Procedura di deduzione della tipologia di una ceramica piezo

Per ricavare la ceramica servono almeno i seguenti dati:

$\rho$ ✓

$C_{33}$ ✓

$h_{33}$ ✓

$\beta_{33}$ ✓

Per ottenere $\rho$ procedo come segue:

$$\boxed{\rho = \frac{m}{V}}$$

$m = 5.0315\,g = 5.03 \cdot 10^{-3}\,Kg \longleftarrow$ Misurato

Considerando la ceramica come un disco ovvero un cilindro con altezza molto piccola rispetto al raggio allora:

$$V = \pi r^2 h = \pi (0.01m)^2 0.002013m = 6.3240 \cdot 10^{-7}\,m^3$$

$h$ ↑ misurate

$$\rho = \frac{5.0315 \cdot 10^{-3}kg}{6.3240 \cdot 10^{-7}m^3} = 7.9562 \cdot 10^3\,Kg/m^3$$

Per ottenere $C_{33}$ procedo come segue:

$$\begin{cases} f_{mec} = \dfrac{v}{2l} \\ v = \sqrt{\dfrac{C_{33}}{\rho}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = f_{mec}\, 2l \\ C_{33} = v^2 \rho \end{cases} \Rightarrow C_{33} = (2 f_{mec} l)^2 \rho = 4 f_{mec}^2 l^2 \rho \Rightarrow \boxed{C_{33} = 4 \underbrace{f_{mec}^2}_{= f_{max}} l^2 \rho}$$

Dalla precedente formula conosco tutti i parametri necessari:

$$C_{33} = 4 f_{max}^2 l^2 \rho = 4(1.0975 \cdot 10^6 Hz)^2 (0.002013m)^2 \cdot 7.9562 \cdot 10^3\,Kg/m^3 \Rightarrow$$

$l$ ↑ misurato

$$C_{33} = 1.5533 \cdot 10^{11}\,N/m^2$$

Per ottenere $\beta_{33}$ procedo come segue:

$$C_0 = \frac{A}{\beta_{33} l} \Rightarrow \frac{1}{C_0} = \frac{\beta_{33} l}{A} \Rightarrow \boxed{\beta_{33} = \frac{A}{C_0 l}}$$

Quando siamo a bassa frequenza ovvero dove la ceramica si comporta come un condensatore ...

$$f \ll f_r \Rightarrow f \to 0 \Rightarrow \omega \to 0 \Rightarrow \theta \to 0 \Rightarrow$$

$$Z_i(\omega) = \frac{1}{j\omega C_0}\left[1 - \frac{h_{33}^2}{C_{33}\beta_{33}} \frac{2}{\theta} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \Rightarrow |Z_i(\omega)| = \frac{1}{\omega C_0}\left[1 - \frac{h_{33}^2}{C_{33}\beta_{33}} \frac{2}{\theta} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$\to 1$ (lim. noto)

$$\lim_{\theta \to 0} |Z(\theta)| = \frac{1}{\omega C_0}\left[1 - \frac{h_{33}^2}{C_{33}\beta_{33}}\right] \lim_{\theta \to 0} \frac{\tan(\theta/2)}{\theta/2} \Rightarrow |Z_i| \cong \frac{1}{\omega C_0}\left[1 - \frac{h_{33}^2}{C_{33}\beta_{33}}\right] \Rightarrow$$

Combinando rel. di costanti:

$$\frac{h_{33}^2}{C_{33}\beta_{33}} = \frac{(\beta_{33}e_{33})^2}{C_{33}\beta_{33}} = \frac{\beta_{33}^{\cancel{2}}e_{33}^2}{C_{33}\cancel{\beta_{33}}} = \frac{\beta_{33}e_{33}^2}{C_{33}} = \frac{e_{33}^2(1/\varepsilon_{33})}{C_{33}} = \frac{e_{33}^2}{\varepsilon_{33}C_{33}}$$

Ricordando la def. del fattore di accoppiamento del materiale:

$$k_{33}^t = k_{mat} = \frac{e_{33}}{\sqrt{\varepsilon_{33}C_{33}}} \Rightarrow k_{mat}^2 = \frac{e_{33}^2}{\varepsilon_{33}C_{33}}$$

