

Zadanie:

Odhadnite hodnotu určitého integrálu

$$\int_0^1 \arcsin(x)/x dx = \pi/2 \ln(2)$$

pomocou MC integrovania.

Numericky testujte závislosť MC chyby na počte vzoriek M , z ktorých je počítaná stredná hodnota

$$\frac{1}{M} \sum_{n=1}^M \frac{\arcsin(r_n)}{r_n} = \frac{\overline{\arcsin(r_n)}}{r_n} \approx I$$

a/. Graficky vykreslite váš MC odhad hodnoty integrálu ako aj chyby s použitím neskresleného odhadu štandardnej odchýlky ako funkcie $\log_{10}M$ pre $M = 10, 10^2, 10^3, 10^4$ a 10^5 . Odovzdajte program a graf. Pre generovanie postupnosti n uniformných náhodných čísel z intervalu $[0,1]$ použite príkaz $\text{rand}(1,n)$.

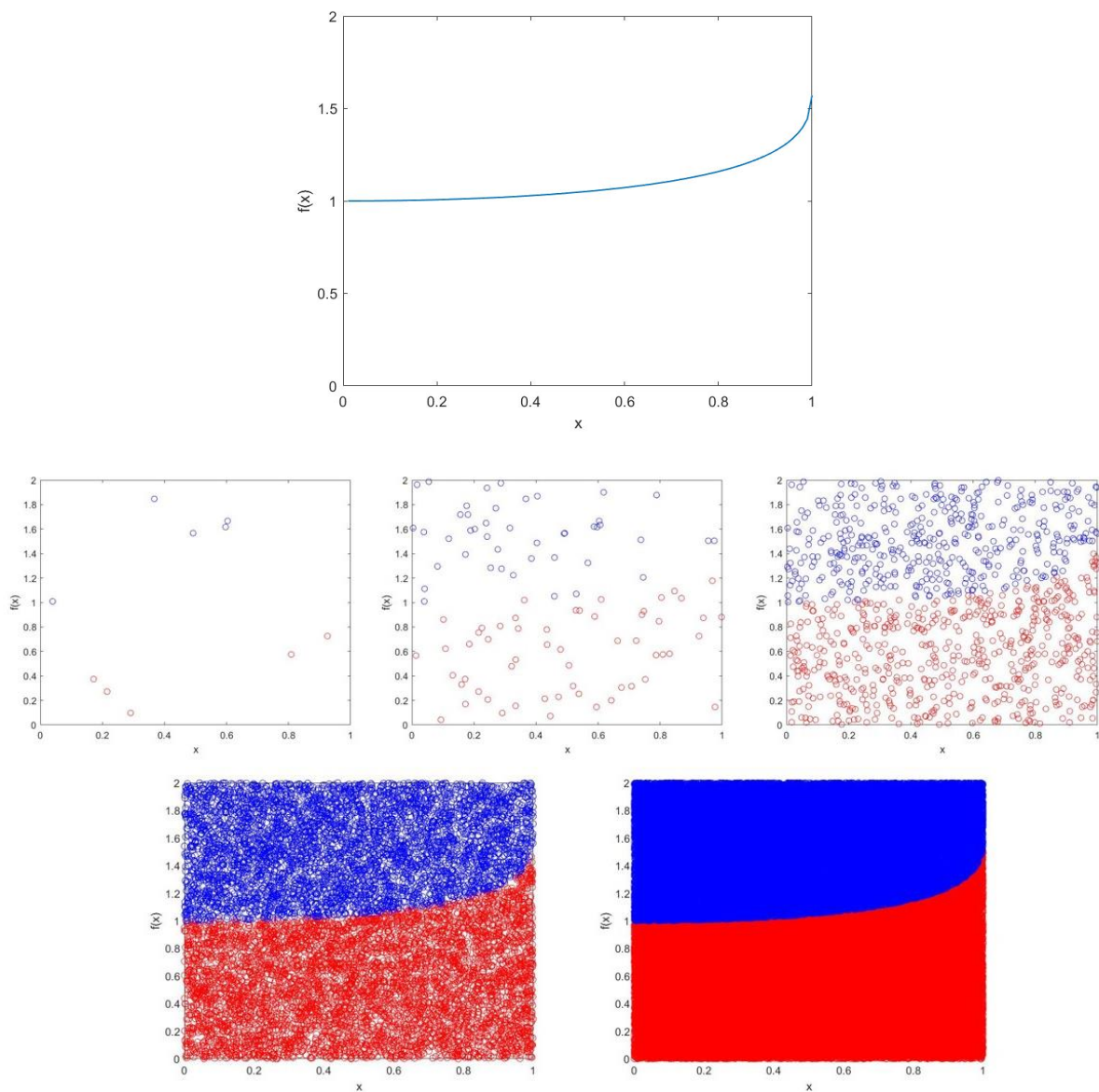
b/. Prevedte numerický experiment ako priamo merať štandardnú odchýlku MC odhadu. Za týmto účelom, pre každé M odhadnite I N_{seed} -krát s použitím N_{seed} rôznych počiatočných hodnôt, tzv. seed (pomocou príkazu $\text{rand}(\text{"seed"}, x)$, kde x sú rôzne hodnoty) generátora NČ (použite $N_{\text{seed}} = 100$). Vypočítajte štandardnú odchýlku σ_M týchto N_{seed} odhadov

Vykreslite vypočítané hodnoty $\log_{10}\sigma_M$ ako funkciu $\log_{10}M$ pre $M = 10, 10^2, 10^3, 10^4$ a 10^5 spolu s jej neskresleným odhadom z úlohy a/. (sú si podobné?). Ak MC chyba klesá ako funkcia $M^{-1/2}$ potom môžete fitovať dáta priamkou so smernicou -0.5 . Odovzdajte program a graf.

