)$	$p(a)$	R_8, .10
.12			$\neg q(a)$	$\neg q(a)$	R_8, .10
.13	$\neg p(a)$	$q(a)$ R_3, .7	fech.	fech.	
	fech.	fech.			

Figura 7 Tableau fechado.

Como o tableau é fechado, então $(E_1 \leftrightarrow E_2)$ é uma tautologia. Logo, E_1 equivale a E_2.

b) Neste caso, as fórmulas são análogas àquelas do item a). Observe que os quantificadores universais são substituídos por quantificadores existenciais e vice-versa. Tem-se que

$$E_1 = (\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)) \text{ e } E_2 = (\exists x)p(x) \rightarrow (\forall x)q(x)$$

onde E_2 implica E_1 e E_1 não implica E_2. Mas,

$$E_2 \text{ implica } E_1 \text{ se e somente se } (E_2 \rightarrow E_1) \text{ é uma tautologia.}$$

Por outro lado,

$$(E_2 \rightarrow E_1) \text{ é tautologia se e somente se } \vdash (E_2 \rightarrow E_1).$$

É demonstrado na Figura 8, utilizando tableaux semânticos, que $\vdash (E_2 \rightarrow E_1)$.

.1	$\neg(((\exists x)p(x) \rightarrow (\forall x)q(x)) \rightarrow (\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)))$,			$\neg(E_2 \rightarrow E_1)$
.2		$(\exists x)p(x) \rightarrow (\forall x)q(x)$		R_8,.1
.3		$\neg(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$		R_8,.1
.4		$(\exists x)\neg(p(x) \rightarrow q(x))$		R_{10},.3
.5		$\neg(p(a) \rightarrow q(a))$		R_{12},.4
.6		$p(a)$		R_8,.5
.7		$\neg q(a)$		R_8,.5
.8	$\neg(\exists x)p(x)$		$(\forall x)q(x)$	R_3,.2
.9	$(\forall x)\neg p(x)$	R_{11},.8	$q(a)$	R_{13},.8
.10	$\neg p(a)$	R_{13},.9	fech	
	fech.			

Figura 8 Tableau fechado.

Como o tableau é fechado, então $(E_2 \rightarrow E_1)$ é uma tautologia. Logo, E_2 implica E_1. Considere o tableau associado a $\neg(E_1 \rightarrow E_2)$, apresentado na Figura 9. Como E_1 não implica E_2, não é possível obter um tableau fechado associado a $\neg(E_1 \rightarrow E_2)$.

.1	$\neg((\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)) \rightarrow ((\exists x)p(x) \rightarrow (\forall x)q(x)))$,	$\neg(E_1 \rightarrow E_2)$
.2	$(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$	R_8,.1
.3	$\neg((\exists x)p(x) \rightarrow (\forall x)q(x))$	R_8,.1
.4	$(\exists x)p(x)$	R_8,.3
.5	$\neg(\forall x)q(x)$	R_8,.3
.6	$(\exists x)\neg q(x)$	R_{10},.5
.7	$p(a)$	R_{12},.4
.8	$\neg q(b))$	R_{12},.6
.9	$p(a) \rightarrow q(a)$	R_{13},.2
	$\neg p(a)$ fech. / $q(a)$ aberto	P_3, .9

Figura 9 Tableau aberto.

O tableau da Figura 9 não é fechado pois contém ramos abertos. Por que não é possível fechar o tableau? Na linha .7 é aplicada a regra R_{12}, substituindo a variável x pela constante "a", obtendo p(a). Neste ponto do tableau, "a" é uma nova constante, que não aparece nas linhas .1 a .6. Na linha .8, a regra R_{12} é aplicada novamente. Na nova aplicação de R_{12}, a variável x não pode mais ser substituída por "a". É feita então sua substituição pela constante "b", obtendo $\neg q(b)$. Em seguida, quando a regra R_{13} é aplicada na linha .2, x pode ser substituída por "a" ou por "b". No tableau acima é escolhida a substituição por "a", o que determina um ramo aberto na árvore. Caso seja escolhida a outra substituição, ocorrerá também outro ramo aberto. Portanto, não é possível escolher uma substituição conveniente para fechar o tableau. Observe que mesmo modificando a ordem de aplicação das regras, não é possível fechar o tableau. Logo, não existe tableau fechado associado $\neg(E_1 \rightarrow E_2)$. Isto é E_1 não implica E_2.

Exemplo (conseqüência lógica em tableaux semânticos). Considere os argumentos.

Todo aluno de Ciência da Computação é mais inteligente que algum aluno de Engenharia.

Logo, não existe aluno de Engenharia que é mais inteligente que todos os alunos de Ciência da Computação.

Os argumentos acima são válidos? Uma prova que utiliza tableaux semânticos para responder esta questão é analisada. Seja I uma interpretação sobre o domínio dos alunos da Universidade tal que,

$$I[p(x)] = T \Leftrightarrow x_I \text{ é aluno de Ciência da Computação.}$$
$$I[q(x)] = T \Leftrightarrow x_I \text{ é aluno de Engenharia.}$$
$$I[r(x,y)] = T \Leftrightarrow x_I \text{ é mais inteligente que } y_I.$$

Considerando esta interpretação, os argumentos são representados na Lógica de Predicados como

$$H = (\forall x)(\, p(x) \rightarrow (\exists y)(q(y) \wedge r(x,y))) \rightarrow \neg(\exists y)(\, q(y) \wedge (\forall x)(p(x) \rightarrow r(y,x))).$$

.1	$\neg((\forall x)(p(x) \rightarrow (\exists y)(q(y) \wedge r(x,y))) \rightarrow \neg(\exists y)(\, q(y) \wedge (\forall x)(p(x) \rightarrow r(y,x)))$	$\neg H$
.2	$(\forall x)(\, p(x) \rightarrow (\exists y)(q(y) \wedge r(x,y)))$	R_8,.1
.3	$\neg\neg(\exists y)(\, q(y) \wedge (\forall x)((p(x) \rightarrow r(y,x))$	R_8,.1
.4	$(\exists y)(\, q(y) \wedge (\forall x)(p(x) \rightarrow (r(y,x))$	R_5,.3
.5	$(q(a) \wedge (\forall x)(p(x) \rightarrow r(a,x))$	R_{12},.4
.6	$q(a)$	R_1,.5
.7	$(\forall x)(p(x) \rightarrow (r(a,x)\,)$	R_1,.5
.8	$p(a) \rightarrow (\exists y)(q(y) \wedge r(a,y))$	R_{13},.2
.9	$\neg p(a)$ aberto $(\exists y)(q(y) \wedge r(a,y))$	R_3,.8

Figura 10 Tableau com ramo aberto.

O tableau da Figura 10 contém um ramo aberto. A partir deste fato, ainda não se pode concluir que H não é uma tautologia. O leitor deve provar que todos os tableaux associados a $\neg H$ são abertos (veja exercícios) e concluir que H não é tautologia. Portanto, os argumentos não são válidos.

Exercícios

1) Considere as regras R_{10} e R_{11} do tableau semântico. Utilize as equivalências
   $(\exists x)A$ equivale a $\neg(\forall x)\neg A$
   e
   $(\forall x)A$ equivale a $\neg(\exists x)\neg A$
   e demonstre que $\{R_5, R_{10}\}$ equivale a $\{R_5, R_{11}\}$.
2) Demonstre, utilizando tableaux semânticos, se os pares de fórmulas a seguir são equivalentes.
   a) $(\forall x)q(y)$ e $q(y)$
   b) $(\exists x)q(y)$ e $q(y)$
   c) $(\forall x)(p(x) \wedge q(y))$ e $((\forall x)p(x) \wedge q(y))$
   d) $(\exists x)(p(x) \wedge q(y))$ e $((\exists x)p(x) \wedge q(y))$
   e) $(\forall x)(p(x) \vee q(y))$ e $((\forall x)p(x) \vee q(y))$
   f) $(\exists x)(p(x) \vee q(y))$ e $((\exists x)p(x) \vee q(y))$
   g) $(\forall x)(p(x) \rightarrow q(y))$ e $((\exists x)p(x) \rightarrow q(y))$
   h) $(\forall x)(q(y) \rightarrow p(x))$ e $(q(y) \rightarrow (\forall x)p(x))$
   i) $(\exists x)(p(x) \rightarrow q(y))$ e $((\forall x)p(x) \rightarrow q(y))$
   j) $(\exists x)(q(y) \rightarrow p(x))$ e $(q(y) \rightarrow (\exists x)p(x))$

3) Demonstre, utilizando tableaux semânticos, que.
   a) Se $E_1 = (\forall x)(p(x) \wedge q(x))$ e $E_2 = (\forall x)p(x) \wedge (\forall x)q(x)$, então E_1 equivale a E_2.
   b) Se $E_1 = (\forall x)(p(x) \vee q(x))$ e $E_2 = (\forall x)p(x) \vee (\forall x)q(x)$ então E_2 implica E_1, mas E_1 não implica E_2.
   c) Se $E_1 = (\exists x)(p(x) \vee q(x))$ e $E_2 = (\exists x)p(x) \vee (\exists x)q(x)$ então E_1 equivale a E_2.
4) Demonstre, utilizando tableaux semânticos, que.
   a) $\vdash (\forall x)(p(x) \rightarrow (q(x) \rightarrow r(x)) \rightarrow ((p(x) \rightarrow q(x)) \rightarrow (p(x) \rightarrow r(x))))$
   b) $\vdash (\forall x)((p(x) \rightarrow q(x)) \rightarrow (\neg q(x) \rightarrow \neg p(x)))$
   c) $\vdash (\forall x)((p(x) \rightarrow q(x)) \rightarrow (\neg q(x) \rightarrow \neg p(x))$
   d) $\vdash (\forall x)p(x) \leftrightarrow (\forall y)p(y)$
   e) $\vdash (\forall x)(\forall y)(p(x,y) \rightarrow (q(x,y) \rightarrow p(x,y)))$
5) Algumas das fórmulas a seguir são tautologias, outras não. Para cada fórmula demonstre, utilizando tableaux semânticos, se ela é uma tautologia.
   a) $(\forall x)p(x) \rightarrow p(a)$
   b) $p(a) \rightarrow (\exists x)p(x)$
   c) $(\forall x)(\neg(\forall y)q(x,y)) \rightarrow (\neg(\forall y)q(y,y))$
   d) $p(x) \rightarrow (\forall x)p(x)$
   e) $(\forall x)p(x) \rightarrow (\exists x)p(x)$
   f) $(\exists x)(p(x) \rightarrow q(x)) \rightarrow ((\exists x)p(x) \rightarrow (\exists x)q(x))$
   g) $(\forall x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow (\exists y)p(y,y)$
   h) $(\exists x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow (\exists y)p(y,y)$
   I) $(\exists x)(p(x) \rightarrow r(x)) \leftrightarrow ((\forall x)p(x) \rightarrow (\exists x)r(x))$
   j) $(\forall x)(p(x) \vee r(x)) \rightarrow ((\forall x)p(x) \vee (\forall x)r(x))$
   k) $((\forall x)p(x) \vee (\forall x)r(x)) \rightarrow (\forall x)(p(x) \vee r(x))$
   l) $(\exists x)(p(x) \leftrightarrow r(x)) \leftrightarrow ((\exists x)p(x) \leftrightarrow (\exists x)r(x))$
   m) $(\exists x)((p(x) \rightarrow p(a)) \wedge (p(x) \rightarrow p(b)))$
   n) $(\exists x)(\forall y)((q(x,y) \wedge q(y,x)) \rightarrow (q(x,x) \leftrightarrow q(y,y)))$
   o) $(\forall x)(p(x) \wedge q(x)) \leftrightarrow (\forall x)(p(x) \rightarrow \neg q(x))$
   p) $(\forall x)(p(x,a) \rightarrow (\forall x)q(x,b)) \leftrightarrow ((\exists x)p(x,a) \rightarrow (\forall x)q(x,b))$
   q) $(\forall x)(\exists y)(p(x,y) \rightarrow q(x,y)) \rightarrow ((\forall x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow (\forall x)(\exists y)q(x,y))$
   r) $(\forall x)(\exists y)(p(x,y) \rightarrow q(x,y)) \rightarrow ((\exists x)(\forall y)p(x,y) \rightarrow (\forall x)(\exists y)q(x,y))$
6) Demonstre, utilizando tableaux semânticos, que as fórmulas H e G a seguir, são equivalentes.
   a) $H = (\forall x)(\forall y)p(x,y,z)$, $G = (\forall y)(\forall x)p(x,y,z)$
   b) $H = (\exists x)(\exists y)p(x,y,z)$, $G = (\exists y)(\exists x)p(x,y,z)$
   c) $H = \neg(\exists y)H$, $G = (\forall y)\neg H$
   d) $H = (\exists x)p(x)$, $G = (\exists y)p(y)$
   e) $H = (\forall x)p(x)$, $G = (\forall y)p(y)$
   f) $H = (\forall x)(\forall x)p(x)$, $G = (\forall x)p(x)$
7) Prove que todos os tableaux associados a
   $H = (\forall x)(p(x) \rightarrow (\exists y)(q(y) \wedge r(x,y))) \rightarrow \neg(\exists y)(q(y) \wedge (\forall x)r(y,x))$
   são abertos e conclua que H não é tautologia.
8) Demonstre, utilizando tableaux semânticos, se os argumentos são válidos.
   a) Todo político é "esperto". Zé é político. Portanto, Zé é esperto.
   b) Todo político é "esperto". Zé é "esperto". Portanto, Zé é político.
   c) Todo político é "esperto". Nenhum cientista é "esperto". Portanto, nenhum cientista é político.

d) Todo político é "esperto". Existe indivíduo "esperto", que é inteligente. Portanto, algum político é inteligente.

e) Há político honesto. Há operários honestos. Portanto, há operários que são políticos.

f) Todo barbeiro em Patrocínio barbeia somente quem não se barbeia. Logo, o Sr. Orlando, barbeiro de Patrocínio, não se barbeia.

g) Toda mulher bonita, inteligente e sensível é observada. Nenhuma filha de Sr. Arnaldo é observada. Mulher que não é observada não se casa.. portanto, as filhas de Sr. Arnaldo não se casarão.

h) Se há fé há amor. Se há amor há paz. Se há paz há Deus. Se há Deus, nada faltará.

i) Quem não se ama, não ama ninguém.

9) Demonstre, utilizando tableaux semânticos, se os conjuntos são satisfatíveis.

a) $\{ (\forall x)(\forall y)(p(x,y) \rightarrow \neg p(y,x)), (\forall x)p(x,x),$
$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((p(x,z) \wedge p(y,z)) \rightarrow p(y,z))\}$

b) $\{\neg(\forall x)(\forall y)(p(x,y) \rightarrow \neg p(y,x)), (\forall x)p(x,x),$
$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((p(x,z) \wedge p(y,z)) \rightarrow p(y,z))\}$

c) $\{ (\forall x)(\forall y)(p(x,y) \rightarrow \neg p(y,x)), \neg(\forall x)p(x,x),$
$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((p(x,z) \wedge p(y,z)) \rightarrow p(y,z))\}$

d) $\{ (\forall x)(\forall y)(p(x,y) \rightarrow \neg p(y,x)), (\forall x)p(x,x),$
$\neg(\forall x)(\forall y)(\forall z)((p(x,z) \wedge p(y,z)) \rightarrow p(y,z))\}$

10) Demonstre, utilizando tableaux semânticos, quando as afirmações podem ser verdadeiras ao mesmo tempo.

a) Toda aluna de Ciência da Computação é mais bonita que alguma aluna de Engenharia.

Toda aluna de Engenharia é mais bonita que alguma aluna de Ciência da Computação.

b) Toda aluna de Ciência da Computação é mais bonita que alguma aluna de Engenharia.

Existe aluna de Engenharia que é mais bonita que alguma aluna de Ciência da Computação.

c) Existe aluna de Ciência da Computação que é mais bonita que toda aluna de Engenharia.

Existe aluna de Engenharia que é mais bonita que alguma aluna de Ciência da Computação.

d) Toda aluna de Ciência da Computação é mais bonita que toda aluna de Engenharia.

Existe aluna de Engenharia é mais bonita que alguma aluna de Ciência da Computação.

11) Demonstre, utilizando tableaux semânticos, se o conjunto de argumentos a seguir é satisfatível.

- Toda aluna de Ciência da Computação é mais bonita que alguma aluna de Engenharia.
- Toda aluna de Engenharia é mais bonita que alguma aluna de Ciência da Computação.
- Existe aluna de Ciência da Computação que é mais bonita que toda a aluna de Engenharia.

12) Elaine estava conversando com sua amiga Leandra. Pintou uma profunda reflexão e Elaine disse:

– Há mulheres em Sacracity que têm ciúmes de todo os homens.

Leandra pensou e disse:

– Toda mulher ciumenta tem uma paixão. Entretanto, elas nunca se casam.

Renato, o bom de bola, estava ouvindo o diálogo e concluiu.

– Nenhuma mulher de Sacracity se casará.

Demonstre, utilizando tableaux semânticos, se a conclusão do Renato é válida ou não.

13) Demonstre, utilizando tableaux semânticos se os argumentos a seguir são válidos.
   a) Madalena ama a todos e somente aqueles que amam seu filho. Seu filho ama a todos e somente aqueles que não amam Madalena. Madalena ama a si própria. Portanto, seu filho ama a si próprio.
   b) Há monitor que é bom estudante, mas não é comunicativo. Apenas bons estudantes são monitores. Todo artista é comunicativo. Portanto, nem todo bom estudante é um artista.
14) Considere as afirmações a seguir.
   H_1 = Toda mulher dócil tem um amado.
   H_2 = Se existe mulher dócil, toda pessoa tem um amado.
   Demonstre se as afirmações a seguir são válidas.
   a) H_1 implica H_2.
   b) H_2 implica H_1.
15) Demonstre, utilizando os teoremas da completude e da correção se as afirmações são verdadeiras.
   a) Se H é tautologia, então existe tableau fechado associado a H.
   b) Se H é tautologia, então pode existir tableau aberto associado a H.
   c) Se H não é tautologia, então não existe tableau fechado associado a H.
   d) Se H não é tautologia, então todo tableau associado a H é aberto.
   e) Se existe tableau associado a H fechado, então H é tautologia.
   f) Se existe tableau associado a H que é aberto, então não se pode concluir que H não é tautologia.
   g) Se todo tableau associado a H é aberto, então H não é tautologia.
16) Demonstre o teorema da correção para tableaux semânticos na Lógica de Predicados.
17) Considere o argumento.
   Todo atleta é determinado.
   Toda pessoa determinada e inteligente não é uma perdedora.
   Guga é um atleta e amante do tênis.
   Toda pessoa é amante do tênis se é inteligente.
   Portanto, Guga não é um perdedor.
   Utilize o método dos tableaux semânticos para responder se o argumento acima é válido.
18) É possível definir uma tautologia H, da lógica de predicados H, com um tableau associado aberto? Justifique.

Demonstre o teorema da correção para tableaux semânticos na lógica de predicados.

Sugestões e soluções de exercícios selecionados

1) Para demonstrar que $\{R_5, R_{10}\} \Rightarrow \{R_5, R_{11}\}$ observe que o antecedente de R_{11}, $\neg(\exists x)A$ é equivalente a $\neg\neg(\forall x)\neg A$. Aplicando R_5 em $\neg\neg(\forall x)\neg A$ obtém-se $(\forall x)\neg A$, que é o conseqüente R_{11}. Da mesma forma é demonstrado que $\{R_5, R_{11}\} \Rightarrow \{R_5, R_{10}\}$.

2) Dadas duas fórmulas H e G, H equivale a G $\Leftrightarrow$ $(H \leftrightarrow G)$ é tautologia. Para demonstrar este fato utilizando tableau semântico, inicie o tableau com a fórmula $\neg(H \leftrightarrow G)$. Se for possível obter um tableau fechado então H equivale a G.
3) Dadas duas fórmulas E_1 e E_2, E_1 equivale a E_2 $\Leftrightarrow$ $(E_1 \leftrightarrow E_2)$ é tautologia e E_1 implica E_2 $\Leftrightarrow$ $(E_1 \rightarrow E_2)$ é tautologia. Para demonstrar tais fatos, utilizando tableaux semânticos, inicie o tableau com a fórmula $\neg(E_1 \leftrightarrow E_2)$ ou $\neg(E_1 \rightarrow E_2)$. Se for possível obter um tableau fechado então E_1 equivale a E_2 ou E_1 implica E_2, respectivamente. E_1 não implica E_2 quando não for possível obter tableau fechado.
4) Inicie o tableau com a negação da fórmula a ser provada. Neste caso, inicie com
$\neg((\forall x)((p(x) \rightarrow (q(x) \rightarrow r(x)) \rightarrow ((p(x) \rightarrow q(x)) \rightarrow (p(x) \rightarrow r(x))))$
Os outros itens deste exercício são análogos.
5) Em cada item, inicie o tableau com a negação da fórmula. Se for possível obter um tableau fechado, então a fórmula é uma tautologia. Observe que nem sempre é possível obter um tableau fechado na primeira tentativa.
6) Demonstre em cada caso que é possível obter um tableau fechado a partir de $\neg(H \leftrightarrow G)$.
7) Esta prova é feita por exaustão. Dê argumentos justificando que não é possível obter um tableau fechado a partir de $\neg H$.
8) Em cada item, represente a afirmação na Lógica de Predicados por uma fórmula H. Em seguida, demonstre utilizando tableaux semânticos se H é tautologia. Se for possível obter um tableau fechado a partir de $\neg H$, então H é tautologia e o argumento é válido.
9) Dado um conjunto de fórmulas $\beta = \{A, B, C\}$, β é insatisfatível $\Leftrightarrow$ $\forall$ int. I; $I[A]=F$ ou $I[B]=F$ ou $I[C]=F$ $\Leftrightarrow$ $\forall$ int. I; $I[A \wedge B \wedge C]=F$ $\Leftrightarrow$ $\forall$ int. I; $I[\neg(A \wedge B \wedge C)]=T$ $\Leftrightarrow$ $\neg(A \wedge B \wedge C)$ é tautologia. Portanto, para demonstrar que o conjunto de fórmulas $\beta = \{A, B, C\}$ é insatisfatível basta demonstrar que $\neg(A \wedge B \wedge C)$ é tautologia. Mas para demonstrar se $\neg(A \wedge B \wedge C)$ é tautologia utilizando tableau semântico, é necessário iniciar o tableau com $\neg\neg(A \wedge B \wedge C)$ ou equivalentemente com $(A \wedge B \wedge C)$.
10) Em cada item, represente as afirmações por fórmulas da Lógica de Predicados. As afirmações de cada conjunto podem ser verdadeiras ao mesmo tempo quando o conjunto das fórmulas que as representam é satisfatível. Para demonstrar a satisfatibilidade de um conjunto de fórmulas veja o exercício anterior.
11) Vejas as sugestões dos dois exercícios 9 e 10.
12) Seja I uma interpretação sobre o conjunto das pessoas tal que $I[p(x)]=T$ $\Leftrightarrow$ x_I é mulher, $I[q(x)]=T$ $\Leftrightarrow$ x_I reside em Sacracity, $I[r(x,y)]=T$ $\Leftrightarrow$ x_I tem ciúmes de y_I. $I[p_1(x)]=T$ $\Leftrightarrow$ x_I tem uma paixão, $I[q_1(x)]=T$ $\Leftrightarrow$ x_I se casará. Neste caso, Elaine disse:
– Há mulheres em Sacracity que têm ciúmes de todos os homens,
que é representado por $(\exists x)(p(x) \wedge q(x) \wedge (\forall y)(\neg p(y) \rightarrow r(x,y)))$.
Leandra disse:
– Toda mulher ciumenta tem uma paixão. Entretanto, elas nunca se casam.
que é representado por
$(\forall x)((p(x) \wedge (\exists y) r(x,y)) \rightarrow p_1(x) \wedge q_1 \neg (x))$.
Renato concluiu.
– Nenhuma mulher de Sacracity se casará,
que é representado por
$(\forall x)((p(x) \wedge q(x)) \rightarrow \neg q_1(x))$.
Para demonstrar se a conclusão do Renato é válida ou não, deve-se demonstrar que a fórmula H é uma tautologia

$$H = ((\exists x)(p(x) \wedge q(x) \wedge (\forall y)(\neg p(y) \rightarrow r(x,y)) \wedge (\forall x)((p(x) \wedge (\exists y) r(x,y)) \rightarrow p_1(x))) \rightarrow (\forall x)((p(x) \wedge q(x)) \rightarrow \neg q_1(x))$$

15) a) Afirmação verdadeira. Se H é tautologia, então pelo teorema da completude existe prova de H utilizando tableaux semânticos. Logo, existe tableau fechado associado a H.

b) Afirmação verdadeira. É possível definir uma tautologia H e um tableau aberto associado a H.

c) Afirmação verdadeira. Se H não é tautologia, então pelo teorema da correção não existe prova de H utilizando tableaux semânticos. Logo, não existe tableau fechado associado a H.

d) Afirmação verdadeira. Seguindo o raciocínio do item anterior, conclui-se que não existe tableau fechado associado a H. Portanto, todo tableau associado a H é aberto.

e) Afirmação verdadeira. Se existe tableau associado a H é fechado, então existe prova de H por tableau. Logo, pelo teorema da completude H é tautologia.

f) Afirmação verdadeira. Se existe tableau associado a H que é aberto, isto não significa que não exista tableau fechado associado a H. Logo, não necessariamente H não é tautologia.

g) Afirmação verdadeira. Se todo tableau associado a H é aberto, então não existe prova de H por tableau. Logo, pelo teorema da completude H não é tautologia.

16) Esta demonstração é análoga à demonstração do teorema da correção para tableaux semânticos na Lógica Proposicional. Considere o mesmo raciocínio para as regras R_{10}, R_{11}, R_{12} e R_{13}. Uma demonstração mais rigorosa deve ser feita utilizando o princípio da indução no comprimento das fórmulas ou o princípio da indução na Lógica de Predicados.

17) Utilize as seguintes definições: Seja I uma interpretação sobre o conjunto das pessoas, tal que: $I[p(x)] = T$ se x_1 é atleta. $I[q(x)] = T$ se x_1 é determinado. $I[r(x)] = T$ se x_1 é inteligente. $I[p_2(x)] = T$ se x_1 é amante do tênis. $I[p_1(x)] = T$ se x_1 é perdedor. $I[a] =$ Guga.

