Crestomatía de
Investigación de operaciones y sus aplicaciones

Compilado por Juan Félix Ávila Herrera

NOTA

Este material ha sido recopilado para apoyar el curso Investigación de operaciones y sus aplicaciones del II ciclo del 2006. Se prohíbe su utilización para otros fines.

Índice General

Capítulo 1

Usemos Mathematica

1.1 Fundamentos de Álgebra

1.1.1 Operaciones fundamentales

- OBJETIVO: Iniciar al estudiante el *Mathematica* y su utilización en la simplificación de operaciones fundamentales.
- NUEVOS COMANDOS: Simplify, Expand, Apart.
- REQUISITOS: Se supone que ya se ha expuesto en clase el tema referente a operaciones fundamentales.
- TIEMPO ESTIMADO DE LA EXPOSICIÓN EN LA CLASE:
- TIEMPO ESTIMADO DE LA SESIÓN EN LABORATORIO:

1.1.2 Ejemplos

Las operaciones elementales de suma y restas de expresiones algebraicas en general resultan muy sencillas de realizar con *Mathematica*. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo **1.1** Efectuar $3x + 4y + 2\sqrt{x} + y - 5xy + 10\sqrt{x} + x^3 + 10xy$.

La instrucción (que puede ser edititada usando la paleta BasicInput que puede encontrar en la opción **File** del menú) en *Mathematica* sería:

$$\mathbf{3\,x + 4\,y + 2\,\sqrt{x} + y - 5\,x\,y + 10\,\sqrt{x} + x\text{^}3}$$

Es importante que en la expresión xy se debe dejar un espacio entre la x y y. De lo contraio *Mathematica* lo manipulará como si se tratase de una variable cuyo nombre se expresa mediante dos letras. Obtenemos entonces:

$$12\,\sqrt{x} + 3\,x + x^3 + 5\,y + 5\,x\,y$$

Normalmente *Mathematica* efectúa las simplificaciones obvias. No obstante si queremos estar seguros de que la expresión está bien simplificada usamos el comando **Simplify** como sigue:

$$\mathbf{Simplify[3\,x + 4\,y + 2\,\sqrt{x} + y - 5\,x\,y + 10\,\sqrt{x} + x\text{^}3 + 10\,x\,y]}$$

Mathematica nos da:

$$12\,\sqrt{x} + x^3 + 5\,y + x\,(3 + 5\,y)$$

que es equivalente a la expresión anterior pero factorizando una x.

En el próximo ejemplo se evidencia aún más la necesidad de indicarle a *Mathematica* que simplifique.

EJEMPLO **1.2** Efectuar $\dfrac{6x^2-10}{2}+\dfrac{6x^2-6x+12}{-6}-\dfrac{8x^2+12x-20}{4}$.

Esto lo ingresamos como

$$\frac{\mathtt{6\,x\char`\^2-10}}{\mathtt{2}}+\frac{\mathtt{6\,x\char`\^2-6\,x+12}}{\mathtt{-6}}-\frac{\mathtt{8\,x\char`\^2+12\,x-20}}{\mathtt{4}}$$

y este caso obtenemos:

$$\frac{1}{4}\,(20-12\,x-8\,x^2)+\frac{1}{6}\,(-12+6\,x-6\,x^2)+\frac{1}{2}\,(-10+6\,x^2)$$

Si usamos el comando **Simplify** como sigue:

$$\mathtt{Simplify}\left[\frac{\mathtt{6\,x\char`\^2-10}}{\mathtt{2}}+\frac{\mathtt{6\,x\char`\^2-6\,x+12}}{\mathtt{-6}}-\frac{\mathtt{8\,x\char`\^2+12\,x-20}}{\mathtt{4}}\right]$$

obtenemos sencillamente $-2\,(1+x)$.

Un error típico es tratar de ingresar una expresión usando paréntesis cuadrados. Veamos.

EJEMPLO **1.3** Efectuar $[(a+b-c)-(a-b+c)]-[(b-c+a)-(b+c-a)]$.

Aunque en matemáticas es totalmente legal esta expresión, desafortunadamente *Mathematica* ha reservado el uso de los corchetes para manipular funciones. Si ingresamos la expresión tal como está obtenemos:

```
Simplify[[(a + b - c) - (a - b + c)] - [(b - c + a) - (b + c - a)]]

Syntax::sntxb : Expression cannot begin
   with "[(a + b - c) - (a - b + c)] - [(b - c + a) - (b + c - a)]".

Simplify[[(a + b - c) - (a - b + c)] - [(b - c + a) - (b + c - a)]]
```

Debemos reemplazar los corchetes por paréntesis curvos como sigue:

```
Simplify[((a + b - c) - (a - b + c)) - ((b - c + a) - (b + c - a))]
```

y obtenemos $-2a+2b$.

Veamos ahora producto de polinomios:

Ejemplo **1.4** Efectuar $(3x^2yz - 4xy^2z^3)(2xy^2z^4)$.

Esto lo debemos reescribir como $(3x^2y\ z - 4x\ y^2z^3)(2x\ y^2z^4)$ y usando el comando **Expand**. Veamos:

- ⇒ **Expand[(3 x^2 y z - 4 x y^2 z^3) (2 x y^2 z^4)]**
- ⇐ $6\,x^3\,y^3\,z^5 - 8\,x^2\,y^4\,z^7$

EJEMPLO **1.5** Efectuar $(a^3 + ab^2 + a^4 + b^2)(a^3 + ab^2 - a^4 - b^2)$.

En este caso obtenemos:

- $\Rightarrow$ **`Expand[(a^3 + a b^2 + a^4 + b^2) (a^3 + a b^2 - a^4 - b^2)]`**
- $\Leftarrow$ $a^6 - a^8 - b^4 + a^2 b^4$

EJEMPLO **1.6** Efetuar $8p^3q^4r^5(4p^2q^3 - 3q^5r^6) - 4p^3q^7r^4(8p^2r - 3p^3q - 6q^2r^7)$.

En este caso tenemos:

- $\Rightarrow$ **Expand[8 p^3 q^4 r^5 (4 p^2 q^3 - 3 q^5 r^6) -**
  4 p^3 q^7 r^4 (8 p^2 r - 3 p^3 q - 6 q^2 r^7)]

- $\Leftarrow$ 12 p^6 q^8 r^4

Ejemplo **1.7** Efetuar $2r - 2\{4r - 2[s - t + 4(r - s + 2t) - 3r] + 2s\}$.

Debemos recordar que los únicos paréntesis de agrupación son los curvos (). Las llaves las usaremos para listas o conjuntos. En este caso tenemos:

- ⇒ **`Expand[2 r - 2 (4 r - 2 (s - t + 4 (r - s + 2 t) - 3 r) + 2 s)]`**
- ⇐ `-2 r - 16 s + 28 t`

EJEMPLO **1.8** Desarrollar $(2x+5t)^3$.

En este caso tenemos:

- $\Rightarrow$ **`Expand[(2 x + 5 t) ^3]`**
- $\Leftarrow$ `125 t^3 + 150 t^2 x + 60 t x^2 + 8 x^3`

EJEMPLO **1.9** Desarrollar $(a-b)^8$.

En este caso tenemos:

- $\Rightarrow$ **Expand[(a - b)^8]**;
- $\Leftarrow$ $a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8$

Ejemplo **1.10** Desarrollar $(a+b+c+d+e)^2$.

En este caso tenemos:

- $\Rightarrow$ **Expand[(a + b + c + d + e)^2]**
- $\Leftarrow$ $a^2 + 2\,a\,b + b^2 + 2\,a\,c + 2\,b\,c + c^2 + 2\,a\,d + 2\,b\,d + 2\,c\,d + d^2 + 2\,a\,e + 2\,b\,e + 2\,c\,e + 2\,d\,e + e^2$

Ejemplo **1.11** Desarrollar $(1-x)^{10}$.

En este caso tenemos:

- $\Rightarrow$
```
Expand[(1 - x)^10]
```
- $\Leftarrow$ $1 - 10\,x + 45\,x^2 - 120\,x^3 + 210\,x^4 - 252\,x^5 + 210\,x^6 - 120\,x^7 + 45\,x^8 - 10\,x^9 + x^{10}$

Ejemplo **1.12** Simplificar $\dfrac{24a^5b^7c^9}{6ab^6c^5}$.

Podemos emplear aquí el icono para escribir fracciones. En este caso tenemos:

- $\Rightarrow$ `Simplify[` $\dfrac{\texttt{24 a^5 b^7 c^9}}{\texttt{6 a b^6 c^5}}$ `]`
- $\Leftarrow$ $4\,a^4\,b\,c^4$

EJEMPLO **1.13** Exprese $(6x^3 + 3x^2 - 24x - 9) \div (2x - 3)$ en la forma $C(x) + \dfrac{R(x)}{D(x)}$, en donde $C(x)$ es el cociente, $R(x)$ el residuo y $D(x)$ es el divisor. La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$ **Apart**$\left[\dfrac{-9 - 24\,x + 3\,x^2 + 6\,x^3}{-3 + 2\,x}\right]$

- $\Leftarrow -3 + 6\,x + 3\,x^2 - \dfrac{18}{-3 + 2\,x}$

1.1.3 Trabajando en el laboratorio

Preparamos una práctica guiada que los estudiantes deberán desarrollar en el computador. Esto se puede hacer indicando algunos ejercicios del libro texto que deben resolverse con la ayuda de *Mathematica* o bien preparando una lista de problemas que usted mismo puede crear usando *Mathematica*. Eventualmente se puede incluir en la práctica algún comando que se use más adelante. Si no hay suficientes computadoras, es viable trabajar en parejas. Indique a los estudiantes que deben salvar la práctica en un disco y enviarla (por correo) a usted o a su asistente antes de la próxima clase o alguna fecha que usted considere conveniente. Es conveniente que los estudiantes tengan acceso al laboratorio fuera de las horas de clase.

Práctica # 1

- Resuelva los siguientes ejercicios del libro [1]:
  - Suma y resta de polinomios: 383, 384, 388, 393, 403, 408, 409, 413, 414, 416, 418, 420, 427 432.
  - Producto de polinomios: 437, 446, 449, 456, 460, 464, 467,472, 478, 481, 482, 491, 494.
  - Fórmulas notables: 508, 516, 520, 524, 528, 533, 536,
  - División de polinomios: 550-553, 555, 556, 560, 564.
- Simplifique $(1 - 2x)^{20} - (3x - 5)^{10}$.
- Desarrolle $(1 - 3xy^2 + 7x^3 + 10x)(1 + x)^5(1 - x)^5$.
- Use el comando **Apart** para separar $\dfrac{1 - x^{20}}{1 - x}$.
- Intente dar una fórmula para $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2$. Empiece con un binomio, siga luego con un trinomio, etc.

1.1.4 Evaluación

En este curso de Matemática I para Computación se recomienda dividir la nota en 2 partes: un 70% para el enfoque tradicional y un 30% para la evaluación con apoyo informático. Estos porcetajes pueden ser modificados según la experiencia del cuerpo docente.

La evaluación puede hacerse de 2 formas. Una es elaborar una serie de ejercicios, solicitar a los estudiantes que lo resuelvan, pedir a los estudiantes que graben los resultados (archivo de *Mathematica*) en un disco y luego recogerlos. Esto tiene algunos inconvenientes. Algunas veces los discos se dañan o bien adquieren algún virus que nos puede dar muchos dolores de cabeza. Por otro lado, los estudiantes pueden hacer fácilmente duplicados y propiciar algún tipo de fraude. Como se nota, este primer enfoque no es muy recomendable.

Una segunda forma de evaluar el uso del software es escoger ejercicios que difícilmente se puedan hacer en forma manual y pedir a los estudiantes que escriban las respuestas en una hoja. Las respuesta de los ejercicios no debe ser muy corta pues, en ese caso, son fáciles de copiar. La principal crítica a este enfoque es que evaluamos en forma indirecta el uso del software. Es por esto que los ejercicios deben ser claramente propuestos y deben ser resueltos antes de que se aplique la prueba para evitar dificultades. Se recomienda dar como ayuda una parte de la respuesta para tranquilizar a aquellos estudiantes que lo han hecho bien y para alertar a aquellos que se han equivocado en algún paso intermedio. Además se puede pedir a los estudiantes que escriban parte del código en *Mathematica* que emplearon.

Nombre:____

$\boxed{\text{Examen Corto \# 1}}$

INSTRUCCIONES: Use *Mathematica* para resolver correctamente los siguientes ejercicios. Indique, para cada uno de ellos, los comandos que ha empleado.

1. Al desarrollar $(1 - 3x^2y^4 + 7xy^2 + 1)^4$ obtenemos:
   $16 + 224xy^2+$

2. Al desarrollar $[1 + (3x - (3 + 4x + y - (3x - y - 2\left\{7 + x + y^3\right\}))) - 2]^2$ obtenemos:
   $324+$

3. Al simplificar (y luego desarrollar)
   $$\frac{4096\,a^6 - 12288\,a^5\,x + 15360\,a^4\,x^2 - 10240\,a^3\,x^3 + 3840\,a^2\,x^4 - 768\,a\,x^5 + 64\,x^6}{-2\,a + x}$$
   se obtiene:
   $-2048a^5+$

1.2 Factorización

- Objetivo: Uso de *Mathematica* en la factorización de expresiones algebraicas.
- Nuevos comandos: Factor, Print, For, ++
- Requisitos: Se supone que ya se ha expuesto en clase el tema referente factorización: por factor común, por agrupación, por fórmula notable e inspección, por división sintética y combinaciones de los anteriores.
- Tiempo estimado de la exposición en la clase:
- Tiempo estimado de la sesión en laboratorio:

1.2.1 Ejemplos

Es importante aclarar que con *Mathematica* no es necesario indicar qué técnica de factorización se desea emplear. El software aplicará todos métodos clásicos de factorización y arrojará una factorización completa. Esto puede generar un reto interesante pues el usuario deberá descubrir cómo se llega al resultado propuesto por *Mathematica*.

EJEMPLO **1.14** Factorizar $12\, a^6\, b^2\, x + 6\, a^4\, b^3\, x + 9\, a^4\, b^3\, y^2$. En este caso escribimos

- $\Rightarrow$ **Factor[12 a^6 b^2 x + 6 a^4 b^3 x + 9 a^4 b^3 y^2]**
- $\Leftarrow$ **3 a^4 b^2 (4 a^2 x + 2 b x + 3 b y^2)**

Aquí se aplicó factorización por factor común.

EJEMPLO **1.15** Factorizar $x(a+b+c)-y(a+b+c)$. La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$ **Factor[x (a + b + c) - y (a + b + c)]**
- $\Leftarrow$ (a + b + c) (x - y)

Aquí se aplicó factorización por factor común.

Ejemplo **1.16** Factorice $-3\,d\,p+p^2+6\,d\,q-2\,p\,q+3\,d\,x-p\,x$. La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$ **Factor[-3 d p + p^2 + 6 d q - 2 p q + 3 d x - p x]**
- $\Leftarrow$

  -(3 d - p) (p - 2 q - x) Aquí se aplicó factorización por agrupación

Ejemplo **1.17** Factorice $a^2 + b^2 + 1 + 2ab + 2a + 2b$. La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$ **`Factor[a^2 + b^2 + 1 + 2 a b + 2 a + 2 b]`**
- $\Leftarrow$ `(1 + a + b)`^{2}

Aquí se aplicó factorización por inspección combinada con factor común.

EJEMPLO **1.18** Factorice $(n-3m)^2-(b-5c)^2$. La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$ `Factor[(n - 3 m)^2 - (b - 5 c)^2]`

- $\Leftarrow$ `- (b - 5 c + 3 m - n) (b - 5 c - 3 m + n)`

Trabajando manualmente probablemente se obtenga $(n-3m-b+5c)(n-3m+b-5c)$. Esta expresión es equivalente a la dada por *Mathematica*. El resultado arrojado por *Mathematica* busca desplegar los factores en orden alfabético en el que el cada factor tenga su primer término con coeficiente positivo. Aquí resulta interesante que el estudiante verifique que ambas expresiones coinciden:

- $\Rightarrow$ `Expand[(n - 3 m - b + 5 c) (n - 3 m + b - 5 c)]`
  `Expand[- (b - 5 c + 3 m - n) (b - 5 c - 3 m + n)]`

- $\Leftarrow$ $-b^2+10\,b\,c-25\,c^2+9\,m^2-6\,m\,n+n^2$

  $-b^2+10\,b\,c-25\,c^2+9\,m^2-6\,m\,n+n^2$

Concluimos entonces que ambas respuestas son equivalentes.

EJEMPLO **1.19** Factorice $12x^{2m} - 7x^m - 12$. La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$ `Factor[12 x^(2 m) - 7 x^m - 12]`
- $\Leftarrow$ $(-4 + 3\ x^m)\ (3 + 4\ x^m)$

Una respuesta equivalente es $(3x^m - 4)(4x^m + 3)$.

EJEMPLO **1.20** Factorice $x^3 + 4x^2b + 4xb^2 - 2x^2 - 4xb$. La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$ `Factor[x^3 + 4 x^2 b + 4 x b^2 - 2 x^2 - 4 x b]`
- $\Leftarrow$ `x (-2 + 2 b + x) (2 b + x)`

O bien $x(x + 2b)(x + 2b - 2)$.

EJEMPLO **1.21** Factorice $x^8 + 64$. La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$ **`Factor[x^8 + 64]`**
- $\Leftarrow$ $(8 - 4\,x^2 + x^4)\,(8 + 4\,x^2 + x^4)$

Veremos ahora el concepto de ciclo para efectuar una operación varias veces.

EJEMPLO **1.22** Haga un ciclo que imprima los número del 1 al 5. La instrucción en *Mathematica* es en este caso:

```
n[33]:= For[i = 1, i <= 5, Print[i]; i++]
1
2
3
4
5
```

La variable i es lo que se conoce como un contador. La condición $i <= 5$ es la que se verifica cada vez que se desea saber si ya es momento de salir del ciclo (conforme i aumenta). La instrucción Print[i] se encarga de escribir el contador. Finalmente la instrucción i++ le indica a i que debe aumentar su valor en 1.

Ejemplo **1.23** Factorice las expresiones $x^2 - i$ en el que i es un valor que varía entre 1 y 10. La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$ `For[i = 1, i ≤ 10, Print[Factor[x^2 - i]]; i++]`

- $\Leftarrow$
```
(-1 + x) (1 + x)
-2 + x^2
-3 + x^2
(-2 + x) (2 + x)
-5 + x^2
-6 + x^2
-7 + x^2
-8 + x^2
(-3 + x) (3 + x)
-10 + x^2
```

Este ejercicio le permite al estudiante observar (conjeturar) bajo qué condiciones se puede factorizar la expresión $x^2 - i$.

1.2.2 Trabajando en el laboratorio

$\boxed{\text{Práctica \# 1}}$

- Resuelva los siguientes ejercicios del libro [1]: 606, 609, 613–618, 644, 647, 650, 662, 680, 685, 686, 689, 709, 710, 735, 742, 745, 747, 755, 790, 802, 805, 820, 839.

- Factorice $x^{40} - 1$.

- Factorice $35840 - 15616\,x - 15808\,x^2 - 1712\,x^3 + 4336\,x^4 + 1864\,x^5 - 442\,x^6 - 298\,x^7 + 14\,x^8 + 12\,x^9$.

- Un un ciclo For para determinar dos valores numéricos para y con los que la expresión $x^8 + y$ se factoriza en factores no triviales.

- Use el icono de productoria que se muestra en la paleta para desarrollar

$$(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+20)$$

  Tome la expresión resultante y factorícela.

1.2.3 Evaluación

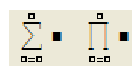
Nombre: ____

$\boxed{\text{Examen Corto \# 2}}$

INSTRUCCIONES: Use *Mathematica* para resolver correctamente los siguientes ejercicios. Indique, para cada uno de ellos, los comandos que ha empleado.

1. Factorice $84\,x^4 + 25\,x^3\,y - 70\,x^2\,y^2 - 5\,x\,y^3 + 6\,y^4$
2. Factorice $6 + 13\,a + 9\,a^2 + 2\,a^3 + 17\,b + 22\,a\,b + 7\,a^2\,b + 11\,b^2 + 7\,a\,b^2 + 2\,b^3$
3. Halle 2 valores de k para los que $(1+x)(2+x)(3+x)(4+x)(5+x)-k$ tiene un factor cuadrático. Ayuda: Haga un ciclo variando k entre 1 y 300. Factorice cada expresión y observe.

1.3 Fracciones

- OBJETIVO: *Mathematica* y su utilización en operaciones con fracciones.
- NUEVOS COMANDOS: Togheter, Apart, %, /.,  o equivalentemente Sum y Prod.
- REQUISITOS: Se supone que ya se ha expuesto en clase el tema referente fracciones: simplificación, producto, división, suma y resta.
- TIEMPO ESTIMADO DE LA EXPOSICIÓN EN LA CLASE:
- TIEMPO ESTIMADO DE LA SESIÓN EN LABORATORIO:

1.3.1 Ejemplos

Ejemplo **1.24** *Mathematica* factoriza de oficio las situaciones simples tales como $\dfrac{y^5x^2}{yx}$. Observe:

- $\Rightarrow$ $\dfrac{\mathtt{y^\wedge 5\ x^\wedge 2}}{\mathtt{y\ x}}$
- $\Leftarrow$ $\mathtt{x\ y}^4$

Ejemplo **1.25** Simplifique $\dfrac{(z-u)(2z^2+3zu+u^2)}{(2z+u)(z^2+zu-2u^2)}$.

En este caso es necesario indicar que se desea simplificar la expresión. La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$ `Simplify[`$\dfrac{\texttt{(z - u) (2 z^2 + 3 z u + u^2)}}{\texttt{(2 z + u) (z^2 + z u - 2 u^2)}}$`]`
- $\Leftarrow$ $\dfrac{\texttt{u + z}}{\texttt{2 u + z}}$

Ejemplo **1.26** Simplifique $\dfrac{2ax+2ab+yx+yb}{2ab-2ax+yb-yx}$.

La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$ **Simplify**$\left[\dfrac{2\,a\,b+2\,a\,x+b\,y+x\,y}{2\,a\,b-2\,a\,x+b\,y-x\,y}\right]$
- $\Leftarrow \dfrac{b+x}{b-x}$

Como siempre, debemos de tener cuidado de escribir $a\ b$ y no ab.

EJEMPLO **1.27** Simplifique $\dfrac{t^4+t^2b^2+b^4}{t^6-b^6}$.

La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$ **Simplify**$\left[\dfrac{\texttt{t\^{}4 + t\^{}2 b\^{}2 + b\^{}4}}{\texttt{t\^{}6 - b\^{}6}}\right]$
- $\Leftarrow$ $\dfrac{1}{-b^2+t^2}$

EJEMPLO **1.28** Simplifique $[3c^3 + (y - 15)c^2 - (5y + 6)c - 2y] \div (3c + y)$.

La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$ `Simplify[`$\frac{\texttt{3 c^3 + (y - 15) c^2 - (5 y + 6) c - 2 y}}{\texttt{3 c + y}}$`]`
- $\Leftarrow$ `-2 - 5 c + c`^{2}

Ejemplo **1.29** Efectúe y simplifique $\dfrac{2d^2+dv-v^2}{4d^2-4dv+v^2}\cdot\dfrac{8d^2+6dv-9v^2}{4d^2-9v^2}$.

Aquí debemos indicarle a *Mathematica* que además de efectuar la operación y simplificarla, deseamos que el resultado esté factorizado tanto en el numerador como en el denominador. La instrucciones en *Mathematica* son:

```
Simplify[(2 d^2 + d v - v^2)/(4 d^2 - 4 d v + v^2) * (8 d^2 + 6 d v - 9 v^2)/(4 d^2 - 9 v^2)]
```

- $\Rightarrow$ `Factor[%]`

  El símbolo % se refiere a la última expresión arrojada por *Mathematica*. Es conveniente colocar ambas instrucciones en una misma celda.

- $\Leftarrow$

$$\frac{(4\,d-3\,v)\,(d+v)}{4\,d^2-8\,d\,v+3\,v^2}$$

$$\frac{(4\,d-3\,v)\,(d+v)}{(2\,d-3\,v)\,(2\,d-v)}$$

Es buen ejercicio verificar que ambas expresiones son equivalentes.

Ejemplo **1.30** Efectúe y simplifique $\dfrac{a^2-b^2}{2a^2-3ab+b^2}\cdot\dfrac{2a^2+5ab-3b^2}{a^2+4ab+3b^2}\cdot\dfrac{a^2-2ab-3b^2}{a^2-4ab+3b^2}$.

La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$ In[7]:= `Simplify[` $\dfrac{a\text{^}2-b\text{^}2}{2\,a\text{^}2-3\,a\,b+b\text{^}2}\;\dfrac{2\,a\text{^}2+5\,a\,b-3\,b\text{^}2}{a\text{^}2+4\,a\,b+3\,b\text{^}2}\;\dfrac{a\text{^}2-2\,a\,b-3\,b\text{^}2}{a\text{^}2-4\,a\,b+3\,b\text{^}2}$ `]`
- $\Leftarrow$ $\dfrac{a+b}{a-b}$

En este caso no hubo necesidad de aplicar Factor.

EJEMPLO **1.31** Efectúe y simplifique $\dfrac{2}{t}+\dfrac{7}{t^2}+\dfrac{5}{2t-3}+\dfrac{1}{(2t-3)^2}$.

Empleamos el comando Together para efectuar las operaciones indicadas y dejar el resultado en una sola fracción. La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$ **Together**$\left[\dfrac{2}{t}+\dfrac{7}{t\text{^}2}+\dfrac{5}{2\,t-3}+\dfrac{1}{(2\,t-3)\text{^}2}\right]$

- $\Leftarrow$ $\dfrac{63-66\,t-10\,t^2+18\,t^3}{t^2\,(-3+2\,t)^2}$

EJEMPLO **1.32** Efectúe y simplifique $\dfrac{b}{b^2-b-2}-\dfrac{1}{b^2+5b-14}-\dfrac{2}{b^2+8b+7}$.

La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$ `Together[b/(b^2 - b - 2) - 1/(b^2 + 5 b - 14) - 2/(b^2 + 8 b + 7)]`
- $\Leftarrow$ $\dfrac{3+b}{(-2+b)\,(7+b)}$

EJEMPLO **1.33** Efectúe y simplifique $\dfrac{h-\frac{h+3}{h-1}}{1-\frac{3h-1}{h^2-1}}$.

Se trata de una fracción compleja. Primero simplificamos y luego factorizamos el resultado. La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$ **Simplify**$\left[\dfrac{h-\frac{h+3}{h-1}}{1-\frac{3\,h-1}{h\,\hat{}\,2-1}}\right]$

  Factor[%]

- $\Leftarrow$ Out[14]= $2+\dfrac{1}{h}+h$

  Out[15]= $\dfrac{(1+h)^2}{h}$

Claramente ambos resultados son equivalentes.

EJEMPLO **1.34** Efectúe y simplifique $\dfrac{2-\frac{a+5}{a+2}}{a^2-1}+\dfrac{a^2-\frac{3a^2-a}{a+2}}{a^3+1}$.

La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$ $\texttt{Simplify}\left[\dfrac{2-\frac{a+5}{a+2}}{a\,\hat{}\,2-1}+\dfrac{a\,\hat{}\,2-\frac{3\,a\,\hat{}\,2-a}{a+2}}{a\,\hat{}\,3+1}\right]$
- $\Leftarrow$ $\dfrac{1}{2+a}$

1.3.2 Trabajando en el laboratorio

- Resuelva los siguientes ejercicios del libro [1]: 857, 865, 876, 885, 912, 930, 935, 941, 945, 959, 969, 976, 981, 994, 1001, 1011, 1016, 1024, 1032, 1041, 1052

- Exprese $\dfrac{1}{(1+x)\ (2+x)\ (3+x)\ (4+x)\ (5+x)\ (6+x)\ (7+x)\ (8+x)\ (9+x)\ (10+x)}$ como suma de fracciones.

- Sume y simplifique:

$$\frac{-1}{23040\ (2+x)}+\frac{81}{640\ (4+3\,x)}-\frac{3125}{512\ (6+5\,x)}+\frac{16807}{288\ (8+7\,x)}-\frac{98415}{512\ (10+9\,x)}+\frac{161051}{640\ (12+11\,x)}-\frac{2599051}{23040\ (14+13\,x)}$$

- Simplifique la siguiente expresión:

$$1+\frac{1+\frac{1+\frac{1+\frac{1+\frac{1}{x}}{x}}{x}}{x}}{x}$$

  Determine si esta expresión es equivalente a $1+x^{-5}+x^{-4}+x^{-3}+x^{-2}+\dfrac{1}{x}$.

- El comando /. permite hacer sustituciones. Por ejemplo si escribimos

$$2x+3/.\ x\rightarrow 2$$

  obtenemos 7. En el ejercicio anterior cambie x por $1+y^2$ y verifique que se obtiene

$$\frac{6+15\,y^2+20\,y^4+15\,y^6+6\,y^8+y^{10}}{(1+y^2)^5}$$

1.3.3 Evaluación

Nombre: ____

Examen Corto # 3

INSTRUCCIONES: Use *Mathematica* para resolver correctamente los siguientes ejercicios. Indique, para cada uno de ellos, los comandos que ha empleado.

1. Sume y simplifique:

$$\frac{27}{40\ (1+3\,x)} - \frac{32}{3\ (1+4\,x)} + \frac{625}{12\ (1+5\,x)} - \frac{108}{1+6\,x} + \frac{2401}{24\ (1+7\,x)} - \frac{512}{15\ (1+8\,x)}$$

   Ayuda: El numerador del resultado consta de un solo término.

2. Al efectuar

$$\frac{2}{15\,(1+x)^3} + \frac{7}{15\,(1+x)^2} + \frac{77}{90\ (1+x)} + \frac{1-x}{2\ (1+x^2)} + \frac{4-5\,x}{9\ (1-x+x^2)} + \frac{3-4\,x-x^2+x^3}{5\ (1-x+x^2-x^3+x^4)}$$

   Ayuda: El numerador del resultado es una cuadrática de 2 términos.

3. Al separar en fracciones la expresión (usando Apart)

$$1 \div \prod_{k=1}^{10}\left(x+\frac{1}{k}\right)$$

   uno de los términos que se obtiene es $\dfrac{\alpha}{1+8x}$. Determine el valor de α.

4. Conjeture una fórmula para $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$. Proceda de la siguiente forma:

   (a) Aplique Expand a $(1-x)\displaystyle\sum_{k=0}^{5} x^k$

   (b) Aplique Expand a $(1-x)\displaystyle\sum_{k=0}^{10} x^k$

   (c) Conjeture una fórmula para $(1-x)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$ y luego despeje.

1.4 Ecuaciones y problemas

- Objetivo: *Mathematica* y su utilización en la solución de ecuaciones y problemas.
- Nuevos comandos: Solve, Reduce, N, NSolve.
- Requisitos: Se supone que ya se ha expuesto en clase el tema referente
- Tiempo estimado de la exposición en la clase:
- Tiempo estimado de la sesión en laboratorio:

Mediante el comando Solve, *Mathematica* es capaz de resolver una gran variedad de ecuaciones. Es importante advertir que el igual que se coloca en las ecuaciones es el igual doble ==, no el simple =. *Mathematica* emplea el = para efectuar asiganciones y el == para ecuaciones y comparaciones.

1.4.1 Ejemplos

EJEMPLO **1.35** Resuelva $6(3x-1) = 5(4x+3)$.

La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$ `Solve[6 (3 x - 1) == 5 (4 x + 3), x]`
- $\Leftarrow$ $\{\{x \to -\frac{21}{2}\}\}$

Mathematica presenta la solución de una ecuación o sistema de ecuaciones mediante una lista de conjuntos, cada uno conteniendo una solución. Por lo tanto, la solución es $x = -\dfrac{21}{2}$.

Ejemplo **1.36** Resuelva $4\left(\frac{3x}{4}-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}(4x+12)=4$.

La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$ `Solve[4 (3 x/4 - 1/2) - 1/2 (4 x + 12) == 4, x]`
- $\Leftarrow$ `{{x → 12}}`

Por lo tanto, la solución es $x = 12$.

Ejemplo **1.37** Resuelva $\dfrac{yt+a}{a}+\dfrac{yt-a}{y}=2$, para t.

La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$ `Solve[` $\dfrac{y\,t+a}{a}+\dfrac{y\,t-a}{y}==2,\ t$ `]`
- $\Leftarrow$ $\left\{\left\{t\to\dfrac{a}{y}\right\}\right\}$

Por lo tanto, la solución es $t=\dfrac{a}{y}$.

Ejemplo **1.38** Resuelva $\dfrac{5h}{7} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{9h}{14} + \dfrac{2}{21}$.

La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$ `Solve[`$\dfrac{5\,h}{7} - \dfrac{1}{3} == \dfrac{9\,h}{14} + \dfrac{2}{21}$`, h]`
- $\Leftarrow$ `{{h → 6}}`

Por lo tanto, la solución es $h = 6$.

EJEMPLO **1.39** Resuelva $\dfrac{a}{2y} + y^2 = x + \dfrac{ya}{2x}$ para a.

La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$ `Solve[a/(2 y) + y^2 == x + (y a)/(2 x), a]`
- $\Leftarrow$ `{{a → 2 x y}}`

Por lo tanto, la solución es $a = 2xy$.

EJEMPLO **1.40** Resuelva, para a, la ecuación $a^2 - xa - ax^m + x^{m+1} = 0$.
La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$ `Solve[a^2 - x a - a x^m + x^(m + 1) == 0, a]`
- $\Leftarrow$ `{{a → x}, {a → x^m}}`

Por lo tanto, las soluciones son $a = x$ y $a = x^m$.

Ejemplo **1.41** Resuelva, para h, la ecuación $h^3 + 8a^3 - 2ah(h + 2a) = 0$.
La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$ `Solve[h^3 + 8 a^3 - 2 a h (h + 2 a) == 0, h]`
- $\Leftarrow$ `{{h → -2 a}, {h → 2 a}, {h → 2 a}}`

Por lo tanto, la solución está dada por $h = -2a$ y $h = 2a$ (de multiplicidad 2).

Ejemplo **1.42** Resuelva $10x^2 + 59x + 62 = 0$.

La instrucción en *Mathematica* es:

```
Solve[10 x^2 + 59 x + 62 == 0, x]
```

- $\Rightarrow$ `N[%]`

  Nota: El comando N[%] se encarga de tomar el valor anterior y proporcionar una aproximación decimal.

- $\Leftarrow$

$$\left\{\left\{x \to \frac{1}{20}\left(-59-\sqrt{1001}\right)\right\}, \left\{x \to \frac{1}{20}\left(-59+\sqrt{1001}\right)\right\}\right\}$$

```
{{x → -4.53193}, {x → -1.36807}}
```

Por lo tanto, la solución está dada por $x = \dfrac{-59+\sqrt{1001}}{20} \approx -1.36807$ y por

$$x = \frac{-59-\sqrt{1001}}{20} \approx -4.53193.$$

Ejemplo **1.43** Resuelva $8h^{-6} - 65h^{-3} + 8 = 0$.

La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$ `Solve[8 h^(-6) - 65 h^(-3) + 8 == 0, h]`
- $\Leftarrow$ $\left\{\left\{h \to \frac{1}{2}\right\}, \{h \to 2\}, \left\{h \to \frac{1}{4}\left(-1 - i\sqrt{3}\right)\right\}, \left\{h \to -1 - i\sqrt{3}\right\}, \left\{h \to \frac{1}{4}\left(-1 + i\sqrt{3}\right)\right\}, \left\{h \to -1 + i\sqrt{3}\right\}\right\}$

Por lo tanto, la solución real está dada por $h = 1/2$ y por $h = 2$. Las otras soluciones son las raíces complejas. Por el momento simplemente se desestiman. En cursos superiores se hablará sobre este tema.

Nota: El número i, llamado imaginario, es tal que $i^2 = -1$

Ejemplo 1.44 Resuelva $\left(\dfrac{a^2+3a+1}{a+1}\right)^2 + 2\left(\dfrac{a^2+3a+1}{a+1}\right) - 3 = 0.$

La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$ `Solve[((a^2 + 3 a + 1)/(a + 1))^2 + 2 ((a^2 + 3 a + 1)/(a + 1)) - 3 == 0, a]`
- $\Leftarrow$ $\{\{a \to -2\}, \{a \to 0\}, \{a \to -3 - \sqrt{5}\}, \{a \to -3 + \sqrt{5}\}\}$

Por lo tanto, la solución está dada por $a = 0,\ a = -2,\ a = -3 \pm \sqrt{5}$.

El uso del comando Solve resuelve típicamente muchas de las ecuaciones con las que "tropezamos" diariamente. Sin embargo hay casos en los que este comando es insuficiente. Considere le problema de resolver, para x, la ecuació $ax + b = 0$. Dependiendo del valor de a y de b, la ecuación tendrá diferentes posibilidades para sus soluciones. No obstante, Solve resuelve esta ecuación suponiendo que $a \neq 0$ y solamente arroja $x = -\dfrac{b}{a}$ como solución. ¡Verifíquelo!. El comando Reduce si considera todas las posibilidades.

EJEMPLO **1.45** Resuelva mediante el comando Reduce la ecuación $ax + b = 0$.
La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$ **Reduce[a x + b == 0, x]**

- $\Leftarrow$ b == 0 && a == 0 || a ≠ 0 && x == $-\frac{b}{a}$

Mathematica usa el símbolo \&& para indicar Y. La doble barra || se emplear para indicar O. *Mathematica* señala entonces que hay 2 casos:

- suponer que $a = 0$ y que $b = 0$. Por lo tanto, no hay restricción para x, y tenemos que el conjunto solución es $I\!R$.

- suponer que $a \neq 0$. Por lo tanto, la solución es $x = -\dfrac{b}{a}$

Depende entonces del propósito de nuestro ejercicio, elegir entre Solve y Reduce.

EJEMPLO **1.46** Resuelva $\sqrt{a^2+4a+1}-\sqrt{2a+4}=0$.

La instrucción en *Mathematica* es:

```
n[13]:= Solve[√(a^2 + 4 a + 1) - √(2 a + 4) == 0, a]
```

- ⇒
```
Solve::ifun :
 Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not
  be found; use Reduce for complete solution information. More…
```

- ⇐ `{{a → -3}, {a → 1}}`

Mathematica nos está advirtiendo que este no es el mejor comando para resolver este problema. Se deben emplear funciones inversas y algunas soluciones podrían quedar por fuera. Se sugiere luego que se emplee el comando Reduce para asegurarnos de que hemos encontrado todas las soluciones. Después *Mathematica* muestra las soluciones que halló.

Usemos entonces el comando Reduce:

- ⇒ `Reduce[√(a^2 + 4 a + 1) - √(2 a + 4) == 0, a]`

- ⇐ `a == -3 || a == 1`

Por lo tanto, la solución está dada por $a=1,\ a=-3$.

EJEMPLO **1.47** Resuelva, para a, la ecuación $\sqrt{a-x^2}-\sqrt{2a-x^2}=-x$.
La instrucción en *Mathematica* es:

```
In[1]:= Reduce[√(a - x^2) - √(2 a - x^2) == -x, a]
```

- ⇒

```
Reduce::useq :
 The answer found by Reduce contains unsolved equation(s) {0 == x - √(x²),
  0 == -x + √(x²), 0 == 3 (x - «1»), 0 == -x + √(x²)}. A likely reason for this is that
  the solution set depends on branch cuts of Mathematica functions. More…
```

- ⇐

```
Out[1]= x == 0 && a == 0 || x² ≠ 0 && 0 == x - √(x²) && 0 == -x + √(x²) && a == x² || (
   5 x² ≠ 0 && 0 == 3 (x - √(x²)) && 0 == -x + √(x²) && a == 5 x²
```

Tenemos entonces que *Mathematica*, al considerar todas las posibilidades para las variables involucradas, ha dejado algunas ecuaciones sin resolver. Si usamos Solve, para que haga algunos supuestos típicos, obtenemos:

- ⇒ `Solve[√(a - x^2) - √(2 a - x^2) == -x, a]`
- ⇐ `{{a → x²}, {a → 5 x²}}`

Tenemos así una solución. Si en el comando Reduce agregamos las condiciones $x>0$ y $a>0$ tal como sigue, obtenemos la misma solución. Veamos:

- ⇒ `Reduce[√(a - x^2) - √(2 a - x^2) == -x && a > 0 && x > 0, a]`
- ⇐ `x > 0 && (a == x² || a == 5 x²)`

Por lo tanto, una solución está dada por $a=x^2,\ a=5x^2$.

EJEMPLO **1.48** Resuelva $2a^3 + 3a^2 - 3a - 2 = 0$.

La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$ **`Solve[2 a^3 + 3 a^2 - 3 a - 2 == 0, a]`**
- $\Leftarrow$ $\left\{\{a \to -2\}, \left\{a \to -\frac{1}{2}\right\}, \{a \to 1\}\right\}$

Por lo tanto, la solución está dada por $a = 1,\ a = -2,\ a = -1/2$.

Para sistemas de ecuaciones se sigue empleando el comando Solve. Las ecuaciónes se agrupan en una lista. Las variables para las que se desea resolver, en otra. La estructura básica es:

$$\textbf{Solve}[\{\},\{\}]$$

EJEMPLO **1.49** Resuelva $\begin{cases} 16h - 11b + 17 = 11h + 6b + 17 \\ 9h - 9b + 21 = -14h + 8b - 23 \end{cases}$.

La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$ `Solve[{16 h - 11 b + 17 == 11 h + 6 b + 17, 9 h - 9 b + 21 == -14 h + 8 b - 23}, {h, b}]`
- $\Leftarrow$ $\left\{\left\{h \to -\frac{22}{9},\ b \to -\frac{110}{153}\right\}\right\}$

Por lo tanto, la solución está dada por $h = -\dfrac{22}{9}$, $b = -\dfrac{110}{153}$.

Ejemplo **1.50** Resuelva $\begin{cases} -26a + 25b - 13c = 68 \\ 26a - 21b - 8c = -70 \\ -13a + 7b - 30c = -68 \end{cases}$.

La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$
```
Solve[{-26 a + 25 b - 13 c == 68, 26 a - 21 b - 8 c == -70,
  -13 a + 7 b - 30 c == -68}, {a, b, c}]
```

- $\Leftarrow$ `{{a → 6, b → 10, c → 2}}`

Por lo tanto, la solución está dada por $a = 6,\ b = 10,\ c = 2$.

Ejemplo **1.51** Para financiar la compra de un carro Guillermo pidió cierto dinero prestado al 10.5% de interés anual. Al final del año canceló el préstamo y pagó ₡1657500 junto con los intereses. Determine cuánto dinero prestado pidió Guillermo originalmente.

Designemos con x el dinero que pidió prestado Guillermo originalmente. Al cabo de un año el monto del dinero adeudado es $x + 10.5\,\dfrac{x}{100}$. Obtenemos así la siguiente ecuación:

$$x + 10.5\,\frac{x}{100} = 1657500$$

La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$ **Solve$\left[\left(\mathbf{x + 10.5\,\dfrac{x}{100} == 1657500}\right),\ \mathbf{x}\right]$**
- $\Leftarrow$ `{{x → 1.5 × 10^6}}`

La notación exponencial es debido a que hemos incluido decimales en los datos de entrada. Si cambiamos 10.5 por $\dfrac{21}{2}$ obtenemos $x = 1500000$. Por lo tanto, tenemos que ₡1500000 es el monto del préstamo.

1.4.2 Trabajando en el laboratorio

- Resuelva los siguientes ejercicios del libro [1]: 1546, 1571, 1574-1578, 1592, 1602, 1651, 1667, 1677, 1689, 1706, 1727, 1739, 1758, 1790, 1797, 1821, 1833, 1850, 1877, 1881, 1915, 1920, 1944, 1968, 1971, 1988, 2016, 2042, 2043,2054, 2071, 2084, 2089, 2106, 2121.

- Resuelva la ecuación $122522400 + 2092012500\,x + 15689008784\,x^2 + 67917689355\,x^3$ $+187517703248\,x^4 + 344130613273\,x^5 + 423918680606\,x^6 + 345073319005\,x^7 +$ $177100640052\,x^8 + 51606261547\,x^9 + 6469693230\,x^{10} = 0$

- El comando NSolve funciona en forma semejante a Solve, excepto que este proporciona aproximaciones decimales para las raíces buscadas. Aplíquelo para resolver:

  $$\frac{1}{2+x} + \frac{1}{3+x} + \frac{1}{5+x} + \frac{1}{7+x} + \frac{1}{11+x} + \frac{1}{13+x} + \frac{1}{17+x} + \frac{1}{19+x} + \frac{1}{23+x} + \frac{1}{29+x} = 0$$

  Nota: Esta ecuación se puede escribir como $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{x + Prime[k]} = 0$. La función $Prime[k]$ genera el k-ésimo primo. Por ejemplo, $Prime[1] = 2$, pues 2 es el primer primo.

- Resuelva para x la ecuación:

  $$\sqrt{x} - \sqrt{1+x} - \sqrt{2+x} = \sqrt{k+x}$$

1.4.3 Evaluación

Nombre:____

INSTRUCCIONES: Use *Mathematica* para resolver correctamente los siguientes ejercicios. Indique, para cada uno de ellos, los comandos que ha empleado.

$\boxed{\text{Examen Corto \# 2}}$

1. Resuelva la ecuación $36\,x^5 - 36\,x^4 - 205\,x^3 + 205\,x^2 + 49\,x - 49 = 0$. Verifique que $x = \dfrac{1}{2}$ es una de sus raíces.

2. Resuelva la ecuación
$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x - 1500i = 0$$
para x, variando (mediante un ciclo For) el parámetro i desde 1 hasta 5.

   Ayuda: Para $i = 1$, una solución es $x = -5.65196$.

3. Resuelva $\sqrt[3]{x+1} = x + \dfrac{1}{2}$. Determine si la única raíz es menor que 1 y mayor que 0.

1.5 Desigualdades

- OBJETIVO: *Mathematica* y su utilización en s.
- NUEVOS COMANDOS: ϵ, Reals
- REQUISITOS: Se supone que ya se ha expuesto en clase el tema referente
- TIEMPO ESTIMADO DE LA EXPOSICIÓN EN LA CLASE:
- TIEMPO ESTIMADO DE LA SESIÓN EN LABORATORIO:

1.5.1 Ejemplos

EJEMPLO **1.52** Resuelva $6a - 5 > 2a + 11$.
La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$ `Reduce[6 a - 5 > 2 a + 11, a]`
- $\Leftarrow$ `a > 4`

Por lo tanto, el conjunto solución es $(4, +\infty)$.

Ejemplo **1.53** Resuelva $(x^2 - 4)(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 6x + 8)(x^2 + 4x + 4) < 0$.
La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$ `Reduce[(x^2 - 4) (x^2 - 4 x + 4) (x^2 - 6 x + 8) (x^2 + 4 x + 4) < 0, x]`
- $\Leftarrow$ `-2 < x < 2 || 2 < x < 4`

Por lo tanto, el conjunto solución es $(-2, 2) \cup (2, 4)$.

Ejemplo **1.54** Resuelva $\dfrac{2g^2+18g-4}{g^2+9g+8} > 2$.

La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$ `Reduce[(2 g^2 + 18 g - 4)/(g^2 + 9 g + 8) > 2, g]`
- $\Leftarrow$ `-8 < g < -1`

Por lo tanto, la solución está dada por $(-8, -1)$.

EJEMPLO **1.55** Resuelva $|t+3| < 4$.

La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$ `Reduce[Abs[t + 3] < 4, t]`
- $\Leftarrow$ `-7 < Re[t] < 1 && -`$\sqrt{7 - 6\,\text{Re}[t] - \text{Re}[t]^2}$` < Im[t] < `$\sqrt{7 - 6\,\text{Re}[t] - \text{Re}[t]^2}$

Notamos que *Mathematica* está indicando la solución dentro de los número complejos. Si deseamos que solamente presente la solución dentro de los números reales, adjuntamos la condición ϵ Reals. Veamos:

- $\Rightarrow$ `Reduce[Abs[t + 3] < 4 && t ∈ Reals, t]`
- $\Leftarrow$ `-7 < t < 1`

Por lo tanto, la solución está dada por $(-7, 1)$.

Ejemplo **1.56** Resuelva $|4-3t| \geq 2-t$.

La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$ **Reduce[Abs[4 – 3 t] ≥ 2 – t, t]**
- $\Leftarrow$ t ≤ 1 || t ≥ $\frac{3}{2}$

Por lo tanto, la solución está dada por $(-\infty, 1] \cup [\frac{3}{2}, +\infty)$.

Ejemplo **1.57** Resuelva $\left|\dfrac{a^2-3a-1}{a^2+a+1}\right| \leq 3$.

La instrucción en *Mathematica* es:

- ⇒ `Reduce[Abs[(a^2 - 3 a - 1)/(a^2 + a + 1)] ≤ 3 && a ∈ Reals, a]`
- ⇐ `a ≤ -2 || a ≥ -1`

Por lo tanto, la solución está dada por $(-\infty, -2] \cup [-1, +\infty)$.

1.5.2 Trabajando en el laboratorio

- Resuelva los siguientes ejercicios del libro [1]: 2160, 2185, 2196, 2202, 2215, 2221, 2233, 2276, 2297-2299
- Resuelva
$$\frac{2310\,x^5 - 4889\,x^4 + 4121\,x^3 - 1729\,x^2 + 361\,x - 30}{5187\,x^4 - 286969\,x^3 + 921091\,x^2 - 577359\,x + 100674} \geq 0$$
Ayuda: $\frac{2}{5} \leq x \leq \frac{5}{11}$ es parte de la solución.
- Resuelva:
$$\frac{8}{231\ (2\,x-1)} - \frac{125}{6\ (5\,x-1)} + \frac{1331}{7\ (11\,x-2)} - \frac{4913}{22\ (17\,x-3)} \leq 0$$
Ayuda: $\frac{3}{17} < x < \frac{2}{11}$ es parte de la solución.
- Resuelva
$$12\,x^5 + 56\,x^4 - 11\,x^3 - 252\,x^2 - 127\,x + 70 < 0$$
Ayuda: $\frac{1}{3} < x < 2$ es parte de la solución.

1.5.3 Evaluación

Nombre: _ Instrucciones: Use *Mathematica* para resolver correctamente los siguientes ejercicios. Indique, para cada uno de ellos, los comandos que ha empleado.

Examen Corto # 3

1. Resuelva:
$$\frac{9\,x^4 + 9\,x^3 - 19\,x^2 - 9\,x + 10}{12\,x^4 + 32\,x^3 - 572\,x^2 - 1568\,x - 784} \geq 0$$
Ayuda: $\frac{2}{3} \leq x \leq 1$ es parte de la solución.

2. Resuelva:
$$\left|x^2 + x + 10\right| < 3\,x^2 + 7\,x - 2$$
Ayuda: $x < \dfrac{-3-\sqrt{33}}{2}$ es parte de la solución.

3. Resuelva:
$$\left|630\,x^6 - 6807\,x^5 + 19122\,x^4\right| > 16650\,x^3 - 1290\,x^2 - 3297\,x + 882$$

4. Resuelva $\left|3 + x^3\right| < 4$.

1.6 Funciones

- Objetivo: *Mathematica* y su utilización en el tema de funciones y sus aplicaciones..
- Nuevos comandos: definición de funciones, listas, la instrucción punto y coma, ListPlot, ==, Plot, PlotRange, Coefficient, Print, Min, Max, Table.
- Requisitos: Se supone que ya se ha expuesto en clase el tema referente
- Tiempo estimado de la exposición en la clase:
- Tiempo estimado de la sesión en laboratorio:

La declaración de funciones está sujeta a ciertas restricciones. La primera es que el parámetro o los parámetros en la declaración debe ir seguido una "raya abajo" _. Solamente en la declaración es necesario esto. Cuando se invoque la función NO se debe usar la "raya abajo". Por otro lado se debe tener muy presente que los únicos paréntesis que permite *Mathematica* para invocar funciones (propias o creadas por el usuario) son los rectangulares [ ].

1.6.1 Ejemplos

EJEMPLO **1.58** Sea $A(r) = \dfrac{2r-1}{r^2+2r-3}$. Calcule $A(3)$, $A(\frac{1}{2})$, $A(-1)$ y $A(x^2+1)$.

La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$
```
A[r_] = (2 r - 1)/(r^2 + 2 r - 3)
{A[3], A[1/2], A[-1], Simplify[A[x^2 + 1]]}
```
- $\Leftarrow$ $\left\{\dfrac{5}{12}, 0, \dfrac{3}{4}, \dfrac{1+2\,x^2}{4\,x^2+x^4}\right\}$

Por lo tanto, los valores requeridos son $\frac{5}{12}$, 0, $\frac{3}{4}$ y $\frac{2\,x^2+1}{x^4+4\,x^2}$.

En el ejemplo anterior hemos empleado el concepto de lista. Las listas son objetos generales que representan colecciones de expresiones. En cursos futuros usaremos listas para implementar el concepto de vector y matriz.

Podemos usar la instrucción punto y coma (;) para que *Mathematica* no devuelva la expresión ingresada. Además el punto y coma nos permite colocar varias instrucciones en una misma línea. Observe el siguiente ejemplo.

EJEMPLO **1.59** Sea $a(t) = t^2 + t$. Calcule $a(1-x) \div a(1-2x)$

La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$
```
a[t_] = t^2 + t;
Simplify[a[1 - x] / a[1 - 2 x]]
```

- $\Leftarrow$ $\dfrac{-2 + x}{-2 + 4\,x}$

Por lo tanto, $a(1-x) \div a(1-2x) = \dfrac{x-2}{4\,x-2}$.

Ejemplo **1.60** Halle las preimágenes de $y = -1$ si $y(a) = a^4 - 4a^3 + 6a^2 - 4a$.
La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$ **Solve[a^4 − 4 a^3 + 6 a^2 − 4 a == −1, a]**
- $\Leftarrow$ {{a → 1}, {a → 1}, {a → 1}, {a → 1}}

Por lo tanto, $a = 1$ es la única preimagen de $y = -1$.

Ejemplo **1.61** Halle el máximo dominio de definición real para $w(a) = -\sqrt{9-(a-9)^2}$.

Debemos determinar cuándo $9-(a-9)^2 \geq 0$. La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$ `Reduce[9 - (a - 9) ^2 ≥ 0, a]`
- $\Leftarrow$ `6 ≤ a ≤ 12`

Por lo tanto, $[6, 12]$ es el máximo dominio de definición real.

Ejemplo 1.62 Sean $f(x) = 2x^2$ y $g(x) = x^2 - 5x + 6$. Calcule $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$, $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$

```
f[x_] = 2 x^2; g[x_] = x^2 - 5 x + 6;
Simplify[{f[x] + g[x], f[x] - g[x], f[x] * g[x], f[x]/g[x],
  f[g[x]], g[f[x]]}]
```

- $\Leftarrow$

$$\left\{6 - 5x + 3x^2,\ -6 + 5x + x^2,\ 2x^2\,(6 - 5x + x^2),\ \frac{2x^2}{6 - 5x + x^2},\ 2\,(6 - 5x + x^2)^2,\ 6 - 10x^2 + 4x^4\right\}$$

Por lo tanto, $(f+g)(x) = 3x^2 - 5x + 6$, $(f-g)(x) = x^2 + 5x - 6$, $(f \cdot g)(x) = 2x^4 - 10x^3 + 12x^2$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - 5x + 6}$, $(f \circ g)(x) = 2\left(x^2 - 5\,x + 6\right)^2$ y $(g \circ f)(x) = 4\,x^4 - 10\,x^2 + 6$.

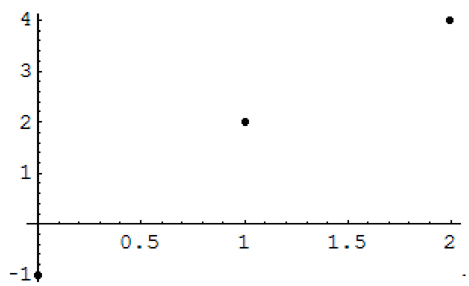
EJEMPLO **1.63** Represente en el plano cartesiano los puntos $(0,-1),(1,2),(2,4)$.

Los puntos dados se representan como una lista de puntos:

$$\{\{0,-1\},\{1,2\},\{2,4\}\}$$

Usamos luego el comando PlotStyle $\rightarrow$ PointSize[0.015] para indicar el grosor de los puntos en el ploteo. Invitamos al estudiante a variar ese valor. La instrucción en *Mathematica*, para el caso dado, es entonces:

- $\Rightarrow$ `ListPlot[{{0, -1}, {1, 2}, {2, 4}}, PlotStyle → PointSize[0.015]]`
- $\Leftarrow$



Para calcular la distancia entre puntos podemos usar la siguiente definición:

$$\texttt{Dep[x1\_, y1\_, x2\_, y2\_]} = \sqrt{(x1-x2)^2+(y1-y2)^2}$$

De foma análoga podemos definir una función que calcule el punto medio entre dos puntos:

$$\texttt{Pm[x1\_, y1\_, x2\_, y2\_]} = \left\{\frac{x1+x2}{2}, \frac{y1+y2}{2}\right\}$$

Usaremos estas funciones en algunos ejemplos posteriores.

Ejemplo 1.64 Halle la distancia entre los puntos $(3,4)$ y $\left(1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\right)$.
La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$ `Simplify[Dep[3, 4, 1 + √2, 1 - √2]]`
- $\Leftarrow$ $\sqrt{17 + 2\sqrt{2}}$

EJEMPLO **1.65** Calcule la distancia y el punto medio entre los puntos $(-17, -70)$, $(24, -55)$.
La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$
```
Dep[-17, -70, 24, -55]
N[%]
Pm[-17, -70, 24, -55]
N[%]
```

- $\Leftarrow$

$\sqrt{1906}$

43.6578

$\left\{\frac{7}{2}, -\frac{125}{2}\right\}$

{3.5, -62.5}

Por lo tanto, la distancia es ≈ 43.6578 y el punto medio es $(3.50, -62.50)$.

