微分方程数值解实验报告——直接差分化

22 级计算 2 班 09210629 魏文杰
wei09210629@163.com

2025 年 3 月 19 日

考虑离散近似具有如下边界条件的微分方程

$$\begin{cases} -p\dfrac{d^2u}{dx^2}+r\dfrac{du}{dx}+qu=f(x), \quad x\in(a,b), & (1)\\ u(a)=\alpha, & (2)\\ u'(b)-\beta_0u(b)=\beta_1. & (3)\end{cases}$$

1. 边界条件 (2) 对应 $i=1$, 可在 x_1 处强制建立方程

$$u(x_1)=\alpha \ \ (\Rightarrow A(1,1)=1, b(1)=\alpha) \tag{4}$$

或

$$\frac{u(x_1)}{h^2}=\frac{\alpha}{h^2} \ \ (\Rightarrow A(1,1)=\frac{1}{h^2}, b(1)=\frac{\alpha}{h^2}). \tag{5}$$

2. 边界条件 (3) 对应 $i=N+1$, 可由待定系数法

$$-\frac{2p}{h^2}u_N+\Big[\Big(-\frac{2p}{h}+r\Big)\beta_0+q+\frac{2p}{h^2}\Big]u_{N+1}=f_{N+1}-\Big(-\frac{2p}{h}+r\Big)\beta_1 \tag{6}$$

或相邻节点差分

$$\beta_1=\frac{u(x_{N+1})-u(x_N)}{h}-\beta_0u(x_{N+1}). \tag{7}$$

近似.

3. 内点对应 $i=2,\cdots,N$, 可由

$$f_i=-p\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}+r\frac{u_i-u_{i-1}}{h}+qu_i, \tag{8}$$

$$f_i=-p\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}+r\frac{u_{i+1}-u_i}{h}+qu_i, \tag{9}$$

$$f_i=-p\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}+r\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}+qu_i \tag{10}$$

三种格式近似.

现考虑具有如下边值条件的微分方程

$$\begin{cases} u''(x)-xu(x)=-(2\pi^2+2x)\cos(\pi x)-x(x+1), \quad x\in(0,1), & (11)\\ u(0)=3, & (12)\\ u'(1)-2u(1)=1. & (13)\end{cases}$$

1 Question 1

对于边界条件 (13), 利用待定系数法 (6) 给出对应的离散矩阵 (行).

解: 直接对应可得 $p=1, r=0, q=x, f=(2\pi^2+2x)\cos(\pi x)+x(x+1), \beta_0=2, \beta_1=1$. 从而对应离散矩阵 (行) 为

$$\begin{aligned}
A(N+1,N) &= -\frac{2}{h^2}, \\
A(N+1,N+1) &= x_{N+1}+\frac{2}{h^2}-\frac{4}{h}, \\
b(N+1) &= (2\pi^2+2x_{N+1})\cos(\pi x_{N+1})+x_{N+1}(x_{N+1}+1)+\frac{2}{h}.
\end{aligned}$$

2 Question 2

请给出问题 (11)-(13) 的内点分别采用格式 (8) 和格式 (9) 近似时所对应的离散矩阵 (行).

解: 对于格式 (8) 有

$$\begin{aligned}
A(i,i-1) &= -\frac{p}{h^2}-\frac{r}{h} = -\frac{1}{h^2}, \\
A(i,i) &= \frac{2p}{h^2}+\frac{r}{h}+q = \frac{2}{h^2}+x_i, \\
A(i,i+1) &= -\frac{p}{h^2} = -\frac{1}{h^2}.
\end{aligned}$$

对于格式 (9), 有

$$\begin{aligned}
A(i,i-1) &= -\frac{p}{h^2} = -\frac{1}{h^2}, \\
A(i,i) &= \frac{2p}{h^2}-\frac{r}{h}+q = \frac{2}{h^2}+x_i, \\
A(i,i+1) &= -\frac{p}{h^2}+\frac{r}{h} = -\frac{1}{h^2}.
\end{aligned}$$

3 Question 3

对于问题 (11)-(13), 在均匀网格下, 分别取 $h=0.2, 0.1, 0.05, 0.02, 0.01$, 并采用如下方法:

i) 内点利用格式 (10), Dirichlet 条件 (12) 采用 (5), Robin 条件 (13) 采用待定系数法 (6);

ii) 内点利用格式 (10), Dirichlet 条件 (12) 采用 (5), Robin 条件 (13) 采用相邻节点差分 (7);

计算数值解与真解 $u_*(x)=2\cos(\pi x)+x+1$ 在网格节点上的 $||u_h||_0$ 误差, 并通过 `loglog` 函数画出误差关于网格步长 h 的收敛阶.