18) Sim.

CAPÍTULO 14

Resolução na Lógica de Predicados

Introdução

A resolução na Lógica de Predicados é uma extensão da resolução na Lógica Proposicional. Esta extensão ocorre devido à utilização da linguagem da Lógica de Predicados. O método da resolução na Lógica de Predicados considera os mesmos conceitos: cláusula, literal, regra de resolução etc. Entretanto, devido a presença de variáveis e símbolos de função algumas modificações devem ser consideradas. A definição de resolvente de duas cláusulas na Lógica Proposicional, por exemplo, é analisada a seguir sob o enfoque da Lógica de Predicados.

Definição (resolvente de duas cláusulas na Lógica Proposicional). Considere duas cláusulas da Lógica Proposicional

$$C_1 = \{A_1,\ldots,A_n\}, \text{ e } C_2 = \{B_1,\ldots,B_n\},$$

que possuem literais complementares. Suponha λ um literal em C_1 tal que seu complementar, $\neg\lambda$, pertence a C_2. O resolvente de C_1 e C_2, denominado por $Res(C_1,C_2)$, é definido por:

$$Res(C_1,C_2) = (C_1 - \lambda) \cup (C_2 - \neg\lambda).$$

Se $Res(C_1,C_2) = \{\ \}$, tem-se um resolvente vazio ou trivial.

Exemplo (resolvente de cláusulas). Este exemplo considera o cálculo do resolvente de cláusulas da Lógica de Predicados.

a) Considere as cláusulas

$$C_1 = \{p(x), q(x)\} \text{ e } C_2 = \{\neg p(x), \neg r(x,y)\},$$

que são disjunções de literais (a definição de cláusula na Lógica de Predicados é considerada adiante neste capítulo). Neste caso o resolvente é dado por

$$res(C_1,C_2) = \{q(x), \neg r(x,y)\},$$

pois $\neg p(x)$ é o complementar de $p(x)$.

b) Considere as cláusulas

$$C_1 = \{p(x), q(x)\} \text{ e } C_3 = \{\neg p(a), \neg r(x,y)\}.$$

Neste caso, utilizando a definição acima, o resolvente é

$$res(C_1,C_3) = \{p(x), q(x), \neg p(a), \neg r(x,y)\}.$$

Observe que $\neg p(a)$ é "quase" igual o complementar de $p(x)$. Estes literais seriam complementares se x fosse substituído por "a". Devido à presença de variáveis na Lógica de Predicados, a definição anterior deve ser modificada para se obter

$$res(C_1,C_3) = \{q(a), \neg r(a,y)\}.$$

Observe que neste caso, a variável x é substituída por "a" nos literais $p(x)$, $q(x)$ e $\neg r(x,y)$.

c) A presença de símbolos de função na Lógica de Predicados também determina modificações na resolução. Como deve ser o resolvente das cláusulas

$$C_4 = \{r(x,y)\} \text{ e } C_5 = \{\neg r(y,f(a))\} \text{ ?}$$

d) As cláusulas, denotadas utilizando a notação de conjuntos, não contêm quantificadores que também estão presentes na Lógica de Predicados. Como será definido adiante, os quantificadores são representados implicitamente. A cláusula $C_4 = \{r(x,y)\}$, por exemplo, representa a fórmula

$$C_4 = (\forall x)(\forall y)r(x,y).$$

Devido a tais fatos, a resolução na Lógica de Predicados não é uma simples extensão como ocorreu com os tableaux semânticos na Lógica de Predicados. A resolução na Lógica de Predicados considera a análise das formas prenex, da skolemização e da unificação de expressões.

Forma Prenex

Uma fórmula H da Lógica de Predicados está na forma prenex quando os seus quantificadores ocorrem no início da fórmula. A fórmula

$$(\exists x)(\forall y)(r(x,y) \rightarrow p(y))$$

está na forma prenex pois seus quantificadores ocorrem no início. Neste caso, os quantificadores $(\exists x)$ e $(\forall y)$ são seguidos pela fórmula $(r(x,y) \rightarrow p(y))$, que não possui quantificadores.

Definição (fórmula aberta). Uma fórmula da Lógica de Predicados é aberta se ela não contém quantificadores.

Definição (forma prenex). Uma fórmula H, da Lógica de Predicados, está na forma prenex, se H é do tipo: $H = (Qx_1)...(Qx_n)G$, onde G é uma fórmula aberta e (Qx_i) é um quantificador universal ou existencial.

Exemplo (forma prenex). A fórmula

$$(\exists y)(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x,y))$$

está na forma prenex. Neste caso os quantificadores estão no início da fórmula, seguidos pela fórmula aberta $(p(x) \rightarrow q(x,y))$. A fórmula

$$(\exists y)((\forall x)p(x) \rightarrow q(x,y))$$

não está na forma prenex pois o escopo do quantificador universal é apenas p(x) e não o restante da fórmula.

Uma fórmula está na forma prenex quando os quantificadores estão em seu início. Além disso, o escopo de cada quantificador deve ser o restante da fórmula. Dada uma fórmula H, existe uma fórmula G, equivalente a H, que está na forma prenex. Toda fórmula é equivalente a uma fórmula na forma prenex. O algoritmo prenex, que transforma uma fórmula H em uma fórmula G, que está na forma prenex e é equivalente a H, é considerado a seguir.

Definição (regras prenex). Sejam A e B duas fórmulas e (Q_1), (Q_2) dois quantificadores universais ou existenciais. As regras prenex são:
Nas regras R_1, R_2, R_3 e R_4 x não ocorre livre em B.
Nas regras R_7 e R_8 x não ocorre livre em B e y não ocorre livre em A.

$$R_1 \equiv \frac{(\forall x)A \wedge B}{(\forall x)(A \wedge B)}, \qquad R_2 \equiv \frac{(\forall x)A \vee B}{(\forall x)(A \vee B)}, \qquad R_3 \equiv \frac{(\exists x)A \wedge B}{(\exists x)(A \wedge B)},$$

$$R_4 \equiv \frac{(\exists x)A \vee B}{(\exists x)(A \vee B)}, \qquad R_5 \equiv \frac{(\forall x)A \wedge (\forall x)B}{(\forall x)(A \wedge B)} \quad R_6 \equiv \frac{(\exists x)A \vee (\exists x)B}{(\exists x)(A \vee B)}$$

$$R_7 \equiv \frac{(Q_1 x)A \wedge (Q_2 y)B}{(Q_1 x)(Q_2 y)(A \wedge B)} \qquad R_8 \equiv \frac{(Q_1 x)A \vee (Q_2 y)B}{(Q_1 x)(Q_2 y)(A \vee B)}$$

As regras prenex deduzem fórmulas equivalentes. Na regra R_1, por exemplo,

$$(\forall x)A \wedge B \text{ equivale a } (\forall x)(A \wedge B)$$

e o mesmo ocorre com as outras regras (veja exercícios). Considerando tal restrição (a equivalência entre as fórmulas) não é possível definir as regras

$$R \equiv \frac{(\forall x)A \vee (\forall x)B}{(\forall x)(A \vee B)} \; . \; R' \equiv \frac{(\exists x)A \wedge (\exists x)B}{(\exists x)(A \wedge B)}$$

pois

$(\forall x)(A \vee B)$ não equivale a $(\forall x)A \vee (\forall x)B$ e
$(\exists x)(A \wedge B)$ não equivale a $(\exists x)A \wedge (\exists x)B$.

Observe também que em todas as regras, a fórmula deduzida tem os quantificadores no seu início. Na regra R_8, por exemplo, os quantificadores estão no início da fórmula deduzida

$$(Q_1x)(Q_2y)(A \vee B).$$

Portanto, ao aplicar repetidamente tais regras a uma fórmula, o resultado pode ser uma fórmula com quantificadores em seu início. O resultado não necessariamente é uma fórmula na forma prenex devido à impossibilidade de aplicar regras prenex em fórmulas do tipo

$$((\forall x)A \vee (\forall x)B) \text{ ou } ((\exists x)A \wedge (\exists x)B).$$

Este fato é solucionado considerando a regra prenex de renomeação de variáveis R_0 a seguir.

Definição (renomeação de variáveis). Considere a fórmula $H = (Qx)G$, onde (Qx) é um quantificador universal ou existencial. A renomeação da variável x pela variável y na fórmula H é a fórmula

$E = (Qy)(G\{x \leftarrow y\})$, onde $G\{x \leftarrow y\}$ é uma substituição segura.

Exemplo (renomeação de variáveis). Considere a fórmula

$$H = (\forall x)(p(x) \rightarrow (\exists x)q(x,y)),$$

que contém dois quantificadores na mesma variável x. A renomeação de x por z no primeiro quantificador universal em H é dada por

$$H_1 = (\forall z)(p(z) \rightarrow (\exists x)q(x,y)).$$

Neste caso, apenas a variável x em p(x) é renomeada para z, pois somente tal variável está no escopo do quantificador $(\forall x)$. A variável x em q(x,y) está no escopo do quantificador mais interno $(\exists x)$. A renomeação de x por w no quantificador existencial em H é dada por

$$H_2 = (\forall x)(p(x) \rightarrow (\exists w)q(w,y)).$$

Neste caso, a variável x em q(x,y) é renomeada.

Exemplo (renomeação de variáveis). Considere a fórmula

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)p(x,y,z).$$

Neste caso x não pode ser renomeada para y pois a substituição

$$(\forall y)(\forall z)p(x,y,z)\{x \leftarrow y\}$$

não é segura.

Definição (regra prenex de renomeação de variáveis). Seja H uma fórmula que contém os quantificadores

$$(Q_1x_1),\ldots,(Q_nx_n)$$

e as variáveis livres $z_1, \ldots z_k$. A regra prenex de renomeação de variáveis R_0 corresponde à renomeação das variáveis $x_1,\ldots,x_n$ pelas variáveis $y_1,\ldots,y_n$, respectivamente, tais que

$$y_i \neq y_j \text{ se } i \neq j \text{ e } y_i \notin \{x_1,\ldots,x_n,z_1, \ldots z_k.\}$$

As variáveis renomeadas $y_1,\ldots,y_n$ são diferentes entre si, diferentes das variáveis livres $z_1, \ldots, z_k$ e das variáveis $x_1, \ldots, x_n$.

Exemplo (regra prenex de renomeação de variáveis). Considere a fórmula

$$H = (\forall x)(p(x) \rightarrow (\exists x)q(x,y)).$$

Uma aplicação da regra prenex de renomeação de variáveis R_0 corresponde a renomeação da variável x em $(\forall x)$ e $(\exists x)$ em H para $(\forall z)$ e $(\exists w)$, obtendo

$$H_2 = (\forall z)(p(z) \rightarrow (\exists w)q(w,y)).$$

Observe que as variáveis z e w são diferentes da variável livre y.

Exemplo (regra prenex de renomeação de variáveis). Considere a fórmula

$$H = (\forall x)p(x) \vee (\forall x)q(x).$$

Observe que não é possível aplicar nenhuma regra prenex à fórmula H. Isto ocorre porque

$$(\forall x)p(x) \vee (\forall x)q(x) \text{ não equivale a } (\forall x)(p(x) \vee q(x)).$$

Considere então a regra prenex de renomeação de variáveis R_0 aplicada a H. Neste caso, obtém-se

$$G = (\forall y)p(y) \vee (\forall z)q(z).$$

Em seguida, é possível a aplicação da regra prenex R_8 em G, obtendo

$$E = (\forall y)(\forall z)(p(y) \vee q(z)),$$

que está na forma prenex.

O algoritmo a seguir transforma, utilizando as regras prenex, uma fórmula H em outra equivalente G, que está na forma prenex.

Definição (algoritmo prenex). Sejam H, G, A e B fórmulas da Lógica de Predicados. O algoritmo a seguir transforma H em uma fórmula equivalente G, que está na forma prenex.

- Passo 1. Substitua as subfórmulas $(A \rightarrow B)$ por $(\neg A \vee B)$.
- Passo 2. Substitua as subfórmulas $\neg(A \wedge B)$ por $(\neg A \vee \neg B)$.
- Passo 3. Substitua as subfórmulas $\neg(A \vee B)$ por $(\neg A \wedge \neg B)$.

- Passo 4. Substitua as subfórmulas $\neg\neg A$ por A.
- Passo 5. Substitua as subfórmulas $\neg(\forall x)A$ por $(\exists x)\neg A$.
- Passo 6. Substitua as subfórmulas $\neg(\exists x)A$ por $(\forall x)\neg A$.
- Passo 7. Substitua as subfórmulas $(A \leftrightarrow B)$ por $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$. Caso necessário, vá para o passo 1, até que seja obtida uma fórmula apenas com conectivos $\neg$, $\vee$ e $\wedge$.
- Passo 8. Aplique a regra prenex de renomeação de variáveis R_0.
- Passo 9. Utilize as regras prenex $R_1, \ldots, R_8$ para substituir subfórmulas.

A fórmula G obtida, após a aplicação dos passos 1, ..., 9, é equivalente a H e está na forma prenex.

Exemplo (algoritmo prenex). Considere a fórmula

$$H = (\forall x)p(x) \wedge ((\forall x)q(x) \rightarrow (\exists y)r(x,y,z)).$$

Uma aplicação do algoritmo prenex na fórmula H tem como resultado:

- Passo 1. Substitua as subfórmulas $(A \rightarrow B)$ por $(\neg A \vee B)$.

$$H_1 = (\forall x)p(x) \wedge (\neg(\forall x)q(x) \vee (\exists y)r(x,y,z))$$

- Passo 2. Substitua as subfórmulas $\neg(A \wedge B)$ por $(\neg A \vee \neg B)$.
  Este passo não é aplicável.
- Passo 3. Substitua as subfórmulas $\neg(A \vee B)$ por $(\neg A \wedge \neg B)$.
  Este passo não é aplicável.
- Passo 4. Substitua as subfórmulas $\neg\neg A$ por A.
  Este passo não é aplicável.
- Passo 5. Substitua as subfórmulas $\neg(\forall x)A$ por $(\exists x)\neg A$.

$$H_2 = (\forall x)p(x) \wedge ((\exists x)\neg q(x) \vee (\exists y)r(x,y,z))$$

- Passo 6. Substitua as subfórmulas $\neg(\exists x)A$ por $(\forall x)\neg A$.
  Este passo não é aplicável.
- Passo 7. Substitua as subfórmulas $(A \leftrightarrow B)$ por $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$. Caso necessário, vá para o passo 1.
  Este passo não é aplicável.
- Passo 8. Aplique a regra prenex de renomeação de variáveis R_0.

$$H_3 = (\forall y_1)p(y_1) \wedge ((\exists y_2)\neg q(y_2) \vee (\exists y_3)r(x,y_3,z))$$

- Passo 9. Utilize as regras prenex $R_1, \ldots, R_8$ e substitua subfórmulas.

$$H_4 = (\forall y_1)p(y_1) \wedge (\exists y_2)(\exists y_3)\ (\neg q(y_2) \vee r(x,y_3,z))$$
$$G = (\forall y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)\ (\ p(y_1) \wedge (\neg q(y_2) \vee r(x,y_3,z)))$$

Proposição (equivalência de formas prenex). Dada uma fórmula H, existe uma fórmula G, equivalente a H, que está na forma prenex.

Demonstração. Esta demonstração utiliza indução no comprimento da fórmula H, e é proposta como exercício.

Skolemização

O método da resolução na Lógica de Predicados é definido a partir de fórmulas que estão na forma prenex e que não contêm quantificadores existenciais. Dada uma fórmula qualquer, que contém quantificadores universais e existenciais, deve-se inicialmente eliminar os quantificadores existenciais para que a fórmula possa ser utilizada na resolução. A skolemização é um método de eliminação de quantificadores existenciais. Neste livro, é considerada apenas a skolemização de fórmulas que já estão na forma prenex. Dada uma fórmula H, na forma prenex, o resultado da skolemização de H é uma fórmula G que não contém quantificadores existenciais e que também está na forma prenex. Neste caso, H não necessariamente equivale a G. Entretanto, H é insatisfatível se e somente se G é insatisfatível. Observe que na skolemização a equivalência não é mantida mas a insatisfatibilidade é mantida. Além disso, como resultado da skolemização é obtida uma fórmula sem quantificadores existenciais, que pode ser utilizada na resolução.

Exemplo (skolemização) Este exemplo considera a skolemização de fórmulas.

a) Considere a fórmula $(\exists x)q(x)$ e uma interpretação I sobre um domínio U.

$$I[(\exists x)q(x)] = T \Leftrightarrow \exists\, d \in U; \langle x \leftarrow d \rangle I[q(x)] = T$$
$$\Leftrightarrow \exists\, d \in U; q_I(d) = T$$

Considere uma constante "a" tal que $I[a] = d$. Logo, $I[q(a)] = T$. Portanto, se $I[(\exists x)q(x)] = T$, então $I[q(a)] = T$. Suponha o caso específico em que U é o conjunto dos alunos de Ciência da Computação e

$$I[q(x)] = T \Leftrightarrow x_I \text{ é inteligente.}$$

Neste caso, se

$$I[(\exists x)q(x)] = T,$$

então existe aluno inteligente. Suponha uma constante "a" tal que $I[a]$ = Zé e Zé é um aluno inteligente. Logo $I[q(a)] = T$. Este processo sugere a modificação da fórmula $(\exists x)q(x)$, obtendo $q(a)$. Observe que o quantificador $(\exists x)$ é eliminado. Além disso, $(\exists x)q(x)$ não equivale a $q(a)$. Entretanto, $(\exists x)q(x)$ é insatisfatível, se e somente se $q(a)$ é insatisfatível.

b) Dada a fórmula

$$(\forall x)(\exists y)r(y,x)$$

e a interpretação I definida no item a), considere

$$I[r(y,x)] = T \Leftrightarrow y_I \text{ é professor de } x_I.$$

Neste caso,

$$I[(\forall x)(\exists y)r(y,x)] = T$$

pois todo aluno possui pelo menos um professor. Seguindo o processo de eliminação do quantificador existencial, a fórmula

$$(\forall x)(\exists y)r(y,x)$$

é modificada para

$$(\forall x)r(b,x),$$

onde "b" é uma constante da linguagem. Suponha que I[b] = Anilton. Mas,

$$I[(\forall x)r(b,x)] = T$$

significa que Anilton é professor de todo aluno, o que certamente é falso. Portanto,

$$I[(\forall x)(\exists y)r(y,x)] = T,$$

mas

$$I[(\forall x)r(b,x)] = F.$$

Neste caso, o problema ocorre quando a variável y é substituída pela constante arbitrária "b". O correto é substituir y por um termo que represente um professor de x. Denotando o professor de x por f(x), então a variável y deve ser substituída por f(x), onde $I[f] = f_I$, e $f_I(x_I)$ é igual ao professor de x_I. Portanto, a skolemização deve modificar

$$(\forall x)(\exists y)r(y,x) \text{ para } (\forall x)r(f(x),x).$$

A variável y é substituída pelo termo f(x), que depende de x.

c) Considere a fórmula

$$(\forall z)(\forall x)(\exists y)p(z,y,x).$$

Neste caso, na skolemização, tal fórmula deve ser modificada para

$$(\forall z)(\forall x)p(z,g(z,x),x).$$

Observe que y é substituída pelo termo g(z,x), que depende das variáveis z e x.

d) Suponha a fórmula

$$(\exists x)(\exists y)p(y,x).$$

Seguindo o raciocínio indicado acima, a skolemização de

$$(\exists x)(\exists y)p(y,x)$$

determina a fórmula p(a,b). Neste caso, as variáveis x e y são substituídas por constantes diferentes pois

$$I[(\exists x)(\exists y)p(y,x)] = T \Leftrightarrow \exists\, d \in U, \exists\, e \in U; \langle y \leftarrow d\rangle\langle x \leftarrow e\rangle I[p(y,x)] = T$$

Nesta equivalência, não necessariamente "d" é igual a "e", sendo esta a razão em considerar $a \neq b$ tal que I[a] = d e I[b] = e. Além disso, as constantes que substituem as variáveis não devem pertencer à fórmula original.

e) Suponha a fórmula

$$(\exists x)(\forall w)(\exists y)p(x,w,y).$$

Com o mesmo raciocínio, a skolemização de

$$(\exists x)(\forall w)(\exists y)p(x,w,y)$$

determina a fórmula

$$(\forall w)p(a,w,f(w)).$$

Neste caso, a variável x é substituída pela constante "a" e y pela função f(w). Se y for substituída pela função g(w,a), o resultado será o mesmo pois como "a" é uma constante, a função g(w,a) possui apenas um argumento. Logo, é possível considerar

$$f(w)=g(w,a).$$

Definição (regras de eliminação de quantificadores existenciais). As regras de eliminação de quantificadores existenciais são

$$R_1 \equiv \frac{(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)(\exists y)A(x_1,\ldots,x_n,y)}{(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)A(x_1,\ldots,x_n,f(x_1,\ldots,x_n))}$$

$$R_2 \equiv \frac{(\exists y)(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)A(x_1,\ldots,x_n,y)}{(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)A(x_1,\ldots,x_n,a)}$$

Na definição anterior, R_2 é o caso particular de R_1 em que $n = 0$.

Definição (algoritmo de skolemização de fórmulas na forma prenex). Seja H uma fórmula na forma prenex do tipo,

$$H_p = (Qx_1)\ldots(Qx_n)G,$$

onde G é uma fórmula aberta e $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$. O algoritmo a seguir transforma H_p em uma fórmula E_s, que não contém quantificadores existenciais. Além disso, H_p é insatisfatível se e somente se E_s é insatisfatível. A fórmula E_s é o resultado da skolemização de H_p.

- Passo 1. Identifique o quantificador existencial mais interno de H_p. Suponha que seja $(\exists x_k)$.
- Passo 2. Identifique todos os quantificadores universais que estão à esquerda de $(\exists x_k)$ em H_p. Suponha que sejam $(\forall x_{s1})$, ..., $(\forall x_{sm})$.
- Passo 3. Elimine o quantificador $(\exists x_k)$ em H_p, utilizando as regras de eliminação de quantificadores existenciais. Substitua a variável x_k em G por $f_k(x_{s1},\ldots,x_{sm})$ tal que o símbolo f_k não pertença a H_p.
- Passo 4. Faça H_p igual à fórmula obtida após a aplicação dos passos 1, 2 e 3.
- Passo 5. Se ainda existe quantificador existencial em H_p, vá para o passo 1, caso contrário faça $E_s = H_p$.

O algoritmo de skolemização, definido acima, considera que a fórmula H_p é o resultado do algoritmo prenex. Neste caso

$$H_p = (Qx_1)...(Qx_n)G,$$

onde G é uma fórmula aberta e $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$. Este algoritmo também pode ser definido considerando fórmulas quaisquer da Lógica de Predicados, o que não é considerado neste livro.

A fórmula resultante E_s não necessariamente equivale a H_p. Entretanto, H_p é insastifatível se e somente se E_s é insatisfativel (veja exercícios). No passo 3, quando m=0, isto é, não há quantificadores universais à esquerda de $(\exists x_k)$, x_k é substituída por uma constante a_k. Observe que a constante a_k é uma função zero-ária, que não deve pertencer a H_p. Isto significa que a_k deve ser uma constante nova. A função determinada no passo 3 é denominada função de Skolem.

Exemplo (skolemização). Considere a fórmula:

$$H = (\forall x)(\forall y)(\exists z)(\exists w)(\forall x_1)(\exists y_1)(\forall z_1)(\ p(x,y,z,w,w_3) \rightarrow q(x_2,x_1,y_1,z_1))$$

O resultado da aplicação do algoritmo de skolemização sobre H é a seqüência de fórmulas:

$$H_1 = (\forall x)(\forall y)(\exists z)(\exists w)(\forall x_1)(\forall z_1)(p(x,y,z,w,w_3) \rightarrow q(x_2,x_1,f_1(x_1,y,x),z_1))$$

$$H_2 = (\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall x_1)(\forall z_1)(p(x,y,z,f_2(y,x),w_3) \rightarrow q(x_2,x_1,f_1(x_1,y,x),z_1))$$

$$E = (\forall x)(\forall y)(\forall x_1)(\forall z_1)(p(x,y,f_3(y,x),f_2(y,x),w_3) \rightarrow q(x_2,x_1,f_1(x_1,y,x),z_1))$$

A fórmula E está na forma prenex e não contém quantificadores existenciais.

Definição (cláusula). Uma cláusula, na Lógica de Predicados, é uma fórmula C fechada, na forma prenex, do tipo

$$C = (\forall x_1)...(\forall x_n)G,$$

onde G é uma disjunção de literais. Utilizando a notação de conjuntos, uma cláusula é um conjunto finito de literais, onde os quantificadores universais são omitidos.

Exemplo (cláusula). Os conjuntos e fórmulas a seguir são cláusulas na Lógica de Predicados.

$$C_1 = \{p(x), \neg q(x), r(x,y)\} = (\forall x)(\forall y)(p(x) \vee \neg q(x) \vee r(x,y)) = (\forall^*)(p(x) \vee \neg q(x) \vee r(x,y))$$

$$C_2 = \{\neg p(x), \neg r(x,y)\} = (\forall x)(\forall y)(\neg p(x) \vee \neg r(x,y)\ ) = (\forall^*)(\neg p(x) \vee \neg r(x,y))$$

$$C_3 = \{\neg p(y)\} = (\forall y)\neg p(y)$$

Observe que as cláusulas são fórmulas fechadas (não contêm variáveis livres), estão na forma prenex e possuem apenas quantificadores universais.

Além disso, quando a notação de conjuntos é utilizada, os quantificadores são omitidos. Dada uma fórmula H qualquer da Lógica de Predicados, a aplicação dos algoritmos prenex e da skolemização transformam H em uma fórmula $G = (\forall^*)E$, onde E está na fnc ou fnd. Neste caso, é possível transformar E em uma conjunção de cláusulas. Observe que não necessariamente H equivale a E. Mas, H é insatisfatível se e somente se E é insatisfatível.