Ejemplo **1.66** Compruebe que los puntos $(5,-1)$, $(2,5)$, $(-1,-4)$ corresponden a los vértices de un triángulo rectángulo, y determine su área A.

En *Mathematica* usamos dos tipos de iguales: el simple $(=)$ y el doble $(==)$. El simple se usa para asignación y el doble para comparación. De esta forma si ingresamos $3 == 1+2$, *Mathematica* regresa un True.

La instrucción para el ejercicio propuesto en *Mathematica* sería:

- $\Rightarrow$

```
a = Dep[5, -1, 2, 5]
b = Dep[5, -1, -1, -4]
c = Dep[2, 5, -1, -4]
c^2 == a^2 + b^2
A = a b / 2
```

- $\Leftarrow$

$3\sqrt{5}$

$3\sqrt{5}$

$3\sqrt{10}$

True

$\frac{45}{2}$

Por lo tanto, el triángulo dado es rectángulo con catetos $3\sqrt{5}$ y $3\sqrt{5}$. La hipotenusa (el mayor valor) es $3\sqrt{10}$.

Ejemplo **1.67** Determinar si los puntos $(6,12)$, $(0,-6)$ y $(1,-3)$ son o no colineales.
La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$

```
a = Dep[6, 12, 0, -6]
b = Dep[6, 12, 1, -3]
c = Dep[0, -6, 1, -3]
a == b + c
```

- $\Leftarrow$

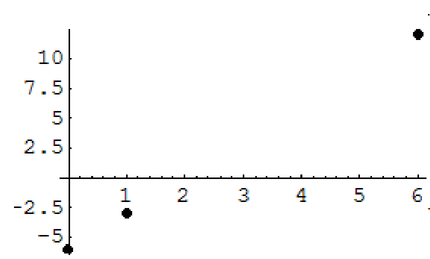
$6\sqrt{10}$

$5\sqrt{10}$

$\sqrt{10}$

True

Podemos inclusive graficar los puntos dados para hacer más evidente la conclusión:



Por lo tanto, los puntos en cuestión son colineales.

El comando Plot permite graficar una o varias funciones en un intervalo. El comando Plot admite algunos parámetros opcionales que pueden ser usados para lograr efectos especiales.

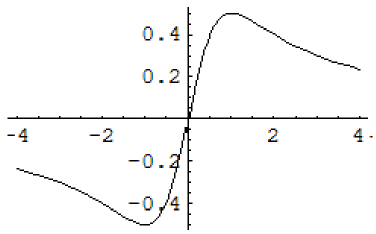
Ejemplo **1.68** Elabore la gráfica de $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ en el intevalo $[-4, 4]$.

La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$

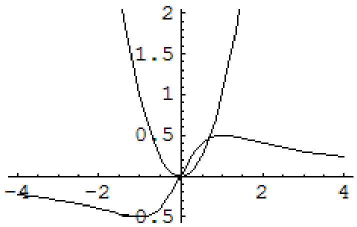
  $$\texttt{Plot}\left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}^2+\mathbf{1}},\ \{\mathbf{x},\ -\mathbf{4},\ \mathbf{4}\}\right]$$

- $\Leftarrow$

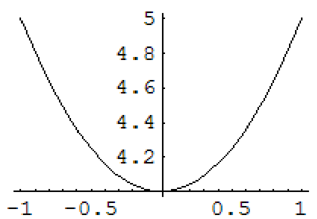


EJEMPLO **1.69** Elabore la gráfica de $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ y de $y = x^2$ en el intevalo $[-4, 4]$.

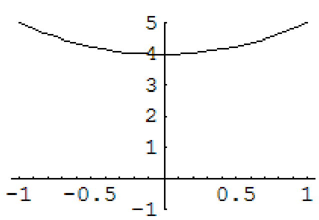
La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$ $\mathtt{Plot}\left[\left\{\dfrac{\mathtt{x}}{\mathtt{x}^2 + 1},\ \mathtt{x\hat{}2}\right\},\ \{\mathtt{x},\ -4,\ 4\}\right]$
- $\Leftarrow$ 

EJEMPLO **1.70** Elaborar la gráfica de $y = x^2 + 4$ en el intervalo $[-4, 4]$.
La instrucción en *Mathematica* es:

- ⇒ **`Plot[x^2 + 4, {x, -1, 1}]`**
- ⇐ 

Mathematica ha colocado el origen de coordenadas en el punto $(0, 4)$. Hasta donde se sabe, esto no se estila mucho en Costa Rica. Podemos indicarle a *Mathematica* el rango que deseamos mediante el comando PlotRange. Observe:

- ⇒ **`Plot[x^2 + 4, {x, -1, 1}, PlotRange → {-1, 5}]`**
- ⇐ 

Las funciones cuya fórmula involucra una condición pueden ser graficadas mediante la instrucción If que está dada por:

$$\text{If}[\underbrace{\text{condición}}, \underbrace{\text{acción si la condición es verdadera}}, \underbrace{\text{acción si la condición es falsa}}_{(*)}]$$

La parte que incluye $(*)$ es opcional. Si el proceso a realizar en caso de que la condición sea verdadera involucra varias instrucciones, estas se separan con punto y coma. Debemos hacer énfasis en que la instrucción If consta de 2 ó 3 partes separadas por comas.

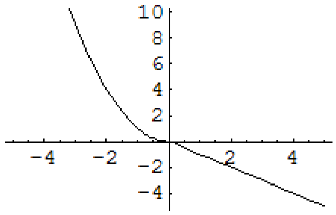
Ejemplo **1.71** Elabore la gráfica de $y = \begin{cases} x^2 : x \leq 0 \\ -x : x > 0 \end{cases}$ en el intervalo $[-5, 5]$.

La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$

```
Plot[If[x ≤ 0, x^2, -x], {x, -5, 5}]
```

- $\Leftarrow$



Ejemplo **1.72** Determine si $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ es par, impar o ninguna de estas.

La instrucción en *Mathematica* es:

- ⇒
```
f[x_] = √(1 - x^2);
f[x] == f[-x]
```

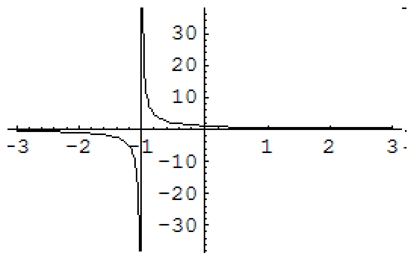
- ⇐ `True`

Por lo tanto, f es par.

EJEMPLO **1.73** Determine si $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ es decreciente en $[-3, 3]$.

Grafiquemos la función:

- $\Rightarrow$ **Plot[$\dfrac{1}{x+1}$, {x, -3, 3}]**



- $\Leftarrow$

Por lo tanto, f es decreciente en el intervalo dado. Notamos además que f presenta una discontinuidad en $x = -1$. Intuitivamente podemos decir que una función es continua en su dominio si puede trazarse sin despegar el lápiz del papel.

Para calcular la pendiente y la intersección con el eje y de una recta que pasa por un par de puntos, podemos crear la función

$$\texttt{Recta[x1\_, y1\_, x2\_, y2\_]} = \left\{\frac{\texttt{y2 - y1}}{\texttt{x2 - x1}},\ \texttt{y1} - \frac{\texttt{y2 - y1}}{\texttt{x2 - x1}}\,\texttt{x1}\right\};$$

que devuelve, por separado, estos dos valores.

EJEMPLO **1.74** Halle la ecuación de la recta que pasa por $(3, -16))$ y $(-11, -12)$.

La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$ **Recta[3, -16, -11, -12]**
- $\Leftarrow$ $\{-\frac{2}{7}, -\frac{106}{7}\}$

Por lo tanto, $y = -\frac{2}{7}x - \frac{106}{7}$ es la ecuación de la recta.

Nota: Por supuesto que se puede crear una función que dé explícitamente la ecuación de la recta. Invitamos al estudiante a investigar al respecto.

EJEMPLO **1.75** Determinar a de suerte que $3x + ay = 9$ tenga la misma pendiente que la recta que pasa por $(7, -2)$ y $(5, -1)$.

Primero despejamos y en $3x + ay = 9$ y luego calculamos la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados. La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$

```
Solve[3 x + a y == 9, y]
Recta[7, -2, 5, -1]
```

- $\Leftarrow$

$$\left\{\left\{y \to -\frac{3\,(-3+x)}{a}\right\}\right\}$$

$$\left\{-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right\}$$

Tenemos entonces que resolver la siguiente ecuación $-\dfrac{3}{a} = -\dfrac{1}{2}$. Por lo tanto, $a = 6$.

Para el estudio de cuadráticas podemos desarrollar un pequeño programa en *Mathematica* que sencillamente agrupa muchas de las instrucciones que ya hemos estudiado. Estudiemos el programa de la Fig. 1.1.

```
f[x_] = 4 (64 + 8 x + x^2) - 207;
f[x_] = Expand[f[x]];
a = Coefficient[f[x], x^2]; b = Coefficient[f[x], x]; c = f[0];
Δ = b^2 - 4 a c;
Print["f(x) =", f[x]]
Print["a = ", a, ", b = ", b, ", c = ", c]
Print["Vértice = (", -b/(2 a), ", ", -Δ/(4 a), ")"]
Print["Corta el eje y en: (0, ", f[0], ")"]
If[Δ ≥ 0, x1 = (-b + √Δ)/(2 a); x2 = (-b - √Δ)/(2 a);
 Print["Corta el eje x en:"];
 Print["x1 = ", x1, " aprox ", N[x1]];
 Print["x2 = ", x2, " aprox ", N[x2]];
 Plot[{f[x], 0}, {x, Min[x1, x2] - 3, Max[x1, x2] + 3}]
 ,
 Print["No corta el eje x"];
 Plot[{f[x], 0}, {x, -b/(2 a) - 3, -b/(2 a) + 3}]
]
```

Figura 1.1: Graficando una cuadrática

- (Línea 1) Declara la función a estudiar
- (Línea 2) Desarrolla la función. Útil en aquellos casos en los que no se da ya hecho.
- (Línea 3) Tomamos los diferentes coeficientes: $f(x) = a^2 + bx + c$.
- (Línea 4) Definimos el discriminante
- (Línea 5) Imprimimos la función ya desarrollada.
- (Línea 6) Imprimimos los coeficientes. Las comillas dobles es para indicarle a *Mathematica* que debe escribirse textualmente lo que está abarcado por ellas. Usamos comas para separar este texto de las variables cuyos valores queremos desplegar.
- (Línea 7) Imprimimos el vértice.
- (Línea 8) Indicamos en donde se corta el eje y.
- (Línea 9) Se abre una condición If que se cierra hasta la línea 17. Preguntamos si el discriminante es no negativo. En caso de que se cumpla esto, calculamos las raíces reales,
- (Línea 10) imprimos un mensaje sobre donde corta el eje x,
- (Línea 11) imprimos la "primera" raíz y su aproximación decimal,
- (Línea 12) imprimos la "segunda" raíz y su aproximación decimal,
- (Línea 13) graficamos, conjuntamente, la funciones $y = f(x)$ y $y = 0$ para evitar que *Mathematica* coloque el origen de coordenadas en el vértice de la parábola. El dominio de graficación va desde la raíz más pequeña dismininuida en 3 unidades hasta la más grande aumentada en 3 unidades. Invitamos al usuario a reemplazar este valor de 3 por uno que se "acomode" a la "envergadura" de las cantidades en juego.
- (Línea 14) Esta coma indica que se acabó las instrucciones a realizar en caso de que $\Delta \geq 0$. Debe notarse que al final de cada una de ellas hemos colocado un punto y coma.
- (Línea 15) Iniciamos el caso en que $\Delta < 0$. Indicamos aquí que no corta el eje x.
- (Línea 16) Graficamos la función desde $-\dfrac{b}{2a} - 3$ hasta $\dfrac{b}{2a} - 3$. De nuevo el 3 puede ser reemplazado por algo mejor. Investigue.
- (Línea 17) Cerramos el If.

El resultado de ejecutar este código produce el resultado que se muestra en la Fig. 1.2.

```
f(x) =49 + 32 x + 4 x^2
a = 4, b = 32, c = 49
Vértice = (-4, -15)
Corta el eje y en: (0, 49)
Corta el eje x en:
```

$$x1 = \frac{1}{8}\left(-32 + 4\sqrt{15}\right) \text{ aprox } -2.06351$$

$$x2 = \frac{1}{8}\left(-32 - 4\sqrt{15}\right) \text{ aprox } -5.93649$$

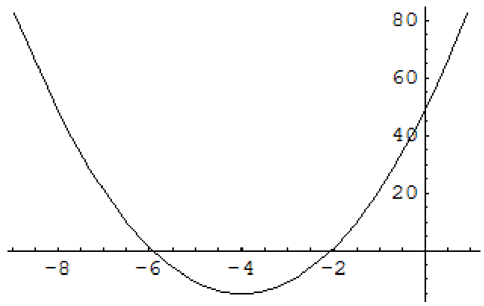


Figura 1.2: Resultado del estudio dela parábola $y = 4(64 + 8x + x^2) - 207$

EJEMPLO **1.76** Para $f(x) = x^2 - 38x - 47$ complete cuadrados y determine si posee un máximo o un mínimo.

En *Mathematica* realizamos un pequeño programa que resuelve este y otros casos similares:

• ⇒

```
f[x_] = x^2 - 38 x - 47;
Print["f(x) =", Simplify[f[x]]]
a = Coefficient[f[x], x^2]; b = Coefficient[f[x], x]; c = f[0];
"Completando cuadrados obtenemos:"
Factor[a x^2 + b x + (b/2)^2] + Simplify[-(b/2)^2 + c]
"El vértice"
Print["(", -b/(2 a), ", ", -(b^2 - 4 a c)/(4 a), ")"]
If[a > 0, "es un mínimo", "es un máximo"]
```

- $\Leftarrow$

  f(x) $=-47-38x+x^2$

  Completando cuadrados obtenemos:

  $-408+(-19+x)^2$

  El vértice

  (19, -408)

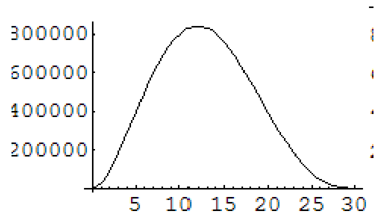
  es un mínimo

Ejemplo **1.77** Hallar dos números no negativos cuya suma es 30 que hagan máximo el producto del cuadrado de uno por el cubo del otro?

Resolveremos el problema como sigue:

- Nuestro objetivo es maximizar el producto del cuadrado de x por el cubo de y. De esta forma nuestra función es
$$P = x^2y^3 \tag{1.1}$$
- La ecuación (1.1) depende de dos variables, y la relación entre ambas es $x + y = 30$, o bien:
$$y = 30 - x. \tag{1.2}$$
Sustituimos (1.2) en (1.1) y obtenemos:
$$P = x^2(30 - x)^3 \tag{1.3}$$
- Dado que x es no negativo se tiene que $x \geq 0$, por otro lado si la suma de x y y es 30, el valor máximo de x es 30. Nuestro intervalo de factibilidad es entonces:
$$0 \leq x \leq 30 \tag{1.4}$$
- El problema se ha reducido a hallar los extremos de la función $P = x^2(30 - x)^3$ en $[0, 30]$. Grafiquemos esta función:

⇒
```
f[x_] = x^2 (30 - x)^3;
Plot[f[x], {x, 0, 30}]
```
⇐



Observando este dibujo notamos que el máximo aparentemente está entre 10 y 15. El comando Table permite crear una lista de elementos a partir de una fórmula (tabla de valores) indicando en cuándo deseamos aumentar el contador. El primer argumento es la fórmula, el segundo inicia con el nombre del contador, el punto de inicio, el punto de fin y luego el incremento.

⇒
```
Table[{i, f[i]}, {i, 10, 15, 0.5}]
```
⇐
```
{{10, 800000}, {10.5, 817490.}, {11., 829939.},
 {11.5, 837357.}, {12., 839808.}, {12.5, 837402.}, {13., 830297.},
 {13.5, 818690.}, {14., 802816.}, {14.5, 782945.}, {15., 759375.}}
```

Por supuesto que si disminuimos el incrimento del contador, podemos aproximar mejor el punto máximo.

- Con la evidencia que tenemos conjeturamos que el producto es máximo cuando $x = 12$. Usamos luego la ecuación (1.2) para hallar el valor *optimal* de y, a saber:

$$y = 30 - 12 = 18.$$

Los números buscados son entonces 12 y 18.
Nota: Se si se usa cálculo diferencial, se llega a la misma conclusión.

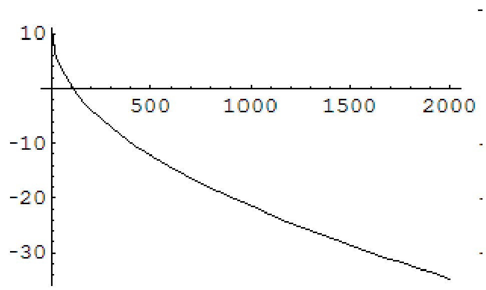
EJEMPLO **1.78** Determine el rango de $f(x) = -\sqrt{x-8} + 10$, si su dominio es $D = [8, +\infty]$.

En este caso, vamos simplemente a graficar y con base en esto, determinar el rango. Podemos intentar con diferentes de valores para emular el infinito. Es decir tomar talvez $[8, 20]$, $[8, 200]$, $[8, 2000]$.

- $\Rightarrow$

```
f[x_] = -√(x - 8) + 10;
Plot[f[x], {x, 8, 2000}]
```

- $\Leftarrow$



El rango es (aparentemente) $]-\infty, 10]$. Se debería justificar con teoría que lo anterior es efectivamente verdadero.

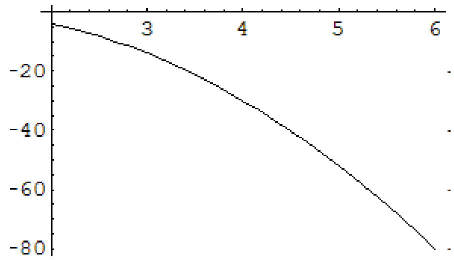
Ejemplo **1.79** Determinar si $f(x) = -3x^2 + 5x - 2$ cuyo dominio es $D = [2, 6]$ y codominio $C = [-80, -4]$ es biyectiva.

Grafiquemos la función:

- $\Rightarrow$

```
f[x_] = -3 x^2 + 5 x - 2;
Plot[f[x], {x, 2, 6}]
```

- $\Leftarrow$



Con base en la gráfica notamos que la función es estrictamente decreciente, y por lo tanto inyectiva. Como f es continua, $f(2) = -4$ y $f(6) = -80$, tenemos que f es sobreyectiva. Por lo tanto, f es biyectiva.

Ejemplo **1.80** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -4\sqrt[3]{2x+10}$. Halle la inversa de f. La instrucción en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$

```
Solve[y == -4 ∛(2 x + 10) , x]
% /. {x → y, y → x}
```

- $\Leftarrow$

$$\left\{\left\{x \to \frac{1}{128}\,(-640 - y^3)\right\}\right\}$$

$$\left\{\left\{y \to \frac{1}{128}\,(-640 - x^3)\right\}\right\}$$

Por lo tanto, $f^{-1}(x) = -\dfrac{x^3+640}{128}$.

1.6.2 Trabajando en el laboratorio

- Resuelva los siguientes ejercicios del libro [1]: 2337, 2345, 2355, 2372, 2380, 2423, 2434, 2445, 2457, 2468, 2473, 2481, 2503, 2524, 2529, 2530, 2557, 2559, 2567,2593, 2606, 2659, 2675, 2692, 2694, 2733, 2734, 2764, 2783, 2796, 2822, 2837, 2875, 2888, 2900, 2925, 2931, 2942, 2976, 3000, 3010

- Suponga que

$$f(x) = \sqrt{1 + \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{1+(1+x^4)^3}}$$

  Determine si

  * $f\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right) = \sqrt{1 + \dfrac{1+\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{35\left(611-432\sqrt{2}\right)}}.$

  * $f\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{1 + \dfrac{1+\sqrt{1+x}}{1+(1+x^2)^3}}$

  * $f\left(f(x)\right) = \sqrt{1 + \dfrac{1+\sqrt{2+\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{1+(1+x^4)^3}}}{1+\left(1+\left(1+\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{1+(1+x^4)^3}\right)^2\right)^3}}$

  * Determine si f es monótona en $[2,5]$ y determine el tipo de monotonía.

- Grafique los siguientes puntos en el plano cartesiano y verifique luego que pertenecen a un semicírculo. Determine el radio de el círculo en cuestón.

$$\left\{(-3,0), (-2,\sqrt{5}), (-1,2\sqrt{2}), (0,3), (1,2\sqrt{2}), (2,\sqrt{5}), (3,0)\right\}$$

- Halle la ecuación de un polinomio cúbico que pase por los puntos $(1, 12)$, $(2, 21)$, $(3, 34)$ y $(4, 51)$ y grafíquela. Proceda de la siguiente forma:
  - Suponga que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
  - Use la ecuaciones $f(1) = 12$, $f(2) = 21$, $f(3) = 34$ y $f(4) = 51$ para plantear un sistema de ecuaciones.
  - Resuelva el sistema anterior para a, b, c y d.
  - Realice el gráfico

1.6.3 Evaluación

Nombre: _ INSTRUCCIONES: Use *Mathematica* para resolver correctamente los siguientes ejercicios. Indique, para cada uno de ellos, los comandos que ha empleado.

$\boxed{\text{Examen Corto \# 4}}$

1.
2.
3.

1.7 Derivadas y aplicaciones

- OBJETIVO: *Mathematica* y su utilización en el estudio de la derivada y sus aplicaciones.
- NUEVOS COMANDOS: Length
- REQUISITOS: Se supone que ya se ha expuesto en clase el tema referente derivadas y sus aplicaciones.
- TIEMPO ESTIMADO DE LA EXPOSICIÓN EN LA CLASE:
- TIEMPO ESTIMADO DE LA SESIÓN EN LABORATORIO:

1.7.1 Ejemplos

Ejemplo 1.81 Calcule, usando la definición, la derivada de $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$

El código en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$

```
f[x_] = x^2 Sin[x];
(f[x + h] - f[x])/h
Expand[%]
Expand[Limit[%, h → 0]]
```

- $\Leftarrow$

$$\frac{-x^2 \operatorname{Sin}[x] + (h+x)^2 \operatorname{Sin}[h+x]}{h}$$

$$-\frac{x^2 \operatorname{Sin}[x]}{h} + h \operatorname{Sin}[h+x] + 2 x \operatorname{Sin}[h+x] + \frac{x^2 \operatorname{Sin}[h+x]}{h}$$

$$x^2 \operatorname{Cos}[x] + 2 x \operatorname{Sin}[x]$$

Por lo tanto, $\left(x^2 \operatorname{sen} x\right)' = x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x$.

Ejemplo **1.82** Sea $f(x) = |x-1| - |x+1|$. Grafique f y determine si es derivable en $a = -1$ y en $a = 1$.

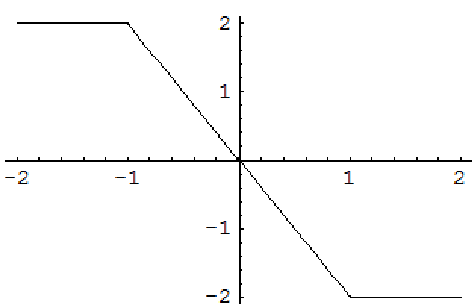
El código en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$

```
f[x_] = Abs[x - 1] - Abs[x + 1];
Print["Derivadas laterales en a = 1"]; a = 1;
Limit[(f[a + h] - f[a])/h, h → 0, Direction → 1]
Limit[(f[a + h] - f[a])/h, h → 0, Direction → -1]
Print["Derivadas laterales en a = -1"]; a = -1;
Limit[(f[a + h] - f[a])/h, h → 0, Direction → 1]
Limit[(f[a + h] - f[a])/h, h → 0, Direction → -1]
Plot[f[x], {x, -2, 2}]
```

- $\Leftarrow$

```
Derivadas laterales en a = 1

-2

0

Derivadas laterales en a = -1

0

-2
```



Por lo tanto, f no es derivable en $a = -1$ ni en $a = 1$.

Ejemplo **1.83** Calcule la derivada de $f(x) = \dfrac{x^2\,(x^5+\tan(x))^3}{1-\sec x}$.

El código en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$

```
D[(x^2 (x^5 + Tan[x])^3)/(1 - Sec[x]), x]
```

- $\Leftarrow$

$$\frac{3\,x^2\,(5\,x^4+\mathrm{Sec}[x]^2)\,(x^5+\mathrm{Tan}[x])^2}{1-\mathrm{Sec}[x]}+\frac{2\,x\,(x^5+\mathrm{Tan}[x])^3}{1-\mathrm{Sec}[x]}+\frac{x^2\,\mathrm{Sec}[x]\,\mathrm{Tan}[x]\,(x^5+\mathrm{Tan}[x])^3}{(1-\mathrm{Sec}[x])^2}$$

Por lo tanto,

$$f'(x) = \frac{3\,x^2\,\left(5\,x^4+\sec^2 x\right)\,\left(x^5+\tan x\right)^2}{1-\sec x}+\frac{2\,x\,\left(x^5+\tan x\right)^3}{1-\sec x}+\frac{x^2\,\sec x\,\tan x\,\left(x^5+\tan x\right)^3}{(1-\sec x)^2}$$

EJEMPLO **1.84** Suponga que $f(x) = \ln(e^x + \operatorname{arcsen}^2(2^x))$. Calcule $f'(x)$.

El código en *Mathematica* es:

- ⇒

```
D[Log[E^x + ArcSin[2^x]^2], x]
Simplify[Apart[%]]
```

$$\frac{e^x + \frac{2^{1+x}\,\text{ArcSin}[2^x]\,\text{Log}[2]}{\sqrt{1-2^{2x}}}}{e^x + \text{ArcSin}[2^x]^2}$$

- ⇐ $$\frac{(-1+4^x)\,e^x - 2^{1+x}\sqrt{1-4^x}\,\text{ArcSin}[2^x]\,\text{Log}[2]}{(-1+4^x)\,(e^x + \text{ArcSin}[2^x]^2)}$$

Por lo tanto,

$$f'(x) = \frac{(-1+4^x)\;e^x - 2^{1+x}\sqrt{1-4^x}\;\operatorname{arcsen}(2^x)\;\ln 2}{(-1+4^x)\;\left(e^x + \operatorname{arcsen}(2^x)^2\right)}$$

Ejemplo 1.85 Suponga que $f(x)=\ln\left(\dfrac{(2\,x-4)\;(3\,x+1)\;(5\,x-2)\;(1+\tan x)}{(3\,x+7)\;\sqrt{x^2+1}}\right)$. Calcule y simplifique $f'(x)$.

El código en *Mathematica* es:

- ⇒

```
D[Log[ (3 x + 1) (2 x - 4) (5 x - 2) (1 + Tan[x]) / (Sqrt[1 + x^2] (3 x + 7)) ], x];
Simplify[%]
```

- ⇐

```
((28 + 12 x - 189 x^2 + 24 x^3 - 172 x^4 + 12 x^5 + 45 x^6) Sec[x]^2 +
    (-12 - 462 x + 198 x^2 - 127 x^3 + 210 x^4 + 45 x^5) (1 + Tan[x])) /
  ((28 + 12 x - 189 x^2 + 24 x^3 - 172 x^4 + 12 x^5 + 45 x^6) (1 + Tan[x]))
```

Por lo tanto,

$$f'(x)=\frac{\left(28+12\,x-189\,x^2+24\,x^3-172\,x^4+12\,x^5+45\,x^6\right)\,\sec^2 x+\left(-12-462\,x+198\,x^2-127\,x^3+210\,x^4+45\,x^5\right)\,(1+\tan x)}{(28+12\,x-189\,x^2+24\,x^3-172\,x^4+12\,x^5+45\,x^6)\;(1+\tan x)}$$

Ejemplo **1.86** Suponga que $f(x) = \dfrac{(2\,x-4)\ (3\,x+1)\ (5\,x-2)\ (1+\tan x)}{(3\,x+7)\ \sqrt{x^2+1}}$. Calcule y simplifique la derivada de $f(x)$.

El código en *Mathematica* es:

- ⇒

```
D[ ((3 x + 1) (2 x - 4) (5 x - 2) (1 + Tan[x])) / (Sqrt[1 + x^2] (3 x + 7)) , x];
Simplify[%]
```

- ⇐

```
((56 + 24 x - 378 x^2 + 48 x^3 - 344 x^4 + 24 x^5 + 90 x^6) Sec[x]^2 +
   2 (-12 - 462 x + 198 x^2 - 127 x^3 + 210 x^4 + 45 x^5) (1 + Tan[x])) /
 ((7 + 3 x)^2 (1 + x^2)^(3/2))
```

Por lo tanto,

$$f'(x) = \frac{\left(56+24\,x-378\,x^2+48\,x^3-344\,x^4+24\,x^5+90\,x^6\right)\ \sec^2 x + 2\ \left(-12-462\,x+198\,x^2-127\,x^3+210\,x^4+45\,x^5\right)\ (1+\tan x)}{(7+3\,x)^2\ (1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Ejemplo **1.87** Suponga que $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{1+e^x}}{1+x^2}$. Calcule la tercera derivada de $f(x)$.

El código en *Mathematica* es:

$$\texttt{D}\left[\frac{\texttt{1 + }\sqrt{\texttt{1 + E\^{}x}}}{\texttt{1 + x\^{}2}}\texttt{, \{x, 3\}}\right]\texttt{;}$$

- $\Rightarrow$ `Simplify[%]`

- $\Leftarrow$

$$\frac{1}{8\,(1+x^2)^4}\left(-192\,\left(1+\sqrt{1+e^x}\right)\,x\,(-1+x^2) - \frac{12\,e^x\,(2+e^x)\,x\,(1+x^2)^2}{(1+e^x)^{3/2}} + \frac{e^x\,(4+2\,e^x+e^{2\,x})\,(1+x^2)^3}{(1+e^x)^{5/2}} + \frac{24\,e^x\,(1+x^2)\,(-1+3\,x^2)}{\sqrt{1+e^x}}\right)$$

Por lo tanto,

$$f'''(x) = \frac{-192\,\left(1+\sqrt{1+e^x}\right)\,x\,\left(-1+x^2\right) - \frac{12\,e^x\,(2+e^x)\,x\,\left(1+x^2\right)^2}{(1+e^x)^{\frac{3}{2}}} + \frac{e^x\,\left(4+2\,e^x+e^{2\,x}\right)\,\left(1+x^2\right)^3}{(1+e^x)^{\frac{5}{2}}} + \frac{24\,e^x\,\left(1+x^2\right)\,\left(-1+3\,x^2\right)}{\sqrt{1+e^x}}}{8\,(1+x^2)^4}$$

Ejemplo **1.88** Suponga que $f(x) = (1 + x^2)^3$. Calcule $f'(1)$.

El código en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$
```
f[x_] = (1 + x^2)^3
f'[1]
```
- $\Leftarrow$

  $(1 + x^2)^3$

  24

Por lo tanto, $f'(1) = 24$.

EJEMPLO **1.89** Halle y' si se sabe que $x^3 - 2x^2y + 3xy^2 = 38$.

En este caso se le debe indicar a *Mathematica* que la variable y está en función de la variable x. Para esto sustituimos y por $y[x]$. Además se debe cambiar el $=$ simple, por el doble $==$. Después de efectuar la derivación, reemplazamos $y'[x]$ por y y también $y[x]$ por y. Finalmente despejamos yp. El código en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$

```
D[x^3 - 2 x^2 y[x] + 3 x y[x]^2 == 38, x]
% /. {y'[x] → yp, y[x] → y}
Solve[%, yp]
```

- $\Leftarrow$

$$3\,x^2 - 4\,x\,y[x] + 3\,y[x]^2 - 2\,x^2\,y'[x] + 6\,x\,y[x]\,y'[x] == 0$$

$$3\,x^2 - 4\,x\,y + 3\,y^2 - 2\,x^2\,yp + 6\,x\,y\,yp == 0$$

$$\left\{\left\{yp \to \frac{3\,x^2 - 4\,x\,y + 3\,y^2}{2\,x\,(x - 3\,y)}\right\}\right\}$$

Por lo tanto, $y' = \dfrac{3\,x^2 - 4\,x\,y + 3\,y^2}{2\,x\,(x - 3\,y)}$.

EJEMPLO **1.90** Suponga que $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$ en el que a, b y h son números reales no nulos. Hallar $y''(x)$.

El proceso a seguir es semejante al usado en el ejemplo 1.89. Sin embargo en este caso se presenta un programa un poco más elaborado con el fin de que sea empleado en otros ejercicios semejantes. Se empieza liberando la variable yp, previendo que no contenga valores antiguos. Se continúa asignado un nombre a la relación, a saber Eq. En le siguiente rengón se cambia y por $y[x]$. Posteriormente se deriva con respecto a x y, en el resultado, se sustituye $y'[x]$ por yp y $y[x]$ por y. Se resuelve ahora la ecuación que contiene a yp y el resultado se asigna a yp. Se emplea [[1]][[1]][[2]] para acceder al interior del conjunto solución que arroja el comando Solve. Ciertamente es algo tedioso. Seguidamente se presenta la primera derivada. En el siguiente renglón se deriva con respecto a x. Se debe recordar que la expresión que se está derivando solo contiene variables x y y. Se sustituye $y'[x]$ por yp y $y[x]$ por y. A continuación se suma la expresión y se factoriza. En el paso final se pretende emplear la relación original para simplificar el resultado obtenido. Se trata de sustituir $Eq[[1]]$, en este caso se tiene que es $ax^2 + 2hxy + by^2$ por $Eq[[2]]$, o bien 1, toda vez que se halle la expresión.

El código en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$

```
yp =.
Eq = a x^2 + 2 h x y + b y^2 == 1
Eq /. {y → y[x]};
D[%, {x, 1}] /. {y'[x] → yp, y[x] → y};
yp = Solve[%, yp][[1]][[1]][[2]];
Print["y'=", yp]; yp /. y → y[x];
D[%, {x, 1}];
% /. {y'[x] → yp, y[x] → y};
Factor[Together[%]];
Print["y''=", % /. Eq[[1]] → Eq[[2]]]
```

- $\Leftarrow$

$$a x^2 + 2 h x y + b y^2 == 1$$

$$y' = \frac{-a x - h y}{h x + b y}$$

$$y'' = \frac{-a b + h^2}{(h x + b y)^3}$$

Por lo tanto, $y'' = \dfrac{h^2 - ab}{(hx + by)^3}$.

Nota: Un reto interesante es modificar el programa anterior, usando ciclos, para que permita hallar derivadas implícitas de cualquier orden.

Ejemplo **1.91** Hallar $\dfrac{dy}{dx}$ en el punto $(2,3)$ si $x^2+xy+2y^2=28$.

El proceso a seguir es semejante al usado en el ejemplo 1.89. Después de despejar y', evaluamos en el punto $(2,3)$. El código en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$

```
x^2 + x y + 2 y^2 == 28;
D[% /. y → y[x], x]
% /. {y'[x] → yp, y[x] → y}
Solve[%, yp][[1]][[1]][[2]] /. {x → 2, y → 3}
```

- $\Leftarrow$

$$x^2 + x\,y + 2\,y^2 == 28$$

$$2\,x + y[x] + x\,y'[x] + 4\,y[x]\,y'[x] == 0$$

$$2\,x + y + x\,yp + 4\,y\,yp == 0$$

$$-\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, $y'=-\dfrac{1}{2}$.

Ejemplo **1.92** Sea $f(x) = \dfrac{1 - 2\,x + 3\,x^4}{1 + x^2}$. Halle las ecuaciones de la recta tangente y la recta normal en $x = 1$. Grafique conjuntamente $y = f(x)$ y dichas rectas en el intervalo $[-0.5, 1.5]$.

Usaremos $y = m_t x + b_t$ para la ecuación de la recta tangente y $y = m_n x + b_n$ para la de la normal. El código en *Mathematica* es:

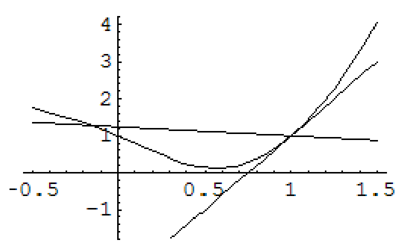
- $\Rightarrow$

```
f[x_] = (3 x^4 - 2 x + 1)/(x^2 + 1);
a = 1;
mt = f'[a];
bt = f[a] - mt * a;
Print["Recta tangente: y = ", mt x + bt]
mn = -1/f'[a];
bn = f[a] - mn * a;
Print["Recta normal: y = ", mn x + bn]
Plot[{f[x], mt x + bt, mn x + bn}, {x, -0.5, 1.5}]
```

- $\Leftarrow$

```
Recta tangente: y = -3 + 4 x
```

Recta normal: $y = \frac{5}{4} - \frac{x}{4}$



No se observa la perpendicularidad de la recta tangente y la recta normal debido al cambio de escala en los ejes coordenados. Si se agrega la instrucción AspectRatio $\rightarrow$ Automatic al comando Plot, tal como sigue

```
Plot[{f[x], mt x + bt, mn x + bn}, {x, -0.5, 1.5},
 AspectRatio → Automatic]
```

se obtiene una gráfica en la que se puede apreciar dicha perpendicularidad.

EJEMPLO **1.93** Halle la recta tangente a la curva $y^3 - xy^2 + \cos(xy) = 2$ cuando $x = 0$.

Es fácil ver que cuando $x = 0$ se tiene que $y = 1$. El resto de la solución es semejante a los problemas precedentes. El código en *Mathematica* es:

- ⇒

```
yp =.
Punto = {0, 1};
Eq = y^3 - x y^2 + Cos[x y] == 2;
Eq /. {y → y[x]};
D[%, {x, 1}] /. {y'[x] → yp, y[x] → y};
yp = Solve[%, yp][[1]][[1]][[2]];
Print["y'=", yp]; yp /. y → y[x];
m = % /. {x → Punto[[1]], y → Punto[[2]]};
b = Punto[[2]] - m * Punto[[1]];
Print["Recta tangenge: y = ", m x + b]
```

- ⇐

$$y' = \frac{-y^2 - y\,\mathrm{Sin}[x\,y]}{2\,x\,y - 3\,y^2 + x\,\mathrm{Sin}[x\,y]}$$

Recta tangenge: $y = 1 + \frac{x}{3}$

Por supuesto que el programa se puede mejorar para que proporcione, también, la ecuación de la recta normal. Se deja como ejercicio.

Ejemplo **1.94** Sea $f(x) = 6\,x - \dfrac{7\,x^2}{2} - 12\,x^3 + \dfrac{7\,x^4}{4} + \dfrac{6\,x^5}{5}$. Halle los puntos en los que hay tangentes horizontales.

El código en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$

```
f[x_] = 6 x - 7 x^2/2 - 12 x^3 + 7 x^4/4 + 6 x^5/5
Solve[f'[x] == 0, x]
```

- $\Leftarrow$

$$6\,x - \frac{7\,x^2}{2} - 12\,x^3 + \frac{7\,x^4}{4} + \frac{6\,x^5}{5}$$

$$\left\{\{x \to -3\}, \left\{x \to -\frac{1}{2}\right\}, \left\{x \to \frac{1}{3}\right\}, \{x \to 2\}\right\}$$

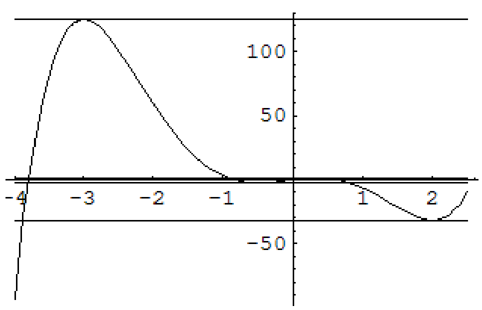
Para hallar los puntos en los que se produce una tangente horizontal, basta evaluar en f, los ceros de la derivada obtenidos anteriormente. Se incluye, a continuación, el gráfico de la función $y = f(x)$ y dichas tangetes horizontales.

- $\Rightarrow$

```
{{-3, f[-3.]}, {-1/2, f[-1./2]}, {1/3, f[1./3]}, {2, f[2]}}
Plot[{f[x], f[-3], f[-1/2], f[1/3], f[2]}, {x, -4, 2.5}]
```

- $\Leftarrow$

$$\left\{\{-3,\ 124.65\}, \left\{-\frac{1}{2},\ -2.30313\right\}, \left\{\frac{1}{3},\ 1.19321\right\}, \left\{2,\ -\frac{158}{5}\right\}\right\}$$



Por limitaciones de escala, en el gráfico anterior no se aprecian apropiadamente todas las tangentes horizontales.

Ejemplo **1.95** Una pelota arrojada hacia arriba con una velocidad inicial de 48 pies desde lo alto de un edificio de 169 pies de altura cae al suelo en la base del edificio. ¿Cuánto tiempo permanece en el aire y cuál es su altura máxima?

El código en *Mathematica* es:

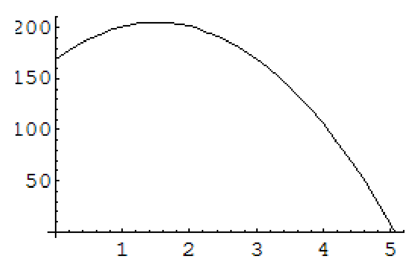
- ⇒
```
v0 = 48;
s0 = 169;
s[t_] = -16 t^2 + v0 t + s0
Solve[s[t] == 0, t]
Solve[s'[t] == 0, t]
```
- ⇐
$169 + 48\,t - 16\,t^2$

$\{\{t \to \frac{1}{4}(6-\sqrt{205})\}, \{t \to \frac{1}{4}(6+\sqrt{205})\}\}$

$\{\{t \to \frac{3}{2}\}\}$

Se tiene entonces que la pelota se mantiene en el aire desde el instante inicial $t = 0$, hasta llegar al suelo ($s = 0$) que ocurre cuando $t = \frac{6+\sqrt{205}}{4}$. Se nota además que la pelota alcanza su punto máximo cuando $t = \frac{3}{2}$. Para hallar este máximo se debe evaluar en s. A continuación se muestra el resultado junto con la gráfica de la trayectoria.

- ⇒
```
s[3/2.]
Plot[{s[t], 0}, {t, 0, 1/4 (6 + √205)}]
```
- ⇐ 205



Nota: Se debe observar que el valor $t = \frac{6-\sqrt{205}}{4}$ es negativo y por eso se desestima. No hay tiempo negativo. El tiempo se considera a partir de que la bola inicia su trayectoria.

Ejemplo **1.96** Suponga que $f(x) = x - \dfrac{5\,x^3}{3} + \dfrac{4\,x^5}{5}$. Halle los puntos en los que la función alcanza sus extremos locales e indique sus intervalos de monotonía.

Se presenta a continuación un programa que resuelve este problema y otros similares. Se emplea el comando Reduce para resolver las desigualdades involucradas. Se nombra con Sol al conjunto solución. Mediante un ciclo se recorre cada uno de los ceros hallados. El comando Length permite saber el número de elementos en el conjunto solución. Se usa la variable cero para procesar cada una de las raíces de la derivada que se ha hallado. Seguidamente se emplea el criterio de la segunda derivada. Se sabe que si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$, entonces el punto $(a, f(a))$ es un mínimo local. De igual forma si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$, entonces el punto $(a, f(a))$ es un máximo local. El código en *Mathematica* es:

- ⇒

```
f[x_] = x - 5 x^3/3 + 4 x^5/5;
"La función es creciente en:"
Reduce[f'[x] > 0, x]
"La función es decreciente en:"
Reduce[f'[x] < 0, x]
Sol = Solve[f'[x] == 0, x];
For[i = 1, i ≤ Length[Sol],
 cero = Sol[[i]][[1]][[2]];
 If[f''[cero] > 0, Print["(", cero, ", ", f[cero],
   ") es un mínimo"]];
 If[f''[cero] < 0, Print["(", cero, ", ", f[cero],
   ") es un máximo"]];
 i++]
```

- ⇐

La función es creciente en:

$x < -1 \,||\, -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \,||\, x > 1$

La función es decreciente en:

$-1 < x < -\frac{1}{2} \,||\, \frac{1}{2} < x < 1$

$(-1, -\frac{2}{15})$ es un máximo

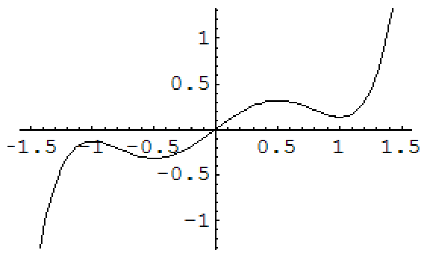
$(-\frac{1}{2}, -\frac{19}{60})$ es un mínimo

$(\frac{1}{2}, \frac{19}{60})$ es un máximo

$(1, \frac{2}{15})$ es un mínimo

Se puede ahora graficar la función para complementar el estudio.

- ⇒ `Plot[f[x], {x, -1.5, 1.5}]`
- ⇐



Nota: Dependiendo de la función que se estudie, el programa anterior puede ser insuficiente. No hay garantía que siempre se puedan resolver, en forma explícita, las desigualdades involucradas.

EJEMPLO **1.97** Suponga que $f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 12x - 7$. Estudiar la concavidad de f. Determine además los puntos de inflexión.

El procedimiento es semejante al empleado en el ejemplo 1.96. Recuerde que una función es feliz (cóncava hacia arriba) si $f''(x) > 0$ y triste (cóncava hacia abajo) si $f''(x) < 0$. Los puntos de inflexión ocurren en aquellos puntos en los que se cambia de concavidad.

- $\Rightarrow$

```
f[x_] = 3 x^4 - 10 x^3 - 12 x^2 + 12 x - 7;
"La función es feliz en:"
Reduce[f''[x] > 0, x]
"La función es triste en:"
Reduce[f''[x] < 0, x]

Sol = Solve[f''[x] == 0, x];
"Puntos de inflexión"
For[i = 1, i ≤ Length[Sol],
 cero = Sol[[i]][[1]][[2]];
 Print["(", cero, ", ", f[cero], ")"]
  i++]
```

- $\Leftarrow$

La función es feliz en:

$x < -\frac{1}{3} \,||\, x > 2$

La función es triste en:

$-\frac{1}{3} < x < 2$

Puntos de inflexión

$(-\frac{1}{3}, -\frac{322}{27})$

$(2, -63)$

El programa tiene un error. ¿Cuál es? Note que no se verifica si efectivamente se da un cambio de concavidad en los puntos en los que se anula la segunda derivada. Si se usa

$$f(x) = \frac{-9\,x^2}{2} + x^3 + \frac{2\,x^4}{3} - \frac{3\,x^5}{10} + \frac{x^6}{30}$$

el progama indicará que f posee un punto de inflexión en $\left(3, -\frac{81}{100}\right)$, lo cual es falso. Por su puesto que se puede mejorar el programa propuesto, pero requiere algo de trabajo. Se deja como un reto.

EJEMPLO **1.98** Suponga que $f(x) = 2\,x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{14\,x^3}{3} + \dfrac{5\,x^4}{4} + \dfrac{6\,x^5}{5}$. Halle los extremos de f en el intervalo $[0, 2]$.

Se debe considerar el valor de la función en los extremos del intervalo y el valor de la función en los números que anulan la derivada, toda vez que dichos valores se hallen en el intervalo de búsqueda. El código en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$

```
f[x_] = 2 x + x^2/2 - 14 x^3/3 + 5 x^4/4 + 6 x^5/5;
a = 0;
b = 2;
"La derivada se anula en:"
Sol = Solve[f'[x] == 0, x]
Valores = {{a, f[a]}};
For[i = 1, i ≤ Length[Sol],
 cero = Sol[[i]][[1]][[2]];
 If[cero > a && cero < b,
  Valores = Valores ⋃ {{cero, f[cero]}}];
 i++]
"Elija el máximo y el mínimo:"
Valores = Valores ⋃ {{b, f[b]}}
"o bien:"
N[Valores]
```

- $\Leftarrow$

```
La derivada se anula en:
```

$$\left\{\{x \to -2\}, \left\{x \to -\frac{1}{3}\right\}, \left\{x \to \frac{1}{2}\right\}, \{x \to 1\}\right\}$$

```
Elija el máximo y el mínimo:
```

$$\left\{\{0, 0\}, \left\{\frac{1}{2}, \frac{631}{960}\right\}, \left\{1, \frac{17}{60}\right\}, \left\{2, \frac{406}{15}\right\}\right\}$$

```
o bien:
{{0., 0.}, {0.5, 0.657292}, {1., 0.283333}, {2., 27.0667}}
```

Por lo tanto, el máximo está en $\left(2, \frac{406}{15}\right)$ y el mínimo está en $(0, 0)$. Se debe notar que no se consideró los valores críticos $x = -2$ y $x = -\frac{1}{3}$. Además se puede mejorar el programa para que detecte los valores extremales en intervalo suministrado. Se deja esto como ejercicio.

Ejemplo **1.99** Suponga que $f(x) = 55 - 309\,x + 485\,x^2 + 165\,x^3 - 170\,x^4 + 24\,x^5$. Usar el teorema de Rolle en el intervalo $[3, 5]$ y hallar el valor garantizado por dicho teorema.

El código en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$

```
a = 3
b = 5
f[x_] = 55 - 309 x + 485 x^2 + 165 x^3 - 170 x^4 + 24 x^5
f[a] == f[b]
Solve[f'[x] == 0.0, x]
```

- $\Leftarrow$

```
True

{{x → -0.993649}, {x → 0.291646}, {x → 2.06435}, {x → 4.30432}}
```

Por lo tanto, el valor garantizado por el teorema de Rolle es $x = 4.30432$. Los otros valores no se hallan en el intervalo $[3, 5]$.

Ejemplo **1.100** Suponga que $f(x) = (2x+1)(x-3)(3x+1)(x+1)$. Hallar los valores $x \in [3, 7]$ tales que verifican la conclusión del teorema del valor medio, a saber $f'(x) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

El código en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$

```
a = 3
b = 7.
f[x_] = (2 x + 1) (x - 3) (3 x + 1) (x + 1)
Solve[f '[x] == (f[b] - f[a])/(b - a), x]
```

- $\Leftarrow$

```
(-3 + x) (1 + x) (1 + 2 x) (1 + 3 x)

{{x → -2.201 - 4.01684 i}, {x → -2.201 + 4.01684 i}, {x → 5.277}}
```

Por lo tanto, el valor garantizado por el teorema del valor medio es (aproximadamente) $x = 5.277$. Los otros valores son complejos y deben desestimarse.

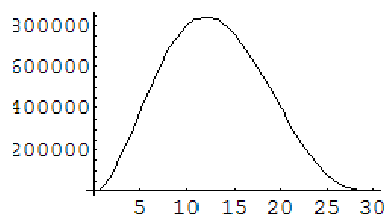
Ejemplo 1.101 Hallar dos números no negativos cuya suma es 30 que hagan máximo el producto del cuadrado de uno por el cubo del otro?

El desarrollo de este problema se halla en [1], página 166. La función a opitimizar tiene fórmula $f(x) = x^2(30 - x)^3$ en el intervalo $[0, 30]$. El código en *Mathematica* es:

```
a = 0;
b = 30;
f[x_] = x^2 (30 - x)^3
Solve[f'[x] == 0, x]
Plot[f[x], {x, a, b}]
```

- ⇒
- ⇐

```
{{x → 0}, {x → 12}, {x → 30}, {x → 30}}
```



Por lo tanto, el máximo se da cuando $x = 12$. Como la suma de los números debe ser 30, el otro número es 18.

EJEMPLO **1.102** Calcular, usando la regla de L'Hôpital, $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$.

Se desea elaborar un programa que muestre los pasos intermedios al emplear la regla de L'Hôpital. Se debe recordar que los comandos Numerator y Denominator permiten acceder al numerador y al denominador de una fracción. La instrucción Together se encarga de brindar una expresión en forma de fracción a partir de otra. El código en *Mathematica* es:

- ⇒

```
f[x_] = (Sin[x] - x)/(x^3);
a = 0;
Print["Lim", f[x], "="];
While[(Numerator[f[x]] /. x → a) == 0 &&
  (Denominator[f[x]] /. x → a) == 0,
 f[x_] = Together[D[Numerator[f[x]], x]/D[Denominator[f[x]], x]];
 Print["Lim", f[x], "="];
]
f[a]
```

- ⇐

$$\text{Lim}\frac{-x+\text{Sin}[x]}{x^3} =$$

$$\text{Lim}\frac{-1+\text{Cos}[x]}{3\,x^2} =$$

$$\text{Lim}-\frac{\text{Sin}[x]}{6\,x} =$$

$$\text{Lim}-\frac{\text{Cos}[x]}{6} =$$

$$-\frac{1}{6}$$

Ejemplo **1.103** Haga un programa en *Mathematica* que calcule los primeros 10 números de Fibonacci.

La recurrencia de Fibonacci está dada por

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad f_1 = 1, f_2 = 1$$

En este ejercicio es clave usar el símbolo := y no el igual simple. Este le indica a *Mathematica* que cada vez que encuentre $f(n)$ debe reemplazarlo por su lado derecho. Se indica además los valores para iniciar la recurrencia. El código en *Mathematica* es:

- $\Rightarrow$
```
f[n_] := f[n - 1] + f[n - 2]; f[1] := 1; f[2] := 1;
Table[f[n], {n, 1, 10}]
```
- $\Leftarrow \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55\}$

El comando Table permite construir una tabla de valores indicando en dónde empieza y en dónde termina la lista deseada.

1.7.2 Trabajando en el laboratorio

- Resuelva los siguientes ejercicios del libro [1]: 280, 300, 346, 372, 386, 399, 417, 427, 432, 437, 442, 453, 476, 492, 499, 506, 512, 539, 543, 553, 556, 562, 573, 576, 580, 589, 602, 620, 639, 642, 646, 647, 648, 663, 672, 677, 690, 703, 722, 736, 743, 761, 767, 830, 860, 883, 896, 931.

- Pida a su profesor que dé, en forma explícita, una función $y = f(x)$ cuya derivada es la dada en ejercicio 635 de [1].

- Sea $f(x) = |2x-3| + |x-4| - |x-7|$. Grafique esta función en $[-1, 10]$ y determine los puntos en los que no es derivable. Justifique su respuesta con derivadas laterales.

- Halle la derivada de $f(x) = \dfrac{\left(1 - \cos(1 + 3\,x^5)\ \operatorname{sen}(1 + 2\,x^2)\right)^5}{(1 + e^x)^{\frac{5}{2}}}$

- Sea $f(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{10} (x + k)$. Halle $f'(x)$ y exprese en forma desarrollada. Idem $f'''(x)$. Finalmente calcule $f^{(5)}(1)$.

- Halle y' si $-x^3\,y^2 + y^5 + \left(x^2 + y^5\right)^3 + \cos(x^2\,y^3) = 2x$.

- Sea $f(x) = -5040\,x + 6534\,x^2 - \dfrac{13132\,x^3}{3} + \dfrac{6769\,x^4}{4} - 392\,x^5 + \dfrac{161\,x^6}{3} - 4\,x^7 + \dfrac{x^8}{8}$. Halle los puntos en los que hay tangentes horizontales. Indique además los intervalos de monotonía y su tipo. Liste también los extremos locales.

- Sea $f(x) = 15\,x^2 + \dfrac{361\,x^3}{6} + \dfrac{1729\,x^4}{12} + \dfrac{4121\,x^5}{20} + \dfrac{4889\,x^6}{30} + 55\,x^7$. Estudie la concavidad de f y halle sus puntos de inflexión.

- Sea $f(x) = 648+7281\,x+32729\,x^2+69612\,x^3+63188\,x^4+3741\,x^5-18211\,x^6+2310\,x^7$. Verifique la conclusión del teorema de Rolle para f en el intervalo $[3,7]$.

- Suponga que $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-3}$ y que $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ y $f_3 = 1$. Haga una tabla con los primeros 10 valores. Halle f_{15}.

1.7.3 Evaluación

Nombre: ______________________________

INSTRUCCIONES: Use *Mathematica* para resolver correctamente los siguientes ejercicios. Indique, para cada uno de ellos, los comandos que ha empleado.

$\boxed{\text{Examen Corto \# 5}}$

1. Sea $f(x) = 240\,x - 1639\,x^2 + 6175\,x^3 - \dfrac{55445\,x^4}{4} + 18537\,x^5 - \dfrac{82037\,x^6}{6} + 4290\,x^7$. Haga el estudio de monotonía para f y determine los puntos extremales.

   Ayuda: en $x = \dfrac{1}{2}$ se produce un extremo.

2. Halle y' si se sabe que $-x^3\,y^2 + y^5 + \left(x^2 + y^5\right)^3 + \sec(x^2\,y^3) = \cos(x)$.

3. Sea $f(x) = 3\,x^2 - \dfrac{59\,x^3}{6} + 18\,x^4 - \dfrac{349\,x^5}{20} + 7\,x^6$. Haga el estudio de concavidad para f y dermine los puntos de inflexión.

   Ayuda: en $x = \dfrac{1}{3}$ se produce un punto de inflexión.

4. Sea $f(x) = -442 + 5655\,x - 28853\,x^2 + 76008\,x^3 - 108032\,x^4 + 77883\,x^5 - 23369\,x^6 + 2310\,x^7$. Verifique la conclusión del teorema de Rolle para f en el intervalo $[3,5]$. **Ayuda**: use NSolve. Este comando permite hallar aproximaciones numéricas para una ecuación polinomial.

