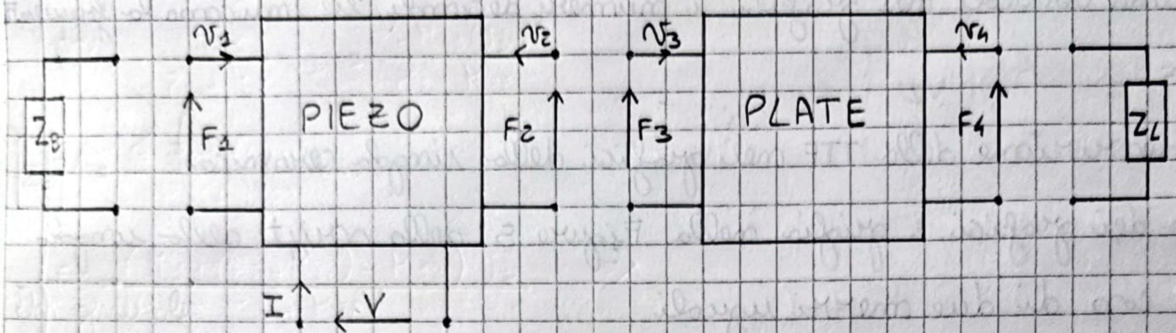
Modellazione teorica di un trasduttore elettromeccanico a larga banda

Schematizzazione del problema con l'ausilio di reti due porte:

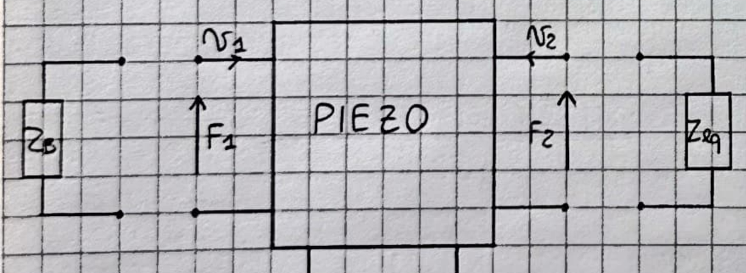


In generale per una porta p di un sistema, l'impedenza di ingresso (in inglese driving-point impedance) è il rapporto tra la variabile "sforzo" e la variabile "flusso" sulla stessa porta.
Nel caso dell'elem. piezo., siccome siamo interessati alla conversione tens. elett. → def. mecc., osservando dall'unica porta elettrica esso è definito come:

$$Z_{in,e} = \frac{V}{I}$$

Riassumendo è semplicemente l'impedenza vista ai morsetti della porta elettrica (ovvero la generalizzazione della resistenza per il regime di corrente alternata CA) con tutte le sorgenti indipendenti interne disattivate.
In altre parole la Z_{in} è esattamente l'impedenza equivalente di Thévenin Z_{th} della rete osservata ai morsetti della porta elettrica del piezo ($Z_{in} = Z_{th}$).

Tutto questo per dire che dal punto di vista del calcolo di Z_{in} del piezo, nel caso in cui aggiungo tra l'interfaccia (porta) destra del piezo e il carico un layer aggiuntivo (matching plate), è possibile sostituire il carico acustico Z_2 con l'impedenza equivalente Z_{eq} vista alla porta meccanica 2 del piezo, che riassume plate + carico Z_2.
Il discorso precedente porta alla seguente semplificazione della rete:



Procedo quindi a calcolare Z_{eq}. Per farlo mi concentro sul sistema rappresentato dal plate + carico. Quest'ultimo è un sistema puramente meccanico quindi le eq. che lo descrivono sono ricavabili da quelle che descrivono la ceramica pzt cancellando il fattore di accoppiamento elettro-meccanico h_{33}:

$$\begin{bmatrix} F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} F_3 = M_{11} v_3 + M_{12} v_4 \\ F_4 = M_{21} v_3 + M_{22} v_4 \end{cases}$$

Termino (ovvero aggiungo) la porta 4 con $Z_L = Z_2$:

$$\begin{cases} F_4 = -Z_2 v_4 \\ F_3 = M_{11} v_3 + M_{12} v_4 \\ F_4 = M_{21} v_3 + M_{22} v_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} // \\ // \\ -Z_2 v_4 = M_{21} v_3 + M_{22} v_4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} // \\ // \\ v_4 = -\dfrac{M_{21}}{Z_2 + M_{22}} v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} // \\ F_3 = M_{11} v_3 + M_{12}\left(-\dfrac{M_{21}}{Z_2 + M_{22}} v_3\right) \\ // \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} // \\ F_3 = \left(M_{11} - \dfrac{M_{21} M_{12}}{Z_2 + M_{22}}\right) v_3 \\ // \end{cases} \underset{\circledast}{\Rightarrow} \frac{F_3}{v_3} = M_{11} - \frac{M_{21} M_{12}}{Z_2 + M_{22}}$$

