Natália Potomová

Zadanie:

Numericky riešte problém ideálneho kyvadla hmotnosti *m*, pripevneného k pevnému čapu tuhou tyčou dĺžky *L*. Predpokladajme, že uhol vychýlenia θ je malý, takže platí sin θ ≈ θ. V takom prípade je možné popísať pohyb kyvadla sústavou diferenciálnych rovníc

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{L}\theta$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

Nájdite časovú závislosť θ(*t*) pre $0 \le t \le 20$ s krokom Δt=0.02, pričom θ(0)=0, ω(0)=0.1 a *L*=2*g*. Úlohu riešte

(a) Eulerovou metódou
(b) Metódou Runge-Kutta 4. radu
(c) Za pomoci zabudovanej funkcie Octavu *lsode*

Jednotlivé riešenia zobrazte graficky, porovnajte a diskutujte prípadné rozdiely.

Riešenie:

Definovali sme sieťové uzly t_i na intervale [*a, b*] = [1, 20] s konštantným krokom *dt*=0,02.

1. Eulerova metóda

   Hodnota y_{i+1} sa počíta extrapoláciou z hodnoty y_i v predchádzajúcom uzle a na intervale $[t_i, t_{i+1}]$ sa riešenie aproximuje priamkou, ktorá prechádza bodom (t_i, y_i) a má smernicu $y_i' = f(t_i, y_i)$. Z toho dostávame rekurentný vzťah

$$y_{i+1} = y_i + dt * f(t_i, y_i)$$

2. Runge-Kutta metóda

   Runge-Kutta metódy sú všeobecne dané rekurentným vzťahom:

$$y_{i+1} = y_i + dt \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \, k_j,$$

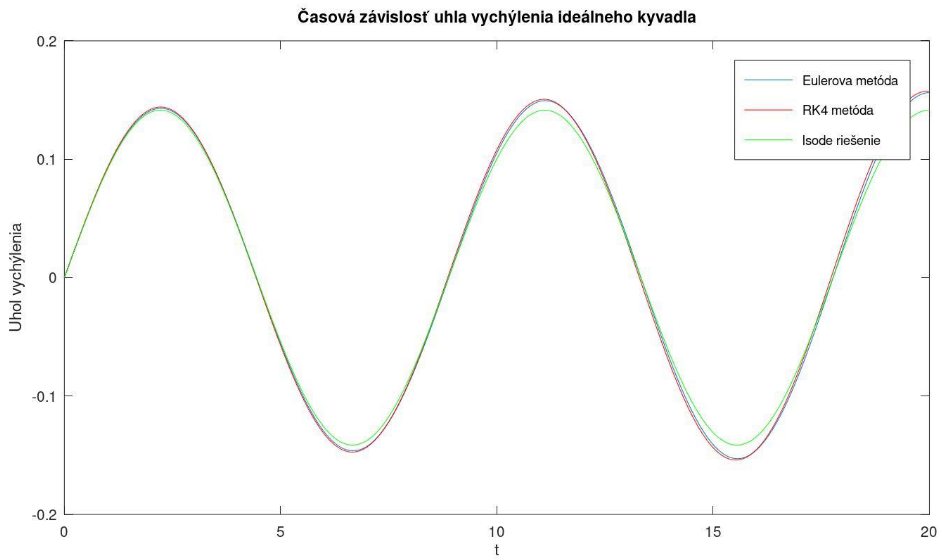
kde $k_1=f(t_i, y_i)$ a $k_j=f(t_i+\lambda_j dt, y_i+\mu_j dt k_{j-1})$ pre $j>1$. Konkrétne pre 4. rád RK metódy dostávame rekurentný vzťah