解: 代码如下.

Listing 1: **Question3.m**

```
format long;
h_values = [0.2; 0.1; 0.05; 0.02; 0.01];
results(length(h_values)) = struct('h', [], 'x', [], 'u1', [], 'u2', [], 'u_true', []);
for k = 1:length(h_values)
```

```
    h = h_values(k);
    x = 0:h:1;
    N = length(x) - 1;
    A = zeros(N+2, N+1);
    A(1, 1) = 1/h^2;
    for i = 2:N
       A(i, i-1) = -1/h^2;
       A(i, i) = 2/h^2 + x(i);
       A(i, i+1) = -1/h^2;
    end
    A(N+1, N) = -2/h^2;
    A(N+1, N+1) = x(N+1) + 2/h^2 - 4/h;
    A(N+2, N) = -1/h;
    A(N+2, N+1) = 1/h-2;
    b = zeros(N+2, 1);
    b(1) = 3/h^2;
    for i = 2:N
       b(i) = (2*pi^2 + 2*x(i))*cos(pi*x(i)) + x(i)*(x(i)+1);
    end
    b(N+1) = (2*pi^2 + 2*x(N+1))*cos(pi*x(N+1)) + x(N+1)*(x(N+1)+1) + 2/h;
    b(N+2) = 1;
    u1 = A(1:N+1, :) \ b(1:N+1);
    u2 = A([1:N, N+2], :) \ b([1:N, N+2]);
    results(k).x = x;
    results(k).u1 = u1;
    results(k).u2 = u2;
    results(k).u_true = (2*cos(pi.*x)+x+1)';
end
error_u1 = zeros(length(h_values), 1);
error_u2 = zeros(length(h_values), 1);
for k = 1:length(h_values)
    h = h_values(k);
    x = results(k).x;
    N = length(x) - 1;
    error_u1(k) = sqrt(sum(h*((results(k).u1(2:N) - results(k).u_true(2:N)).^2)));
    error_u2(k) = sqrt(sum(h*((results(k).u2(2:N) - results(k).u_true(2:N)).^2)));
end
Alpha1 = (log(error_u1(2:end)) - log(error_u1(1:end-1))) ./ (log(
```

```
    h_values(2:end)) - log(h_values(1:end-1)));
Alpha2 = (log(error_u2(2:end)) - log(error_u2(1:end-1))) ./ (log(
    h_values(2:end)) - log(h_values(1:end-1)));
figure;
loglog(h_values(1:end-1), Alpha1, '-o', 'DisplayName', '方式1');
hold on;
loglog(h_values(1:end-1), Alpha2, '-x', 'DisplayName', '方式2');
xlabel('h');
ylabel('误差收敛阶');
title('误差关于网格步长的收敛阶变化图像');
grid on;
legend('show');
hold off;
```

运行上述 MATLAB 程序, 可以得到误差关于网格步长的收敛阶变化图像:

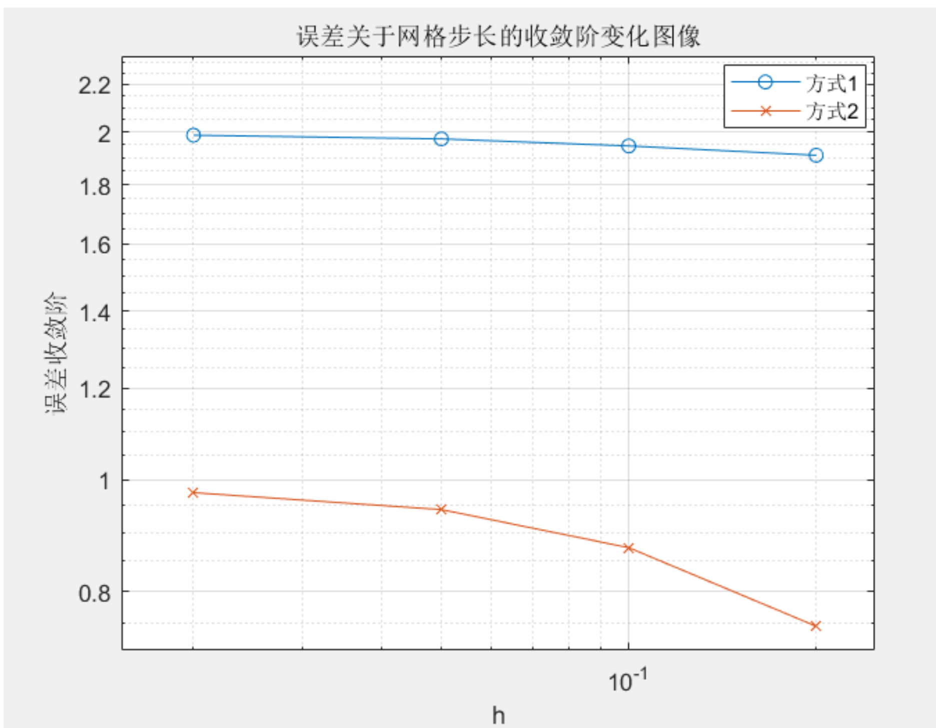

Figure 1: 两种近似方式下误差关于网格步长的收敛阶变化图像

从图像中可以看出, 近似方式 i) 约有 2 阶精度, 近似方式 ii) 约有 1 阶精度. 这与 Robin 条件采用待定系数法 (6) 时具有 2 阶精度, 而采用相邻节点差分 (7) 时具有 1 阶精度的理论相符.

4 Question 4

通过 `cond(A)` 函数计算下述方法得到离散矩阵的条件数, 其中

i) 内点利用格式 (10), Dirichlet 条件 (12) 采用 (4), Robin 条件 (13) 采用待定系数法 (6);

ii) 内点利用格式 (10), Dirichlet 条件 (12) 采用 (5), Robin 条件 (13) 采用待定系数法 (6); 并通过 loglog 函数画出条件数关于网格步长 h 的增长速率.

解: 代码如下.

Listing 2: **Question4.m**

```
clear;clc;
format long;
h_values = [0.2; 0.1; 0.05; 0.02; 0.01];
condA = zeros(length(h_values),2);
for k = 1:length(h_values)
    h = h_values(k);
    x = 0:h:1;
    N = length(x) - 1;
    A = zeros(N+2, N+1);
    A(1, 1) = 1;
    A(2, 1) = 1/h^2;
    for i = 2:N
       A(i+1, i-1) = -1/h^2;
       A(i+1, i) = 2/h^2 + x(i);
       A(i+1, i+1) = -1/h^2;
    end
    A(N+2, N) = -2/h^2;
    A(N+2, N+1) = x(N+1) + 2/h^2 - 4/h;
    condA(k,1) = cond(A([1, 3:end], :));
    condA(k,2) = cond(A(2:end, :));
end
v1 = -(log(condA(2:end,1)) - log(condA(1:end-1,1))) ./ (log(h_values
    (2:end)) - log(h_values(1:end-1)));
v2 = -(log(condA(2:end,2)) - log(condA(1:end-1,2))) ./ (log(h_values
    (2:end)) - log(h_values(1:end-1)));
figure;
loglog(h_values, condA(:,1), '-o', 'DisplayName', '方式1');
hold on;
loglog(h_values, condA(:,2), '-x', 'DisplayName', '方式2');
xlabel('h');
ylabel('离散矩阵A的条件数');
title('条件数关于网格步长的变化图像');
grid on;
legend('show');
figure;
loglog(h_values(1:end-1), v1, '-o', 'DisplayName', '方式1');
```

```
hold on;
loglog(h_values(1:end-1), v2, '-x', 'DisplayName', '方式2');
xlabel('h');
ylabel('离散矩阵A的条件数增长速率');
title('条件数关于网格步长的增长速率变化图像');
grid on;
legend('show');
hold off;
```

运行上述 MATLAB 程序, 可以得到条件数关于网格步长的变化图像及增长速率变化图像:

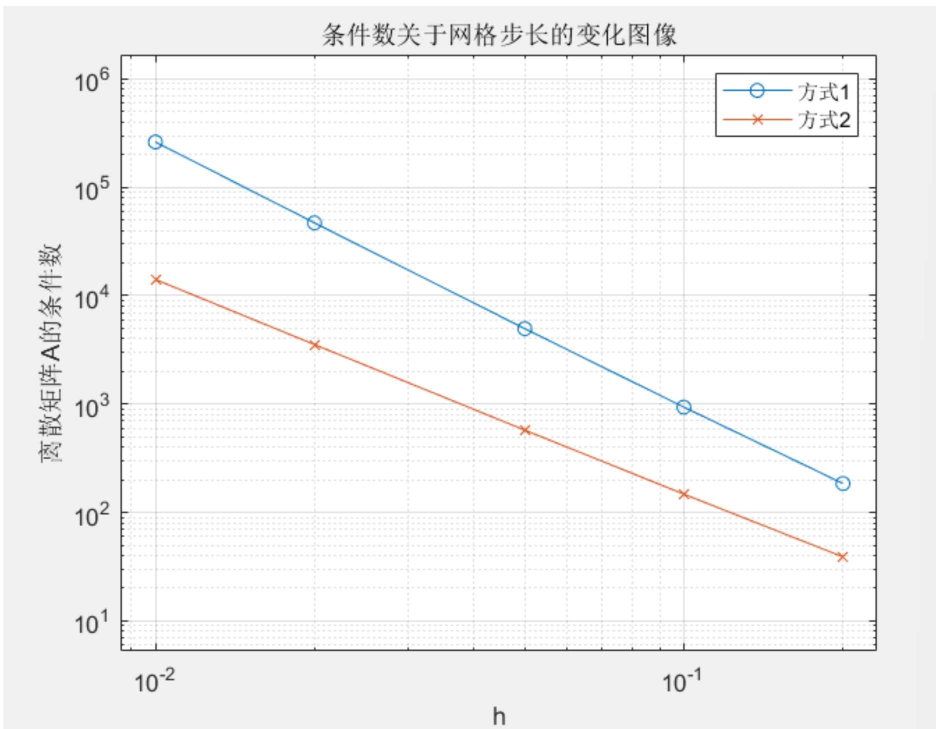

Figure 2: 两种近似方式下条件数关于网格步长的变化图像

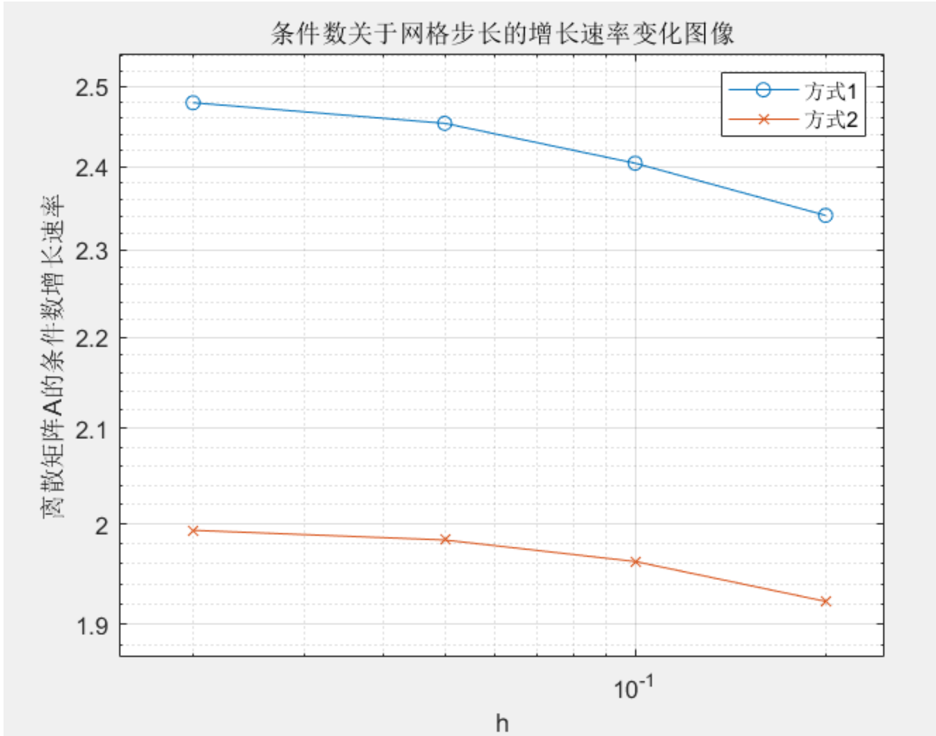

Figure 3: 两种近似方式下条件数关于网格步长的增长速率变化图像

从结果图像中可以看出, 采用近似方式 i) 后得到的离散矩阵条件数及其增长速率要远高于用近似方式 ii) 得到的离散矩阵条件数及其增长速率. 观察两种不同的近似方式得到的离散矩阵 A, 近似方式 ii) 得到的离散矩阵中几乎所有元素都与 h^2 相除, 这在一定程度上确保了整个矩阵元素的数量级的一致. 由于矩阵条件数的定义是该矩阵最大与最小特征值的比, 近似方式 i) 的第一行第一个元素是 1, 与矩阵中其余元素 (几乎都与 h^2 相除) 的数量级差别较大, 自然会导致矩阵最大与最小特征值差别较大, 所以当步长 h 变小时, 近似方式 i) 得到的离散矩阵条件数必然相较于方式 ii) 得到的离散矩阵条件数增加更加迅速.