Natália Potomová

Zadanie:

Majme tyč dĺžky L = 3,5 m pripojenú na potrubie s horúcou kvapalinou. Jedna strana je pripojená na potrubie a druhá k stene. Vypočítajte rozloženie teploty pozdĺž tyče v rôznych časoch.

Teplota *T* sa šíri podľa rovnice vedenia tepla (v 1D v smere osi *x*):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = b\frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

kde b = 0.0001 m^2s^{-1} je difúzny koeficient. Teplota tyče na začiatku je daná rovnicou:

$$T(t=0,x) = 20cos(2\pi x/5)$$

Potom v potrubí začne prúdiť horúca kvapalina a teplota v tyči začne stúpať. Predpokladáme, že teplota horúceho konca tyče v x = 0 stúpa s časom t podľa rovnice:

$$T(t,x=0) = 30tanh(0{,}005t) + 20$$

Teplota na konci tyče v x = L (pri stene) ostáva stále rovnaká T_s = 20°C. Na numerické riešenie použite explicitnú FTCS metódu pre hodnoty α = 0,2; 0,5 a 1. Pre jednotlivé prípady okomentujte stabilitu numerického riešenia. Vykreslite rozdelenie teploty pozdĺž tyče pre 5 reprezentatívnych hodnôt času t ∈ [0, 2000].

Riešenie:

Daná difúzna diferenciálna rovnica patrí do skupiny jednorozmerných parabolických diferenciálnych rovníc, ktoré je možné riešiť numerickou FTCS (forward time centered space) metódou. Metóda využíva doprednú časovú a centrálnu priestorovú diferenciu pre aproximáciu prislušných derivácií, pričom dostávame diferenčnú rovnicu

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t) = b\frac{f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2),$$

kde po úprave máme rekurentný vzťah využívaný na výpočet:

$$f_i^{n+1} = \alpha f_{i-1}^n + (1-2\alpha)f_i^n + \alpha f_{i+1}^n\,,$$

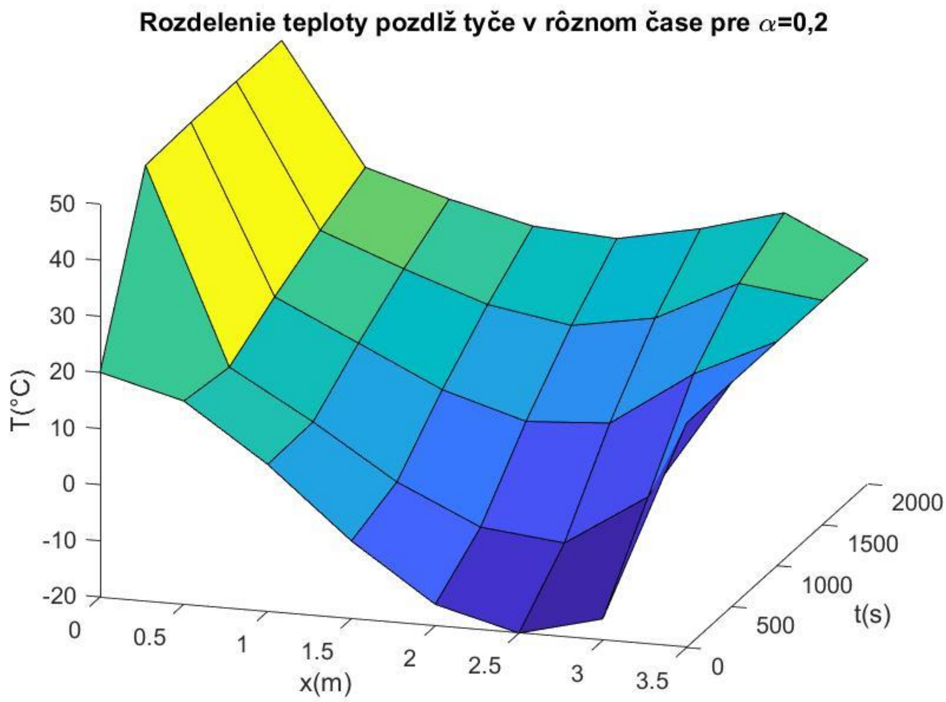
kde $\alpha = b\Delta t/(\Delta x)^2$ je difúzne číslo.

Ak rozvinieme rekurentný vzťah podľa Taylorovho rádu a následne limitne pošleme t a x do nuly dostaneme pôvodnú difúznu rovnicu, čo nám svedči o jej konzistentnosti. Riešenie je možné napísať ako sústavu rovníc:

