Procedura di deduzione della tipologia di una ceramica piezo

Per ricavare la ceramica servono almeno i seguenti dati:

ρ ✓

C_{33} ✓

h_{33} ✓

e_{33} ✓

Per ottenere ρ procedo come segue:

$$\boxed{\rho = \frac{m}{V}}$$

$m = 5.0315\,g = 5.03 \cdot 10^{-3}\,Kg$ ← Misurato

Considerando la ceramica come un disco ovvero un cilindro con altezza molto piccola rispetto al raggio allora:

$V = \pi r^2 h = \pi (0.01m)^2 0.002013m = 6.3240 \cdot 10^{-7}\,m^3$

↑ misurate

$$\rho = \frac{5.0315 \cdot 10^{-3}\,Kg}{6.3240 \cdot 10^{-7}\,m^3} = 7.9562 \cdot 10^3\,Kg/m^3$$

Per ottenere C_{33} procedo come segue:

$$\begin{cases} f_{mec} = \frac{v}{2l} \\ v = \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = f_{mec} 2l \\ C_{33} = v^2 \rho \end{cases} \Rightarrow C_{33} = (2 f_{mec} l)^2 \rho = 4 f_{mec}^2 l^2 \rho \Rightarrow \boxed{C_{33} = 4 f_{mec}^2 l^2 \rho}$$

$\hookrightarrow = f_{max}$

Dalla precedente formula conosco tutti i parametri necessari:

$C_{33} = 4 f_{max}^2 l^2 \rho = 4 (1.0975 \cdot 10^6 Hz)^2 (0.002013m)^2 \cdot 7.9562 \cdot 10^3\,Kg/m^3 \Rightarrow$

↑ misurato

$C_{33} = 1.5533 \cdot 10^{11}\,N/m^2$

Per ottenere β_{33} procedo come segue:

$$C_0 = \frac{A}{\beta_{33} l} \Rightarrow \frac{1}{C_0} = \frac{\beta_{33} l}{A} \Rightarrow \boxed{\beta_{33} = \frac{A}{C_0 l}}$$

Quando sono a bassa frequenza ovvero dove la ceramica si comporta come un condensatore le

$f \ll f_r \Rightarrow f \to 0 \Rightarrow \omega \to 0 \Rightarrow \theta \to 0 \Rightarrow$

$$Z_i(\omega) = \frac{1}{j\omega C_0}\left[1 - \frac{h_{33}^2}{C_{33}\beta_{33}} \frac{2}{\theta} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \Rightarrow |Z_i(\omega)| = \frac{1}{\omega C_0}\left[1 - \frac{h_{33}^2}{C_{33}\beta_{33}} \frac{2}{\theta} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$\Rightarrow 1$ (lim. noto)

$$\lim_{\theta \to 0} |Z(\theta)| = \frac{1}{\omega C_0}\left[1 - \frac{h_{33}^2}{C_{33}\beta_{33}}\right] \lim_{\theta \to 0} \frac{\tan(\theta/2)}{\theta/2} \Rightarrow |Z_i| \cong \frac{1}{\omega C_0}\left[1 - \frac{h_{33}^2}{C_{33}\beta_{33}}\right] \Rightarrow$$

Combinando nel di contanti:

$$\frac{h_{33}^2}{C_{33}\beta_{33}} = \frac{(\beta_{33}e_{33})^2}{C_{33}\beta_{33}} = \frac{\beta_{33}^{\cancel{2}} e_{33}^2}{C_{33}\cancel{\beta_{33}}} = \frac{\beta_{33}e_{33}^2}{C_{33}} = \frac{e_{33}^2(1/\varepsilon_{33})}{C_{33}} = \frac{e_{33}^2}{\varepsilon_{33}C_{33}}$$

Ricordando la def. del fattore di accoppiamento del materiale:

$$k_{33}^t = k_{mat} = \frac{e_{33}}{\sqrt{\varepsilon_{33}C_{33}}} \Rightarrow k_{mat}^2 = \frac{e_{33}^2}{\varepsilon_{33}C_{33}}$$

Quindi:

$$\frac{h_{33}^2}{C_{33}\beta_{33}} = k_{mat}^2$$

Ricordando la relaz. che sussiste tra k_{mat} e k_{eff} ai piccoli segnali:

$$k_{mat}^2 \simeq \frac{\pi^2}{8} k_{eff}^2 \qquad \circledast$$

Allora:

$$\frac{h_{33}^2}{C_{33}\beta_{33}} = \frac{\pi^2}{8} k_{eff}^2$$

Infine:

$$|Z_i| \cong \frac{1}{\omega C_0}\left[1 - \frac{\pi^2}{8} k_{eff}^2\right] \Rightarrow \underline{C_0 = \frac{1}{\omega |Z_i|}\left[1 - \frac{\pi^2}{8} k_{eff}^2\right]}$$

Considerando che k_{eff} è calcolabile come segue:

$$k_{eff}^2 = \frac{f_{max}^2 - f_{min}^2}{f_{max}^2} \Rightarrow k_{eff}^2 = \frac{(1.0975 \cdot 10^6)^2 - (993875)^2}{(1.0975 \cdot 10^6)^2} = 0.1799$$

Nella relazione precedente tutti i termini sono noti:

$$C_0 = \frac{1}{2\pi(56.63 \cdot 10^3) \cdot 1.02 \cdot 10^3}\left[1 - \frac{\pi^2}{8}(0.1799)\right] = 2.0 \cdot 10^{-9} F$$