Exemplo (cláusula). Considere a fórmula

$$H = (\forall x)(\forall z)((\forall y_1)p(y_1) \wedge ((\forall y_2)q(y_2) \rightarrow (\exists y_3)r(x,y_3,z))).$$

Um resultado da aplicação do algoritmo prenex em H é dado por

$$G = (\forall x)(\forall z)(\forall y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)\ (p(y_1) \wedge (\neg q(y_2) \vee r(x,y_3\ ,z))).$$

O resultado da aplicação do algoritmo da skolemização em G é dado por

$$E = (\forall x)(\forall z)(\forall y_1)\ (p(y_1) \wedge (\neg q(g(y_1,z,x)) \vee r(x,f(y_1,z,x),z)))$$
$$E = (\forall^*)(p(y_1) \wedge (\neg q(g(y_1,z,x)) \vee r(x,f(y_1,z,x),z))).$$

A fórmula E é a conjunção das cláusulas

$$\{p(y_1)\} \text{ e } \{\neg q(g(y_1,z,x)),\ r(x,f(y_1,z,x),z)\}.$$

Na notação de conjuntos E é representada por

$$\{\{p(y_1)\},\ \{\neg q(g(y_1,z,x)),\ r(x,f(y_1,z,x),z)\}\}.$$

Observe que as fórmulas H, G e E são fechadas e o mesmo ocorre com as cláusulas.

Definição (literais complementares). Dois literais são complementares se um é a negação do outro.

Exemplo (cláusulas com literais complementares). As cláusulas

$$\{p(f(y_1))\} \text{ e } \{\neg p(f(y_1)),\ \neg q(g(y_1,z,x)),\ r(x,f(y_1,z,x),z)\}$$

possuem os literais complementares $p(f(y_1))$ e $\neg p(f(y_1))$. Por outro lado, as cláusulas

$$\{p(f(y_1))\} \text{ e } \{\neg p(f(w)),\ \neg q(g(y_1,z,x)),\ r(x,f(y_1,z,x),z)\}$$

não possuem literais complementares. Neste caso, os literais $p(f(y_1))$ e $\neg p(f(w))$ são "quase" complementares. Tais literais seriam complementares se a variável y_1 fosse substituída por w. O processo de substituição de variáveis e o algoritmo da unificação são analisados a seguir.

Algoritmo da Unificação

Dadas duas expressões $p(f(y_1))$ e $\neg p(f(w))$, o algoritmo da unificação define procedimentos que as unificam. Neste caso, o algoritmo determina que y_1 deve ser substituído por w ou vice-versa para que os dois literais se unifiquem. As substituições são os elementos básicos do algoritmo da unificação.

Definição (substituição). Uma substituição na Lógica de Predicados é um conjunto

$$\theta = \{x_1 \leftarrow t_1, \ldots, x_n \leftarrow t_n\},$$

onde $\forall$ i, x_i é variável e t_i é termo tal que $x_i \neq t_i$. Além disso, $\forall$ i, j, tem-se que $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$. O conjunto vazio { } é a substituição vazia.

Definição (aplicação de substituição). Sejam S um conjunto de expressões e a substituição

$$\theta = \{x_1 \leftarrow t_1, \ldots, x_n \leftarrow t_n\}.$$

A aplicação de θ em S, denotada por $S\theta$, é o conjunto obtido de S, substituindo **simultaneamente** todas as ocorrências de x_i em S por t_i para $1 \leq i \leq n$. Se $\theta = \{\ \}$, então $S\theta = S$.

Exemplo (aplicação de substituição). Considere as cláusulas

$$C_1 = \{p(y_1), \neg q(y_1,z,x)\} \text{ e } C_2 = \{\neg p(x), q(w), r(w,y_1,z,x,z)\}$$

e a substituição

$$\theta = \{y_1 \leftarrow w, w \leftarrow g(a,z,x), x \leftarrow w\}.$$

O resultado da aplicação de θ em C_1 e C_2 é dado por

$$C_1\theta = \{p(w), \neg q(w,z,w))\} \text{ e } C_2\theta = \{\neg p(w), q(g(a,z,x)), r(g(a,z,x),w,z,w,z)\}$$

Observe que as substituições determinadas por θ são aplicadas simultaneamente sobre as cláusulas. O resultado seria diferente se fosse aplicada a substituição $\{y_1 \leftarrow w\}$, em seguida $\{w \leftarrow g(a,z,x)\}$ e finalmente $\{x \leftarrow w\}$. As cláusulas C_1 e C_2 não possuem literais complementares. Entretanto, $C_1\theta$ e $C_2\theta$ possuem os literais complementares p(w) e $\neg$p(w).

Dadas duas substituições θ_1 e θ_2, a composição $\theta_1\theta_2$ é definida de tal forma que se tenha a propriedade

$$S(\theta_1\theta_2) = (S\theta_1)\theta_2,$$

onde S é um conjunto de expressões. Suponha, por exemplo, que

$$\theta_1 = \{x \leftarrow y\}, \theta_2 = \{y \leftarrow b\} \text{ e } S = \{p(x,y)\}.$$

Neste caso,

$$(S\theta_1)\theta_2 = (p(x,y)\{x \leftarrow y\})\{y \leftarrow b\} = p(y,y)\{y \leftarrow b\} = p(b,b).$$

Suponha que a composição $\theta_1\theta_2$ seja definida como a união dos conjuntos $\{x \leftarrow y\}$ e $\{y \leftarrow b\}$, obtendo-se

$$\theta_1\theta_2 \approx \{x \leftarrow y, y \leftarrow b\}.$$

Neste caso,

$$S(\theta_1\theta_2) \approx p(x,y)\{x \leftarrow y, y \leftarrow b\} = p(y,b),$$

que é diferente de $(S\theta_1)\theta_2$. Portanto, a composição de duas substituições θ_1 e θ_2 não necessariamente é igual a união de θ_1 e θ_2. Neste caso, antes de efetuar a união dos conjuntos

$$\{x \leftarrow y\} \text{ e } \{y \leftarrow b\},$$

deve-se aplicar a substituição $\{y \leftarrow b\}$ no termo y que ocorre na substituição $\{x \leftarrow y\}$. A composição é obtida considerando

$$\theta_1\theta_2 = \{x \leftarrow y\{y \leftarrow b\}, y \leftarrow b\} = \{x \leftarrow b, y \leftarrow b\}$$

Considere as substituições

$$\theta_3 = \{x \leftarrow w\}, \theta_4 = \{w \leftarrow x\}.$$

Neste caso considerando a composição indicada acima obtém-se

$$\theta_3\theta_4 = \{x \leftarrow w\{w \leftarrow x\}, w \leftarrow x\} = \{x \leftarrow x, w \leftarrow x\}.$$

Neste caso a ligação $x \leftarrow x$ deve ser eliminada pois não há sentido em substituir x por x e o resultado é

$$\theta_3\theta_4 = \{w \leftarrow x\}.$$

Finalmente, considere as substituições

$$\theta_5 = \{x \leftarrow a\}, \theta_6 = \{x \leftarrow b\}.$$

Neste caso a composição é obtida considerando

$$\theta_5\theta_6 = \{x \leftarrow a\{x \leftarrow b\}, x \leftarrow b\} = \{x \leftarrow a, x \leftarrow b\}.$$

Como uma substituição não pode conter duas ligações em x, a ligação $x \leftarrow b$ é eliminada e

$$\theta_5\theta_6 = \{x \leftarrow a\}.$$

Definição (composição de substituições). Considere as substituições

$$\theta_1 = \{x_1 \leftarrow t_1, \ldots, x_n \leftarrow t_n\} \text{ e } \theta_2 = \{y_1 \leftarrow s_1, \ldots, y_m \leftarrow s_m\}.$$

A composição de θ_1 e θ_2, denotada por $\theta_1\theta_2$, é calculada como se segue:

- Passo 1. Construa o conjunto
  $\phi = \{x_1 \leftarrow t_1\theta_2, \ldots, x_n \leftarrow t_n\theta_2, y_1 \leftarrow s_1, \ldots, y_m \leftarrow s_m\}$.
- Passo 2. Retire de ϕ as ligações $y_i \leftarrow s_i$ tal que $y_i = x_j$ para algum j; $1 \leq j \leq n$. Faça ϕ igual ao novo conjunto.
- Passo 3. Retire de ϕ as ligações $x_i \leftarrow t_i\theta_2$ tal que $x_i = t_i\theta_2$. Faça $\theta_1\theta_2$ igual ao conjunto obtido.

Exemplo (composição de substituições). Considere as substituições

$$\theta_1 = \{x \leftarrow f(y), w \leftarrow z, z \leftarrow x\} \text{ e } \theta_2 = \{y \leftarrow w, x \leftarrow z, z \leftarrow w\}.$$

Seguindo a definição anterior, os seguintes resultados são obtidos.

Passo 1. Construa o conjunto

$$\phi = \{x \leftarrow f(y)\theta_2, w \leftarrow z\theta_2, z \leftarrow x\theta_2, y \leftarrow w, x \leftarrow z, z \leftarrow w\}.$$
$$\phi = \{x \leftarrow f(w), w \leftarrow w, z \leftarrow z, y \leftarrow w, x \leftarrow z, z \leftarrow w\}.$$

Passo 2. $\phi = \{x \leftarrow f(w), w \leftarrow w, z \leftarrow z, y \leftarrow w\}$.

Neste passo foram eliminadas inicialmente as ligações

$$x \leftarrow z, z \leftarrow w$$

que contêm as variáveis x e z presentes na substituição θ_1.

Passo 3. $\theta_1\theta_2 = \{ x \leftarrow f(w), y \leftarrow w\}$.

No cálculo da composição $\theta_1\theta_2$ é fundamental seguir a ordem dos passos indicados na definição. Se os passos 2 e 3 forem invertidos, tem-se um resultado diferente. O resultado do passo 3 aplicado a ϕ é dado por

$$\{x \leftarrow f(w), y \leftarrow w, x \leftarrow z, z \leftarrow w\}.$$

Em seguida o resultado do passo 2 aplicado ao conjunto anterior é

$$\{x \leftarrow f(w), y \leftarrow w, z \leftarrow w\}$$

que é diferente da composição $\theta_1\theta_2$.

Suponha $S = \{p(x,w,z,y)\}$. Neste caso,

$$S(\theta_1\theta_2) = p(x,w,z,y)\{x \leftarrow f(w), y \leftarrow w\} = p(f(w),w,z,w)$$
$$(S\theta_1)\theta_2 = (p(x,w,z,y)\{x \leftarrow f(y), w \leftarrow z, z \leftarrow x\})\{ y \leftarrow w, x \leftarrow z, z \leftarrow w\}$$
$$= p(f(y),z,x,y)\{y \leftarrow w, x \leftarrow z, z \leftarrow w\}$$
$$= p(f(w),w,z,w)$$

Portanto, $S(\theta_1\theta_2) = (S\theta_1)\theta_2$.

Se os passos 2 e 3 da definição de composição de substituição são invertidos, não necessariamente obtém-se

$$(S\theta_3)\theta_4 = S(\theta_3\theta_4).$$

Proposição (composição de substituições). Considere as substituições θ_1, θ_2 e θ_3 e uma expressão C. Tem-se que

a) $\theta_1\{\ \} = \{\ \}\theta_1 = \theta_1$.
b) $(C\theta_1)\theta_2 = C(\theta_1\theta_2)$.
c) $\theta_1(\theta_2\theta_3) = (\theta_1\theta_2)\theta_3$

Demonstração. O item a) segue da definição de substituição vazia. No item b), considere o caso em que $C = \{x\}$. Em seguida, utilize indução finita no comprimento de C para demonstrar os outros casos. No item c), demonstre que para toda variável x,

$$x(\theta_1(\theta_2\theta_3)) = x((\theta_1\theta_2)\theta_3).$$

Em seguida, utilize indução finita no comprimento de C para demonstrar que

$$C(\theta_1(\theta_2\theta_3)) = C((\theta_1\theta_2)\theta_3).$$

Veja exercícios e [Lloyd, 1984].

Considere as cláusulas

$$C_1 = \{p(x)\} \text{ e } C_2 = \{\neg p(a)\},$$

que não possuem literais complementares. Entretanto, é possível fazer uma substituição de variável em C_1 tais que as cláusulas resultantes possuem literais complementares? Neste caso, a substituição é determinada de forma imediata. Basta substituir x por "a" ou seja, se

$$\theta_1 = \{x \leftarrow a\},$$

então

$$C_1\theta_1 = \{p(a)\} \text{ e } C_2\theta_1 = \{\neg p(a)\},$$

que são cláusulas com literais complementares. Considere as duas cláusulas

$$C_3 = \{p(f(x), y, x)\} \text{ e } C_4 = \{\neg p(z, g(z), a)\},$$

que não possuem literais complementares. Neste caso, determinar se existem substituições de variáveis em C_3 e C_4 tais que as cláusulas resultantes possuem literais complementares não é tão imediato como no caso anterior. Observe que se

$$\theta_2 = \{x \leftarrow a, y \leftarrow g(f(a)), z \leftarrow f(a)\},$$

então

$$C_3\theta_2 = \{p(f(a), g(f(a)), a)\} \text{ e } C_4\theta_2 = \{\neg p(f(a), g(f(a)), a),$$

as quais possuem literais complementares. As substituições θ_1 e θ_2 unificam os átomos das cláusulas C_1 e C_2 e das cláusulas C_3 e C_4, respectivamente.

O algoritmo da unificação, definido a seguir, determina, caso exista, uma substituição que unifica pares de átomos.

Definição (conjunto de diferenças). Seja $S = \{A_1, ..., A_n\}$ um conjunto finito de expressões. O conjunto de diferenças de S é determinado pelos procedimentos a seguir.

- Passo 1. Aponte para o símbolo mais à esquerda em cada expressão A_i, $1 \leq i \leq m$.
- Passo 2. Enquanto todos os símbolos apontados coincidirem, desloque simultaneamente o apontador para o próximo símbolo, à direita, em cada expressão A_i.
- Passo 3. Se forem encontrados símbolos apontados que não coincidem, então retire a subexpressão E_i de cada expressão A_i, que inicia no símbolo de diferença. Faça o conjunto de diferenças de S igual a $D = \{E_1, ..., E_m\}$. Caso contrário, faça $D = \{\ \}$.

Exemplo (conjunto de diferenças). Seja

$$S = \{p(f(x), y, x), p(z, g(z), a)\}.$$

O conjunto de diferenças associado a S é determinado pelos passos:

Passo 1. $S = \{p(f(x), y, x), p(z, g(z), a)\}$.
$\uparrow \qquad \uparrow$

Passo 2. $S = \{p(f(x), y, x), p(z, g(z), a)\}$.
$\uparrow \qquad \uparrow$

Passo 3. Conjunto de diferenças $D = \{f(x), z\}$

> **Definição (expressões unificáveis).** Um conjunto de expressões S é unificável se existe uma substituição θ tal que $|S\theta| = 1$. Neste caso, θ é denominada unificador de S.

Exemplo (unificador). A substituição

$$\theta_1 = \{x \leftarrow w, y \leftarrow x\}$$

é um unificador do conjunto de expressões

$$S = \{p(x, y), p(w, x)\}.$$

Da mesma forma,

$$\theta_2 = \{x \leftarrow a, y \leftarrow a, w \leftarrow a,\}$$

também é um unificador de S. Neste caso, a substituição θ_1 é mais geral e θ_2 mais específica. Observe que θ_1 substitui x pela variável w, que por sua vez pode ser igual ou diferente da constante "a". A substituição θ_2 substitui x pela constante "a", sendo mais específica na substituição. Além disso, é possível obter θ_2 a partir de θ_1. A substituição mais específica θ_2 é obtida da mais geral θ_1 pois

$$\theta_2 = \theta_1\{w \leftarrow a, x \leftarrow a\}.$$

Estes conceitos são generalizados pela definição.

> **Definição (unificador mais geral).** Seja θ um unificador do conjunto de expressões S. θ é um unificador mais geral de S, umg, se para qualquer unificador φ de S, existe uma substituição ϕ tal que $\varphi = \theta\phi$.

Exemplo (unificador mais geral). A substituição

$$\theta_1 = \{x \leftarrow w, y \leftarrow g(f(w)), z \leftarrow f(w)\}$$

é um unificador do conjunto de expressões

$$S = \{p(f(x), y, x), p(z, g(z), w)\}.$$

Da mesma forma,

$$\theta_2 = \{x \leftarrow a, w \leftarrow a, y \leftarrow g(f(a)), z \leftarrow f(a)\}$$

também é um unificador de S. Observe que

$$S\theta_1 = \{p(f(w), g(f(w)), w)\} \text{ e } S\theta_2 = \{p(f(a), g(f(a)), a)\}.$$

O unificador θ_1 é mais geral que θ_2 pois

$$\theta_2 = \theta_1\{w \leftarrow a\}.$$

Observe também que os unificadores

$$\theta_1 = \{x \leftarrow w, y \leftarrow g(f(w)), z \leftarrow f(w)\} \text{ e } \theta_3 = \{w \leftarrow x, y \leftarrow g(f(x)), z \leftarrow f(x)\}$$

são umg de S. Portanto, é possível ter mais de um unificador mais geral para um conjunto de expressões.

Definição (algoritmo da unificação). Seja S um conjunto de expressões da Lógica de Predicados. Se S é unificável, o algoritmo a seguir determina um umg de S, caso contrário ele indica que S não é unificável. Sejam $k \in \mathbb{N}$ e θ_k substituições.

- Passo 1. Faça $k = 0$ e $\theta_0 = \{\ \}$.
- Passo 2. Se $|S\theta_k| = 1$, então pare! θ_k é um umg de S. Caso contrário, determine o conjunto de diferenças D_k de $S\theta_k$.
- Passo 3. Se existe uma variável x e um termo t em D_k tal que x não ocorre em t, então faça $\theta_{k+1} = \theta_k\{x \leftarrow t\}$, $k = k+1$, vá para o passo 2. Caso contrário, pare! S não é unificável.

Exemplo (algoritmo da unificação). Considere o conjunto de expressões

$$S = \{p(f(x), y, x), p(z, g(z), w)\}.$$

A aplicação do algoritmo da unificação em S tem o seguinte desenvolvimento.

1. $k = 0, \theta_0 = \{\ \}$.
2. $k = 0, \theta_0 = \{\ \}, S\theta_0 = S = \{p(f(x), y, x), p(z, g(z), w)\}, |S\theta_0| \neq 1, D_0 = \{f(x), z\}$
3. $z, f(x) \in D_0$ e z não ocorre em f(x). $\theta_1 = \{\ \}\{z \leftarrow f(x)\} = \{z \leftarrow f(x)\}$, $k = 1$.
4. $k = 1, \theta_1 = \{z \leftarrow f(x)\}, S\theta_1 = \{p(f(x), y, x), p(f(x), g(f(x)), w)\}, |S\theta_1| \neq 1$, $D_1 = \{y, g(f(x))\}$
5. $y, g(f(x)) \in D_1$ e y não ocorre em g(f(x)). $\theta_2 = \{z \leftarrow f(x)\}\{y \leftarrow g(f(x))\} = \{z \leftarrow f(x), y \leftarrow g(f(x))\}$, $k = 2$.
6. $k = 2, \theta_2 = \{z \leftarrow f(x), y \leftarrow g(f(x))\}, S\theta_2 = \{p(f(x), g(f(x)), x), p(f(x), g(f(x)), w)\}$, $|S\theta_2| \neq 1$, $D_2 = \{x, w\}$
7. $x, w \in D_2$ e x não ocorre em w. $\theta_3 = \{z \leftarrow f(x), y \leftarrow g(f(x))\}\{x \leftarrow w\} = \{z \leftarrow f(w), y \leftarrow g(f(w)), x \leftarrow w\}$, $k = 3$.
8. $k = 3, \theta_3 = \{z \leftarrow f(w), y \leftarrow g(f(w)), x \leftarrow w\}, S\theta_3 = \{p(f(w), g(f(w)), w)\}, |S\theta_3| = 1$. Pare! θ_3 é um umg de S.

Exemplo (algoritmo da unificação). Considere o conjunto de expressões

$$S = \{p(f(x)), p(x)\}.$$

A aplicação do algoritmo da unificação em S tem o seguinte desenvolvimento.

1. $k = 0, \theta_0 = \{\ \}$.
2. $k = 0, \theta_0 = \{\ \}, S\theta_0 = S = \{p(f(x)), p(x)\}, |S\theta_0| \neq 1, D_0 = \{f(x), x\}$
3. $x, f(x) \in D_0$. Neste caso x ocorre em f(x). Pare! S não é unificável. Se o teste de ocorrência não é considerado, o algoritmo continua. Ele obtém a substituição $\theta_1 = \{\ \}\{x \leftarrow f(x)\} = \{x \leftarrow f(x)\}$, faz $k = 1$ e tem o seguinte desenvolvimento.
4. $k = 1, \theta_1 = \{x \leftarrow f(x)\}, S\theta_1 = \{p(f(f(x))), p(f(x)\}, |S\theta_1| \neq 1, D_1 = \{x, f(x)\}$
5. $x, f(x) \in D_0$. Neste caso x ocorre em f(x). Novamente, se o teste de ocorrência é desconsiderado,

   $\theta_2 = \{x \leftarrow f(x)\}\{x \leftarrow f(x)\} = \{x \leftarrow f(f(x))\}$ e $k = 2$, teríamos.
6. $k = 2, \theta_2 = \{x \leftarrow f(f(x))\}, S\theta_2 = \{p(f(f(f(x)))), p(f(f(x))\}, |S\theta_2| \neq 1, D_2 = \{x, f(x)\}$

Este processo ocorre indefinidamente e os conjuntos $S\theta_k$ terão expressões cada vez maiores, não sendo possível unificá-los. Tal fato demonstra a importância do teste de ocorrência executado no passo 3.

Observação. Compiladores e interpretadores PROLOG geralmente não executam o teste de ocorrência, visando eficiência.

A demonstração da correção do algoritmo da unificação é um problema relevante e pode ser encontrada em [Lloyd, 1984].

Resolução na Lógica de Predicados

A resolução na Lógica de Predicados não é uma simples extensão da resolução na Lógica Proposicional. Inicialmente, deve-se observar que cláusulas na Lógica de Predicados são obtidas skolemizando fórmulas na forma prenex e em seguida obtendo forma normal conjuntiva. Além disso, a resolução na Lógica de Predicados utiliza o algoritmo da unificação para definir o resolvente de duas cláusulas.

Definição (resolvente de duas cláusulas na Lógica de Predicados). Considere duas cláusulas da Lógica de Predicados

$$C_1 = \{A_1,\ldots,A_n\}, \text{ e } C_2 = \{B_1,\ldots,B_n\}.$$

Suponha que C_1 e C_2 possuem dois literais L_1 e $\neg L_2$ tais que L_1 e L_2 são unificáveis. Seja θ um umg de L_1 e L_2. O resolvente de C_1 e C_2, denominado por $Res(C_1,C_2)$, é definido por:

$$Res(C_1,C_2) = (C_1\theta - L_1\theta) \cup (C_2\theta - \neg L_2\theta).$$

Se $Res(C_1,C_2) = \{\ \}$, o resolvente é vazio ou trivial.

Exemplo (resolvente de duas cláusulas). Considere as cláusulas:

$$C_1 = \{p(f(x), y, x), \neg q(a,y,w_1)\},$$
$$C_2 = \{\neg p(z, g(z), w)\},$$
$$C_3 = \{q(x, g(f(a)), c)\} \text{ e}$$
$$C_4 = \{\neg q(a, g(f(w)), w_1)\}.$$

Observe inicialmente que os dois átomos

$$p(f(x), y, x) \text{ e } p(z, g(z), w)$$

são unificáveis pela substituição

$$\theta_1 = \{z \leftarrow f(w), y \leftarrow g(f(w)), x \leftarrow w\}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} Res(C_1,C_2) &= (C_1\theta_1 - p(f(x), y, x)\theta_1) \cup (C_2\theta_1 - \neg p(z, g(z), w)\theta_1) \\ &= \{\neg q(a, g(f(w)), w_1)\} \end{aligned}$$

Os átomos

$$q(a, g(f(w)), w_1) \text{ e } q(x, g(f(a)), c)$$

são unificáveis pela substituição

$$\theta_2 = \{x \leftarrow a, w \leftarrow a, w_1 \leftarrow c\}.$$

Logo,

$$Res(C_3,C_4) = (C_3\theta_2 - q(x, g(f(a)), c)\theta_2) \cup (C_4\theta_2 - \neg q(a, g(f(w)), w_1)\theta_2) = \{\ \}$$

Como na Lógica Proposicional, o mecanismo de inferência da resolução utiliza apenas a regra de resolução.

Definição (regra de resolução). Dadas duas cláusulas

$$C_1 = \{A_1,\ldots,A_n\},\ C_2 = \{B_1,\ldots,B_n\},$$

da Lógica de Predicados, a regra de resolução aplicada às cláusulas C_1 e C_2 é definida pelo procedimento a seguir tendo, C_1 e C_2 deduza $res(C_1,C_2)$.

Os elementos básicos da resolução na Lógica de Predicados são análogos àqueles da resolução na Lógica Proposicional.

Definição (elementos básicos da resolução na Lógica de Predicados). Os elementos básicos da resolução, na Lógica de Predicados, são definidos por

- O alfabeto da Lógica de Predicados.
- O conjunto das cláusulas da Lógica de Predicados.
- A regra de resolução na Lógica de Predicados.

A expansão por resolução na Lógica de Predicados também é análoga ao mesmo conceito na Lógica Proposicional. Também na Lógica de Predicados, a prova de argu-

mentos é feita aplicando a regra de resolução sobre um conjunto de cláusulas. A satisfatibilidade de um conjunto de cláusulas, é provada aplicando repetidamente a regra de resolução, até que se consiga a cláusula vazia. Esta aplicação repetida da regra de resolução determina uma expansão por resolução.

Definição (construção de uma expansão por resolução na Lógica de Predicados). Uma expansão por resolução, na Lógica de Predicados, é construída como se segue. Seja $\{A_1,....,A_n\}$ um conjunto de cláusulas.

- A estrutura a seguir é uma expansão por resolução sobre $\{A_1,....,A_n\}$.

$$\begin{array}{c} .1\ A_1 \\ .2\ A_2 \\ . \\ . \\ .n\ A_n \end{array}$$

- Seja Exp é uma expansão por resolução sobre $\{A_1,....,A_n\}$. Se Exp* é obtida de Exp adicionando $Res(C_i,C_j)$ onde $C_i,C_j \in$ Exp, então Exp* é também uma expansão por resolução sobre $\{A_1,....,A_n\}$.

Exp* é a estrutura resultante da aplicação da regra de resolução da Lógica de Predicados a duas cláusulas presentes em Exp. Exp* é obtida de Exp adicionando $Res(C_i,C_j)$, que é o resultado da aplicação da regra de resolução a duas cláusulas C_i e C_j pertencentes a Exp.