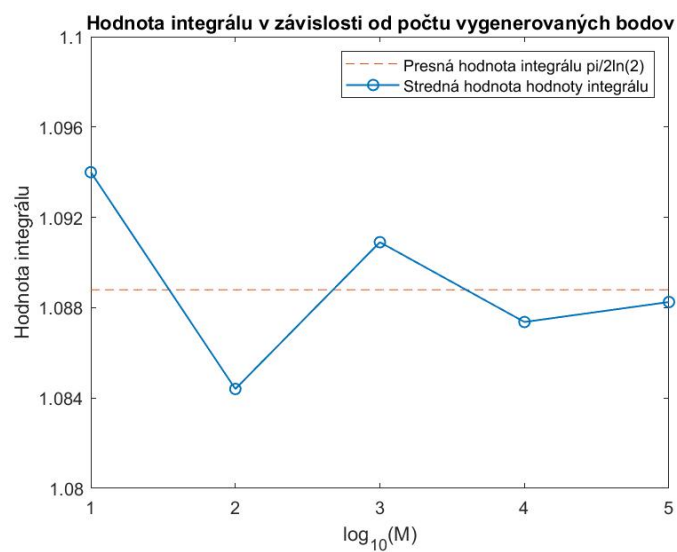
Teória:

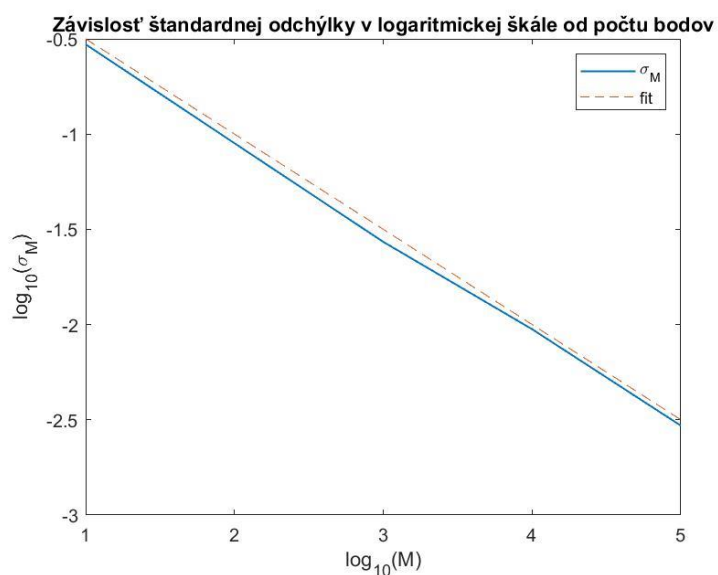
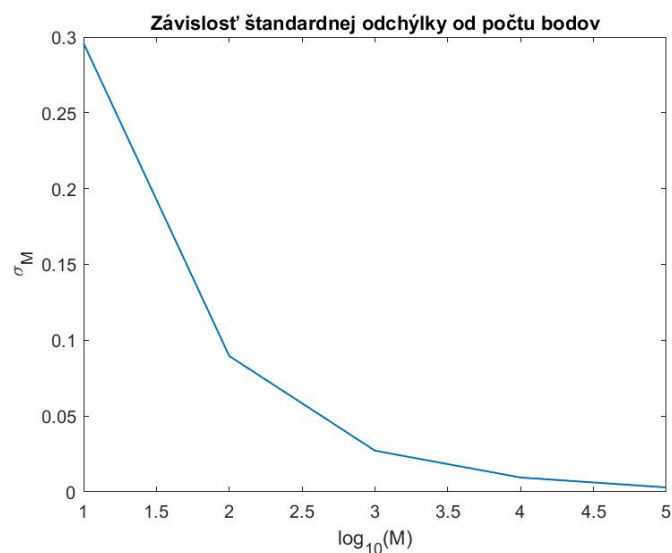
Monte Carlo metóda integrovania spočíva v tom, že vygenerujeme N náhodných bodov (x_i, y_i) v obdĺžniku $[a,b] \times [0,M]$, kde a, b sú hranice integrálu a M musí byť hodnota ktorá je väčšia alebo rovná maximálnej hodnote funkcie v intervale (a,b) . Potom zisťujeme, koľko bodov z celkového počtu sa vygeneruje pod graf funkcie $f(x)$. Približnú hodnotu integrálu môžeme vypočítať ako súčin pomeru bodov pod grafom a celkového počtu vygenerovaných bodov a plochy obdĺžnika $[a,b] \times [0,M]$. Čím väčší počet bodov vygenerujeme, tým presnejšiu aproximáciu integrálu získame.

Vysledky:



Obr. 1: Náhodne generované body farebne rozdelené nad a pod funkciou





Záver:

V tejto úlohe sme použili Monte Carlo metódu na numerické vypočítanie integrálu funkcie $\arcsin(x)/x$ na intervale $[0,1]$. Na základe výsledkov sme zostrojili grafy závislosti strednej hodnoty integrálu a jeho štandardnej odchýlky od počtu generovaných bodov.

Výsledky ukazujú, že s narastajúcim počtom generovaných bodov sa stredná hodnota integrálu približuje k presnej hodnote a štandardná odchýlka sa znižuje, čo potvrdzuje správnosť metódy. Z grafu závislosti štandardnej odchýlky od počtu bodov vidíme, že táto závislosť je lineárna na logaritmickej škále, čo potvrdzuje teoretický odhad.