Natália Potomová

Zadanie:

(a) Majme tabuľku nameraných dát. Nájdite Newtonov interpolačný polynóm s doprednými diferenciami. Upravte ho na tvar $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ a porovnajte s aproximačným polynómom 6-tého stupňa zo zadania č.1. Ako sa líšia?

t_i	0.25	0.75	1.25	1.75	2.25	2.75	3.25
y_i	4.29	3.71	3.32	3.03	2.94	2.82	2.75

(b) Generujte maticu náhodných čísiel 1000 krát 1000 (A=rand(1000,1000)) a vypočítajte hodnotu polynómu P(A) jednak priamo a jednak pomocou Hornerovej schémy. Porovnajte rýchlosť výpočtov s využitím príkazov tic a toc.

Riešenie:

Tvar Newtonovho polynómu je:

$$P_n(x) = c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)(x-x_1)+...+c_n(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})$$

Koeficienty c_i je možné vypočítať priamo z interpolačných podmienok $P(x_i)=y_i$, pre $i=0,...,n$. Existuje však aj jednoduchší spôsob, a to pomocou pomerných diferencií. Všeobecne je spôsob počítania koeficientov trochu iný. V našom prípade vidíme, že uzly sú ekvidištantné, a teda koeficienty vieme vyjadriť ako

$$c_i = \frac{\Delta^i y_0}{i!\,h^i},$$

kde h je rozdiel dvoch uzlov $h=x_1-x_0$, i je stupeň polynómu.

<u>Postup riešenia:</u>

1. Zadáme hodnoty zo zadania
2. Zadefinujeme hodnoty h čo je rozdiel dvoch po sebe idúcich uzlov
3. Potrebujeme vytvoriť maticu s diferenciami rôznych radov. Pre ukážku zapíšem tabuľku diferencií rádu 3:

y_0	$\Delta y_0=y_1-y_0$	$\Delta^2 y_0=\Delta y_1-\Delta y_0$	$\Delta^3 y_0=\Delta^2 y_1-\Delta^2 y_0$
y_1	$\Delta y_1=y_2-y_1$	$\Delta^2 y_1=\Delta y_2-\Delta y_1$	
y_2	$\Delta y_2=y_3-y_2$		
y_3			

Maticu budeme nazývať delta. Algoritmus pre vytvorenie matice:

i. Vytvoríme nulovú maticu delta veľkosti nxn (n je počet uzlov, nie stupeň)
ii. Do prvého stĺpca matice dáme hodnoty *y*
iii. Začneme cyklus, ktorý pôjde od druhého stĺpca matice po n. Vnútri tohto cyklu začneme cyklus, ktorý pôjde od prvého riadka až po n+1-k riadok (k je aktuálny stĺpec). Ako vidno na vzorovej matici počet riadkov sa s každým stĺpom zmenšuje preto je to potrebné. Vnútri cyklu necháme aby nám na konkrétnu pozíciu v matici zapisovalo rozdiel hodnôt z pozície vľavo dole a vľavo.

4. V ďalšom kroku vytvoríme maticu s faktoriálmi od 1 po n:
    i. Vytvoríme nulový riadkový vektor f veľkosti n
    ii. Na prvú pozíciu dáme 1!=1
    iii. Začneme cyklus od druhej pozície po n (pre skrátenie je možné použiť predchádzajúci cyklus z delta matice), kde budeme rátať hodnotu z predchádzajúcej pozície krát pozícia v matici
5. Vytvoríme vektor C, v ktorom budú jednotlivé koeficienty Newtonovho polynómu.
    i. Vytvoríme nulový riadkový vektor C
    ii. Na prvú pozíciu dáme hodnotu y_0 (z interpolačnej podmienky)
    iii. Začneme cyklus od 2. pozície po n, ktorý mi na každú pozíciu zráta c ako c(i)=delta(1,i)/(f(i-1)*h^(i-1))
6. V ďalšej časti úlohy potrebujeme prepísať Newtonov polynóm na polynóm v tvare $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$. Na to použijeme príkaz conv(a,b), ktorý nám dá koeficienty súčinu dvoch polynómov. Pre ukážku zapíšem Newtonov polynóm rádu 3:

$$P_3(x) = c_0+c_1\underbrace{(x-x_0)}_{p_1}+c_2\underbrace{\underbrace{(x-x_0)}_{p_1}(x-x_1)}_{p_2}+c_3\underbrace{\underbrace{(x-x_0)(x-x_1)}_{p_2}(x-x_2)}_{p_3}$$

