Natália Potomová

Zadanie:

Nájdite riešenie diferenciálnej rovnice (počiatočnej úlohy)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^3},$$

kde *y*(1) = 1 je hodnota *y* v bode *x* = 1.

Rovnicu riešte:

a) Eulerovou metódou
b) Heunovou metódou:

s krokom *dx* = 0.1 a *dx* = 0.01 pre interval [*a, b*] = [1, 10] a výsledné riešenia porovnajte s výsledkom obdŕžaným pomocou zabudovanej funkcie *lsode* v prostredí Octave. Nakoniec numerické výsledky porovnajte s presným riešením

$$y = (2x^2 - 1)^{\frac{1}{4}}$$

a výsledky zobrazte do spoločných grafov v tvare rozdielu medzi presným riešením a približnými (numerickými) riešeniami.

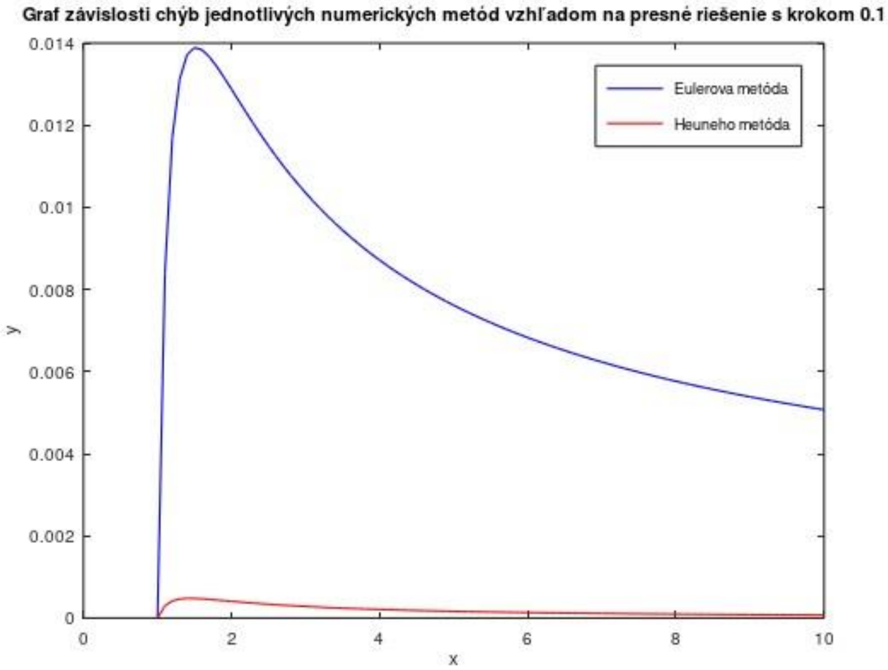
Riešenie:

Definovali sme sieťové uzly x_i na intervale [*a, b*] = [1, 10] s konštantným krokom najprv *dx*=0.1 a *dx*=0.01.