Quindi infine:

$$\beta_{33} = \frac{A}{C_0 l} = \frac{\pi (0.01 m)^2}{2.0 \cdot 10^{-9} F \cdot 2.013 \cdot 10^{-3} m} = 78.03 \cdot 10^6 \; Vm/C$$

<u>Per ottenere h_{33} procedo come segue:</u>

Uno dei possibili valori che la Z_i deve poter assumere è zero, poiché in risonanza il contributo piezoelettrico cancella completamente la reattanza capacitiva. Quindi 0 è una possibile soluzione di $|Z_i(\omega)|$:

$$|Z_i(\omega)| = 0 \iff \frac{1}{j\omega C_0}\left[1 - \frac{h_{33}^2}{C_{33}\beta_{33}} \frac{2}{\theta} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] = 0 \Rightarrow$$

$$1 - \frac{h_{33}^2}{C_{33}\beta_{33}} \frac{\tan(\theta/2)}{\theta/2} = 0 \Rightarrow \frac{h_{33}^2}{C_{33}\beta_{33}} = + \frac{\theta/2}{\tan(\theta/2)} \Rightarrow \boxed{h_{33} = \sqrt{\frac{C_{33}\beta_{33}\,\theta/2}{\tan(\theta/2)}}}$$

Quindi noto che:

$$\theta = \frac{\omega l}{v} = \frac{2\pi f l}{2 l f_{mech}} = \pi \frac{f}{f_{mech}} \Rightarrow \theta_S = \frac{\overset{\swarrow f \text{ di risonanza elettrica serie}}{f_S}}{\underset{\nwarrow f \text{ di risonanza meccanico}}{f_{mech}}} \pi$$

$$f_a = f_S = f_{min} < f_r = f_P = f_{max} = f_{mech}$$

$\Rightarrow$

$$\theta_S = \frac{f_{min}}{f_{max}} \pi = \frac{993875 \text{ Hz}}{1.0975 \cdot 10^6 \text{ Hz}} \pi \text{ rad} = 2.845 \text{ rad} \cong 2.85 \text{ rad}$$

Allora ottengo:

$$h_{33} = \sqrt{\frac{1.55 \cdot 10^{11} N/m^2 \cdot 78.03 \cdot 10^6 Vm/C \cdot (2.85 rad/2)}{\tan(2.85 rad/2)}} = 1.59 \cdot 10^9 \text{ V/m}$$

Per ottenere e_{33} procedo come segue:

Come specificato nelle relazioni tra le costanti:

$$h_{33} = \beta_{33} e_{33} \Rightarrow \boxed{e_{33} = \frac{h_{33}}{\beta_{33}}} \Rightarrow$$

$$e_{33} = \frac{1.59 \cdot 10^9 \text{ V/m}}{78.03 \cdot 10^6 \text{ Vm/C}} = 20.37 \text{ C/m}^2$$

Quindi sono confrontare i valori ora ottenuti per i parametri caratteristici della piezoceramica con quelli della piezo presenti nel file Excell "FerroPerm MatData".

La procedura appena ricavata è corretta, ma si regge su una approssimazione, nello specifico l'approssimazione ⊛, che come detto nelle dispense è ottimale solo per Kmat piccoli. Se si vuole ottenere la massima precisione è possibile con qualche passaggio aggiuntivo ottenere la formula chiusa esatta di $C_0 \Rightarrow \beta_3 \Rightarrow h_{33} \Rightarrow e_{33}$.
Ricordando le due formule ottenute in precedenza per $|Z_i(f_{low})|$ e $|Z_i(f_a)|$:

$$\begin{cases} |Z_i(f_{low})| = \frac{1}{\omega C_0}\left[1 - \frac{h_{33}^2}{C_{33}\beta_{33}}\right] \\ |Z_i(f_a)| = 0 = 1 - \frac{h_{33}^2}{C_{33}\beta_{33}} \frac{\tan(\theta_S/2)}{\theta_S/2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_0 = \frac{1}{\omega |Z_i|}\left[1 - \frac{h_{33}^2}{C_{33}\beta_{33}}\right] \\ \frac{h_{33}^2}{C_{33}\beta_{33}} = \frac{\theta/2}{\tan(\theta_S/2)} \end{cases} \Rightarrow$$

$$C_0 = \frac{1}{\omega |Z_i|}\left[1 - \frac{\theta_S/2}{\tan(\theta_S/2)}\right] = \underline{\frac{1}{\omega |Z_i|}\left[\frac{\tan(\theta_S/2) - \theta_S/2}{\tan(\theta_S/2)}\right]}$$

Per completezza il prof. suggerisce come altra approssimazione possibile la seguente:

$$\begin{cases} h_{33} = 0 \\ |Z_i(\omega)| = \frac{1}{\omega C_0}\left[1 - \frac{h_{33}^2}{C_{33}\beta_{33}} \cdot \frac{\tan(\theta/2)}{\theta/2}\right] \end{cases} \Rightarrow |Z_i(\omega)| = \frac{1}{\omega C_0} \Rightarrow C_0 = \frac{1}{\omega |Z_i|}$$

Dove $h_{33} = 0$ nasce dal fatto che alle basse frequenze il fenomeno piezoelettrico è assente e tale fen. che accoppia elett. e mov. meccanico è rapp. da h_{33}. Difatti ci si riduce alla formula della Z di un semplice condensatore. È importante notare che tale approx. parte da una assunzione molto forte e quindi risulta discostarsi considerevolmente rispetto alla formula esatta (verificato anche sperimentalmente).