$$f^{n+1} = \boldsymbol{B}f^{n} + \boldsymbol{b},$$

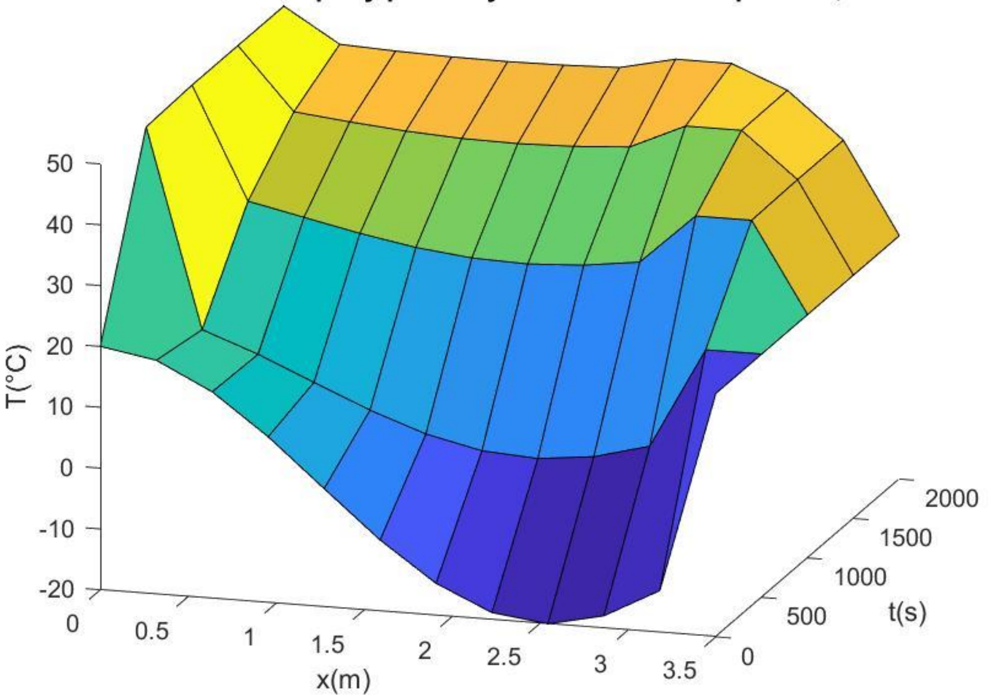
kde B je projekčná matica a b vektor vyjadrujúci počiatočné podmienky. Metóda je numericky stabilná, ak spektrálny polomer projekčnej matice ρ(B)<1. To platí pre hodnoty α<1/2.

Výsledky:

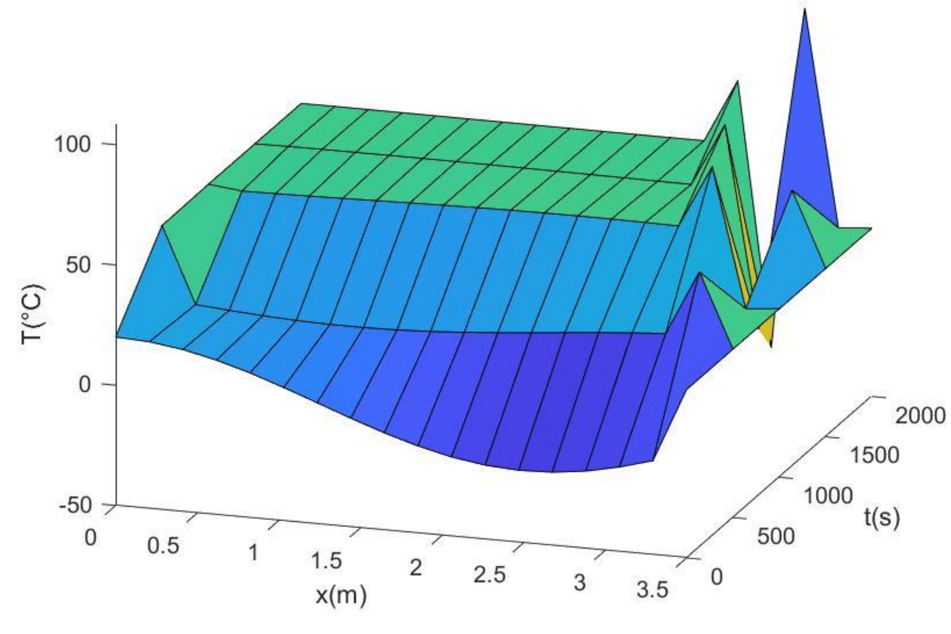


Na grafoch vidíme rozdelenie teploty pozdĺž celej tyče v rôznych časoch pre rôzne α. Riešenie bolo potrebné zobraziť v 5 rôznych časoch v intervale (0,2000), preto sme volili Δt=500s. Podľa toho sme vyrátali dané Δx zo vzťahu $\alpha = b\Delta t/(\Delta x)^2$. Okrajové podmienky boli určené dopredu zo zadania a ostatné hodnoty vyrátané z rekurentného vzťahu. Z grafov vidíme, že riešenie sa prudko mení so zmenou hodnoty α. Pre α=0,2 je Δx=0,5m a so zväčšujúcim sa α sa zmenšuje aj hodnota diferencie dlžky, pre α=0,5 je Δx=0,32m a pre α=1 je Δx=0,22m. Okrem hodnoty diferencie dĺžky vidíme so zmenou α aj rôzne výsledné teploty v daných dĺžkach.

Rozdelenie teploty pozdlž tyče v rôznom čase pre α=0,5



Rozdelenie teploty pozdlž tyče v rôznom čase pre α=1



Záver:

Daná úloha dobre prezentuje ako veľmi je dôležité vybrať vhodnú hodnotu α pri FTCS metóde. Pri hodnote α=1 vidíme úplne nefyzikálne výsledky, čo je spôsobené porušením podmienky stability numerickej metódy $\alpha<1/2$. Pri nižších hodnotách α majú výsledky už väčší fyzikálky zmysel. Na grafoch je pekne vidno ako sa šíri teplo z jedného okraja a druhého okraja a s časom stupa teplota v každom bode tyče.