Capítulo 2

Usando Graphing Calculator mediante GenGCF

Este trabajo presenta una colección de ejemplos, de dificultada ascendente, que muestran (principalmente) las bondades del software comercial Graphing Calculator (GC). El trabajo es fruto del empleo de esta herramienta, por parte del autor, en cursos tales como cálculo en varias variables e investigación de operaciones. Las herramientas digitales GC y *Mathematica* han sido fundamentales para apoyar tecnológicamente estos cursos y este tipo de productos abren las puertas de un nuevo escenario en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

2.1 Introducción

Es claro que la computadora es día con día una herramienta que apoya nuestro diario quehacer. El proceso educativo no escapa a esta realidad y se debe considerar seriamente la necesidad de incorporar esta herramienta en muchas de las disciplinas que se imparten en los centros educativos costarricenses. Las matemáticas no son ajenas a esta situación y hoy día se cuenta con la oferta de muchos productos informáticos que están dando la posibilidad de abordar muchas ramas de esta disciplina desde una perspectiva diferente y atractiva. Entre algunos paquetes informáticos que se han destacado en este proceso, podemos mencionar Mathematica, Maple, MuPad, Geometer Sketch Pad y por supuesto Graphing Calculator del que nos ocuparemos en este trabajo.

2.2 ¿Qué es Graphing Calculator y qué es GenGCF?

GC es un software comercial que permite visualizar objetos matemáticos en dos, tres y cuatro dimensiones. Se pueden crear gráficas animadas, resolver ecuaciones gráficamente y escoger la perspectiva de observación entre otras cosas. GC permite graficar funciones y relaciones ya sean éstas implícitas, explícitas o bien parametrizadas, tanto en dos como en tres dimensiones.

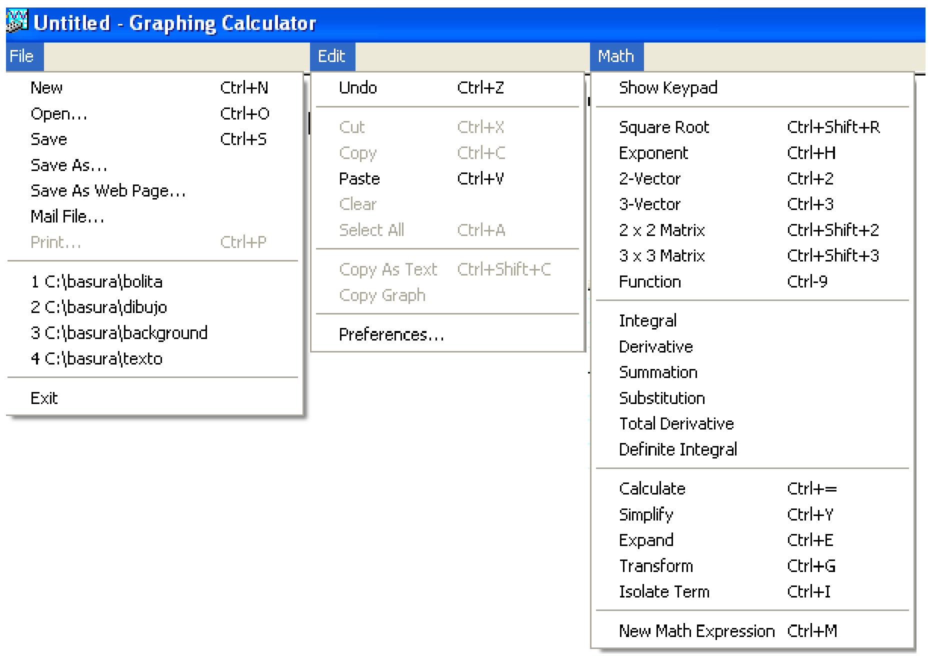
Uno de los aspectos más llamativos de este software es la simplicidad con la que se introducen los datos. En el caso de funciones en dos o tres variables, no es necesario despejar ninguna de ellas en particular. La ecuación se introduce tal como está.

GC se encuentra disponible en la dirección www.PacificT.com y hay una versión de aproximadamente 3 megas para Windows (llamada gcViewer) que se puede descargar gratuitamente desde este sitio. Dicha versión no es 100% funcional pero permite visualizar algunos ejemplos que trae consigo o bien archivos desarrollados previamente por alguien que posea una licencia. Realmente vale la pena descargar esta versión y disfrutar en poco tiempo de una herramienta que es, a juicio del autor, virtualmente una joya digital.

GenGCF es una herramienta desarrollada por J. F. Ávila para genarar archivos que pueden ser vistos utilizando Graphing Calculator Viewer.

2.3 Ejemplos usando graphing calculator

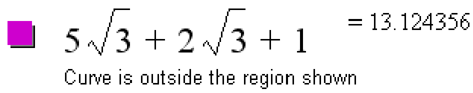
En esta sección se presenta una colección de ejemplos de dificultad ascendente que permiten apreciar las facilidades del GC. En la siguiente figura se muestra los primeros tres menús de GC:



Nota: En la colección de ejemplos, el código en GC se ha acomodado, en algunos casos, en una forma algo diferente de la que luce en este programa. Este se hace para economizar espacio.

Ejemplo **2.1** GC puede usarse como calculadora. Calcule una aproximación decimal para la expresión $5\sqrt{3}+2\sqrt{3}+1$.

Se puede usar el botón de raíz cuadrada del "keypad" para facilitar el cálculo.

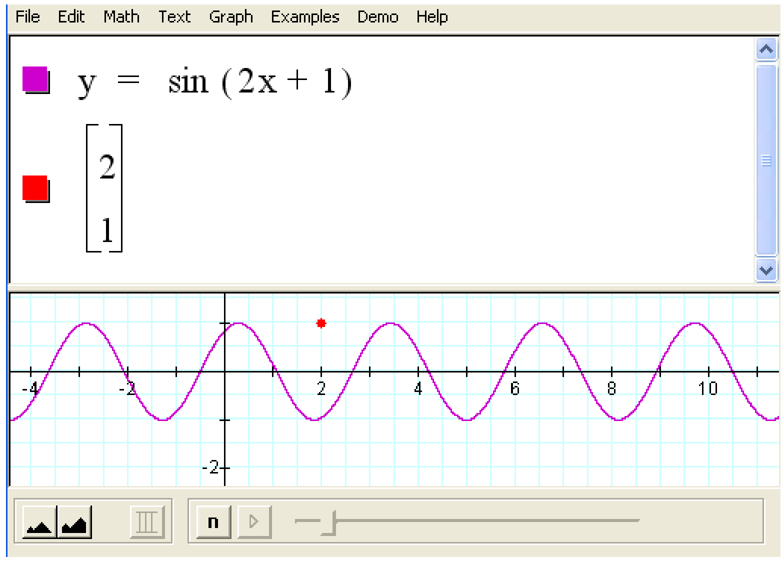


El código usando GenGCF es:

```
Color 1; Expr 5*sqrt(3) +2*sqrt(3)+1;
```

En GC puede ingresar una ecuación sencilla para ser graficada.

EJEMPLO **2.2** Para graficar $y = \operatorname{sen}(2x + 1)$ se escribe la ecuación tal cual cambiando sen por sen. Si se desea marcar el punto $(2, 1)$ se emplea entonces un 2-vector que se localiza en el menú Math. El resultado es el siguiente.

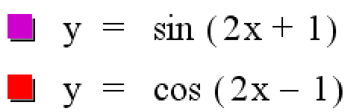


El código usando GenGCF es:

```
Color 1; Expr y =sin(2*x+1);
Color 3; Expr vector(2,  1);
```

EJEMPLO **2.3** Dibujar en forma conjunta la gráfica de $y = \operatorname{sen}(2x+1)$ y la de $y = \cos(2x-1)$.

Para agregar una nueva expresión matemática usamos el comando Ctrl-M. El resultado es como sigue:



El código usando GenGCF es:

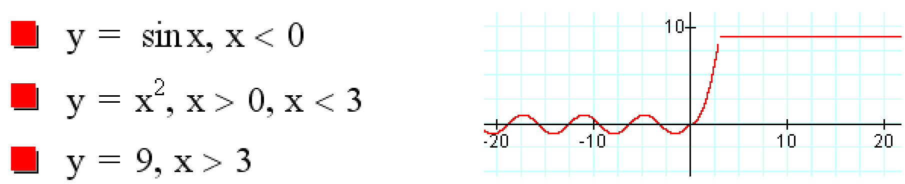
```
Color 1; Expr y =sin(2*x+1) ;
Color 2; Expr y=cos(2*x-1);
```

Ejemplo **2.4** Dibujar

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 9 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Desafortunadamente a pesar de que en la versión que se empleó supuestamente posee los símbolos $\leq$ y $\geq$ estos nunca aparecieron. Para efectos gráficos esto significa que habrá un par de agujeros en los puntos de conexión. Para el caso de figuras bidimensionales o tridimensionales la situación se subsana graficando por separado la región deseada (usando desigualdades) y luego el borde (usando ecuaciones). Normalmente esto no representa un gran problema, pero si debe mantenerse alerta sobre esta deficiencia.

El código es el siguiente:



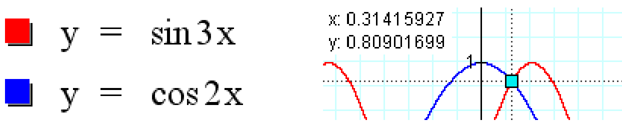
El código usando GenGCF es:

```
Color 2; Expr y=sin(x), x<0;
Color 2; Expr y=x^2, x > 0, x< 3 ;
Color 2; Expr y=9, x>3;
```

GC puede usarse para resolver ecuaciones gráficamente.

EJEMPLO **2.5** Halle un par de soluciones para la ecuación
$\operatorname{sen} 3x = \cos 2x$.

Para logra esto primero graficamos ambas curvas. Usando el *mouse* podemos ubicar las intersecciones de estas curvas y observar aproximaciones numéricas de ellas. Adicionalmente, si se cuenta con sonido en la computadora, puede escucharse un ruido al atravesar una de estas intersecciones.

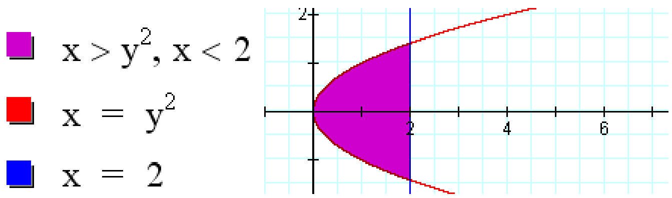


El código usando GenGCF es:

```
Color 4; Expr y =sin(3*x) ;
Color 5; Expr y=cos(2*x) ;
```

Ejemplo **2.6** GC puede graficar desigualdades.
Grafique la región encerrada por $x = y^2$ y la recta $x = 2$.

El código en GC es como sigue:

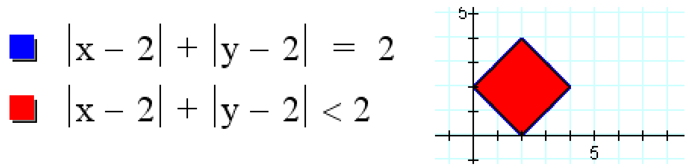


El código usando GenGCF es:

```
Color 1; Expr    x>y^2, x<2 ;
Color 2; Expr    x=y^2 ;
Color 3; Expr    x=2 ;
```

Ejemplo **2.7** Graficar el rombo dado por $|x-2|+|y-2| \leq 2$.

En este caso graficamos el interior y el borde por separado. El código en GC es como sigue:

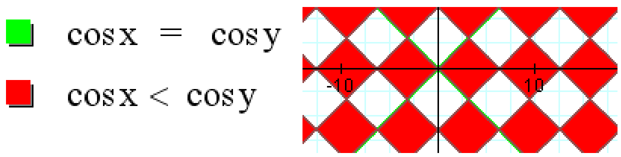


El código usando GenGCF es:

```
Color 3; Expr  abs(x-2) +abs(y-2) = 2 ;
Color 2; Expr  abs(x-2) +abs(y-2) < 2 ;
```

Ejemplo **2.8** Graficar la región determinada por $\cos x \leq \cos y$.

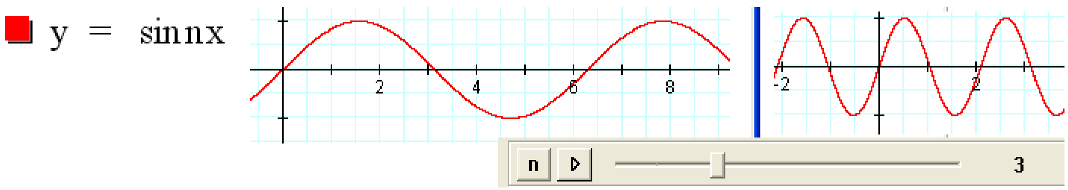
En este caso obtenemos una bandera a cuadros de bordes verdes. Simplemente escribimos:



El código usando GenGCF es:

```
Color 4; Expr   cos(x)= cos(y) ;
Color 2; Expr   cos(x)< cos(y) ;
```

Ejemplo 2.9 Uno de los aspectos más interesantes de GC es la animación. Graficar $y = \operatorname{sen} nx$. El código es el siguiente:



El código usando GenGCF es:

```
Color 7; Expr y=sin(n*x) ;
```

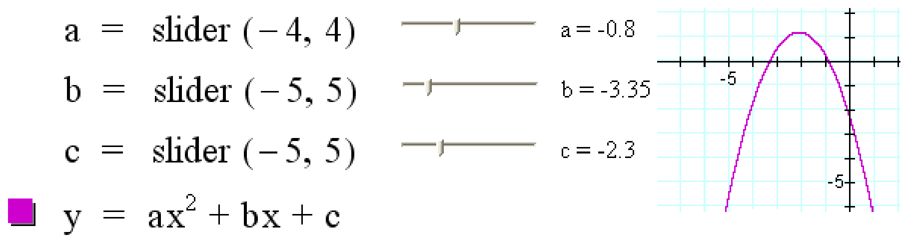
Utilice la barra *scroll* que se halla en la base de GC para manipular la animación. Si hace click sobre el botón ubicado al lado derecho de **n** conseguirá que la gráfica se mueva en forma automática. Para controlar el rango de n y la velocidad de la animación se debe hacer click sobre el botón **n**.

$$y = a \operatorname{sen}(bx + c), \quad -4 \leq a, b, c \leq 4$$

Ejemplo **2.10** Graficar la parábola $y = ax^2 + bx + c$ para $-4 \le a \le 4$, $-5 \le b \le 5$ y $-5 \le c \le 5$.

Para esto debemos emplear los deslizadores o "sliders". Indique el nombre del deslizador y su rango. Moviendo el botón de cada deslizador se nota inmediatamente el papel de cada coeficiente en esta función cuadrática.

El código en GC es el siguiente:



El código usando GenGCF es:

```
Expr a=slider([-4,4]);
Expr b=slider([-5,5]);
Expr c=slider([-5,5]);
Color 1; Expr y = a* x^2+b*x+c;
```

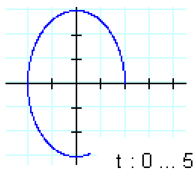
Ejemplo **2.11** Graficar la curva paramétrica:

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3 \ \mathrm{sen}\, t \end{cases} \quad \text{con} \quad 0 \leq t \leq 5$$

Se debe observar que al pasar a coordenadas cartesianas obtenemos $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Se trata de una elipse. Sin embargo como el parámetro oscila entre 0 y 5, se dibuja solo parte de dicha elipse.

Para construir los vectores usamos la opción 2-vector de menú *Math*. El código en GC es el siguiente:

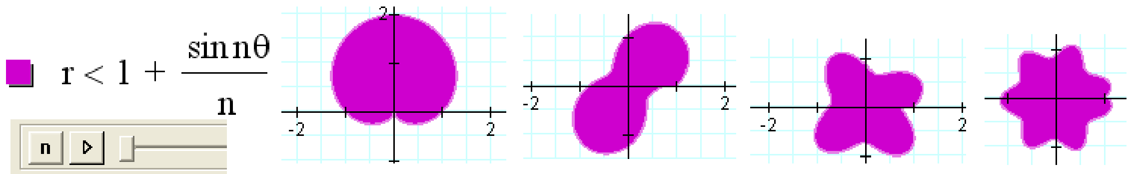
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos t \\ 3\sin t \end{bmatrix}$$



El código usando GenGCF es:

```
Color 2; Expr vector(x,y)=vector(2*cos(t), 3*sin(t)); T 0 5;
```

Ejemplo **2.12** Realizar la gráfica en coordenadas polares de $r < 1 + \dfrac{\operatorname{sen}(n\theta)}{n}$ para n variando entre 1 y 10. El código en GC para graficar esto es:



El código usando GenGCF es:

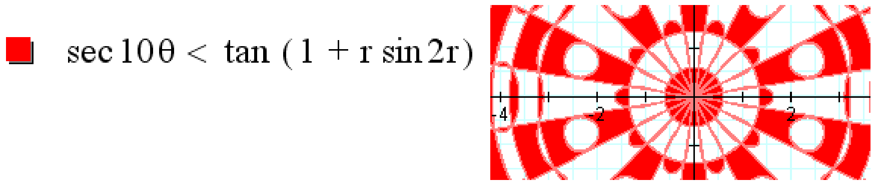
```
Color 1; Expr  r < 1+[sin(n*theta)]/[n] ;
```

El rango de n y la velocidad de la animación se define en la barra en la base de la ventana de GC conocida como *Drag Slider*.

En coordenadas polares se pueden crear diseños llamativos. Considere el siguiente caso.

Ejemplo **2.13** Realizar la gráfica de $\sec(10\theta) < \tan(1 + r \text{ sen}(2r))$.

El código en GC es muy simple:



El código usando GenGCF es:

```
Color 2; Expr sec(10*theta) < tan(1+r*sin(2*r));
```

Ejemplo **2.14** Trace una recta tangente “movil” sobre la curva de la función $f(x) = \cos(\pi x)$ en el punto $(n, f(n))$ haciendo variar n.

Empezamos declarando la función en cuestión usando la opción *function* del menú *Math*. De esta forma el código puede ser aprovechado para otra función diferente. Seguidamente graficamos la función, escribiendo $y = f(x)$. Luego declaramos (usando las opciones “function” y “derivative”) la función $g(x) = \dfrac{\partial}{\partial x} f(x)$. Sabemos que para el punto $(n, f(n))$, la recta tangente tiene ecuación $y = f'(n)(x-n)+f(n)$, o bien $y = g(n)(x-n)+f(n)$. Graficamos entonces (usando “function”) esta recta: Finalmente trazamos el punto de tangencia mediante la opción 2-vector. El código completo en GC es:

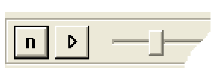
$$f(x) = \cos \pi x$$

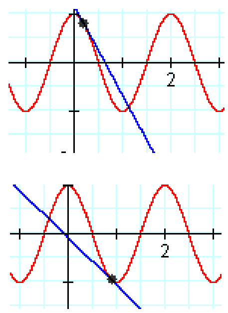
$$y = f(x)$$

$$g(x) = \frac{\partial}{\partial x} f(x)$$

$$y = g(n)\,(x - n) + f(n)$$

$$\begin{bmatrix} n \\ f(n) \end{bmatrix}$$





El código usando GenGCF es:

```
Color 1;  Expr function(f,x)=cos(pi*x);
Color 2; Expr y=function(f,x);
Expr function(g, x) = function(oppartial(x), function(f, x));
Color 3; Expr   y = function(g, n)* (x-n)+ function(f, n);
Color 8; Expr vector(n,function(f,n));
```

Ejemplo 2.15 Resolver gráficamente el siguiente programa lineal

$$\text{Maximizar } z = 3x + 2y$$

$$\begin{cases} x + 2y \leq 6, \\ 2x + y \leq 8, \\ -x + y \leq 1, \\ y \leq 2, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$$

Debemos recordar que la región de factibilidad de un programa lineal de este tipo corresponde a un polígono. En este caso tenemos una pequeña dificultad a la hora de emplear GC y es la aparición del símbolo $\leq$. Como se sabe, la diferencia al emplear $<$ o $\leq$ estriba en si se excluye o no la arista asociada a desigualdad en cuestión. Usamos GC para graficar la región de factibilidad excluyendo la frontera del polígono resultante, reemplazando $\leq$ por $<$. No obstante debemos tener siempre en mente que los vértices del polígono que se observan son puntos factibles del programa lineal.

El código en GC para dibujar el polígono es:

$x + 2y < 6,\ 2x + y < 8,\ -x + y < 1,\ y < 2,\ x > 0,\ y > 0$

Nos queda ahora dibujar la función objetivo. Para esto declaramos un deslizador tal como sigue $k = \text{slider}(0, 20)$. Procedemos entonces a graficar la recta asociada a la función objetivo, a saber $3 \cdot x + 2 \cdot y = k$. Si hacemos variar el deslizador k notamos que "abandona" el polígono en el vértice con coordenadas (aproximadas) $(3.3, 1.3)$. Además se debe observar que esto se produce cuando el valor de k (que corresponde a z) es aproximadamente 12.7. Usando el botón de amplificación de GC podríamos obtener una mejor aproximación para estos valores.

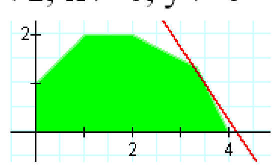
Solo una cosa más antes de pasar a otro ejemplo. Es probable que el lector se pregunte por qué no declaramos z como el valor para el deslizador y graficar así $3x + 2y = z$ en lugar de $3x + 2y = k$. El problema es que GC grafica en tres dimensiones cuando nota la presencia de la variable z y en tal caso graficaría el plano $3x + 2y = z$ que no es lo que pretendemos observar.

El código total del problema es:

$x + 2y < 6,\ 2x + y < 8,\ -x + y < 1,\ y < 2,\ x > 0,\ y > 0$

$k = \text{slider}(0, 20)$ k = 12.5

$3x + 2y = k$



El código usando GenGCF es:

```
Color 2; Expr  x+2*y<6,  2*x+y<8,  -x+y<1,  y<2,  x>0,  y>0;
Expr k=slider([0,20]);
Color 3; Expr  3*x+2*y = k;
```

```
r[t_] = Simplify[{f[t], g[t]}, f[t] ∈ Reals ∧ g[t] ∈ Reals]
"Punto sobre el cual se desea calcular el círculo osculador"
s = r[p]
TT[t_] = Simplify[r'[t] / Norm[r'[t]], t ∈ Reals] //.
  Abs[y : _]^2 → y^2
NN[t_] = Simplify[TT'[t] / Sqrt[TT'[t] . TT'[t]], t ∈ Reals] //.
  Abs[y : _]^2 → y^2
κ =
  Simplify[
    (∂t r[t][[1]] ∂t,t r[t][[2]] - ∂t,t r[t][[1]] ∂t r[t][[2]]) /
     Norm[∂t r[t]]^3, t ∈ Reals] //. {t → p, Abs[y : _]^2 → y^2};
"Radio del círculo de curvatura:"
ρ = 1/κ
"Círculo:"
MC = Simplify[Norm[{x, y} - (s + ρ NN[t0])]^2,
    x ∈ Reals ∧ y ∈ Reals] //. Abs[y : _]^2 → y^2;
MC1 = MC //. {g'[p] f''[p] - f'[p] g''[p] → α, f'[p]^2 + g'[p]^2 → β,
    -g'[p] f''[p] + f'[p] g''[p] → -α};
MC2 = ρ^2 //. {g'[p] f''[p] - f'[p] g''[p] → α, f'[p]^2 + g'[p]^2 → β,
    -g'[p] f''[p] + f'[p] g''[p] → -α};
"Simplificando"
MC1 == MC2
```

Figura 2.1: Código en Mathematica para ecuación del círculo osculador.

Ejemplo **2.16** Con algo de esfuerzo y usando Mathematica (ver Fig. 2.1) se puede deducir una fórmula para hallar la ecuación del círculo osculador para una curva parametrizada como

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

cuando $t = m$. Para ello, y por simplicidad, hacemos algunas designaciones antes:

* $j = f'(m)\, g''(m) - g'(m)\, f''(m)$.
* $k = f'(m)^2 + g'(m)^2$

La ecuación del círculo osculador es:

$$\left(y - g(m) - \frac{kf'(m)}{|j|}\right)^2 + \left(x - f(m) + \frac{kg'(m)}{|j|}\right)^2 = \frac{k^3}{j^2}$$

Nota: Hasta donde se investigó, esta fórmula no figura en los libros tradiciones de cálculo en varias variables.

Consideremos el caso de la parábola $y = x^2$ que se puede describir paramétricamente como $x = t$, $y = t^2$, con $t \in \mathbb{R}$. Si se quiere elegir "cualquier" punto de la curva, empleamos como deslizador el valor m. Hacemos además $f(t) = t$ y $g(t) = t^2$ y luego dibujamos dicha curva. El código en GC es:

$$m = \text{slider}(-20, 20) \qquad m = 2.2$$

$$f(t) = t$$

$$g(t) = -t^2$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix}$$

Definimos seguidamente algunas funciones auxiliares para primeras derivadas de f y g, respectivamente:

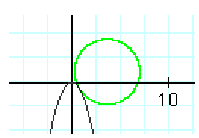
$$a(x) = \frac{\partial}{\partial x} f(x) \qquad c(x) = \frac{\partial}{\partial x} g(x)$$

$$b(x) = \frac{\partial}{\partial x} a(x) \qquad d(x) = \frac{\partial}{\partial x} c(x)$$

Seguidamente declaramos los valores adicionales j y k y finalmente dibujamos el círculo osculador:

$$j = a(m)d(m) - c(m)b(m)$$

$$k = a(m)^2 + c(m)^2$$



$$\frac{k^3}{j^2} = \left(y - g(m) - \frac{k\,a(m)}{|j|}\right)^2 + \left(x - f(m) + \frac{k\,c(m)}{|j|}\right)^2$$

El código usando GenGCF es:

```
Expr function(a, x) = function(oppartial(x), function(f, x));
Expr function(b, x) = function(oppartial(x), function(a, x));
Expr function(c, x) = function(oppartial(x), function(g, x));
Expr function(d, x) = function(oppartial(x), function(c, x));
Expr j = function(a, m)*function(d, m)-function(c, m)*function(b, m);
Expr k = function(a, m)^2+ function(c, m)^2 ;
Color 4; Expr (k^3)/(j^2) = (y-function(g, m)-k*function(a, m)/abs(j) )^2
+(x-function(f, m)+k*function(c, m)/abs(j) )^2;
```

GC permite también otro nivel de interacción cuando se trabaja con números complejos, es decir del tipo $z = a + bi$ con $a \in I\!R$ y $b \in I\!R$. Como se sabe, se puede establecer una identificación entre un número complejo $z = a + bi$ y un punto en le plano cartesiano (a, b). Cuando se declara uno de tales puntos, GC permite cambiar, mediante el mouse, su ubicación y recalcular las coordenadas del punto en cuestión.

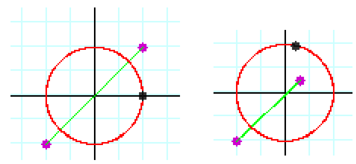
Ejemplo **2.17** Considere el punto $(1,0)$. Elabore una gráfica animada que haga rotar este punto alrededor del origen. Dibuje además el segmento que une los puntos $p = 1 + i$ y $q = -1 - i$.

Como se sabe el punto $(1,0)$ puede identificarse con $\cos t + i \operatorname{sen} t$ cuando $t = 0$, o bien (en forma exponencial) con e^{it}, cuando $t = 0$. Si hacemos variar t entre 0 y 2π, obtendremos la gráfica del círculo. De esta forma la ecuación para el círculo es $z = e^{it}$. Por lo tanto, si adicionamos la ecuación $z = e^{in}$ logramos hacer la animación que muestra el punto $(1,0)$ rotando alrededor del origen. Seguidamente declaramos los puntos $p = 1 + i$ y $q = -1 - i$. La ecuación del segmento de recta que une p con q es $z = (q - p)t + p$. Sin embargo, en virtud de que habíamos indicado que el parámetro t variaría entre 0 y 2π, tenemos una buena razón para introducir la función módulo. El código completo en GC es:

$z = e^{2\pi it}$ $\quad$ $q = 1 + i$

$z = e^{2\pi in}$ $\quad$ $p = -1 - i$

$z = (q - p) \bmod (t, 1) + p$



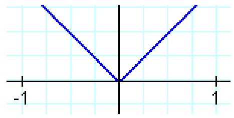
Al mover el punto q con el "mouse", se debe advertir el cambio de coordenadas en forma instantánea. El código usando GenGCF es:

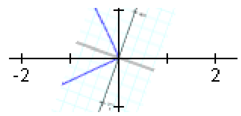
```
Color 2; Expr z = e^(2*pi*i*t); Color 8; Expr z = e^(2*pi*i*n);
Color 1; Expr q = 1+i; Color 1; Expr p = -1-i;
Color 4; Expr z =(q-p)* mod( t, 1)+p; T 0 6.28;
SliderSteps 100; Slider -4 4;
SliderOneDirection 0; SliderMoving 1;
```

Ejemplo **2.18** Elaborar una animación, en el sistema primal, que muestre la función $y = |x|$ rotando alrededor del origen.

La transformación de coordenadas $z' = a \cdot z$ con $a = e^{in}$ efectúa una rotación para cada elección de n. El código en GC es como sigue:

$$z' = az$$
$$a = \cos n + i \sin n$$
$$y = |x|$$





El código usando GenGCF es:

```
Color 8; Expr prime(z) =a*z;
Color 8; Expr a= cos(n)+i*sin(n) ;
Color 3; Expr y = abs(x);
```

EJEMPLO **2.19** Trazar un vector normal a la curva $y = \sum_{k=1}^{5} \operatorname{sen}^k x$ calculando la derivada para hallar la pendiente de la tangente en $x = n$.

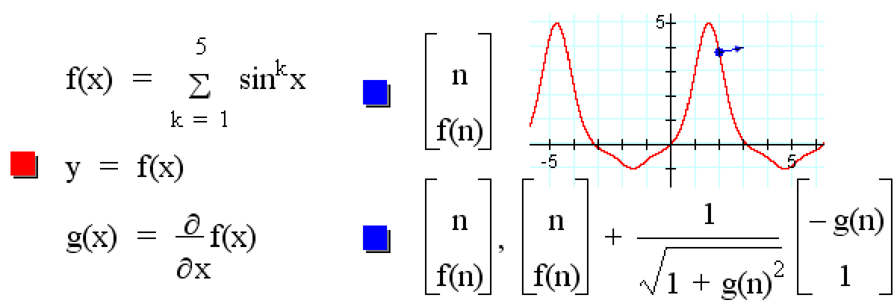
Si tenemos una curva de la forma $y = f(x)$, esta se puede parametrizar como $r(t) = \langle t, f(t)\rangle$. Designemos con $A = (n, f(n))$ un punto arbitrario sobre la curva en el que se desea dibujar el vector normal. Sabemos entonces que $r'(t) = \langle 1, f'(t)\rangle$ y por lo tanto el vector tangente está dado por

$$T(t) = \frac{r'(t)}{||r'(t)||} = \frac{\langle 1, f'(t)\rangle}{\sqrt{1 + (f'(t))^2}}$$

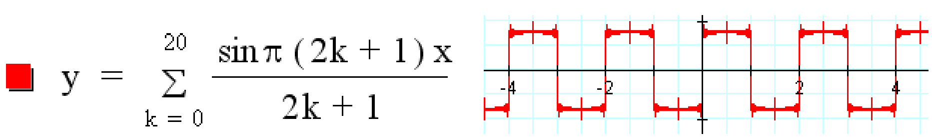
El vector normal $N(t)$ es ortogonal a $T(t)$ y para este caso (observando la concavidad de la curva en cuestión) puede ponerse como

$$N(t) = \frac{\langle -f'(t), 1\rangle}{\sqrt{1 + (f'(t))^2}}$$

Para dibujar el vector normal en GC indicamos el punto en el que este empieza y el punto en el que termina. El código GC para este problema es:



Nota: La sumatoria se ingresa mediante la opción *Summation* del menú *Math*. Podemos entonces construir aproximaciones a ondas cuadradas como por ejemplo:

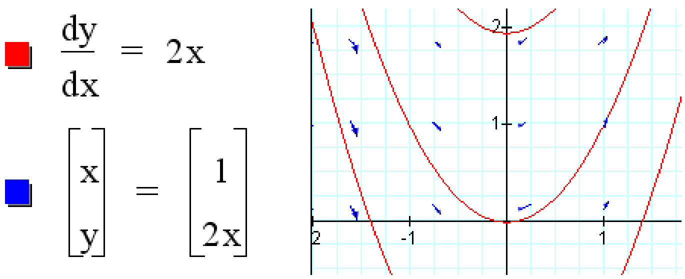


El código usando GenGCF es:

```
Expr function(f, x) = sum((sin(x)^(k)), (k) = (1), (5));
Color 2; Expr y = function(f, x) ;
Expr function(g, x) = function(oppartial(x), function(f, x));
Color 3; Expr vector((n), (function(f, n) )) ;
Color 4; Expr vector((n), (function(f, n) )), vector((n),
    (function(f, n) ))+1/sqrt(1+function(g, n)^2 ) *vector((-function(g, n) ), (1));
```

Ejemplo **2.20** Trazar algunas soluciones de la ecuación diferencial $y' = 2x$ y sus isoclinas.

Usando el método de separación de variables para ecuaciones diferenciales es fácil ver que la solución general de esta es $y = x^2 + k$. Usando el comando *Total derivative* del menú *Math* escribimos el código $\dfrac{dy}{dx}$. Seguidamente indicamos el campo vectorial correspondiente que muestra las isoclinas de esta ecuación.



Nota: No se debe tratar de construir la expresión $\dfrac{dy}{dx}$ como si se tratase de una división. Debe emplearse el comando *Total derivative*. El código usando GenGCF es:

```
Color 2; Expr function(optotal(x),y) =2*x;
Color 3; Expr vector(x, y) = vector(1, 2*x) ;
```

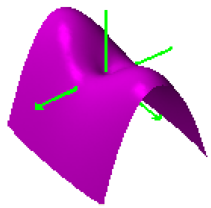
Ejemplo **2.21** Graficar $x^2 + z = \operatorname{sen}(\sqrt{x^2 + y^2})$.

Se trata de una superficie tridimensional. GC elabora la grafica escogiendo un rango para los ejes coordenados y el punto de vista, sin embargo se puede variar esto y mover la superficie para observarla desde otro punto. De hecho se puede dejar girando dependiendo de la velocidad utilizada en el "mouse".

El código GC es el siguiente:

$$x^2 + z = \sin\sqrt{x^2 + y^2}$$

x : -2 ... 2
y : -2 ... 2
z : -2 ... 2

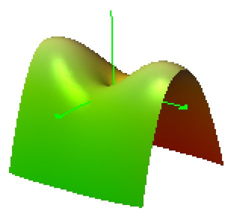


Nota: El eje z es aquel que no posee un flecha en su extremo. Una vez ubicado este, el eje x es el de la izquierda y el eje y, el de la derecha. El código usando GenGCF es:

```
Color 1; Expr x^2+z=sin(sqrt(x^2+y^2));
```

Si se desea dar una coloración diferente, se puede usar el vector **rgb** (red, green, blue) como sigue:

$$x^2 + z = \sin\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \begin{bmatrix} r \\ g \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - x \\ 1 + x \\ z \end{bmatrix}$$

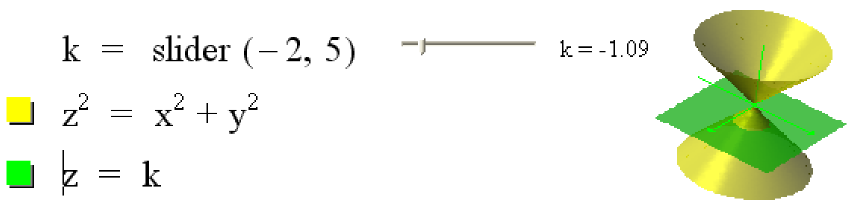


Como se nota, cada punto es una función de x, y y z. También se puede especificar el color usando el vector **hsv**. El código usando GenGCF es:

```
Color 1; Expr x^2+z=sin(sqrt(x^2+y^2)), vector(r, g, b) = vector(1-x, 1+x, z);
```

Ejemplo **2.22** Graficar conjuntamente el paraboloide $z = x^2+y^2$ y el plano $z = k$ para $-2 \leq k \leq 5$. Utilizar transparencia.

Como se sabe $z = k$ es un plano paralelo al plano xy que podemos mover creando un "slider" para k con el rango que se especifica. En el menú *Graph* está la opción de usar transparencia para lograr ver a través de los objetos tridimensionales. El código GC es el siguiente:

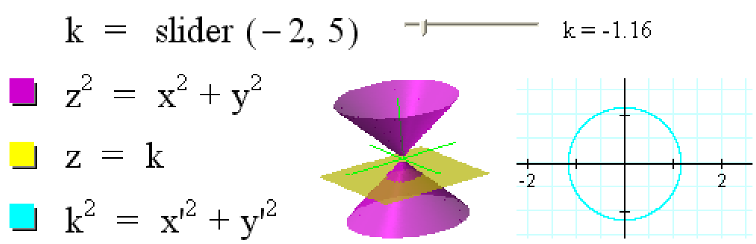


El código usando GenGCF es:

```
Expr k=slider([-2,5]);
Opacity 0.5; Color 6; Expr z^2=x^2+y^2;
Color 4; Expr z=k;
```

Ejemplo **2.23** Para el problema anterior muestre en un sistema coordenado yuxtapuesto la proyección de la curva que se obtiene al cortar el cono con el plano $z = k$.

El código GC es el siguiente:



Observe que además de la ecuación $z^2 = x^2 + y^2$ se agrega $k^2 = x'^2 + y'^2$. Para cada valor de k esta última ecuación describe la que se forma al cortar el cono con el plano $z = k$. Se trata de un círculo de radio k. Cuando se desee un sistema yuxtapuesto, se hace uso del sistema primal (usando la variable x' y la variable y'). El código usando GenGCF es:

```
Expr k=slider([-2,5]);
Opacity 0.5; Color 6; Expr z^2=x^2+y^2;
Color 4; Expr z=k;
Expr k^2=prime(x)^2+prime(y)^2;
```

Ejemplo **2.24** Graficar la curva paramétrica:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \\ z = t^3 \end{cases} \quad \text{con} \quad -5 \leq t \leq 5$$

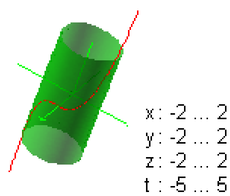
conjuntamente con el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Se trata de una curva tridimensional. Como $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$, la curva se halla dentro del cilindro y la coordenada $z = t^3$ hace que se prolongue a lo largo de dicho cilindro. Para construir los vectores usamos la opción 3-vector de menú *Math*.

El código GC es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t^3 \end{bmatrix}$$

$$x^2 + y^2 = 1$$



El código usando GenGCF es:

```
Color 4; Expr vector(x,y, z)=vector(cos(t), sin(t), t^3);  T -5 5;
Color 4; Expr x^2+y^2=1;
```

EJEMPLO **2.25** Considere los siguientes puntos en $I\!R^3$: $A = (1, 2, 3)$, $B = (1, -2, 3)$ y $C = (-1, 2, 3)$. Trazar el vector que va de A a B, el que va de A a C y el que va A a $\dfrac{(B - A) \times (C - A)}{||(B - A) \times (C - A)||}$.

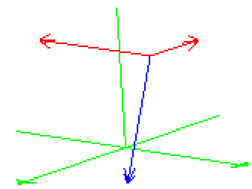
Usamos la opción 3- *vector* del menú *Math*. El código en GC es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

A, B

A, C

$$A, \frac{B - A \times C - A}{|B - A \times C - A|}$$



El código usando GenGCF es:

```
Color 3; Expr  A = vector(1, 2, 3);
Color 4; Expr B =vector(1, -2, 3);
Color 5; Expr C = vector(-1, 2, 3);
Color 2; Expr A, B;
Color 2; Expr A, C;
Color 3; Expr A, cross((B-A), (C-A)) ;
```

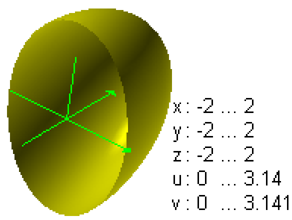
Ejemplo **2.26** Usar coordenadas esféricas para graficar el “lado derecho” del paraboloide cuya ecuación está dado por $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{z^2}{9}=1$.

La parametrización en coordenadas esféricas para este caso puede escribirse como:

$$\begin{cases} x = 2\,\operatorname{sen} u \cos v \\ y = 4\,\operatorname{sen} u\,\operatorname{sen} v \\ z = 3\cos u \end{cases} \qquad \text{con} \quad 0 \le u, v \le \pi.$$

El código es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sin u\cdot\cos v \\ 4\sin u\cdot\sin v \\ 3\cos u \end{bmatrix}$$



El código usando GenGCF es:

```
Color 6; Expr vector(x,y,z)
   =vector(2* sin(u)* cos(v), 4*sin(u)*sin(v), 3* cos(u));
U 0 3.14;
V 0 3.141;
```

EJEMPLO **2.27** Graficar el plano tangente al elipsoide $\frac{3}{4}x^2 + 3y^2 + z^2 = 12$ en el punto $\left(2, 1, \sqrt{6}\right)$.

Expresamos primero la ecuación de la superficie en la forma $f(x, y, z) = 0$ definiendo

$$f(x, y, z) = \frac{3}{4}x^2 + 3y^2 + z^2 - 12 = 0.$$

Empezamos entonces declarando la función f usando la opción *function* del menú *Math*. Observamos que las derivadas parciales de f son $f_x(x, y, z) = \frac{3x}{2}$, $f_y(x, y, z) = 6y$, $f_z(x, y, z) = 2z$, y por lo tanto en $(2, 1, \sqrt{6})$,

$$f_x(2, 1, \sqrt{6}) = 3, \quad f_y(2, 1, \sqrt{6}) = 6, \quad f_z(2, 1, \sqrt{6}) = 2\sqrt{6}$$

Para lograr esto en GC definimos algunas funciones auxiliares (usando las opciones "function" y "derivative" del menú *Math*) , a saber:

$$g(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) \qquad h(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z) \qquad k(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z)$$

Seguidamente indicamos el punto de tangencia mediante los valores a, b y c como sigue:

$$a = 2 \quad b = 1 \quad c = \sqrt{6}$$

Se debe observar que si se cambia de punto de tangencia, simplemente se hace la modificación de este código. Para este problema, la ecuación es:

$$3(x - 2) + 6(y - 1) + 2\sqrt{6}(z - \sqrt{6}) = 0$$

En GC podemos escribir esto como:

$$g(a, b, c)(x - a) + h(a, b, c)(y - b) + k(a, b, c)(z - c) = 0$$

Para graficar el elipsoide simplemente agregamos el código $0 = f(x, y, z)$: El código completo es como sigue:

$$f(x, y, z) = \frac{3}{4}x^2 + 3y^2 + z^2 - 12$$

$$g(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z)$$

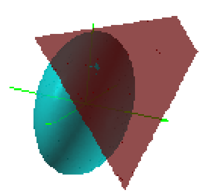
$$h(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z)$$

$$k(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z)$$

$$a = 2$$

$$b = 1$$

$$c = \sqrt{6}$$



$$g(a, b, c)(x - a) + h(a, b, c)(y - b) + k(a, b, c)(z - c) = 0$$

$$0 = f(x, y, z)$$

El código usando GenGCF es:

```
Expr function(f, x, y, z) = 3/4*x^2+3*y^2+z^2-12;
Expr function(g, x, y, z) = function(oppartial(x), function(f, x, y, z));
Expr function(h, x, y, z) = function(oppartial(y), function(f, x, y, z));
Expr function(k, x, y, z) = function(oppartial(z), function(f, x, y, z));
Color 1; Expr a =2;  Color 2; Expr b=1;  Color 3; Expr c=sqrt(6) ;
Opacity 0.7;  Color 4; Expr    function(g, a, b, c)*(x-a)
+  function(h, a, b, c)* (y-b) +  function(k, a, b, c) *(z-c)=0;
Opacity 0.7; Expr 0=function(f, x, y, z)  ;
```

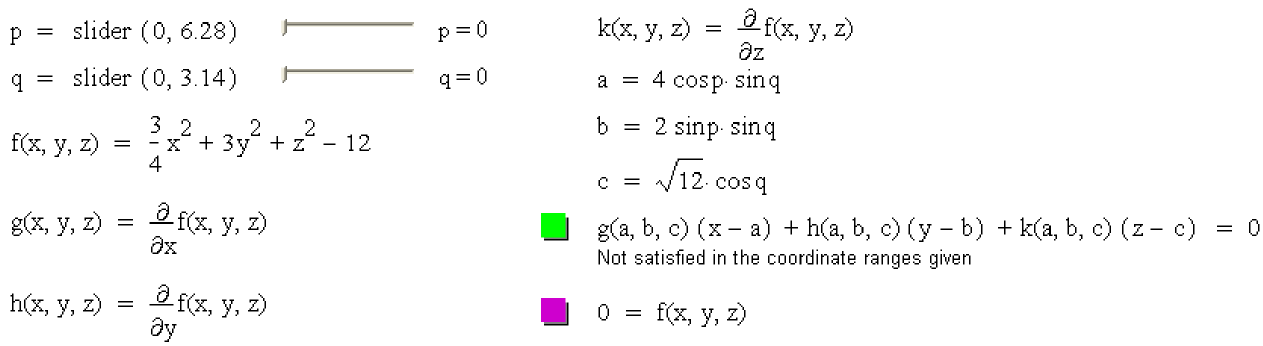
Ejemplo **2.28** Graficar el plano tangente al elipsoide del ejemplo anterior $\dfrac{3}{4}x^2 + 3y^2 + z^2 = 12$ en "cualquier" punto.

Para lograr esto podemos parametrizar un punto arbitrario del elipsoide y emplear sus parámetros como deslizadores. Utilizando coordenadas esféricas, hacemos:

$$a = 4\cos(p)\ \text{sen}(q), \quad b = 2\ \text{sen}(p)\ \text{sen}(q), \quad c = \sqrt{12}\cos(q)$$

Declaramos entonces p y q como deslizadores:

$$p = \text{slider}(0, 6.28); \quad q = \text{slider}(0, 3.14);$$



El código usando GenGCF es:

```
Expr p=slider([0,6.28]);
Expr q=slider([0,3.14]);
Expr function(f, x, y, z) = 3/4*x^2+3*y^2+z^2-12;
Expr function(g, x, y, z) = function(oppartial(x), function(f, x, y, z));
Expr function(h, x, y, z) = function(oppartial(y), function(f, x, y, z));
Expr function(k, x, y, z) = function(oppartial(z), function(f, x, y, z));
Color 1; Expr a = 4*cos(p)*sin(q);
Color 2; Expr  b= 2*sin(p)*sin(q);
Color 3; Expr  c= sqrt(12)*cos(q) ;
Opacity 0.7;  Color 4; Expr function(g, a, b, c)*(x-a)
+  function(h, a, b, c)* (y-b) +  function(k, a, b, c) *(z-c)=0;
Opacity 0.7; Expr 0=function(f, x, y, z) ;
```

El problema también se puede abordar empleando la fórmula del plano tangente para superficies parametrizadas. Se deja esto como ejercicio.

Ejemplo **2.29** Hallar la ecuación de la superficie de revolución que se obtiene al hacer girar la gráfica de $y = x^2$ alrededor del eje x. Grafique dicha superficie y elabore una animación que muestre esta curva girando alrededor del eje x.

Como se sabe, para hallar la ecuación de una superficie revolución, que se obtiene al hacer rotar una curva con ecuación $F(x, y) = 0$ alrededor del eje x, se debe reemplazar la variable y por la expresión $\sqrt{y^2 + z^2}$. Obtenemos así que la superficie buscada tiene ecuación $\sqrt{y^2 + z^2} = x^2$. Para confeccionar la animación de la curva $y = x^2$ rotando alrededor del eje x usamos la parametrización

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$$

Nota: No podemos emplear la forma cartesiana $y = x^2$ para esta animación pues una ecuación del tipo $y = f(x)$ se dibuja como un cilindro cuando estamos en trabajando en 3D.

Para hacer rotar la curva en cuestión empleamos la matriz de rotación

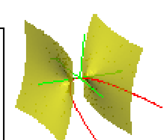
$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi n) & \operatorname{sen}(\pi n) \\ 0 & -\operatorname{sen}(\pi n) & \cos(\pi n) \end{bmatrix}$$

Para ingresar esta matriz en GC hacemos uso de la opción 3×3 *Matrix* de *Math*. Solo falta graficar la curva paramétrica y hacer variar el parámetro n. Es bueno ajustar el número de pasos en 50 o menos para apreciar las revoluciones de la curva. El código en GC es:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \pi n & \sin \pi n \\ 0 & -\sin \pi n & \cos \pi n \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{y^2 + z^2} = x^2$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} t \\ t^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$



El código usando GenGCF es:

```
Expr m =n;
Expr R=matrix(3,3,
1, 0, 0,
0, cos(pi*m), sin(pi*m),
0 , -sin(pi*m),cos(pi*m));
Opacity 0.8; Color 6; Expr  sqrt(y^2+z^2) =x^2;
Color 2; Expr vector(x,y, z)=R* vector(t, t^2, 0); T -4 4;
```

Para terminar es bueno mostrar un ejemplo en el que GC no luzca muy bien, es decir un caso en el que no quede muy claro cuál es el dibujo realizado.

Ejemplo **2.30** Elaborar la gráfica de $\operatorname{sen}(x^2+y^2+z^2) = 1/n$ para n entre 1 y 10. Use el vector **rgb**.

El código en GC es:

$$\sin(x^2+y^2+z^2) = \frac{1}{n}, \begin{bmatrix} r \\ g \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-x \\ 1+x \\ z \end{bmatrix}$$

Se trata de una sucesión de esferas concéntricas. El código usando GenGCF es:

```
Color 6; Expr sin(x^2+y^2+z^2)=1/n, vector(r, g, b) = vector(1-x, 1+x, z);
```

2.4 Conclusión

El proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas cuenta hoy con aliados digitales valiosos que debemos aprender a utilizar y a aplicar. La posibilidad de que el estudiante, debidamente orientado, descubra por su cuenta resultados interesantes, abre la puerta de un aprendizaje más ameno y provechoso.

Este trabajo ha evidenciado, mediante ejemplos, las bondades de la herramienta GC y habrá cumplido su cometido, si insta a algún lector a aprender más sobre esta herramienta. El autor queda a disposición de los lectores interesados para colaborar en este proceso.

Capítulo 3

Naturaleza de la investigación de operaciones

- Estudiamos en este capítulo de los aspectos históricos que justifican el por qué los estudiantes de computación y otras disciplinas afines deben tomar almenos un curso de Investigación de Operaciones.

3.1 Los orígenes de la investigación de operaciones

- Desde el advenimiento de la Revolución Industrial, el mundo ha sido testigo de un crecimiento sin precedentes en el tamaño y la complejidad de las organizaciones. Los pequeños talleres artesanales se convirtieron en las actuales corporaciones de miles de millones de dólares.
- Una parte integral de este cambio revolucionario fue el gran aumento en la división del trabajo y en la separación de las responsabilidades administrativas en estas organizaciones. Sin embargo, junto con los beneficios, el aumento en el grado de especialización creó nuevos problemas que ocurren hasta la fecha en muchas empresas.
- Uno de estos problemas es la tendencia de muchos de los componentes de una organización a convertirse en **imperios** relativamente autónomos, con sus propias metas y sistemas de valores, perdiendo con esto la visión de cómo sus actividades y objetivos encajan con los de toda la organización. Lo que es mejor para un componente, puede ir en detrimento de otro, de manera que pueden terminar trabajando con objetivos opuestos.
- Un problema relacionado con esto es que, conforme la complejidad y la especialización crecen, se vuelve más difícil **asignar** los recursos disponibles a las diferentes actividades de la manera más efectiva para la organización como un todo. Este tipo de problemas, y la necesidad de encontrar la mejor forma de resolverlos, proporcionaron el ambiente adecuado para el surgimiento de la investigación de operaciones.
- Las raíces de la investigación de operaciones se remontan a muchas décadas, cuando se hicieron los primeros intentos para emplear el enfoque científico en la administración de una empresa. Sin embargo, el inicio de la actividad llamada investigación de operaciones, casi siempre se atribuye a los servicios militares prestados a principios de la Segunda Guerra Mundial.

- Debido a los esfuerzos bélicos, existía una necesidad urgente de asignar recursos escasos a las distintas operaciones militares y a las actividades dentro de cada operación, en la forma más efectiva. Por todo esto, las administraciones militares americana e inglesa hicieron un llamado a un gran número de científicos para que aplicaran el enfoque científico a éste y a otros problemas de estrategia y táctica. De hecho, se les pidió que hicieran investigación sobre operaciones (militares).

- Sus esfuerzos contribuyeron de una manera definitiva al triunfo del combate aéreo inglés en la isla de Campaña en el Pacífico, de la batalla del Atlántico Norte y de muchas otras. Estimulados por el evidente éxito de la investigación de operaciones en lo militar, los industriales comenzaron a in.teresarse en este nuevo campo. Como la explosión industrial seguía su curso al terminar la guerra, los problemas causados por el aumento de la complejidad y especialización dentro de las organizaciones pasaron a primer plano .

- Comenzó a ser evidente para un gran número de personas, incluyendo a los consultores industriales que habían trabajado con o para los equipos de investigación de operaciones durante la guerra, que estos problemas eran básicamente los mismos que los que había enfrentado la milicia, pero en un contexto diferente. De esta forma, la investigación de operaciones comenzó a introducirse en la industria, los negocios y el gobierno. Para 1951, ya se había introducido por completo en Gran Bretaña y estaba en proceso de hacerla en Estados Unidos. Desde entonces, se ha desarrollado con rapidez.

- Se pueden identificar por lo menos otros dos factores que jugaron un papel importante en el desarrollo de la investigación de operaciones durante este periodo. Uno es el gran progreso que ya se había hecho en el mejoramiento de las técnicas disponibles en esta área. Después de la guerra, muchos científicos que habían participado en los equipos de investigación de operaciones, o que tenían información sobre este trabajo, se encontraban motivados a buscar resultados sustanciales en este campo; de esto resultaron avances importantes.

- Un ejemplo sobresaliente es el método símplex para resolver problemas de programación lineal, desarrollado en 1947 por George Dantzig. Muchas de las herramientas características de la investigación de operaciones, como programación lineal, programación dinámica, líneas de espera y teoría de inventarios, fueron desarrolladas casi por completo antes del término de la década de 1950.

- Además del rápido desarrolló teórico, el segundo factor que dio un gran ímpetu a la investigación de operaciones fue el advenimiento de las computadoras. Para manejar de una manera efectiva los complejos problemas inherentes a esta disciplina, por lo general se requiere un gran número de cálculos; llevarlos a cabo a mano puede resultar casi imposible. Entonces, el desarrollo de la computadora electrónica digital, con su capacidad para realizar cálculos aritméticos, miles o tal vez millones de veces más rápido que los seres humanos, fue una tremenda ayuda para la investigación de operaciones.

3.2 Naturaleza de la investigación de operaciones

- ¿Qué es la investigación de operaciones? Una manera de tratar de responder a esta pregunta es dar una definición. Por ejemplo, la investigación de operaciones puede definirse como el método científico aplicado a la solución de problemas y a la toma de decisiones por parte de la gerencia.

- Esto conlleva a la construcción de un modelo simbólico (usualmente matemático) que extrae los elementos esenciales de un problema de decisión de la vida real que es inherentemente complejo e incierto, de tal manera que se pueda optimizar una solución importante para los objetivos del tomador de decisiones.

- Como su nombre lo dice, investigación de operaciones significa "hacer investigación sobre las operaciones". Esto dice algo tanto del enfoque como del área de aplicación. Entonces, la investigación de operaciones se aplica a problemas que se refieren a la conducción y coordinación de operaciones o actividades dentro de una organización.

- La naturaleza de la organización es esencialmente inmaterial y, de hecho, la investigación de operaciones se ha aplicado en los negocios, la industria, la milicia, el gobierno, los hospitales, etc. Así, la gama de aplicaciones es extraordinariamente amplia.

- El enfoque de la investigación de operaciones es el mismo del método científico. En particular, el proceso comienza por la observación cuidadosa y la formulación del problema y sigue con la construcción de un modelo científico (por lo general matemático) que intenta abstraer la esencia del problema real.

- Se propone luego la hipótesis de que el modelo es una representación lo suficientemente precisa de las características esenciales de la situación como para que las conclusiones (soluciones) obtenidas sean válidas también para el problema real. Esta hipótesis se verifica y modifica mediante las pruebas adecuadas.

- Entonces, en cierto modo, la investigación de operaciones incluye la investigación científica creativa de las propiedades fundamentales de las operaciones. Sin embargo, existe más que esto. En particular, la investigación de operaciones se ocupa también de la administración práctica de la organización. Así, para tener éxito, deberá también proporcionar conclusiones positivas y claras que pueda usar el tomador de decisiones cuando las necesite.

- Una característica más de la investigación de operaciones es su amplio punto de vista. Como quedó implícito en la sección anterior, la investigación de operaciones adopta un punto de vista organizacional. Puede decirse que intenta resolver los conflictos de intereses entre los componentes de la organización de forma que el resultado sea el mejor para la organización completa. Esto no significa que el estudio de cada problema deba considerar en forma explícita todos los aspectos de la organización, sino que los objetivos que se buscan deben ser consistentes con los de toda ella.

- Una característica adicional, que se mencionó como de pasada, es que la investigación de operaciones intenta encontrar la mejor solución, o la solución óptima, al problema bajo consideración. En lugar de contentarse con sólo mejorar el estado de las cosas, la meta es identificar el mejor curso de acción posible. Aún cuando debe interpretarse con todo cuidado, esta "búsqueda de la optimalidad" es un aspecto muy importante dentro de la investigación de operaciones.

- Todas estas características llevan de una manera casi natural a otra. Es evidente que no puede esperarse que un solo individuo sea un experto en todos los múltiples aspectos del trabajo de investigación de operaciones o de los problemas que se estudian; se requiere un grupo de individuos con diversos antecedentes y habilidades.

