Natália Potomová

Zadanie:

a) Majme tabuľku nameraných dát. Nájdite polynóm stupňa n ≤ 6, ktorý najlepšie aproximuje funkčnú závislosť y(t) v zmysle (neváženej) metódy najmenších štvorcov. Zobrazte závislosť rezíduí, t.j. súčet štvorcov, na stupni polynómu pre všetky skúmané polynómy.

t_i	0.25	0.75	1.25	1.75	2.25	2.75	3.25
y_i	4.29	3.71	3.32	3.03	2.94	2.82	2.75

Poznámka: Pri riešení je dovolené využiť funkciu softvéru Octave pre riešenie sústavy lineárnych rovníc A.x=b v tvare `x=A\b`.

b) Porovnajte výsledky s výsledkami obdržanými využitím zabudovanej fitovacej funkcie `polyfit`

Riešenie:

Úloha bola riešená metódou najmenších štvorcov. Metóda funguje na princípe, počítania rozdielu našej pravej funkcie f a novej aproximovanej funkcie g v každom bode na druhú. Za najlepšiu aproximáciu považujeme stupeň polynómu, kde je súčet štvorcov d cez všetky body najmenší.

$$d = \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - g(t_i))^2$$

Zjednodušme úlohu pre polynóm stupňa 1, funkcia g bude teda

$$g(t) = a_0 + a_1 t$$

d bude mať tvar

$$d = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (a_0 + a_1 t_i))^2$$

Hľadáme hodnoty koeficientov a_0, a_1 také aby d bolo čo najmenšie, musíme teda nájsť extrémy funkcie d (derivovať podľa danej premennej a položiť rovné nule)

$$\frac{\partial d}{\partial a_0} = 2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - (a_0 + a_1 t_i)) = 0$$

$$\frac{\partial d}{\partial a_1} = 2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - (a_0 + a_1 t_i))\, t_i = 0$$

Po úprave dostávam:

$$a_0 n + a_i \sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} t_i + a_i \sum_{i=1}^{n} t_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i t_i$$

Tu vidno, že sme dostali sústavu rovníc s 2 neznámymi a_0 a a_1

Po zovšeobecnení a prevedení na maticový zápis dostanem V*a=Y:

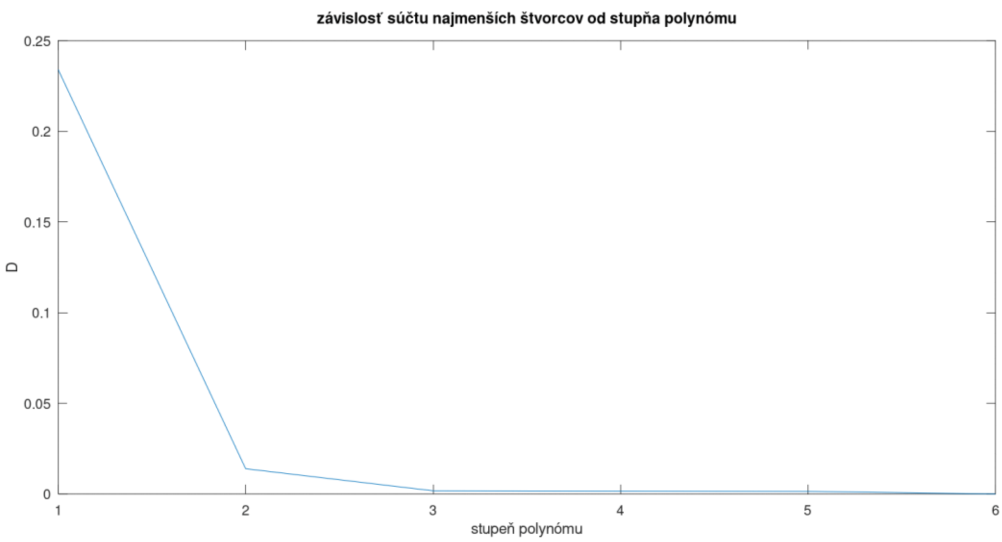
$$\begin{pmatrix} n & \sum t_i & \cdots & \sum t_i^k \\ \sum t_i & \sum t_i^2 & & \sum t_i^{k+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sum t_i^k & \sum t_i^{k+1} & \cdots & \sum t_i^{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \vdots \\ \sum y_i t_i^k \end{pmatrix}$$