Exemplo (expansão por resolução). Considere o conjunto de cláusulas:

$$C_1 = \{p(f(x), y, x), \neg q(a,y,w_1)\},$$
$$C_2 = \{\neg p(z, g(z), w)\} \text{ e}$$
$$C_3 = \{q(x, g(f(a)), c)\}$$

Uma expansão por resolução sobre este conjunto é indicada a seguir.

.1	$\{p(f(x), y, x), \neg q(a,y,w_1)\}$	
.2	$\{\neg p(z, g(z), w)\}$	
.3	$\{q(x, g(f(a)), c)\}$	
.4	$\{\neg q(a, g(f(w)), w_1)\}$	$Res(.1,.2)$, $\theta_1 = \{z \leftarrow f(w), y \leftarrow g(f(w)), x \leftarrow w\}$.
.5	$\{\ \}$	$Res(.3,.4)$, $\theta_2 = \{x \leftarrow a, w \leftarrow a, w_1 \leftarrow c\}$.

A expansão por resolução resultante contém a cláusula vazia.

Definição (expansão fechada). Uma expansão por resolução é fechada se ela contém a cláusula vazia. Uma expansão que não contém a cláusula vazia é aberta.

Conseqüência Lógica na Resolução

A conseqüência lógica na resolução da Lógica de Predicados é definida de forma análoga à conseqüência lógica na Lógica Proposicional. Há apenas algumas diferenças nas definições.

Definição (forma clausal). Dada uma fórmula fechada H, sua forma clausal associada é uma fórmula Hc tal que Hc é uma conjunção de cláusulas.

Na Lógica Proposicional, toda fórmula possui uma forma clausal associada equivalente. Na Lógica de Predicados a forma clausal Hc não necessariamente equivale a H. Tem-se apenas que H é insatisfatível se e somente se Hc é insatisfatível. Para determinar Hc a partir de H, inicialmente é determinada a forma prenex Hp associada a H. Em seguida, é considerada a skolemização de Hp obtendo uma fórmula do tipo $(\forall^*)G$ sem quantificadores existenciais tal que G é aberta. O passo final é a transformação de G em uma conjunção de disjunção de literais. No passo final os quantificadores universais são omitidos e a fórmula é escrita na notação de conjuntos.

Exemplo (forma clausal). Considere a fórmula fechada

$$H = (\forall x)p(x) \wedge (\forall x)(\forall z)((\forall x)q(x) \rightarrow (\exists y)r(x,y,z)),$$

cuja forma prenex é

$$Hp = (\forall y_1)(\forall x)(\forall z)(\exists y_2)(\exists y_3)(\, p(y_1) \wedge (\neg q(y_2) \vee r(x,y_3,z))),$$

A skolemização de Hp tem como resultado

$$Hs = (\forall y_1)(\forall x)(\forall z)(p(y_1) \wedge (\neg q(f(y_1,x,z)) \vee r(x,g(y_1,x,z),z))),$$

que é uma cláusula representada na notação de conjuntos como

$$H_c = \{\{p(y_1)\}\ ,\ \{\neg q(f(y_1,x,z))\ ,\ r(x,g(y_1,x,z),z)\}\},$$

Definição (prova por resolução). Seja H uma fórmula e ¬Hc a forma clausal associada a ¬H. Uma prova de H por resolução é uma expansão por resolução fechada sobre ¬Hc. Neste caso, H é um teorema do sistema de resolução. Além disso, diz-se que a expansão por resolução associada a ¬Hc é também uma expansão associada a H.

Exemplo (prova por resolução). Considere o argumento.
Toda pessoa é sábia ou é politiqueira.
Zé não é politiqueiro.
Portanto, Zé é sábio.

É apresentada a seguir, utilizando resolução, uma prova dos argumentos acima. Seja I uma interpretação sobre o domínio U das pessoas, tal que:

$$I[q(x)] = T \Leftrightarrow x_I \text{ é sábio},$$

$$I[p(x)] = T \Leftrightarrow x_I \text{ é politiqueiro},$$
$$I[a] = \text{Zé}.$$

Utilizando esta interpretação, a representação destes argumentos na Lógica de Predicados é:

$$H = ((\forall x)(p(x) \vee q(x)) \wedge \neg p(a)) \rightarrow q(a).$$

Logo,

$$\neg H = \neg(((\forall x)(p(x) \vee q(x)) \wedge \neg p(a)\ ) \rightarrow q(a)) \text{ equivale a}$$
$$\neg(\neg((\forall x)(p(x) \vee q(x)) \wedge \neg p(a)\ ) \vee q(a)) \text{ equivale a}$$
$$((\forall x)(p(x) \vee q(x)) \wedge \neg p(a)\ ) \wedge \neg q(a) \text{ equivale a}$$

$\neg Hp = (\forall x)\ ((p(x) \vee q(x)) \wedge \neg p(a) \wedge \neg q(a))$, que está na forma prenex e não possui quantificadores existenciais. $\neg Hp$ é escrita na notação de conjuntos como:

$$\neg H_c = \{\{p(x), q(x)\}, \{\neg p(a)\}, \{\neg q(a)\}\}$$

Uma expansão por resolução fechada sobre este conjunto, que é associada a H, é

.1	$\{p(x), q(x)\}$	
.2	$\{\neg p(a)\}$	
.3	$\{\neg q(a)\}$	
.4	$\{q(a)\}$	Res(.1,.2), $\theta_1 = \{x \leftarrow a\}$.
.5	$\{\ \}$	Res(.3,.4).

Como a expansão é fechada, tem-se uma prova por resolução do argumento H.

Exemplo (prova por resolução). Considere o argumento.

Santinha gosta de toda pessoa que não se valoriza.

Portanto, não existe ninguém que se valoriza e que Santinha goste.

É apresentada a seguir uma prova por resolução a partir destes argumentos. Seja I uma interpretação sobre o domínio U das pessoas, tal que.

$$I[q(x)] = T \Leftrightarrow x_I \text{ se valoriza},$$
$$I[p(x,y)] = T \Leftrightarrow x_I \text{ gosta de } y_I,$$
$$I[a] = \text{Santinha}.$$

Utilizando esta interpretação, a representação dos argumentos na Lógica de Predicados é:

$$H = ((\forall x)(\neg q(x) \rightarrow p(a,x)) \rightarrow \neg(\exists y)(q(y) \wedge p(a,y))).$$

Logo,

$$\neg H = \neg((\forall x)(\neg q(x) \rightarrow p(a,x)) \rightarrow \neg(\exists y)(q(y) \wedge p(a,y))) \text{ equivale a}$$
$$\neg(\neg(\forall x)(\neg q(x) \rightarrow p(a,x)) \vee \neg(\exists y)(q(y) \wedge p(a,y))) \text{ equivale a}$$
$$(\forall x)(\neg q(x) \rightarrow p(a,x)) \wedge (\exists y)(q(y) \wedge p(a,y)) \text{ equivale a}$$
$$(\forall x)(\exists y)(\ (q(x) \vee p(a,x)) \wedge (q(y) \wedge p(a,y))) \text{ equivale à forma prenex}$$
$$\neg H_p = (\forall x)(\exists y)(\ (q(x) \vee p(a,x)) \wedge q(y) \wedge p(a,y)),$$

O resultado da Skolemização de $\neg Hp$ é dado por

$$\neg H_s = (\forall x)(\ (q(x) \vee p(a,x)) \wedge q(f(x)) \wedge p(a,f(x))),$$

que não possui quantificadores existenciais. ¬Hs é escrita na notação de conjuntos como:

$$\neg H_c = \{\{q(x), p(a,x)\}, \{q(f(x))\}, \{p(a,f(x))\}\}.$$

Uma expansão por resolução sobre este conjunto, que é associada a H, é

.1 $\{q(x), p(a,x)\}$
.2 $\{q(f(x))\}$
.3 $\{p(a,f(x))\}$

Neste caso, não é possível obter uma expansão fechada pois o par de átomos q(x) e q(f(x)) não são unificáveis. Portanto, não se tem a prova por resolução dos argumentos. Considere a outra forma prenex onde o quantificador existencial aparece na primeira posição.

$$\neg H_{pp} = (\exists y)(\forall x)((q(x) \vee p(a,x)) \wedge q(y) \wedge p(a,y)),$$

Neste caso, a forma de Skolem é dada por

$$\neg H_{ss} = (\forall x)((q(x) \vee p(a,x)) \wedge q(b) \wedge p(a,b)),$$

e

$$H_{cc} = \{\{q(x), p(a,x)\}, \{q(b)\}, \{p(a,b)\}\}.$$

Uma expansão por resolução sobre este conjunto, que é associada a H, é

.1 $\{q(x), p(a,x)\}$
.2 $\{q(b)\}$
.3 $\{p(a,b)\}$
.4 $\{p(a,b)\}$ Res(.1,.2), $\theta_1 = \{x \leftarrow b\}$.

Novamente, não é possível obter uma expansão fechada pois o par de átomos das linhas .3 e .4 não são complementares. Logo, não se tem a prova por resolução dos argumentos.

Teorema da Completude. Seja H uma fórmula da Lógica de Predicados. Se H é uma tautologia então existe uma prova de H por resolução.

Comentário. A demonstração deste teorema não é considerada neste texto, podendo ser encontrada em [Fitting, 1990] ou [Nerode, 1994].

A prova por resolução na Lógica de Predicados também é correta. Todo teorema é uma tautologia. Isto significa que dada uma fórmula H, se uma expansão por resolução associada a ¬H é fechada, então H é uma tautologia. Os argumentos provados utilizando a resolução são válidos.

Teorema da Correção. Seja H uma fórmula da Lógica de predicados. Se existe uma prova de H, por resolução, então H é uma tautologia.

Demonstração. Suponha que há uma prova de H utilizando resolução. Esta prova tem várias etapas.

a) Nega-se a fórmula H, obtendo $\neg H$, que é utilizada nas próximas etapas. Observe que H é tautologia se e somente se $\neg H$ é insatisfatível.

Para provar que H é uma tautologia, utilizando resolução, demonstra-se que $\neg H$ é insatisfatível ou seja

$$\forall \text{ interpretação } I,\ I[\neg H] = F.$$

b) Transformação de $\neg H$ em sua forma prenex associada $\neg Hp$. Nessa etapa, $\neg H$ equivale a $\neg Hp$. Logo,

$$I[\neg H] = F \Leftrightarrow I[\neg Hp] = F.$$

c) Skolemização de $\neg Hp$, obtendo $\neg Hs$. A skolemização mantém a insatisfatibilidade.

$$I[\neg Hp] = F \Leftrightarrow I[\neg Hs] = F.$$

d) Transformação de $\neg Hs$ na forma clausal, obtendo $\neg Hc$. A fórmula $\neg Hs$ é equivalente à sua forma clausal $\neg Hc$. Logo,

$$I[\neg Hs] = F \Leftrightarrow I[\neg Hc] = F.$$

e) Expansão por resolução sobre $\neg Hc$. Se a expansão é fechada então

$$\forall \text{ interpretação } I,\ I[\neg Hc] = F.$$

Isto ocorre porque dadas duas cláusulas C_1 e C_2 (veja exercícios),

$$\text{se } I[C_1 \wedge C_2] = T \text{ então } I[Res(C_1,C_2)] = T.$$

Além disso, a cláusula vazia equivale ao símbolo *false*. Portanto, se a expansão por resolução é fechada, logo

$$\text{se } I[\neg Hc] = T, \text{ então } I[\textit{false}] = T,$$

o que é um absurdo. Logo, não se pode ter $I[\neg Hc] = T$, concluindo que

$$\forall \text{ interpretação } I,\ I[\neg Hc] = F.$$

Seguindo as etapas acima,

$$\begin{aligned}\neg H \text{ é insatisfatível} &\Leftrightarrow \forall \text{ interpretação } I,\ I[\neg H] = F.\\ &\Leftrightarrow \forall \text{ interpretação } I,\ I[\neg Hp] = F.\\ &\Leftrightarrow \forall \text{ interpretação } I,\ I[\neg Hs] = F\\ &\Leftrightarrow \forall \text{ interpretação } I,\ I[\neg Hc] = F.\end{aligned}$$

Como a expansão por resolução fechada demonstra que não se pode ter $I[\neg Hc] = T$, conclui-se que $I[\neg Hc] = F$ e, portanto, $I[\neg H] = F$. Portanto, $\neg H$ é insatisfatível, logo H é tautologia.

Como há uma prova por resolução do argumento
Toda pessoa é sábia ou é politiqueira.
Zé não é politiqueiro.
Portanto, Zé é sábio.

Conclui-se, utilizando o teorema da correção, que este argumento é válido.

No caso do argumento
Santinha gosta de toda pessoa que não se valoriza.
Portanto, não existe ninguém que se valoriza e que Santinha goste.
Não há uma prova por resolução. Logo, pelo teorema da completude, o argumento não é válido.

Definição (conseqüência lógica por resolução). Dada uma fórmula H e um conjunto de hipóteses

$$\beta = \{A_1, ..., A_n\},$$

então H é uma conseqüência lógica de β, por resolução na Lógica de Predicados, se existe uma prova de

$$(A_1 \wedge ... \wedge A_n) \rightarrow H$$

por resolução.

Notação. Dada uma fórmula H, se H é conseqüência lógica de um conjunto de hipóteses $\beta = \{A_1,...,A_n\}$, por resolução, então este fato é indicado pela notação

$$\beta \vdash H \quad \text{ou} \quad \{A_1,...,A_n\} \vdash H$$

A notação acima é idêntica às notações utilizadas para conseqüência lógica em Pa, Par e nos tableaux semânticos. O sistema que estiver sendo considerado deve ficar claro no contexto.

Exemplo (conseqüência lógica na resolução). Se

$$E_1 = (\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)) \text{ e } E_2 = (\exists x)p(x) \rightarrow (\forall x)q(x),$$

então

a) E_2 implica E_1,
b) E_1 não implica E_2.

Tais exercícios são resolvidos, neste exemplo, utilizando resolução. Observe que eles já foram resolvidos utilizando outras técnicas.

a) E_2 implica E_1 se e somente se $(E_2 \rightarrow E_1)$ é uma tautologia. Por outro lado, $(E_2 \rightarrow E_1)$ é tautologia se e somente se $\neg(E_2 \rightarrow E_1)$.

É demonstrado a seguir, utilizando resolução, que $\neg(E_2 \rightarrow E_1)$.

$H = ((\exists x)p(x) \rightarrow (\forall x)q(x)) \rightarrow (\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$, logo
$\neg H = \neg(((\exists x)p(x) \rightarrow (\forall x)q(x)) \rightarrow (\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)))$ equivale a
$\neg(\neg(\neg(\exists x)p(x) \vee (\forall x)q(x)) \vee (\forall x)(\neg p(x) \vee q(x)))$ equivale a
$(\neg(\exists x)p(x) \vee (\forall x)q(x)) \wedge \neg(\forall x)(\neg p(x) \vee q(x)))$ equivale a
$((\forall x)\neg p(x) \vee (\forall x)q(x)) \wedge (\exists x)\neg(\neg p(x) \vee q(x))$ equivale a
$((\forall x)\neg p(x) \vee (\forall x)q(x)) \wedge (\exists x)(p(x) \wedge \neg q(x))$ equivale a
$((\forall x_1)\neg p(x_1) \vee (\forall x_2)q(x_2)) \wedge (\exists x_3)(p(x_3) \wedge \neg q(x_3))$ equivale à forma prenex
$\neg H_p = (\exists x_3)(\forall x_1)(\forall x_2)((\neg p(x_1) \vee q(x_2)) \wedge (p(x_3) \wedge \neg q(x_3)))$

A Skolemização de $\neg H_p$ tem como resultado

$$\neg Hs = (\forall x_1)(\forall x_2)((\neg p(x_1) \vee q(x_2)) \wedge (p(a) \wedge \neg q(a)))$$

Escrevendo $\neg H_s$ na notação de conjuntos

$$\neg H_c = \{\{\neg p(x_1), q(x_2)\}, \{p(a)\}, \{\neg q(a)\}\}$$

Uma expansão por resolução fechada sobre este conjunto, que é associada a $(E_2 \rightarrow E_1)$, é

.1 $\{\neg p(x_1), q(x_2)\}$
.2 $\{p(a)\}$
.3 $\{\neg q(a)\}$
.4 $\{q(x_2)\}$ Res(.1,.2), $\theta_1 = \{x_1 \leftarrow a\}$.
.5 $\{\ \}$ Res(.3,.4), $\theta_2 = \{x_2 \leftarrow a\}$.

Neste exemplo, a forma prenex considerada é

$$\neg H_p = (\exists x_3)(\forall x_1)(\forall x_2)((\neg p(x_1) \vee q(x_2)) \wedge (p(x_3) \wedge \neg q(x_3)))$$

Mas, a fórmula H_{pp} a seguir também é uma forma prenex de $\neg H$

$$\neg H_{pp} = (\forall x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)((\neg p(x_1) \vee q(x_2)) \wedge (p(x_3) \wedge \neg q(x_3)))$$

Observe que o quantificador existencial se encontra na terceira posição em H_{pp} e em H_p ele se encontra no início da fórmula. Neste caso, o resultado da Skolemização é

$$\neg H_{ss} = \{\{\neg p(x_1), q(x_2)\}, \{p(f(x_1,x_2))\}, \{\neg q(f(x_1,x_2))\}\}$$

e uma expansão por resolução sobre este conjunto, que também é associada a $(E_2 \rightarrow E_1)$, é

.1 $\{\neg p(x_1), q(x_2)\}$
.2 $\{p(f(x_1,x_2))\}$
.3 $\{\neg q(f(x_1,x_2))\}$

Neste caso, não é possível continuar esta expansão pois os átomos não são unificáveis. Utilizando o teorema da completude, a importante conclusão deste exemplo é a seguinte.

$\vdash H \Leftrightarrow$ existe expansão por resolução fechada associada a H.

Mas não necessariamente toda expansão por resolução associada a H é fechada.

b) E_1 não implica E_2. Suponha que se deseje demonstrar $\vdash (E_1 \rightarrow E_2)$ utilizando resolução. Tem-se o desenvolvimento

$$G = (\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)) \rightarrow ((\exists x)p(x) \rightarrow (\forall x)q(x))$$

logo

$\neg G = \neg((\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)) \rightarrow ((\exists x)p(x) \rightarrow (\forall x)q(x)))$ equivale a
$\neg(\neg(\forall x)(\neg p(x) \vee q(x)) \vee (\neg(\exists x)p(x) \vee (\forall x)q(x)))$ equivale a
$(\forall x)(\neg p(x) \vee q(x)) \wedge \neg(\neg(\exists x)p(x) \vee (\forall x)q(x))$ equivale a

$(\forall x)(\neg p(x) \vee q(x)) \wedge ((\exists x)p(x) \wedge \neg(\forall x)q(x))$ equivale a
$(\forall x_1)(\neg p(x_1) \vee q(x_1)) \wedge ((\exists x_2)p(x_2) \wedge (\exists x_3)\neg q(x_3))$ equivale à forma prenex
$\neg G_p = (\forall x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)((\neg p(x_1) \vee q(x_1)) \wedge p(x_2) \wedge \neg q(x_3))$

A forma de Skolem de $\neg G_p$ é

$$\neg G_s = (\forall x_1)((\neg p(x_1) \vee q(x_1)) \wedge p(f(x_1)) \wedge \neg q(g(x_1)))$$

Escrevendo $\neg G_s$ na notação de conjuntos

$$\neg G_c = \{\{\neg p(x_1), q(x_1)\}, \{p(f(x_1))\}, \{\neg q(g(x_1))\}\}$$

Uma expansão por resolução sobre este conjunto, que é associada a $(E_1 \rightarrow E_2)$, é

.1 $\{\neg p(x_1), q(x_1)\}$
.2 $\{p(f(x_1))\}$
.3 $\{\neg q(g(x_1))\}$

Neste caso não é possível desenvolver a expansão por resolução pois $\neg p(x_1)$ e $p(f(x_1))$ não são unificáveis, o mesmo ocorrendo com $q(x_1)$ e $q(g(x_1))$. Portanto, não é possível obter uma expansão fechada. Considerando a outra forma prenex

$$G_{pp} = (\exists x_2)(\exists x_3)(\forall x_1)((\neg p(x_1) \vee q(x_1)) \wedge p(x_2) \wedge \neg q(x_3))$$

onde o quantificador em x_1 é escrito mais internamente, a forma de Skolem de G_{pp} é

$$\neg G_{ss} = (\forall x_1)((\neg p(x_1) \vee q(x_1)) \wedge p(a) \wedge \neg q(b))$$

Escrevendo $\neg G_{ss}$ na notação de conjuntos

$$\neg G_{cc} = \{\{\neg p(x_1), q(x_1)\}, \{p(a)\}, \{\neg q(b)\}\}$$

Uma expansão por resolução sobre este conjunto, que é associada a $(E_1 \rightarrow E_2)$, é

.1 $\{\neg p(x_1), q(x_1)\}$
.2 $\{p(a)\}$
.3 $\{\neg q(b)\}$
.4 $\{q(a)\}$ Res(.1,.2), $\theta_1 = \{x_1 \leftarrow a\}$.

Neste caso também não é possível desenvolver a expansão por resolução pois $\neg q(b)$ e $q(a)$ não são unificáveis. Portanto, qualquer que seja a forma prenex e expansão por resolução consideradas, não é possível obter uma expansão fechada. Logo, E_1 não implica E_2. Utilizando o teorema da completude, a importante conclusão deste exemplo é a seguinte.

Não existe prova de H por resolução $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ não existe expansão por resolução fechada associada a H
$\Leftrightarrow$ toda expansão por resolução associada a H é aberta
$\Leftrightarrow$ H não é tautologia.

Exemplo (conseqüência lógica por resolução). Considere os argumentos.

a) Todo filho do irmão da esposa de Genilton é sobrinho de Genilton.
b) Todo filho da irmã da esposa do irmão da esposa de Genilton não é sobrinho de Genilton.
c) Gemagalgani é esposa de Genilton.
d) Tonynino é filho de Kátia.
e) Nicanor é irmão de Gemagalgani.
f) Cuquinha é irmã de Kátia.
g) Gileide é filha de Cuquinha.
h) Kátia é esposa de Nicanor.

A figura a seguir indica as relações familiares entre as pessoas.

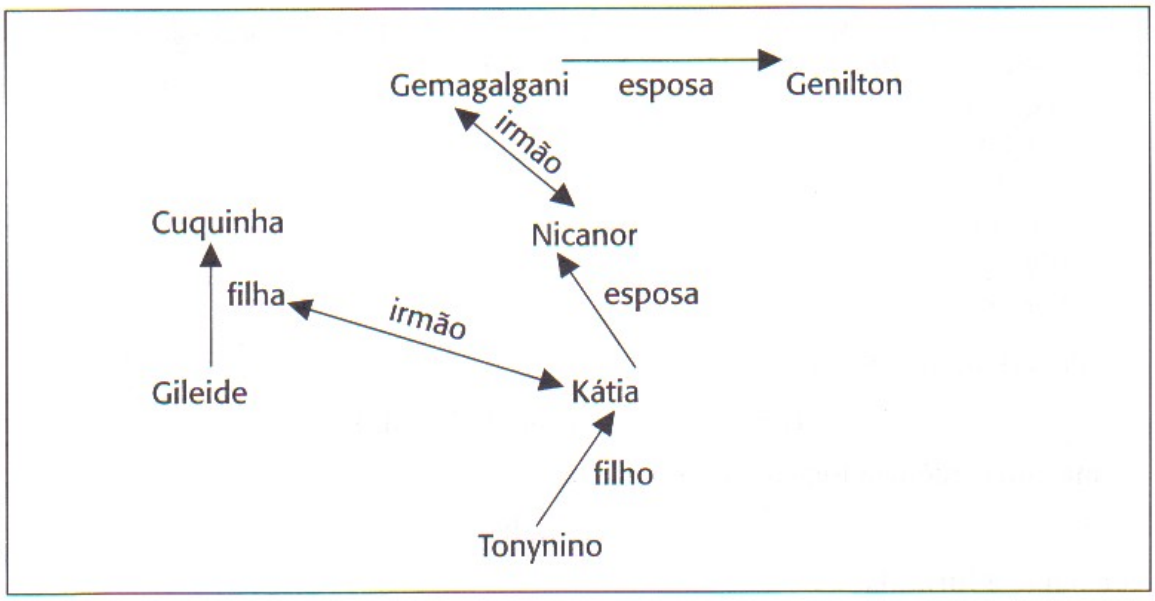


Figura 1 Relações familiares.

- É conseqüência lógica das afirmações a), c),..., h), que Tonynino é sobrinho de Genilton?
- É conseqüência lógica das afirmações b), ..., h), que Gileide não é sobrinha de Genilton?

Observação. Estas pessoas com nomes tão bacanas existem. São amigos sergipanos.

É demonstrado a seguir, utilizando resolução, se as conseqüências ocorrem. Os argumentos são representados na Lógica de Predicados a partir de uma interpretação I sobre o domínio U das pessoas legais tal que

$I[p(x,y)] = T \Leftrightarrow x_I$ é filho de y_I,
$I[q(x,y)] = T \Leftrightarrow x_I$ é irmão ou irmã de y_I,
$I[r(x,y)] = T \Leftrightarrow x_I$ é esposa de y_I,
$I[p_1(x,y)] = T \Leftrightarrow x_I$ é sobrinho ou sobrinha de y_I,
$I[g_e]$ = Genilton.

$I[t_o]$ = Tonynino,
$I[m_a]$ = Kátia,
$I[g_g]$ = Gemagalgani,
$I[r_i]$ = Nicanor,
$I[g_i]$ = Gileide,
$I[c_q]$ = Cuquinha.