- Entonces, cuando se va a realizar un estudio de investigación de operaciones completo de un nuevo problema, por lo general es necesario organizar un equipo. Este debe incluir individuos con conocimientos sólidos en matemáticas, estadística y teoría de probabilidades, al igual que en economía, administración de empresas, computación electrónica, ingeniería, ciencias físicas y del comportamiento, y por supuesto, en las técnicas especiales de investigación de operaciones.

- El equipo también necesita tener la experiencia y las habilidades necesarias para permitir la consideración adecuada de todas las ramificaciones del problema a través de la organización y para ejecutar eficientemente todas las fases del estudio.

- En resumen, la investigación de operaciones se ocupa de la toma de decisiones óptimas y del modelado de sistemas determinísticos y probabilísticos que se originan en la vida real. Estas aplicaciones, que ocurren en el gobierno, en los negocios, en la industria, dentro de la ingeniería económica y de las ciencias naturales y sociales, se caracterizan, en gran parte, por la necesidad de asignar recursos escasos. En estas situaciones, se puede obtener un conocimiento profundo det problema a partir del análisis científico que proporciona la investigación de operaciones.

- La contribución del enfoque de investigación de operaciones proviene principalmente de:

    1. La estructuración de una situación de la vida real como un modelo matemático, logrando una abstracción de los elementos esenciales para que pueda buscarse una solución que concuerde con los objetivos del tomador de decisiones. Esto implica tomar en cuenta el problema dentro del contexto del sistema completo.
    2. El análisis de la estructura de tales soluciones y el desarrollo de procedimientos sistemáticos para obtenerlas.
    3. El desarrollo de una solución, incluyendo la teoría matemática si es necesario, que lleva al valor óptimo de la medida de lo que se espera del sistema (o quizá que compare los cursos de acción opcionales evaluando esta medida para cada uno).

3.3 Impacto de la investigación de operaciones

- La investigación de operaciones ha tenido un creciente impacto en la administración de las organizaciones. Tanto el número como la variedad de sus aplicaciones continúa creciendo con rapidez y no se ve que vaya a disminuir. De hecho, a excepción de las computadoras, parece que la extensión de este impacto no tiene rival con otros desarrollos recientes.

- Después del éxito de la investigación de operaciones durante la Segunda Guerra Mundial, los servicios militares americanos e ingleses continuaron trabajando con grupos activos en este campo, muchas veces a diferentes niveles de mando. Como resultado, ahora existe un gran número de personas llamadas "investigadores de operaciones militares" que aplican estos enfoques a los problemas de defensa nacional. Por ejemplo, dedican sus esfuerzos a la planeación táctica de los requerimientos y uso de los sistemas de armamento al igual que estudian los complejos problemas de la asignación e integración del trabajo. Algunas de sus técnicas incluyen ideas bastante elaboradas dentro de las ciencias políticas, matemáticas, economía, teoría de probabilídad y estadística.

- La investigación de operaciones también se usa ampliamente en todo tipo de organizaciones incluyendo la industria y el comercio. Casi todas las organizaciones más grandes del mundo y una buena proporción de las industrias más pequeñas cuentan con grupos bien establecidos de investigación de operaciones.

- Muchas industrias, incluyendo la aérea y de proyectiles, la automotriz, la de comunicaciones, computación, energía eléctrica, electrónica, alimenticia, metalúrgica, minera, del papel, del petróleo y del transporte, han empleado la investigación de operciones. Las instituciones financieras, gubernamentales y de salud están incluyendo cada vez más estas técnicas.

- Para ser más específicos, se considerarán algunos problemas que se han resuelto mediante algunas técnicas de investigación de operaciones.

- La programación lineal se ha usado con éxito en la solución de problemas referentes a la asignación de personal, la mezcla de materiales, la distribución y el transporte y las carteras de inversión.

- La programación dinámica se ha aplicado con buenos resultados en áreas tales como la planeación de los gastos de comercialización, la estrategia de ventas y la planeación de la producción.

- La teoría de colas ha tenido aplicaciones en la solución de problemas referentes al congestionamiento del tráfico, al servicio de máquinas sujetas a descomposturas, a la determinación del nivel de la mano de obra, a la programación del tráfico aéreo, al diseño de presas, a la programación de la producción y a la administración de hospitales.

- Otras técnicas de investigación de operaciones, como la teoría de inventarios, la teoría de juegos y la simulación, han tenido exitosas aplicaciones en una gran variedad de contextos.

- Hasta hace unos años, las técnicas más usadas de IO han sido:

    1. Análisis de regresión
    2. Programación lineal
    3. Simulación (en producción)

4. Modelos de redes
5. Teoría de colas
6. Programación dinámica
7. Teoría de juegos
8. Teoria de inventarios
9. PERT /CPM

Capítulo 4
Programación lineal

- Muchas personas clasifican el desarrollo de la programación lineal entre los avances científicos más importantes de mediados del siglo XX, y estamos de acuerdo con esta aseveración: su impacto de 1950 a la fecha ha sido extraordinario. En la actualidad es una herramienta común que ha ahorrado miles o millones de dólares a muchas compañías y negocios, incluyendo industrias medianas en distintos países del mundo; su aplicación a otros sectores de la sociedad se está ampliando con rapidez.

- Se han escrito muchos libros de texto sobre esta materia y se cuentan por cientos los artículos publicados que describen aplicaciones importantes. De hecho, una proporción muy grande de los cálculos científicos en computadoras está dedicada al uso de la programación lineal y a las técnicas relacionadas con ésta.

- ¿Cual es la naturaleza de esta notable herramienta y qué tipos de problemas puede manejar? El lector adquirirá una noción de esto conforme vaya trabajando en los ejemplos subsecuentes. Sin embargo, un resumen verbal puede ayudar a proporcionar esta perspectiva.

- Expresado brevemente, el tipo más común de aplicación abarca el problema general de asignar recursos limitados entre actividades competitivas de la mejor manera posible (es decir, en forma óptima).

- Este problema de asignación puede surgir cuando deba elegirse el nivel de ciertas actividades que compiten por recursos escasos necesarios para realizarlas.

- La variedad de situaciones a las que se puede aplicar esta descripción es sin duda muy grande, y va desde la asignación de instalaciones productivas a los productos, hasta la asignación de los recursos nacionales a las necesidades de un país; desde la selección de una cartera de inversiones, hasta la selección de los patrones de envío, desde la planeación agrícola, hasta el diseño de una terapia de radiación, etc. No obstante, el ingrediente común de todas estas situaciones es la necesidad de asignar recursos a las actividades.

- La programación lineal utiliza un modelo matemático para describir el problema. El adjetivo lineal significa que todas las funciones matemáticas del modelo deben ser funciones lineales. En este caso, la palabra programación no se refiere a programación en computadoras; en esencia es un sinónimo de planeación. Así, la programación lineal trata la planeación de las actividades para obtener un resultado óptimo, esto es, el resultado que mejor alcance la meta especificada (según el modelo) entre todas las opciones de solución.

- Aunque la asignación de recursos a las actividades es la aplicación más frecuente, la programación lineal tiene muchas otras posibilidades. De hecho, cualquier problema cuyo modelo matemático se ajuste al formato general del modelo de programación lineal es un problema de programación lineal. Aún más, se dispone de un procedimiento de solución extraordinariamente eficiente llamado método símplex, para resolver estos problemas, aun los de gran tamaño. Éstas son algunas causas del tremendo impacto de la programación lineal en las últimas décadas.

- En nuestro curso, usaremos el software Mathematica que implemente, entre otros algoritmos, el método del símplex.

4.1 Un modelo de dos variables: Pinturas Ávila

- En esta sección se presenta un modelo sencillo de PL con dos variables de decisión y se muestra cómo se puede resolver gráficamente. Si bien es cierto que una solución gráfica bidimensional casi no tiene utilidad en situaciones reales (las cuales normalmente comprenden cientos o miles de variables y restricciones), el procedimiento ofrece una excelente oportunidad para entender cómo funciona el proceso de optimización en la PL.

- **(Pinturas Ávila)**
  Pinturas Ávila posee una pequeña fábrica de pinturas para interiores y exteriores de casas para su distribución al mayoreo. Se utilizan dos materiales básicos, A y B, para producir las pinturas. La disponibilidad máxima de A es de 6 toneladas diarias; la de B es de 8 toneladas por día. La necesidad diaria de materia prima por tonelada de pintura para interiores y exteriores se resumen en la tabla de la Fig. 4.1.

	Exterior	Interior	Disponibilidad máxima (toneladas)
Materia prima A	1	2	6
Materia prima B	2	1	8

Figura 4.1: Toneladas de materia prima por tonelada de pintura

Nota: Se supone que en el proceso de elaboración de pintura se produce una pérdida de material. De esta forma para obtener una tonelada de pintura para exteriores debemos emplear una tonelada de materia prima A y dos tóneladas de la materia prima B.

- Un estudio del mercado ha establecido que la demanda diaria de pintura para interiores no puede ser mayor que la de pintura para exteriores en más de una tonelada.

- Asimismo, el estudio señala que la demanda máxima de pintura para interiores está limitada a dos toneladas diarias.
- El precio al mayoreo por tonelada es \$3 000 para la pintura de exteriores y \$2 000 para la pintura de interiores. Además el estudio revela que la compañía puede vender toda la pintura que produzca.
- ¿Cuánta pintura para exteriores e interiores debe producir la compañía todos los días para maximizar el ingreso bruto?
- (**Construcción del modelo matemático**)
  No hay una receta para construir un modelo, sin embargo las siguientes preguntas pueden ayudar a guiar el proceso:
  1. ¿Qué busca determinar el modelo? Dicho de otra manera, ¿cuáles son las variables (incógnitas) del problema?
  2. ¿Qué restricciones deben imponerse a las variables a fin de satisfacer las limitaciones del sistema representado por el modelo?
  3. ¿Cuál es el objetivo (meta) que necesita alcanzarse para determinar la solución óptima (mejor) de entre todos los valores factibles de las variables?
- Una manera efectiva de responder a estas preguntas consiste en hacer un resumen verbal del problema.
- La compañía busca determinar las cantidades (en toneladas) de pintura para exteriores e interiores que se producirán para maximizar (incrementar hasta donde sea factible) el ingreso bruto total (en miles de unidades monetarias), a la vez que se satisfacen las restricciones de la demanda y el uso de materias primas.
- El punto capital del modelo matemático consiste en identificar, en primer término, las variables y después expresar el objetivo y las restricciones como funciones matemáticas de las variables. Por lo tanto, en relación con el problema de Pinturas Ávila, tenemos lo siguiente.
- **Variables**. Como deseamos determinar las cantidades de pintura para exteriores e interiores que se producirán, las variables del modelo se pueden definir como

  $x_E =$ toneladas de pintura para exteriores producidas diariamente

  $x_I =$ toneladas de pintura para interiores producidas diariamente

  Nota: El nombre de las variables, como se acostumbra en programación, debe ser representativo, sin embargo como se trata de problemas de dos variables, el problema anterior se puede modelar, también, haciendo:

$x =$ toneladas de pintura para exteriores producidas diariamente

$y =$ toneladas de pintura para interiores producidas diariamente

- **Función objetivo**. Como cada tonelada de pintura para exteriores se vende en \$3 000, el ingreso bruto obtenido de la venta de x_E toneladas es $3x_E$ miles de unidades monetarias. En forma análoga, el ingreso bruto que se obtiene de vender x_I toneladas de pintura para interiores es $2x_I$ miles de unidades monetarias. Bajo la suposición de que las ventas de pintura para exteriores e interiores son independientes, el ingreso bruto total se convierte en la suma de los dos ingresos.
- Si hacemos que z represente el ingreso bruto total (en miles de unidades monetarias), la función objetivo se puede escribir matemáticamente como $z = 3x_E + 2x_I$. Con el propósito de usar GC preferimos, $z = 3x + 2y$.
- La meta consiste en determinar los valores (factibles) de x_E yx_I que maximizarán este criterio.
- **Restricciones**. El problema de Pinturas Ávila impone restricciones sobre el uso de materias primas y sobre la demanda. La restricción del uso de materias primas se puede expresar en forma verbal como

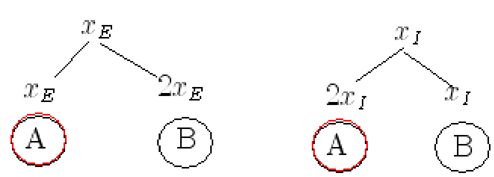
  (uso de materias primas en ambas pinturas) $\leq$ (disponibilidad máxima de materias primas)

- Esto nos lleva a las restricciones que siguen (véanse los datos del problema):

$$\begin{aligned} x_E + 2x_I &\leq 6 \quad \text{(materia prima A)} \\ 2x_E + x_I &\leq 8 \quad \text{(materia prima B)} \end{aligned}$$

  o bien

$$\begin{aligned} x + 2y &\leq 6 \quad \text{(materia prima A)} \\ 2x + y &\leq 8 \quad \text{(materia prima B)} \end{aligned}$$



- Las restricciones sobre la demanda se expresan en forma verbal como

$$\begin{pmatrix} \text{cantidad en exceso de pinturas} \\ \text{para interiores sobre exteriores} \end{pmatrix} \leq 1 \text{ tonelada por dlía}$$

$$\text{(demanda de pintura para interiores)} \leq 2 \text{ toneladas por día}$$

- Matemáticamente, éstos se expresan, respectivamente, como

$$
\begin{aligned}
&x_I - x_E \leq 1, \quad \left(\begin{array}{c}\text{exceso de pintura para interiores}\\ \text{sobre pintura para exteriores}\end{array}\right)\\
&x_I \leq 2, \quad (\text{demanda máxima de pintura para interiores})
\end{aligned}
$$

o bien

$$
\begin{aligned}
&x - y \leq 1,\\
&y \leq 2,
\end{aligned}
$$

- Una restricción implícita (o "sobreentendida") es que la cantidad que se produce de cada pintura no puede ser negativa (menor que cero). Para evitar obtener una solución como ésta, imponemos las restricciones de no negatividad, que normalmente se escriben como

$$
\begin{aligned}
&x_I \geq 0 \quad (\text{pintura para interiores})\\
&x_E \geq 0 \quad (\text{pintura para exteriores})
\end{aligned}
$$

o bien $x \geq 0$, $y \geq 0$.

- Los valores de las variables x_E y x_I se dice constituyen una solución factible si satisfacen todas las restricciones del modelo, incluyendo las restricciones de no negatividad.

- El modelo matemático completo para el problema de Pinturas Ávila se puede resumir ahora de la manera siguiente:

Determínense las toneladas de pinturas para interiores y exteriores que se producirán para

maximizar $z = 3x_E + 2x_I$ (función objetivo)
sujeta a a las restricciones

$$
\begin{cases}
x_E + 2x_I \leq 6\\
2x_E + x_I \leq 8\\
-x_E + x_I \leq 1\\
x_I \leq 2\\
x_E \geq 0, x_I \geq 0
\end{cases}
$$

- Si ponemos este problema en términos de variables x y y, obtenemos:

Determínense las toneladas de pinturas para interiores y exteriores que se producirán para

maximizar $z = 3x + 2y$ (función objetivo)
sujeta a a las restricciones

$$\begin{cases} x + 2y \leq 6 \\ 2x + y \leq 8 \\ -x + y \leq 1 \\ y \leq 2 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

- ¿Qué hace que este modelo sea un programa lineal? Técnicamente, es un programa lineal porque todas sus funciones (restricciones y objetivo) son lineales. La linealidad implica que se cumplen las propiedades de proporcionalidad y de aditividad.

- **1.** La proporcionalidad requiere que la contribución de cada variable (por ejemplo, x_E y x_I) en la función objetivo o su uso de los recursos sea directamente proporcional al nivel (valor) de la variable. No hay descuentos. Por ejemplo, si Pinturas Ávila ofrece vender la tonelada de pintura para exteriores en \$2 500 cuando las ventas sean superiores a dos toneladas, no será cierto que cada tonelada de pintura producirá un ingreso de \$3 000; puesto que generará \$3 000 por tonelada para $x_E \leq 2$ toneladas y de \$2500 por tonelada para $x_E > 2$ toneladas. Esta situación no satisface la condición de proporcionalidad directa con x_E.

- **2.** La aditividad requiere que la función objetivo sea la suma directa de las contribuciones individuales de las variables. En forma análoga, el primer miembro o lado izquierdo de cada restricción debe ser la suma de los usos individuales de cada variable del recurso correspondiente. Por ejemplo, en el caso de dos productos en competencia, donde un aumento en el nivel de ventas de un producto afecta contrariamente al del otro, los dos productos no satisfacen la propiedad de aditividad.

- **Ejercicios** Lo siguiente se refiere al modelo que acabamos de describir.

(a) Reescriba cada una de las restricciones que siguen en las condiciones estipuladas.

   - La demanda diaria de pintura para interiores es mayor que la de pintura para exteriores cuando menos en una tonelada. **R/** ..... $x_I - x_E \geq 1$ ..... .
   - El uso diario de la materia prima A es cuando mucho de 6 toneladas y cuando menos de 3 toneladas. **R/** ..... $x_E + 2x_I \leq 6$ y $x_E + 2x_I \geq 3$ ..... .
   - La demanda de pintura para interiores no puede ser menor que la de pintura para exteriores.
   R/ ..... $x_I - x_E \geq 0$ ..... .

(b) Verifique si las siguientes soluciones son factibles.
(1) $x_E = 1$ y $x_I = 4$; (2) $x_E = 2$, $x_I = 2$; (3) $x_E = 3\frac{1}{3}$ y $x_I = 1\frac{1}{3}$; (4) $x_E = 2$ y $x_I = 1$; (5) $x_E = 2$ y $x_I = -1$.
R/ ....Todas las soluciones son factibles salvo (1) y (5).......... .

(c) Considere la solución factible $x_E = 2$, $x_I = 2$. Determine
(1) La cantidad de holgura (no usada) de la materia prima A. **R/** ..Cero.. . (2) La cantidad de holgura de la materia prima B. **R/** ..2 toneladas.. .

(d) Determine la mejor solución entre todas las soluciones factibles del inciso (b).
R/ ....$(2) z = 10; (3) z = 12\frac{2}{3}; (4) z = 8$. La solución (3) es la mejor.......... .

(e) ¿Puede usted acertar al número de soluciones factibles que puede tener el problema de Pinturas Ávila? **R/** Un número infinito de soluciones, lo que hace inútil el procedimiento de enumeración del inciso (d) y señala la necesidad de una técnica "más selectiva", como se indica en la sección que sigue .

4.2 Solución gráfica del problema de las Pinturas Ávila

- Consideramos ahora la solución del modelo de programación lineal (PL) de Pinturas Ávila.

- El modelo se puede resolver en forma gráfica porque sólo tiene dos variables. Para modelos con tres o más variables, el método gráfico es impráctico o imposible. No obstante, podremos deducir conclusiones generales del método gráfico que servirán como la base para el desarrollo del método de solución general en el método del símplex.

- El primer paso del método gráfico consiste en graficar las soluciones factibles, o el espacio de soluciones (factible), que satisfaga todas las restricciones en forma simultánea. Para emplear Graphing Calculator (ver Fig. 4.2) identificamos la variable x_E con x y la variable x_I con y. Obtenemos así:

$$\text{Maximizar } z = 3x + 2y$$

$$\begin{cases} x + 2y \leq 6 \\ 2x + y \leq 8 \\ -x + y \leq 1 \\ y \leq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- Con GenGCF usamos en el menú **insertar** la opción **Progama Lineal** para ingresar el problema en cuestión. Debemos, sin embargo, recordar que este software no permite el uso de los símbolos $\leq$ y $\geq$, por lo que debemos reemplazarlos por $<$ y $>$, respectivamente. Al hacer esto lo que sucede es que se deja por fuera la frontera de la región en cuestión. Para efectos

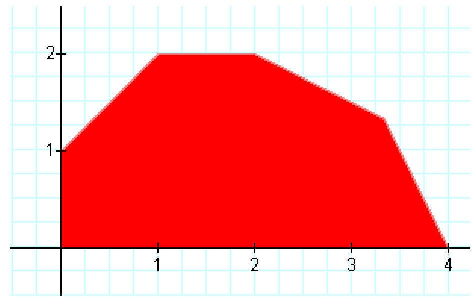


Figura 4.2: Región graficada en GC.

prácticos lo que se debe hacer es recordar que efectivamente esta frontera sí es parte de la región de factibilidad.

- El problema reformulado es:

$$\text{Maximizar } z = 3x + 2y$$

$$\begin{cases} x + 2y < 6 \\ 2x + y < 8 \\ -x + y < 1 \\ y < 2 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

- En GenGCF el código es:

```
Color 2;
Expr  x+2*y<6,  2*x+y<8,  -x+y<1,  y<2,  x>0,  y>0 ;
Color 3;
Expr  3*x+2*y = n;
SliderSteps 50;
Slider 0 25;
SliderOneDirection 0;
SliderMoving 1;
```

- El problema en *Mathematica* puede ingresarse utilizando los símbolos $\leq$ y $\geq$, puese este software no tiene ningún problema con respecto a estos. El código es como sigue:

```
In[6]:= Maximize[3 * x + 2 * y,
          x + 2 * y ≤ 6 ∧ 2 * x + y ≤ 8 ∧ -x + y ≤ 1 ∧ y ≤ 2 ∧ x ≥ 0 ∧ y ≥ 0,
          {x, y}]
```

$$\text{Out[6]=}\ \left\{\frac{38}{3}, \left\{x \to \frac{10}{3}, y \to \frac{4}{3}\right\}\right\}$$

- *Mathematica* indica que la solución óptima se obtiene cuando se opta por elaborar $x = 3.\overline{33}$ toneladas de pintura para exteriores y $y = 1.\overline{33}$ toneladas de pintura para interiores. Además la ganancia máxima será de \$ $1266.\overline{66}$.

- Por supuesto que la región se puede trazar manualmente. La figura 4.3 representa el espacio de soluciones que se requiere utilizando las variables x_E y x_I. Las restricciones de no negatividad $x_E \geq 0$ y $x_I \geq 0$ confinan todos los valores factibles al primer cuadrante (que está definido por el espacio arriba de o sobre el eje x_E y a la derecha de o sobre el eje x_I. El espacio encerrado por las restricciones restantes se determina sustituyendo en primer término ($\leq$) por ($=$) para cada restricción, con lo cual se produce la ecuación de una línea recta.

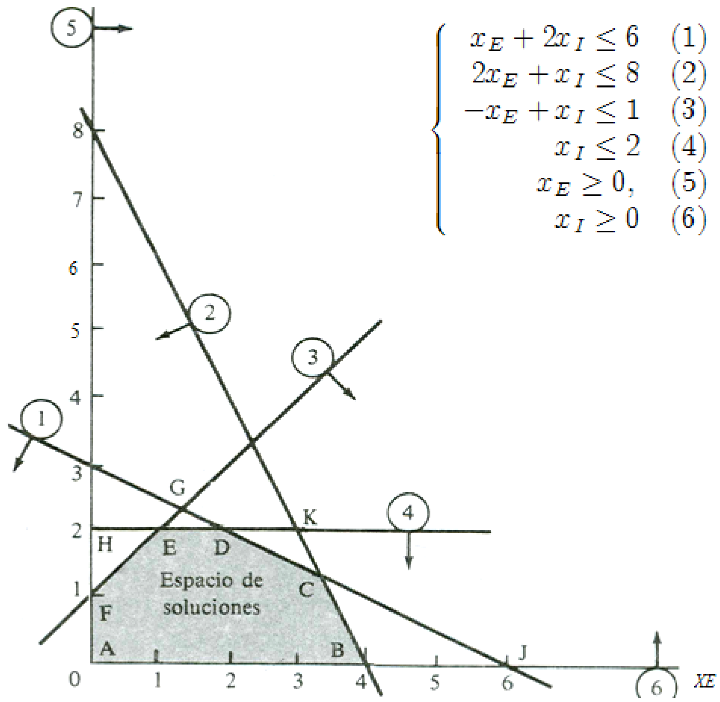


Figura 4.3: Región de factibilidad.

- Después se traza cada línea recta en el plano (x_E, x_I) y, la región en la cual se encuentra cada restricción cuando se considera la desigualdad, lo indica la dirección de la flecha situada sobre la línea recta asociada. Una manera fácil de determinar la dirección de la flecha es usar el origen $(0, 0)$ como punto de referencia.

- Si $(0, 0)$ satisface la desigualdad, la dirección factible debe incluir al origen; si no es así, debe estar en el lado opuesto. Por ejemplo, $(0, 0)$ satisface la desigualdad $-x_E + x_I \leq 1$, lo que significa que la desigualdad es factible en el semiespacio que incluye al origen. Aplicando este procedimiento a nuestro ejemplo, especificamos el espacio de soluciones $ABCDEF$ mostrado en la figura 4.3.

- Para obtener la solución óptima (máxima), desplazamos la recta del ingreso "cuesta arriba" hasta el punto donde cualquier incremento adicional en el ingreso produciría una solución infactible. La figura ilustra que la solución óptima ocurre en el punto C.

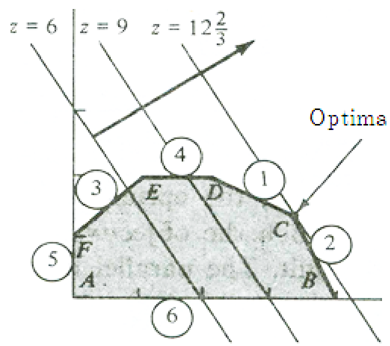


Figura 4.4: Algunas soluciones

- Como C es la intersección de las rectas (1) y (2) (véase la figura 4.4), los valores de x_E y x_I se determinan al resolver las dos ecuaciones que siguen en forma simultánea:

$$\begin{cases} x_E + 2x_I = 6 \\ 2x_E + x_I = 8 \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

- Cada punto contenido o situado en la frontera del espacio de soluciones $ABCDEF$ satisface todas las restricciones y por consiguiente, representa un punto factible. Aunque hay un número infinito de puntos factibles en el espacio de soluciones, la solución óptima puede determinarse al observar la dirección en la cual aumenta la función objetivo $z = 3x_E + 2x_I$; la figura 4.4 ilustra este resultado.

- Las líneas paralelas que representan la función objetivo se trazan mediante la asignación de valores crecientes (arbitrarios) a $z = 3x_E + 2x_1$ a fin de determinar la pendiente y la dirección en la cual crece el ingreso total (función objetivo). En la figura 4.4 se utilizó $z = 6$ y $z = 9$ (verifíquese esto).

- Las dos ecuaciones producen $x_E = 3\frac{1}{3}$ y $x_I = 1\frac{1}{3}$. Por lo tanto, la solución indica que la producción diaria debe ser de $3\frac{1}{3}$ toneladas de pintura para exteriores y de $1\frac{1}{3}$ toneladas de pintura para interiores. El ingreso asociado es

$$z = 3\left(3\frac{1}{3}\right) + 2\left(1\frac{1}{3}\right) = 12\frac{2}{3} \quad \text{(miles de \$)}$$

- Una variable de holgura está asociada con la restricción ($\leq$) y representa la cantidad en que excede el segundo miembro de la restricción al primero.

- Una variable de exceso se identifica con una restricción ($\geq$) y representa el exceso del primer miembro sobre el segundo.

- **Ejercicios**
  (a) Identifique el espacio de soluciones y la solución óptima (incluyendo las variables holgura/exceso correspondientes a las restricciones 1, 2, 3 y 4) para el problema de Pinturas Ávila si cada uno de los cambios que siguen se realizan por separado. Supóngase que cada cambio sustituye, en vez de aumentar, la condición existente en el modelo y que la información restante acerca del modelo se mantiene sin cambio. (Véase la figura 4.3 para identificar y verificar las respuestas.)

  - La demanda máxima de pintura para interiores es de 3 toneladas por día.
    R/ Espacio de soluciones $= ABCGF$. La solución óptima permanece en C con holgura $s_4 = 1.6667$ y todas las demás holguras permanecen invariables .
  - La demanda de pintura para interiores es cuando menos de 2 toneladas diarias.
    R/ Espacio de soluciones $= EDG$. Solución óptima en D, $z = 10$, $x_E = x_I = 2$, holguras $s_1 = 0$, $s_2 = 2$, $s_3 = 1$, y el exceso $s_4 = 0$.
  - La demanda de pintura para interiores es exactamente una tonelada mayor que la de pintura para exteriores. **R/** Espacio de soluciones $= EF$. Solución óptima en E, $z = 7$, $x_E = 1$, $x_I = 2$, holguras $s_1 = 1$, $s_2 = 4$ y $s_3 = 0$. La restricción de igualdad 4 no tiene ni holgura ni exceso .
  - La disponibilidad diaria de la materia prima B es cuando menos de 8 toneladas.
    R/ Espacio de soluciones $= BCJ$. Solución óptima en J, $z = 18$, $x_E = 6$ y $x_I = 0$, holgura $s_1 = 0$, exceso $s_2 = 4$, holguras $s_3 = 7$, $s_4 = 2$.
  - La disponibilidad de la materia prima B es cuando menos de 8 toneladas por día y la demanda de pintura para interiores es mayor que la de pintura para exteriores cuando menos en una tonelada. **R/** El problema no tiene espacio de soluciones factible .

4.3 Problemas con dos variables de decisión

- En esta sección se estudiará una colección de ejemplos que muestra cómo pueden modelarse algunos problemas de aplicación real para el caso de dos variables de decisión.

- Como se vio previamente, en el caso de dos variables podemos emplear el método de la solución gráfica.

- Los comandos Maximize y Minimize de *Mathematica* permiten resolver la mayoría de los problemas que se pueden encontrar en los libros tradicionales que tratan el tema de programación lineal.

Ejemplo **4.1** La compañía Vidrios Ávila produce artículos de vidrio de alta calidad, incluyendo ventanas y puertas de vidrio. Tiene tres plantas. Los marcos y molduras de aluminio se hacen en la planta 1; los marcos de madera se fabrican en la planta 2 y en la planta 3 se produce el vidrio y se ensamblan los productos.

Debido a que las ganancias se han reducido, la gerencia general ha decidido reorganizar la línea de producción. Se descontinuarán varios productos no rentables y se dejará libre una parte de la capacidad de producción para emprender la fabricación de uno o dos productos nuevos que han tenido demanda.

Uno de los productos propuestos (**producto 1**) es una puerta de vidrio de 8 pies con marco de aluminio. El otro (**producto 2**) es una ventana grande (4×6 pies) para vidrio doble con marco de madera. El departamento de mercadotecnia ha sacado por conclusión que la compañía puede vender **todo** lo que pueda producir de cualquiera de los productos. Sin embargo, como ambos productos compiten por la misma capacidad de producción en la planta 3, no es obvio qué mezcla de los dos productos sería la más redituable. Por todo esto, la gerencia pidió al departamento de investigación de operaciones que estudiara el asunto.

Después de hacer algunas investigaciones, el departamento de IO determinó:

1. la cantidad de horas disponibles diariamente en cada planta para estos productos,
2. la cantidad de horas que requiere cada unidad producida en cada planta y
3. la ganancia (en cientos de dólares) por cada producto

Esta información se resume en la tabla 4.5.

Planta	**Producto 1**	**Producto 2**	**Capacidad disponible**
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
Ganancia Unitaria	\$3	\$5	

Figura 4.5: Capacidad usada por unidad de tasa de producción.

(**Formulación como un problema de programación lineal**)
Para formular un modelo matemático (de programación lineal) para este problema, sean x_1 y x_2 las variables que representan las cantidades del producto 1 y el producto 2 que se producen diariamente y sea z la contribución a la ganancia que resulta por la venta de estos bienes. Entonces, x_1 y x_2 son las variables de decisión del modelo y el objetivo es es coger sus valores de manera que se maximice $z = 3x_1 + 5x_2$ sujeta a las restricciones impuestas sobre esos valores por las capacidades disponibles limitadas en cada planta.

La tabla 4.5 dice que cada unidad del producto 1 que se produce requerirá una hora en la planta 1, y sólo se dispone de 4 horas diarias para esta planta. Matemáticamente, esta restricción se expresa mediante la desigualdad $x_1 \leq 4$. De igual manera, la planta 2 impone la restricción

$2x_2 \leq 12$. El porcentaje de la capacidad de la planta 3 que se consume al elegir x_1 y x_2 como las tasas de producción de los nuevos productos sería $3x_1 + 2x_2$. Entonces, la expresión matemática para la restricción de la planta 3 es $3x_1 + 2x_2 \leq 18$. Por último, como las tasas de producción no pueden ser negativas, es necesario restringir las variables de decisión a valores no negativos: $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$. Para resumir, en el lenguaje matemático de programación lineal, el problema consiste en seleccionar valores de x_1 y x_2 para

$$\begin{aligned}
&\text{Maximizar } z = 3x_1 + 5x_2\\
&x_1 \leq 4\\
&2x_2 \leq 12\\
&3x_1 + 2x_2 \leq 18\\
&x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

(Nótese cómo la información dada en la tabla 4.5 queda esencialmente duplicada en la distribución de los coeficientes de x_1 y x_2 en el modelo de programación lineal.)

La solución usando Graphing Calculator es:

```
Expr  x<4,  2*y<12,  3*x+2*y<18,  x>0,  y>0;
Color 3; Expr  3*x+5*y = n;
SliderSteps 50; Slider 0 45;
SliderOneDirection 0; SliderMoving 1;
Color 8; Expr vector(1,  1);
Color 8; Expr vector(1, 2 );
....Etc
```

En *Mathematica* el código es como sigue:

```
Maximize[3 x + 5 y,
 {x ≤ 4 && 2 y ≤ 12 && 3 x + 2 y ≤ 18 && x ≥ 0 &&
   y ≥ 0 && x ∈ Integers && y ∈ Integers},
 {x, y}]
```

(**Solución gráfica**)
Este pequeño problema tiene sólo dos variables de decisión y por lo tanto sólo dos dimensiones, por lo que se puede usar un procedimiento gráfico para resolverlo. Este procedimiento incluye la construcción de una gráfica de dos dimensiones, con x_1 y x_2 en los ejes. El primer paso es identificar los valores de (x_1, x_2) permitidos por las restriciones. Esto se hace dibujando las líneas de la frontera de valores permisibles. Para comenzar, nótese que las restricciones de no negatividad, $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$ exigen que (x_1, x_2) esté en el lado positivo de los ejes (o en cual quiera de los dos ejes). Después obsérvese que la restricción $x_1 \leq 4$ significa que (x_1, x_2) no puede estar a la derecha de la recta $x_1 = 4$. De manera parecida, se puede agregar la línea

$2x_2 = 12$ a la frontera de la región permisible. La última restricción, $3x_1 + 2x_2 \leq 18$, se encuentra graficando los puntos (x_1, x_2) tales que 3 $x_1 + 2x_2 = 18$ (otra recta) para completar la frontera. (Nótese que los puntos tales que $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ son aquellos que están ya sea sobre o abajo de la recta $3x_1 + 2x_2 = 18$, por lo que ésta es la línea que limita, y más allá,de ella, la desigualdad ya no se cumple.) En la figura 4.6 se muestra la región (puntos destacados) de valores permisibles de (x_1, x_2) que resulta.

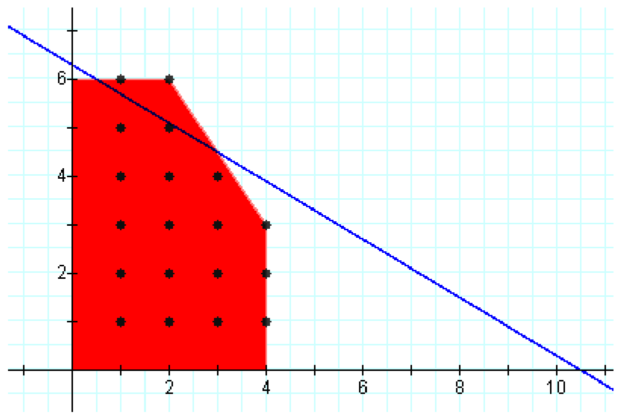


Figura 4.6: Región de factibilidad y función objetivo.

El paso final es seleccionar, dentro de esta región, el punto que maximiza el valor de $z = 3x_1 + 5x_2$. Este paso se vuelve automático después de un poco de práctica, pero para descubrir en qué se fundamenta vale la pena intentar algunos valores por prueba y error. Trátese, por ejemplo, $z = 10 = 3x_1 + 5x_2$ para ver si existe algún valor de (x_1, x_2) dentro de la región permisible que dé un valor de 10 para z. Si se dibuja la recta $3x_1 + 5x_2 = 10$, se puede ver que existen muchos puntos sobre esta recta que están dentro de la región (véasé la Fig. 4.6). Por lo tanto, se debe intentar un valor mayor para z, por ejemplo, $z = 20 = 3x_1 + 5x_2$. De nuevo, la figura revela que un segmento de esta línea cae dentro de la región, de manera que el máximo valor permisible de z debe ser por lo menos 20. Nótese que si se da un valor más grande a z, la recta quedará más arriba o más lejos del origen que la primera y que las dos rectas son paralelas. Éste es el procedimiento de prueba y error que sólo necesita que se grafique una familia de líneas paralelas que contengan al menos un punto en la región permisible y que se elija la que está más alejada del origen (en la dirección en que crecen los valores de z). Esta línea pasa por el punto $(2, 6)$ como se indica en la figura 4.6, y la ecuación queda

$$3x_1 + 5x_2 = 3(2) + 5(6) = 36 = z.$$

Por lo tanto, la solución que se buscaba es $x_1 = 2, x_2 = 6$, lo que indica que Vidrios Ávila debe fabricar 2 unidades del producto 1 y 6 del producto 2, con una ganancia resultante de \$36. Lo que es más, no existe otra combinación de los dos productos que fuera tan redituable, según el modelo. En este punto, el departamento de investigación de operaciones está listo para evaluar la validez del modelo de una manera más crítica y para llevar a cabo un análisis de sensibilidad que es un tema que se aboradará más adelante.

Nota: Debe observarse que se trata de un problema en que las variables de decisión deben tener valores enteros. A este tipo de problema se le llama programa lineal entero.

EJEMPLO **4.2** Supongamos que se dispone de determinadas piezas para la elaboración de dos productos finales. Se dispone de 8 "piezas pequeñas" y 6 "piezas grandes" que son utilizadas para elaborar sillas (usando 2 piezas pequeñas y 1 pieza grande) y mesas (usando 2 piezas de cada tipo).

Interesa decidir cuántas sillas y mesas fabricar de modo de obtener la máxima utilidad, dado un beneficio neto de \$15 por cada silla y de \$20 por cada mesa fabricada.

Solución: La información se puede tabular como se muestra en la Fig. 4.7.

	Silla	Mesa	Disponibilidad
P. pequeñas	2	2	8
P. grandes	1	2	6
Ganancia	15	20	

Figura 4.7: Tabulando los datos.

Las variables de decisión, que consiste en definir cuáles son las decisiones que se debe tomar.

x : número de sillas elaboradas.
y : número de mesas elaboradas.

Se debe plantear la función objetivo del problema que permita tener un criterio para decidir entre todas las soluciones factibles. Se desea maximizar la utilidad dada por:

$$z = f(x, y) = 15x + 20y$$

Restricciones del problema: se debe definir un conjunto de ecuaciones e inecuaciones que restringen los valores de las variables de decisión a aquellos considerados como factibles. Se debe respetar la disponibilidad de piezas para la fabricación de sillas y mesas:

$$\begin{array}{ll} \text{Piezas pequeñas:} & 2x + 2y \leq 8 \\ \text{Piezas grandes:} & x + 2y \leq 6 \end{array}$$

También se impone restricciones de no–negatividad:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

En resumen:

$$\begin{array}{l} \text{Max } 15x + 20y \\ sa: \\ 2x + 2y \leq 8 \\ x + 2y \leq 6 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{array}$$

El ejemplo corresponde a un modelo de Programación Lineal. Si además restringimos los valores de x e y a números enteros, tendríamos un modelo de **Programación Entera**.
Nota: sa significa "sujeta a".

La solución gráfica se presenta en la Fig. 4.8.

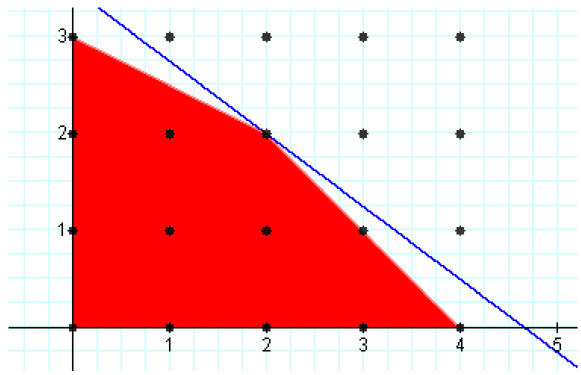


Figura 4.8: Solución gráfica.

La solución en *Mathematica* está dada por:

```
R = {2 * x + 2 * y ≤ 8 ∧ x + 2 * y ≤ 6 ∧ x ≥ 0 ∧ y ≥ 0};
S = Maximize[15 x + 20 y, R, {x, y}]
N[S]
```

La solución es $x^* = 2$, $y^* = 2$ y $z^* = 70$. Tenemos entonces que lo óptimo es fabricar 2 sillas y 2 mesas para una ganancia máxima de \$70.

Ejemplo **4.3** Un taller tiene tres (3) tipos de máquinas A, B y C; puede fabricar dos (2) productos 1 y 2, todos los productos tienen que ir a cada máquina y cada uno va en el mismo orden: Primero a la máquina A, luego a la B y luego a la C. La tabla siguiente muestra:

- Las horas requeridas en cada máquina, por unidad de producto
- Las horas totales disponibles para cada máquina, por semana
- La ganancia por unidad vendida de cada producto

Tipo de Máquina	Producto 1	Producto 2	Horas disponibles **por semana**
A	2	2	16
B	1	2	12
C	4	2	28
Ganancia por unidad	1	1.50	

¿Qué cantidad de cada producto (1 y 2) se debe manufacturar cada semana, para obtener la máxima ganancia? ¿Cuantas horas semanales sobran en cada departamento?

Definición de las variables:

x_1 = Unidades semanales a producir del artículo 1
x_2 = Unidades semanales a producir del artículo 2

Función objetivo: Maximizar $z = x_1 + 3/2x_2$

Restricciones

- Restricción debida a las horas disponibles por semana de la máquina A

$$2x_1 + 2x_2 \leq 16$$

- Restricción debida a las horas disponibles por semana de la máquina B

$$x_1 + 2x_2 \leq 12$$

- Restricción debida a las horas disponibles por semana de la máquina C

$$4x_1 + 2x_2 \leq 28$$

Condición de no negatividad: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Formulación gráfica: En la Fig. 4.9 se presenta la solución gráfica del problema. La solución óptima (usando *Mathematica*) está dada por $x_1^* = 4$ y $x_2^* = 4$. La gananciá máxima está dada por $z^* =$ $\underset{\dots}{10}$. **Nota**: El asterisco es para indicar el hecho de se trata de una solución óptima.

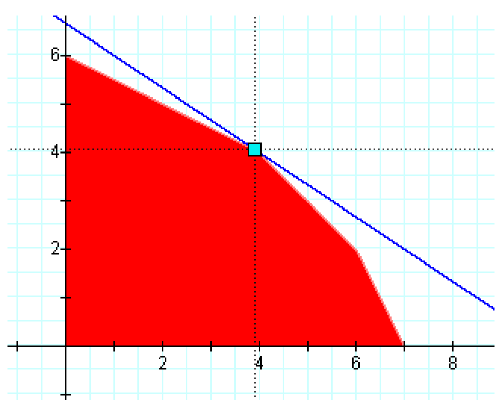


Figura 4.9: Solución gráfica.

Tiempo sobrante de cada máquina:

- Máquina A

$$\begin{aligned}&2x_1^* + 2x_2^* \leq 16\\&2(4) + 2(4) \leq 16\\&16 \leq 16\end{aligned}$$

  Conclusión: se usan todas las horas semanales disponibles.

- Máquina B

$$\begin{aligned}&x_1^* + 2x_2^* \leq 12\\&(4) + 2(4) \leq 12\\&12 \leq 12\end{aligned}$$

  Conclusión: se usan todas las horas semanales disponibles.

- Máquina C

$$\begin{aligned}&4x_1^* + 2x_2^* \leq 28\\&4(4) + 2(4) \leq 28\\&24 \leq 28\end{aligned}$$

  Conclusión: a la máquina C le sobran 4 horas semanales.

EJEMPLO **4.4** Un expendió de carnes de la ciudad acostumbra preparar la carne para albondigón con una combinación de carne molida de res y carne molida de cerdo. La carne de res contiene 80% de carne y 20% de grasa, y le cuesta a la tienda 80 centavos por libra; la carne de cerdo contiene 68% de carne y 32% de grasa, y cuesta 60 centavos por libra. ¿Qué cantidad de cada tipo de carne debe emplear la tienda en cada libra de albondigón, si se desea minimizar el costo y mantener el contenido de grasa no mayor de 25%?

El objetivo es minimizar el costo (en centavos), z, de una libra de albondigón, donde:

$z =$
80 veces el número de libras de carne molida de res,
más
60 veces el número de libras de carne molida de cerdo.

Si se define:

x_1: cantidad (en libras) de carne molida de res empleadas en cada libra de albondigón
x_2: cantidad (en libras) de carne molida de cerdo empleadas en cada libra de, albondigón,

el objetivo se expresa como: Minimízar: $z = 80x_1 + 60x_2$

Restricciones: Cada libra de albondigón tendrá $0.20x_1$ libras de grasa provenientes de la carne de res y $0.32x_2$ libras de grasa de la carne de cerdo. El contenido total de grasa de una libra de albondigón no debe ser mayor de 0.25 libras. Entonces:

$$0.20x_1 + 0.32x_2 \leq 0.25$$

El número de libras de carne de res y de cerdo empleadas en cada libra de albondigón debe sumar 1; entonces:

$$x_1 + x_2 = 1$$

Finalmente, la tienda no puede usar cantidades negativas de ninguna de las carnes, así que hay dos restricciones de no negatividad:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Resumiendo tenemos:

Minimizar:
$z = 80x_1 + 60x_2$
sa:
$0.20x_1 + 0.32x_2 \leq 0.25$
$x_1 + x_2 = 1$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$

Solución gráfica. La región factible -conjunto de puntos (x_1, x_2) que satisface todas las restricciones, incluyendo las condiciones de no negatividad- es la sección de la Fig. 4.10 delimitada por líneas gruesas.

Se ve que z^* se considerará en el extremo superior del segmento factible, lo cual es la intersección de las dos líneas.

$$\begin{cases} 0.20x_1 + 0.32x_2 = 0.25 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

La solución de este sistema da $x_1^* = 7/12$ y $x_2^* = 5/12$. Observamos que $z^* = 71.67$.

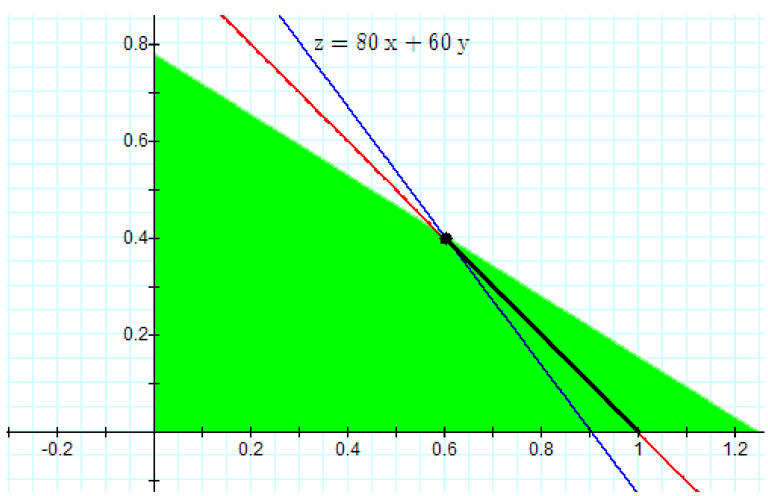


Figura 4.10: Solución gráfica.

EJEMPLO **4.5** Un fabricante de muebles tiene 6 unidades de madera y 28 horas disponibles, durante las cuales fabricará biombos decorativos. Con anterioridad, se han vendido bien dos modelos, de manera que se limitará a producir estos dos. Estima que el modelo I requiere 2 unidades de madera y 7 horas del tiempo disponible, mientras que el modelo II requiere 1 unidad de madera y 8 horas. Los precios de los modelos son $120 y $80, respectivamente. ¿Cuántos biombos de cada modelo debe fabricar si desea maximizar su ingreso en la venta?

Solución: El objetivo es maximizar el ingreso (en dólares), el cual se denotará z.:

$z =$
120 veces el número producido de biombos modelo I
más
80 veces el número producido de biombos modelo II

Haciendo:

$x_1 =$ número a producir de biombos modelo I
$x_2 =$ número a producir de biombos modelo II,

se expresa el objetivo como:

$$\text{maximícese: } z = 120x_1 + 80x_2$$

El fabricante está sujeto a una restricción en lo referente a la madera. Como cada modelo I requiere 2 unidades de madera, se les deberán asignar $2x_1$ unidades; igualmente se deberán asignar $1x_2$ unidades de madera a los biombos del modelo II. Entonces, la restricción en madera es:

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

El fabricante tiene también una restricción en lo que respecta al tiempo. Los biombos modelo I tornarán $7x_1$ horas y los biombos modelo II $8x_2$ horas; por lo tanto:

$$7x_1 + 8x_2 \leq 28$$

Es obvio que no se pueden producir cantidades negativas de uno u otro tipo de biombo, así que dos restricciones de no negatividad son $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Además, ya que no hay ingresos por concepto de biombos parcialmente terminados, otra condición oculta es que x_1 y x_2 deben ser enteros.

Combinando estas condiciones, se obtiene el programa matemático:

maximícese:
$z = 120x_1 + 80x_2$
con las condiciones:
$2x_1 + x_2 \leq 6$
$7x_1 + 8x_2 \leq 28$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$
con: todas las variables enteras

El sistema anterior es un programa **entero**. Como sólo hay dos variables, se puede dar una solución gráfica.

Véase la Fig. 4.11. La región factible es el conjunto de puntos enteros (marcados por puntos) dentro de la región sombreada. Se ve que la línea z, a través del punto $(3,0)$, dará el máximo deseado; entonces, el fabricante deberá producir tres biombos modelo I y ninguno del modelo II, para un ingreso máximo de:

$$z^* = 120(3) + 80(0) = \$360$$

El código usando *Mathematica* es:

```
R = {2 * x1 + x2 ≤ 6 ∧ 7 x1 + 8 x2 ≤ 28 ∧ x1 ≥ 0 ∧ x2 ≥ 0
    ∧ x1 ∈ Integers ∧ x2 ∈ Integers};
S = Maximize[ 120 x1 + 80 x2, R, {x1, x2}]
N[S]
```

Obsérvese que esta solución óptima no se obtuvo resolviendo primero el programa lineal asociado (el mismo problema sin las restricciones enteras) y luego aproximando al punto entero factible más cercano. De hecho, la región factible para el programa lineal asociado es el área sombreada de la Fig. 4.11; así que la solución óptima ocurre en el punto marcado con una flecha. Pero en el punto entero factible más cercano $(2,1)$, la función objetivo tiene el valor $z = 120(2) + 80(1) = \$320$, que es \$40 menos que el verdadero óptimo.

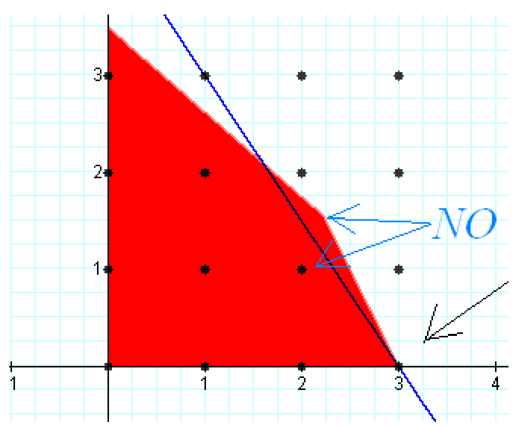


Figura 4.11: Solución gráfica.

Ejemplo **4.6** Dorian Auto manufactures luxury cars and trucks. The company believes that its most likely customers are high-income women and high-income men. In order to reach these groups, Dorian Auto has embarked on an ambitious TV advertising campaign and has decided to purchase l-minute commercial spots on two types of programs: comedy shows and football games. Each comedy commercial is seen by 7 million high-income women and 2 million high-income men. Each football commercial is seen by 2 million high-income women and 12 million high-income men. A 1-minute comedy ad costs \$50,000, and a 1-minute football ad costs \$100,000. Dorian would like the commercials to be seen by at least 28 million high-income women and at least 24 million high-income men. Use linear programming to determine how Dorian Auto can meet its advertising requirements at minimum cost.

Solución: Dorian must decide how many comedy and football ads should be purchased, so the decision variables are

x_1 = number of 1-minute comedy ads purchased
x_2 = number of 1-minute football ads purchased

Then Dorian wants to minimize total advertising cost (in thousands of dollars):

$$
\begin{aligned}
&\text{Total adv. cost} = \text{cost of comedy ads} + \text{cost of football ads}\\
&= \left(\frac{\text{cost}}{\text{comedy ad}}\right)(\text{total comedy ads}) + \left(\frac{\text{cost}}{\text{football ad}}\right)(\text{football ads})\\
&= 50x_1 + 100x_2
\end{aligned}
$$

Thus, Dorian's objective function is

$$\min\ z = 50x_1 + 100x_2$$

Dorian faces the following constraints:

1. Constraint 1: Commercials must reach at least 28 million high-income women.

$$7x_1 + 2x_2 \geq 28$$

2. Constraint 2: Commercials must reach at least 24 million high-income men.

$$2x_1 + 12x_2 \geq 24$$

The sign restrictions $x_1 \geq 0$ and $x_2 \geq 0$ are necessary.

The Dorian LP is given by:

$$
\begin{aligned}
&\text{Min}\\
&z = 50x_1 + 100x_2\\
&7x_1 + 2x_2 \geq 28\\
&2x_1 + 12x_2 \geq 24\\
&x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

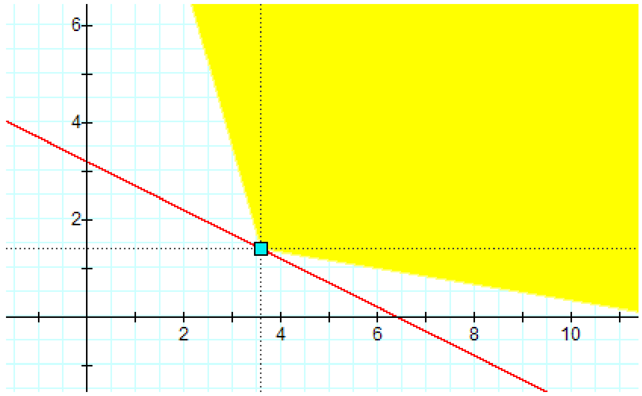


Figura 4.12: Graphical solution

This problem is typical of a wide range of LP applications in which a decision maker wants to minimize the cost of meeting a certain set of requirements. To solve this LP graphically, we begin by graphing the feasible region (Figure 4.12). Such a feasible region is called an unbounded feasible region.

Since Dorian wishes to minimize total advertising cost, the optimal solution to the Dorian problem is the point in the feasible region with the smallest z-value. To find the optimal solution, we need to draw an isocost line that intersects the feasible region. An isocost line is any line on which all points have the same z-value (or same cost).

The last point in the feasible region that intersects an isocost line will be the point in the feasible region having the smallest z-value. From Figure 4.12, we see that point E has the smallest z-value of any point in the feasible region. This means that point E is the optimal solution to the Dorian problem. Note that point where the lines $7x_1 + 2x_2 = 28$ and $2x_1 + 12x_2 = 24$ intersect. Simultaneously solving these equations yields the optimal solution ($x_1 = 3.6$ y $x_2 = 1.4$).

The optimal z-value can then be found by substituting these values of x_1 and x_2 into the objective function. Thus, the optimal z-value is

$$z = 50(3.6) + 100(1.4) = 320 = \$320,000$$

Does the Dorian model meet the assumptions of linear programming?

For the Proportionality Assumption to be valid, each extra comedy commercial must add exactly 7 million HIW and 2 million HIM. This contradicts empincal evidence, which indicates that after a certain point advertising yields diminishing returns. After, say, 500 auto commercials have been aired, most people have probably seen one, so it does little good to air more commercials. Thus, the Proportionality Assumption is violated.

We used the Additivity Assumption to justify writing

$$(\text{total HIW viewers}) = (\text{HIW viewers from comedy ads}) + (\text{HIW viewers from football ads})$$

In reality, many of the same people will see a Dorian comedy commercial and a Dorian football commercial. We are double–counting such people, and this creates an inaccurate picture of the total number of people seeing Dorian commercials. The fact that the same person may see more than one type of commercial means that the effectiveness of, say, a comedy commercial depends on the number of football commercials. This violates the Additivity Assumption.

If only 1-minute commercials are available, it is unreasonable to say that Dorian should buy 3.6 comedy commercials and 1.4 football commercials, so the Divisibility Assumption is violated, and the Dórian problem should be considered an **integer** programming problem.

In Fig. 4.13, we show that if the Dorian problem is solved as an integer programming problem, the minimum cost is attained by choosing ($x_1 = 6$, $x_2 = 1$) or ($x_1 = 4$, $x_2 = 2$). For either solution, the minimum cost is \$400,000. This is 25% higher than the cost obtained from the optimal LP solution.

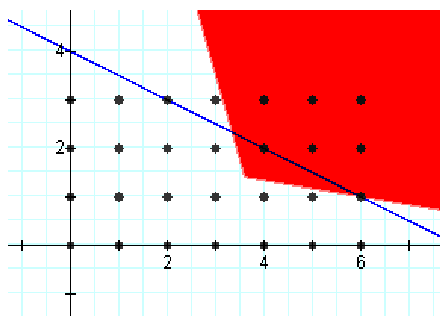


Figura 4.13: Graphical solution

Since there is no way to know with certainty how many viewers are added by each type of commercial, the Certainty Assumption is also violated. Thus, all the assumptions of linear programming seem to be violated by the Dorian Auto problem. Despite these drawbacks, analysts have used similar models to help companies determine their optimal media mix.