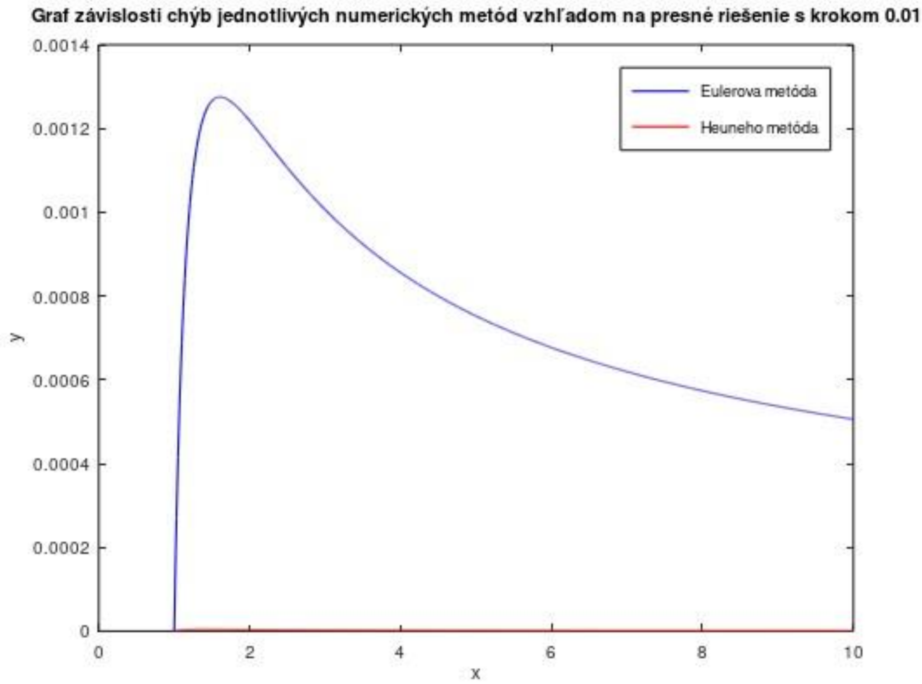
1. Eulerova metóda
   Hodnota y_{i+1} sa počíta extrapoláciou z hodnoty y_i v predchádzajúcom uzle a na intervale $[x_i, x_{i+1}]$ sa riešenie aproximuje priamkou, ktorá prechádza bodom (x_i, y_i) a má smernicu $y_i' = f(x_i, y_i)$. Z toho dostávame rekurentný vzťah
   $$y_{i+1} = y_i + dx * f(x_i, y_i)$$
2. Heunova metóda
   Heunova metóda je špecialny typ metód Runge-Kutta, ktoré sú všeobecne dané rekurentným vzťahom
   $$y_{i+1} = y_i + dx \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \, k_j,$$
   kde $k_1 = f(x_i, y_i)$ a $k_j = f(x_i + \lambda_j dx, y_i + \mu_j dx k_{j-1})$ pre $j>1$. V Heuneho metóde sú parametre zvolené ako $r=2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$, $\lambda_2 = \mu_2 = 1$ z čoho dostávame rekurentný vzťah
   $$y_{i+1} = y_i + dx \frac{k_1 + k_2}{2},$$
   $$k_2 = f(x_{i+1}, y_i + dxk_1), k_1 = f(x_i, y_i)$$

Výsledky:

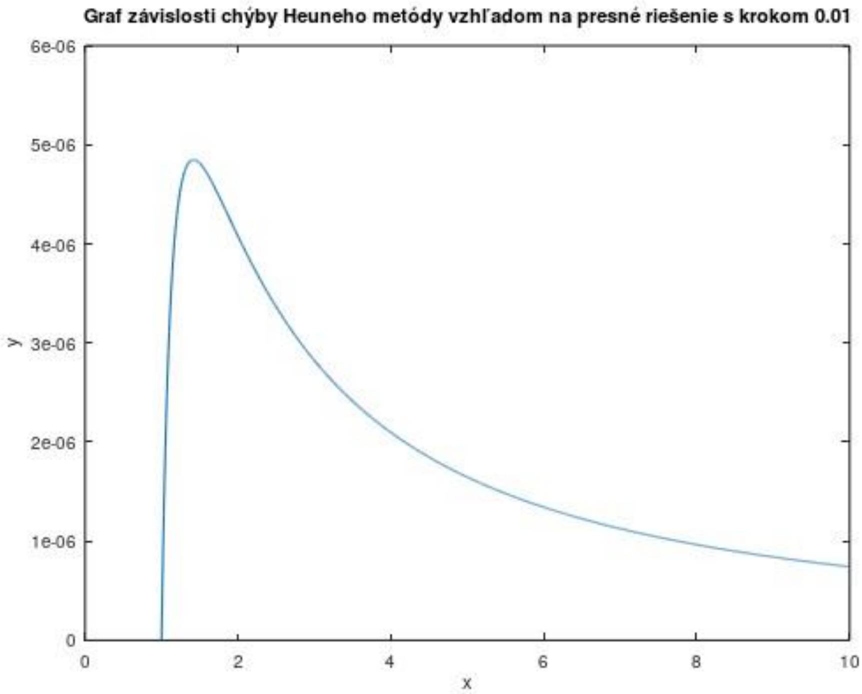
Graf 1



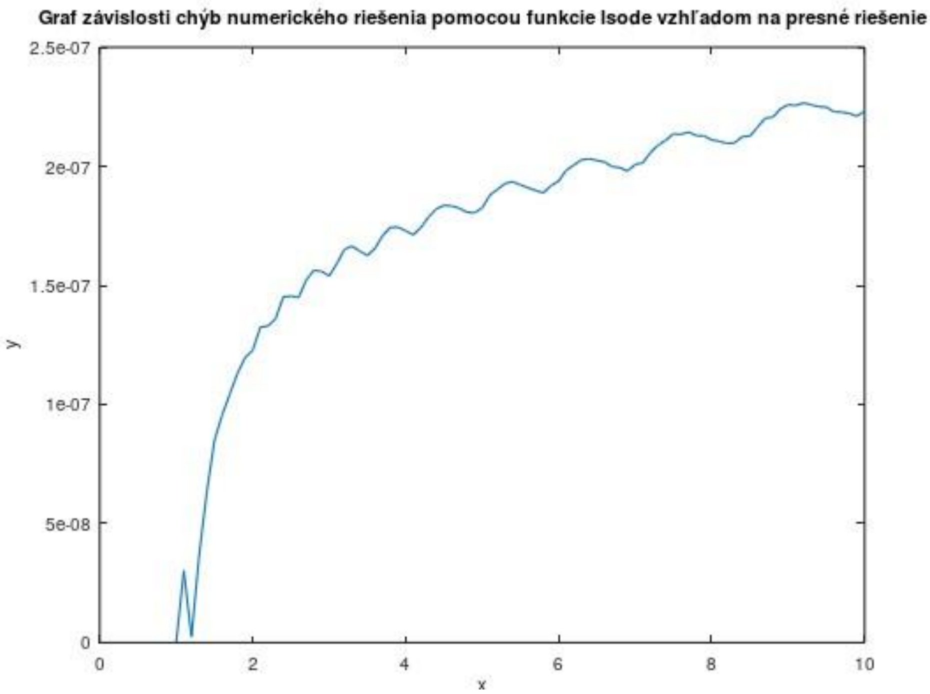
Graf 2



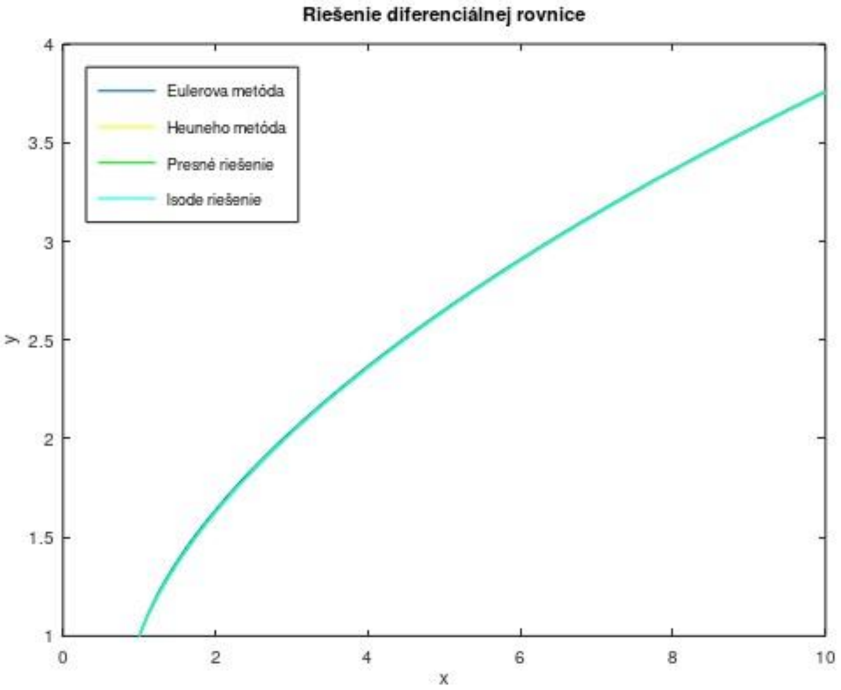
Graf 3


Graf závislosti chýby Heuneho metódy vzhľadom na presné riešenie s krokom 0.01
6e-06
5e-06
4e-06
3e-06
2e-06
1e-06
0
y
0
2
4
6
8
10
x

Graf 4


Graf závislosti chýb numerického riešenia pomocou funkcie lsode vzhľadom na presné riešenie
2.5e-07
2e-07
1.5e-07
1e-07
5e-08
0
y
0
2
4
6
8
10
x

Graf 5



Záver:

Presné riešenie diferenciálnej rovnice a riešenia rôznymi metódami vidíme vykreslené na grafe 5. V tomto priblížení nevidíme žiadny rozdiel medzi riešeniami. Na grafe 1 vidíme odchýlky od presného riešenia pri Eulerovej a Heunovej metóde s krokom 0.1. Vidíme, že pre Eulerovu metódu sú chyby rádovo 10^{-3}, pri Heunovej ešte o rád menej. Pri kroku 0.01 (Graf 2 a 3) je chyba pri Eulerovej rádovo 10^{-4}, pri Heunovej až 10^{-6}. Rozdiely medzi presným riešením a numerickým pomocou zabudovanej funkcie lsode sú až pri hodnotách 10^{-7}.