A afirmação a) pode ser representada por fórmulas do tipo

a) $(\forall^*)((p(x,z) \wedge r(z,y) \wedge q(y,w) \wedge r(w,g_e)) \rightarrow p_1(x,g_e))$
a') $(\forall^*)((p(x,y) \wedge q(y,z) \wedge q(z,w) \wedge r(w,d)) \rightarrow p_1(x,g_e))$

Observe que estas representações não são únicas. A afirmação b) pode ser representada por

b) $(\forall^*)((p(x,y) \wedge q(y,z) \wedge r(z,w) \wedge q(w,x_1) \wedge r(x_1,g_e)) \rightarrow \neg p_1(x,g_e))$

As outras afirmações são representadas por

c') $r(g_g,g_e)$
d) $p(t_o,m_a)$
e) $q(r_i,g_g)$
f) $q(c_q,m_a)$
g) $p(g_i,c_q)$
h) $r(m_a,r_i)$

Para demonstrar que

"Tonynino é sobrinho de Genilton"

é uma conseqüência lógica das afirmações

a), c), ..., h),

considere a fórmula

$$H = ((\forall^*)\ (\ (p(x,z) \wedge r(z,y) \wedge q(y,w) \wedge r(w,g_e)) \rightarrow p_1(x,g_e)) \wedge r(g_g,g_e) \wedge p(t_o,m_a) \wedge q(r_i,g_g) \wedge q(c_q,m_a) \wedge p(g_i,c_q) \wedge r(m_a,r_i)\ ) \rightarrow p_1(t_o,g_e)$$

A fórmula H representa

a), c),...,h), implica $p_1(a_T,g_e)$.

Observe que a afirmação b) não é considerada e o átomo $p_1(a_T,d)$ representa a afirmação

"Tonynino é sobrinho de Genilton".

Inicialmente $\neg H$ deve ser transformada na forma clausal.

$$\neg H = \neg(((\forall^*)((p(x,z) \wedge r(z,y) \wedge q(y,w) \wedge r(w,g_e)) \rightarrow p_1(x,g_e)) \wedge r(g_g,g_e) \wedge p(t_o,m_a) \wedge q(r_i,g_g) \wedge q(c_q,m_a) \wedge p(g_i,c_q) \wedge r(m_a,r_i)) \rightarrow p_1(t_o,g_e))$$

equivale a (transformação do conectivo $\rightarrow$)

$$\neg H = \neg(\neg((\forall^*)\ (\neg\ (p(x,z) \wedge r(z,y) \wedge q(y,w) \wedge r(w,g_e)) \vee p_1(x,g_e)) \wedge r(g_g,g_e) \wedge p(t_o,m_a) \wedge q(r_i,g_g) \wedge q(c_q,m_a) \wedge p(g_i,c_q) \wedge r(m_a,r_i)\ ) \vee p_1(t_o,g_e))$$

equivale a (lei de De Morgan)

$$\neg H = (\forall^*)\ (\neg p(x,z) \vee \neg r(z,y) \vee \neg q(y,w) \vee \neg r(w,g_e) \vee p_1(x,g_e)) \wedge$$
$$r(g_g,g_e) \wedge p(t_o,m_a) \wedge q(r_i,g_g) \wedge q(c_q,m_a) \wedge p(g_i,c_q) \wedge r(m_a,r_i) \wedge \neg p_1(t_o,g_e)$$

equivale a (forma prenex)

$$\neg H = (\forall^*)\ ((\neg p(x,z) \vee \neg r(z,y) \vee \neg q(y,w) \vee \neg r(w,g_e) \vee p_1(x,g_e)) \wedge$$
$$r(g_g,g_e) \wedge p(t_o,m_a) \wedge q(r_i,g_g) \wedge q(c_q,m_a) \wedge p(g_i,c_q) \wedge r(m_a,r_i) \wedge \neg p_1(t_o,g_e))$$

A forma prenex já está na forma clausal, cuja notação de conjunto é

$$\neg H_c = \{\{\neg p(x,z), \neg r(z,y), \neg q(y,w), \neg r(w,g_e), p_1(x,g_e)\},$$
$$\{r(g_g,g_e)\}, \{p(t_o,m_a)\}, \{q(r_i,g_g)\}, \{q(c_q,m_a)\}, \{p(g_i,c_q)\}, \{ r(m_a,r_i)\}\ \{\neg p_1(t_o,g_e)\}\}$$

Uma expansão por resolução sobre este conjunto é indicada a seguir.

.1	$\{\neg p(x,z), \neg r(z,y), \neg q(y,w), \neg r(w,g_e), p_1(x,g_e)\}$	
.2	$\{r(g_g,g_e)\}$	
.3	$\{p(t_o,m_a)\}$	
.4	$\{q(r_i,g_g)\}$	
.5	$\{q(c_q,m_a)\}$	
.6	$\{p(g_i,c_q)\}$	
.7	$\{r(m_a,r_i)\}$	
.8	$\{\neg p_1(t_o,g_e)\}$	
.9	$\{\neg p(t_o,z), \neg r(z,y), \neg q(y,w), \neg r(w,g_e)\}$	Res(.1,.8), $\theta_1 = \{x \leftarrow t_o\}$
.10	$\{\neg r(m_a,y), q(y,w), \neg r(w,g_e)\}$	Res(.3,.9), $\theta_2 = \{z \leftarrow m_a\}$
.11	$\{q(r_i,w), \neg r(w,g_e)\}$	Res(.7,.10), $\theta_2 = \{y \leftarrow r_i\}$
.12	$\{\neg r(g_g,g_e)\}$	Res(.4,.11), $\theta_3 = \{w \leftarrow g_g\}$
.13	$\{\ \}$	Res(.2,.12), $\theta_4 = \{\ \}$.

A expansão é fechada, logo H é tautologia. Portanto, é conseqüência lógica das afirmações

a), c), ..., h),

que Tonynino é sobrinho de Genilton. Para responder se é conseqüência lógica das afirmações

b), c), ..., h),

que Gileide não é sobrinha de Genilton, um desenvolvimento análogo deve ser feito. Neste caso, basta substituir em $\neg H_c$ o literal $\neg p_1(t_o,g_e)$ por $p_1(g_i,g_e)$ e a subfórmula

$$(p(x,z) \wedge q(z,w) \wedge r(w,g_e)) \rightarrow p_1(x,g_e)$$

por

$$(\forall^*)(\ (p(x,y) \wedge q(y,z) \wedge r(z,w) \wedge q(w,x_1) \wedge r(x_1,g_e)) \rightarrow \neg p_1(x,g_e))$$

Neste caso, a negação da implicação é representada pelo conjunto de cláusulas

$$\neg Gc = \{\{\neg p(x_2,y), \neg q(y,z), \neg r(z,w), \neg q(w,x_1), \neg r(x_1,g_e), \neg p_1(x_2,g_e)\},$$

$\{r(g_g,g_e)\}$, $\{p(t_o,m_a)\}$, $\{q(r_i,g_g)\}$, $\{q(c_q,r_i)\}$, $\{p(g_i,c_q)\}$, $\{r(m_a,r_i)\}$ $\{p_1(g_i,g_e)\}\}$

Uma expansão por resolução sobre este conjunto é indicada a seguir.

.1	$\{\neg p(x_2,y), \neg q(y,z), \neg r(z,w), \neg q(w,x_1), \neg r(x_1,g_e), \neg p_1(x_2,g_e)\}$	
.2	$\{r(g_g,g_e)\}$	
.3	$\{p(t_o,m_a)\}$	
.4	$\{q(r_i,g_g)\}$	
.5	$\{q(c_q,m_a)\}$	
.6	$\{p(g_i,c_q)\}$	
.7	$\{r(m_a,r_i)\}$	
.8	$\{p_1(g_i,g_e)\}$	
.9	$\{\neg p(g_i,y), \neg q(y,z), \neg r(z,w), \neg q(w,x_1), \neg r(x_1,g_e)\}$	Res(.1,.8), $\theta_1 = \{x_2 \leftarrow g_i\}$
.10	$\{\neg q(c_q,z), \neg r(z,w), \neg q(w,x_1), \neg r(x_1,g_e)\}$	Res(.6,.9), $\theta_2 = \{y \leftarrow c_q\}$
.11	$\{\neg r(m_a,w), \neg q(w,x_1), \neg r(x_1,g_e)\}$	Res(.5,.10), $\theta_3 = \{z \leftarrow m_a\}$
.12	$\{\neg q(r_i,x_1), \neg r(x_1,g_e)\}$	Res(.7,.11), $\theta_4 = \{w \leftarrow r_i\}$
.13	$\{\neg r(g_g,g_e)\}$	Res(.4,.12), $\theta_5 = \{x_1 \leftarrow g_g\}$
.14	$\{\ \}$	Res(.2,.13), $\theta_6 = \{x_1 \leftarrow g_e\}$.

A expansão é fechada, logo G é tautologia. Portanto, é conseqüência lógica das afirmações

b), c), ..., h),

que Gileide não é sobrinha de Genilton.

Exercícios

1) Converta as fórmulas a seguir para a forma prenex e em seguida aplique a skolemização.
   a) $(\forall x)(\exists y)(\forall x)p(x,y,w) \leftrightarrow (\forall w)(\forall w)p(x,z,w)$
   b) $(\forall x)p(x,y) \rightarrow (\forall x)(\exists y)q(x,y)$
   c) $(\forall x)p(x,y) \wedge ((\exists x)(\forall y)q(y) \vee (\exists x)(\forall y)(\neg(\forall x)r(x,y,z)))$
   d) $(\forall x)(\exists x)p(x,y) \rightarrow (\exists x)(\forall x)p(y,a)$
   e) $((\exists x)p(x,y) \vee (\forall y)r(x,y)) \rightarrow (\exists w)(\forall x)(\exists y)q(x,y)$
2) Existe, na Lógica de Predicados, fórmula aberta que é fechada? Existe fórmula aberta que não é fechada?
3) a) Demonstre que as regras prenex deduzem fórmulas equivalentes.
   b) Seja H uma fórmula da Lógica de Predicados. Demonstre, utilizando indução finita, que existe uma fórmula G, equivalente a H, que está na forma prenex.
4) Considere as regras de eliminação de quantificadores existenciais.

$$R_1 = \frac{(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)(\exists y)A(x_1,\ldots,x_n,y)}{(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)A(x_1,\ldots,x_n,f(x_1,\ldots,x_n))}$$

$$R_2 = \frac{(\exists y)(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)A(x_1,\ldots,x_n,y)}{(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)A(x_1,\ldots,x_n,a)}$$

Dada uma fórmula E, se o resultado da aplicação de uma das regras R_1, R_2, R_3 sobre E é uma fórmula E_s, demonstre que E é insatisfatível se e somente se E_s é insatisfatível.

5) a) Seja E_p uma fórmula da Lógica de Predicados na forma prenex. Considere E_s a fórmula obtida aplicando o algoritmo da skolemização em E_p. Demonstre que E_p é insatisfatível se e somente se E_s é insatisfatível.

b) Modifique o algoritmo da Skolemização e considere E uma fórmula qualquer, não necessariamente na forma prenex.

6) Dado uma fórmula E da Lógica de Predicados, demonstre que é possível determinar uma cláusula E_c tal que E é insatisfatível $\Leftrightarrow$ E_c é insatisfatível.

7) Considere as substituições θ_1, θ_2 e θ_3 e a Cláusula C. Demonstre que

a) $\theta_1\{\ \} = \{\ \}\theta_1 = \theta_1$.

b) $(C\theta_1)\theta_2 = C(\theta_1\theta_2)$.

c) $\theta_1(\theta_2\theta_3) = (\theta_1\theta_2)\theta_3$

8) Calcule as composições $\theta\sigma$ e $\sigma\theta$ onde

a) $\theta = \{x \leftarrow f(x,y), y \leftarrow g(x,y), z \leftarrow x\}$ e $\sigma = \{x \leftarrow z, y \leftarrow x\}$.

b) $\theta = \{x \leftarrow y, y \leftarrow z, z \leftarrow x\}$ e $\sigma = \{x \leftarrow z, y \leftarrow x\}$

9) Considere as substituições $\theta = \{x \leftarrow g(x,y,z), z \leftarrow w\}$ e $\sigma : \{x \leftarrow g(f(x),z,z), w \leftarrow z, y \leftarrow z\}$. Determine se θ é ou não mais geral que σ.

10) É possível determinar substituições θ e σ, $\sigma \neq \{\ \}$, $\theta \neq \{\ \}$ tais que .

a) σ é mais geral que θ e θ é mais geral que σ.

b) $\theta\sigma = \{\ \}$, e $\sigma\theta = \{\ \}$.

11) Aplique, passo a passo, o algoritmo da unificação ao conjunto S.

a) $S = \{p(x) \rightarrow q(z), p(g(z)) \rightarrow q(x)\}$

b) $S = \{p(x,h(y),f(g(a))), p(a,w,f(z)), p(y,h(x),f(g(b)))\}$

c) $S = \{p(x,f(y)) \rightarrow q(z), p(a,f(g(y))) \rightarrow q(w)\}$

d) $S = \{p(x, f(y)) \rightarrow q(z), p(g(z), f(w)) \rightarrow q(w), p(y, f(g(b))) \rightarrow q(g(c))\}$

e) $S = \{p(x,f(g(a))), p(a,f(z)), p(y,f(g(b)))\}$

12) Considere o algoritmo da unificação, sem o teste da ocorrência, onde se tem os três passos a seguir:

1. $\sigma_o = \{\ \}$, $k = 0$.
2. SE $|S\sigma_k| = 1$, ENTÃO pare !!!, σ_k é um unificador mais geral de S.
CASO CONTRÁRIO determine D_k, o conjunto de diferenças de $S\sigma_k$.
3. SE $\exists\ x, t \in D_k$, ENTÃO faça $\sigma_{k+1} = \sigma_k\{x \leftarrow t\}$, $k = k+1$, vá para 2.
CASO CONTRÁRIO pare !!! S não é unificável.

Aplique, passo a passo, o algoritmo da unificação, sem o teste da ocorrência, aos conjuntos de expressões.

a) $S = \{p(x,h(y),f(g(a))), p(a,w,f(z)), p(y,h(x),f(g(b)))\}$

b) $S = \{p(x) \rightarrow q(z), p(g(z)) \rightarrow q(x)\}$

c) $S = \{p(x,f(y)) \rightarrow q(z), p(a,f(g(y))) \rightarrow q(w)\}$

Aplique, passo a passo, o algoritmo da unificação, com o teste da ocorrência, aos conjuntos de expressões. É possível unificar S?

13) Considere o conjunto infinito de átomos. $S = \{p(x_1), p(x_2), p(x_3),..., p(x_n), ...\}$.

a) Aplique o algoritmo da unificação em S.

b) Aplique o algoritmo da unificação, sem o teste da ocorrência, em S.

14) Demonstre que no passo 3. do algoritmo da unificação a variável x, uma vez escolhida a partir do conjunto de diferenças, não é mais escolhida no desenvolvimento do algoritmo.

15) Demonstre que o algoritmo da unificação sempre pára.
16) Consulte a bibliografia [Lloyd, 1984], e demonstre a correção do algoritmo da unificação.
17) a) Dadas duas cláusulas, demonstre que se $I[C_1 \wedge C_2] = T$ então $I[Res(C_1, C_2)] = T$.
    b) Comente. Por que a cláusula vazia equivale ao símbolo *false*?
18) Demonstre o teorema da correção. Seja H uma fórmula da Lógica Proposicional. Se existe uma prova de H, por resolução, então H é uma tautologia. Complete a demonstração apresentada no texto.
19) Demonstre, utilizando resolução se os pares de fórmulas a seguir são equivalentes.
    a) $(\forall x)q(y)$ e $q(a)$
    b) $(\exists x)q(y)$ e $q(a)$
    c) $(\forall x)(p(x) \wedge q(a))$ e $((\forall x)p(x) \wedge q(a))$
    d) $(\exists x)(p(x) \wedge q(a))$ e $((\exists x)p(x) \wedge q(a))$
    e) $(\forall x)(p(x) \vee q(a))$ e $((\forall x)p(x) \vee q(a))$
    f) $(\exists x)(p(x) \vee q(a))$ e $((\exists x)p(x) \vee q(a))$
    g) $(\forall x)(p(x) \rightarrow q(a))$ e $((\exists x)p(x) \rightarrow q(a))$
    h) $(\forall x)(q(a) \rightarrow p(x))$ e $(q(a) \rightarrow (\forall x)p(x))$
    i) $(\exists x)(p(x) \rightarrow q(a))$ e $((\forall x)p(x) \rightarrow q(a))$
    j) $(\exists x)(q(a) \rightarrow p(x))$ e $(q(a) \rightarrow (\exists x)p(x))$
20) Demonstre, utilizando resolução, que.
    a) Se $E_1 = (\forall x)(p(x) \wedge q(x))$ e $E_2 = (\forall x)p(x) \wedge (\forall x)q(x)$, então E_1 equivale a E_2.
    b) Se $E_1 = (\forall x)(p(x) \vee q(x))$ e $E_2 = (\forall x)p(x) \vee (\forall x)q(x)$ então E_2 implica E_1, mas E_1 não implica E_2.
    c) Se $E_1 = (\exists x)(p(x) \vee q(x))$ e $E_2 = (\exists x)p(x) \vee (\exists x)q(x)$ então E_1 equivale a E_2.
    d) Se $E_1 = (\exists x)(p(x) \rightarrow q(x))$ e $E_2 = (\forall x)p(x) \rightarrow (\exists x)q(x)$, então E_1 equivale a E_2.
    e) Se $E_1 = (\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$ e $E_2 = (\exists x)p(x) \rightarrow (\forall x)q(x)$, então E_2 implica E_1, mas E_1 não implica E_2.
21) Demonstre, utilizando resolução que.
    a) $\vdash (\forall x)((p(x) \rightarrow (q(x) \rightarrow r(x)) \rightarrow ((p(x) \rightarrow q(x)) \rightarrow (p(x) \rightarrow r(x)))$
    b) $\vdash (\forall x)((p(x) \rightarrow q(x)) \rightarrow (\neg q(x) \rightarrow \neg p(x)))$
    c) $\vdash (\forall x)((p(x) \rightarrow q(x)) \rightarrow (\neg p(x) \vee q(x)))$
    d) $\vdash (\forall x)p(x) \leftrightarrow (\forall y)p(y)$
    e) $\vdash (\forall x)(\forall y)(p(x,y) \rightarrow (q(x,y) \rightarrow p(x,y)))$
22) Algumas das fórmulas a seguir são tautologias, outras não. Para cada fórmula demonstre, utilizando resolução, se ela é uma tautologia.
    a) $(\forall x)p(x) \rightarrow p(a)$
    b) $p(a) \rightarrow (\exists x)p(x)$
    c) $(\forall x)(\neg(\forall y)q(x,y)) \rightarrow (\neg(\forall y)q(y,y))$
    d) $p(a) \rightarrow (\forall x)p(x)$
    e) $(\forall x)p(x) \rightarrow (\exists x)p(x)$
    f) $(\exists x)(p(x) \rightarrow q(x)) \rightarrow ((\exists x)p(x) \rightarrow (\exists x)q(x))$
    g) $(\forall x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow (\exists y)p(y,y)$
    h) $(\exists x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow (\exists y)p(y,y)$
    i) $(\exists x)(p(x) \rightarrow r(x)) \leftrightarrow ((\forall x)p(x) \rightarrow (\exists x)r(x))$
    j) $(\forall x)(p(x) \vee r(x)) \rightarrow ((\forall x)p(x) \vee (\forall x)r(x))$
    k) $((\forall x)p(x) \vee (\forall x)r(x)) \rightarrow (\forall x)(p(x) \vee r(x))$
    l) $(\exists x)(p(x) \leftrightarrow r(x)) \leftrightarrow ((\exists x)p(x) \leftrightarrow (\exists x)r(x))$
    m) $(\exists x)((p(x) \rightarrow p(a)) \wedge (p(x) \rightarrow p(b)))$

n) $(\exists x)(\forall y)((q(x,y) \wedge q(y,x)) \rightarrow (q(x,x) \leftrightarrow q(y,y)))$
o) $(\forall x)(p(x) \wedge q(x)) \leftrightarrow (\forall x)(p(x) \rightarrow \neg q(x))$
p) $(\forall x)(p(x,a) \rightarrow (\forall x)q(x,b)) \leftrightarrow ((\exists x)p(x,a) \rightarrow (\forall x)q(x,b))$
q) $(\forall x)(\exists y)(p(x,y) \rightarrow q(x,y)) \rightarrow ((\forall x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow (\forall x)(\exists y)q(x,y))$
r) $(\forall x)(\exists y)(p(x,y) \rightarrow q(x,y)) \rightarrow ((\exists x)(\forall y)p(x,y) \rightarrow (\forall x)(\exists y)q(x,y))$

23) Demonstre, utilizando resolução, que as fórmulas H e G a seguir, são equivalentes.
a) $H = (\forall x)(\forall y)p(x,y,z)$, $G = (\forall y)(\forall x)p(x,y,z)$
b) $H = (\exists x)(\exists y)p(x,y,z)$, $G = (\exists y)(\exists x)p(x,y,z)$
c) $H = \neg(\exists y)H$, $G = (\forall y)\neg H$
d) $H = (\exists x)p(x)$, $G = (\exists y)p(y)$
e) $H = (\forall x)p(x)$, $G = (\forall y)p(y)$
f) $H = (\forall x)(\forall x)p(x)$, $G = (\forall x)p(x)$

24) Prove que não existe expansão por resolução fechada associada a
$H = (\forall x)(p(x) \rightarrow (\exists y)(q(y) \wedge r(x,y))) \rightarrow \neg(\exists y)(q(y) \wedge (\forall x)r(y,x))$

25) Demonstre, utilizando resolução, se os argumentos são válidos.
a) Todo político é "esperto". Zé é político. Portanto, Zé é esperto.
b) Todo político é "esperto". Zé é "esperto". Portanto, Zé é político.
c) Todo político é "esperto". Nenhum cientista é "esperto". Portanto, nenhum cientista é político.
d) Todo político é "esperto". Existe indivíduo "esperto", que é inteligente. Portanto, algum político é inteligente.
e) Há político honesto. Há operários honestos. Portanto, há operários que são políticos.
f) Todo barbeiro em Coromandel barbeia somente quem não se barbeia. Logo, o Sr. Orlando, barbeiro de Coromandel, não se barbeia.
g) Toda mulher bonita, inteligente e sensível é observada. Nenhuma filha de Sr. Arnaldo é observada. Mulher que não é observada não se casa, portanto, as filhas de Sr. Arnaldo não se casarão.
h) Se há fé há amor. Se há amor há paz. Se há paz há Deus. Se há Deus, nada faltará.
i) Quem não se ama, não ama ninguém.
j) Paloma ama a todos e somente aqueles que amam Sílvia e Marcos. Sílvia e Marcos amam a todos e somente aqueles que não amam Paloma. Paloma ama a si própria. Portanto, Sílvia ama a si própria.
k) Há monitor que é bom estudante, mas não é comunicativo. Apenas bons estudantes são monitores. Todo artista é comunicativo. Portanto, nem todo bom estudante é um artista.
l) Os filhos de Ana são os filhos de Nicolau. Ana ama seus filhos. Márcio é filho de Nicolau. Portanto, Ana ama Márcio.

26) Demonstre, utilizando resolução, se os conjuntos são satisfatíveis.
a) $\{(\forall x)(\forall y)(p(x,y) \rightarrow \neg p(y,x)), (\forall x)p(x,x),$
$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((p(x,z) \wedge p(y,z)) \rightarrow p(y,z))\}$
b) $\{\neg(\forall x)(\forall y)(p(x,y) \rightarrow \neg p(y,x)), (\forall x)p(x,x),$
$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((p(x,z) \wedge p(y,z)) \rightarrow p(y,z))\}$
c) $\{(\forall x)(\forall y)(p(x,y) \rightarrow \neg p(y,x)), \neg(\forall x)p(x,x),$
$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((p(x,z) \wedge p(y,z)) \rightarrow p(y,z))\}$
d) $\{(\forall x)(\forall y)(p(x,y) \rightarrow \neg p(y,x)), (\forall x)p(x,x),$
$\neg(\forall x)(\forall y)(\forall z)((p(x,z) \wedge p(y,z)) \rightarrow p(y,z))\}$

27) Demonstre, utilizando resolução, quando os conjuntos de afirmações são satisfatíveis.

a) Toda aluna de Ciência da Computação é mais bonita que alguma aluna de Engenharia.

Toda aluna de Engenharia é mais bonita que alguma aluna de Ciência da Computação.

b) Toda aluna de Ciência da Computação é mais bonita que alguma aluna de Engenharia.

Existe aluna de Engenharia que é mais bonita que alguma aluna de Ciência da Computação.

c) Existe aluna de Ciência da Computação que é mais bonita que toda a aluna de Engenharia.

Existe aluna de Engenharia que é mais bonita que alguma aluna de Ciência da Computação.

d) Toda aluna de Ciência da Computação é mais bonita que toda aluna de Engenharia.

Existe aluna de Engenharia é mais bonita que alguma aluna de Ciência da Computação.

e) Existe aluna de Ciência da Computação que é mais bonita que toda a aluna de Engenharia.

Existe aluna de Engenharia que é mais bonita que toda aluna de Ciência da Computação.

28) Elaine estava conversando com sua amiga Leandra. Pintou uma profunda reflexão e Elaine disse:

– Há mulheres em Sacracity que têm ciúmes de todos os homens.

Leandra pensou e disse:

– Toda mulher ciumenta tem uma paixão. Entretanto, elas nunca se casam.

Renato, o bom de bola, estava ouvindo o diálogo e concluiu.

– Nenhuma mulher de Sacracity se casará.

Demonstre utilizando resolução, se a conclusão do Renato é válida ou não.

29) Considere as afirmações a seguir.

H_1 = Toda mulher dócil tem um amado.

H_2 = Se existe mulher dócil, toda pessoa tem um amado.

Demonstre, utilizando resolução, se as afirmações a seguir são válidas.

a) H_1 implica H_2.

b) H_2 implica H_1.

30) Utilize os teoremas da completude e da correção e justifique se for possível.

a) Se H é tautologia, então existe expansão por resolução fechada associada a H.

b) Se H é tautologia, então pode existir expansão por resolução aberta associada a H.

c) Se H não é tautologia, então não existe expansão por resolução fechada associada a H.

d) Se H não é tautologia, então toda expansão por resolução associada a H é aberta.

e) Se existe expansão por resolução fechada associada a H, então H é tautologia.

f) Se existe expansão por resolução aberta associada a H, então não se pode concluir que H não é tautologia.

g) Se toda expansão por resolução associada a H é aberta, então H não é tautologia.