4.3.1 Ejemplos resueltos de programación lineal

- Se presentan a continuación una colección de ejemplos resueltos de programación lineal.

EJEMPLO **4.7** Maximizar la función $f(x, y) = 2x + 8y$ sometida a las restricciones:

$$\begin{cases} 2x + 4y \geq 8 \\ 2x - 5y \leq 0 \\ -x + 5y \leq 5 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Solución: La región de factibilidad y la función objetivo se muestran en la Fig. 4.14.

El código en GC es:

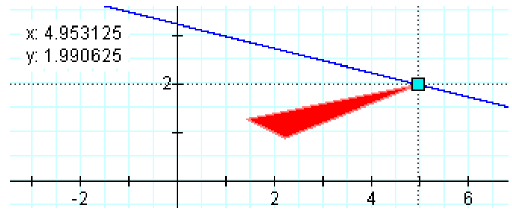


Figura 4.14: Región de factibilidad.

```
Color 2; Expr 2*x+4*y >8, 2*x-5*y<0, -x+5*y< 5, x>0, y>0 ;
Color 3; Expr 2*x+8*y = n;
SliderSteps 50; Slider 0 35;
SliderOneDirection 0; SliderMoving 1;
```

El código en *Mathematica* es:

```
z = 2 x + 8 y;
"Restricciones";
R = {2 * x + 4 * y ≥ 8 ∧ 2 * x - 5 * y ≤ 0 ∧ -x + 5 * y ≤ 5 ∧
    x ≥ 0 ∧ y ≥ 0};
"Solución:"
S = Maximize[z, R, {x, y}]
```

La solución que nos da *Mathematica* es: $z^* = 26$, $x^* = 5$ y $y^* = 2$.

Ejemplo **4.8** Minimizar la función $f(x, y) = 2x + 8y$ sometida a las restricciones:

$$\begin{cases} 2x + 4y \geq 8 \\ 2x - 5y \leq 0 \\ -x + 5y \leq 5 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Solución: La región de factibilidad y la función objetivo se muestran en la Fig. 4.15. El código en GC es:

```
Color 2; Expr 2*x+4*y >8, 2*x-5*y<0, -x+5*y< 5, x>0, y>0 ;
Color 3; Expr 2*x+8*y = n;
SliderSteps 50; Slider 0 35;
SliderOneDirection 0; SliderMoving 1;
```

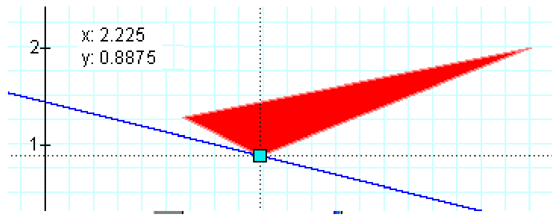


Figura 4.15: Región de factibilidad.

El código en *Mathematica* es:

```
R = {2*x+4*y ≥ 8 ∧ 2*x-5*y ≤ 0 ∧ -x+5*y ≤ 5 ∧
    x ≥ 0 ∧ y ≥ 0};
S = Minimize[2 x + 8 y, R, {x, y}]
```

La solución que nos da *Mathematica* es: $x^* = \dfrac{20}{9}$, $y^* = \dfrac{8}{9}$ y $z^* = \dfrac{104}{9}$.

Ejemplo **4.9** Un artesano con 80 kgs. de acero y 120 kgs. de aluminio quiere hacer ollas para tamales y para chicharrones que quiere vender, respectivamente a 20000 y 15000 colones cada una para sacar el máximo beneficio. Para la olla de tamales empleará 1 kg. de acero y 3 kgs de aluminio y para la de chicharrones 2 kgs. de ambos metales. ¿Cuántas ollas de cada tipo debe confeccionar para maximizar sus ganancias?

Solución:

Sean las variables de decisión:

$$x = \text{número de ollas para tamales.}$$
$$y = \text{número de ollas para chicharrones}$$

La siguiente tabla consigna los datos sobre el uso y las restricciones de los materiales:

	Tamales	Chicharrones	Disponibilidad
Acero	1	2	80
Aluminio	3	2	120

En este caso la función objetivo es $f(x, y) = 20x + 15y$ que se quiere maximizar. El programa lineal para este problema es entonces:

$$\text{Maximizar } z = 20x + 15y$$

$$\begin{cases} x + 2y \leq 80 \\ 3x + 2y \leq 120 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$$

La región de factibilidad se muestra en la Fig. 4.16. El código usando GenGCF es:

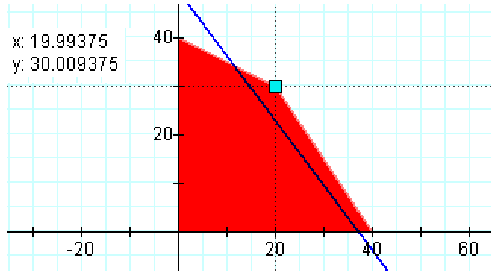


Figura 4.16: Región de factibilidad.

```
Color 2;
Expr x+2*y<80, 3*x+2*y <120, x>0, y>0 ;
Color 3; Expr 20.000*x+15.000*y = n;
SliderSteps 50; Slider 0 1200;
SliderOneDirection 0; SliderMoving 1;
```

El código en *Mathematica* es:

```
R = {x + 2 * y ≤ 80 ∧ 3 * x + 2 * y ≤ 120 ∧ x ≥ 0 ∧ y ≥ 0};
S = Maximize[20.000 * x + 15.000 * y, R, {x, y}]
```

La solución óptima es: $x^* = 20$, $y^* = 30$ y $z^* = 850$. Por lo tanto, el artesano debe confeccionar 20 ollas para tamales y 30 para chicharrones.

Nota: Se debe notar que en este caso se trata de un problema de programación entera. Sin embargo afortunadamente la solución óptima ocurre en un punto con coordenadas enteras.

Ejemplo **4.10** Un autobús San José–Peñas Blancas ofrece pasajes para fumadores al precio de ₡10000 y a no fumadores al precio de ₡6.000. Al no fumador se le deja llevar 50 kgs. de peso y al fumador 20 kgs. Si el autobús tiene 90 pasajes y admite un equipaje de hasta 3.000 kg. ¿Cuántos pasajes de cada tipo debe la compañía emitir con la finalidad de optimizara el beneficio?

Solución: Sean las variables de decisión:

$$x = \text{número de pasajes de fumadores}$$
$$y = \text{número de pasajes de no fumadores}$$

La función objetivo (en miles de colones) está dada por $z = 10x + 6y$ y debe ser maximizada. La restricciones son entonces

$$\begin{cases} x + y \leq 90 \\ 20x + 50y \leq 3000 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$$

La región de factibilidad se muestra en la Fig. 4.17. El código usando GenGCF es:

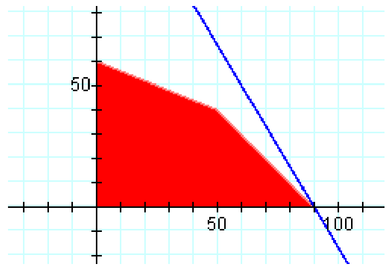


Figura 4.17: Región de factibilidad.

```
Color 2; Expr x+y<90, 20*x+50*y<3000, x>0, y>0;
Color 3; Expr 10*x+6*y = n;
SliderSteps 50; Slider 0 2500;
SliderOneDirection 0; SliderMoving 1;
```

El código en *Mathematica* es:

```
n[2]:= Maximize[10 x + 6 y,
         x + y ≤ 90 ∧ 20 x + 50 y ≤ 3000 ∧ x ≥ 0 ∧ y ≥ 0,  {x, y}]
```

La solución óptima es: $x^* = 90$, $y^* = 0$ y $z^* = 900$. Ha de vender 90 pasajes para fumadores y ninguno para no fumadores y así obtener un beneficio máximo de ₡900000.

Ejemplo **4.11** Juan se ganó 10 millones de colones en una lotería y le aconsejan que las invierta en dos tipos de acciones, A y B. Las de tipo A tienen más riesgo pero producen un beneficio del 10 %. Las de tipo B son más seguras, pero producen sólo el 7% anual. Después de varias deliberaciones decide invertir como máximo 6 millones en la compra de acciones A y por lo menos, 2 millones en la compra de acciones B. Además, decide que lo invertido en A sea, por lo menos, igual a lo invertido en B. ¿Cómo deberá invertir ₡10 millones para que le beneficio anual sea máximo?

Solución:

Sean las variables de decisión:

$$x = \text{cantidad (en millones) invertida en acciones A}$$
$$y = \text{cantidad (en millones) invertida en acciones B}$$

La función objetivo es $z = \dfrac{10x}{100} + \dfrac{7}{100}y$ y las restricciones son:

$$\begin{cases} x + y \leq 10 \\ x \leq 6 \\ y \geq 2 \\ x \geq y \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$$

La región de factibilidad se muestra en la Fig. 4.18. El código usando GenGCF es:

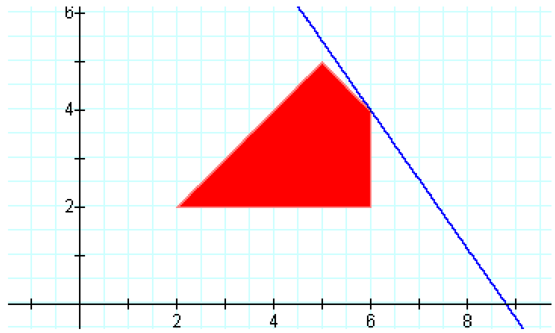


Figura 4.18: Región de factibilidad.

```
Color 2; Expr x+y<10, x< 6, y >2, x > y, x>0, y>0;
Color 3; Expr 10*x/100+7*y/100 = n;
SliderSteps 50; Slider 0 1;
SliderOneDirection 0; SliderMoving 1;
```

El código en *Mathematica* es:

```
R = {x + y ≤ 10 ∧ x ≤ 6 ∧ y ≥ 2 ∧ x ≥ 0 ∧ y ≥ 0};
S = Maximize[19 * x + 6 * y, R, {x, y}]
```

La solución óptima es: $x^* = 6$, $y^* = 4$ y $z^* = 138$. De essta forma la solución óptima es invertir 6 millones de colones en acciones tipo A y 4 millones en acciones tipo B.

Ejemplo **4.12** Un estudiante dedica parte de su tiempo al reparto de propaganda publicitaria. La empresa A le paga ₡5 por cada impreso repartido y la empresa B, con folletos más grandes, le paga ₡7 por impreso. El estudiante lleva dos bolsas: una para los impresos A, en la que caben 120 y otra para los impresos B, en la que caben 100. Ha calculado que cada día es capaz de repartir 150 impresos como máximo. Lo que se pregunta el estudiante es: ¿Cuántos impresos habrá que repartir de cada tipo para que su beneficio diario sea máximo?

Solución: Sean las variables de decisión:

$$x = \text{número de impresos diarios tipo A repartidos}$$
$$y = \text{número de impresos diarios tipo B repartidos}$$

La función objetivo es $z = 5x + 7y$ y las restricciones son:

$$\begin{cases} x \leq 120 \\ y \leq 100 \\ x + y \leq 150 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$$

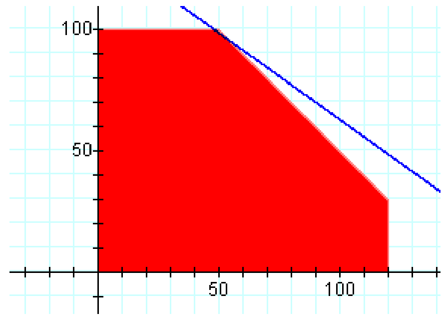


Figura 4.19: Región de factibilidad.

La región de factibilidad se muestra en la Fig. 4.19 El código usando GenGCF es:

```
Color 2; Expr x<120, y<100, x+y < 150, x>0, y>0;
Color 3; Expr 5*x+7*y = n;
SliderSteps 50; Slider 500 1500;
SliderOneDirection 0; SliderMoving 1;
```

El código en *Mathematica* es:

```
R = {x ≤ 120 ∧ y ≤ 100 ∧ x + y ≤ 150 ∧ x ≥ 0 ∧ y ≥ 0};
S = Maximize[5 * x + 7 * y, R, {x, y}]
```

La solución óptima es: $x^* = 50$, $y^* = 100$ y $z^* = 950$. Por lo tanto, el estudiante debe repartir 50 impresos tipo A y 100 tipo B para una ganancia máxima diaria de ₡950.

Ejemplo **4.13** Un comerciante acude al mercado CENARA a comprar naranjas con ₡50000. Le ofrecen dos tipos de naranjas: las de tipo A a ₡ 50 el kg. y las de tipo B a ₡ 80 el kg. Sabiendo que sólo dispone de su camioneta con espacio para transportar 700 kg. de naranjas como máximo y que piensa vender el kg. de naranjas tipo A a ₡58 y el kg. de tipo B a ₡90. Contestar justificando las respuestas:

- ¿Cuántos kg. de naranjas de cada tipo deberá comprar para obtener máximo beneficio?
- ¿Cuál será ese beneficio máximo?

Solución: Sean las variables de decisión:

$$\begin{cases} x = \text{kg. de naranjas tipo A comprados} \\ y = \text{ kg. de naranjas tipo B comprados} \end{cases}$$

La función objetivo que da el beneficio es $z = 8x + 10y$. Las restricciones son:

$$\begin{cases} 50x + 80y \leq 50000 \\ x + y \leq 700 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$$

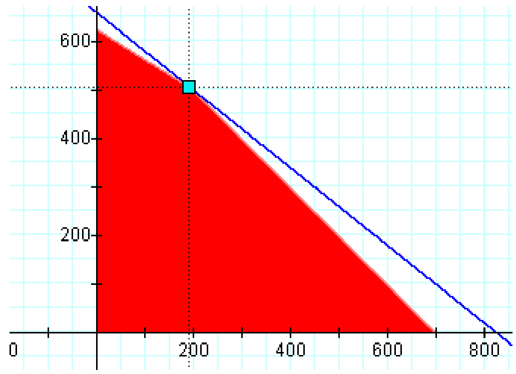


Figura 4.20: Región de factibilidad.

La región de factibilidad se muestra en la Fig. 4.20. El código usando GenGCF es:

```
Color 2; Expr 50*x+80*y<50000, x+y<700, x>0, y>0;
Color 3; Expr 8*x+10*y = n;
SliderSteps 50; Slider 6000 8000;
SliderOneDirection 0; SliderMoving 1;
```

El código en *Mathematica* es:

```
R = {50 * x + 80 * y ≤ 50000 ∧ x + y ≤ 700 ∧ x ≥ 0 ∧ y ≥ 0};
S = Maximize[ 8 * x + 10 * y, R, {x, y}]
```

La solución óptima es: $x^* = 200$, $y^* = 500$ y $z^* = 6600$. Ha de comprar 200 kgs. de naranjas A y 500 kgs. de naranjas B para obtener un beneficio máximo de ₵6600.

Ejemplo **4.14** Un sastre tiene 80 m^2 de tela de algodón y 120 m^2 de tela de lana. Un traje requiere 1 m^2 de algodón y 3 m^2 de lana, y un vestido de mujer requiere 2 m^2 de cada una de las dos telas. Calcular el número de trajes y vestidos que debe confeccionar el sastre para maximizar los beneficios si un traje y un vestido se venden al mismo precio.

Solución: Sean las variables de decisión:

$$x = \text{número de trajes}$$
$$y = \text{número de vestidos}$$

Designemos con a el precio común del traje y el vestido. La función objetivo es entonces $z = ax + ay$. Por otro lado las restricciones son

$$\begin{cases} x + 2y \leq 80 \\ 3x + 2y \leq 120 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$$

A pesar de que se conoce con certeza el valor de a, se puede suponer que $a \neq 0$. En GC podemos "trabajar" el valor de a mediante un "slider" entre 1 y 10. Notamos inmediatamente que todas las rectas en cuestión son paralelas. La región de factibilidad se muestra en la Fig. 4.21. El

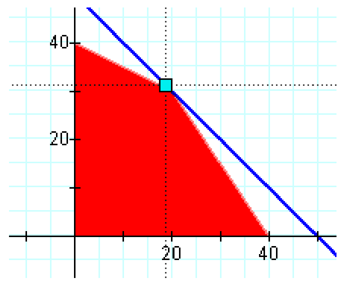


Figura 4.21: Región de factibilidad.

código usando GenGCF es:

```
Expr a=slider([1,10]);
Color 2; Expr x+2*y<80, 3*x+2*y<120, x>0, y>0;
Color 3; Expr a*(x+y) = n;
SliderSteps 50; Slider 0 50;
SliderOneDirection 0; SliderMoving 1;
```

El código en *Mathematica* para el caso $a = 2$ es:

```
R = {x + 2 * y ≤ 80 ∧ 3 * x + 2 * y ≤ 120 ∧ x ≥ 0 ∧ y ≥ 0};
S = Maximize[ 2 * x + 2 * y, R, {x, y}]
```

Nota: Desafortunadamente *Mathematica* no resuelve un programa lineal cuando hay parámetros involucrados. Lo que se puede hacer es dar un valor particular al valor de a y comprobar que el punto óptimo (x, y) no varía mediante un ciclo en el que se hace variar a. Sin embargo se debe echar mano a la solución gráfica para constatar que tal resultado es optimal.

La solución óptima es: $x^* = 20$, $y^* = 30$ y $z^* = 50a$. El máximo beneficio lo obtendrá el sastre fabricando 20 trajes y 30 vestidos.

Ejemplo **4.15** Un constructor va a edificar dos tipos de viviendas A y B. Dispone de 600 millones de colones y el costo de una casa de tipo A es de 13 millones y 8 millones una del tipo B. El número de casas de tipo A ha de ser, al menos, del 40% del total y el de tipo B, el 20% por lo menos. Si cada casa de tipo A se vende a 16 millones y cada una de tipo B en 9. ¿Cuántas casas de cada tipo debe construir para obtener el beneficio máximo?

Solución: Sean las variables de decisión:

$$x = \text{número de viviendas construidas del tipo A}$$
$$y = \text{número de viviendas construidas del tipo B}$$

La función objetivo es $z = (16 - 13)x + (9 - 8)y = 3x + y$. Las restricciones son:

$$\begin{cases} 13x + 18y \leq 600 \\ x \geq 40/100(x + y) \\ y \geq 20/100(x + y) \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$$

La región de factibilidad se muestra en la Fig. 4.22. El código usando GenGCF es:

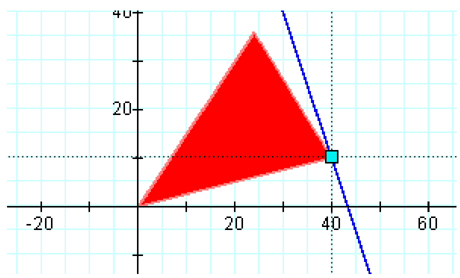


Figura 4.22: Región de factibilidad.

```
Color 2; Expr 13*x+8*y<600, x > 40/100*(x+y),
y > 20/100*(x+y),  x>0,  y>0;
Color 3; Expr    3*x+y = n;
SliderSteps 50; Slider 100 150;
SliderOneDirection 0; SliderMoving 1;
```

El código en *Mathematica* es:

```
R = {13 * x + 8 * y ≤ 600 ∧ x ≥ 40 / 100 * (x + y) ∧ y ≥ 20 / 100 * (x + y) ∧
    x ≥ 0 ∧ y ≥ 0};
S = Maximize[3 * x + y, R, {x, y}]
```

La solución óptima es: $x^* = 40$, $y^* = 10$ y $z^* = 130$. Teniendo que vender 40 viviendas tipo A y 10 tipo B para obtener un beneficio máximo de 130 millones de colones.

Ejemplo **4.16** Hannia dispone de 10 millones como máximo para repartir entre dos tipos de inversión (A y B). En la opción A desea invertir entre 2 y 7 millones. Además, quiere destinar a esa opción, como mínimo, tanta cantidad de dinero como a la B.

- ¿Qué cantidades debe invertir en cada una de las dos opciones? Plantear el problema y representar gráficamente el conjunto de soluciones.
- Sabiendo que el rendimiento de la inversión será del 9% en la opción A y del 12% en la B, ¿Qué cantidad debe invertir en cada una para optimizar el rendimiento global? ¿A cuánto ascenderá?

Solución:

Sean las variables de decisiónúmero

$$\begin{cases} x = \text{cantidad invertida en acciones tipo A} \\ y = \text{cantidad invertida en acciones tipo B} \end{cases}$$

La función objetivo está dada por $z = \dfrac{9x}{100} + \dfrac{12y}{100}$. Las restricciones son

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 7 \\ x \geq y \\ x + y \leq 10 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$$

La región de factibilidad se muestra en la Fig. 4.23 El código usando GenGCF es:

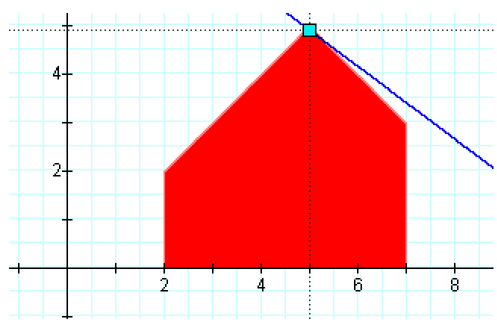


Figura 4.23: Región de factibilidad.

```
Color 2; Expr x+y<10, x >2, x<7, x > y,  x>0,  y>0;
Color 3; Expr     9*x/100+12*y/100 = n;
SliderSteps 50; Slider 0 2;
SliderOneDirection 0; SliderMoving 1;
```

El código en *Mathematica* es:

$$R = \{x + y \le 10 \land x \ge 2 \land x \le 7 \land x \ge y \land x \ge 0 \land y \ge 0\};$$
$$S = \text{Maximize}\left[\frac{9\,x}{100} + \frac{12\,y}{100},\ R,\ \{x,\ y\}\right]$$

La solución óptima es: $x^* = 5$, $y^* = 5$ y $z^* = 21/20$. Se ha de invertir 5 millones de colones en A y 5 millones en B para obtener un beneficio máximo de 1.05 millones.

Ejemplo **4.17** Una refinería de petróleo tiene dos fuentes de petróleo crudo: crudo ligero, que cuesta 35 dólares por barril y crudo pesado a 30 dólares el barril. Con cada barril de crudo ligero, la refinería produce 0.3 barriles de gasolina (G), 0.2 barriles de combustible para calefacción (C) y 0.3 barriles de combustible para turbinas (T), mientras que con cada barril de crudo pesado produce 0.3 barriles de G, 0.4 barriles de C y 0.2 barriles de T. La refinería ha contratado el suministro de 900000 barriles de G, 800000 barriles de C y 500000 barriles de T. Hallar las cantidades de crudo ligero y pesado que debe comprar para poder cubrir sus necesidades al costo mínimo.

Solución:

Sean las variables de decisiónúmero

$$\begin{cases} x = & \text{número de barriles comprados de crudo ligero} \\ y = & \text{número de barriles comprados de crudo pesado} \end{cases}$$

La tabla de producción de cada producto con arreglo al tipo de crudo es:

	G	C	T
Ligero	0.3	0.2	0.3
Pesado	0.3	0.4	0.2

La función objetivo que hay que minimizar es $z = 35x + 30y$. Las restricciones son:

$$\begin{cases} 0.3x + 0.3y \ge 900000 \\ 0.2x + 0.4y \ge 800000 \\ 0.3x + 0.2y \ge 500000 \\ x \ge 0, \quad y \ge 0 \end{cases}$$

La región de factibilidad se muestra en la Fig. 4.24 El código usando GenGCF es:

```
Color 2; Expr 0.3* x+0.3 *y >900000,
0.2* x+0.4* y > 800000,
0.3* x+0.2* y>500000, x>0, y>0 ;
Color 3; Expr 35*x+30*y = n;
SliderSteps 50; Slider 80000000 100000000 ;
SliderOneDirection 0; SliderMoving 1;
```

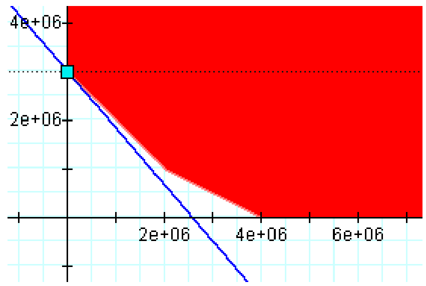


Figura 4.24: Región de factibilidad.

El código en *Mathematica* es:

```
R = {0.3 * x + 0.3 * y ≥ 900000 ∧
     0.2 * x + 0.4 * y ≥ 800000 ∧
     0.3 * x + 0.2 * y ≥ 500000 ∧ x ≥ 0 ∧ y ≥ 0};
S = Minimize[35 x + 30 y, R, {x, y}]
```

La solución óptima es: $x^* = 0$, $y^* = 3 \times 10^6$ y $z^* = 9 \times 10^7$. Siendo la solución de mínimo costo la compra de 3000000 de barriles de crudo ligero y ninguno de crudo pesado para un costo de 90000000 dólares.

4.4 Problemas con más de dos variables de decisión

- En esta sección presentamos dos modelos de PL. Se observará que en los dos ejemplos, las variables de decisión se definen con facilidad. Después presentaremos otras formulaciones en las que la identificación y/o el uso de las variables de decisión es más sutil.

  El software *Mathematica* nos permitirá investigar la solución óptima de cada modelo. La investigación revelará interesantes interpretaciones de los resultados de salida y, conducirá a un mejor entendimiento y apreciación de la PL como herramienta de la toma de decisiones.

EJEMPLO **4.18** (Política de los préstamos bancarios)
Una institución financiera, Banco Brando, se encuentra en el proceso de formular su política de préstamos para el próximo trimestre. Para ese fin se asigna un total de $12 millones. Siendo una institución de servicios integrales, está obligado a otorgar préstamos a diversos clientes. La tabla que sigue señala los tipos de préstamos, la tasa de interés que cobra el banco y la posibilidad de que el cliente no cubra sus pagos, irrecuperables o incobrables, según se estima por experiencia:

Tipo de préstamo	Tasa de interés	Probabilidad de incobrables
Personal	0.140	0.10
Automóvil	0.130	0.07
Casa habitación	0.120	0.03
Agrícola	0.125	0.05
Comercial	0.100	0.02

Se supone que los pagos que no se cubren son irrecuperables y, por lo tanto, no producen ingreso por concepto de intereses.

La competencia con otras instituciones financieras del área requiere que el banco asigne cuando menos al 40% de los fondos totales a préstamos agrícolas y comerciales.

Para dar asistencia a la industria de la habitación en la región, los préstamos para casa habitación deben ser iguales cuando menos el 50% de los préstamos personales, para automóvil y para casa habitación.

El banco tiene asimismo, una política establecida que especifica que la relación global de pagos irrecuperables no puede ser superior a 0.04. Es decir

$$\frac{\text{dinero irrecuperable}}{\text{dinero prestado}} \leq 0.04$$

Modelo matemático

Las variables (en millones de unidades monetarias) del modelo se pueden definir como sigue:

- x_1 = préstamos personales
- x_2 = préstamos para automóvil
- x_3 = préstamos para casa habitación
- x_4 = préstamos agrícolas
- x_5 = préstamos comerciales

El objetivo de Banco Brando es el de maximizar su rendimiento neto compuesto de la diferencia entre el ingreso por concepto de intereses y los fondos perdidos por adeudos no cubiertos. Como los adeudos no cubiertos son irrecuperables, tanto el principal como el interés, la función objetivo se puede expresar como

maximizar

$$\begin{aligned}z = {} & 0.14(0.9x_1) + 0.13(0.93x_2) + 0.12(0.97x_3) + 0.125(0.95x_4) \\ & +0.1(0.98x_5) - 0.1x_1 - 0.07x_2 - 0.03x_3 - 0.05x_4 - 0.02x_5\end{aligned}$$

Esta función se simplifica a maximizar

$$z = 0.026x_1 + 0.0509x_2 + 0.0864x_3 + 0.06875x_4 + 0.078x_5$$

En efecto, observe que x_1 es el número de millones destinadao a préstamos personales. Se sabe, por experiencia, que de esta cantindad solo el 90% se podrá recuperar y por lo tanto, solo esa cantidad aportará ganancias. Es por esta razón que le aplicamos la tasa de interés (de 0.14) solo a $0.9x_1$. Es entonces de esta forma que cálculamos la ganancia por concepto de los préstamos personales. ¿Y las pérdidas? La pérdida se deriva de la cantidad que no se puede recuperar, es decir, $0.1x_1$. La ganancia neta se obtiene de la diferencia entre las entradas y los salidas.

El problema tiene cinco restricciones:

1. Fondos totales (el total de los dineros a prestar no debe exceder los $ 12 millones)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 12$$

2. Préstamos agrícolas y comerciales (se debe asignar cuando menos el 40% de los fondos totales a préstamos agrícolas y comerciales.)

$$x_4 + x_5 \geq 0.4 \times 12, \quad \text{o bien} \quad x_4 + x_5 \geq 4.8$$

3. Préstamos para casa habitación (deben ser iguales cuando menos el 50% de los préstamos personales, para automóvil y para casa habitación.)

$$x_3 \geq 0.5(x_1 + x_2 + x_3)$$

4. Límite sobre adeudos no cubiertos (la relación global de pagos irrecuperables no puede ser superior a 0.04)

$$\frac{\text{dinero irrecuperable}}{\text{dinero prestado}} \leq 0.04$$

o bien

$$\frac{0.1x_1 + 0.07x_2 + 0.03x_3 + 0.05x_4 + 0.02x_5}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5} \leq 0.04$$

o bien

$$0.06x_1 + 0.03x_2 - 0.01x3 + 0.01x4 - 0.02x_5 \leq 0$$

5. No negatividad

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

Una hipótesis sutil en la formulación anterior es que todos los préstamos se otorgan más o menos al mismo tiempo. Esta hipótesis nos permite no tomar en cuenta las diferencias en los valores temporales de los fondos asignados a los diferentes préstamos.

En la figura 4.25 se muestra el programa en *Mathematica* del modelo "Política de los Préstamos Bancarios". Se observa que sólo son recomendables los préstamos para casas habitación y los comerciales. De los restantes, los préstamos personales son los menos atractivos, no sólo porque tienen el menor coeficiente objetivo ($= 0.026$), sino también porque su costo reducido es el mayor entre todas las variables ($= 0.0604$).

```
Maximize[0.026 x1+0.0509 x2+0.0864 x3+0.06875 x4+0.078 x5,
  x1+x2+x3+x4+x5<= 12 &&
    x4+x5>= 4.8 &&
    x3>= 0.5 (x1+x2+x3) &&
    0.06x1+0.03x2-0.01x3+0.01x4-0.02x5<= 0 &&
    x1>= 0 && x2>= 0 && x3>= 0 && x4>= 0 && x5>= 0
  ,{x1,x2,x3, x4, x5}]
```

Solución: $\{0.99648, \{x1 \to 0., x2 \to 0., x3 \to 7.2, x4 \to 0., x5 \to 4.8\}\}$

Figura 4.25: Programa en *Mathematica*

Ejemplo **4.19** (Uso y urbanización de la tierra)
La compañía Bienes Raíces La Garita posee 800 acres de tierra de primera clase, pero no urbanizada, con un lago escénico en la parte central de Dulce Nombre. En el pasado, se aplicaba poca o ninguna regulación a nuevas urbanizaciones en torno al lago. Las orillas del lago ahora están alineadas con residencias vacacionales agrupadas. Debido a la falta de servicio de drenaje, o desagüe por alcantarillado, se utilizan muchos tanques sépticos, la mayoría instalados en forma inadecuada. Con el paso de los años, la infiltración de los tanques sépticos ha provocado un severo problema de contaminación del agua. Para controlar la degradación más profunda en la calidad del agua, los funcionarios del municipio presentaron y aprobaron algunos reglamentos estrictos aplicables a todas las urbanizaciones a futuro:

- Sólo se pueden construir casas para una, dos y tres familias, donde las unifamiliares constituyen cuando menos el 50% del total.
- Para limitar el número de tanques sépticos, se requieren tamaños de lote mínimos de 2, 3 y 4 acres para casas de una, dos y tres familias.
- Se deben establecer áreas de recreo de 1 acre cada una a razón de un área por cada 200 familias.
- Para preservar la ecología del lago, no se puede extraer agua del subsuelo para uso en la casa o el jardín.

El presidente de Bienes Raíces La Garita estudia la posibilidad de urbanizar los 800 acres de la compañía en el lago. La nueva urbanización incluirá casas para una, dos y tres familias.

El estima que el 15% del terreno se utilizará en la apertura de calles y vías de acceso para servicios. También calcula que los siguientes serán sus ingresos derivados de la venta de las diversas unidades habitacionales:

Unidades habitacionales	Sencilla	Doble	Triple
Ingreso neto por unidad ($)	10000	12000	15000

El costo de conexión del servicio de agua al área es proporcional al número de unidades que se construyan. Sin embargo, la comunidad estipula que se deberá colectar un mínimo de $100000 para que el proyecto sea económicamente factible.

Además, la expansión del sistema acuífero más allá de su capacidad actual está limitada a 200000 galones por día durante periodos de consumo máximo, pico.

Los datos que siguen resumen el costo de conexión del servicio de agua y también del consumo de agua suponiendo una familia de tamaño medio:

Unidad habitacional	Sencilla	Doble	Triple	Recreo
Costo del servicio de agua por unidad ($)	1000	1200	1400	800
Consumo de agua por unidad (gal/ día)	400	600	840	450

La compañía debe decidir el número de unidades que se construirán de cada tipo de habitación, junto con el número de áreas de recreo que satisfagan los decretos del municipio.

Modelo matemático

Las siguientes son las variables de decisión:

x_1 = número de unidades de casas unifamiliares
x_2 = número de unidades de casas para dos familias
x_3 = número de unidades de casas para tres familias
x_4 = número de áreas de recreo

Un objetivo aparente de la compañía es el de maximizar el ingreso total. La función objetivo está dada como

$$\text{maximizar } z = 10000x_1 + 12000x_2 + 15000x_3$$

Las restricciones del problema son

- Límite sobre el uso de la tierra.
- Límite sobre los requisitos de casas unifamiliares en relación con otros estilos.
- Límite sobre los requisitos de áreas de recreo.
- Requisito de capital para conectar el servicio de agua.
- Límite sobre el consumo de agua diario en periodos pico.

Estas restricciones se expresan matemáticamente como sigue:

– Uso de la tierra

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 1x_4 \leq 800 \cdot \frac{85}{100}$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 680$$

– Note que el 15% se reserva para la construcción de calles, accesos, etc.

– Casas unifamiliares

$$x_1 \geq \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3)$$

o bien $0.5x_1 - 0.5x_2 - 0.5x_3 \geq 0$.

– Áreas de recreo

$$\text{áreas de recreo} \geq \frac{\text{total de familias}}{200}$$

o bien

$$x_4 \geq \frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3}{200}$$

o bien $200x_4 - x_1 - 2x_2 - 3x_3 \geq 0$

– Costo de conexión del servicio de agua (La comunidad estipula que se deberá colectar un mínimo de \$100000 para que el proyecto sea económicamente factible)

$$1000x_1 + 1200x_2 + 1400x_3 + 800x_4 \geq 100000$$

– Consumo de agua (ver tabla)

$$400x_1 + 600x_2 + 840x_3 + 450x_4 \leq 200000$$

– No negatividad $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$ y $x_4 \geq 0$.

```
Maximize[10000 x1+12000 x2+15000 x3,
2x1+3x2+4x3+x4<= 680 &&
0.5x1-0.5x2-0.5x3 >= 0 &&
200x4-x1-2x2-3x3 >=  0 &&
1000x1+1200x2+1400x3+800x4 >= 100000 &&
400x1+600x2+840x3+450x4 <=  200000 &&
x1>= 0 && x2>= 0 && x3>= 0 && x4>= 0,
{x1,x2,x3, x4}]
```

Solución: $\left\{3.39152\,10^6, \{x_1 \to 339.152, x_2 \to 0., x_3 \to 0., x_4 \to 1.69576\}\right\}$

Figura 4.26: Solución en *Mathematica*.

La figura 4.26 da la solución óptima del modelo. Nótese que la programación lineal, en general no proporciona soluciones enteras. La presente solución da los valores

(unifamiliar) $x_1 = 339.152$
(recreo) $x_4 = 1.696$
doble = triple = 0

Por razones prácticas podemos redondear esta solución a unifamilar = 339 y recreo= 2 (que, incidentalmente, resulta ser la solución óptima entera).

Es interesante constatar que la solución óptima no recomienda la construcción de casas dobles y triples, a pesar de que sus rendimientos por unidad ($12 000 y $15 000) son mayores, en sentido absoluto, que los de las casas unifamiliares.

Las restricciones 2, 4 y 5 tienen valores positivos de holgura/exceso, lo que indica que sus recursos son "abundantes".

(**Comentario adicional**) En la formulación de un modelo es un buen hábito poner atención al impacto que puede tener el error de redondeo computacional. En el modelo anterior, se nota que los coeficientes en las restricciones 4 y 5 (capital y consumo de agua), son relativamente mayores que la mayoría de los coeficientes en las restricciones restantes. En general, esta inconsistencia podría conducir a errores de redondeo inconvenientes en la computadora, como resultado del manejo combinado de coeficientes relativamente grandes y relativamente pequeños en el mismo problema. En el presente ejemplo, podemos rectificar este problema potencial reduciendo de escala las restricciones, para ello se dividen los coeficientes entre la constante 1000. Esto reduce las restricciones a

$$x_1 + 1.2x_2 + 1.4x_3 + 0.8x_4 \geq 100$$
$$0.4x_1 + 0.6x_2 + 0.84x_3 + 0.45x_4 \leq 200$$

Resulta igual de inconveniente tratar en la computadora con coeficientes de restricción muy pequeños. En tales situaciones es aconsejable aumentar la escala de todos los coeficientes pequeños para lograr cierta consistencia en la formulación del modelo. La mayor parte de los programas, tratan de lograr esta consistencia antes de resolver el problema. Sin embargo, es un buen hábito implementar esta etapa de la solución durante la formulación del modelo.

Ejemplo **4.20** (Problema de programación de los autobuses)

TUASA estudia la factibilidad de introducir un sistema de autobuses de tránsito masivo que aliviará el problema del contaminación, reduciendo el tránsito en la ciudad. El estudio inicial busca determinar el número mínimo de autobuses que pueden manejar las necesidades de transporte. Después de recolectar información necesaria, el ingeniero de la empresa advierte que el número mínimo de autobuses que se necesita para cubrir la demanda fluctúa con la hora del día.

Estudiando los datos más a fondo, descubrió que el número necesario de autobuses se puede suponer constante en intervalos sucesivos de 4 horas cada uno. La figura 4.27 presenta un resumen de los hallazgos del ingeniero. Se decidió que para facilitar la transportación, cada autobús podía operar sólo 8 horas sucesivas al día.

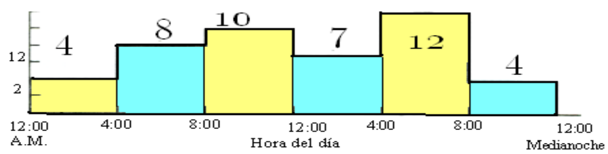


Figura 4.27: Estudio de necesidades de transporte.

Representación matemática
Se debe determinar el número de autobuses que operarán durante diversos turnos (variables) que cubrirán la demanda mínima (restricciones) al mismo tiempo que se minimiza el número diario total de autobuses en operación (objetivo).

Sabemos que cada autobús operará en turnos de 8 horas, pero no sabemos cuándo debe empezar un turno. Si seguimos un programa normal de tres turnos (8:01 a.m.–4:00 p.m., 4:01 p.m.–12:00 de medianoche y 12:01 a.m.–8:00 a.m.) y suponemos que x_1, x_2 y x_3 son el número de autobuses que empiezan a operar en el primero, segundo y tercer turnos, podemos advertir en la figura 4.27 que $x_1 \geq 10$, $x_2 \geq 12$ y $x_3 \geq 8$, donde el número mínimo correspondiente es igual a

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10 + 12 + 8 = 30$$

autobuses diarios.

Esta solución es aceptable sólo si los turnos deben coincidir con el programa normal de tres turnos. Sin embargo, quizá sea ventajoso permitir al proceso de optimización elegir la mejor hora de inicio de un turno. Una manera razonable de lograr esto es hacer que un turno dé comienzo cada 4 horas. La figura 4.28 ilustra este concepto donde los turnos (superpuestos) pueden dar inicio a las 12:01 a.m., 4:01 a.m., 8:01 a.m., 12:01 p.m., 4:01 p.m. y 8:01 p.m., donde cada turno dura 8 horas consecutivas.

Ahora estamos listos para definir las variables:

x_1 = número de autobuses que empiezan a operar a las 12:01 a.m.
x_2 = número de autobuses que empiezan a operar a las 4:01 a.m.
x_3 = número de autobuses que empiezan a operar a las 8:01 a.m.
x_4 = número de autobuses que empiezan a operar a las 12:01 p.m.
x_5 = número de autobuses que empiezan a operar a las 4:01 p.m.
x_6 = número de autobuses que empiezan a operar a las 8:01 p.m.

El modelo matemático (véase la figura 2-12) se escribe como

minimizar $z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$
sujeto a

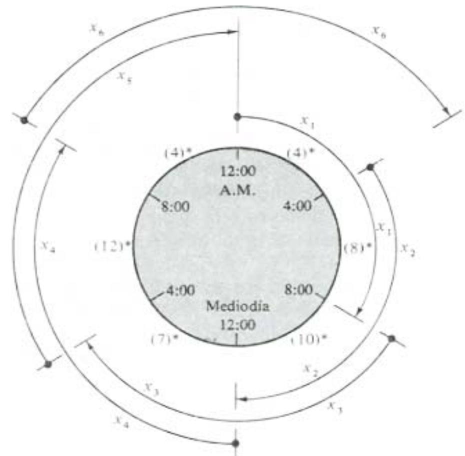


Figura 4.28: Representación de turnos.

$x_1 + x_6 \geq 4$ (12:01 a.m.-4:00 a.m.)
$x_1 + x_2 \geq 8$ (4:01 a.m.-8:00 a.m.)
$x_2 + x_3 \geq 10$ (8:01 a.m.-12:00, mediodía)
$x_3 + x_4 \geq 7$ (12:01 p.M.-4:00 p.m.)
$x_4 + x_5 \geq 12$ (4:01 p.M.-8:00 p.m.)
$x_5 + x_6 \geq 4$ (8:01 p.m.-12:00 a.m.)
$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, 6$

La salida del modelo en la figura 4.29 muestra que se necesita un total de 26 autobuses para satisfacer la demanda. El plan horario óptimo exige que $x_1 = 4$ autobuses empiecen a trabajar a las 12:01 a.m., $x_2 = 10$ a las 4:01 a.m., $x_4 = 8$ a las 12:01 p.m. y $x_5 = 4$ a las 4:01 p.m.

```
Minimize[ x1+ x2+ x3+x4+x5+x6,
x1+x6>= 4 &&  x1+x2>= 8 &&
x2+x3>= 10 && x3+x4>= 7 &&
x4+x5>= 12 && x5+x6>= 4 &&
x1>= 0 && x2>= 0 && x3>= 0 &&
x4>= 0 && x5>=0 && x6>=0,
{x1,x2,x3, x4, x5, x6}]
```

Solución: $\{26, \{x_1 \to 4, x_2 \to 10, x_3 \to 0, x_4 \to 8, x_5 \to 4, x_6 \to 0\}\}$

Figura 4.29: Solución usando *Mathematica*.

Ejercicio

– Estudie la aplicación del modelo a las siguientes situaciones:

1. Número de enfermeras que tiene un hospital.
2. Número de agentes de policía que hay en una ciudad.
3. Número de camareras y camareros que hay en una cafetería con servido las 24 horas.
4. Número de operadores que hay en un centro de conmutación telefónica.

– Si el costo de operación de los autobuses que empiezan a operar entre las 8:01 a.m.. y las 8:00 p.m. es más o menos el 80 % del de los autobuses que empiezan a operar entre las 8:01 p.m. y las 8:00 a.m.., ¿cómo se puede incorporar esta información al modelo?
R/ Cambie la función objetivo para minimizar $z = 0.8(x_3 + x_4 + x_5) + (x_1 + x_2 + x_6)$.

4.5 Casos especiales de programas lineales

- En esta sección consideramos casos especiales que pueden presentarse cuando nos enfrentamos antes un programa lineal, entre los que se cuentan:
  - Degeneración.
  - Soluciones óptimas múltiples.
  - Soluciones no acotadas.
  - Soluciones inexistentes (o no factibles).
- Nuestro interés al estudiar estos casos especiales tiene dos sentidos:
  1. presentar una explicación teórica de la razón por la que se presentan estas situaciones y
  2. ofrecer una interpretación práctica del significado que pudieran tener estos resultados especiales en un problema verdadero.
- **Solución degenerada**
  Desde el punto de vista práctico, la condición revela que el modelo tiene cuando menos una restricción redundante. Para poder dar mayor penetración en los impactos prácticos y teóricos de la degeneración, consideramos un ejemplo numérico.

  Ejemplo **4.21** Solución óptima degenerada

$$
\begin{aligned}
&\text{Maximizar } z = 3x_1 + 9x_2\\
&\text{sujeto a:}\\
&x_1 + 4x_2 \leq 8\\
&x_1 + 2x_2 \leq 4\\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

  ¿Cuál es la implicación práctica de la degeneración? Obsérvese la figura 4.30, que proporciona la solución gráfica al modelo. Tres rectas cruzan el óptimo ($x_1 = 0$, $x_2 = 2$).

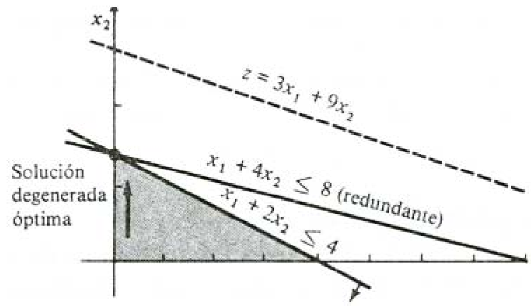


Figura 4.30: Solución degenerada.

Como éste es un problema bidimensional, se dice que el punto está más que determinado (o **sobredeterminado**), ya que sólo necesitamos dos rectas para identificado. Por este motivo, concluimos que una de las restricciones es **redundante**.

En la práctica, el simple conocimiento de que algunos recursos son superfluos puede probarse que es de valor durante la implantación de la solución. Esta información puede conducimos también a descubrir irregularidades en la construcción del modelo. Desafortunadamente, no existen técnicas confiables para identificar restricciones redundantes directamente a partir de la tabla. Al no haber una representación gráfica, tenemos que apoyamos en otros medios para identificar redundancia en el modelo.

- **Soluciones óptimas múltiples**: Cuando la función objetivo es **paralela** a una restricción de enlace (o sea, una restricción que se satisface en el sentido de la igualdad a través de la solución óptima), la función objetivo tomará el mismo valor óptimo en más de un punto de solución. Por esta razón reciben el nombre de opciones óptimas.
- El ejemplo que sigue muestra que normalmente existe un número infinito de estas soluciones. El ejemplo demuestra asimismo, el significado práctico de encontrar opciones óptimas.

Ejemplo **4.22** (**Infinidad de soluciones**)

$$\begin{array}{l} \text{Maximizar } z = 2x_1 + 4x_2 \\ \text{sujeto a :} \\ x_1 + 2x_2, \leq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

La figura 4.31 demuestra la forma como se pueden presentar opciones óptimas en un modelo de PL cuando la función objetivo es paralela a una restricción de enlace. Cualquier punto en el segmento de recta BC representa una opción óptima con el mismo valor en la función $z = 10$.

La solución del problema es:

$$S = \left\{ \left(x, \frac{5-x}{2} \right) : 0 \leq x \leq 3 \right\}$$

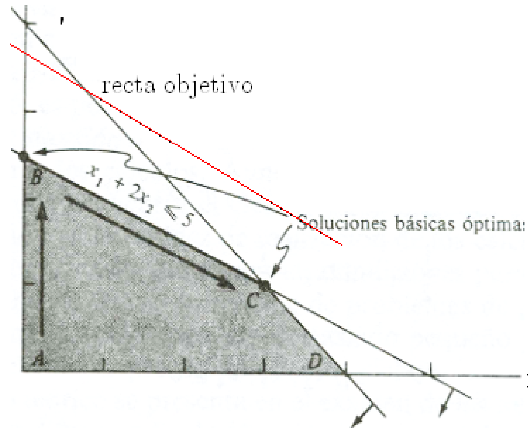


Figura 4.31: Solución óptima alternativa.

- **Solución no acotada**
  En algunos modelos de programación lineal, los valores de las variables se pueden aumentar en forma indefinida sin violar ninguna de las restricciones, lo que significa que el espacio de soluciones es no acotado cuando menos en una dirección. Como resultado, el valor de la función objetivo puede crecer (caso de maximización) o decrecer (caso de minimización) en forma indefinida. En este caso decimos que el espacio de soluciones y el valor "óptimo" de la función objetivo son no acotados.

- La falta de explicación en un modelo puede señalar sólo una cosa: el modelo está **mal construido**. Evidentemente resulta irracional hacer que un modelo produzca una ganancia "infinita". Las irregularidades más probables en estos modelos son:

  1. no se toman en cuenta una o más restricciones redundantes, y
  2. no se determinan correctamente los parámetros (constantes) de algunas restricciones.

  El ejemplo que sigue muestra esta situación.

Ejemplo **4.23 (Función objetivo no acotada)**

$$\begin{array}{l} \text{Maximizar } z = 2x_1 + x_2 \\ \text{sujeto a:} \\ x_1 - x_2 \leq 10 \\ 2x_1 \leq 40 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

El problema no tiene solución acotada. Este resultado se puede apreciar en la figura 4.32. El espacio de soluciones no está acotado en la dirección de x, y el valor de z puede crecer en forma indefinida.

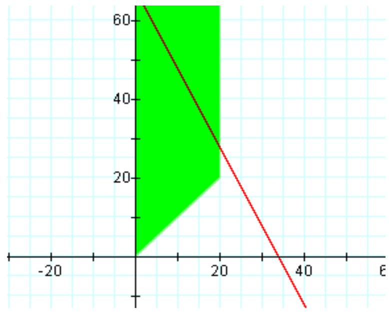


Figura 4.32: Función objetivo no acotada

- **Solución no factible**
  Si las restricciones no se pueden satisfacer en forma simultánea, se dice que el modelo no tiene solución factible. Esta situación nunca puede ocurrir si todas las restricciones son del tipo $\leq$.

- Desde el punto de vista práctico, un espacio infactible apunta a la posibilidad de que el modelo no se haya formulado correctamente, en virtud de que las restricciones estén en conflicto. También es posible que las restricciones no estén destinadas a cumplirse en forma simultánea. En este caso, quizá se necesite una estructura del modelo totalmente diferente que no admita todas las restricciones al mismo tiempo.

- En el ejemplo que sigue se ilustra el caso del espacio de solución no factible.

  Ejemplo **4.24** (**Espacio de solución no factible**)

  Maximizar:$z = 3x_1 + 2x_2$
  sujeto a

  $$2x_1 + x_2 \leq 2$$
  $$3x_1 + 4x_2 \geq 12$$
  $$x_1, x_2 \geq 0$$

  La figura 3-7 muestra el espacio de soluciones infactible.

4.6 Análisis de sensibilidad elemental

- El análisis de sensibilidad se ha diseñado para estudiar el efecto de los cambios en los parámetros del modelo de PL en la solución óptima. Tal análisis se considera como parte integral de la solución (extendida) de cualquier problema de PL.

- Podemos intuitivamente pensar del análisis de sensibilidad como la respuesta a la siguiente pregunta: ¿Hasta dónde se pueden modificar los datos del problema sin que se "cambie" de vértice óptimo?

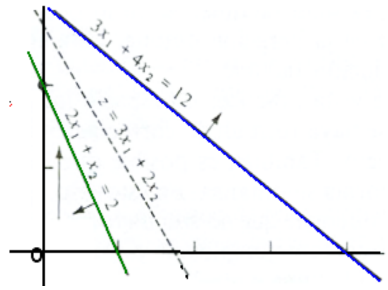


Figura 4.33: **Espacio de solución no factible**

- Este da al modelo una característica dinámica que permite al analista estudiar el comportamiento de la solución óptima, al efectuar cambios en los parámetros del modelo. El objetivo final del análisis es tener información acerca de posibles soluciones óptimas nuevas (correspondientes a cambios en los parámetros), con un mínimo de cálculos adicionales.

- El análisis de sensibilidad es muy adecuado para estudiar el efecto en la solución óptima de cambios en los coeficientes de costo/ganancia y en las cantidades de recursos disponibles. Aunque los cálculos del análisis de sensibilidad se han automatizado en la mayoría del software de IO, es importante tener un conocimiento fundamental de cómo trabaja el método, para poder implementar con éxito los resultados.

- En esta sección utilizamos un procedimiento gráfico para explicar los elementos básicos del análisis. Posteriormente presentaremos un tratamiento más riguroso de esta técnica.

- *Problema de sensibilidad 1* . ¿Qué tanta variación se permite en los coeficientes de la función objetivo? Una variación en los coeficientes de la función objetivo, sólo puede afectar la pendiente de la línea recta que la representa.

- Se puede demostrar que la determinación del punto de esquina, o punto extremo óptimo de un espacio de soluciones, depende totalmente de la pendiente de la función objetivo. Nuestra meta, desde el punto de vista del análisis de sensibilidad, es determinar el intervalo de variación de cada uno de los coeficientes de la función objetivo que mantenga invariante a un punto extremo óptimo. Los detalles del procedimiento se mostrarán por medio del modelo Pinturas Ávila.

- Sean c_E y c_I las ganancias por tonelada de las pinturas para exterior e interior, respectivamente. La función objetivo puede escribirse entonces como $z = c_E x_E + c_I x_I$.

- La figura 4.34 muestra que el efecto de aumentar c_E o disminuir c_I es una rotación, en el sentido de las manecillas del reloj, de la línea que representa a z alrededor del punto óptimo C. Por otra parte, una disminución de c_E o un aumento de c_I hará que la recta gire en sentido contrario.

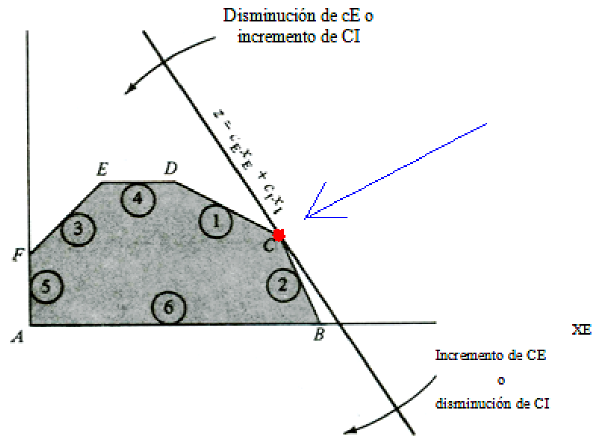


Figura 4.34: Variando el objetivo.

- Se trata de determinar los intervalos de variación de c_E y c_I tales que C siga siendo un punto óptimo. Si se observa la figura 4.34 es claro que en tanto la pendiente de z permanezca dentro de las pendientes de las líneas, CB y CD, el punto C seguirá siendo óptimo. (Cuando la pendiente de z coincida con la CB o la de CD, se tendrá una opción óptima.)

- Podemos expresar esta condición (suponiendo $c_E \neq 0$ y $c_I \neq 0$) algebraicamente:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{c_E}{c_I} \leq \frac{2}{1}, \quad \text{(¿Por qué?)}$$

- La justificación de esto se obtiene calculando las pendientes de las rectas que determinan el punto ópitmo del problema: en este caso se trata del vértice C que la intersección de las rectas (1) y (2) de la Fig. 4.35.

- La ecuación de la recta (1) es $x + 2y = 6$ o bien

$$y = -\frac{x}{2} + 3$$

  Por otro lado la ecuación de la recta (2) es

$$y = -2x + 8$$

  Además la recta objetivo $z = c_E x + c_I y$ pude escribirse como

$$y = \frac{z - c_E x}{c_I}$$

  .

- Las pendientes de estas rectas son $-1/2$, -2 y $-c_E/c_I$, respectivamente.

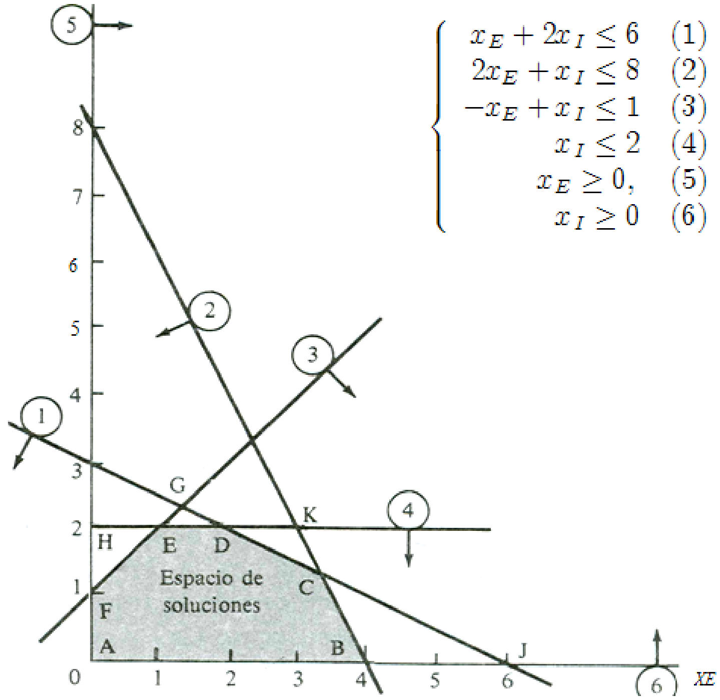


Figura 4.35: Región de factibilidad para el problema de Pinturas Ávila

- La oscilanción de pendiente la función objetivo se da entonces como sigue:

$$-2 \leq -\frac{c_E}{c_I} \leq -\frac{1}{2}$$

- Multiplicando por -1 y reacomodando términos, obtenemos:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{c_E}{c_I} \leq \frac{2}{1}$$

- La desigualdad anterior expresa que cualesquiera cambios en c_E o en c_I que mantengan a c_E/c_I dentro del intervalo $[1/2, 2]$, mantendrán siempre a C como punto óptimo.

