Procedura di ottimizzazione dello spessore di una piastra di adattamento

Come descritto nelle dispense, nel caso di un sistema semplice, costituito soltanto da un elemento piezoelettrico e dalla piastra di adattamento interposta tra quest'ultimo e il carico, lo spessore ottimale per la piastra è così calcolabile:

$$l = \frac{\lambda}{4}, \quad \lambda = \frac{v}{f_0}$$

Nel caso in cui però ci si trovi a lavorare con sistemi più complessi ad esempio: backing + pzt + plate; in questi casi non è detto che l della piastra ottimale sia proprio il precedente

Se ci si pone come obbiettivo la massimizzazione della banda passante del sistema, sostanzialmente si cerca di massimizzare la seguente funzione:

FBW = (fh_ndB - fl_ndB)/fc_ndB

con n tipicamente uguale a 3, 6, 10 o 20. Ragionando per il caso di n=3 si ha:

max(FBW) => max((fh_3dB - fl_3dB)/fc_3dB)

Massimizzare la precedente funzione significa in sostanza minimizzare la veloc. di discesa della funzione FTT verso valori minori di FTT(fr) - 3dB dato che:

$$f_{h\_3dB} = \min\{f : FTT(f) \leq FTT(f_r) - 3dB \text{ e } f > f_r\}$$

$$f_{l\_3dB} = \max\{f : FTT(f) \leq FTT(f_r) - 3dB \text{ e } f < f_r\}$$

$$f_{c\_3dB} = \frac{f_{h\_3dB} + f_{l\_3dB}}{2}$$

Dalle relazioni precedenti si ricava che la funzione FBW che dipende dalle preceden ti f dipende per transitività da FTT e siccome la FTT, come visto in preced, dipende dalle matrici B e M allora:

$$FBW \xrightarrow{dip} f_h, f_l, f_c \rightarrow FTT \rightarrow B, M \Rightarrow FBW(B, M)$$

Tutto questo per dire che la FBW dipende dalle mat. B e M nella maniera vista in precedenza.

Scrivendo la FTT nella forma estesa:

$$FTT = \frac{B_{12} Z_{eq}}{B_{22} Z_{eq} + B_{11} B_{22} - B_{12}^2} \cdot \frac{M_{12} Z_2}{M_{11} Z_2 + M_{11}^2 - M_{12}^2}$$

È quindi possibile affermare che: FTT dipende dalla matrice A (3x3 del piezo) e quindi B (2x2 ricavata da A) le quali dipendono da θ_{piezo}; inoltre la FTT dipende dalla mat. M (2x2 del plate) e da Z_{eq} le quali dipendono da θ_{plate}. Ovvero:

$$FTT(\theta_{piezo}, \theta_{plate})$$

Delle due dipendenze quella da θ_{piezo} può in realtà essere semplificata siccome essa rimane sempre costante siccome lo spessore del piezo non viene mai toccato, quindi:

$$FTT(\theta_{plate})$$

È possibile affermare quindi che FTT è periodica rispetto a θ_{plate}. Procedo al calcolo di tale periodicità.

$$FTT(\theta) = \underbrace{\frac{B_{22} Z_{eq}(\theta)}{B_{22} Z_{eq}(\theta) + B_{11}B_{22} - B_{12}^2}}_{H(\theta)} \cdot \underbrace{\frac{M_{12}(\theta) Z_2}{M_{11}(\theta) Z_2 + M_{11}(\theta)^2 - M_{12}(\theta)^2}}_{G(\theta)} \Rightarrow FTT(\theta) = H(\theta) \cdot G(\theta)$$

Ricordando le identità trigonometriche seguenti:

$$\left.\begin{array}{l} \tan(\theta+\pi) = \tan(\theta) \\ \sin(\theta+\pi) = -\sin(\theta) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} M_{11}(\theta+\pi) = M_{11}(\theta) \\ M_{12}(\theta+\pi) = -M_{12}(\theta) \end{array}$$

Calcolo la periodicità del primo fattore:

$$Z_{eq}(\theta) = M_{11}(\theta) - \frac{(M_{12}(\theta))^2}{Z_2 + M_{11}(\theta)} \quad \text{con} \quad \left.\begin{array}{l} M_{11}(\theta+\pi) = M_{11}(\theta) \\ M_{12}(\theta+\pi)^2 = M_{12}(\theta)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$Z_{eq}(\theta+\pi) = Z_{eq}(\theta) \Rightarrow H(\theta+\pi) = H(\theta)$$

Calcolo la periodicità del secondo fattore:

$$G(\theta+\pi) = \frac{(-M_{12}(\theta)) Z_2}{M_{11}(\theta) Z_2 + M_{11}(\theta)^2 - (-M_{12}(\theta))^2} = \frac{-M_{12}(\theta) Z_2}{M_{11}(\theta) Z_2 + M_{11}(\theta)^2 - M_{12}(\theta)^2} = -G(\theta)$$

Quindi:

$$FTT(\theta+\pi) = H(\theta+\pi)\, G(\theta+\pi) = H(\theta)(-G(\theta)) = -FTT(\theta) \Rightarrow$$

$$|FTT(\theta+\pi)| = |FTT(\theta)| \Rightarrow$$

Cioè il modulo della FTT è periodico di periodo π rispetto a θ_{plate} ovvero:

$$FTT(\theta) : \theta \in [0, \pi]$$

Quindi è possibile far variare θ nel suo periodo e calcolare la FBW in modo da prelevare il θ e quindi lo spessore l ottimale per il plate.

Dimostro la relazione che sussiste tra θ e l:

$$\begin{cases} \lambda = \frac{v}{f_0} \\ k = \frac{\omega}{v} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{v}{f_0} \\ v = \frac{\omega}{k} \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{\omega}{k f_0} = \frac{2\pi \cancel{f_0}}{k \cancel{f_0}} = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{2\pi}{k} \\ \theta = \frac{\omega l}{v} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{2\pi}{k} \\ \theta = kl \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} // \\ k = \frac{\theta}{l} \end{cases} \Rightarrow \lambda = 2\pi \cdot \frac{l}{\theta} \Rightarrow \underline{\theta = \frac{2\pi l}{\lambda}}$$

Come dim. in precedenza:

$$\theta \in [0, \pi] \Rightarrow 0 \le \theta \le \pi \Rightarrow 0 \le \frac{2\pi l}{\lambda} \le \pi \Rightarrow 0 \le l \le \cancel{\pi} \cdot \frac{\lambda}{2\cancel{\pi}} \Rightarrow 0 \le l \le \frac{\lambda}{2} \Rightarrow$$

$$l \in [0, \lambda/2] \Leftrightarrow \theta \in [0, \pi]$$

Ovvero è possibile far variare l nel suo intervallo $[0, \lambda/2]$ in modo che si è sicuri di prendere e valutare tra tutti gli l quello che ottimizza FBW.