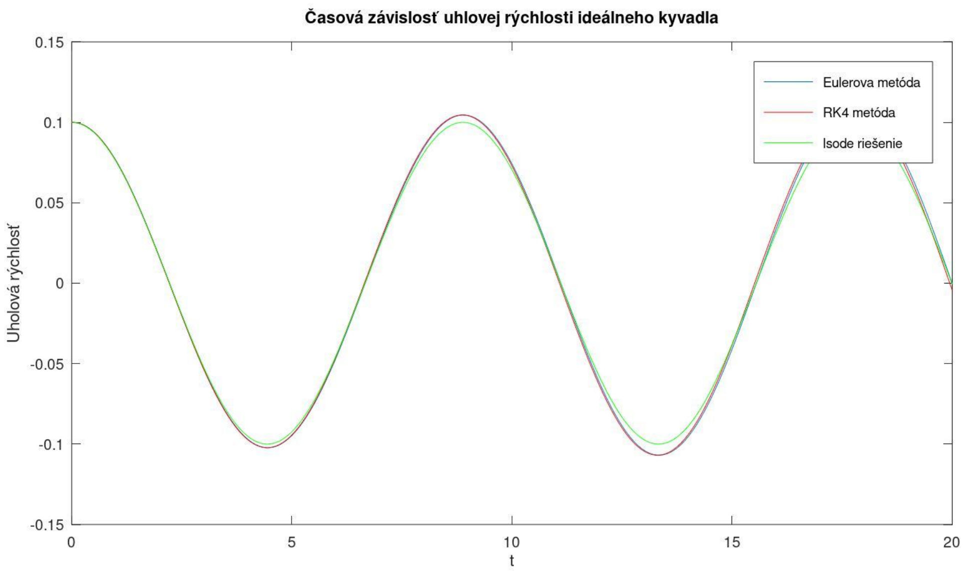
$$y_{i+1} = y_i + dx\frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6},$$

kde hodnoty k_j sú

$$k_1 = f(t_i, y_i),$$
$$k_2 = f\left(t_i + \frac{dt}{2}, y_i + \frac{dt}{2}k_1\right)$$
$$k_3 = f\left(t_i + \frac{dt}{2}, y_i + \frac{dt}{2}k_2\right)$$
$$k_4 = f(t_{i+1}, y_i + dtk_3)$$

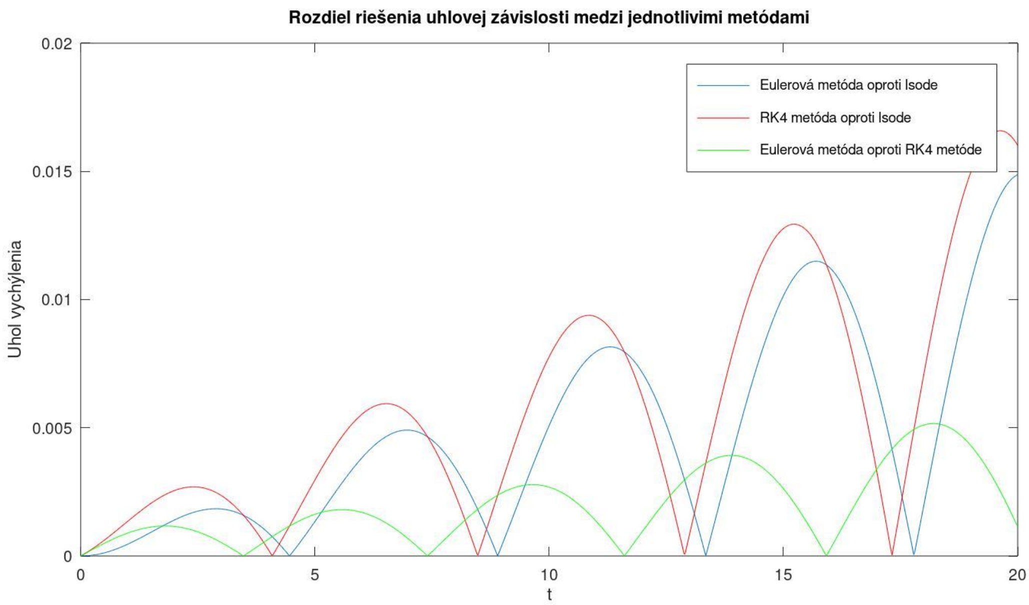
Výsledky:





Na grafoch sú zobrazené riešenia úlohy pomocou rôznych metód. Rozdiel medzi Eulerovou metódou a Runge-Kutta metódou 4. rádu je v tomto priblížení nebadateľný. Riešenie pomocou zabudovanej funkcie lsode sa líši od spomínaných dvoch riešení s každou periodou stále viac.

Na ďalšom grafe už vidíme rozdiely medzi jednotlivými metódami. Riešenia sa s každou polperiódou prekrývajú takže chyba klesne do nuly, ale potom sa s každým dosiahnutým extrémom chyba v našom časovom intervale zväčšuje.



Záver:

Podarilo sa nám nájsť riešenia úlohy ideálneho kyvadla pomocou všetkých troch numerických metód. Ich rozdiely vidíme na 3. grafe v sekcii Výsledky. Rozdiely možno odôvodniť výpočtovou chybou samotných numerických metód.