Sugestões e soluções de exercícios selecionados

3) a) Demonstre, para cada regra prenex, que o conseqüente equivale ao antecedente.
   b) Considere B[E] = "existe fórmula E_p na forma prenex tal que E equivale a E_p". Utilize a indução na Lógica de Predicados e demonstre que ∀ fórmula E, B[E].
4) Considere inicialmente R_1. Demonstre que
   $(\forall x_1)...(\forall x_n)(\exists y)A(x_1,...,x_n, y)$ é insatisfatível
   $\Leftrightarrow (\forall x_1)...(\forall x_n)A(x_1,...,x_n,f(x_1,...,x_n))$é insatisfatível.
   Faça o mesmo para a outra regra. Em seguida, utilize o princípio da indução na Lógica de Predicados para demonstrar que para toda fórmula E, se o resultado da aplicação de uma das regras R_1 e R_2 sobre E é uma fórmula E_s, então E é insatifatível se e somente se E_s é insatisfativel. Faça B[E] = se o resultado da aplicação de uma das regras R_1 e R_2 sobre E é uma fórmula E_s, então E é insatisfatível se e somente se E_s é insatisfativel. Como a fórmula E é uma fórmula qualquer, não necessariamente na forma prenex, na demonstração do passo da indução, deve-se utilizar a regra de substituição de fórmulas considerada no Capítulo 6.
5) a) Utilize o resultado do exercício anterior. Observe que no algoritmo da skolemização os passos que modificam a fórmula E_p utilizam as regras de skolemização. Além disso, o algoritmo da skolemização é a aplicação de um número finito de vezes de regras de skolemização.
   b) Basta agregar o algoritmo prenex ao algoritmo da skolemização.
6) Utilize o princípio da indução na Lógica de Predicados. Faça B[E] = existe fórmula E_c na forma clausal tal que E é insatisfatível $\Leftrightarrow$ E_c é insatisfatível.
7) Consulte [Lloyd,1984].
8) a) $\theta\sigma = \{x \leftarrow f(z,x), y \leftarrow g(z,x)\}$.
   b) $\sigma\theta = = \{z \leftarrow x\}$
9) Considere $\lambda = \{x\leftarrow f(x), w\leftarrow z, y\leftarrow z\}$.
   Tem-se $\theta\lambda = \{x \leftarrow g(x,y,z), z \leftarrow w\}\{x\leftarrow f(x), w\leftarrow z, y\leftarrow z\} =$
   $\sigma = \{x \leftarrow g(f(x),z,z), w \leftarrow z, y \leftarrow z\}$. Portanto, θ é mais geral que σ.
10) Sim. Dê exemplo de substituições bem simples que satisfaçam as condições.
12) Observe que o algoritmo da unificação sem o teste da ocorrência pode entrar em loop. Dependendo do conjunto de expressões S, o algoritmo não pára.
13) Considere o conjunto infinito de átomos. $S\infty = \{p(x_1), p(x_2), p(x_3),..., p(x_n), ...\}$.
   a) Neste caso, o algoritmo da unificação não pára.
   b) Neste caso, o algoritmo da unificação não pára.
14) O passo 3 do algoritmo da unificação corresponde a "Se existe uma variável x e um termo t em D_k tal que x não ocorre em t, então faça $\theta_{k+1} = \theta_k\{x\leftarrow t\}$, k = k+1, vá para o passo 2. Caso contrário, pare! S não é unificável. No caso em que se tem sucesso no passo 3, escolhe-se uma variável x e um termo t, definindo uma nova substituição $\theta_{k+1} = \theta_k\{x\leftarrow t\}$. Observe que em θ_{k+1} necessariamente a variável x é substituída. Finalmente, o valor de k é incrementado e θ_{k+1} passa a ser denotada por θ_k. Quando o algoritmo da unificação volta ao passo 2, se $|S\theta_k|\neq 1$, então determina-se o conjunto de diferenças de $S\theta_k$. Observe em $S\theta_k$ a variável x é necessariamente substituída. Isto significa que x não aparece no conjunto de diferenças resultante, não sendo mais escolhida no desenvolvimento do algoritmo.
15) O conjunto de expressões S é finito. Logo S contém apenas um número finito de variáveis. Cada vez que o algoritmo da unificação passa pelo passo 3 uma variável é escolhi-

da. Conforme o exercício anterior tal variável não aparece mais no desenvolvimento do algoritmo. Isto significa que a variável escolhida no passo 3 não é mais escolhida. Portanto, o número de vezes que o algoritmo passa pelo passo 3 é menor ou igual ao número de variáveis em S. Como há um número finito de variáveis em S, o algoritmo da unificação passa pelo passo 3 apenas um número finito de vezes, o que demonstra que o algoritmo da unificação não entra em loop e sempre pára.

17) a) Considere

$$C_1=\{A_1,\ldots,A_n\},\ e\ C_2=\{B_1,\ldots,B_n\}$$

tais que C_1 e C_2 possuem dois literais L_1 e $\neg L_2$ onde L_1 e L_2 são unificáveis. Seja θ um umg de L_1 e L_2. Neste caso,

$$Res(C_1,C_2) = (C_1\theta - L_1\theta) \cup (C_2\theta - \neg L_2\theta).$$

Para facilitar o raciocínio, suponha que $L_1=A_1$ e $L_2= B_1 = \neg A_1$.

$$\text{Se } I[C_1\wedge C_2]=T, \text{ então } I[(A_1\vee\ldots\vee A_n) \wedge (\neg A_1\vee B_2\vee\ldots\vee B_n)]=T.$$

Mas (prove esta equivalência)

$$(A_1\vee\ldots\vee A_n)\wedge(\neg A_1\vee B_2\vee\ldots\vee B_n) \text{ equivale a } (A_1\vee\neg A_1)\wedge(A_2\vee\ldots\vee A_n)\wedge(B_2\vee\ldots\vee B_n).$$

Logo,

$$I[(A_1\vee\neg A_1)\wedge(A_2\vee\ldots\vee A_n)\wedge(B_2\vee\ldots\vee B_n)] = I[(A_2\vee\ldots\vee A_n)\wedge(B_2\vee\ldots\vee B_n)]=I[Res(C_1,C_2)]=T$$

b) A cláusula vazia é obtida pela resolução de duas cláusulas

$$C_1=\{A_1\}\ e\ C_2=\{\neg B_1\}$$

tais que A_1 e B_1 são unificáveis. Neste caso,

$$\text{se } I[C_1\wedge C_2]=T, \text{ então } I[C_1\theta\wedge C_2\theta]=T,$$

onde θ é o umg de A_1 e B_1. Portanto,

$$I[(A_1\theta)\wedge(\neg B_1\theta)]=T.$$

Mas isto é um absurdo pois como $A_1\theta=B_1\theta$, então $(A_1\theta)\wedge(\neg B_1\theta)$ é insatisfatível. Portanto, se $I[C_1\wedge C_2]=T$, obtém-se um absurdo. Supondo $\{\ \}$ = *false*, este absurdo é expresso por $I[false]=T$, o que é coerente com a implicação

$$\text{"se } I[C_1\wedge C_2]=T, \text{ então } I[Res(C_1\wedge C_2)]=T\text{"}.$$

18) Para completar a demonstração apresentada no texto, utilize indução finita na Lógica de Predicados. Considere B[E] = "se existe uma prova de H, por resolução, então H é uma tautologia".

19) Dadas as fórmulas H e G, H equivale a G $\Leftrightarrow$ $(H\leftrightarrow G)$ é tautologia. Portanto, para demonstrar a equivalência entre H e G basta demonstrar, utilizando resolução, que $(H\leftrightarrow G)$ é tautologia. Para demonstrar que $(H\leftrightarrow G)$ é tautologia utilizando resolução, siga os passos

i) negue $(H\leftrightarrow G)$ obtendo $\neg(H\leftrightarrow G)$.
ii) determine a forma prenex de $\neg(H\leftrightarrow G)$, indicando por $\neg(H\leftrightarrow G)_p$,
iii) determine a forma de Skolem de $\neg(H\leftrightarrow G)_p$, indicando por $\neg(H\leftrightarrow G)_s$,
iv) determine a forma clausal de $\neg(H\leftrightarrow G)_s$, indicando por $\neg(H\leftrightarrow G)_c$,
v) escreva $\neg(H\leftrightarrow G)_c$, na notação de conjuntos,
vi) construa a expansão por resolução a partir de $\neg(H\leftrightarrow G)_c$.

Se for possível obter uma expansão fechada, então H equivale a G.

20) Para demonstrar a equivalência entre duas fórmulas siga os passos indicados no exercício anterior. Para demonstrar que H implica G basta demonstrar que $(H \rightarrow G)$ é tautologia. Também neste caso, siga os passos do exercício anterior.

21) Em cada caso construa uma expansão por resolução a partir da negação da fórmula que se pretende provar.

22) Em cada caso construa uma expansão por resolução a partir da negação da fórmula que se pretende provar. Se for possível obter uma expansão fechada, então a fórmula inicial é uma tautologia.

23) Veja sugestões do exercício 19.

24) Inicie a expansão a partir de $\neg H$.

26) Dado um conjunto de fórmulas $\beta = \{A, B, C\}$,

β é insatisfatível $\Leftrightarrow \forall$ int. I; $I[\beta]=F$

$\Leftrightarrow \forall$ int. I; $I[A]=F$ ou $I[B]=F$ ou $I[C]=F$

$\Leftrightarrow \forall$ int. I; $I[A \wedge B \wedge C]=F$

$\Leftrightarrow \forall$ int. I; $I[\neg(A \wedge B \wedge C)]=T$

$\Leftrightarrow \neg(A \wedge B \wedge C)$ é tautologia.

Portanto, para demonstrar que o conjunto de fórmulas $\beta = \{A, B, C\}$ é insatisfatível basta demonstrar que $\neg(A \wedge B \wedge C)$ é tautologia, utilizando resolução.

27) Veja sugestão do exercício anterior.

30) Utilize os teoremas da completude e da correção e justifique se for possível.

a) Afirmação verdadeira. Se H é tautologia, então pelo teorema da completude existe prova de H por resolução. Logo, existe expansão por resolução fechada associada a H.

b) Afirmação verdadeira. É possível definir uma tautologia H e uma expansão por resolução aberta associada a H.

c) Afirmação verdadeira. Se H não é tautologia, então pelo teorema da correção não existe prova por resolução de H. Logo, não existe expansão por resolução fechada associada a H.

d) Afirmação verdadeira. Seguindo o raciocínio do item anterior, conclui-se que não existe expansão por resolução fechada associada a H. Portanto, toda expansão por resolução associada a H é aberta.

e) Afirmação verdadeira. Se existe expansão por resolução fechada associada a H, então existe prova de H por resolução. Logo, pelo teorema da completude H é tautologia.

f) Afirmação verdadeira. Se existe expansão por resolução aberta associada a H, isto não significa que não exista expansão fechada associada a H. Logo, não necessariamente H não é tautologia

g) Afirmação verdadeira. Se toda expansão por resolução associada a H é aberta, então não existe prova de H por resolução. Logo, pelo teorema da completude H não é tautologia.

CAPÍTULO 15

Programação Lógica

Introdução

Programação lógica, PROLOG, é uma linguagem com ampla utilização em diversas áreas da Computação. Este capítulo apresenta uma introdução aos fundamentos matemáticos de programação lógica, onde são considerados definições e exemplos de resolução-SLD e procedimentos de refutação. Um estudo com mais detalhes é encontrado em [Lloyd, 1984], [Nerode,1997] etc. Técnicas de programação que utilizam PROLOG são consideradas em [Shapiro,1988], [Sterling, 1988] etc.

Sintaxe da Programação Lógica

A sintaxe da linguagem da programação lógica é definida pelos elementos.

Definição (cláusula de programa). Uma cláusula de programa, na Lógica de Predicados, é uma cláusula do tipo
$C = (\forall x_1)...(\forall x_n)G$,
onde G é uma disjunção de literais, que contém exatamente um literal positivo.

Exemplo (cláusula de programa). A fórmula C_1 a seguir é uma cláusula de programa. As outras fórmulas não são cláusulas de programa, pois não contêm exatamente um literal positivo.

$$C_1 = \{p(x), \neg q(x), \neg r(x,y)\} = (\forall x)(\forall y)(p(x) \vee \neg q(x) \vee \neg r(x,y))$$
$$= (\forall *)((q(x) \wedge r(x,y)) \rightarrow p(x))$$

$$C_2 = \{\neg p(x), \neg r(x,y)\} = (\forall x)(\forall y)(\neg p(x) \vee \neg r(x,y))$$
$$= (\forall *)(\neg p(x) \vee \neg r(x,y))$$

$C_3 = \{\neg p(y), q(z), r(z)\} = (\forall y)(\forall z)(\neg p(y) \vee q(z) \vee r(z))$
$= (\forall^*)(\neg p(y) \vee q(z) \vee r(z))$

$C_4 = \{\ \}$.

Observe que a cláusula C_1 contém um literal positivo e é apresentada na notação de conjunto e na notação convencional de Lógica de Predicados. Além destas notações há outras formas de apresentação de cláusulas de programa. A cláusula C_1, por exemplo, é também denotada por

$C_1 = (\forall^*)(p(x) \vee \neg q(x) \vee \neg r(x,y))$ equivale a
$C_1 = (\forall^*)(p(x) \vee \neg(q(x) \wedge r(x,y)))$ equivale a
$C_1 = (\forall^*)(\neg(q(x) \wedge r(x,y)) \vee p(x))$ equivale a
$C_1 = (\forall^*)(\ (q(x) \wedge r(x,y)) \rightarrow p(x))$.

Como toda cláusula é um fecho universal, o quantificador $(\forall^*)$ pode ser omitido, ficando implícito. Neste caso,

$$C_1 = (q(x) \wedge r(x,y)) \rightarrow p(x).$$

Em programação lógica, C_1 é representada como

$$C_1 = p(x) \leftarrow q(x),r(x,y),$$

onde o conectivo $\wedge$ é representado por vírgula e a implicação é invertida. Esta notação é utilizada no restante deste capítulo.

Notação (cláusula de programa). Uma cláusula de programa

$$C = (\forall^*)(B \vee \neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n)$$

é denotada por

$$C = B \leftarrow A_1,\ldots,A_n$$

Neste caso, B é a cabeça da cláusula e $A_1,\ldots,A_n$ é a cauda.

Dada uma cláusula de programa

$$C = B \leftarrow A_1,\ldots,A_n$$

e uma interpretação I, então $I[C] = T$ significa que

$$\text{se } I[A_1,\ldots,A_n] = T, \text{ então } I[B] = T.$$

Como as vírgulas de uma cláusula denotam o conectivo $\wedge$,

$$\text{se } I[A_1] = T,\ldots,I[A_n] = T, \text{ então } I[B] = T.$$

Em outras palavras,

$$I[B] = T \text{ se } I[A_1] = T,\ldots,I[A_n] = T.$$

Portanto,

$$I[B \leftarrow A_1,\ldots,A_n] = T$$

significa que

$$I[B] = T \text{ se } I[A_1] = T,\ldots,I[A_n] = T$$

ou seja B é verdadeira se as condições $A_1,\ldots,A_n$ ocorrem simultaneamente.

Definição (cláusula unitária). Uma cláusula de programa unitária é uma cláusula do tipo $B \leftarrow$. Neste caso, a cláusula não contém literais negativos.

Uma cláusula unitária é também denominada como um fato. Isto ocorre porque se $I[B \leftarrow] = T$, então $I[B] = T$ ou seja B é interpretado como verdadeiro sem que nenhuma condição seja satisfeita. A semântica da palavra "fato" é exatamente esta.

Definição (programa lógico). Um programa lógico é um conjunto de cláusulas de programa.

Exemplo (programa lógico). O conjunto de cláusulas de programa a seguir forma um programa lógico.

1. $p_1(x,g_e) \leftarrow p(x,z),r(z,y),q(y,w),r(w,g_e)$
2. $p_1(x,g_e) \leftarrow p(x,y),q(y,z),q(z,w),r(w,d)$
3. $r(g_g,g_e) \leftarrow$
4. $p(t_o,m_a) \leftarrow$
5. $q(r_i,g_g) \leftarrow$
6. $q(c_q,m_a) \leftarrow$
7. $p(g_i,c_q) \leftarrow$
8. $r(m_a,r_i) \leftarrow$

As cláusulas deste programa podem representar, respectivamente, as afirmações

a) Todo filho do irmão da esposa de Genilton é sobrinho de Genilton.
b) Gemagalgani é esposa de Genilton.
c) Tonynino é filho de Kátia.
d) Nicanor é irmão de Gemagalgani.
e) Cuquinha é irmã de Kátia.
f) Gileide é filha de Cuquinha.
g) Kátia é esposa de Nicanor.

Observe que as cláusulas 3., ..., 8. são fatos. Além disso, a afirmação "Todo filho da irmã da esposa do irmão da esposa de Genilton não é sobrinho de Genilton", é representada pela fórmula

$$(\forall^*)((p(x,y) \wedge q(y,z) \wedge r(z,w) \wedge q(w,x_1) \wedge r(x_1,d_g)) \rightarrow \neg p_1(x,d_g))$$

que não é uma cláusula, pois não possui literal positivo. Na notação de cláusula de programa esta fórmula seria denotada por

$$\neg p_1(x,g_e) \leftarrow p(x,y),q(y,z),r(z,w),q(w,x_1),r(x_1,d_g).$$

Mas esta última cláusula não é uma cláusula de programa, pois a cabeça é um literal negativo. Um problema relevante em programação lógica é a análise da negação como na fórmula acima. Consulte [Lloyd, 1984] para esta análise.

Definição (cláusula objetivo). Uma cláusula objetivo é uma cláusula do tipo

$$\leftarrow A_1,\ldots,A_n.$$

Neste caso a cláusula não contém literal positivo e não é uma cláusula de programa.

Exemplo (cláusula objetivo). A cláusula $\leftarrow p_1(a_2,d)$ é uma cláusula objetivo.

Resolução-SLD

O termo resolução-SLD significa: "SL-resolution for definite clauses", onde SL denota "Linear resolution with selection function" [Kowalski, 1971]. A resolução-SLD é um tipo de resolução na Lógica de Predicados aplicada a cláusulas de programas e sua importância se deve ao fato de ser o método de dedução utilizado em programação lógica. Dado um programa lógico Pr e uma cláusula objetivo C, uma prova por resolução-SLD de $Pr \cup \{C\}$ demonstra se que $Pr \cup \{C\}$ é insatisfatível. A prova por resolução-SLD é feita utilizando o conceito de resolvente, que por sua vez utiliza o conceito de regra de computação.

Definição (regra de computação). Uma regra de computação é uma função que seleciona um literal a partir de uma lista de literais de uma cláusula objetivo.

Exemplo (regra de computação). Considere uma cláusula objetivo

$$G = (\leftarrow A_1,\ldots,A_n)$$

e regra de computação Rc_1, que aplicada a G seleciona o primeiro literal A_1 da lista $A_1,\ldots,A_n$. Neste caso, $Rc_1(G) = A_1$. Uma outra regra de computação Rc_2, por exemplo, seleciona o último literal, $Rc_2(G) = A_n$. Há inúmeras formas de seleção de literais pelas regras de computação.

Definição (resolvente-SLD). Considere uma cláusula objetivo

$$G_i = (\leftarrow A_1,\ldots A_m,\ldots, A_k),$$

uma cláusula de programa

$$C_{i+1} = (A \leftarrow B_1,\ldots, B_q)$$

e Rc uma regra de computação. A cláusula objetivo G_{i+1} é o resolvente-SLD de G_i e C_{i+1} utilizando um unificador mais geral θ_{i+1} via Rc se as condições são satisfeitas.

- $Rc(G_i) = A_m$.
- $A_m\theta_{i+1} = A\theta_{i+1}$ onde θ_{i+1} é o umg de A_m e A.
- G_{i+1} é a cláusula objetivo $G_{i+1} = (\leftarrow A_1,\ldots A_{m-1},B_1,\ldots,B_q,A_{m+1},\ldots,A_k)\theta_{i+1}$.

Neste caso $G_{i+1} = Res(G_i,C_{i+1},\theta_{i+1},Rc)$.

Observe que o resolvente-SLD de uma cláusula objetivo e de uma cláusula de programa é outra cláusula objetivo. O resultado é obtido substituindo o literal selecionado por Rc em G_i pela cauda da cláusula C_{i+1}. Além disso, é necessário ter a unificação entre o literal selecionado e a cabeça da cláusula C_{i+1}. A razão da utilização de índices i e i+1 será justificada mais adiante.

Exemplo (resolvente-SLD). Considere a cláusula objetivo

$$G_1 = (\leftarrow p(x),q(g(x),y),r(x,f(y),z)),$$

a cláusula de programa

$$C_2 = (p(a) \leftarrow p_1(a,y),r_3(x,z))$$

e Rc_1 uma regra de computação que seleciona o primeiro literal de uma lista de literais. O resolvente-SLD de G_1 e C_2 utilizando $\theta_2 = \{x\leftarrow a\}$ via Rc_1 é dada por

$$\begin{aligned} G_2 = Res(G_1,C_2,\theta_2,Rc_1) &= (\leftarrow p_1(a,y),r_3(x,z),q(g(a),y),r(x,f(y),z))\{x \leftarrow a\} \\ &= (\leftarrow p_1(a,y),r_3(g(a),z),q(a,y),r(a,f(y),z)) \end{aligned}$$

Neste caso, o resolvente-SLD é a cláusula objetivo

$$G_2 = (\leftarrow p_1(a,y),r_3(a,z),q(g(a),y),r(a,f(y),z)),$$

que é obtida substituindo o literal selecionado p(x) em G_1 pela cauda de C_2. Além disso, é aplicada substituição θ_2 que é um umg de p(x) e de p(a). Em geral

$$G_{i+1} = Res(G_i,C_{i+1},\theta_{i+1},Rc)$$

é denotado conforme a notação a seguir.

Notação (resolvente-SLD). Dada uma cláusula objetivo

$$G_i = (\leftarrow A_1,\ldots A_m,\ldots,A_k),$$

uma cláusula de programa

$$C_{i+1} = (A \leftarrow B_1,\ldots,B_q)$$

e Rc uma regra de computação. Se

$$G_{i+1} = Res(G_i,C_{i+1},\theta_{i+1},Rc),$$

então a notação da Figura 1 é utilizada.

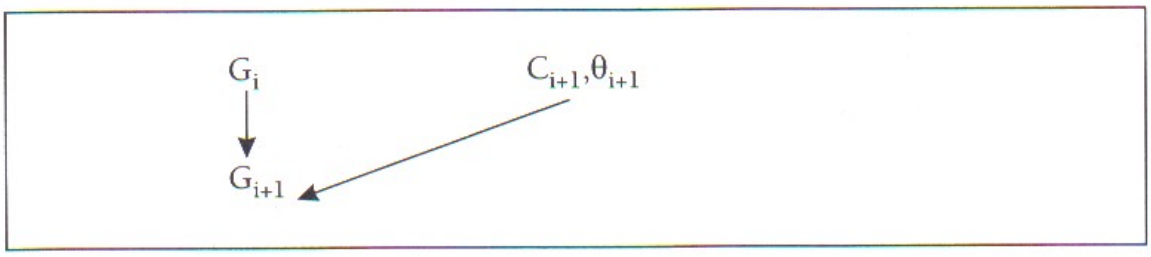


Figura 1 Notação para resolvente SLD.

Definição (variações). Duas cláusulas de programa C_1 e C_2 são variações se existem substituições θ e φ tais que $C_1 = C_2\theta$ e $C_2 = C_1\varphi$. Além disso, as substituições θ e φ só possuem ligações do tipo $x \leftarrow y$, que renomeiam uma variável por outra.

Exemplo (variações). As cláusulas de programa

$$C_1 = p(x,y) \leftarrow q(x),r(y) \text{ e } C_2 = p(z,w) \leftarrow q(z),r(w)$$

são variações. Neste caso, C_1 é uma renomeação de C_2 e vice-versa. Entretanto,

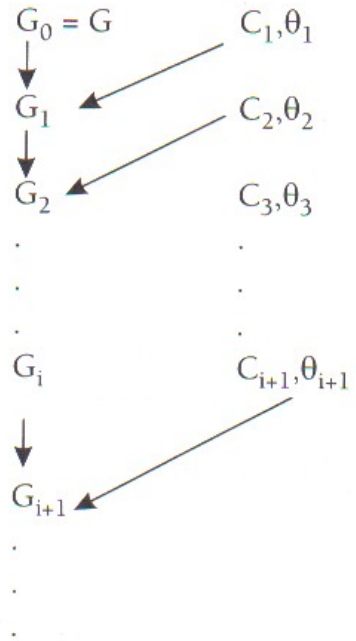
$$C_3 = p(x,x) \leftarrow q(x),r(x) \text{ e } C_4 = p(a,b) \leftarrow q(a),r(b)$$

não são variações pois não existem substituições θ e φ tais que

$$C_3 = C_4\theta \text{ e } C_4 = C_3\varphi.$$

Dadas duas cláusulas C_1 e C_2, se C_1 é uma variação de C_2, então C_1 equivale a C_2. Demonstra-se que este resultado vale para quaisquer cláusulas que são variações (Veja os exercícios).

Definição (derivação-SLD). Sejam Pr um programa lógico, G uma cláusula objetivo e Rc uma regra de computação. Uma derivação-SLD de Pr ∪ {G} via Rc é uma seqüência $G_0 = G, G_1, \ldots$, tal que



onde $G_{i+1} = Res(G_i, C_{i+1}, \theta_{i+1}, Rc)$. Cada cláusula C_i é uma variação de uma cláusula de Pr, sendo denominada cláusula de entrada.

A derivação-SLD é um caso particular da expansão por resolução na Lógica de Predicados, onde as cláusulas consideradas são cláusulas objetivo e de programas. Esta restrição é feita porque em programação lógica são consideradas apenas tais tipos de cláusulas. Uma derivação-SLD pode ser finita ou infinita. Se ela é finita e a última cláusula é a cláusula vazia, então ela é uma derivação fechada, caso contrário, ela é aberta.

Definição (refutação-SLD). Sejam Pr um programa lógico, G uma cláusula objetivo e Rc uma regra de computação.

- Uma derivação-SLD de Pr ∪ {G} via Rc é fechada se é finita e a última cláusula é vazia, caso contrário ela é aberta.
- Uma refutação-SLD de Pr ∪ {G}, de comprimento n, é uma derivação-SLD de Pr ∪ {G} via Rc dada pela seqüência $G_0 = G, G_1, \ldots, G_n$ onde $G_n = \{\ \}$. Como $G_n = \{\ \}$, a derivação é fechada.