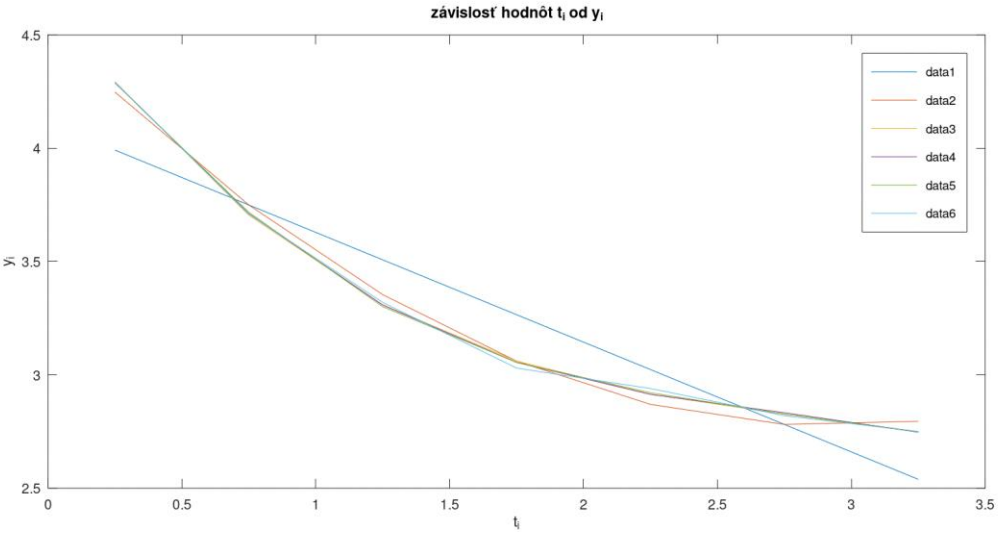
Stručný postup riešenia:

1. Zadáme hodnoty zo zadania
2. Začneme cyklus, ktorý nám prejde cez všetky stupne polynómu
3. Vnútri tohto cyklu si vytvoríme matice V a Y pomocou cyklu tak, že ho necháme prejsť cez všetky riadky a stĺpce, kde bude stále vkladať hodnotu závislú od polohy v matici $\sum t_i^{j+l-2}$, kde j je súradnica stĺpca a l súradnica riadku.
4. Pomocou funkcie `c=V\Y` vypočítame koeficienty polynómu (funkcia vyhodila koeficienty v opačnom poradí, preto ich bolo potrebné prehodiť príkazom flip)
5. Funkcia polyval nám dá hodnoty polynomickej funkcie s koeficientami c v bodoch A
6. Nájdeme D (súčet najmenších štvorcov) v každom stupni polynómu
7. Vykreslíme potrebné grafy
8. Použijeme funkciu polyfit na porovnanie výsledkov

Pozn.: Niektoré označenia v teoretickej časti sa líšia od tých v kóde

Výsledky:





Závislosť je pre y od t pri rôznych stupňoch polynómu od 1 do 6, ktoré zodpovedajú farbám v legende.

Koeficienty jednotlivých polynómov sú:

- C_1= -0.4843, 4.1132
- C_2= 0.2048, -1.2010, 4.5355
- C_3= -0.060000, 0.519762, -1.647202, 4.673348
- C_4= -9.0909e-03, 3.6364e-03, 3.7447e-01, -1.5285e+00, 4.6489e+00
- C_5= 0.016000, -0.149091, 0.446970, -0.238030, -1.181937, 4.592689
- C_6= 0.1031, -1.0667, 4.2478, -8.2267, 8.2785, -4.9417, 5.1210

Koeficienty obdržané z funkcie polyfit

- P_1= -0.4843, 4.1132
- P_2= 0.2048, -1.2010, 4.5355
- P_3= -0.060000, 0.519762, -1.647202, 4.673348
- P_4= -9.0909e-03, 3.6364e-03, 3.7447e-01, -1.5285e+00, 4.6489e+00
- P_5= 0.016000, -0.149091, 0.446970, -0.238030, -1.181937, 4.592689
- P_6= 0.1031, -1.0667, 4.2478, -8.2267, 8.2785, -4.9417, 5.1210

Záver:

A) Z grafu hneď vidíme, že najlepšia možná aproximácia je tá, kde je D najnižšie, čo zodpovedá stupňu 6.

B) Výsledky z funkcie polyfit sa zhodujú úplne presne s výsledkami, ktoré sme získali našou metódou.