- Los cambios fuera de este intervalo moverán el punto óptimo a B o D. Podemos obtener información más específica, acerca del coeficiente de la función objetivo, si consideramos la variación de cada coeficiente por separado (cada uno a la vez), en tanto que se mantienen los demás coeficientes constantes en su valor presente. En el modelo Pinturas Ávila, si fijamos c_I en su valor presente $(= 2)$, la desigualdad anterior conducirá al siguiente intervalo:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{c_E}{2} \leq 2$$

  o sea $1 \leq c_E \leq 4$. Esto significa que para $c_I = 2$, el punto E seguirá siendo óptimo siempre que c_E se encuentre en el intervalo $[1, 4]$.

- En la Fig. 4.36 se muestran algunos pasos para realizar el análisis de sensibilidad para la función objetivo.

```
Maximize[3 x + 2 y,
 x + 2 y ≤ 6 ∧ 2 x + y ≤ 8 ∧ -x + y ≤ 1
 ∧ y ≤ 2 ∧ x ≥ 0 ∧ y ≥ 0, {x, y}]
x + 2 y == 6 /. {x → 10/3, y → 4/3}
2 x + y == 8 /. {x → 10/3, y → 4/3}
-x + y == 1 /. {x → 10/3, y → 4/3}
y == 2 /. {x → 10/3, y → 4/3}

Solve[x + 2 y == 6, y]
Solve[2 x + y == 8, y]
Solve[ce x + ci y == z, y]

Reduce[-2 ≤ -ce/ci ≤ -1/2, ce] /. ci → 2
```

Figura 4.36: Algunos pasos en Mathematica para hacer A.S.

- Puede determinarse un intervalo similar para c_I dado que c_E está fijo en 3. Obsérvese que en este caso es más fácil reescribir la desigualdad con c_I en el numerador, o sea
$$\frac{1}{2} \leq \frac{c_I}{c_E} \leq 2$$
Haciendo $c_E = 3$, obtenemos el intervalo $3/2 \leq c_I \leq 6$.

- También resulta conveniente dibujar una recta que pasa exactamente por el vértice óptimo y cuya pendiente sea $-\dfrac{c_E}{c_I}$. Si el vértice óptimo tiene coordenadas (p, q), la ecuación de tal recta es:
$$y = -\frac{c_E}{c_I}(x - p) + q$$

- En nuestro caso es $y = -\dfrac{c_E}{c_I}(x - 10/3) + 4/3$. Usando GC con $c = c_E$ y $d = c_I$, creamos unos sliders para c y d y de esta forma logramos determinar el rango para estos coeficientes de costos.

- **Ejercicios**
Para los intervalos especificados para cambios únicos en c_E y c_I muestre en la figura 4.34 la solución óptima en cada uno de los casos siguientes:

– c_E crece justo por arriba de su límite superior ($= 4$). **R/** Punto B. **Nota**: El problema se puede resolver con GC usando el siguiente código:

```
Expr c=slider([0,5]); Color 2;
Expr  x+2*y<6,  2*x+y<8,  -x+y<1,  y<2,  x>0,  y>0 ;
Color 3; Expr  c*x+2*y = n;
```

– c_I crece justo por arriba de su límite superior ($= 6$). **R/** Punto D.

– c_I decrece justo por abajo de su límite inferior ($= 1.5$). **R/** Punto B.

- Suponga que la función objetivo está dada originalmente por $z = 3x_E + x_I$ (en vez de $z = 3x_E + 2x_I$). La solución óptima asociada se presentará en B ($x_E = 4$, $x_I = 0$). Esto significa que no se producirá pintura interior. ¿En cuánto deberá ajustarse la ganancia por tonelada de pintura para interior con el fin de sólo empezar a producir cantidades positivas de esta pintura? **R/** Increméntese c_I por lo menos en 0.5 (de 1 a por lo menos 1.5).

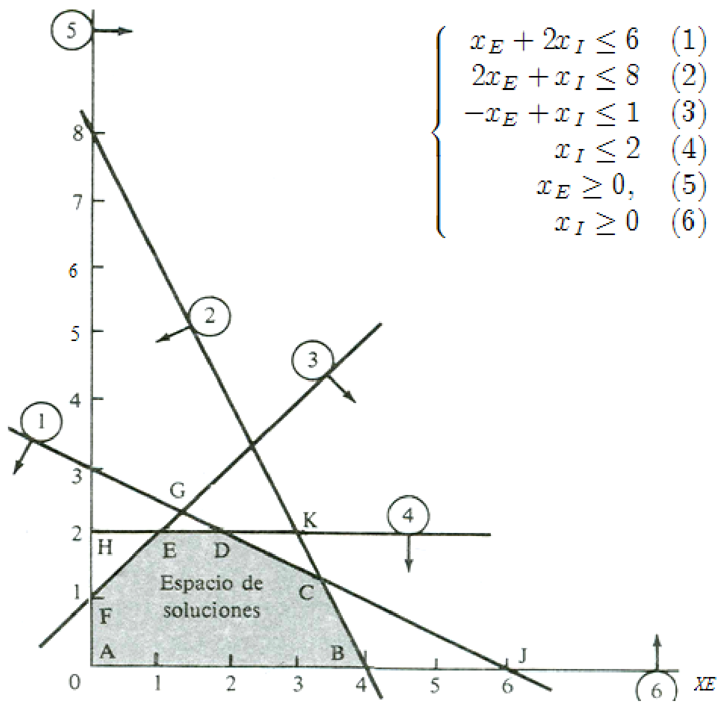


Figura 4.37: Ejercici

- *Problema de sensibilidad 2* . ¿Cuánto vale una unidad de recurso? Este problema tiene que ver con el estudio de la sensibilidad de la solución óptima, frente a cambios en el segmento de las restricciones.

- Si la restricción representa un recurso limitado, el problema se reduce a estudiar el efecto de cambiar la disponibilidad del recurso. La meta específica de este problema de sensibilidad es determinar el efecto sobre el valor objetivo máximo de los cambios, en el segundo miembro de las restricciones.

- Básicamente, los resultados se dan como intervalos predeterminados del segundo miembro, dentro de los cuales el valor objetivo óptimo cambiará (creciendo o disminuyendo) a una tasa constante dada. Analicemos esta situación en términos del ejemplo Pinturas Ávila.
- Consideremos la primera restricción que trata con la materia prima A. Cualesquiera cambios en la cantidad de la materia prima A, ocasionará que la línea de restricción asociada se mueva en forma paralela a sí misma, como se muestra en la figura 4.38.

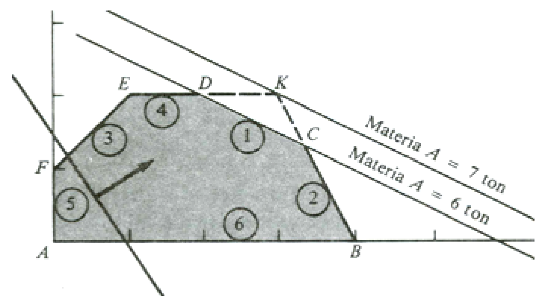


Figura 4.38: Variando la disponibilidad de la materia A.

- Un cambio correspondiente en el valor objetivo óptimo ocurrirá a una tasa constante, siempre que la solución óptima esté determinada por la intersección de las restricciones (1) y (2).
- Observando la figura 4.38, se verá que tal requisito se satisface, en tanto que los cambios se limiten al intervalo representado por el segmento de recta KB. Si la materia prima A se incrementa más allá de la cantidad asociada con el punto K, la restricción será redundante y entonces no tendrá efecto en el espacio de soluciones.
- Si la cantidad de material A se disminuye por abajo del valor asociado con el punto B, la solución óptima ya no quedará determinada por la intersección de las líneas (1) y (2). Esta condición destruirá la relación lineal entre el valor objetivo óptimo y el cambio en la cantidad de materia prima A.
- Podemos determinar el intervalo de cambio para el material A de la siguiente manera. El límite inferior corresponde al punto B ($x_E = 4$ y $x_I = 0$), y se obtiene por sustitución directa en el primer miembro de la restricción (1), o sea, $1(4) + 2(0) = 4$ toneladas.
- Igualmente, el límite superior se calcula sustituyendo el punto K ($x_E = 3$ y $x_I = 2$) en el primer miembro de la restricción (1), o sea, $1(3) + 2(2) = 7$ toneladas. De hecho, el intervalo de cambio en la cantidad de material A que conduce a una relación lineal entre el cambio en A y el valor óptimo correspondiente de z, está dado por:

$$4 \leq \text{ cantidad de material A } \leq 7$$

- La constante de proporcionalidad entre la cantidad de material A y el valor óptimo de z se determina de manera directa. Específicamente, los valores de z que corresponden a los puntos B y K se obtienen por sustitución directa en el valor objetivo para dar:

$$\begin{array}{ll} z = 3(4) + 2(0) = 12 & \text{(en el punto B)} \\ z = 3(3) + 2(2) = 13 & \text{(en el punto K)} \end{array}$$

- Tenemos así la siguiente tabla de valores

Materia P.A.	4	7
z	12	13

- Así, la constante de proporcionalidad entre z y la cantidad de material A se calcula como:

$$y_1 = \frac{13 - 12}{7 - 4} = \frac{1}{3}$$

(en miles de unidad monetaria por tonelada de material A)

- La constante y_1 representa, en realidad, el valor unitario del material A. Así, un aumento (disminución) en la cantidad de A incrementará (reducirá) el valor de z en $1/3$.

- Esta proporcionalidad es válida sólo mientras la cantidad de materia prima A se encuentre dentro del intervalo $[4, 7]$.

- Al considerar la materia prima B, la figura 4.39 muestra que los puntos límite que mantendrán la linealidad entre la cantidad de material B y el valor óptimo de z son el D y J. Los intervalos correspondientes del material B y z se determinan de manera similar a la usada para el material A, lo que da el intervalo $[6, 12]$ para el material y el $[10, 18]$ para z (¡verifíquese!). El valor unitario del material B es entonces

$$y_2 = \frac{18 - 10}{12 - 6} = \frac{4}{3}$$

(miles de unidad monetaria por tonelada de materia B)

- Por razones históricas, el valor de los valores unitarios (por ejemplo, y_1 y y_2) se denominan en la literatura técnica con el nombre de precios duales. El nombre se obtiene de la definición matemática del problema dual en la programación lineal. Los precios duales también se denominan a veces como precios rebajados. Aunque a lo largo de todo el libro continuaremos usando el nombre ahora estandarizado de precio dual, el lector debería asociar estos parámetros con el término más descriptivo valor por unidad de recursos.

- Ahora analizaremos un tipo diferente de restricción. Nótese que las restricciones asociadas con las materias primas A y B tienen holguras nulas, porque sus líneas rectas asociadas pasan por la solución óptima corriente en C. Sin embargo, ¿qué ocurre con aquellas restricciones (con holgura diferente de cero) que no pasan por el punto óptimo C, o sea, las restricciones (3) y (4)?

  Nota: Las restricciones de no negatividad no se suelen estudiar en los análisis de sensibilidad.

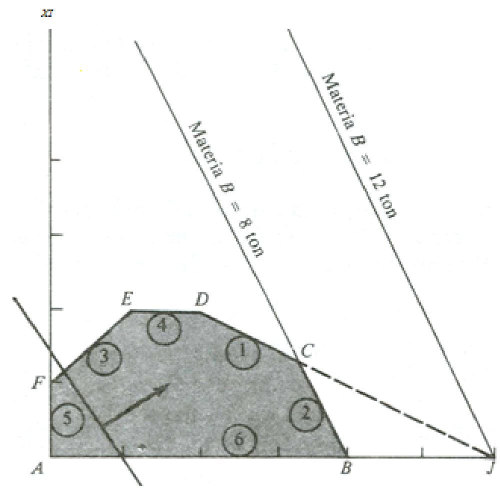


Figura 4.39: Analizando variaciones en la materia prima B.

- La figura 4.3 muestra que el segundo miembro de la restricción (3) puede incrementarse indefinidamente, sin tener ningún efecto en la solución óptima o en el valor objetivo. De hecho, el segundo miembro puede disminuirse hasta que la restricción pase por C nuevamente, sin afectar el valor óptimo de z. Así, el intervalo correspondiente para el segundo miembro de la restricción (3) es $[-2, \infty]$ (¡verifíquese!). Como el valor de z permanece constante, el valor unitario correspondiente es cero. De manera análoga, la restricción (4) puede cambiar en el intervalo $[4/3, \infty]$ (¡verifíquese!) sin afectar la solución óptima o el valor óptimo de z.

- **(Ejercicio)** Supóngase que en el modelo Pinturas Ávila la restricción de la materia prima A se cambia de $x_E + 2x_I \leq 6$ a $2x_E + 3x_I \leq 10$, sin modificarse el resto de la información. Calcule manualmente los precios duales e intervalos resultantes para todas las restricciones.

  R/ Intervalos = $(8, 12)$, $(6, 10)$, $(-2.5, \infty)$, $(1, \infty)$.

Ejemplo **4.25** Realice un análisis de sensibilidad para el siguiente problema.

$$
\begin{aligned}
&\text{Máx} \\
&z = 15x_1 + 20x_2 \\
&2x_1 + 2x_2 \leq 8 \\
&x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
&x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

A partir de la resolución gráfica del problema se tiene:

$$x_1^* = 2, \quad x_2^* = 2, \quad z^* = 70$$

El análisis de sensibilidad permite responder, entre otras, las siguientes preguntas:

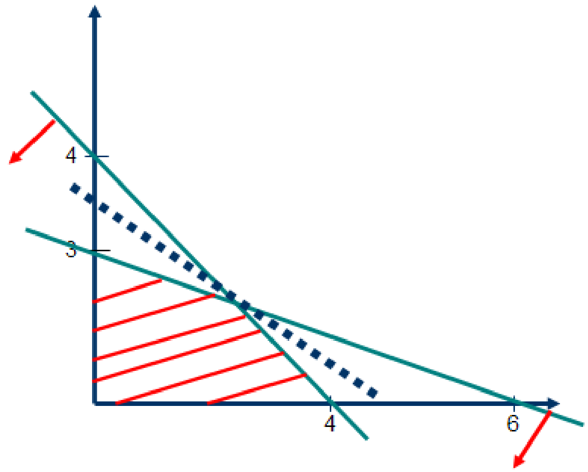


Figura 4.40: Solución gráfica

¿Cuál es el intervalo de variación de algún coeficiente de la función objetivo, de modo que la actual solución siga siendo la óptima?

Sea $z = c_1x_1 + c_2x_2$. La solución óptima de la nueva función, seguirá siendo: $x_1^* = 2$; $x_2^* = 2$ si:

$$-1 \leq -\frac{c_1}{c_2} \leq -\frac{1}{2}$$

También podemos estudiar el intervalo de un sólo coeficiente, dejando el resto de los parámetros fijos:

– Fijamos $c_2 = 20$:
$$-1 \leq -\frac{c_1}{20} \leq -\frac{1}{2}, \quad \text{o bien} \quad 10 \leq c_1 \leq 20$$

–

– Fijamos $c_1 = 15$:
$$-1 \leq -\frac{15}{c_2} \leq -\frac{1}{2}, \quad \text{o bien} \quad 15 \leq c_2 \leq 30$$

También resulta conveniente dibujar una recta que pasa exactamente por el vértice óptimo y cuya pendiente sea $-\frac{c_1}{c_2}$. Si el vértice óptimo tiene coordenadas (p, q), la ecuación de tal recta es:

$$y = -\frac{c_1}{c_2}(x - p) + q$$

En nuestro caso es $y = -\frac{c_1}{c_2}(x - 2) + 2$. Usando GC con $c = c_1$ y $d = c_2$, creamos unos sliders para c y d y de esta forma logramos determinar el rango para estos coeficientes de costos.

¿Cuál es la variación del actual valor óptimo de la función objetivo, si cambiamos en una unidad algún coeficiente del lado derecho de las restricciones?

Estudiaremos por separado las variaciones de cada uno de los coeficientes del lado derecho de las restricciones, de modo que se preserve la geometría del problema, esto es, que se conserven las mismas restricciones activas de la solución óptima inicial.

Tomamos la primera desigualdad $2x_1 + 2x_2 \leq 8$. A partir de esta creamos la desigualdad

$$2x_1 + 2x_2 \leq d$$

Debemos determinar el rango para d de modo que la solución óptima continúe determinada por la intersección entre las rectas $2x_1 + 2x_2 = d$ y la recta $x_1 + 2x_2 = 6$. Usando Graphing Calculator se observa que

$$6 \leq d \leq 12$$

Si $d = 6$, usando GC vemos que el extremo ópitmo se produce en el punto $(0, 3)$, esto da $z = 15(0) + 20(3) = 60$. Si $d = 12$, usando GC vemos que el extremo óptimo se produce en el punto $(6, 0)$, esto da $z = 15(6) + 20(0) = 90$. Tenemos así la siguiente tabla

d	6	12
z	60	90

Así, la constante de proporcionalidad entre z y la cantidad d se calcula como:

$$y_1 = \frac{90 - 60}{12 - 6} = 5$$

Esta proporcionalidad es válida sólo mientras la cantidad d se encuentre dentro del intervalo $[6, 12]$. Así, un aumento (disminución) en la cantidad de Ad incrementará (reducirá) el valor de z en 5 unidades.

Tomamos la primera desigualdad $x_1 + 2x_2 \leq 6$. A partir de esta creamos la desigualdad

$$x_1 + 2x_2 \leq d$$

Debemos determinar el rango para d de modo que la solución óptima continúe determinada por la intersección entre las rectas $2x_1 + 2x_2 = 8$ y la recta $x_1 + 2x_2 = d$. Usando Graphing Calculator se observa que

$$4 \leq d \leq 8$$

Si $d = 4$, usando GC vemos que el extremo ópitmo se produce en el punto $(4, 0)$, esto da $z = 15(4) + 20(0) = 60$. Si $d = 8$, usando GC vemos que el extremo óptimo se produce en el punto $(0, 4)$, esto da $z = 15(0) + 20(4) = 80$. Tenemos así la siguiente tabla

d	4	8
z	60	80

Así, la constante de proporcionalidad entre z y la cantidad d se calcula como:

$$y_1 = \frac{80 - 60}{8 - 4} = 5$$

Esta proporcionalidad es válida sólo mientras la cantidad d se encuentre dentro del intervalo $[6, 12]$. Así, un aumento (disminución) en la cantidad de Ad incrementará (reducirá) el valor de z en 5 unidades.

Esto concluye el análisis pues no hay más restricciones que revisar.

4.7 Conceptos generales del metodo simplex

- En este apartado se presentan algunos detalles del algoritmo símplex, que es un método algebraico que puede resolver cualquier problema de programación lineal. La información que puede obtenerse con el método símplex, va más allá de la determinación de los valores óptimos de las variables y de la función objetivo. De hecho, la solución símplex proporciona interpretaciones económicas y resultados del análisis de sensibilidad, similares a los presentados previamente.

- El método gráfico presentado en el capítulo previo demuestra que la PL óptima está siempre asociada con un punto extremo o de esquina, del espacio de soluciones. Esta idea conduce precisamente a la creación del método símplex. Básicamente, lo que hace el método símplex es **trasladar** la definición geométrica del punto extremo a una definición algebraica.

- ¿Cómo identifica el método símplex los puntos extremos en forma algebraica? Como paso inicial, el método símplex necesita que cada una de las restricciones esté en una forma estándar especial, en la que todas las restricciones se expresan como ecuaciones, mediante la adición de variables de holgura o de exceso, según sea necesario. Este tipo de **conversión** conduce normalmente a un conjunto de ecuaciones simultáneas donde el número de variables excede al número de ecuaciones, lo que generalmente significa que las ecuaciones dan un número **infinito** de puntos solución (compárese con el espacio de soluciones gráficas).

- Los puntos extremos de este espacio pueden identificarse algebraicamente por medio de las **soluciones básicas** del sistema de ecuaciones simultáneas. De acuerdo con la teoría del álgebra lineal, una solución básica se obtiene igualando a cero las variables necesarias con el fin de igualar el número total de variables y el número total de ecuaciones para que la solución sea única, y luego se resuelve el sistema con las variables restantes. Fundamentalmente, la transición del procedimiento gráfico al algebraico se basa en la validez de la siguiente relación importante:

$$\text{puntos extremos} \Leftrightarrow \text{soluciones básicas}$$

- Al no tener un espacio de soluciones gráficas que nos guíe hacia el punto óptimo, necesitamos un procedimiento que identifique en forma **inteligente** las soluciones básicas promisorias.

- Lo que hace el método símplex, es identificar una solución inicial y luego moverse (ver Fig. 4.41) sistemáticamente a otras soluciones básicas que tengan el potencial de **mejorar** el valor de la función objetivo. Finalmente, la solución básica correspondiente a la óptima será identificada con lo que termina el proceso de cálculo. En efecto, el método símplex es un procedimiento de cálculo iterativo donde cada iteración está asociada con una solución básica.

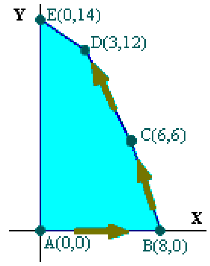


Figura 4.41:

- La determinación de una solución básica en el método símplex, implica detalles **tediosos** de cálculo. Tales detalles no deben distraemos de la idea fundamental del método: generar soluciones básicas sucesivas, de manera que nos conduzcan al punto extremo óptimo. Todos los detalles de cálculo son secundarios a esta idea básica, y así es como debemos tratarlos.

- A continuación se presentan los pasos iterativos formales del método símplex. No se pretende que el lector lo entienda completamente pues se omiten ciertos detalles importantes. Sin embargo debe quedar claro que se trata de un método iterativo que busca mejorar la solución factible actual hasta conseguir una óptima:

  [1] Usando la forma estándar (con los segundos miembros no negativos), determine una solución inicial básica factible.

  [2] Seleccione una variable entrante entre las variables actuales no básicas, usando la condición de optimidad.

  [3] Seleccione la variable saliente entre las variables actuales básicas, usando la condición de factibilidad.

  [4] Determine los valores de las nuevas variables básicas, haciendo a la variable entrante básica y a la variable saliente no básica. Vuelva al paso l.

- En la Fig 4.42 siguiente se muestra un DFD del método del símplex:

4.8 Teoría de dualidad

- Uno de 1os descubrimientos más importantes durante el desarrollo inicial de la programación lineal fue el concepto de dualidad y sus muchas e importantes ramificaciones. Este descubrimiento reveló que, asociado a todo problema de programación lineal, existe otro problema lineal llamado dual. Las relaciones entre el problema **dual** y el original (llamado **primal**) son útiles en una gran var:iedad de situaciones.

$$\boxed{\text{PRIMAL}} \longleftrightarrow \boxed{\text{DUAL}}$$

- Uno de los papeles clave que juega la teoría de **dualidad** es la interpretación y realización del análisis de **sensibilidad**. El análisis de sensibilidad constituye una parte muy importante

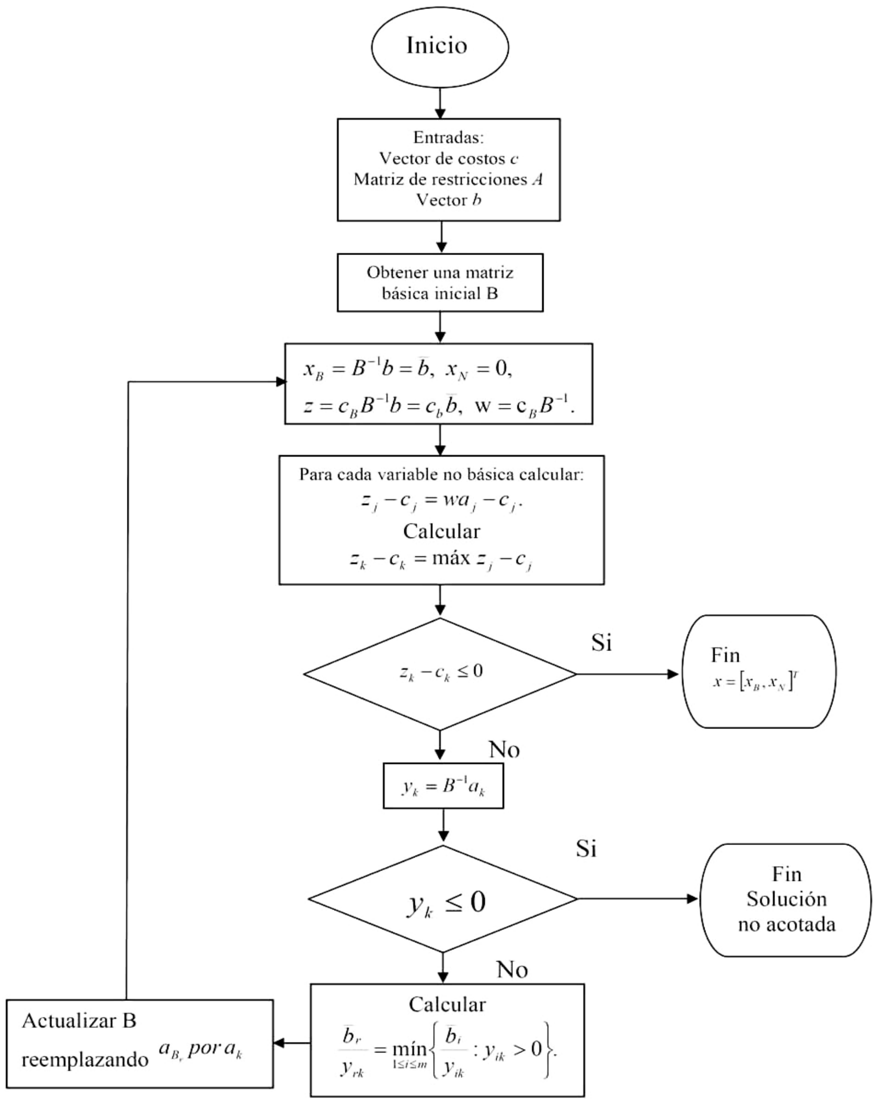


Diagrama de flujo del método Simplex Revisado.

Figura 4.42: DFD del símplex.

en casi todos los estudios de programación lineal. Dado que algunos o todos los valores de los parámetros que se emplean en el modelo original son sólo estimaciones de condiciones futuras, es necesario investigar el efecto que se tendría sobre la solución óptima en caso de que prevalecieran otras condiciones. Aún más, ciertos valores de estos parámetros (como la cantidad de recursos) pueden representar decisiones de la gerencia, en cuyo caso su elección debe ser el punto más importante de la investigación y, por supuesto, se estudia a través del análisis de sensibilidad.

EJEMPLO **4.26** La National Business Machines (NBM) produce y vende dos tipos de máquinas de escribir: manual y eléctrica. Cada máquina de escribir manual es vendida con un ingreso de \$40 y cada máquina de escribir eléctrica produce un ingreso de \$60. Ambas máquinas tienen que ser procesadas (ensambladas y empacadas) a través de dos operaciones diferentes: O_1 y O_2, El número de horas de O_1 y O_2 requeridas para producir un modelo terminado se da en la siguiente tabla:

Operación	Manual	Eléctrica	Cap. Mensual (horas)
O_1	3	2	2000
O_2	1	2	1000

Para producir una máquina manual se requieren 3 horas de O_1 y una hora de O_2. Para producir una máquina eléctrica se requieren 2 horas de O_1 y 2 horas de O_2.

Designemos las siguientes variables de decisión:

x_1 = número de máquinas de escribir manuales a producir cada mes
x_2 = número de máquinas de escribir eléctricas a producir cada mes.

El siguiente (PROBLEMA PRIMAL) es el modelo de programación lineal que puede ser utilizado para encontrar el número óptimo de cada tipo de máquina de escribir a producir mensualmente.

$$\text{Maximizar: } z = 40x_1 + 60x_2$$

$$\begin{aligned} &3x_1 + 2x_2 \leq 2000 \\ &x_1 + 2x_2 \leq 1000 \\ &x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Si aplicamos el comando Maximize de Mathematica al problema encontraremos que la solución óptima, es producir 500 máquinas de escribir manuales por mes ($x_1 = 500$) y 250 máquinas de escribir eléctricas por mes ($x_2 = 250$). El ingreso máximo es $z = \$35000$ por mes.

Después del planteamiento del problema primal pasamos ahora a enfocar sobre el problema dual, un problema de precios. Nuestro propósito es determinar los precios a los cuales la NBM debería valorar sus recursos de tal manera que puedan determinar el mínimo valor total al cual estarían dispuestos a arrendar o vender los recursos, para que el negocio sea rentable.

Sean y_1 y y_2 la renta percibida por hora para las operaciones O_1 y O_2 respectivamente. Dada la disponibilidad de los recursos (capacidades mensuales para O_1 y O_2), la renta total por mes es

$$C = 2000y_1 + 1000y_2.$$

Se desea como objetivo encontrar el mínimo valor de C de modo que la NBM pueda de una manera inteligente, analizar algunas propuestas de alquiler o compra de todos los recursos como un paquete total. En consecuencia, la NBM lo que quiere es minimizar la suma de las rentas.

Considere las siguientes restricciones. Los precios (de aquí en adelante usaremos el término precios tanto para las rentas como para los precios de los productos) todos deberán ser mayores o iguales que cero. Obviamente, un recurso no puede tener un precio negativo, ya que cualquier recurso vendido (usaremos el verbo vender queriendo decir vender o alquilar) a un precio negativo podría ser más provechoso haberlo dejado ocioso. Por consiguiente, las siguientes restricciones tienen que ser satisfechas:

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0$$

En las otras restricciones tienen que ser satisfechas las condiciones de los precios y_1 y y_2 deben ser competitivos con las alternativas disponibles. La NBM tiene como alternativas disponibles producir máquinas eléctricas y manuales usando O_1 y O_2. Por ejemplo, ya que 3 horas de O_1 más 1 hora de O_2 son necesarias para producir una máquina de escribir manual, el valor en término de precios por recursos para dicha máquina es $3 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2$. Este precio debe[1] ser al menos tan grande como la contribución obtenida cuando una máquina de escribir manual es producida–una contribución a la utilidad de \$40.Esto es,

$$3y_1 + y_2 \geq 40.$$

Similarmente, 2 horas de O_1 y 2 horas de O_2 son necesarias para producir una máquina de escribir eléctrica y con esto, genera una contribución a los ingresos de \$60. Entonces, la siguiente desigualdad también debe ser satisfecha:

$$2y_1 + 2y_2 \geq 60.$$

El siguiente es el resumen del problema del precio en el modelo dual (o el problema dual)

$$\text{Minimizar } C = 2000y_1 + 1000y_2$$

$$\begin{array}{l} 3y_1 + y_2 \geq 40 \\ 2y_1 + 2y_2 \geq 60 \\ y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0 \end{array}$$

[1] **Atención estudiantes**: Fue en este punto que tuve mi duda del razonamiento. Parece que se debe suponer que el valor de un bien debe ser mayor que la ganancia que este produce.

Ahora mostramos la relación entre las soluciones óptimas del modelo primal y el modelo dual. Usando Mathematica y comando Minimize obtenemos

$$\{35000, \{y_1 \to 5, y_2 \to 25\}\}$$

Es importante señalar otros comentarios acerca de los precios del dual óptimo. Primero los precios óptimos del dual indican cuáles unidades de recursos (O_1: capacidad de ensamble y O_2: capacidad de empaque) podrían ser compradas o vendidas. Si estos precios mínimos, $y_1 = \$5$ por hora de O_1 y $y_2 = \$25$ por hora de O_2, existen en el mercado, entonces para la NBM podría ser indiferente escoger entre las alternativas de **producir** máquinas o **vender** recursos. Si en el mercado los precios fuesen más altos que los precios mínimos del dual, entonces la NBM preferiría vender los recursos (o vender el tiempo de O_1 y O_2) y si en el mercado los precios fuesen más bajos, entonces la NBM preferiría comprar recursos (e incrementar las capacidades de O_1 y O_2), Es decir, los precios mínimos del dual dan una medida para la evaluación del valor **marginal** por adición en la capacidad de los recursos.

Para ilustrar lo anterior, suponga que la NBM puede vender O_1 (tiempo de ensamble) a \$7 la hora, digamos a un competidor cercano, y puede variar el tiempo de O_2 (capacidad de empaque) a \$20 la hora. Entonces la NBM estaría dispuesta a vender algunas horas de capacidad de O_1 ya que puede ganar \$2 por cada hora del tiempo de O_1 vendida (este valor se obtiene de la resta de \$7 por hora menos $y_1 = \$5$ por hora es el valor marginal).

Similarmente, la NBM podría estar dispuesta a incrementar la capacidad de O_2, ya que puede ganar \$5 por cada unidad que incremente en la capacidad de O_2 ($y_2 = \$25$ por hora incrementada menos \$20 por hora de costo en el mercado). Desde luego, que vender o incrementar la capacidad requerirá un cambio en el programa aportado por la solución óptima.

Los precios mínimos del dual y_1 y y_2 son válidos, $y_1 = \$5$ por hora y $y_2 = \$25$ por hora, solamente si las cantidades completas de O_1 y O_2 son vendidas a estos precios. Si los recursos (capacidad de O_1 y capacidad de O_2) son vendidos parcialmente, los precios mínimos son válidos solamente para algunos rangos los cuales pueden ser pequeños o grandes, dependiendo de la estructura del problema. Específicamente, manteniendo constantes cada uno de los otros parámetros del modelo primal, el valor marginal de un recurso (tales como horas de O_1 u horas de O_2), podría permanecer constante mientras que la disponibilidad del recurso ha sido incrementada, pero usualmente se alcanza un límite superior de un rango de validez y entonces el valor marginal podría declinar. La razón de esto es que la disponibilidad de algún otro recurso se convierte en limitante a medida que se dispone del otro recurso. Es decir, como la disponibilidad de un recurso decrece por debajo del rango de validez, su valor marginal crece. Este fenómeno es lo que los economistas llaman "escala de los rendimientos decrecientes".

- Al usar nuestra forma estándar para el problema primal, que se muestra a la izquierda (tal vez después de hacer la conversión de una forma a otra), su problema dual tiene la forma que se muestra a la derecha.

	PRIMAL	$\overrightarrow{\longleftarrow}$	DUAL	
F. Objetivo	Mín	$\overrightarrow{\longleftarrow}$	Máx	F. Objetivo
VARIABLES	≥ 0 ≤ 0 s.r.	$\overrightarrow{\longleftarrow}$	$\leq$ $\geq$ $=$	RESTRICCIONES
RESTRICCIONES	$\geq$ $\leq$ $=$	$\overrightarrow{\longleftarrow}$	≥ 0 ≤ 0 s.r.	VARIABLES

Figura 4.43: Relaciones entre los problemas primario y dual

Problema primal

Maximizar $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$,
sujeta a
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$,
para $i = 1 \ldots m$
y $x_j \geq 0$, para $j = 1, \ldots, n$

Problema dual

Minimizar $w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$
sujeta a
$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j$
para $j = 1 \ldots n$
y $y_i \geq 0$, para $j = 1, \ldots, m$

- Entonces, el problema dual usa exactamente los mismos parámetros que el problema primal, pero en **diferentes** lugares. Para recalcar esta comparación, obsérvense ahora estos mismos problemas en la notación matricial, en donde c y $y = [y_1, y_2, \ldots, y_m]$ son vectores renglón, pero b y x son vectores columna.

Problema primal

Maximizar $z = cx$,
sujeta a
$Ax \leq b$
$x \geq 0$

Problema dual

Minimizar $w = yb$,
sujeta a
$yA \geq c$
$y \geq 0$

- La tabla de la Fig. 4.43 indica la forma de convertir (para situaciones mixtas) problemas primarios a duales y viceversa.

- La tabla de la Fig. 4.44 indica (también) la forma de convertir (para situaciones mixtas) problemas primarios a duales y viceversa.

- Las conversiones se pueden resumir como sigue en la tabla de la Fig. 4.45:

	Minimización del problema	conversión	Maximización del problema	
restricciones	$\geq$	$\leftrightarrow$	≥ 0	variables
	$\leq$	$\leftrightarrow$	≤ 0	
	$=$	$\leftrightarrow$	No restringida	

	Minimización del problema	conversión	Maximización del problema	
variables	≥ 0	$\leftrightarrow$	$\leq$	restricciones
	≤ 0	$\leftrightarrow$	$\geq$	
	No restringida	$\leftrightarrow$	$=$	

Figura 4.44: Relaciones entre los problemas primario y dual

Primal Dual	Dual Primal
Maximizar la F.O.	Minimizar la F. O.
Una variable no negativa	Una restricción mayor o igual
Una variable no positiva	Una restricción menor o igual
Una variable no restringida en signo	Una igualdad
Una restricción menor o igual	Una variable no negativa
Una restricción mayor o igual	Una variable no positiva
Una igualdad	Una variable no restringida en signo

Figura 4.45: Reglas de conversión Primal-Dual y viceversa.

EJEMPLO **4.27** Considere el programa lineal

$$\text{Maximizar } z = 8x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} x_1 - 6x_2 \geq 2 \\ 5x_1 + 7x_2 = -4 \\ x_1 \leq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Solución: En términos matriciales el problema es:

$$\text{Maximizar } z = [8, 3] \cdot [x_1, x_2]$$
$$\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \geq \\ = \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$
$$x_1 \leq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

En principio el dual tendrá una estructura como la siguiente:

$$\textbf{Minimizar } z = [2, -4] \cdot [x_1, x_2]$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} ? \\ ? \end{matrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$w_1 \ ? \ 0$$
$$w_2 \ ? \ 0$$

Para aplicar la tabla 4.45 notamos que primero que se trata de un problema de maximización. Por lo tanto, empezamos el columna derecha de la tabla en cuestión. Se observa entonces que:

1. la restricción (No. 1) $x_1 - 6x_2 \geq 2$ obliga a la variable $w_1 \leq 0$
2. la restricción (No. 2) $5x_1 + 7x_2 = -4$ obliga a la variable w_2 a ser no restringida
3. la variable $x_1 \leq 0$ se convierte en la restricción (No. 1) $w_1 + 5w_2 \leq 8$
4. la restricción $x_2 \geq 0$ se convierte en la restricción (No. 2) $-6w_1 + 7w_2 \leq 0$

Finalmente concluimos que el problema dual es:

$$\text{Minimizar } z = 2w_1 - 4w_2$$
$$\begin{cases} w_1 + 5w_2 \leq 8 \\ -6w_1 + 7w_2 \geq 3 \\ w_1 \leq 0 \\ w_2 \text{ no restringida} \end{cases}$$

Ejemplo **4.28** Hallar el dual del programa lineal

$$\text{Minimizar } z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Solución: El problema dual está dado por:

$$\text{Maximizar } w = 4w_1 + 3w_2$$

$$\begin{cases} w_1 + 2w_2 \leq 2 \\ w_1 - 2w_2 \leq 3 \\ 2w_1 + 3w_2 \leq 5 \\ w_1 + w_2 \leq 2 \\ 3w_1 + w_2 \leq 3 \\ w_1 \geq 0, \quad w_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ejemplo **4.29** Convierta el problema (primal)

Maximizar $z = 4x_1 + 7x_2$
sujeta a:
$3x_1 + 5x_2 \leq 6$
$x_1 + 2x_2 \leq 8$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$

Solución: La versión dual de este problema es

Minimizar $w = 6y_1 + 8y_2$
sujeta a:
$3y_1 + y_2 \geq 4$
$5y_1 + 2y_2 \geq 7$
$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0$

Veamos esto en forma matricial.

Maximizar $z = [4, 7]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

sujeta a: $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Minimizar $w = [y_1, y_2]\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$

sujeta a

$[y_1, y_2]\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \geq [4, 7]$

$[y_1, y_2] \geq [0, 0]$

En la Fig. 4.46 se muestran las regiones de factibilidad para ambos problemas. Se debe verificar que $z^* = w^*$.

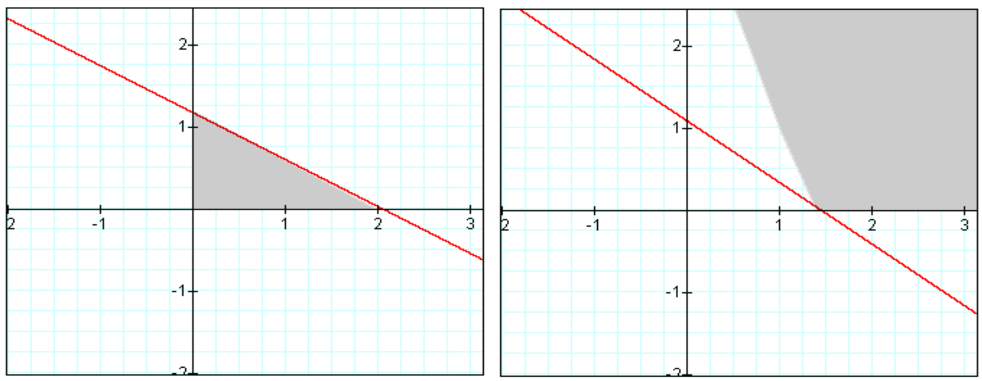


Figura 4.46: Regiones de factibilidad primal-dual.

Ejemplo **4.30** Convierta el problema (primal)

Maximizar $z = 3x_1 + 5x_2$
sujeta a
$x_1 \leq 4$
$2x_2 \leq 12$
$3x_1 + 2x_2 \leq 18$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$

a su versión dual.

Solución:

La versión dual de este problema es

Minimizar $y = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$
sujeta a
$y_1 + 3y_3 \geq 3$
$2y_2 + 2y_3 \geq 5$
$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0$

Veamos esto en forma matricial. Primero expresemos el problema primal:

Maximizar $z = [3,5]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$
sujeta a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Minimizar $y = [y_1, y_2, y_3]\begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$
sujeta a

$$[y_1, y_2, y_3]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \geq [3,5]$$

$[y_1, y_2, y_3] \geq [0,0,0]$

A partir de esta versión matricial del dual del problema resulta más sencillo ver el por qué de las ecuaciones dadas previamente.

- Nótese en particular que los parámetros para una restricción en cualquier problema son los coeficientes de una variable en el otro y los coeficientes de la función objetivo son los valores del lado derecho en el otro. Entonces, existe una correspondencia directa entre los elementos de los dos problemas. Esta correspondencia es la clave de algunas aplicaciones de la teoría de dualidad, entre las que se encuentra el análisis de sensibilidad.

- (**Teorema fundamental de la dualidad**) Consideremos (P) y (D), entonces se tiene alguna de las siguientes posibilidades:

  1. (P) tiene solución óptima finita, también la tiene (D) y los valores de la función objetivo coinciden.
  2. (P) es no acotado y (D) infactible.
  3. (P) y (D) son infactibles.

- **Propiedad de dualidad fuerte**: si x^* es una solución óptima para el problema primal y y^* es una solución óptima para el problema dual, entonces $cx^* = y^*b$.

- **Propiedad de simetría**: Para cualquier problema primal y su problema dual, las relaciones entre ellos deben ser simétricas debido a que el dual de este problema dual es este problema primal.

4.9 Biografía de George Dantzig

George Bernard Dantzig (8 de noviembre de 1914 13 de mayo de 2005) fue un matemático reconocido por desarrollar el método simplex y es considerado como "el padre de la programación lineal". Recibió muchos honores, tales como la Medalla Nacional a la Ciencia en 1975 y el premio a la teoría John von Neumann en 1974.

Fue miembro de la Academia Nacional de Ciencias, la Academia Nacional de Ingeniería y la Academia Americana de Artes y Ciencias.

Obtuvo su grado de bachiller en matemáticas y físicas en la Universidad de Maryland en 1936, su grado de magister en matemáticas en la Universidad de Michigan, y su doctorado en Berkeley en 1946. Recibió además un doctorado honorario de la universidad de Maryland en 1976.

El padre de Dantzig, Tobias Dantzig, fue un matemático ruso que realizó estudios con Henri Poincaré en Paris. Tobias se casó con una estudiante de la universidad de Sorbonne, Anja Ourisson, y la pareja inmigró a los Estados Unidos.

Un hecho real en la vida de Dantzig dio origen a una famosa leyenda urbana en 1939 mientras él era un estudiante graduado en Berkeley. Cerca del comienzo de una clase a la que Dantzig llegaba tarde, el profesor Jerzy Neyman escribió en la pizarra dos ejemplos famosos de problemas estadísticos no resueltos. Cuando Dantzig llegó más tarde a clases, pensó que los dos problemas eran tarea para la casa y los escribió en su cuaderno. De acuerdo a Dantzig, los problemas le parecieron ser "un poco más difíciles de lo normal", pero unos pocos días después obtuvo soluciones completas para ambos, aún creyendo que estos eran tareas que debía entregar. Seis semanas después, Dantzig recibió la visita de un deslumbrado profesor Neyman, quien había preparado una de las soluciones de Dantzig para ser publicada en una revista matemática. Años después otro investigador, Abraham Wald, se preparaba para publicar un artículo en el que llegaba a la conclusión del segundo problema, y en este artículo incluyó a Dantzig como co-autor.

Esta historia comenzó a difundirse, y fue usada como una lección motivacional demostrando el poder del pensamiento positivo. A través del tiempo el nombre de Dantzig fue removido y los hechos fueron alterados, pero la historia básica persiste en la forma de un mito urbano.

Cuando comenzó la Segunda Guerra Mundial, los estudios de Dantzig en Berkeley fueron suspendidos, y el se convirtió en la cabeza de la Rama de Análisis de Combate de los Cuarteles Centrales Estadísticos de Fuerza Aérea de los Estados Unidos, lo cual lo llevó a lidiar con las logísticas de la cadena de abastecimiento y gestión de cientos de miles de ítems y personas. El trabajo proporcionó los problemas del "mundo real" que la programación lineal vendría a resolver.

George Dantzig recibió su doctorado en Berkeley en 1946. El originalmente iba a aceptar un puesto como profesor en Berkeley, pero fue persuadido por su esposa y colegas del Pentágono para volver ahi como consejero matemático de la USAF. Fue ahí, en 1947 que el por primera vez presentó un problema de programación lineal, y propuso el Método Simplex para resolverlo. En 1952 se convirtió en un investigador matemático en la Corporación RAND, donde comenzó a implementar la programación lineal en los computadores de la corporación. En 1960 fue contratado por su alma máter, donde enseñó ciencias de la computación, eventualmente convirtiéndose en el presidente del Centro de Investigación de Operaciones. En 1966 tomó un cargo similar en la Universidad de Stanford. Se quedó en Standord hasta su retiro en los años 90.

En adición a su trabajo significatico en el desarrollo del método simplex y la programación lineal, Dantzig también hizo avances en los campos de la teoría de la descomposición, análisis de sensibilidad, métodos de pivot complementarios, optimización a gran escala, programación no lineal, y programación bajo incertidumbre. El primer ejemplar del SIAM Jornal on Optimization en 1991 fue dedicado a él.

La Sociedad de Programación Matemática honró a Dantzig creando el Premio Dantzig, otorgado cada tres años desde 1982 a una o dos personas que hallan logrado un impacto significativo en el campo de la programación matemática.

Dantzig murió el 13 de Mayo de 2005 en su casa en Stanford, California, debido a complicaciones producto de la diabetes y problemas cardiovasculares.

Referencias:

G. B. Dantzig 1940. On the non-existence of tests of “Student’s” hypothesis having power functions independent of s, Annals of Mathematical Statistics, Volume 11, number 2, pp186-192

Capítulo 5

Modelos de inventarios

- Los inventarios se relacionan con el mantenimiento de cantidades suficientes de bienes (por ejemplo, refacciones y materias primas) que garanticen una operación fluida en un sistema de producción o en una actividad comercial.

- Los inventarios los ha considerado tradicionalmente el comercio y la industria, como un mal necesario: muy poca reserva puede ocasionar costosas interrupciones en la operación del sistema y demasiada reserva puede arruinar la ventaja competitiva y el margen de ganancia del negocio. Desde ese punto de vista, la única manera efectiva de manejar los inventarios es minimizar su impacto adverso, encontrando un "justo medio" entre los dos casos extremos.

- Esta actitud hacia los inventarios prevaleció en las naciones industrializadas de Occidente hasta después de la Segunda Guerra Mundial, cuando Japón implementó con gran éxito el sistema, famoso ahorá, de justo a tiempo (JAT); este sistema necesita un ambiente de producción (casi) sin inventario.

- Sin embargo, es importante recordar que JAT es algo más que un sistema de control de inventarios en el sentido tradicional. Se trata más bien de una concepción tendiente a eliminar los inventarios, mediante mejoras en la calidad y reducción de desperdicios. Básicamente, el JAT considera los inventarios como resultado de deficiencias en las componentes de la producción, tales como el diseño de productos, control de calidad, la selección de equipo, administración del material y otras más. Eliminando tales deficiencias, el proceso de producción puede equilibrarse y la dependencia del flujo de producción de los inventarios puede minimizarse o eliminarse.

- El sistema JAT es muy adecuado para la fabricación de carácter repetitivo (por ejemplo, su implementación de mayor éxito ha sido en la industria automotriz). La necesidad de las técnicas tradicionales de control de inventarios para otro tipo de sistemas de producción continuarán aún por mucho tiempo.

5.1 Sistema de inventario ABC

- En la mayoría de las situaciones del mundo real, el manejo de inventarios suele implicar un número apreciable de artículos o productos que varían en precio desde los relativamente económicos hasta los posiblemente muy costosos. Como el inventario representa en realidad capital ocioso (o inactivo), es natural que se ejerza el control de inventario en artículos que sean los responsables del incremento en el costo del capital. Por lo tanto, los artículos rutinarios, como los tornillos y tuercas, contribuyen en forma poco significativa al costo del capital cuando se comparan con artículos que contienen partes de repuesto costosas.

- La experiencia ha demostrado que sólo un número relativamente pequeño (20–80) de artículos de inventario suelen incurrir en una parte importante del costo del capital. Estos artículos son los que deben estar sujetos a un control de inventario estricto.
- El sistema ABC es un procedimiento simple que se puede utilizar para separar los artículos que requieran atención especial en términos de control de inventarios.
- El procedimiento sugiere se grafique el porcentaje de artículos del inventario total contra el porcentaje del valor monetario total de estos artículos en un periodo dado (por lo general un año).
- La figura 5.1 ilustra una curva ABC común. La idea del procedimiento es determinar el porcentaje de artículos que contribuyen al 80% del valor monetario acumulado. Estos artículos se clasifican como grupo A y normalmente constituyen alrededor del 20% de todos los artículos. Los artículos de la clase B son aquellos que corresponden a valores monetarios porcentuales entre el 80% y el 95%. Estos normalmente comprenden alrededor del 25% de todos los artículos. Los artículos restantes constituyen la clase C.

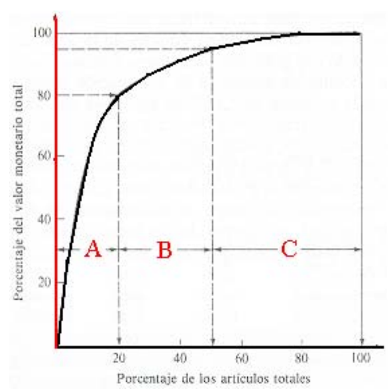


Figura 5.1: Curva ABC.

- Los artículos de la clase A representan cantidades pequeñas de artículos costosos y deben estar sujetos a un estrecho control de inventarios.
- Los artículos de la clase B son los que siguen en orden donde se puede aplicar una forma de control de inventario moderada.
- Por último, a los artículos de la clase C se les debe asignar la más baja prioridad en la aplicación de cualquier forma de control de inventarios.

- Por lo general, se espera que el tamaño del pedido de artículos de clase A, que son costosos, sea pequeño a fin de reducir el costo del capital asociado. Por otra parte, el tamaño del pedido de artículos de la clase C puede ser muy grande.

- El análisis ABC suele ser el **primer paso** que se debe aplicar en una situación de control de inventarios. Cuando se identifican los artículos importantes del inventario, se pueden utilizar modelos de los tipos que se presentarán en las secciones posteriores para decidir cuál es la forma ideal de controlar los inventarios.

5.2 Modelo de inventario generalizado

- El objetivo final de cualquier modelo de inventarios es el de dar respuesta a dos preguntas:
  - ¿Qué cantidad de artículos deben pedirse?
  - ¿Cuándo deben pedirse?

- La respuesta a la primera pregunta se expresa en términos de lo que llamamos cantidad del pedido. Esta representa la cantidad óptima que debe ordenarse cada vez que se haga un pedido y puede variar con el tiempo, dependiendo de la situación que se considere.

- La respuesta a la segunda interrogante depende del tipo de sistema de inventarios. Si el sistema requiere revisión periódica en intervalos de tiempo iguales (por ejemplo, cada semana o cada mes), el tiempo para adquirir un nuevo pedido suele coincidir con el inicio de cada intervalo de tiempo.

- Por otra parte, si el sistema es del tipo de revisión continua, el nivel de inventario en el cual debe colocarse un nuevo pedido suele especificar un punto para un nuevo pedido.

- Por lo tanto, podemos expresar la solución del problema general de inventarias de la manera siguiente:
  - **Caso de la revisión periódica**. Recepción de un nuevo pedido de la cantidad especificada por la cantidad del pedido en intervalos de tiempo iguales.
  - **Caso de la revisión continua**. Cuando el nivel de inventario llega al punto para un nuevo pedido se coloca un nuevo pedido cuyo tamaño sea igual a la cantidad del pedido.

- La cantidad y el punto de un nuevo pedido suelen determinarse normalmente minimizando el costo de inventario total que se puede expresar como una función de estas dos variables. Podemos resumir el costo total de un modelo de inventarios general como función de sus componentes principales en la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix}\text{costo de}\\ \text{inventario}\\ \text{total}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{costo de}\\ \text{compra}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{costo}\\ \text{fijo}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{costo de}\\ \text{almacenamiento}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{costo de}\\ \text{escasez}\end{bmatrix}$$

- El costo de compra se vuelve un factor importante cuando el precio de una unidad de mercancía depende del tamaño del pedido. Esta situación se expresa normalmente en términos de un **descuento** por cantidad o una reducción del precio, donde el precio unitario del artículo disminuye con el incremento de la cantidad ordenada.

- El costo fijo representa el gasto fijo (o no variable) en que se incurre cuando se hace un pedido. (Por ejemplo, traslado del encargado, alimentación, hospedaje). Por lo tanto, para satisfacer la demanda en un periodo, el pedido (más frecuente) de cantidades menores dará origen a un costo fijo mayor durante el periodo, que si se satisfaciera la demanda haciendo pedidos mayores (y, por lo tanto, menos frecuentes).

- El costo de almacenamiento, que representa los costos de almacenamiento de productos en bodega (por ejemplo, interés sobre capital invertido, almacenamiento, manejo, depreciación y mantenimiento), normalmente aumenta con el nivel de inventario.

- Por último, el costo de escasez es una penalización en la que se incurre cuando se termina la existencia de un producto que se necesita. Por lo general incluye costos que se acreditan a la pérdida de la benevolencia del cliente y también a la pérdida potencial del ingreso.

- En la figura 5.2 se ilustra la variación de las cuatro componentes de costo del modelo de inventario general como función del nivel de inventario. El nivel de inventario óptimo corresponde al costo total mínimo de las cuatro componentes.

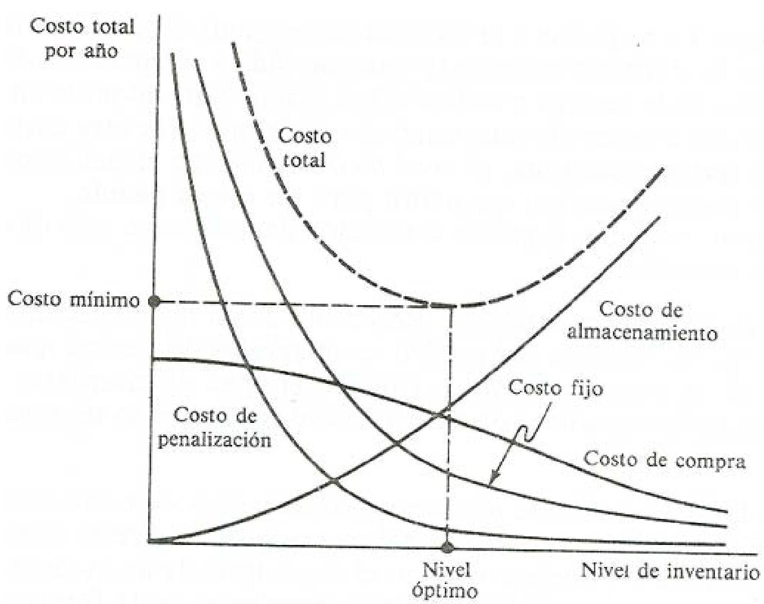


Figura 5.2: Componentes de costos

- Sin embargo, obsérvese que un modelo de inventarios no necesita incluir los cuatro tipos de costos, ya sea porque algunos de los costos son insignificantes o porque harán que la función de costo total sea demasiado compleja para el análisis matemático. No obstante, en la práctica podemos suprimir una componente de costo sólo si su efecto en el modelo de costo total es insignificante.

- El modelo general de inventarios anterior parece ser lo suficientemente simple. Entonces, ¿por qué tenemos grandes variedades de modelos cuyos métodos de solución van desde uso del cálculo simple hasta situaciones más complejas?

