Relazione di Tirocinio

Leonardo Cruciani

July 5, 2019

1 Introduzione teorica

2 Interpolazione trilineare

Per il caso di interpolazione lineare si vede facilmente che un punto $(x, f(x))$ che giace sulla retta passante per $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$ soddisfa la relazione:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Da cui si ottiene:

$$f(x) = \frac{1}{x_1 - x_0} \left((x - x_0) f(x_1) + (x_1 - x) f(x_0) \right)$$

La generalizzazione al caso bi- e tri- lineare consiste nella reiterazione del procedimento per ciascuna variabile. Introducendo l'interpolante lineare lungo $\hat{x}$:

$$g(x, y_i) = \frac{1}{x_1 - x_0} \left((x - x_0) f(x_1, y_i) + (x_1 - x) f(x_0, y_i) \right)$$

Si ottiene (per semplicità di notazione $f_{ij} = f(x_i, y_j)$ dove $i, j = 0, 1$):

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= \frac{1}{y_1 - y_0} \left((y - y_0) g(x, y_1) + (y_1 - y) g(x, y_0) \right) = \\
&= \frac{1}{(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)} \big[(y - y_0)(x - x_0) f_{11} + (y - y_0)(x_1 - x) f_{01} + \\
&+ (y_1 - y)(x - x_0) f_{10} + (y_1 - y)(x_1 - x) f_{00} \big] = \\
&= \frac{1}{\Delta\sigma} \begin{bmatrix} x - x_0 & x - x_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{00} & f_{01} \\ f_{10} & f_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y - y_0 \\ y_1 - y \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta\sigma} \bar{x}^{\intercal} \cdot \bar{\bar{F}} \cdot \bar{y}
\end{aligned}$$

Con una conveniente notazione vettoriale.
Si procede come prima con:

$$h(z_i) = \frac{1}{(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)} \bar{x}^{\intercal} \cdot \bar{\bar{F}}(z_i) \cdot \bar{y}$$

In tal modo:

$$\begin{aligned}
f(x, y, z) &= \frac{1}{z_1 - z_0} \left((z - z_0) h(x, y, z_1) + (z_1 - z) g(x, y, z_0) \right) = \\
&= \frac{1}{(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)(z_1 - z_0)} \left[(z - z_0)\, \bar{x}^{\intercal} \cdot \bar{\bar{F}}(z_1) \cdot \bar{y} + (z - z_0)\, \bar{x}^{\intercal} \cdot \bar{\bar{F}}(z_0) \cdot \bar{y} \right] = \\
&= \frac{1}{\Delta\tau} \bar{x}^{\intercal} \cdot \left[(z - z_0) \bar{\bar{F}}(z_1) + (z - z_0) \bar{\bar{F}}(z_1) \right] \cdot \bar{y} = \frac{1}{\Delta\tau} \bar{x}^{\intercal} \cdot \left[\bar{z} \otimes \bar{\bar{F}} \right] \cdot \bar{y}
\end{aligned}$$

Notazione scalare: svolgendo i prodotti si ottiene la seguente interpolazione di f, che verrà manipolata al fine di facilitarne l'implementazione in un codice :

$$f(x,y,z) = \sum_{i,j,k}^{0,1} \tilde{x}_i\, \tilde{y}_j\, \tilde{z}_k\, f(x_i,y_j,z_k) \qquad \begin{cases} \tilde{x}_0 = x_1 - x \\ \tilde{x}_1 = x - x_0 \end{cases}$$

Il vettore a due componenti $\tilde{x}$ può essere rappresentato più concisamente con:

$$\tilde{x}[i] = (-)^{i-1}\left(x - x_{|i-1|}\right)$$

Si può quindi applicare la seguente notazione anche alle componenti y e z ed introdurre tre liste $x_0[l]$, $y_0[m]$ e $z_0[n]$ contenenti gli estremi degli intervalli in cui sono stati divisi gli assi.
Per identificare ciascuno dei parallelepipedi che compongono il dominio 3D di f saranno neccessari tutti e tre gli indici l,m,n.
L'implementazione è quindi immediata, una volta stabilito che parallelepipedo $P(l,m,n)$ appartiene il punto (x,y,z) nel quale si vuole stimare il valore di f, il programma procede a calcolare:

$$R = \sum_{i,j,k}^{0,1} \big(-\big)^{i+j+k+1}\big(x - x_0[l+|1-i|]\big)\big(y - y_0[m+|1-j|]\big)\big(z - z_0[n+|1-k|]\big)\,T$$

Dove i valori tabulabili T sono:

$$T = f\big(x_0[l+i], y_0[m+j], z_0[n+k]\big)$$