Per definizione, alla porta 3 plate + carico si comporta come un impedenza meccanica Z_{eq} tale che $Z_{eq} = F_3 / v_3$. Quindi:

$$Z_{eq} = M_{11} - \frac{M_{12} M_{21}}{Z_2 + M_{22}}$$

Dato che il plate è uniforme, lineare e passivo, con le variabili e i segni definiti allo stesso modo alle due porte. Allora il plate (come viene anche evidenziato nelle slide) è simmetrico e quindi:

$M_{11} = M_{22}$
$M_{12} = M_{21}$

Allora Z_{eq} è riscrivibile come:

$$Z_{eq} = M_{11} - \frac{M_{12}^2}{Z_2 + M_{11}}$$

(Notare come questa forma è molto simile a quella di Z_{in} vista per il piezo, ma è necessario tenere a mente che qui compaiono gli elem. della mat. M che è puramente meccanica mentre lì comparivano gli elementi della mat. B che è elettromeccanica. Hanno quindi funzione totalmente differente)

È infine possibile una volta calcolato Z_{eq} utilizzarla a guisa di Z_2 per il calcolo della Z_{in} del sistema alla solita maniera (ovvero utilizzando la mat. B).

$$Z_{in} = B_{22} - \frac{B_{12}^2}{Z_{eq} + B_{11}} \longleftarrow$$

Questa "passata" destra → sinistra non è altro che l'applicazione ricorsiva (in questo caso 1 volta) della form di Z_{in} dei Z-parameters (Consultare pdf "Impedance Parameters") utile per collassare plate + carico a una impedenza one-port equivalente Z_{eq} vista dal piezo. Questo basta per il calcolo della Z_{in} elettrica del piezo, e basta Z per il calcolo della FTT solo del piezo. (senza Z_{eq} non avrei potuto calcolarla)

Se invece voglio calcolare la FTT totale, ovvero la FTT da V a F_4, al contrario è necessario effettuare una "passata" sinistra → destra, quindi:

$$FTT = \frac{F_4}{V} \Rightarrow FTT = \frac{F_2}{V} \cdot \frac{F_4}{F_2} = \frac{F_2}{V} \cdot \frac{F_4}{F_3} = FTT_{pzt} \cdot \frac{F_4}{F_3}$$

Dove FTT_{pzt} lo si calcola come al solito considerando come Z_2 la Z_{eq} mentre F_4/F_3 va calcolato. La quantità F_4/F_3 la si calcola continuando i passaggi effettuati per ottenere Z_{eq} dal punto $\circledast$. In sostanza si procederà alla scrittura non solo di F_3 ma anche di F_4 in funzione di v_3 di modo che facendo il rapporto v_3 scompaia.

$$\begin{cases} F_4 = -Z_2 v_4 \\ F_3 = \left(M_{11} - \dfrac{M_{12}^2}{Z_2 + M_{22}}\right) v_3 = \left(\dfrac{M_{11}(Z_2+M_{22}) - M_{12}^2}{Z_2+M_{22}}\right) v_3 = \dfrac{(M_{11}(Z_2+M_{22}) - M_{12}^2) v_3}{Z_2+M_{22}} \\ v_4 = -\dfrac{M_{21}}{Z_2+M_{22}} v_3 = \dfrac{-M_{21} v_3}{Z_2+M_{22}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_4 = \dfrac{+Z_2 M_{21} v_3}{Z_2 + M_{22}} \\ F_3 = \dfrac{(M_{11}(Z_2+M_{22}) - M_{12}^2) v_3}{Z_2+M_{22}} \\ // \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{F_4}{F_3} = \frac{Z_2 M_{21} \cancel{v_3}}{\cancel{Z_2+M_{22}}} \cdot \frac{\cancel{Z_2+M_{22}}}{(M_{11}(Z_2+M_{22}) - M_{12}^2)\cancel{v_3}} = \frac{Z_2 M_{21}}{(Z_2+M_{22})M_{11} - M_{12}^2}$$

Siccome il plate è simmetrico ho che:

$$\frac{F_4}{F_3} = \frac{Z_2 M_{12}}{(Z_2+M_{11})M_{11} - M_{12}^2} = \frac{M_{12} Z_2}{M_{11} Z_2 + M_{11}^2 - M_{12}^2}$$

Quindi infine:

$$FTT = FTT_{pzt} \cdot \frac{M_{12} Z_2}{M_{11} Z_2 + M_{11}^2 - M_{12}^2} \longleftarrow$$

Se la si vuole scrivere in forma esplicita:

$$FTT = \frac{B_{12} Z_{eq}}{B_{22} Z_{eq} + B_{11} B_{22} - B_{12}^2} \cdot \frac{M_{12} Z_2}{M_{11} Z_2 + M_{11}^2 - M_{12}^2}$$