- La respuesta radica principalmente en si la demanda del artículo es determinista (se conoce con certeza) o probabilística (la describe una densidad de probabilidad).

- La figura 5.3 ilustra las diversas clasificaciones de la demanda como se toman normalmente en modelos de inventarios.

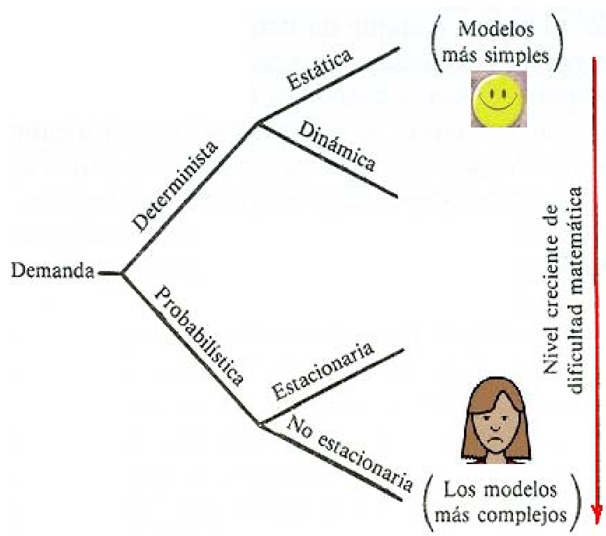


Figura 5.3: Diversas clasificaciones de la demanda

- Una demanda determinista puede ser estática, en el sentido de que la tasa de consumo permanece constante durante el transcurso del tiempo, o dinámica, donde la demanda se conoce con certeza, pero varía de un periodo al siguiente.

- La demanda probabilistica tiene dos clasificaciones análogas: el caso estacionario, en el cual la función densidad de probabilidad de la demanda se mantiene sin cambio con el tiempo; y el caso no estacionario, donde la función densidad de probabilidad varía con el tiempo.

- Es raro que una demanda estática determinista ocurriera en el mundo real. Por lo tanto, consideramos esta situación como un caso de simplificación.

- Por ejemplo, aunque la demanda de artículos comestibles como el pan, puede variar de un día a otro, las variaciones pueden ser mínimas e insignificantes, con el resultado de que una suposición de demanda estática quizá no esté muy distante de la realidad.

- La representación más precisa de la demanda quizá puede hacerse a través de distribuciones no estacionarias probabilísticas. Sin embargo, desde el punto de vista matemático, el modelo de inventarios resultante será más bien **complejo**, en especial a medida que aumente el horizonte de tiempo del problema.

- En la figura 5.3 se ilustra este aspecto, mostrando que aumenta la **complejidad** matemática de los modelos de inventarios conforme se avanza desde la suposición de la demanda estática determinista hacia la demanda no estacionaria probabilística. En realidad, podemos pensar que las clasificaciones de la figura 5.3 representan diferentes niveles de abstracción en la demanda.

- El primer nivel supone que la distribución de probabilidad de la demanda es estacionaria en el tiempo. Esto es, se utiliza la **misma** función de densidad de probabilidad para representar la demanda en todos los periodos sobre los cuales se hace el estudio.

- El segundo nivel de simplificación reconoce las variaciones en la demanda entre diferentes periodos. Sin embargo, más que utilizar distribuciones de probabilidad se utiliza la demanda promedio para representar las necesidades de cada periodo. Esta simplificación tiene el efecto de ignorar elementos de riesgo en la situación de inventario.

- El tercer nivel de simplificación elimina ambos elementos de riesgo y variabilidad en la demanda. Por consiguiente, la demanda en cualquier periodo se supone igual al promedio de las demandas conocidas (supuestamente) para todos los periodos en consideración. El resultado de esta simplificación es que la demanda puede representarse como una tasa constante por unidad de tiempo.

- Aunque el tipo de demanda es un factor principal en el diseño del modelo de inventarios, los factores que siguen pueden influir también en la forma como se formula el modelo.

- **Demoras en la entrega o (tiempos guía)**. Cuando se solicita un pedido, puede entregarse inmediatamente o puede requerir algún tiempo antes de que la entrega se efectúe. El tiempo entre la petición de un pedido y su surtido se conoce como demora en la entrega. En general, las holguras de entrega pueden ser deterministas o probabilísticas.

- **Reabastecimiento del almacén**. Aunque un sistema de inventarios puede operar con demoras en las entregas, el abastecimiento real del almacén puede ser instantáneo o uniforme. El instantáneo ocurre cuando el almacén compra de fuentes externas. El uniforme puede ocurrir cuando el producto se fabrica localmente dentro de la organización.

- **Horizonte de tiempo**. El horizonte define el periodo sobre el cual el nivel de inventarios estará **controlado**. Este horizonte puede ser finito o infinito, dependiendo de la naturaleza de la demanda.

- **Abastecimiento múltiple**. Un sistema de inventarios puede tener varios puntos de almacenamiento (en lugar de uno). En algunos casos estos puntos de almacenamiento están organizados de tal manera que un punto actúa como una fuente de abastecimiento para algunos otros puntos. Este tipo de operación puede repetirse a diferentes niveles, de tal manera que un punto de demanda pueda llegar a ser de nuevo un punto de abastecimiento. La situación generalmente se denomina sistema de abastecimiento múltiple.

- **Número de artículos**. Un sistema de inventarios puede contener más de un artículo (mercancías). Este caso es de interés, principalmente si existe alguna clase de interacción entre los diferentes artículos. Por ejemplo, éstos pueden competir en espacio o capital total limitados.

5.3 Modelos deterministas

- Es muy **difícil** idear un modelo general de inventarios que tome en cuenta todas las variaciones en los sistemas reales. De hecho, aun si puede ser formulado un modelo suficientemente general, tal vez no sea posible de resolver analíticamente. Por consiguiente, los modelos presentados en esta sección tratan de ser ilustrativos de algunos sistemas de inventarios.

- Es improbable que estos modelos se ajusten exactamente a una situación real; pero el objetivo de la presentación es proveer ideas diferentes que puedan ser adaptadas a sistemas de inventario específicos.

- En esta sección se describen varios modelos. La mayoría de estos modelos tratan con un inventario de **un solo artículo**.

- El tipo de función de costo es también importante para formular y resolver los modelos. El lector observará los diversos métodos de solución que incluyen optimización clásica y lineal, y programación dinámica. Estos ejemplos subrayan la importancia de usar diferentes técnicas de optimización al resolver modelos de inventarios.

- El tipo más simple de modelo de inventarios ocurre cuando la demanda es constante en el tiempo con reabastecimiento instantáneo y sin escasez. Veamos un caso que resolveremos más adelante.

  Ejemplo **5.1** Una compañía que fabrica televisores produce sus propias bocinas para usarlas en la fabricación de los aparatos. Los televisores se ensamblan en una línea de producción continua a una tasa de 8000 al mes. Las bocinas se producen por lotes, pues no justifican toda una línea de producción y se pueden producir cantidades relativamente grandes en un tiempo corto. La compañía está interesada en determinar cuándo y cuántas bocinas debe producir.

  Deben tomarse en cuenta varios costos:

  1. El costo de producción de una sola bocina (excluyendo el costo de preparación) es de \$10 y puede suponerse que es un costo unitario independiente del tamaño del lote fabricado. (En general, el costo unitario de producción no necesita ser constante y puede decrecer con el tamaño del lote.)

2. Cada vez que se produce un lote, se incurre en un costo de preparación de $12000. Este costo incluye el costo de preparar las máquinas y herramientas, los costos administrativos, los de registros, etc. Obsérvese que la existencia de estos costos es un argumento para producir lotes grandes de bocinas.
3. La producción de lotes grandes de bocinas conduce a inventarios grandes. El costo estimado de mantener una bocina en almacén es de 30 centavos/mes. Este costo incluye el costo de capital invertido, el espacio de almacenamiento, seguros, impuestos, protección, etc. La existencia de un costo de mantener el inventario es un motivo para producir lotes pequeños.
4. El costo de producción de una sola bocina (excluyendo el costo de preparación) es de $10 y puede suponerse que es un costo unitario independiente del tamaño del lote fabricado. (En general, el costo unitario de producción no necesita ser constante y puede decrecer con el tamaño del lote.)
5. La política de la compañía prohíbe la planeación deliberada de faltantes de cualquiera de sus componentes. Sin embargo, en ocasiones ocurre un faltante de bocinas y se ha estimado que cada bocina que falta cuando se necesita cuesta $1.l0/mes. Este costo incluye el costo de instalar las bocinas una vez que el televisor está totalmente ensamblado, el espacio de almacén, el ingreso retrasado, los registros,etc.

- La figura 5.4 ilustra la variación del nivel de inventario. Se supone que la demanda ocurre con la tasa a (por unidad de tiempo). El nivel más alto del inventario ocurre cuando se entrega la cantidad ordenada Q. (La demora en la entrega se supone una constante conocida).

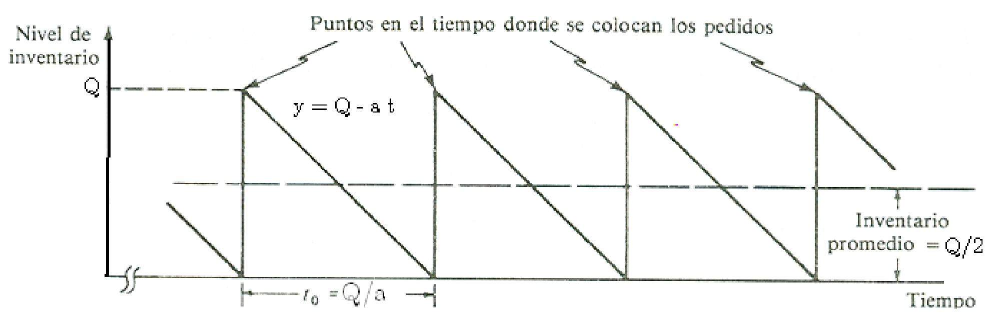


Figura 5.4: Variación del nivel de inventario

- El nivel de inventario alcanza el nivel cero Q/a unidades de tiempo después que se recibe la cantidad pedida Q. Un ciclo puede interpretarse como el tiempo que pasa entre corridas de producción. En el ejemplo 5.1, si se producen 24000 bocinas en cada corrida y después se usan a una tasa de 8000 por mes, entonces la longitud del ciclo es 24000/8000, o sea 3 meses.

- Cuanto más pequeña es la cantidad Q ordenada, más frecuente será la colocación de nuevos pedidos. Sin embargo, se reducirá el nivel promedio del inventario mantenido en almacén. Por

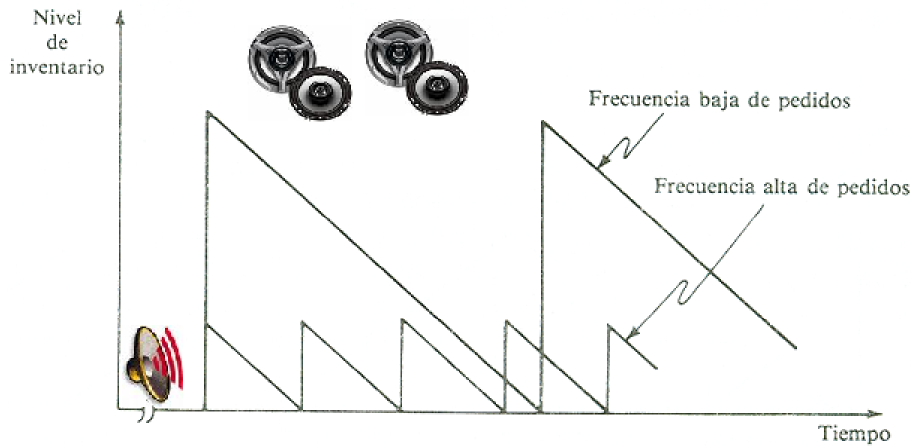


Figura 5.5: Frecuencia de pedidos.

otra parte, pedidos de mayor cantidad indican nivel de inventario más grande, pero colocación menos frecuente de pedidos (véase la figura 5.5).

- Debido a que existen costos asociados al hacer los pedidos y mantener el inventario en almacén, la cantidad Q se selecciona para permitir un compromiso entre los dos tipos de costo. Esta es la base para formular el modelo de inventarios.

- Sea K el costo fijo (o de preparación) originado cada vez que se coloca un pedido y suponga que el costo de mantener una unidad en inventario (por unidad de tiempo) es h. Suponga además que c es el costo de producción (o costo de compra) por artículo.

  Por lo tanto, el costo total por unidad de tiempo T (en inglés, TCU total cost per unit time) como función de Q puede expresarse como

$$T = \left(\frac{\text{costo compra}}{\text{unidad de tiempo}}\right) + \left(\frac{\text{costo fijo}}{\text{unidad de tiempo}}\right) +$$

$$\left(\frac{\text{costo de mantenimiento de inventario}}{\text{unidad de tiempo}}\right)$$

- El costo de producción por unidad de tiempo por ciclo está dado por

$$\begin{cases} 0 & \text{si} \quad Q = 0 \\ K + c\,Q & \text{si} \quad Q > 0 \end{cases}$$

- El costo de mantener el inventario por ciclo está dado por

$$\int_0^{Q/a} h\,(Q - at)\,dt = \frac{h\,Q^2}{2\,a}$$

- De esta forma tenemos que el costo total por unidad de tiempo T es

$$T = \frac{K + c\,Q}{Q/a} + \frac{\frac{h\,Q^2}{2\,a}}{Q/a}$$

o bien

$$T = \frac{aK}{Q} + a\,c + \frac{hQ}{2}$$

en donde

  - Q es inventario (cantidad disponible) de un bien.
  - K es el costo fijo de ordenar un nuevo inventario.
  - h es el costo de mantener una unidad en inventario.
  - c es el costo de producción (o costo de compra) por artículo.

- El valor óptimo de Q se obtiene minimizando T con respecto a Q. Por consiguiente, suponiendo que Q es una variable continua se deduce que

$$\frac{dQ}{dy} = -\frac{aK}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0$$

que proporciona la cantidad pedida óptima como

$$Q^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}}$$

(Puede comprobarse que Q^* minimiza T demostrando que la segunda derivada en Q^* es estrictamente positiva.)

- Por lo común la cantidad pedida se denomina tamaño del lote económico de Wilson o, simplemente, cantidad pedida económica (CPE).

- La política óptima del modelo requiere ordenar Q^* unidades cada $t_0 = Q^*/a$ unidades de tiempo. El costo óptimo $T(y^*)$ se obtiene por sustitución directa como

$$t^* = \frac{Q^*}{a} = \sqrt{\frac{2K}{ah}}$$

- La mayoría de las situaciones prácticas generalmente tienen tiempo de fabricación positivo L (o de retraso) desde el punto en el cual se coloca la orden hasta que realmente se entrega.

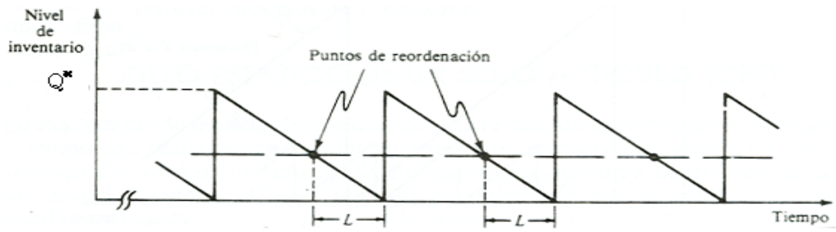


Figura 5.6: Puntos de reordenación.

- La política de pedidos del modelo anterior, por consiguiente, debe especificar el punto de reordenación. La figura 5.6 ilustra la situación donde la reordenación ocurre L unidades de tiempo antes de lo esperado para la entrega. Esta información puede traducirse convenientemente para la implantación práctica, especificado sólo el nivel de inventarios en el que se vuelve a pedir, llamado punto de reordenación.

- En la práctica esto es equivalente a observar continuamente el nivel de inventario hasta que se alcance el **punto de reordenación**. Quizá esto es por lo que este modelo se clasifica algunas veces como modelo de revisión continua.

Ejemplo **5.2** Retomemos el ejemplo de la produción de bocinas para televisores. Una compañía que fabrica televisores produce sus propias bocinas para usarlas en la fabricación de los aparatos. Los televisores se ensamblan en una línea de producción continua a una tasa de 8000 al mes. Las bocinas se producen por lotes, pues no justifican toda una línea de producción y se pueden producir cantidades relativamente grandes en un tiempo corto. La compañía está interesada en determinar cuándo y cuántas bocinas debe producir. Deben tomarse en cuenta varios costos:

1. Cada vez que se produce un lote, se incurre en un costo de preparación de \$12000. Este costo incluye el costo de preparar las máquinas y herramientas, los costos administrativos, los de registros, etc. Obsérvese que la existencia de estos costos es un argumento para producir lotes grandes de bocinas.

2. La producción de lotes grandes de bocinas conduce a inventarios grandes. El costo estimado de mantener una bocina en almacén es de 30 centavos/mes. Este costo incluye el costo de capital invertido, el espacio de almacenamiento, seguros, impuestos, protección, etc. La existencia de un costo de mantener el inventario es un motivo para producir lotes pequeños.

3. El costo de producción de una sola bocina (excluyendo el costo de preparación) es de \$10 y puede suponerse que es un costo unitario independiente del tamaño del lote fabricado. (En general, el costo unitario de producción no necesita ser constante y puede decrecer con el tamaño del lote.)

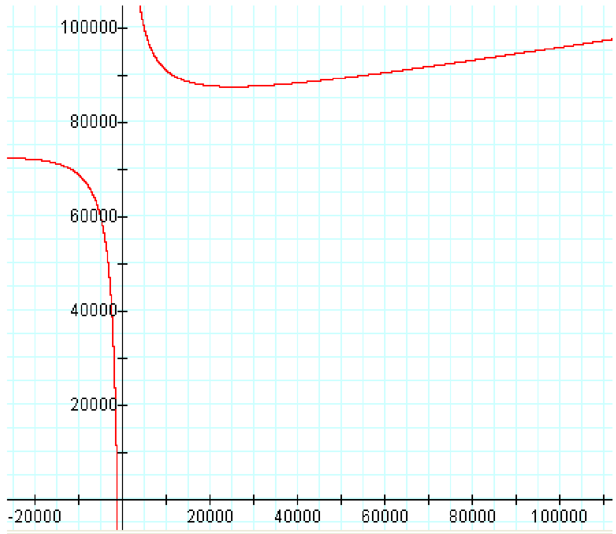


Figura 5.7: Curva de costo

Solución:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \times 8000 \times 12000}{0.30}} = 25298.2$$

Por lo tanto, $t^* = \dfrac{25298.2}{8000} = 3.2$ meses.

Entonces se hará una preparación de la línea de producción cada 3.2 meses y se producirán 25 298 bocinas. Dicho sea de paso, la curva de costo es bastante plana cerca del valor óptimo, por lo que cualquier cantidad de producción entre 20000 y 30000 bocinas es aceptable; este hecho se puede observar usando GC (ver Fig. 5.7).

Ejemplo **5.3** La demanda diaria a para una mercancía es aproximadamente 100 unidades. Cada vez que se coloca un pedido se origina un costo fijo K de \$100. El costo diario, h, de mantener el inventario por unidad es de \$0.02. Si el tiempo de fabricación es de 12 días, determine el tamaño económico de lote y el punto de reordenación.

Solución:

De las fórmulas anteriores, el tamaño económico del lote es

$$Q^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times 100 \times 100}{0.02}} = 1000 \text{ unidades}$$

Por lo tanto, la longitud del ciclo óptima asociada está dada como

$$t^* = \frac{Q^*}{a} = \frac{1000}{100} = 10 \text{ días}$$

Puesto que el tiempo de fabricación es de 12 días y la longitud de ciclo es de 10 días, la nueva solicitud ocurre cuando el nivel de inventario es suficiente para satisfacer la demanda para dos días ($= 12 - 10$). Por consiguiente, la cantidad $Q^* = 1000$ se ordena cuando el nivel de inventario alcanza $2 \times 100 = 200$ unidades.

Observe que el tiempo "efectivo" de fabricación se toma igual a 2 días en lugar de 12 días. Esto ocurre porque el tiempo es mayor que t^*.

- **Nota**: En general, si L es el tiempo de fabricación o entrega, una vez que el sistema se estabiliza (esto toma dos ciclos en ejemplo anterior), la situación puede ser tratada como si el tiempo de fabricación fuera

$$tf = L - n \cdot t^*$$

en donde n es el mayor entero menor o igual a L/t^* .

- En el ejemplo precedente $L = 12$ y $t^* = 10$, por lo tanto, $12/10 = 1.2$. Tenemos así que $n = 1$ y así la fórmula nos da $L - n \cdot t^* = 12 - 1 \cdot 10 = 2$. De manera que para efectos prácticos, el tiempo de entrega se puede pensar como de dos días y no doce.

- Recordemos que la función $y = Q - at$ indica, para cada t, el nivel de inventario instántaneo. Por lo tanto, una vez que el sistema se estabiliza, se debe hacer el nuevo pedido cuando el nivel del inventario (crítico) sea

$$NIC = Q^* - (t^* - tf)a$$

- (**Ejercicios**) Determine el punto de nuevo pedido en cada uno de los casos siguientes.

  1. Tiempo de fabriación $= 15$ días. **R/** 500 unidades.
  2. Tiempo de fabriaci ón $= 23$ días. **R/** 300 unidades.
  3. Tiempo de fabriación $= 8$ días. **R/** 800 unidades.
  4. Tiempo de fabriación $= 10$ días. **R/** 0 unidades.

- (**Se permiten faltantes**) Puede ser redituable permitir que ocurran faltantes, pues la longitud del ciclo se puede alargar con el consiguiente ahorro en el costo fijo K. De todas maneras, cabe la posibilidad de que este beneficio quede anulado por el costo en que se incurre cuando no se dispone de las unidades; por esta razón se requiere un análisis detallado.

- Si se permite que ocurran faltantes y su precio al salir es de p dólares por unidad de demanda no satisfecha por una unidad de tiempo, se pueden obtener resultados parecidos a los del caso en que los faltantes no están permitidos. Denótese por S la cantidad que se tiene al principio de un ciclo, previendo un faltante de $Q - S$ unidades. El problema se resume en la figura 5.8

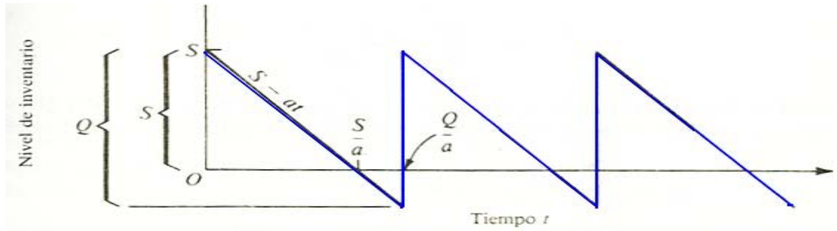


Figura 5.8: Se permiten faltantes

- Suponga que en su casa se consume una caja de leche diaria y las compras las hace semanalmente. Si solo se compran 5 cajas, en este caso $Q = 7$ y $S = 5$. Usted sabe que habrá unos días de la semana en que tendrá escasez.

- El costo de producción está dado por

$$\begin{cases} 0 \quad \text{si } Q = 0 \\ K + cQ \quad \text{si } Q > 0 \end{cases}$$

- Tenemos entonces que el costo total de mantener el inventario durante el periodo en que el nivel es positivo es

$$\int_0^{S/a} h(S - at)\, dt = \frac{h\, S^2}{2\, a}$$

- El costo por faltantes, en que se incurre durante el tiempo que se tienen estos faltantes, es:

$$-\int_{S/a}^{Q/a} p(S - at)\, dt = \frac{p\, (Q - S)^2}{2\, a}$$

- El costo total por ciclo es

$$K + cQ + \tfrac{h\, S^2}{2\, a} + \tfrac{p\, (Q-S)^2}{2\, a}$$

- Si dividimos por Q/a, obtenemos el costo total por unidad de tiempo:

$$\frac{K + cQ + \frac{h\, S^2}{2\, a} + \frac{p\, (Q-S)^2}{2\, a}}{Q/a}$$

- La función de costo del inventario (por unidad de tiempo) en este caso es

$$T = \frac{aK}{Q} + ac + \frac{hS^2}{2Q} + \frac{p\, (Q - S)^2}{2Q}$$

- Usando criterio de la segunda derivada para el caso de varias variables se tiene que

$$\begin{cases} -\dfrac{p\,(Q-S)}{Q} + \dfrac{h\,S}{Q} = 0 \\ -\dfrac{a\,K}{Q^2} + \dfrac{p\,(Q-S)}{Q} - \dfrac{p\,(Q-S)^2}{2\,Q^2} - \dfrac{h\,S^2}{2\,Q^2} = 0 \end{cases}$$

- Resolviendo este sistema obtenemos:

$$S^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}}\sqrt{\frac{p}{p+h}}, \quad Q^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}}\sqrt{\frac{p+h}{p}}$$

- La longitud óptima del período t^* está dada por

$$t^* = \frac{Q^*}{a} = \sqrt{\frac{2K}{ah}}\sqrt{\frac{p+h}{p}} = \sqrt{\frac{2K(p+h)}{ahp}}$$

- El faltante máximo es

$$FM = Q^* - S^* = \sqrt{\frac{2aK}{p}}\sqrt{\frac{h}{p+h}} = \sqrt{\frac{2aKh}{p(p+h)}}$$

- La fracción de tiempo en que no existe faltante (por unidad de tiempo) es

$$\frac{S^*/a}{Q^*/a} = \frac{p}{p+h}$$

que es indepediente de K.

Ejemplo **5.4** Si en el ejemplo de las bocinas se permiten faltantes, el costo se estima en $p =$ \$1.10 por bocina. De nuevo,

$$K = 12000,\ h = 0.30,\ a = 8000,\ p = 1.10,\ c = 10,\ a = 8000$$

Por lo tanto:

$$S^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}}\sqrt{\frac{p}{p+h}} = 22424.5$$

Por otro lado

$$Q^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}}\sqrt{\frac{p}{p+h}} = 28540.2$$

De esta forma:

$$Q^* - S^* = 6115.77, \quad t^* = 3.56753$$

Así, cuando se permiten faltantes, la línea de producción debe prepararse cada 3.6 meses para producir 28540 bocinas (aproximadamente). Se permite un faltante hasta de 6116 bocinas. Nótese que Q^* y t^* no difieren mucho de los valores para el caso en que no se permiten faltantes.

- (**Ejercicio**) Use GC para graficar las siguientes funciones de costos para problema de las bocinas y televisores estudiado anteriormente. La primera función es la que se obtiene con los datos dados en el ejemplo. La segunda corresponde a la fórmula de la función de costos en la que se mantienen los parámetros que se ajustan abajo mediante "sliders".

$$z = 80000 + \frac{96000000}{x} + \frac{0.55(x-y)^2}{x} + \frac{0.15y^2}{x}$$
$$z = a\,c + \frac{a\,K}{x} + \frac{p\,(x-y)^2}{2\,x} + \frac{h\,y^2}{2\,x}$$

para el caso

Expr p = slider([1.10, 2]);
Expr K = slider([12000,13000]);
Expr c = slider([10,11]);
Expr a = slider([8000,8500]);
Expr h = slider([0.30, 1]);

Determine cuáles parámetros producen "mayor impacto" en la función de costos cuando se mantienen fijos los otros.

- (**Descuentos por cantidad, sin faltantes**) Los modelos considerados suponen que el costo por unidad para un artículo es el mismo sin importar la cantidad producida. De hecho, esta suposición es el resultado de que las soluciones óptimas sean independientes de la cantidad.

- Supóngase ahora que existen divisiones en el costo, es decir, que el costo unitario varia según la cantidad ordenada.

- Por ejemplo, supóngase que el costo unitario de producción de las bocinas es $c_1 = \$11$ si se producen menos de 10000, $c_2 = \$10$ si la producción está entre 10000 y 80000 bocinas y $c_3 =$ \$9.50 si la producción es mayor que 80000. Dicho de otra forma:

$$c = \begin{cases} c_1 = \$11 \text{ si No. de bocinas } < 10000 \\ c_2 = \$10 \text{ si (No. debocinas } \geq 10000) \wedge \text{ (No. de bocinas } < 80000) \\ c_3 = \$9.50 \text{ si No. de bocinas } \geq 80000 \end{cases}$$

Entonces, ¿cuál es la política óptima?

- La solución al problema específico revelará la metodología general. A partir de los resultados del modelo del lote económico que se acaba de analizar (sin faltantes), el costo total por unidad de tiempo, si el costo de producción es c_j, está dado por

$$T_j = \frac{aK}{Q} + a\,c_j + \frac{hQ}{2}, \text{ para } j = 1, 2, 3$$

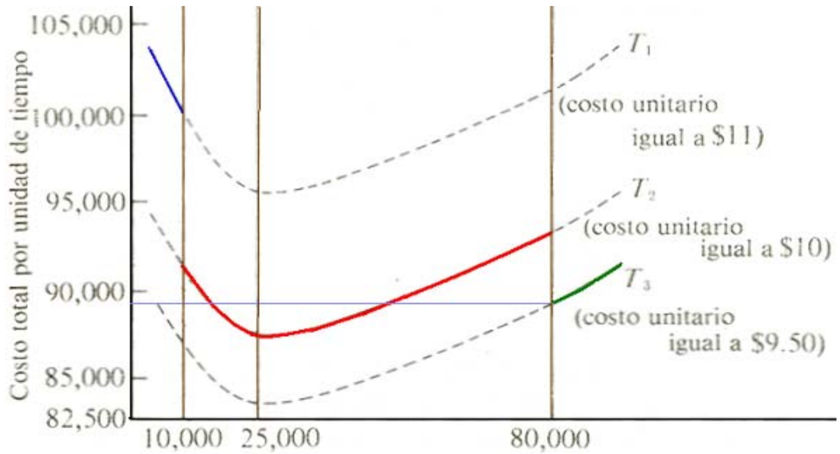


Figura 5.9: Cantidad ordenada.

- En la figura 5.9 se muestra una gráfica de T_j contra Q. Las líneas continuas muestran los valores factibles de Q y sólo se tienen que investigar estas regiones. Para cada curva, el valor de Q que minimiza T_j se encuentra por los métodos empleados en el modelo del lote económico.

- Para $K = 12000$, $h = 0.30$ y $a = 8000$, este valor es

$$\sqrt{\frac{(2)(8,000)(12,000)}{0.30}} = 25298.$$

- Este número es un valor factible para la función de costo T_2. Como es evidente que, para Q fija, $T_j < T_{j-1}$ para toda j, T_1 se puede eliminar del análisis. Sin embargo, T_3 no se puede descartar tan rápido. Este valor factible mínimo (que ocurre en $Q = 80000$ se debe comparar con T_2 evaluado en 25298 (que es \$87589). Como T_3 evaluado en 80000 es igual a \$89200, es mejor producir en cantidades de 25298, por lo cual esta cantidad es el valor óptimo para este conjunto de descuentos por cantidad.

- Si la cantidad descontada hubiera llevado a un costo de \$9 (en lugar de \$9.50) cuando se produjeran más de 80000 bocinas, entonces T_3, evaluado en 80000 hubiera sido igual a \$85 200 y la cantidad óptima por producir sería 80000. Ver Fig. 5.10.

- Aunque este análisis concierne a un problema muy específico, es obvio que se estudiará su extensión al problema general. Más aún, se puede hacer un análisis parecido para otros tipos de descuentos por cantidad como los descuentos incrementalespor cantidad, en donde se incurre en un costo c_0 para los primeros q_0 artículos, c_1 para los siguientes q_1 artículos, y así sucesivamente.

- Use GC para graficar las tres curvas de costos (haga $x = Q$).

$$T_j = \frac{aK}{x} + a\,c_j + \frac{hx}{2}, \text{ para } j = 1, 2, 3$$

```
a = 8000
K = 12000
h = 0.30
T1 = aK/Q + a 11 + hQ/2
T2 = aK/Q + a 10 + hQ/2
T3 = aK/Q + a 9 + hQ/2
Minimize[T1, Q > 0 && Q < 10000, Q]
Minimize[T2, Q ≥ 10000 && Q < 80000, Q]
Minimize[T3, Q ≥ 80000, Q]
```

Figura 5.10: Solución usando Mathematica

Recuerde que

$$K = 12000, \quad h = 0.30, \quad a = 8000,$$
$$c_1 = 11, \quad c_2 = 10, \quad c_3 = 9.5 \quad a = 8000$$

¿Qué pasa cuando c_3 se rebaja a \$ 9?

- Expr c = slider([9.0,9.5]);
  Expr p = slider([1.10, 2]);
  Expr K = slider([12000,13000]);
  Expr a = slider([8000,8500]);
  Expr h = slider([0.30, 1]);
  Color 2; Expr $y = (a * K)/(x) + a * 11 + (h * x)/(2)$;
  Color 3; Expr $y = (a * K)/(x) + a * 10 + (h * x)/(2)$;
  Color 4; Expr $y = (a * K)/(x) + a * 9 + (h * x)/(2)$;
  Color 5; Expr $y = (a * K)/(80000) + a * c + (h * 80000)/(2)$;
  Color 8; Expr $x = 10000$;
  Color 8; Expr $x = 80000$;

- El programa que se muestra en la Fig. 5.11 resuelve el caso de diferentes rangos de descuentos.

- (**Ejercicio**) El restaurante "Todos los gatos van al cielo" requiere de 700 kilos de carne a la semana. Cada vez que don Juan, el dueño del restaurante, hace un pedido, la empresa que le surte le cobra \$25 por el transporte de la carne y \$3 por cada kilo de carne. La entrega de la carne es inmediata. Don Juan ha estimado que el costo de mantener almacenada la carne en los congeladores es de \$0.70 por kilo por semana.

  1. Si no no se permiten faltantes, el inventario óptimo es __________ y debe ordenarse cada _______ semanas.

```
"Inventario cuando no se permiten faltantes pero hay descuentos";
"Costo de almacenar una unidad";
h  = 0.30;
"Costo fijo";
K = 12000;
"tasa de consumo";
a = 8000;
Clear[c];
"Precio del artículo según el rango";
c = {11, 10, 9.75};
"Rango para descuestos:";
R = {10000, 80000};
"Para cada función de costo obtenemos su mínimo"
T = Table[a K/Q + a c[[k]] + h Q/2, {k, 1, Length[c]}];
R = Join[{0}, R, {∞}];
For[i = 1, i ≤ Length[T], Print["T", i, " = ", T[[i]], " con ",
  R[[i]], "≤ Q <", R[[i + 1]]]; i ++]
"Minizamos cada una de estas funciones en su rango y obtenemos:"
M = Table[Minimize[T[[k]], R[[k]] ≤ Q < R[[k + 1]], Q], {k, 1, Length[R] - 1}]
For[i = 1, i ≤ Length[M], Print[M[[i]]]; i ++]
"Se nota entonces que el valor mínimo se alcanza en:"
Min[Table[M[[k]][[1]], {k, 1, Length[M]}]]
```

Figura 5.11: Inventario con rango de descuentos.

2. Si se ordena el inventario óptimo, la cantidad de carne un día después es: ____________
3. Si el costo por faltantes es de $2 por artículo por semana, el inventario óptimo es _________ y debe ordenarse cada _______ semanas.
4. Continuando con la suposición de que se permiten faltantes, se tiene que la fracción del tiempo en que no existe faltante es: ____________

- (**Ejercicio**) El restaurante "Todos los perros van al cielo" requiere de α kilos de carne a la semana. Cada vez que don Miguel, el dueño del restaurante, hace un pedido, la empresa que le surte le cobra $25 por el transporte de la carne. Si la cantidad ordenada es < 500 kilos, el precio es de $ 3 por kilo, si la cantidad ordenada es ≥ 500 pero < 1000, el precio es de $2.75 por kilo y si la cantidad ordenada es ≥ 1000, el precio es de $2.50 por kilo. La entrega de la carne es inmediata. Don Miguel ha estimado que el costo de mantener almacenada la carne en los congeladores es de $0.70 por kilo por semana.

1. Si $\alpha = 300$, el inventario óptimo es _________ y debe ordenarse cada _______ semanas. Además, para este caso, el costo total es: ___________
2. Si $\alpha = 700$, el inventario óptimo es _________ y debe ordenarse cada _______ semanas.Además, para este caso, el costo total es: ___________
3. Si $\alpha = 500$, el inventario óptimo es _________ y debe ordenarse cada _______ semanas. Además, para este caso, el costo total es: ___________
4. Cuál es menor valor entero de α para el que es mejor comprar más de 500 kilos de carne en cada pedido pero menos de 1000. ____________

- (**Ejercicio**) Una empresa está interesada en adquirir cajas para CD (10 unidades por caja). El valor unitario de cada caja depende de la cantidad adquirida de acuerdo a los valores de la siguiente tabla. La empresa requiere almacenar 10000 discos al año. El costo de emitir una orden se estima en $100. El único costo de mantención de unidades está asociado al costo de oportunidad del capital, el cual se asume 20% al año.

Cantidad de cajas ordenadas (Q)	Precio unitario [$]
$0 \leq Q100$	50.0
$100 \leq Q < 300$	49.0
$Q \geq 300$	48.5

Ayuda: En este caso se tiene: $K = 100$ y $a = 1000$ al año. El costo de mantención de inventario es $h = 0,2\%$ (del precio unitario) dependiendo del tramo.

- (**Ejercicio**) Cada año, una óptica vende 10000 marcos para lentes. El proveedor de la óptica vende cada marco a US$15. El costo de emitir una orden se estima en US$50. La óptica pretende mantener órdenes pendientes asumiendo un costo anual de US$15 sobre cada marco a causa de la eventual pérdida de futuros negocios. El costo anual de mantener una unidad en inventario se estima en el 30% del valor de compra de cada marco. ¿Cúal es el tamaño de orden óptimo? ¿Qué capacidad de almacenaje debe tener la bodega de la óptica?

Ayuda: Los parámetros para efectuar los cálculos suponiendo un modelo con escasez son: $c = 15$, $a = 10000$, $K = 50$, $h = 0.3\times?$ y $p = 15$

- (**Ejercicio**) Un almacén regional compra herramientas manuales a varios proveedores y después las distribuye, de acuerdo con la demanda, a vendedores al detalle de la región. El almacén trabaja cinco días por semana y 52 semanas por año. Solo puede recibir pedidos cuando esta en operación, los siguientes datos son estimaciones aplicables a los taladros manuales de 3/8 pulgada, con doble aislamiento, y velocidad variable. Los datos son los siguientes:

  - Demanda **diaria** promedio: 100 taladros.
  - Tiempo de entrega: 3 días
  - Costo de manejo de Inventario: \$9.40 unidad/**año**
  - Costo de hacer pedido: \$35

  Si se supone que el almacén utiliza un sistema de revisión continua,

  1. ¿qué cantidad de pedido y cuál es el punto de reorden que deberán utilizarse?
  2. Si el inventario disponible es de 40 unidades, existe un pedido en proceso por 440 taladros y no hay órdenes atrazadas ¿será conveniente hacer un nuevo pedido?

- **Observaciones**.
  Se puede hacer varias observaciones sobre los modelos de lote económico:

  1. Si se supone que el costo de producción (o de compra) de un artículo es constante a través del tiempo, no aparece en la solución óptima. Este resultado es evidente ya que, sin importar qué politica se use, se requiere la misma cantidad y, por tanto, este costo es fijo.
  2. Estos modelos se pueden ver como un caso especial de una política (s, S). Casi siempre se usa una política (s, S) en el contexto de una política de revisión periódica en donde, en el momento de la revisión, se coloca una orden para hacer que el nivel de inventario llegue a S si el nivel actual es menor o igual a s. De otra manera, no se ordena.
  3. El símbolo S denota el nivel de reorden y s denota el punto de reorden. En los modelos del lote económico, s significa el nivel del inventario en el que se ordena, de manera que cuando no se permiten faltantes, s es igual al negativo del máximo faltante; es decir,

     $$s = -MF = -\sqrt{\frac{2aKh}{p(p+h)}}$$

     Lo que es más, como los modelos del lote económico son modelos de revisión continua, cuando el nivel de inventario es igual a s se coloca una orden para reabastecerlo hasta el nivel de reorden S. Así, cuando se trata de los modelos de lote económico, la política (s, S) se puede describir como sigue: cuando el nivel de inventario llega al punto de reorden s, se coloca una orden para reabastecer hasta el nivel de reorden S ; es decir, se ordena la cantidad $Q = S - s$.

(∗) Teorema: **5.1** Sea λ, el tiempo que transcurre entre colocar y recibir una orden. Suponga que λ, es constante en el tiempo e independiente del tamaño de la orden. Si $\lambda a < Q$, entonces el punto de reorden es

$$PR = s + \lambda a,$$

en donde s se determina para la situación que no incluye tiempos de entrega.

Capítulo 6

Teoría de colas

- El esfuerzo de A. K. Erlang en 1909 para analizar congestión de tráfico telefónico con el objetivo de cumplir la demanda incierta de servicios en el sistema telefónico de Copenhague resultó en una nueva teoría llamada teoría de colas o de líneas de espera.
- Esta teoría es ahora una herramienta de valor en negocios debido a que muchos de sus problemas pueden caracterizarse, como problemas de congestión llegada–partida.
- En un sistema de colas el término **clientes** se usa para referirse a:
  1. Gente esperando líneas telefónicas desocupadas.
  2. Máquinas que esperan ser reparadas.
  3. Aviones esperando aterrizar.
  4. Gente esperando en una línea de pago en tiendas de víveres; y así sucesivamente.
- El término **instalaciones** de servicio se utiliza en sistemas de colas para referirse a:
  1. Líneas telefónicas.
  2. Talleres de reparación.
  3. Pistas de aeropuerto.
  4. Mostradores de pago; y así sucesivamente.
- Los sistemas de colas también requieren/usan a menudo una tasa variable de llegadas y una tasa variable de servicio. Por ejemplo,
  1. La demanda (tasa de llegada) a una central telefónica es 60 por minuto.
  2. Las máquinas se descomponen (o llegan a una instalación de reparación) a una tasa de 3 por semana o 15 por mes.
  3. Los aviones llegan (solicitan pista) entre 6.00 P.M. y 7.00 P.M. a una tasa de 1 por minuto.
  4. Los clientes llegan a un mostrador de pago a una tasa de 25 por hora.
- Los ejemplos de tasas de servicio podrían ser los siguientes:

1. Un sistema telefónico entre dos ciudades puede manejar 90 llamadas por minuto.
2. Una instalación de reparación puede, en promedio, reparar máquinas a una tasa de 4 por día (o cuatro por ocho horas).
3. Una pista de aeropuerto puede manejar (aterrizar) dos aviones por minuto (o uno cada 30 segundos, ó 120 por hora).
4. En promedio, un mostrador de pago puede procesar un cliente cada 4 minutos.

- La congestión en las líneas de espera puede ser creada por clientes que esperan en la línea debido a que hay muchos que llegan requiriendo servicio a instalaciones inadecuadas de servicio. Esto es, la mayoría de las veces, la tasa de llegada excede a la tasa de servicio. Esto hace que se formen líneas de espera (o colas), que resulta en que algunos clientes se vayan, de algunos sistemas, **perdiendo** ingresos.

- Las facilidades de servicio pueden estar vacías (esperando clientes) debido a demasiadas instalaciones de servicio o a las instalaciones existentes tienen una tasa total de servicio que excede la tasa de demanda (o tasa de llegadas). De este modo, el sistema está **sobrecapacitado**.

- La situación ideal es cuando las instalaciones están esperando solo temporalmente a los clientes y estos sólo esperan servicio temporalmente. Este caso es típico de un "sistema balanceado" que tiende a un sistema estable o en equilibrio.

- En resumen, lo que algunas veces se denomina **crítico** para un problema de colas (o líneas de espera) es una decisión de compromiso: comparando el costo de suministrar un nivel de servicio (por ejemplo, 10 líneas telefónicas, 15 reparadores, 4 pistas de aterrizaje, 9 mostradores de pago, y así sucesivamente) con el costo de espera (clientes insatisfechos, líneas de producciones detenidas, pérdida de ingreso, etc.).

6.1 Características de un sistema de colas

- Un sistema de colas se compone de un conjunto de unidades físicas operando al unísono.

- Primero, el análisis de colas requiere entender el comportamiento del sistema **prediciendo** primero el comportamiento de éste.

- Posteriormente, utilizando estas predicciones, el analisis de colas comprende el estudio del **balance** entre los costos de los clientes que esperan el servicio y los costos de las instalaciones de servicio.

- Ha una gran variedad de sistemas de colas (modelos). Algunos de los sistemas más estándar se ilustran en las Fig. 6.1 y Fig. 6.2. Ver Pág. 261 y Pág. 262.

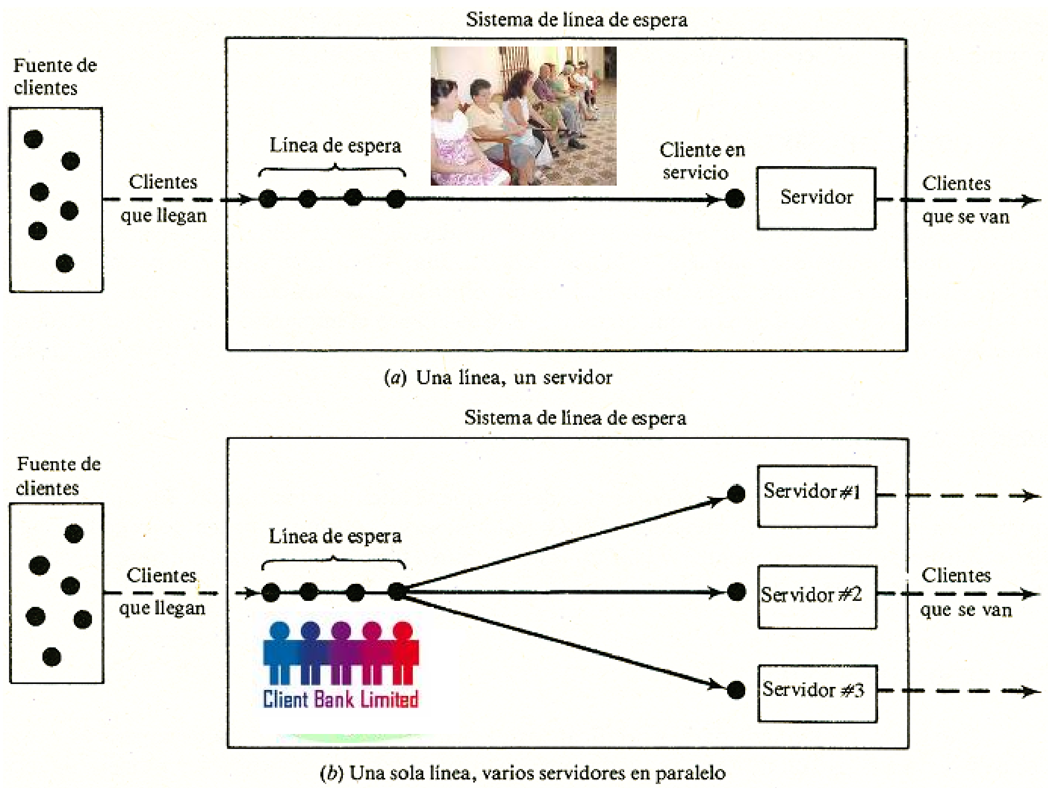


Figura 6.1: Sistemas de colas.

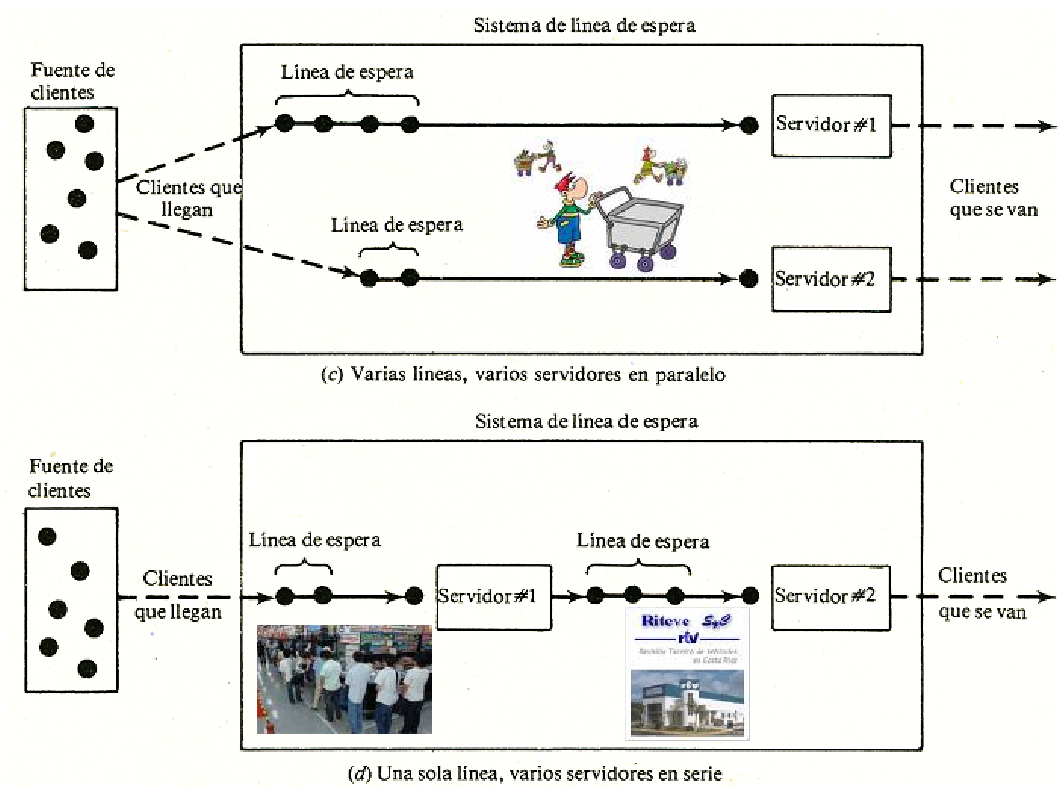


Figura 6.2: Sistemas de colas.

6.2 Sistema de colas de Poisson de un solo servidor

- En un sistema de colas de Poisson de un solo servidor, se hacen las siguientes suposiciones con respecto a la tasa en que los clientes llegan y la tasa de servicio de los clientes.

Suposición 1 : Llegada de clientes: Suponemos que los clientes llegan de acuerdo a una distribución Poisson.

- Para explicar esto es, sea

$$A = \text{número de clientes que llegan en un intervalo específico de tiempo.}$$

Entonces

$$P\{A = n\} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}, \quad (n = 0, 1, ...,)$$

donde λ es la tasa esperada (promedio) de llegada en un intervalo específico de tiempo.

(**Ejercicio**) Grafique esta función en GC usando el código siguiente.

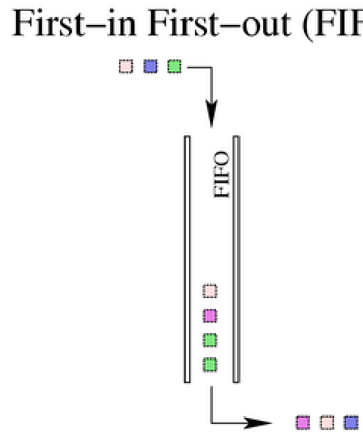
```
Expr a=slider([1.10]);
Color 2; Expr y =[e^(-a)* a^x]/[x!], x > 0, x< 10 ;
```

- La suposición de que los clientes lleguen para ser servidos de acuerdo a una distribución Poisson implica lo siguiente:
  - Las llegadas ocurren "aleatoriamente".
  - La probabilidad de una llegada durante un intervalo específico de tiempo permance constante y es independiente del número de llegadas previas y de la duración del tiempo de espera.

Ejemplo **6.1** Suponga que la tasa esperada de llegada es de 3 clientes por minuto, $\lambda = 3$. ¿Cuál es el tiempo esperado entre llegada, de los clientes individuales?

Solución: Si la tasa esperada de llegada es de 3 clientes por minuto, el tiempo promedio (o esperado) entre llegadas es $1/\lambda = \frac{1}{3}$ minuto, ó 20 segundos entre clientes. Así, si λ es la tasa de llegada esperada (o promedio), $1/\lambda$ es el tiempo esperado entre dos llegadas sucesivas.

Suposición 2 *Disciplina de la cola*: Estamos suponiendo que cuando un cliente llega al sistema la regla de servicio es el primero que llega, el primero que se sirve: **FIFO**. Estamos suponiendo que ningún cliente deja el sistema antes de que reciba servicio.



Suposición 3 *Número de servidores*: Supongamos que hay un servidor en el sistema.

Suposición 4 *Distribución del servicio*: El tiempo de servicio se supone que sigue una distribución exponencial negativa. Para explicar esto sea S es el tiempo de servicio para un cliente típico. Entonces

$$P\{S \leq t\} = 1 - e^{-t/\mu} \qquad (\text{para } t \geq 0),$$

donde μ es la tasa de servicio esperado (o promedio).

(**Ejercicio**) Grafique esta función en GC usando el código siguiente.

```
Expr a=slider([1.10]);
Color 3; Expr y =1-e^(-x/a), x > 0, x< 10 ;
```

EJEMPLO **6.2** Supongamos que el servicio puede realizarse a una tasa esperada de $\mu = 4$ por minuto. ¿Cuál es el tiempo esperado entre dos servicios consecutivos?

Solución: Puesto que la tasa de servicio es en promedió $\mu = 4$ por minuto, el tiempo esperado entre dos servicios consecutivos es $1/\mu = \frac{1}{4}$ minuto, o 15 segundos.

- Hay un número de estadísticas importantes que son útiles para evaluar un sistema de colas. Primero, ¿puede un solo servidor manejar la demanda? Comparemos la tasa media de llegada λ (por unidad de tiempo) con la tasa media de servicio μ por unidad de tiempo de la manera siguiente,

$$U = \frac{\lambda}{\mu} \qquad (\text{factor de utilización})$$

dando una medida de la utilización del sistema denominada factor de utilización.

- Si $\lambda > \mu$, esto es, $U > 1$, esperaríamos que el sistema estuviera **sobrecongestionado** la mayoría de las veces.

- Si $\lambda < \mu$, esto es, $U < 1$, esperaríamos que el sistema **no** estuviera **congestionado**, la mayoría de las veces.

- Por ejemplo, si $\lambda = 30$ por hora y $\mu = 40$ por hora, la utilización

$$U = \lambda/\mu = \frac{30}{40} = 0.75.$$

Así esperaríamos que el servidor estuviera ocupado el 75% del tiempo.

EJEMPLO **6.3** Si la tasa de llegada es $\lambda = 30$ por hora y la tasa promedio de servicio es 40 por hora, ¿cuál es la probabilidad de que un cliente que llega no tenga que esperar servicio?

Solución: Sea $P_0 =$ la probabilidad de que un cliente que llega no tenga que esperar servicio. Esto es, P_0 es la probabilidad de que el sistema esté vacío. Entonces puede probarse que

$$P_0 = 1 - U = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

Así, si $\lambda = 30$ por hora y $\mu = 40$ por hora, entonces

$$P_0 = 1 - \frac{30}{40} = 0.25$$

Así, en promedio, el sistema estará vacío el 25% del tiempo.

- La definición de probabilidad P_0 del ejemplo anterior sugiere las probabilidades adicionales siguientes. Sea P_n la probabilidad de que haya n clientes en el sistema (en la cola y siendo servidos). Entonces puede demostrarse que

$$\begin{aligned} P_n = P_{n-1} \cdot U = \ldots = P_0 \cdot U^n &= (1-U)U^n \\ &= \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \end{aligned}$$

EJEMPLO **6.4** Dado una tasa de llegada de 30 por hora y dado que la tasa promedio de servicio es 40 por hora, ¿cuál es la probabilidad de que haya 0, 1, 2, 3, y 4 clientes en el sistema (en la cola y siendo servidos)?

Solución: Tenemos aquí que $\lambda = 30$ y $\mu = 40$. Así $U = \dfrac{30}{40} = 0.75$ y

- $P_0 = 1 - U = 0.25$
- $P_1 = (1-U)U^1 = (0.25)(0.75) = 0.1875$
- $P_2 = (1-U)U^2 = (0.25)(0.75)^2 = 0.1406$
- $P_3 = (1-U)U^3 = (0.25)(0.75)^3 = 0.1055$
- $P_4 = (1-U)U^4 = (0.25)(0.75)^4 = 0.0791.$

- Algunas estadísticas importantes que describen el comportamiento de un sistema de colas de Poisson de un solo servidor se dan a continuación.

- $E(N)$ = número medio (o valor esperado o promedio) de clientes en el sistema esperando y recibiendo servicio
$$E(N) = \frac{U}{1-U} = \frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$
o bien $E(N) = \dfrac{\lambda}{\mu-\lambda}$.
- $E(L)$ = longitud media (o esperada o promedio de la línea de espera (no incluyendo los clientes en servicio) de la línea de espera
$$E(L) = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$
- $E(W)$ = tiempo medio de espera (o promedio esperado) del que llega a la cola
$$E(W) = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$
- $E(T)$ = tiempo promedio que, quien llega, gasta en el sistema
$$E(T) = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

Ejemplo **6.5** Si $\lambda = 30$ por hora y $\mu = 40$ por hora, ¿cuáles son $E(N)$, $E(L)$, $E(W)$ y $E(T)$?

Solución:

En este caso el número promedio de clientes en el sistema es
$$E(N) = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{30}{40-30} = 3 \text{ clientes}$$
El número promedio de clientes en la línea de espera
$$E(L) = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{(30)^2}{40(40-30)} = 2.25 \text{ clientes}$$
El tiempo promedio de espera en la cola
$$E(W) = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{30}{40(40-30)} = 0.075 \text{ horas}$$
o bien, 4.5 minutos.

Finalmente el tiempo promedio de espera en el sistema
$$E(T) = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{40-30} = 0.1 \text{ horas}$$
o bien 6 minutos.