    i. Vytvoríme prvý vektor p. Ten ako vidím má koeficienty 1 a $-x_0$ (v mojom prípade -A(1))
    ii. Vytvoríme maticu U veľkosti n, kde sa budú zapisovať jednotlivé vektory p, vynásobené jednotlivými koeficientmi c
    iii. Začneme cyklus od druhého riadku (pretože v prvom bude iba c_0) a necháme nech sa do matice U od zadu zapisujú hodnoty p*C(i), zároveň nech sa v každom cykle kombinujú vektory p a vektor (1, -A(i))
    iv. Nakoniec dostaneme maticu U, v ktorej máme pod sebou zapísane koeficienty prináležiace jednotlivým stupňom x.
    v. Maticu U po stĺpcoch sčítame a dostaneme koeficienty polynómu P.
7. Vykreslíme grafy
8. V úlohe (b): vytvoríme náhodnú maticu O veľkosti 1000x1000. Spravíme cykly prechádzajúce cez všetky riadky a stĺpce a necháme znova pomocou cyklu spočítať pre každú zložku hodnotu nájdeného polynómu P. Počas toho meriame čas výpočtu pomocou príkazu tic a toc.
9. Výpočet pomocou Hornerovej schémy je veľmi podobný ako výpočet priamou metódou, akurát je inak zapísaný aby sa redukovali operácie. Počas výpočtu takisto meriame čas pomocou príkazov tic toc.

Výsledky:

Úloha A:

Koeficienty Newtonovho polynómu:

C = 4.2900 -1.1600 0.3800 -0.1200 0.1267 -0.1387 0.1031

Koeficienty polynómu P

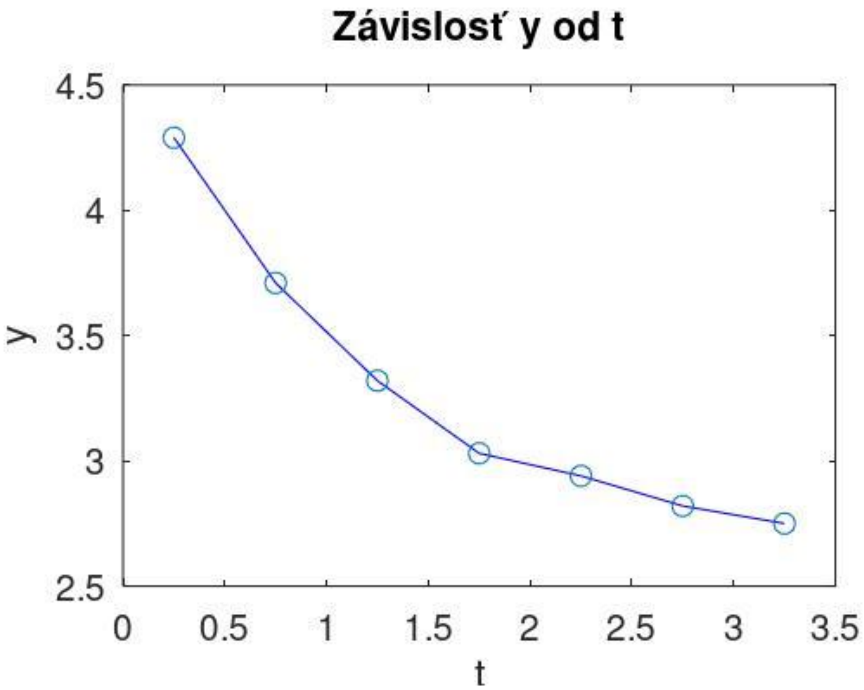
P = 0.1031 -1.0667 4.2478 -8.2267 8.2785 -4.9417 5.1210

Pre porovnanie, koeficienty aproximačného polynómu 6-teho stupňa z prvého zadania:

C_6= 0.1031 -1.0667 4.2478 -8.2267 8.2785 -4.9417 5.1210

Rozdiel polynómov P a C_6:

R = -1.3128e-09   1.3865e-08 -5.6693e-08   1.1271e-07 -1.1161e-07   4.9693e-08 -7.0257e-09



Úloha B:

Čas výpočtu priamou metódou:

t_1 = 55.282 s

Čas výpočtu pomocou Hornerovej schémy:

t_2 = 43.179 s

Záver:

A) Koeficienty Newtonovho polynómu sa podarilo úspešne nájsť. Ako dôkaz nám môže slúžiť skutočnosť, že po úprave sa pomerne dobre zhodujú s koeficientami z prvého zadania. Rozdiel je vidno najskôr rádovo až v 10^{-7}.

B) Z výsledkov vidíme, že výpočet Hornerovou schémou trvá kratšie ako priamo. Dôvodom je menej operácii. Zatiaľ čo priama metóda má n-sčítaní a n/2(n+1)-násobení, Hornerov algoritmus n-sčítaní, n-násobení.