Quindi:

$$\frac{h_{33}^2}{C_{33}\beta_{33}} = k_{mat}^2$$

Ricordando la relaz. che sussiste tra $k_{mat}$ e $k_{eff}$ ai piccoli segnali:

$$k_{mat}^2 = \frac{\pi^2}{8}k_{eff}^2$$

Allora:

$$\frac{h_{33}^2}{C_{33}\beta_{33}} = \frac{\pi^2}{8}k_{eff}^2$$

Infine:

$$|Z_i| \cong \frac{1}{\omega C_0}\left[1 - \frac{\pi^2}{8}k_{eff}^2\right] \Rightarrow C_0 = \frac{1}{\omega|Z_i|}\left[1 - \frac{\pi^2}{8}k_{eff}^2\right]$$

Considerando che $k_{eff}$ è calcolabile come segue:

$$k_{eff}^2 = \frac{f_{max}^2 - f_{min}^2}{f_{max}^2} \Rightarrow k_{eff}^2 = \frac{(1.0975\cdot10^6)^2 - (993875)^2}{(1.0975\cdot10^6)^2} = 0.1799$$

Nella relazione precedente tutti i termini sono noti:

$$C_0 = \frac{1}{2\pi(56.63\cdot10^3)\cdot1.02\cdot10^3}\left[1 - \frac{\pi^2}{8}(0.1799)\right] = 2.0\cdot10^{-9}\,F$$

Quindi infine:

$$\beta_{33} = \frac{A}{C_0 l} = \frac{\pi(0.01\,m)^2}{2.0\cdot10^{-9}F\cdot2.013\cdot10^{-3}m} = 78.03\cdot10^6\,Vm/C$$

<u>Per ottenere $h_{33}$ procedo come segue:</u>

Uno dei possibili valori che la $Z_i$ deve poter assumere è zero, poiché in risonanza il contributo piezoelettrico cancella completamente la reattanza capacitiva. Quindi 0 è una possibile soluzione di $|Z_i(\omega)|$:

$$|Z_i(\omega)| = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{j\omega C_0}\left[1 - \frac{h_{33}^2}{C_{33}\beta_{33}}\frac{2}{\theta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] = 0 \Rightarrow$$

$$1 - \frac{h_{33}^2}{C_{33}\beta_{33}}\frac{\tan(\theta/2)}{\theta/2} = 0 \Rightarrow \frac{h_{33}^2}{C_{33}\beta_{33}} = +\frac{\theta/2}{\tan(\theta/2)} \Rightarrow \boxed{h_{33} = \sqrt{\frac{C_{33}\beta_{33}\,\theta/2}{\tan(\theta/2)}}}$$

Quindi noto che:

$$\theta = \frac{\omega l}{v} = \frac{2\pi f X}{2X f_{mech}} = \pi \frac{f}{f_{mech}} \Rightarrow \theta_s = \frac{f_s}{f_{mech}}\pi$$

$f_s$ di risonanza elettrica serie

$f_{mech}$ di risonanza meccanica

$\Rightarrow$

$$f_a = f_s = f_{min} < f_r = f_p = f_{max} = f_{mech}$$

$$\theta_s = \frac{f_{min}}{f_{max}}\pi = \frac{993875\ Hz}{1.0975\cdot 10^6\ Hz}\pi\ rad = 2.845\ rad \cong 2.85\ rad$$

Allora ottengo:

$$h_{33} = \sqrt{\frac{1.55\cdot 10^{11}\ N/m^2 \cdot 78.03\cdot 10^6\ Vm/C \cdot (2.85\ rad/2)}{\tan(2.85\ rad/2)}} = 1.59\cdot 10^9\ V/m$$

Per ottenere $e_{33}$ procedo come segue:

Come specificato nelle relazioni tra le costanti:

$$h_{33} = \beta_{33} e_{33} \Rightarrow \boxed{e_{33} = \frac{h_{33}}{\beta_{33}}} \Rightarrow$$

$$e_{33} = \frac{1.59\cdot 10^9\ V/m}{78.03\cdot 10^6\ Vm/C} = 20.37\ C/m^2$$

Quindi sono confrontare i valori ora ottenuti per i parametri caratteristici della piezoceramica con quelli della piezo presenti nel file Excelle "FerroPerm MatData".