Parte II

Ejercicio #2

Se desea emular digitalmente la característica de un filtro analógico pasa bajos Butterworth de orden 2, con $f_c = 1\ kHz$.

A. Para $f_s = 100\ kHz$ y aplicando transformación bilineal, obtener un filtro con respuesta $H_{(z)}$ cuyo comportamiento emule al Butterworth analógico.
Trazar la respuesta en frecuencia de módulo y fase de ambos filtros sobre un mismo gráfico para establecer comparaciones.

B. Repetir el punto anterior para $f_s = 10\ kHz$.

C. Repetir los puntos A) y B) si se desea emular digitalmente la característica de un filtro analógico pasa altos Butterworth de orden 2, con $f_c = 6\ kHz$

D. Indique en cuál de los 3 casos (A, B ó C) justificaría rediseñar aplicando prewarping. Explique el motivo en pocas palabras.

Pasa Bajo Butter Worth 2° orden:

$$T(S) = \frac{1}{S^2 + \sqrt{2}\, S + 1} \longrightarrow Q = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$F_c = 1\,KHz \longrightarrow \Omega_\omega = 2\pi\, 1\,KHz$$

A) $F_s = 100\,KHz \longrightarrow W_s = 2\pi\, 100\,KHz \longrightarrow W_{SN} = \frac{W_s}{\Omega_\omega} = 100 \quad \wedge \quad F_{SN} = \frac{F_s}{\Omega_\omega} = \frac{100}{2\pi}$

Aplicamos el Kernel de la Transformada Bilineal

$$T(z) = T(S)\Big|_{S = \overbrace{2F_s}^{K} \cdot \frac{Z-1}{Z+1}}$$

$$T(Z) = \frac{1}{K^2\frac{(Z-1)^2}{(Z+1)^2} + K\frac{(Z-1)}{(Z+1)}\frac{1}{Q} + 1}$$

$$T(z) = \frac{(Z+1)^2}{K^2(Z^2 - 2Z + 1) + K(Z^2-1)\frac{1}{Q} + (Z^2 + 2Z + 1)}$$

$$T(Z) = \frac{\overbrace{Z^2}^{B_0} + \overbrace{2Z}^{B_1} + \overbrace{1}^{B_2}}{Z^2\underbrace{(K^2 + \frac{K}{Q} + 1)}_{A_0} + Z\underbrace{(2 - 2K^2)}_{A_1} + \underbrace{(K^2 - \frac{K}{Q} + 1)}_{A_2}}$$

Es preferible acomodar los coeficientes para llegar a un SISTEMA CAUSAL (Z^{-x})

$$T(z) = \frac{B_0 + B_1 Z^{-1} + B_2 Z^{-2}}{A_0 + A_1 Z^{-1} + A_2 Z^{-2}}$$

A_0 implica un ESCALAMIENTO a la salida. Buscamos que sea unitario, por eso normalizamos los coeficientes respecto de A_0

$$T(z) = \frac{\frac{B_0}{A_0} + \frac{B_1}{A_0} z^{-1} + \frac{B_2}{A_0} z^{-2}}{1 + \frac{A_1}{A_0} z^{-1} + \frac{A_2}{A_0} z^{-2}} \Rightarrow \boxed{T(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}}$$

Calculando los coeficientes en PYTHON, tenemos que:

$b_0 =$ 0.000944084

$b_1 =$ 0.00188817

$b_2 =$ 0.000944084

$a_0 =$ 1.0

$a_1 =$ -1.9112262303409135

$a_2 =$ 0.9150025667984956

$$\boxed{T(z) \approx \frac{94 \times 10^{-5} + 19 \times 10^{-4} z^{-1} + 94 \times 10^{-5} z^{-2}}{1 - 1{,}911 z^{-1} + 0{,}915 z^{-2}}}$$

Graficos y simulación hechos en PYTHON