Definição (substituição resposta associada a uma refutação-SLD). Sejam Pr um programa lógico, G uma cláusula objetivo e Rc uma regra de computação tais que existe uma refutação-SLD de Pr $\cup$ {G} via Rc. Se a seqüência de substituições utilizadas na refutação-SLD é $\theta_1,\ldots,\theta_n$, então a composição $\theta_1\ldots\theta_n$ é a substituição resposta associada a refutação-SLD via Rc.

Exemplo (refutação-SLD). Considere o programa lógico

1. $p_1(x,d) \leftarrow p(x,z),q(z,w),r(w,d)$
2. $r(c,d) \leftarrow$
3. $p(a_2,a_1) \leftarrow$
4. $q(a_1,c) \leftarrow$
5. $r(c,d) \leftarrow$

e a cláusula objetivo $G = \leftarrow p_1(a_2,d)$. A derivação da Figura 2 é uma refutação-SLD.

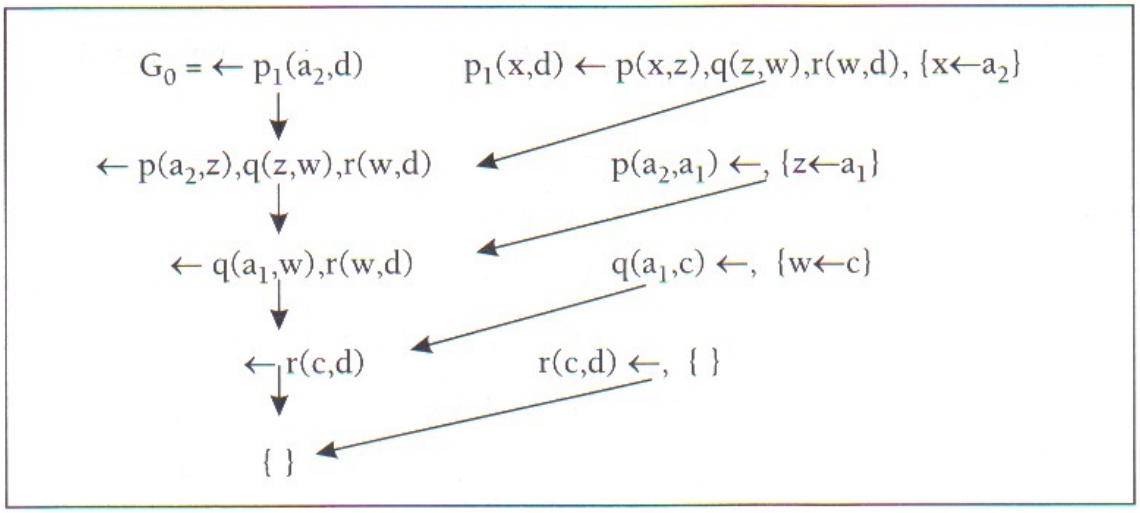


Figura 2 Refutação-SLD.

A refutação acima também foi obtida no capítulo anterior, considerando a resolução na Lógica de Predicados. Observe que neste caso, a substituição resposta associada à refutação é

$$\{x \leftarrow a_2,\ z \leftarrow a_1,\ w \leftarrow c\}.$$

Definição (prova por refutação-SLD). Seja G uma cláusula objetivo e Pr um programa lógico. Uma prova de G, por resolução-SLD a partir de Pr, é uma refutação-SLD de Pr $\cup$ {G}.

Definição (conseqüência lógica por resolução-SLD). Seja G uma cláusula objetivo e Pr um programa lógico. G é uma conseqüência lógica por resolução-SLD de Pr se existe uma refutação-SLD de Pr $\cup$ {G}.

Exemplo (conseqüência lógica por resolução-SLD). A cláusula objetivo

$$G = \leftarrow p_1(a_2,d)$$

é uma conseqüência lógica por resolução-SLD do programa Pr a seguir.

1. $p_1(x,d) \leftarrow p(x,z),q(z,w),r(w,d)$
2. $r(c,d) \leftarrow$
3. $p(a_2,a_1) \leftarrow$
4. $q(a_1,c) \leftarrow$
5. $r(c,d) \leftarrow$

Neste caso, esta conseqüência é denotada por $Pr \vdash G$, que é uma notação análoga àquelas que indicam outros tipos e conseqüências lógicas.

Dado um programa lógico

$$Pr = \{C_1,...,C_n\},$$

considere a conjunção de suas cláusulas de programa $C_1 \wedge ... \wedge C_n$, também indicada por Pr. Seja

$$G = (\leftarrow A_1,...,A_n)$$

uma cláusula objetivo, que equivale à fórmula

$$G = \neg(A_1 \wedge ... \wedge A_n).$$

A conjunção $A_1 \wedge \ \wedge A_n$ é uma conseqüência lógica de Pr se a fórmula

$$Pr \rightarrow (A_1 \wedge ... \wedge A_n),$$

que denota

$$(C_1 \wedge ... \wedge C_n) \rightarrow (A_1 \wedge ... \wedge A_n),$$

é uma tautologia. Na resolução da Lógica de Predicados, para demonstrar que

$$Pr \rightarrow (A_1 \wedge ... \wedge A_n)$$

é uma tautologia, é necessário obter uma expansão por resolução fechada a partir de

$$\neg(Pr \rightarrow (A_1 \wedge ... \wedge A_n)\ ).$$

Em outras palavras, uma refutação de

$$Pr \wedge \neg(A_1 \wedge \ \wedge A_n),$$

que equivale a $(Pr \wedge G)$. Portanto, $A_1 \wedge ... \wedge A_n$ é conseqüência lógica de Pr se existe uma refutação de $Pr \wedge G$. Uma refutação-SLD de $Pr \cup \{G\}$ é obtida por uma derivação-SLD fechada a partir de $Pr \cup \{G\}$. Como o resolvente-SLD é um caso particular do resolvente de duas cláusulas quaisquer considerados na Lógica de Predicados, uma refutação-SLD de $Pr \cup \{G\}$ equivale a uma refutação na Lógica de Predicados de $Pr \cup \{G\}$.

O conjunto de fórmulas $Pr \cup \{G\}$ é a notação de conjunto da forma clausal de $Pr \wedge G$. Portanto se existe uma refutação-SLD de

$$Pr \cup \{ A_1,...,A_n\},$$

então $A_1 \wedge ... \wedge A_n$ é uma conseqüência lógica de Pr.

Os teoremas da completude e da correção também são válidos para resolução-SLD.

Teorema da Completude. Sejam Pr um programa lógico e

$$G = (\leftarrow A_1,...,A_n)$$

uma cláusula objetivo. Se

$$Pr \rightarrow (A_1 \wedge \ \wedge A_n)$$

é uma tautologia, então existe uma refutação-SLD de $Pr \cup \{G\}$.

Teorema da Correção. Sejam Pr um programa lógico e

$$G = (\leftarrow A_1,...,A_n)$$

uma cláusula objetivo. Se existe uma refutação-SLD de $Pr \cup \{G\}$, então

$$Pr \rightarrow (A_1 \wedge ... \wedge A_n)$$

é uma tautologia.

Comentário. As demonstrações destes teoremas não são consideradas neste texto, podendo ser encontradas em [Lloyd, 1984] ou [Nerode, 1894]. A demonstração do teorema da correção é proposta como exercício. Observe que nestes teoremas, não se menciona regras de computação. Isto ocorre porque a escolha da regra de computação não modifica o resultado de uma derivação-SLD.

Procedimentos de Refutação-SLD

É considerado a seguir o estudo de algumas estratégias utilizadas em programação lógica na busca da refutação de conjuntos de cláusulas do tipo $Pr \cup \{G\}$. Entre tais estratégias há, por exemplo, busca em profundidade ou em largura em árvores-SLD.

Definição (árvore-SLD). Sejam Pr um programa lógico, G uma cláusula objetivo e Rc uma regra de computação. A árvore-SLD associada a $Pr \cup \{G\}$ via Rc é definida por

- Cada nó da árvore é rotulado por uma cláusula objetivo (pode-se ter a cláusula vazia).
- A raiz da árvore é rotulada pela cláusula $G_0 = G$.
- Suponha um nó rotulado pela cláusula

$$G_i = (\leftarrow A_1,\ldots,A_m,\ldots,A_n)$$

e pela regra de computação

$$Rc(A_1,\ldots,A_m,\ldots,A_n) = A_m.$$

Para cada cláusula de entrada

$$C_{i+1} = (A \leftarrow B_1,\ldots,B_q),$$

pertencente a Pr, tal que A_m e A são unificáveis por θ_{i+1}, considere

$$G_{i+1} = Res(G_i,C_{i+1},\theta_{i+1},Rc).$$

Neste caso, o nó rotulado por G_i tem um nó descendente rotulado pela cláusula G_{i+1}.

- Nós rotulados pela cláusula vazia { } não possuem descendentes.

Os ramos da árvore com folhas rotulados pela cláusula vazia são denominados ramos fechados. Os outros tipos de ramos são abertos. A composição das substituições associadas a cada ramo da árvore forma a substituição resposta associada ao ramo.

Exemplo (árvore-SLD). Considere o programa lógico

1. $p(y_1,c) \leftarrow q(c,z),r(z,y_1)$
2. $p(y,a) \leftarrow q_1(a,y),r(z,a)$
3. $q(c,c) \leftarrow$
4. $r(c,b) \leftarrow$
5. $r(a,a) \leftarrow$
6. $q_1(x,y) \leftarrow r_1(x,g(y))$
7. $q_1(x,y) \leftarrow r_2(h(x),y)$
8. $r_1(b,g(a)) \leftarrow$
9. $r_2(h(a),b) \leftarrow$
10. $p_1(x,y) \leftarrow p(y,x)$
11. $q(c,c) \leftarrow q_2(b,b)$

e a cláusula objetivo $G = (\leftarrow p(b,x))$. Seja Rc a regra de computação que seleciona o primeiro literal de uma lista de literais. O literal selecionado é sublinhado em cada nó. A árvore-SLD associada a $Pr \cup \{G\}$ via Rc é representada na Figura 3.

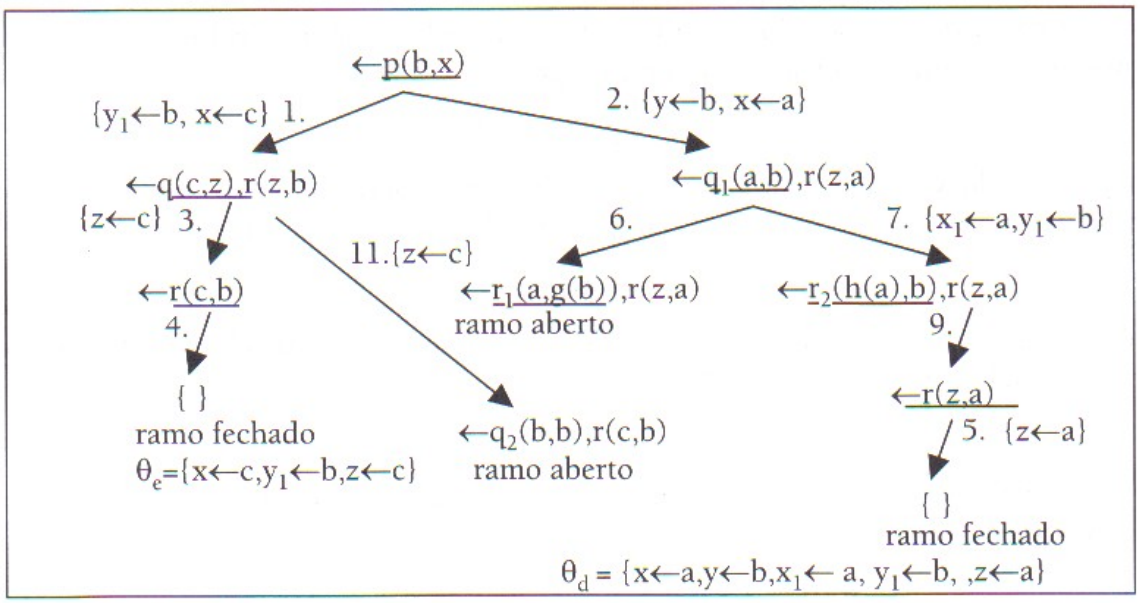


Figura 3 Árvore-SLD.

A árvore-SLD deste exemplo possui quatro ramos, dois fechados e dois abertos. As arestas são rotuladas com os números das cláusulas de programa utilizadas como cláusulas de entrada para os resolventes e a substituição utilizada. A substituição resposta do ramo esquerdo é

$$\theta_e = \{x \leftarrow c, y_1 \leftarrow b, z \leftarrow c\},$$

que é obtida pela composição das substituições

$$\{x \leftarrow c, y_1 \leftarrow x\} \text{ e } \{z \leftarrow c\}.$$

A substituição resposta do ramo à direita é

$$\theta_d = \{x \leftarrow a, y \leftarrow b, x_1 \leftarrow a, y_1 \leftarrow b, z \leftarrow a\},$$

que é composição de

$$\{x \leftarrow a, y \leftarrow b\}, \{x_1 \leftarrow a, y_1 \leftarrow b\} \text{ e } \{z \leftarrow a\}.$$

Neste caso, as variáveis x_1 e y_1 aparecem devido à utilização de uma variação da cláusula 7. Observe que as substituições respostas são diferentes.

Na linguagem PROLOG, dados um programa lógico e uma cláusula objetivo, o compilador tem como meta descobrir um ramo fechado da árvore-SLD e a respectiva substituição resposta. Quando isto ocorre o compilador apresenta a substituição resposta como a resposta à questão apresentada pela cláusula objetivo ao programa lógico. Internamente, o compilador pesquisa os ramos da árvore-SLD fazendo uma busca em profundidade, dando prioridade aos ramos mais à esquerda . Isto é obtido considerando as cláusulas na ordem em que elas aparecem no programa lógico. Quando um ramo aberto é encontrado, o compilador faz um *backtraking* e volta ao ponto de ramificação anterior na árvore. Na árvore-SLD acima, fazendo uma busca em profundidade à esquerda, o compilador determina a substituição resposta

$$\theta_e = \{x \leftarrow c, y_1 \leftarrow b, z \leftarrow c\}.$$

A partir de uma solicitação adicional ao compilador, por mais uma resposta, a pesquisa continua. Em seguida, o ramo que termina em

$$\leftarrow q_2(b,b),r(c,b)$$

é pesquisado. Como este ramo é aberto, é efetuado um *backtraking* ao nó raiz da árvore. Dando prosseguimento à busca em profundidade à esquerda, o nó rotulado por

$$\leftarrow \underline{r_1(a,g(b))},r(z,a)$$

é encontrado. Novamente, como este ramo é aberto é feito outro *backtraking* até o nó rotulado por

$$\leftarrow \underline{q_1(a,b)},r(z,a).$$

Finalmente o compilador encontra o ramo fechado mais à direita e determina a substituição resposta

$$\theta_d = \{x \leftarrow a, y \leftarrow b, x_1 \leftarrow a, y_1 \leftarrow b, z \leftarrow a\}.$$

Como na cláusula objetivo aparece apenas a variável x, as respostas fornecidas pelo compilador ao usuário são x = c e x = a, determinadas pelas substituições θ_e e θ_d, respectivamente.

Exemplo (árvore-SLD). Considere o programa lógico

$$1.\ p(x,y) \leftarrow q(x,z),p(z,y)$$

que contém apenas uma cláusula de programa. Sejam, G a cláusula objetivo

$$G = \leftarrow p(x,b)$$

e Rc a regra de computação que seleciona o último literal de uma lista de literais. A árvore-SLD associada a $Pr \cup \{G\}$ via Rc é indicada na Figura 4.

Neste caso, a árvore-SLD possui apenas um ramo aberto e infinito. A regra de computação seleciona sempre o último literal, que é sublinhado em todos os nós. A cláusula do programa é utilizada repetidamente. No primeiro resolvente

$$C_1 = (p(x,y) \leftarrow q(x,z),p(z,y))$$

é utilizada. No segundo resolvente é considerada uma variação de C_1, dada por

$$C_2 = (p(x_1,y) \leftarrow q(x_1,z),p(z,y))$$

e assim por diante.

Exemplo (árvore-SLD). Considere uma interpretação I sobre o domínio dos números naturais $\mathbb{N}$, tal que

$$I[a] = 0,\ I[b] = 1 \text{ e}$$

$I[p(x,y)] = T$ se e somente se y_I é igual ao fatorial de x_I, isto é, $y_I = x_I!$,

$I[f(x)] = x_I - 1$, $f_I(x_I)$ decrementa o valor de x_I em uma unidade,

$[g(x,y)] = x_I * y_I$. g(x,y) é interpretada como a multiplicação,

$I[q(x,y)] = T$ se e somente se $x_I = y_I$, q é interpretado como sendo a igualdade.

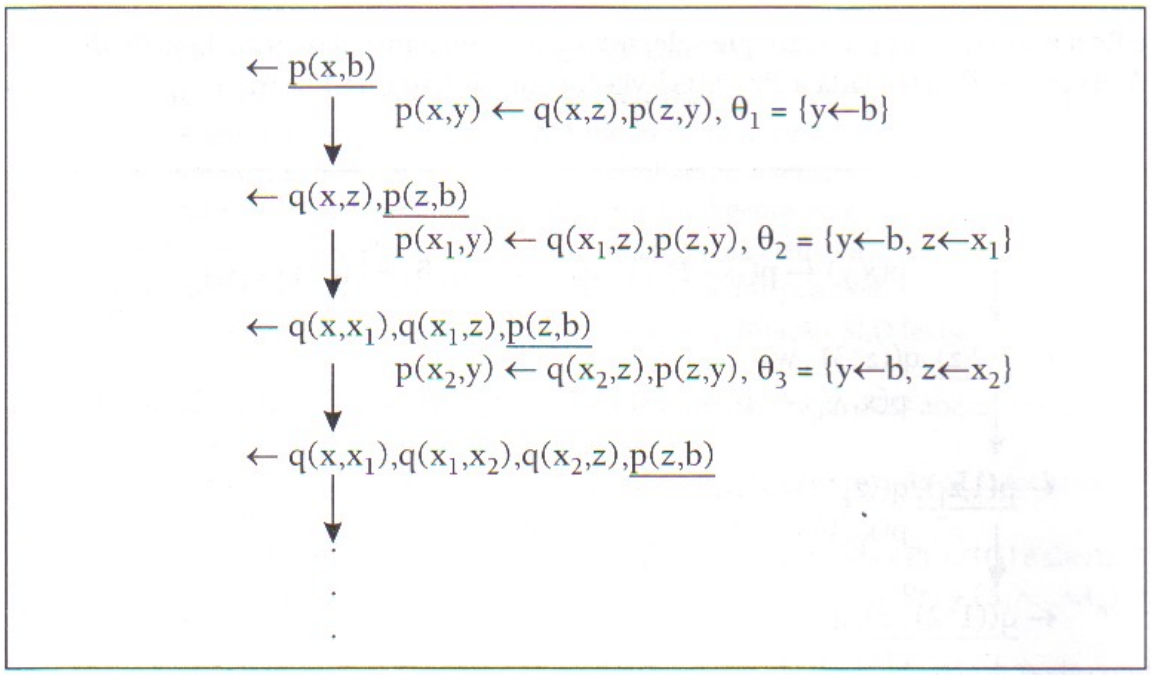


Figura 4 Árvore-SLD infinita.

O programa lógico a seguir calcula o fatorial de um número

1. p(a,b) ←
2. p(b,b) ←
3. p(x,y) ← p(f(x),z),q(g(z,x),y)

Conforme a interpretação I, a cláusula 1. diz que o fatorial de zero é igual a um. A cláusula 2. diz que o fatorial de um é igual a um. Finalmente, a cláusula 3. diz que

$$y_I = x_I! \text{ se } z_I = (x_I - 1)! \text{ e } y_I = x_I * z_I.$$

Para simplificar a notação deste exemplo, as constantes e funções são substituídas por suas interpretações nas fórmulas. Neste caso as fórmulas sintáticas são escritas utilizando elementos semânticos. O programa é reescrito como

1. p(0,1) ←
2. p(1,1) ←
3. p(x,y) ← p((x - 1), z), q((z*x), y)
4. q((1*2), 2) ←
5. q((2*3), 6) ←

onde são adicionadas mais duas cláusulas que determinam as igualdades 2 = 2*1 e 6 = 2*3. Observe que outras igualdades como 8 = 2*4 e 9 = 3*3 etc. podem ser adicionadas. Neste caso, para simplificar, são consideradas apenas as duas igualdades definidas pelas cláusulas 4 e 5 Considere a cláusula objetivo

$$G = (\leftarrow p(3,w))$$

e Rc a regra de computação que seleciona o primeiro literal de uma lista de literais. A árvore-SLD associada a Pr ∪ {G} via Rc apresentada na Figura 5.

$\leftarrow \underline{p(3,w)}$

$\downarrow$ $\quad p(x,y) \leftarrow p((x - 1), z), q((z*x), y), \theta_1 = \{x \leftarrow 3, y \leftarrow w\}$

$\leftarrow \underline{p(2,z)}, q((z*3), w)$

$\downarrow$ $\quad p(x_1,y_1) \leftarrow p((x_1 - 1), z_1), q((z_1*x_1), y_1), \theta_2 = \{x_1 \leftarrow 2, y_1 \leftarrow z\}$

$\leftarrow \underline{p(1,z_1)}, q((z_1*2), z), q((z*3), w)$

$\downarrow$ $\quad p(x_2,1) \leftarrow, \ \theta_3 = \{x_2 \leftarrow 1, z_1 \leftarrow 1\}$

$\leftarrow \underline{q((1*2), z)}, q((z*3), w)$

$\downarrow$ $\quad q((1*2), 2) \leftarrow, \ \theta_4 = \{z \leftarrow 2\}$

$\leftarrow \underline{q((2*3), w)}$

$\downarrow$ $\quad q((2*3), 6) \leftarrow, \ \theta_5 = \{w \leftarrow 6\}$

$\{\ \}$

Figura 5 Árvore-SLD.

Na árvore-SLD da Figura 5 são denotadas as cláusulas de entrada e as substituições utilizadas. Neste caso, as cláusulas de entrada são variações das cláusulas de programa. Observe que a última substituição $\theta_5 = \{w \leftarrow 6\}$ determina a resposta para o fatorial do número 3. As outras substituições determinam resultados intermediários. Esta árvore possui apenas um ramo e é uma refutação-SLD.

Exercícios

1) Demonstre a correção da resolução-SLD.
2) Defina um programa lógico Pr, uma cláusula objetivo G e uma regra de computação Rc tal que a árvore-SLD associada a Pr ∪ {G} via Rc possui um ramo fechado, um ramo aberto e um ramo infinito.
3) Defina um programa lógico Pr, uma cláusula objetivo G e duas regras de computação Rc_1 e Rc_2, tais que:
   a) A árvore-SLD associada a Pr ∪ {G} via Rc_1 não possui ramo infinito.
   b) A árvore-SLD associada a Pr ∪ {G} via Rc_2 possui ramo infinito.
4) É possível definir um programa lógico Pr, uma cláusula objetivo G e duas regras de computação Rc_1 e Rc_2, tais que:
   a) A árvore-SLD associada a Pr ∪ {G} via Rc_1 possui ramo fechado.
   b) A árvore-SLD associada a Pr ∪ {G} via Rc_2 não possui ramo fechado.

5) Represente as afirmações a seguir utilizando cláusulas de programa.
   a) André gosta de Maria se e somente se Maria é bonita, inteligente e sensível.
   b) André gosta de Maria se Maria é bonita ou é inteligente ou é sensível.
   c) Se Dante gosta de Maria, ela é bonita, inteligente e sensível.
   d) Se Dante gosta de Maria, ela é bonita ou é inteligente ou é sensível.
6) Sejam, Pr um programa lógico e $G = (\leftarrow A_1,...,A_n)$ uma cláusula objetivo. Utilize os teoremas da completude e da correção e justifique se for possível.
   a) Se $Pr \cup \{G\}$ não é satisfatível, então existe uma refutação-SLD fechada associada a $Pr \cup G$.
   b) Se $Pr \cup \{G\}$ não é satisfatível, então pode existir derivação-SLD aberta associada a $Pr \cup \{G\}$.
   c) Se $Pr \rightarrow (A_1 \wedge ... \wedge A_n)$ não é tautologia, então não existe derivação-SLD fechada associada a $Pr \cup G$.
   d) Se $Pr \cup \{G\}$ é satisfatível, então toda derivação-SLD associada a $Pr \cup \{G\}$ é aberta.
   e) Se existe derivação-SLD associada a $Pr \cup \{G\}$ é fechada, então $Pr \rightarrow (A_1 \wedge ... \wedge A_n)$ é tautologia.
   f) Se existe derivação-SLD associada a $Pr \cup \{G\}$ que é aberta, então não se pode concluir que $Pr \cup \{G\}$ é satisfatível.
   g) Se toda derivação-SLD associada a $Pr \cup \{G\}$ é aberta, então $Pr \rightarrow (A_1 \wedge ... \wedge A_n)$ não é tautologia.
   h) Se $Pr \cup \{G\}$ não é satisfatível, então existe árvore-SLD com ramo fechado associada a $Pr \cup \{G\}$.
   i) Se $Pr \cup \{G\}$ não é satisfatível, então pode existir árvore-SLD sem ramo fechado associada a $Pr \cup \{G\}$.
   j) Se $Pr \rightarrow (A_1 \wedge ... \wedge A_n)$ não é tautologia, então não existe árvore-SLD com ramo fechado associada a $Pr \cup G$.
   k) Se $Pr \cup \{G\}$ é satisfatível, então toda árvore-SLD associada a $Pr \cup \{G\}$ não possui ramo fechado.
   l) Se existe árvore-SLD associada a $Pr \cup \{G\}$ com todos os ramos fechados, então não se pode concluir que $Pr \cup \{G\}$ é satisfatível.
   m) Se toda árvore-SLD associada a $Pr \cup \{G\}$ contém todos os ramos abertos, então $Pr \rightarrow (A_1 \wedge ... \wedge A_n)$ não é tautologia.
7) Demonstre, utilizando programação lógica se os argumentos a seguir são válidos.
   Cynthia ama a todos e somente aqueles que amam Fábio. Fábio ama a todos e somente aqueles que não amam Cynthia. Cynthia ama a si própria. Portanto, Fábio ama a si próprio.
8) Dadas duas cláusulas C_1 e C_2, que são variações, demonstre, utilizando indução, que C_1 equivale a C_2.

Sugestões e soluções de exercícios selecionados.

1) Dado um programa lógico $Pr = \{C_1,...,C_n\}$ e uma cláusula objetivo $G = (\leftarrow A_1,...,A_n)$, então $Pr \rightarrow (A_1 \wedge ... \wedge A_n)$ é uma tautologia se e somente se existe expansão por resolução fechada a partir da forma clausal de $\neg(Pr \rightarrow (A_1 \wedge ... \wedge A_n))$. Observe que este resultado foi apresentado no Capítulo 14. Uma refutação-SLD de $Pr \cup \{G\}$ é obtida por uma derivação-SLD fechada a partir de $Pr \cup \{G\}$, que equivale a uma expansão por resolução fechada. Isto ocorre porque o resolvente-SLD é um caso particular do resolvente

de duas cláusulas quaisquer consideradas na Lógica de Predicados. Logo, uma refutação-SLD de $Pr \cup \{G\}$ é um caso particular de uma refutação por resolução na Lógica de Predicados de $\neg(Pr \rightarrow (A_1 \wedge ... \wedge A_n))$. Portanto o teorema da correção da resolução-SLD é apenas um caso particular do teorema da correção da resolução.

Dada uma derivação-SLD defina um algoritmo para transformá-la em uma expansão por resolução. Tendo feito isto, os argumentos acima estão justificados.

2) Considere o programa lógico
   1. $p(a,b) \leftarrow$
   2. $p(x,y) \leftarrow r(a,b)$
   3. $p(x,y) \leftarrow q(x,z),p(z,y)$

   a cláusula objetivo $G = (\leftarrow p(x,b))$ e Rc a regra de computação que seleciona o último literal de uma lista de literais.

3) Considere o programa lógico
   1. $p(a,y) \leftarrow q(x,z),p(z,y)$
   2. $p(x,x) \leftarrow$
   3. $q(a,c) \leftarrow$

   a cláusula objetivo $G = (\leftarrow p(x,c))$, Rc_1 a regra que seleciona o primeiro literal e Rc_2 a regra que seleciona o último literal. Neste caso,
   a) A árvore-SLD associada a $Pr \cup \{G\}$ via Rc_1 não possui ramo infinito.
   b) A árvore-SLD associada a $Pr \cup \{G\}$ via Rc_2 possui ramo infinito.

4) Não. A refutação-SLD independe da regra escolhida. Se existe uma refutação-SLD via Rc_1 então para qualquer outra regra Rc_2, também existe refutação-SLD associada a Rc_2. Veja Lloyd,1984 para uma demonstração deste fato.

5) Seja I uma interpretação sobre o conjunto das pessoas tal que $I[p(x,y)]=T \Leftrightarrow x_I$ gosta de y_I, $I[q(x)]=T \Leftrightarrow x_I$ é bonita, inteligente e sensível, $I[a]= a_I$ = André, $I[b]= b_I$ = Maria, $I[c]= c_I$ = Dante.
   a) $p(a,b) \leftarrow q(b)$
      $q(b) \leftarrow p(a,b)$
   b) $p(a,b) \leftarrow q(b)$
   c) $q(b) \leftarrow p(c,b)$
   d) Seja $I[q_1(x)]=T \Leftrightarrow x_I$ é bonita, $I[q_2(x)]=T \Leftrightarrow x_I$ é inteligente e $I[q_3(x)]=T \Leftrightarrow x_I$ é sensível.
      $q_1(b) \leftarrow p(c,b)$
      $q_2(b) \leftarrow p(c,b)$
      $q_3(b) \leftarrow p(c,b)$

6) a) Afirmação verdadeira. $Pr \cup \{G\}$ não é satisfatível $\Leftrightarrow (Pr \rightarrow (A_1,...,A_n))$ é tautologia. Mas pelo teorema da completude, se $(Pr \rightarrow (A_1,...,A_n))$ é tautologia, então existe uma refutação-SLD fechada associada a $Pr \cup G$.
   b) Afirmação verdadeira. Neste capítulo foram apresentadas árvores-SLD com ramos abertos e fechados. Cada ramo aberto corresponde a uma derivação-SLD. Portanto, se $Pr \cup \{G\}$ não é satisfatível, pode existir derivação-SLD aberta associada a $Pr \cup \{G\}$.
   c) Se $Pr \rightarrow (A \wedge ... \wedge A_n)$ não é tautologia, então pelo teorema da completude, não existe prova de $Pr \rightarrow (A \wedge ... \wedge A_n)$ por refutação-SLD. Logo, não existe derivação-SLD fechada associada a $Pr \cup G$.
   d) Afirmação verdadeira. Se existe derivação-SLD fechada associada a $Pr \cup \{G\}$, então existe prova de $Pr \rightarrow (A \wedge ... \wedge A_n)$ usando refutação-SLD. Logo, pelo teorema da

correção, $Pr \rightarrow (A \wedge ... \wedge A_n)$ é tautologia e $Pr \cup \{G\}$ é insatisfatível. Portanto, se $Pr \cup \{G\}$ é satisfatível, então toda derivação-SLD associada a $Pr \cup \{G\}$ é aberta.

e) Afirmação verdadeira. Se existe derivação-SLD associada a $Pr \cup \{G\}$ é fechada, então existe refutação-SLD de $Pr \rightarrow (A_1 \wedge ... \wedge A_n)$. Logo, pelo teorema da correção, $Pr \rightarrow (A_1 \wedge ... \wedge A_n)$ é tautologia.

f) Afirmação verdadeira. Se existe derivação-SLD associada a $Pr \cup \{G\}$ que é aberta, isto não significa que não exista derivação-SLD fechada. Logo, não se pode concluir que $Pr \cup \{G\}$ é satisfatível. Veja exemplos neste capítulo de árvores-SLD com ramos abertos e fechados.

g) Afirmação verdadeira. Se toda derivação-SLD associada a $Pr \cup \{G\}$ é aberta, então não existe refutação-SLD de $Pr \rightarrow (A_1 \wedge ... \wedge A_n)$. Portanto, pelo teorema da correção $Pr \rightarrow (A_1 \wedge ... \wedge A_n)$ não é tautologia.

h) Afirmação verdadeira. Se $Pr \cup \{G\}$ não é satisfatível, então, pelo teorema da completude, existe refutação-SLD de $Pr \cup \{G\}$. Portanto, existe árvore-SLD com ramo fechado associada a $Pr \cup \{G\}$.

I) Afirmação falsa. Se $Pr \cup \{G\}$ não é satisfatível, então $Pr \rightarrow (A_1 \wedge ... \wedge A_n)$ é tautologia. Logo, pelo teorema da completude, existe refutação-SLD associada a $Pr \cup \{G\}$. Isto significa que não existe árvore-SLD sem ramo fechado associada a $Pr \cup \{G\}$.

j) Afirmação verdadeira. Se $Pr \rightarrow (A_1 \wedge ... \wedge A_n)$ não é tautologia, então, pelo teorema da correção, não existe refutação-SLD associada a $Pr \cup G$. Logo, não existe árvore-SLD com ramo fechado associada a $Pr \cup G$.

k) Afirmação verdadeira. Se existe árvore-SLD associada a $Pr \cup G$ com ramo fechado, então existe refutação-SLD associada a $Pr \cup G$. Logo, $Pr \cup G$ é insatisfatível. Portanto, se $Pr \cup \{G\}$ é satisfatível, então toda árvore-SLD associada a $Pr \cup \{G\}$ não possui ramo fechado.

l) Afirmação verdadeira.

m) Afirmação verdadeira.

8) Considere $B[C_1]$ = "se C_1 é variação de C_2, C_1 equivale a C_2". Demonstre o resultado utilizando o princípio da indução na Lógica de Predicados.

Bibliografia

A bibliografia a seguir sugere livros de interesse para especialistas em Computação, que utilizam a Lógica como fundamento para suas aplicações.

1. Abransky, S. *et all*, ed. *Admissibility of Logical Inference Rules*, North Holland, 1997.
2. Abrason, H., Dahl, V. *Logic Grammars*. Springer Verlag, 1989.
3. Ait-Kaci, H. *Warren's Abstract Machine: A Tutorial Reconstruction*. Mit-Press, 1991.
4. Alencar Filho, E. *Iniciação à Lógica Matemática*. Nobel, 1986.
5. Amble, T. *Logic Programming and Knowledge Engineering*. Addison Wesley, 1987.
6. Andrews, P.B. *An Introduction to Mathematical Logic and Type Theory: To Truth Through Proof*. Academic-Press, 1986.
7. Arbib, M.A. *et all*, *A Basis for Theoretical Computer Science*. Springer Verlag, 1981.
8. Backhouse, R.C. *Program Construction and Verification*. Prentice Hall, 1986.
9. Barwise, J. *Handbook of Mathematical Logic*. North Holland, 1977.
10. Baungartner, P. *et all*, ed. *Theorem Proving with Analitic Tableaux na Related Methods*. Springer Verlag, 1991.
11. Besnard, P. *An Introduction to Default Logic*. Springer Verlag, 1989.
12. Beldsoe, W.W., Loveland, D.N., ed. *Automated Theorem Proving: After 25 Years*. American Mathematical Society, 1983.
13. Bem-Ari, M. *Mathematical Logic for Computer Science*. Prentice Hall International, C.A.R. Hoare Editor, 1993.
14. Bochénski, I.M. *Historia da la Lógica Formal*. Ed. Gredos, 1985.
15. Bolc, L., Borowik, P. *Many-valued Logics 1*. Springer Verlag, 1992.
16. Boyer, R.S., Moore, J.S. *A Computational Logic Handbook*. Academic Press, 1979.
17. Caravaglia, S. *Prolog*. Harper and Row, 1987.
18. Casanova, M.A. e outros. *Programando em Lógica e a Linguagem PROLOG*. V Escola de Computação, 1986 ou Edgard Blücher, 1987.
19. Ceri, S., Gottlob, G., Tanca, L. *Logic Programming and Database*. Springer Verlag, 1990.
20. Chang, C.L., Lee, R.C.T. *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving*. Academic Press, 1973.
21. Chang, C.C., Keisler, H.J. *Model Theory*. North Holland, 1973.
22. Chellas B.F. *Modal Logic – An Introduction*. Cambridge University Press, 1980.
23. Church, A. *Introduction to Mathematical Logic*. Princeton University Press, 1970.
24. Clocksin, W.F., Mellish, C.S. *Programming in Prolog*. Springer Verlag, 1984.
25. Coelho, H., Cotta, J.C. *Prolog by Example*. Springer Verlag, 1988.
26. Costa, N.C.A., Cerrion, R. *Introdução à Lógica Elementar*. Editora da UFRGS, 1988.
27. Dalen, D. *Logic and Structure*. Springer-Verlag, 1989.
28. Dalen, D., Doets, H.C., Swart, H.C.M. *Sets, Naiv, Axiomatic and Applied. Pergamon Press, 1978.*
29. Deyi, L. *A PROLOG Database System*. John Wiley & Sons, 1984.
30. Dijkstra, E.W. *A Discipline of Programming*. Prentice-Hall, 1976.

31. Dowsing, R.D. *et all. A First Course in Formal and Its Applicatinons in Computer Science*. Blackwell Scientific Publications, Computer Science Texts, 1986.
32. Ebbinghaus, H.D., Flum, J., Thomas, W. *Finite Model Theory*. Springer Verlag, 1991.
33. Ebbinghaus, H.D., Flum, J., Thomas, W. *Mathematical Logic*. Springer Verlag, 1994.
34. Enderton, H.B. *A Mathematical Introduction to Logic*. Academic Press, 1972.
35. Eijck, J., Visser, A. *Logic and Information Flow*. Mit Press, 1994.
36. Fitting, M. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving*. Springer-Verlag, 1990.
37. Francez, N. *Program Verification*. Addison Wesley, 1992.
38. Gabbay, D., Gunthner, F. *Handbook of Philosophical Logic*. Kluwer Academic Pb, 1994.
39. Gallier, J.H. *Logic for Computer Science*. John Wiley, 1987.
40. Girard, J.Y., Lafont, Y., Taylor, P. *Proofs and Types*. Cambridge Univ. Press, 1989.
41. Godel, K. *O Teorema de Godel e a Hipótese do Contínuo*. Ed. Fundação Calouste Gulbekian, Lisboa, 1979.
42. Gregory, S. *Parallel Logic Programming in Parlog*. Addison Wesley, 1987.
43. Gries, D. *The Science of Programming*. Springer Verlag, 1981.
44. Gupta, M.M., Yamakawa, T. (ed). *Fuzzy Computing*. North-Holland, 1988.
45. Hisdal, E. *Logical Structures for Representation of Knowledge an Uncertainty*. Springer Verlag, 1998.
46. Hughes, G.E., Cresswell, M.J. *A Companion to Modal Logic*. Routledge Chapman Hall, 1990.
47. Hughes, G.E., Cresswell, M.J. *An Introduction to Modal Logic*, Routledge Chapman Hall, 1990.
48. Hutchison, D., Silvester, P. *Computer Logic*. John Wiley, 1987.
49. Huth, M.R.A. Ryan, M.D. *Logic in Computer Science, Modelling and Reasoning About Systems*. Cambridge University Press, 2000.
50. Jeffrey, R. *Formal Logic, Its Scope and Limits*. McGraw-Hill, 1981.
51. Kelly, J. *The Essence of Logic*. Prentice-Hall, 1997.
52. Kleene, S.C. *Mathematical Logic*. John Wiley and Sons, 1967.
53. Kneale, W., Kneale, M. *O Desenvolvimento da Lógica*. Editora Fundação Calouste Gulbekian, Lisboa, 1980.
54. Kowalski, R. *Logic for Problem Solving*. North-Holland, 1979.
55. Kowalski, R., Kuener, D. *Linear Resolution with Selection Functions*. Artificial Inteligence, 1971.
56. Lassez, J.L. (ed). *Logic Programming: Proceedings*. Mit Press, Vol I, Vol II, 1987.
57. Leeuwen, J. (ed). *Handbook of Theorical Computer Science. Formal Models and Semantics*. Elsevier, 1990.
58. Lewis, H.R., Papadimitriou, C.H. *Elements of the Theory of Computation*. Prentice-Hall, 1981.
59. Lloyd, J.W. *Foundations of Logic Programming*. Springer-Verlag, 1984.
60. Lobo, J., Minker, J., Rajasekor, A. *Foundations of Disjunctive Logic Programming*. Mit Press, 1992.
61. Loveland, D.W. *Automated Theorem Proving: A Logical Basis*. North-Holland, 1978.
62. Maier, D., Warren, D.S. *Computing with Logic*. Benjamin Cummings, 1988.
63. Malitz, J. *Introduction to Mathematical Logic*. Springer-Verlag, 1979.
64. Manin, Y.I. *A Course in Mathematical Logic*. Springer Verlag, 1977.
65. Manna, Z. *Mathematical Theory of Computation*. McGraw-Hill, 1974.
66. Manna, Z., Waldinger, R. *The Logical Basis for Computer Programming*. Addison-Wesley, Vol.I 1985, Vol II 1990.
67. Mendelson, E. *Introduction to Mathematical Logic*. D. Van Nostrand, 1987.
68. McCabe, F.G., Corck, K.L. *Micro-Prolog*. Prentice Hall, 1984.
69. McDonald, C., Yazdani, M. *Prolog Programming: A Tutorial Introduction*. Blackwell Scientific, 1990.
70. Muggleton, S. *Inductive Logic Programming*. Academic Press, 1992.
71. Nerode, A., Shore, R.A. *Logic for Applications*. Springer Verlag, 1997.

72. Nilson, N.J. *Principles of Artificial Inteligence*. Tioga, 1980.
73. Nolt, J., Rohatyn, D. *Lógica*. Makron Books, 1991.
74. O'Keefe, R. *The Craft of Prolog*. Mit-Press, 1990.
75. Paulson, L.C. *Logic and Computation*. Cambridge University Press, 1988.
76. Philippe, S. *et all. Non Standart Logics for Automated Reasoning*. Academic Press, 1988.
77. Priest, G., Rontley, R., Norman, J. *Paraconsistent Logic, Essays on the Inconsistent*. Philosophia Verlag, 1989.
78. Ramsay, A. *Formal Methods in Artificial Intelligence*. Cambridge University Press, 1988.
79. Reynolds, J.C. *The Craft of Programming*. Prentice-Hall, 1981.
80. Richards, T. *Clausal Form Logic: An Introduction to the Logic of Computer Reasoning*, Addison Wesley, 1989.
81. Robinson, J.A. *Logic: Form and Functions*. North-Holland, 1979.
82. Rowe, N.C. *Artificial Intelligence Through Prolog*. Prentice Hall, 1988.
83. Salmon, W.C. *Lógica*. 3ª edição, Prentice Hall, 1993.
84. Sanchis, L.E. *Recursive Functionals*. North Holland, 1992.
85. Shapiro, E. (ed). *Logic Programming*. Mit-Press, 1988.
86. Shoenfield, J.R. *Mathematical Logic*. Addison-Wesley, 1967.
87. Shoenfield, J.R. *Recursion Theory*. Springer Verlag, 1993.
88. Sperschneider, V., Antonion, G. *Logic, A Foundation for Computer Science*. Addison Wesley, 1991.
89. Spivey, J.M. *Lambda Calculus, Combinators and Functional Programming*. Cambridge University Press, 1988.
90. Sterling, L., Shapiro, E. *The Art of Prolog: Advanced Programming Thechniques*. Mit-Press, 1988.
91. Troelstra, A. S., Dalen, D. *Construtivism in Mathematics*. Springer Verlag, 1988.
92. Turner, R. *Logics for Artificial Intelligence*. Ellis Horwood Limited, 1985.
93. Velleman, D.J. *How to Prove It, a Structured Approach*. Cambridge University Press, 1994.
94. Wand, M. *Induction, Recursion and Programming*. North-Holland, 1980.
95. Wise, M.J. *Prolog Multiprocessor*. Prentice Hall, 1986.
96. Wos, L. *et all. Automated Reasoning: Introduction and Application*. Prentice-Hall, 1984.

Índice

A

alfabeto,
  da lógica de predicados, 164
  da lógica proposicional, 23-24
algoritmo da unificação, 257-264
algoritmo de skolemização, 253-257
aresta, 49-50
argumentos válidos, 3-4
árvore, 49-50
árvore-SLD, 294-299
átomo, 166-167
axiomas,
  do sistema Pa, 96
  do sistema Par, 219

B

base associada a uma fórmula, 111
base da indução, 66-67, 108

C

classificação fórmulas, 167-172
classificações de variáveis, 165
cláusula,
  na lógica de predicados, 267
cláusula de programa, 285-286
cláusula objetivo, 288
cláusula unitária, 287
composição de substituições, 259
completude,
  do sistema axiomático Pa, 109
  do sistema de dedução natural Na, 126
comprimento de uma fórmula,
  na lógica de predicados, 171-172
  na lógica proposicional, 7
condição básica, 66
condição indutiva, 66
condições necessárias, 63-66
condições suficientes, 63-66
conectivos na lógica de predicados, 165
conectivos proposicionais, 4
conjectura, 36
conjunto de diferenças, 261-262
conjuntos de conectivos completos, 79-80
conseqüência lógica,
  em tableaux semânticos, 136-144, 235-241
  no sistema axiomático Pa, 98-109
  no sistema de dedução natural Na, 119-126
  por resolução, 148-153, 267-277
  por resolução-SLD, 292-294
consistência,
  no sistema axiomático Pa, 116
  no sistema axiomático Par, 229
  no sistema de dedução natural Na, 127
construção de fórmulas, 4-5
construção de um tableau semântico,
  na lógica de predicados, 234-235
  na lógica proposicional, 134
contradição, 28
contradomínio, 13
contraexemplo, 37

D

domínio, 13
domínio de uma interpretação, 180

E

equivalente,
  na lógica de predicados, 208-211
  na lógica proposicional, 36-40
escopo de um quantificador, 173
expansão por resolução,
  na lógica de predicados, 266
  na lógica proposicional, 147
expansão por resolução fechada,
  na lógica de predicados, 266
  na lógica proposicional, 147
expressão, 168
expressões unificáveis, 262

F

factível, 32-33
fecho de uma fórmula, 175-176
forma clausal,
  na lógica de predicados, 266
  na lógica proposiconal, 147

forma prenex, 248-252
formas normais,
na lógica de predicados, 169
na lógica proposiconal, 88
fórmula,
na lógica de predicados, 167
na lógica proposicional, 11-13
fórmula aberta, 248
fórmula fechada, 175-176
fórmulas malformadas, 11-12
função binária, 13
funções, 164

G

generalização, 222

H

heurística, 134

I

implica,
na lógica de predicados, 208-211
na lógica proposiconal, 29-30
indução finita, 67-69
insatisfatibilidade,
na lógica de predicados, 208-211
na lógica proposicional, 31-32
interpretação 12-13
de fórmulas, 13-20
de fórmulas com quantificadores, 184-185
de funções, 180-181
de predicados, 180-181
de variáveis, 180-181
interpretação estendida, 185

L

lei da contraposição, 49-51
leis de De Morgan, 47-49
leis de valores de verdade, 52
linguagem,
da lógica de predicados, 164
da lógica proposicional, 3
LISP, 164
literal,
na lógica de predicados, 169
na lógica proposicional, 88
literais complementares,
na lógica de predicados, 257
na lógica proposicional, 145
lógica de predicados, 164

M

mecanismo de inferência, 99
método da árvore semântica, 49-51
método da negação ou absurdo, 51-55
método da tabela verdade, 47-49
modus ponens, 98, 222

N

necessidade, 66
nó, 50-51
notação polonesa, 5-6
notação posfixa, 5-6
notação prefixa, 5-6

O

ocorrência livre e ligada de uma variável, 173-175
ordem de precedência de conectivos
da lógica de predicados, 170
da lógica proposicional, 6

P

paradigma, 66, 184-185
paradoxo, 70-71
paridade, 5-6
passo da indução, 67-69
predicados, 164
primeira forma do princípio da indução finita, 67-69
princípio da indução, 67-69
princípio da indução na lógica, 71-74
procedimento de refutação, 294
programa lógico, 287
programação lógica, 286
PROLOG, 98, 286
propriedades semânticas,
na lógica de predicados, 208-211
na lógica proposicional, 32-36
prova, 4
em tableaux semânticos, 136
no sistema Pa, 99
no sistema Par, 223
no sistema Na, 122
por refutação, 292
por resolução, 147, 267

Q

quantificadores
existenciais, 165
unversais, 165

R

raiz, 50-51
ramo aberto, 136, 237
ramo fechado, 136, 237
refutação-SLD, 292
regra de computação, 288
regra de resolução
na lógica de predicados, 265
na lógica proposicional, 146
regra de substituição, 102
regra de substituição de fórmulas, 81
regras de inferência,
do tableau semântico, 132, 233

no sistema axiomático Pa, 97-98
no sistema axiomático Par, 222
no sistema de dedução natural Na, 117
regra de resolução,
na lógica de predicados, 265
na lógica proposicional, 146
regras de dedução, 96
regras prenex, 248-249
regras semânticas, 182
regras semânticas para quantificadores, 184-185
relação semântica entre conectivos, 83
relações semânticas, 79-90
renomeação de variáveis, 250
resolução,
na lógica de predicados, 247-277
na lógica proposicional, 144-148
resolvente de duas cláusulas, 144, 264
resolvente-SLD, 289

S

satisfatível,
na lógica de predicados, 208-211
na lógica proposicional, 26-32
SCHEME, 164
segunda forma do princípio da indução finita, 69-71
semântica,
na lógica de predicados, 179
na lógica proposicional, 12
símbolo livre, 175
símbolos de pontuação,
na lógica de predicados, 164
na lógica proposicional, 4
símbolos de verdade,
na lógica de predicados, 164
na lógica proposicional, 4
símbolos proposicionais, 4
sintaxe, 4
sistema axiomático,
na lógica de predicados, 219
na lógica proposicional, 95-127
sistema de dedução natural, 117
sistemas de dedução, 95
sistemas formais, 95
skolemização, 253-257
subexpressão, 168
subfórmula, 7, 168
subtermo, 168
substituição, 258
aplicação de substituição, 258
substituição resposta, 292
substituição segura, 220
suficiência, 67

T

tabela verdade, 15
tabela verdade associada a uma fórmula, 15-16
tableau aberto, 136, 137
tableau fechado, 136, 137
tableaux semânticos,
na lógica de predicados, 233
na lógica proposicional, 131-132
tautologia,
na lógica de predicados, 208-211
na lógica proposicional, 27
teorema,
no sistema axiomático Pa, 116
no sistema axiomático Par, 229
no sistema Na, 123
teorema da completude,
na resolução, 126, 269
no sistema axiomático Pa, 110-111
no sistema axiomático Par, 229
no sistema Na, 126
no tableau semântico, 137, 236
teorema da correção,
na resolução, 126, 269-270
no sistema axiomático Pa, 110
no sistema axiomático Par, 229
no sistema Na, 126
no tableau semântico, 138, 236
teorema da dedução,
no sistema axiomático Pa, 107
no sistema axiomático Par, 224
termo, 165-166
transitividade, 35, 51-52, 105

U

unificador mais geral, 262

V

valida,
na lógica de predicados, 208-211
na lógica proposicional, 29-30
variações, 290
variável livre e ligada, 175
variáveis, 164
vértice, 49-50

Nos últimos anos, a Sociedade Brasileira de Computação SBC tem apresentado propostas de planos pedagógicos para cursos de Computação em todo o Brasil. Seguindo esta política, foi criada a série Campus / SBC. O objetivo desta série é atender a demanda de cursos de graduação em Computação por livros-texto de qualidade e que contemplam disciplinas do currículo de referência da SBC.

Este livro foi selecionado no âmbito deste programa e tem como aplicações:

- Livro-texto de leitura obrigatória em disciplinas de Lógica e temas correlatos em cursos de Ciência da Computação, Engenharia da Computação e Sistemas de Informação.

- Livro de leitura complementar para profissionais que se interessam pelo conhecimento da Lógica como filósofos, matemáticos, físicos, engenheiros e advogados.

ELSEVIER

EDITORA CAMPUS Uma empresa Elsevier
www.campus.com.br

ISBN 85-352-1093-8
9 788535 210934