EJEMPLO **6.6** La Nebraska Steak House se enfrenta al problema de determinar el número de meseros que debe utilizar en las horas pico. La Gerencia ha observado que el tiempo entre llegadas de los clientes es de cuatro minutos y el tiempo promedio para recibir y procesar un pedido es de 2 minutos. También ha observado que el patrón del número de llegadas sigue la distribución de Poisson y que los tiempos de servicio (o tiempo de procesamiento de un pedido) siguen una distribución exponencial negativa.

1. ¿Cuál es la utilización actual de la capacidad de servicio existente?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente que llega sea servido inmediatamente?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente que llega encuentre una línea de espera de longitud n? $n = 1, 2, \ldots$
4. ¿Cuál es el número esperado de clientes en el sistema?
5. ¿Cuál es la longitud esperada o promedio de la cola?
6. ¿Cuál es el tiempo promedio que un cliente debe esperar en el sistema?
7. ¿Cuál es el tiempo promedio de espera que un cliente gasta en la cola?

Solución:

Tenemos entonces que:

- $\lambda =$ tasa de llegada por minuto $= \frac{1}{4}$ cliente por minuto
- $\mu =$ tasa de servicio por minuto $= \frac{1}{2}$ (se sirve a 0.5 cliente por minuto)
- $P\{A = n\} = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = \dfrac{e^{-0.25}0.25^n}{n!}$
- $P\{T \leq t\} = 1 - e^{2t}$, $(\ t \geq 0)$.

1. ¿Cuál es la utilización actual de la capacidad de servicio existente?

$$U = \text{utilización} = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0.25}{0.50} \quad \text{o bien} \quad 50\%$$

2. ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente que llega sea servido inmediatamente?

$$\begin{aligned} &P(\text{el cliente que llega será servido}) \\ &\quad = P_0 = \text{probabilidad de que el sistema no esté ocupado} \\ &\quad = 1 - U = 1 - 0.50 = 0.50 \text{ o bien } 50\%. \end{aligned}$$

3. ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente que llega encuentre una línea de espera de longitud n? $n = 1, 2, \ldots$

$$P_1 = P_0U^1 = (0.5)(0.5) = 0.25$$

$$P_2 = P_0U^2 = (0.5)(0.5)^2 = 0.125$$

$$P_3 = P_0 U^3 = (0.5)^4 = 0.0625$$

y así sucesivamente. Así, $P_n = (0.5)^{n+1}$ = probabilidad de n clientes en el sistema (incluyendo los clientes que reciben servicio). Por consiguiente, la probabilidad de que un cliente que llega encuentre n clientes esperando servicio es igual a la probabilidad de $n+1$ clientes en el sistema (uno siendo servido más n esperando) $= P_{n+1} = (0.5)^{n+2}$.

4. ¿Cuál es el número esperado de clientes en el sistema?

$$E(N) = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{0.25}{0.5 - 0.25} = 1.0 \quad \text{cliente}$$

5. ¿Cuál es la longitud esperada o promedio de la cola?

$$E(L) = \text{longitud esperada de la cola} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{(0.25)^2}{0.5(0.5 - 0.25)} = 0.5 \text{ cliente.}$$

6. ¿Cuál es el tiempo promedio que un cliente debe esperar en el sistema?

$$E(T) = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{0.5 - 0.25} = 4 \text{ minutos.}$$

7. ¿Cuál es el tiempo promedio de espera que un cliente gasta en la cola?

$$E(W) = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{0.25}{0.5(0.5 - 0.25)} = \frac{0.25}{0.125} = 2 \text{ minutos.}$$

Conclusión: Observamos, basados en nuestros cálculos, que el número esperado de clientes en el sistema $E(N)$ es 1 y que el tiempo promedio que un cliente gasta en el sistema $E(T)$ es 4 minutos. Si el restaurante no es de comidas rápidas, estas estadísticas están dentro de lo aceptable. Sin embargo, si el restaurante es de comidas rápidas y la competencia con otros negocios es considerable, la gerencia debe considerar la posibilidad de contratar un segundo mesero.

Como se observa, la decisión depende la naturaleza del negocio y otros factores que rodean el ambiente donde se produce la cola.

Ejemplo **6.7** (¿Quién es el mejor servidor?)
La gerencia tiene que decidir a quién contrata entre dos mecánicos, X o Y. La frecuencia de daños en las máquinas en la planta se sabe que obedece a una distribución Poisson con una tasa $\lambda = 1$ máquina por hora. La compañía pierde ingresos por máquinas paradas a razón de \$ 25 por hora. El mecánico X pide \$ 20 por hora y el mecánico Y pide \$ 12 por hora. Se sabe que X es capaz de reparar las máquinas a una tasa de 1.8 máquinas por hora y Y es capaz de repararlas a una tasa de 1.2 máquinas por hora.

1. ¿Cuál mecánico X o Y debe contratarse?

2. A cuánto debe, el mecánico Y, aumentar su velocidad de atención para equiparar los costos con el mecánico X
3. Si mantemos las tasas originales de atención de los mecánicos X y Y, cuál deber ser la tasa de llegada para que se igualen los costos.

Nota: La meta de la gerencia es minimizar los costos diarios (= costo mano de obra + costo del tiempo no productivo de las máquinas). Suponga que el día laboral consta de 8 horas.

Solución: (a) Para resolver este problema, necesitamos comparar el costo diario esperado total del mecánico X con el costo diario esperado total del mecánico Y y elegir el menor de los dos costos:

$$\begin{aligned}&\text{costos esperados diarios totales} = (\text{salarios totales diarios})\\&+ (\text{costo de máquinas esperando ser reparadas y en reparación})\end{aligned}$$

Puesto que $\lambda = 1$, tenemos

$$E(N) = \frac{1}{1.8 - 1.0} = 1.25 \quad \text{máquinas por hora para} \quad X$$
$$E(N) = \frac{1}{1.2 - 1.0} = 5.00 \quad \text{máquinas por hora para} \quad Y$$

Si contratamos a X, el número esperado de máquinas no productivas (medido en horas por día) en un día de 8 horas es

$$8 \times (1.25) = 10 \text{ horas.}$$

El costo total diario si se contrata X es igual al costo mano de obra sumado con el costo debido al tiempo no productivo de la máquina

$$\text{costo total diario} = \underbrace{8(\$20)}_{\text{salario}} + \underbrace{10(\$25)}_{\text{pérdidas}} = \$410.$$

Si Y se contrata, el tiempo no productivo de máquina por día es $8 \times (5.0) = 40$ El costo diario total para Y es:

$$\text{costo total diario} = \underbrace{8(\$12)}_{\text{salario}} + \underbrace{40(\$25)}_{\text{pérdidas}} = \$1096.$$

Conclusión: Así, X es más barato que Y.

(b) Para lograr igualar los costos, debe resolver la ecuación:

$$410 == 12 * 8 + \frac{8 \cdot 25}{\mu - 1}$$

Esto produce $\mu = 1.63694$.

(c) En este caso para igualar los costos se debe resolver la ecuación:

$$12 * 8 + \frac{\lambda}{1.8 - \lambda} = 20 * 8 + \frac{\lambda}{1.2 - \lambda}$$

Al resolver esta ecuación obtenemos $\lambda = 0.492916$ y $\lambda = 4.38208$. Descartamos $\lambda = 4.38208$ pues excede la tasa de servicio. **Nota**: Es importante enfatizar que, en general, no podemos controlar la velocidad con la que se descomponen las máquinas.

- (**Ejercicios**)

- Identifique los clientes y los servidores en cada uno de los siguientes sistemas de colas:

    1. Una caseta de peaje en una carretera interestatal.
    2. Un servicio de ambulancias.
    3. Un muelle de descargue de barcos.
    4. Un equipo secretarial de mecanógrafas.

- Una tripulación de una línea de vuelo de la fuerza aérea estima durante un período de alerta que pueden prestar servicio aéreo a la tasa de un avión cada 6 minutos. Durante un período de alerta de 24 horas se estima que cada hora aterrizarán siete aviones. La tripulación opera come un equipo simultáneamente en cada avión. Suponga aterrizajes de Poisson y una tasa de servicio exponencial. Encuentre:

    1. Utilización de cada una de las tripulaciones de la línea de vuelo.
    2. Número promedio de aviones que esperan servicio.
    3. Tiempo promedio que un avión está esperando servicio.
    4. El tiempo total que un avión gasta en el sistema (= tiempo de espera + tiempo de servicio).

- Un centro de recepción de emergencia de un hospital de una gran ciudad tiene una tasa esperada de llegada de cinco casos por hora (Poisson). La estadística pasada muestra que los tiempos de servicio son en promedio de seis por hora (exponencial).

    1. ¿Cuántos casos están esperando, en promedio, la atención de un médico?
    2. ¿Cuál es el tiempo promedio de espera en el centro hasta que un médico atiende una llegada?
    3. ¿ Cuál es el número promedio de casos que se tratan?

- Durante la hora “pico” entre 7 A.M. y 8:30 A.M., la llegada de clientes a un restaurante de autoservicio se puede caracterizar por una distribución de Poisson, en donde la tasa promedia de llegada es de cinco clientes por períodos de 6 minutos. Si el tiempo promedio de servicio es 0.5 minutos, ¿cuál es la probabilidad de que menos de cuatro clientes estén esperando?

- FNCB de Harrisburgh planea operar una sucursal bancaria para servicio de automovilistas (de un solo servidor) en un centro comercial suburbano. Las estadísticas indican que los clientes llegan en promedio a una tasa de 20 por hora (Poisson). También, se estima que se necesitan en promedio 2 minutos para atender un cliente (exponencial).

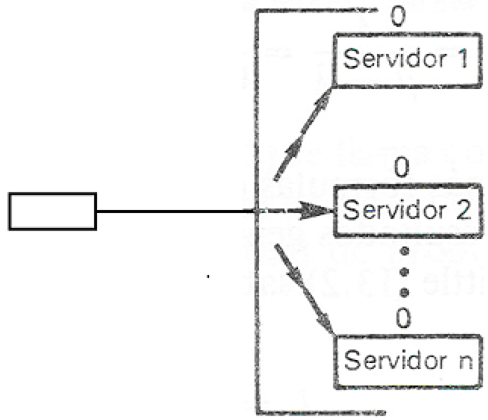


Figura 6.3: Línea de espera con multiservicio

1. ¿Qué fracción de tiempo estará vacía la sucursal?
2. ¿Cuál es el tiempo promedio de espera de un cliente?

- Suponga en el Problema anterior que FNCB instala estaciones de atención idénticas para automovilistas (paralelas). ¿Cómo cambiaría sus respuestas del Ejercicio anterior este aumento de capacidad?

6.3 Línea de espera con varios servidores

- En la figura 6.3 se ilustra el sistema de un hospital en el que la hay varias personas haciendo fila en un laboratorio para gestionar análisis de sangre. Obsérvese que cada paciente se forma en una sola línea y que cuando llega a la cabeza de ella, entra al primer cuarto de servicio que esté disponible. Este tipo de sistema no debe ser confundido con aquéllos en los que se forma una línea de espera frente a cada servidor, como en las tiendas de autoservicio.

- Supóngase que el tiempo de llegada es dado mediante una distribución Poisson con parámetro $\lambda = 0.20$. Esto implica que llega un nuevo paciente cada 5 minutos en promedio, ya que

$$\text{tiempo medio de llegáda} = l/\lambda = 1/0.20 = 5$$

Supóngase también que los servidores son idénticos y que el tiempo de servicio es dado por una distribución exponencial con parámetro$\mu = 0.125$. Esto implica que el tiempo medio de servicio es de 8 minutos, ya que

$$\text{tiempo de servicio medio de un servidor individual} = 1/\mu = 1/0.125 = 8$$

Adviértase que, si hubiera sólo un servidor, la línea de espera crecería sin límite, ya que $\lambda > \mu$ $(0.20 > 0.125)$. Pero, para una línea de espera con servidor múltiple, existirá un estado estacionario en tanto que $\lambda < \mu s$, donde s es el número de servidores. Por ejemplo, si hay dos servidores, $0.20 < 2(0.125)$, o sea $0.20 < 0.25$.

- Queremos encontrar los valores de $E(N)$, $E(L)$, $E(W)$ y $E(T)$. No obstante, dado que es una línea de espera con multiservicio, deberemos usar fórmulas diferentes. Para evaluar esas fórmulas es conveniente empezar con la que expresa a P_0, la probabilidad de que el sistema se encuentre vacío. Para este modelo,

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!}\left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{s\mu}}\right)\right]^{-1}$$

y $E(L)$, el número previsto de personas en la línea de espera será

$$E(L) = P_0\left[\frac{\lambda^{s+1}}{\mu^{s-1}(s-1)!\,(\mu s-\lambda)^2}\right]$$

o bien

$$E(L) = \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!}\left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{s\mu}}\right)\right]^{-1}\left[\frac{\lambda^{s+1}}{\mu^{s-1}(s-1)!\,(\mu s-\lambda)^2}\right]$$

- Podemos hallar $E(W)$ mediante la relación $E(W) = \dfrac{E(L)}{\lambda}$ o bien

$$E(W) = \frac{P_0}{\lambda}\cdot\left[\frac{\lambda^{s+1}}{\mu^{s-1}(s-1)!\,(\mu s-\lambda)^2}\right]$$

o bien, en forma más explícita

$$E(W) = \frac{1}{\lambda}\cdot\left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!}\left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{s\mu}}\right)\right]^{-1}\cdot\left[\frac{\lambda^{s+1}}{\mu^{s-1}(s-1)!\,(\mu s-\lambda)^2}\right]$$

- Para calcular el tiempo promedio de estadía en el sistema usamos la fórmula $E(T) = E(W) + \dfrac{1}{\mu}$

- Finalmente brindamos la fórmula para calcular la probabilidad de estado estacionario de que haya exactamente j servidores ocupados:

$$P_j = \frac{(\lambda/\mu)^j}{j!}\cdot\left[\sum_{k=0}^{s}\frac{(\lambda/\mu)^k}{k!}\right]^{-1}$$

Ejemplo **6.8** Suponga que en un banco hay dos cajeros que atienden a sus clientes mediante una fila única. Suponga que las llegadas siguen una distribución de Poisson con $\lambda = 0.20$ clientes por minuto y que los tiempos de servicio (o tiempo de atención) siguen una distribución exponencial negativa con $\mu = 0.125$ por minut por cajero. Halle la probabilidad de que no hayan clientes en la fila, la utilidad del sistema, la longitud promedio de la fila, el tiempo promedio de espera en la fila, el tiempo promedio de estadía en el sistema y las probabilidades de estado estacionario de que 0, 1 o 2 servidores estén ocupados. ¿Cuál debería ser la velocidad de atención de los servidores para lograr que el tiempo de estadía en el sistema sea 15 minutos?

Solución: Aplicando las fórmulas vistas obtenemos:

- ◇ Probabilidad de que no hayan clientes en la fila: 11.11%
- ◇ Utilidad del sistema: 88.8889%
- ◇ Longitud promedio de la fila: 2.84444
- ◇ Tiempo promedio de espera en la fila: 14.2222 minutos
- ◇ Tiempo promedio de estadía en el sistema: 22.2222 minutos
- ◇ Probabilidad (de estado estacionario) P_j de que haya exactamente j servidores ocupados:

P_0	0.257732
P_1	0.412371
P_2	0.329897

- ◇ Resolvemos para μ la ecuación $E(T) = 15$. Esto nos da $\mu = 0.13874$.

Capítulo 7
Simulation

- Simulation is very powerful and widely used management science technique for the analysis and study of complex systems: In previous chapters, we were concerned with the formulation of models that could be solved analytically. In almost all of those models, our goal was to determine optimal solutions.

- However, because of complexity, stochastic relations, and so on, not all real-world problems can be represented adequately in the model forms of the previous chapters. Attempts to use analytical models for such systems usually require so many simplifying assumptions that the solutions are likely to be inferior or inadequate for implementation. Often, in such instances, the only alternative form of modeling and analysis available to the decision maker is simulation.

- Simulation may be defined as a technique that imitates the operation of a real–world system as it evolves over time. This is normally done by developing a simulation model.

- A simulation model usually takes the form of a set of assumptions about the operation of the system, expressed as mathematical or logical relations between the objects of interest in the system.

- In contrast to the exact mathematical solutions available with most analytical models, the simulation process involves executing or running the model through time, usually on a computer, to generate representative samples of the measures of performance. In this respect, simulation may be seen as a sampling experiment on the real system, with the results being sample points.

- For example, to obtain the best estimate of the mean of the measure of performance, we average the sample results. Clearly, the more sample points we generate, the better our estimate will be. However, other factors, such as the starting conditions of the simulation, the length of the period being simulated, and the accuracy of the model itself, all have a bearing on how good our final estimate will be. We discuss such issues later in the chapter.

- As with most other techniques, simulation has its advantages and disadvantages. The major advantage of simulation is that simulation theory is relatively **straightforward**. In general, simulation methods are easier to apply than analytical methods. Whereas analytical models may require us to make many simplifying assumptions, simulation models have few such restrictions, thereby allowing much greater fexibility in representing the real system.

- Once a model is built, it can be used repeatedly to analyze different policies, parameters, or designs.
- For example, if a business firm has a simulation model of its inventory system, various inventory policies can be tried on the model rather than taking the chance of experimenting on the real-world system.
- However, it must be emphasized that simulation is **not** an optimizing technique. It is most often used to analyze "what if" types of questions.
- Optimization with simulation is possible, but it is usually a slow process. Simulation can also be costly. However, with the development of special purpose simulation languages, decreasing computational cost, and advances in simulation methodologies, the problem of cost is becoming less important.
- In this chapter, we focus our attention on simulation models and the simulation technique. We present several examples of simulation models and explore such concepts as random numbers, time flow mechanisms, Monte Carlo sampling, simulation languages, and statistical issues in simulation.

7.1 Basic terminology

- We begin our discussion by presenting some of the terminology used in simulation. In most simulation studies, we are concerned with the simulation of some system. Thus, in order to model a system, we must understand the concept of a system. Among the many different ways of defining a system, the most appropriate definition for simulation problems is the one proposed by Schmidt and Taylor (1970).
- **Definición:** 7.1 A **system** is a collection of entities that act and interact toward the accomplishment of some logical end.

  ◇
- In practice, however, this definition generally tends to be more flexible. The exact description of the system usually depends on the objectives of the simulation study.
- For example, what may be a system for a particular study may be only a subset of the overall system for another. Systems generally tend to be dynamic–their status changes over time. To describe this status, we use the concept of the state of a system.
- **Definición:** 7.2 The **state** of a system is the collection of variables necessary to describe the status of the system at any given time.

  ◇
- As an example of a system, let us consider a bank. Here, the system consists of the servers and the customers waiting in line or being served. As customers arrive or depart, the status of the system changes.

- To describe these changes in status, we require a set of variables called the **state variables**. For example, the number of busy servers, the number of customers in the bank, the arrival time of the next customer, and the departure time of the customers in service together describe every possible change in the status of the bank. Thus, these variables could be used as the state variables for this system.

- In a system, an object of interest is called an **entity**, and any properties of an entity are called attributes. For example, the bank's customers may be described as the entities, and the characteristics of the customers (such as the occupation of a customer) may be defined as the **attributes**.

- Systems may be classified as discrete or continuous.

- **Definición:** 7.3 A **discrete system** is one in which the state variables change only at discrete or countable points in time.

  ◇

- A bank is an example of a discrete system, since the state variables change only when a customer arrives or when a customer finishes being served and departs. These changes take place at discrete points in time.

- **Definición:** 7.4 A continuous system is one in which the state variables change continuously over time.

  ◇

- A chemical process is an example of a continuous system. Here, the status of the system is changing continuously over time. Such systems are usually modeled using differential equations. We do not discuss any continuous systems in this chapter.

- There are two types of simulation models, static and dynamic.

- **Definición:** 7.5 A **static** simulation model is a representation of a system at a particular point in time.

  ◇

- We usually refer to a static simulation as a **Monte Carlo** simulation.

- **Definición:** 7.6 A dynamic simulation is a representation of a system as it evolves over time.

  ◇

- Within these two classifications, a simulation may be **deterministic** or **stochastic**.

- A deterministic simulation model is one that contains **no** random variables; a stochastic simulation model contains one or more random variables.

- Discrete and continuous simulation models are similar to discrete and continuous systems.

- In this chapter, we concentrate mainly on discrete stochastic models. Such models are called discrete–event simulation models; discrete–event simulation concerns the modeling of a stochastic system as it evolves over time by a representation in which state variables change only at discrete points in time.

7.2 An example of a discrete–event simulation

- Before we proceed to the details of simulation modeling, it will be useful to work through a simple simulation example in order to illustrate some of the basic concepts in discreteevent simulation.

- The model we have chosen as our initial example is a single–server queuing system. Customers arrive into this system from some population and either go into service immediately if the server is idle or join a waiting line (queue) if the server is busy.

- Examples of this kind of a system are a one–person barber shop, a small grocery store with only one checkout counter, and a single ticket counter at an airline terminal.

- In that chapter, we used an analytical model to determine the various operating characteristics ofthe system. However, we had to make several restrictive assumptions in orderto use queuing theory.

  In particular, when we studied an queue system, we had to assume that both interarrival times and service times were exponentially distributed. In many situations, these assumptions may not be appropriate.

- For example, arrivals at an airline counter generally tend to occur in bunches, because of such factors as arrivals of shuttle buses and connecting flights.

- For such a system, an <u>empirical</u> distribution of arrival times must be used, which implies that the analytical model from queuing theory is no longer feasible.

- With simulation, any distribution of interarrival times and service times may be used, thereby giving much more flexibility to the solution process.

- To simulate a queuing system, we first have to describe it. For this single–server system, we assume arrivals are drawn from an infinite calling population.

- There is unlimited waiting room capacity, and customers will be served in the order of their arrival- that is, on a first come, first served (FCFS) basis.

- We further assume that arrivals occur one at a time in a random fashion, with the distribution of interarrival times as specified in Table in Fig. 7.1.

- All arrivals are eventually served with the distribution of service times shown in table in Fig. 7.2. Service times are also assumed to be random.

INTERARRIVAL TIME (Minutes)	PROBABILITY
1	0.20
2	0.30
3	0.35
4	0.15

Figura 7.1: Interarrival Time Distribution

SERVICE TIME (Minutes)	PROBABILITY
1	.35
2	.40
3	.25

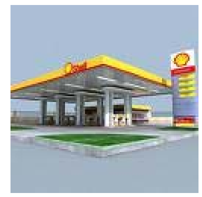


Figura 7.2: Service Time Distribution

- After service, all customers return to the calling population. This queuing system can be represented as shown in Fig. 7.3.
- Before dealing with the details of the simulation itself, we must define the **state** of this system and understand the concepts of **events** and **clock time** within a simulation. The concept of clock time will become clearer as we work through the example.
- (**States**) For this example, we use the following variables to define the state of the system:
  1. the number of customers in the system;
  2. the status of the server-that is, whether the server is busy or idle; and
  3. the time of the next arrival.

  Nota: Cada vez que cambia alguna de estas características, cambia el estado del modelo.
- Closely associated with the state of the system is the concept of an **event**. An event is defined as a situation that causes the state of the system to change instantaneously.

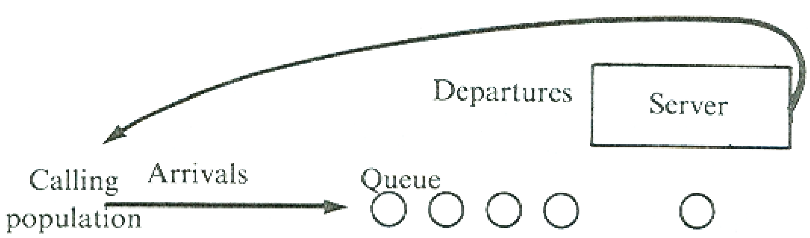


Figura 7.3: Single-Server Queuing System

- (**Event**) In the single-server queuing model, there are only two possible events that can change the state of the system: an arrival into the system and a departure from the system at the completion of service.
- In the simulation, these events will be scheduled to take place at certain points in **time**. All the information about them is maintained in a list called the **event list**.
- Within this list, we keep track of the type of events **scheduled** and, more important, the time at which these events are scheduled to take place. Time in a simulation is maintained using a variable called the **clock time**.
- We begin this simulation with an **empty system** and arbitrarily assume that our first event, an arrival, takes place at clock time 0.
- This arrival finds the server idle and enters service immediately.
- Arrivals at other points in time may find the server either idle or busy. If the server is idle, the customer enters service. If the server is busy, the customer joins the waiting line. These actions can be summarized as shown in Figure 7.4.

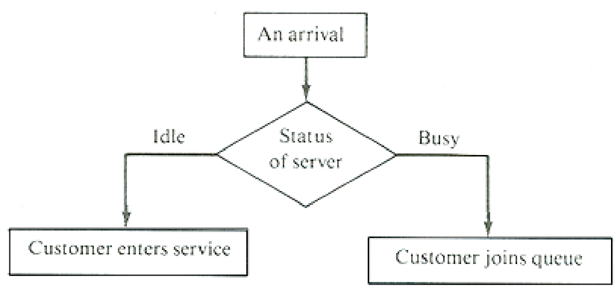


Figura 7.4: Flowchart for an Arribal

- Next, we schedule the departure time of the first customer. This is done by randomly generating a service time from the service time distribution (described later in the chapter) and setting the departure time as

$$\text{Departure time} = \text{clock time now} + \text{generated service time} \tag{7.1}$$

- Also, we now schedule the next arrival into the system by randomly generating an interarrival time from the interarrival time distribution and setting the arrival time as

$$\text{Arrival time} = \text{clock time now} + \text{generated interarrival time} \tag{7.2}$$

- If, for example, we have generated a service time of 2 minutes, then the departure time for the first customer will be set at clock time 2.
- Similarly, if we have generated an interarrival time of 1 minute, the next arrival will be scheduled for clock time l.
- Both these events and their scheduled times are maintained on the event **list**. Once we have completed all the necessary actions for the first arrival, we **scan** the event list to determine the next scheduled event and its time.
- If the next event is determined to be an arrival, we move the clock time to the scheduled time of the arrival and go through the preceding sequence of actions for an arrival.
- If the next event is a departure, we move the clock time to the time of the departure and process a departure.
- For a departure, we check whether the length of the waiting line is greater than zero. If it is, we remove the first customer from the queue and begin service on this customer by setting a departure time using Eq. (7.1). If no one is waiting, we set the status of the system to idle. These departure actions are summarized in Figure 7.5.

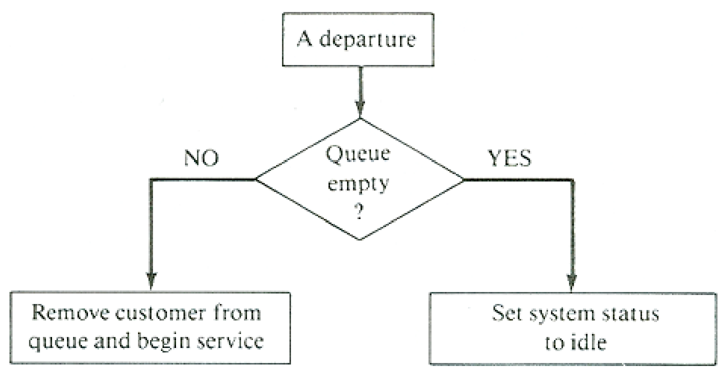


Figura 7.5: Flowchart for an Departure

- This approach of simulation is called the next-event time-advance mechanism, because of the way the clock time is updated.
- We advance the simulation clock to the time of the most **imminent** event — that is, the first event in the event list.
- Since the state variables change only at event times, we **skip** over the periods of **inactivity** between the events by jumping from event to event.
- As we move from event to event, we carry out the appropriate actions for each event, induding any scheduling of future events.

- We continue in this manner until some prespecified stopping condition is satisfied.
- However, the procedure requires that at any point in the simulation, we have an arrival and a departure scheduled for the future. Thus, a future arrival is **always** scheduled when processing a new arrival into the system.
- **Nota**: Siempre es posible decir que abrá una llegada. No ocurre lo mismo con las salidas.
- A departure time, on the other hand, can **only** be scheduled when a customer is brought into service. Thus, if the system is **idle**, no departures can be scheduled. In such instances, the usual practice is to schedule a **dummy** departure by setting the departure time equal to a very large number—say, 9999 (or larger if the clock time is likely to exceed 9999). This way our two events will consist of a real arrival and a dummy departure.
- The **jump** to the next event in the next-event mechanism may be a large one or a small one; that is, the jumps in this method are variable in size.
- We **contrast** this approach with the fixed-increment time–advance method. With this method, we advance the simulation clock in increments of Δ_t time units, where Δ_t is some appropriate time unit, usually 1 time unit.
- After each update of the clock, we check to determine whether any event is scheduled to take place at the current clock time.
- If an event is scheduled, we carry out the appropriate actions for the event. If none is scheduled, or if we have completed all the required actions for the current time, we update the simulation cIock by Δ_t units and repeat the process.
- As with the next–event approach, we continue in this manner until the prespecified **stopping** condition is reached. The fixed-increment time advance mechanism is often simpler to comprehend, because of its fixed steps in time.
- For most models, however, the next event mechanism tends to be more **efficient** computationally. ConsequentIy, we use only the next-event approach for the development of the models for the rest of the chapter.
- We now illustrate the mechanics of the single–server queuing system simulation, using a numerical example.
- In particular, we want to show how the simulation model is represented in the computer as the simulation progresses through time.
- The entire simulation process for the single–server queuing model is presented in the flowchart in Figure 7.6. All the blocks in this flowchart are numbered for easy reference.
- For simplicity, we as sume that both the interarrival times (ITs) and the service times (STs) have already been generated for the first few customers from the given probability distributions in Tables (Fig. 7.1 and Fig. 7.2) .

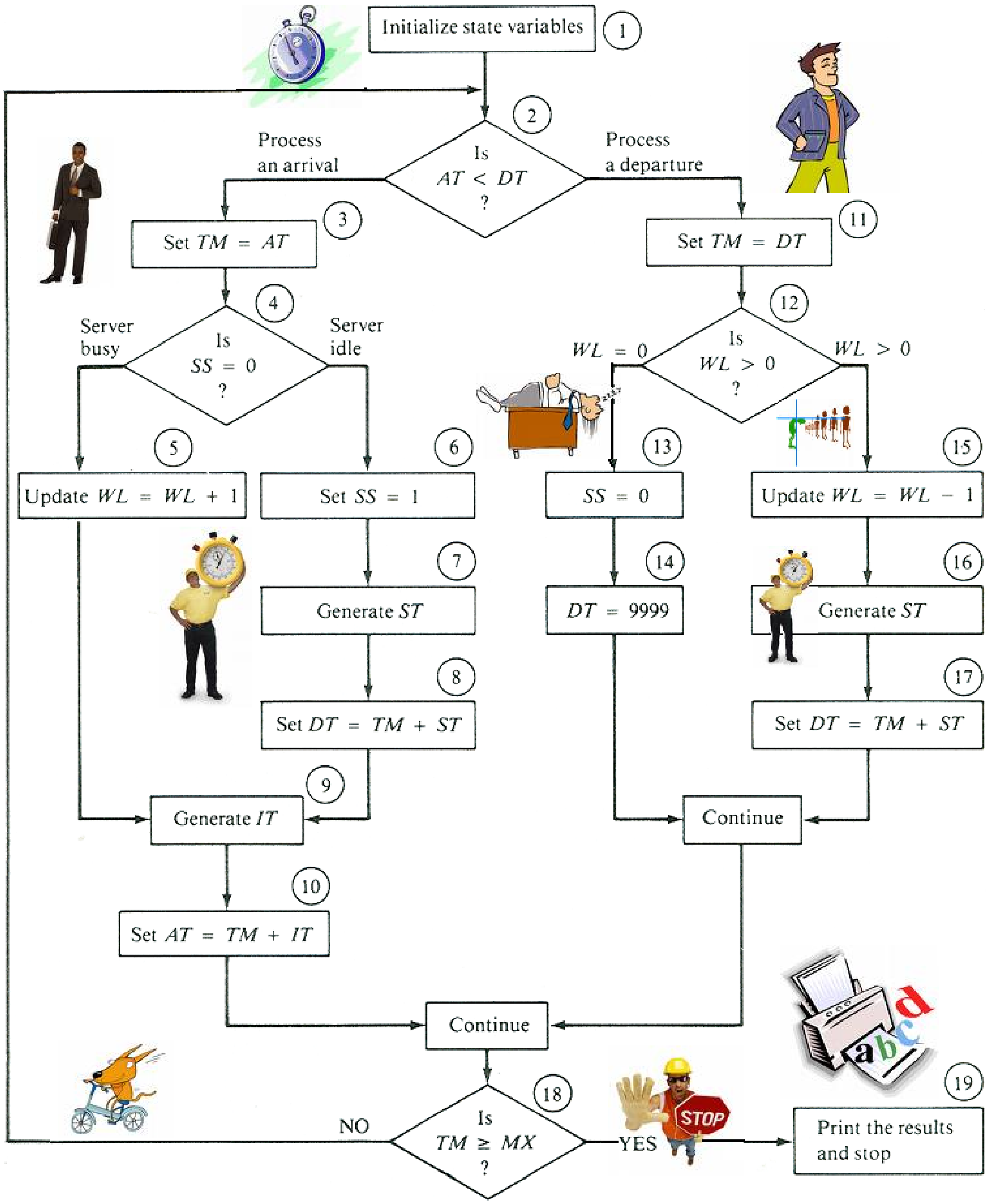


Figura 7.6: Flowchart for Simulation Model for Single–Server Queuing System

- These times are shown in Table in Fig. 7.7, from which we can see that the time between the first and the second arrival is 2 time units, the time between the second and the third arrival is al so 2 time units, and so on. Similarly, the service time for the first customer is 3 time units, ST for the second customer is also 3 time units, and so on.

CUSTOMER NUMBER	INTERARRIVAL TIME (IT)	SERVICE TIME (ST)
1	–	3
2	2	3
3	2	2
4	3	1
5	4	1
6	2	2
7	1	1
8	3	2
9	3	–

Figura 7.7: Generated Interarrival and Service Times

- To demonstrate the simulation model, we need to define several variables:

  1. TM = clock time of the simulation
  2. AT = scheduled time of the next arrival
  3. DT = scheduled time of the next departure
  4. SS = status of the server (1 = busy, 0 = idle)
  5. $WL = 1$
  6. MX = length (in time units) of a simulation run

- Having taken care of these preliminaries, we now begin the simulation by initializing all the variables (block 1 in Figure 7.6).

- Since the first arrival is assumed to take place at time 0,

  - we set $AT = 0$
  - we also assume that the system is empty at time 0, so we set $SS = 0$,
  - $WL = 0$ (length of the waiting line) and
  - $DT = 9999$ (scheduled time of the next departure). **Note** that DT must be greater than MX.

END OF EVENT	TYPE OF EVENT	CUSTOMER NUMBER	$\underbrace{TM}$	$\underbrace{SS}$	$\underbrace{WL}$	$\overbrace{AT}$	$\overbrace{DT}$
0	Initialization	–	0	0	0	0	9999
1	Arrival	1	0	1	0	2	3
2	Arrival	2	2	1	1	4	3
3	Departure	1	3	1	0	4	6
4	Arrival	3	4	1	1	7	6
5	Departure	2	6	1	0	7	8
6	Arrival	4	7	1	1	11	8
7	Departure	3	8	1	0	11	9
8	Departure	4	9	0	0	11	9999
9	Arrival	5	11	1	0	13	12
10	Departure	5	12	0	0	13	9999
11	Arrival	6	13	1	0	14	15
12	Arrival	7	14	1	1	17	15
13	Departure	6	15	1	0	17	16
14	Departure	7	16	0	0	17	9999
15	Arrival	8	17	1	0	20	19

$\underbrace{\quad}$: SYSTEM VARIABLES $\overbrace{\quad}$:EVENT LIST

Figura 7.8: Computer Representation of the Simulation

- This implies that our list of events now consists of two scheduled events: an arrival at time 0 and a dummy departure at time 9999. This completes the initialization process and gives us the computer representation of the simulation shown in Table in Fig. 7.8.
- We are now ready for our first action in the simulation: searching through the event list to determine the first event (block 2).
- Since our simulation consists of only two events, we simply determine the next event by comparing AT and DT. (In other simulations, we might have more than two events, so we would have to have an efficient system of searching through the event list.)
- An arrival is indicated by $AT < DT$, a departure by $DT < AT$. At this point, $AT = 0$ is less than $DT = 9999$, indicating that an arrival will take place next. We label this event 1 and update the clock time, TM, to the time of event 1 (block 3). That is, we set $TM = 0$.
- The arrival at time 0 finds the system empty, indicated by the fact that $SS = 0$ (block 4). Consequently, the customer enters service immediately.
- For this part of the simulation, we first set $SS = 1$ to signify that the server is now busy (block 6). We next generate a service time (block 7) and set the departure time for this customer

(block 8).

- From Table in Fig. 7.7, we see that ST for customer 1 is 3. Since $TM = 0$ at this point, we set $DT = 3$ for the first customer. In other words, customer 1 will depart from the system at clock time 3.

- Finally, in order to complete all the actions of processing an arrival, we schedule the next arrival into the system by generating an interarrival time, IT (block 9), and setting the time of this arrival using the equation $AT = TM + IT$ (block 10).

- Since $IT = 2$, we set $AT = 2$. That is, the second arrival will take place at clock time 2. At the end of event 1, our computer representation of the simulation will be as shown in Table in Fig. 7.8.

- At this stage of the simulation, we proceed to block 18 to determine whether the clock time, TM, has exceeded the specified time length of the simulation, MX. If it has, we print out the results (block 19) and stop the execution of the simulation model. If it has not, we continue with the simulation. We call this the termination process.

- We execute this process at the end of each event. However, for this example, we as sume that MX is a large number. Consequently, from here on, we will not discuss the termination process.

- At this point, we loop back to block 2 to determine the next event. Since $AT = 2$ and $DT = 3$, the next event, event 2, will be an arrival at time 2.

- Having determined the next event,we now advance the simulation to the time of this arrival by updating TM to 2.

- The arrival at time 2 finds the server busy, so we put this customer in the waiting line by updating WL from 0 to 1 (block 5).

- Since the present event is an arrival, we now schedule the next arrival into the system. Given that $IT = 2$ for arrival 3, the next arrival takes place at clock time 4. This completes all the necessary actions for event 2.

- We again loop back to block 2 to determine the next event. From the computer representation ofthe system in Table in Fig. 7.8, we see that at this point (end of event 2), $DT = 3$ is less that $AT = 4$. This implies that the next event, event 3, will be a departure at clock time 3.

- We advance the clock to the time of this departure; that is, we update TM to 3 (block 11).

- At time 3, we process the first departure from the system. With the departure, the server now becomes idle.

- We check the status of the waiting line to see whether there are any customers waiting for service (block 12). Since $WL = 1$, we have one customer waiting.

- We remove this customer from the waiting line, set $WL = 0$ (block 15), and bring this customer into service by generating a service time, ST (block 16), and setting the departure time using the relation $DT = TM + ST$ (block 17).

- From Table in Fig. 7.7, we see that for customer 2, $ST = 3$. Since $TM = 3$, we set $DT = 6$. We have now completed all the actions for event 3, giving us the computer representation shown in Table in Fig. 7.8.

- From here on, we leave it to the reader to work through the logic of the simulation for the rest of the events in this example.

- Table in Fig. 7.8 shows the status of the simulation at the end of each of these events. Note that at the end of events 8, 10, and 14 (all departures), the system becomes idle.

- During the sequence of actions for these events, we set $SS = 0$ (block 13) and $DT = 9999$ (block 14). In each case, the system stays idle until an arrival takes place.

- This simulation is summarized in the time continuum diagram in Figure 5. Here, the A's represent the arrivals and the D's the departures. Note that the hatched areas, such as the one between times 9 and 11, signify that the system is idle.

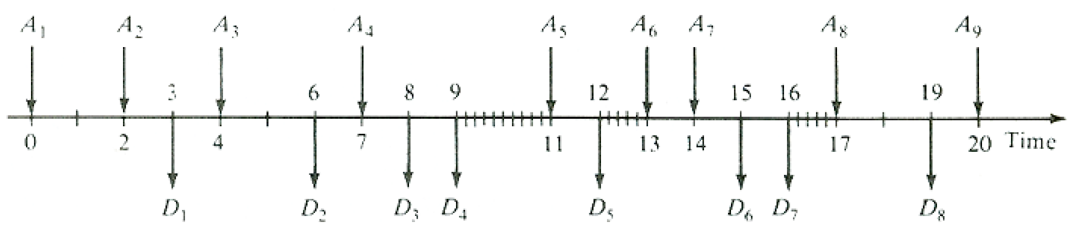


Figura 7.9: Time Coninuum Representation of Single–Server Simulation

- This simple example illustrates some of the basic concepts in simulation and the way in which simulation can be used to analyze a particular problem.

- Although this model is not likely to be used to evaluate many situations of importance, it has provided us with a specific example and, more important, has introduced a variety of key simulation concepts.

- In the rest of the chapter, we analyze some of these simulation concepts in more detail. No mention was made in the example of the collection of statistics, but procedures can be easily incorporated into the model to determine the measures of performance of this system.

- For example, we cou1d expand the flowchart to calculate and print the mean waiting time, the mean number in the waiting 1ine, and the proportion of idle time. We discuss statistical issues in detaillater in the chapter

7.3 Random numbers and Monte Carlo simulation

- In our queuing simulation example, we saw that the underlying movement through time is achieved in the simulation by generating the interarrival and the service times from the specified probability distributions.

- In fact, all event times are determined either directly or indirectly by these generated service and interarrival times. The procedure of generating these times from the given probability distributions is known as sampling from probability distributions, or random variate generation, or Monte Carlo sampling.

- In this section, we present and discuss several different methods of sampling from discrete distributions.

- We initially demonstrate the technique using a roulette wheel and then expand it by carrying out the sampling using random numbers.

- The principie of sampling from discrete distributions is based on the frequency interpretation of probability. That is, in the long run, we would like the outcomes to occur with the frequencies specified by the probabilities in the distribution.

- For example, if we consider the service time distribution in Table in Fig. 7.2, we would like, in the long run, to generate a service time of 1 minute 35% the time, a service time of 2 minutes 40% of the time, and a service time of 3 minutes 25% of the time.

- In addition to obtaining the right frequencies, the sampling procedure should be independent; that is, each generated service time should be independent of the service times that precede it and follow it.

- To achieve these two properties using a roulette wheel, we first partition the wheel into three segments, each proportional in area to a probability in the distribution (see Figure 7.10).

- For example, the first segment, say S_1, is allocated 35% of the area of the roulette wheel. This area corresponds to the probability of .35 and the service time of 1 minute.

- The second segment, S_2, covers 40% of the area and corresponds to the probability of .40 and the service time of 2 minutes.

- Finally, the third segment, S_3, is allocated the remaining 25% of the area, corresponding to the probability .25 and the service time of 3 minutes.

- If we now spin the roulette wheel and the pointer falls in segment S_1 it means that we have generated a service time of 1 minute. If the pointer falls in segment S_2, we allocate a service time of 2 minutes. If it falls in segment S_3, we have generated a service time of 3 minutes.

- If the roulette wheel is fair, as we assume, –then in the long run,

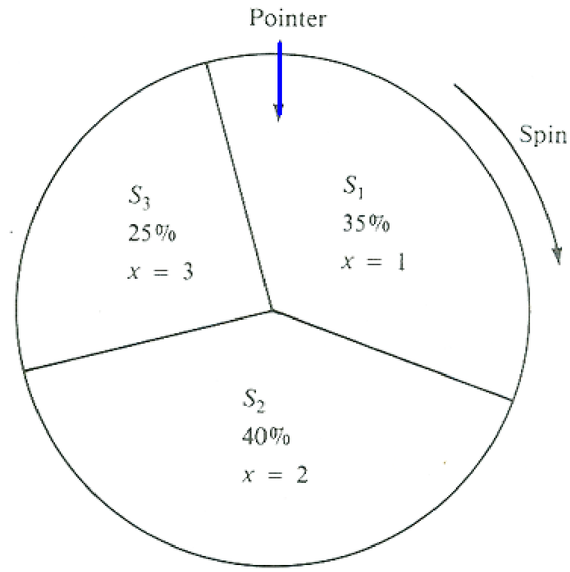


Figura 7.10: Segmentation of Roulette Wheel.

1. we will generate the service times with approximately the same frequency as specified in the distribution, and
2. the results of each spin will be independent of the results that precede and follow it.

- We now expand on this technique by using numbers for segmentation instead of areas. We assume that the roulette wheel has 100 numbers on it, ranging from 00 to 99, inclusive.
- We further assume that the segmentation is such that each number has the same probability, .01, of showing up.
- Using this method of segmentation, we allocate 35 numbers, say from 00 to 34, to the service time of 1 minute. Since each number has a probability .01 of showing up, the 35 numbers together are equivalent to a probability of .35.
- Similarly, if we allocate the numbers from 35 to 74 to the service time of 2 minutes, and the numbers from 75 to 99 to the service time of 3 minutes, we achieve the desired probabilities.
- As before, we spin the roulette wheel to generate the service times, but with this method, the numbers directly determine the service times. In other words, if we generate a number between 00 and 34, we set the service time equal to 1 minute; if the number is between 35 and 74, we set the service time equal to 2 minutes; and if the number is between 75 and 99, we set the service time equal to 3 minutes.
- This procedure of segmentation and using a roulette wheel is equivalent to generating integer random numbers between 00 and 99.

- This follows from the fact that a sequence of integer random numbers is such that each random number in the sequence (in this case from 00 to 99) has an equal probability (in this case, .01) of showing up, and each random number is independent ofthe numbers that precede and follow it.

- If we now had a procedure for generating the 100 random numbers between 00 and 99, then instead of spinning a roulette wheel to obtain a service time, we could use a generated random number.

- Technically, a random number, R_i, is defined as an independent random sample drawn from a continuous uniform distribution whose probability density function (pdf) is given by

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- Thus, each random number will be uniformly distributed over the range between 0 and 1. Because of this, these random numbers are usually referred to as $U(0,1)$ random numbers, or simply as uniform random numbers.

- Uniform random numbers can be generated in many different ways. Since our interest in random numbers is for use within simulations, we need to be able to generate them on a computer. This is done using mathematical functions called random number generators.

- Most random number generators use some form of a congruential relationship.

- Examples of such generators include the linear congruential generator, the multiplicative generator, and the mixed generator.

- The linear congruential generator is by far the most widely used. In fact, most built–in random number functions on computer systems use this generator. With this method, we produce a sequence of integers x_1, x_2, x_3, ... between zero and $m-1$ according to the following recursive relation:

$$x_{i+1} = (ax_i + c) \text{ modulo } m \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

- The initial value of x_0 is called the seed, a is the constant multiplier, c is the increment, and m is the modulus. These four variables are called the parameters of the generator.

- Using this relation, the value of x_{i+1} equals the remainder from the division of $ax_i + c$ by m. The random number between 0 and 1 is then generated using the equation

$$R_i = \frac{x_i}{m}, \quad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

- For example, if $x_0 = 35$, $a = 13$, $c = 65$, and $m = 100$, the algorithm works as follows:

  Iteration 0: Set $x_0 = 35$, $a = 13$, $c = 65$, and $m = 100$.

Iteration 1: Compute

$$x_1 = (ax_0 + c) \text{ modulo } m =$$
$$= [13(35) + 65] \text{ modulo } 100 = 20$$

Deliver

$$R_i = \frac{x_1}{m} = \frac{20}{100} = 0.20$$

Iteration 2: Compute

$$x_2 = (ax_1 + c) \text{ modulo } m =$$
$$= [13(20) + 65] \text{ modulo } 100 = 25$$

Deliver

$$R_2 = \frac{x_2}{m} = \frac{25}{100} = 0.25$$

Iteration 3: Compute

$$x_3 = (ax_2 + c) \text{ modulo } m$$
$$\vdots$$

and so on.

- Each random number generated using this method will be a decimal number between 0 and l. Note that although it is possible to generate a zero, a random number cannot equal l.

- Random numbers generated using congruential methods are called **pseudorandom numbers**. They are not true random numbers in the technical sense, since they are completely determined once the recurrence relation is defined and the parameters of the generator are specified.

- However, by carefully selecting the values of a, c, m, and x_0, the pseudorandom numbers can be made to meet all the statistical properties of true random numbers.

- In addition to the statistical properties, random number generators must have several other important characteristics if they are to be used efficiently within computer simulations. Some of these characteristics are

  (1) the routine must be fast;

  (2) the routine should not require a lot of core storage;

  (3) the random numbers should be replicable; and

  (4) the routine should have a sufficiently long cycle — that is, we should be able to generate a long sequence without repetition of the random numbers.

- There is one important point worth mentioning at this stage: Most programming languages have built-in library functions that provide random (or pseudorandom) numbers directly. Therefore, most users need only know the library function for a particular system.

- In some systems, a user may have to specify a value for the seed, x_0, but it is unlikely that a user would have to develop or design a random number generator. However, for more information on random numbers and random number generators, the interested reader may consult Banks and Carson (1984), Knuth (1969), or Law and Kelton (1982).

- We now take the method of Monte Carlo sampling a stage further and develop a procedure using random numbers generated on a computer.

- The idea is to transform the $U(0,1)$ random numbers into integer random numbers between 00 and 99 and then to use these integer random numbers to achieve the segmentation by numbers.

- The transformation is a reiativeiy straightforward procedure. If the $(0,1)$ random numbers are multiplied by 100, they will be uniformly distributed over the range from 0 to 100. Then, if the fractional part of the number is dropped, the result will be integers from 00 to 99, all equally likely.

- For example, if we had generated the random number 0.72365, multiplying it by 100 gives us 72.365. Truncating the decimal portion of the number will leave us with the integer random number 72.

- On the computer, we achieve this transformation by first generating a $U(0,1)$ random number. Next, we multiply it by 100. Finally, we store the product using an integer variable; this final stage will truncate the decimal portion of the number. This procedure will give us integer random numbers between 00 and 99.

- We now formalize this procedure and use it to genera te random variates for a discrete random variable.

- The procedure consists of two steps:

  1. We develop the cumulative probabitity distribution (cdf) for the given random variable, and

  2. we use the cdf to allocate the integer random numbers directly to the various values of the random variable.

- To illustrate this procedure, we use the distribution of interarrival times from the queuing example (see Table 7.1).

- If we develop the cdf for this distribution, we get the probabilities shown in Table 6.

- The first interarrival time of 1 minute occurs with a probability of .20. Thus, we need to allocate 20 random numbers to this outcome. If we assign the 20 numbers from 00 to 19, we utilize the decimal random number range from 0 to 0.19999. Note that the upper end of this range lies just beiow the cumulative probability of .20.

INTERARRIVAL TIME (Minutes)	PR0BABILITY	CUMULATIVE PR0BABILITY	RAND0M NUMBER RANGES
1	.20	.20	00-19
2	.30	.50	20-49
3	.35	.85	50-84
4	.15	1.00	85-99

Figura 7.11: Cumulative Distribution Function and Random Number Ranges for Interarrival Times

- For the interarrival time of 2 minutes, we allocate 30 random numbers. If we assign the integer numbers from 20 to 49, we notice that this covers the decimal random number range from 0.20 to 0.49999. As before, the upper end ofthis range liesjust below the cumulative probability of .50, but the lower end coincides with the previous cumulative probability of .20.
- If we now allocate the integer random numbers from 50 to 84 to the interarrival time of 3 minutes, we notice that these numbers are obtained from the decimal random number range from 0.50 (the same as the cumulative probability associated with an interarrival time of 2 minutes) to 0.84999, which is a fraction smaller than .85.
- Finally, the same analyses apply to the interarrival time of 4 minutes. In other words, the cumulative probability distribution enables us to allocate the integer random number ranges directly.
- Once these ranges have been specified for a given distribution, all we must do to obtain the value ofa random variable is generate an integer random number and match it against the random number allocations.
- For example, if the random number had turned out to be 35, this would translate to an interarrival time of 2 minutes. Similarly, the random number 67 would translate to an interarrival time of 3 minutes, and so on.
- We now demonstrate these concepts in an example of a Monte Carlo simulation.

Ejemplo **7.1** Pierre's Bakery bakes and sells french bread. Each morning, the bakery satisfies the demand for the day using freshly baked bread. Pierre's can bake the bread only in batches of a dozen loaves (barras) each. Each loaf costs 25 (centavos) to make. For simplicity, we as sume that the total daily demand for bread also occurs in multiples of 12. Past data have shown that this demand ranges from 36 to 96 loaves per day. A loaf sells for 40₵ , and any bread left over at the end ofthe day is sold to a charitable kitchen for a salvage price of 10₵/loaf. If demand exceeds supply, we assume that there is a lost-profit cost of 15 /loaf (because of loss of goodwill (buena voluntad), loss of customers to competitors, and so on). The bakery records show that the daily demand can be categorized into three types: high, average, and low. These demands occur with probabilities of .30, .45, and .25, respectively. The distribution of the demand by categories is given in TableFig. 7.12. Pierre's would like to determine the optimal number of loaves to bake each day in order to maximize profit (revenues + salvage revenues − cost of bread − cost of lost profits).

DEMAND	High	Average	Low
36	.05	.10	.15
48	.10	.20	.25
60	.25	.30	.35
72	.30	.25	.15
84	.20	.10	.05
96	.10	.05	.05

Figura 7.12: Demand distribution by Demand Categories.

Solución:

To solve this problem by simulation, we require a number of different policies to evaluate. Here, we define a policy as the number of loaves to bake each day. Each given policy is then evaluated over a fixed period of time to determine its profit margin. The policy that gives the highest profit is selected as the best policy.

In the simulation process, we first develop a procedure for generating the demand for the day:

Step 1 Determine the type of demand—that is, whether the demand for the day is high, average, or low. To do this, calcula te the cdf for this distribution and set up the random number assignments (see Table in Fig. 7.13). Then, to determine the type of demand, all we have to do is to generate a two-digit random number and match it against the random number allocations in this table.

Type of demand	Probability	Cumulative distribution	Random number ranges
High	.30	.30	00-29
Average	.45	.75	30-74
Low	.25	1.00	75-99

Figura 7.13: Distribution of demand type.

Step 2 Generate the actual demand for the day from the appropriate demand distribution. The cdf and the random number allocations for the distribution of each of the three demand types are presented in Table in Fig. 7.14. Then, to generate a demand, we simply generate an integer random number and match it against the appropriate random number assignments.

	Cumulative distribution			Random number ranges		
Demand	High	Average	Low	High	Average	Low
36	.05	.10	.15	00-04	00-09	00-14
48	.15	.30	.40	05-14	10-29	15-39
60	.40	.60	.75	15-39	30-59	40-74
72	.70	.85	.90	40-69	60-84	75-89
84	.90	.95 .	.95	70-89	85-94	90-94
96	1.00	1.00	1.00	90-99	95-99	95-99

Figura 7.14: Distribution by Demand Type

For example, if our demand type was ªverage" in Step 1, the random number 80 would translate into a demand of 72. Similarly, if the type of demand was "high" in Step 1, the random number 9 would translate into a demand of 48.

The simulation process for this problem is relatively simple. For each day, we generate a demand for the day. Then we evaluate the various costs for a given policy. Suppose, for example, that the policy is to bake 60 loa ves each day. If the demand for a particular day turns out to be 72, we have

$$60(0.40) = \$24.00$$

in revenues,

$$60(0.25) = \$15.00$$

in production costs, and

$$12(0.15) = \$1.80$$

in lost-profit costs (because ofthe shortfall of l2 loaves). This gives us a net profit of

$$24.00 - 15.00 - 1.80 = \$7.20$$

for that day.

Using this procedure, we calculate a profit margin for each day in the simulation. To evaluate a policy, we mn the simulation for a fixed number of days for the given policy. At the end of the simulation, we average the profit margins over the set number of days to obtain the expected profit margin per day for the policy.

Note that the procedure in this simulation is different from the queuing simulation, in that the present simulation does not evolve over time in the same way. Here, each day is an independent simulation. Such simulations are commonly referred to as Monte Carlo simulations.

To illustrate this procedure, we present in Table in Fig. 7.15 a manual simulation for the first 15 days for a policy where we bake 60 loaves per day. From this table, the demand for both day 1 and day 2 turns out to be 60 loaves. This demand generates a revenue of \$24.00 for each of these days. Since the 60 loaves cost \$15.00 to bake, our profit margin for each of the first

2 days is \$9.00. On day 3, the demand is 72, giving us a shortfall of 12 loaves. As shown in the table, the profit margin for day 3 is \$7.20 (24.00 – 15.00 – 1.80). On day 4, we generate a demand of 48. Since our policy is to bake 60 loaves, we will have 12 loaves left over. The 48 loaves sold give us revenues of only \$19.20. However, the 12 loaves left over provide an additional \$1.20 in salvage revenue, yielding a profit of \$5.40 $(19.20 + 1.20 - 15.00)$ for day 4.

Day	Random No. for demand type	Type of demand	Random No. for demand	Demand	Revenue	Lost profit	Salvage revenue	Profit
1	69	Average	56	60	\$24.00	—	—	\$9.00
2	30	Average	32	60	\$24.00	—	—	\$9.00
3	66	Average	79	72	\$24.00	\$1.80	—	\$7.20
4	55	Average	24	48	\$19.20	—	\$1.20	\$5.40
5	80	Low	35	48	\$19.20	—	\$1.20	\$5.40
6	10	High	98	96	\$24.00	\$5.40	—	\$3.60
7	92	Low	88	72	\$24.00	\$1.80	—	\$7.20
8	82	Low	17	48	\$19.20	—	\$1.20	\$5.40
9	4	High	86	84	\$24.00	\$3.60	—	\$5.40
10	31	Average	13	48	\$19.20	—	\$1.20	\$3.00
11	23	High	44	72	\$24.00	\$1.80	—	\$7.20
12	93	Low	13	36	\$14.40	—	\$2.40	\$1.80
13	42	Average	51	60	\$24.00	—	—	\$9.00
14	16	High	17	60	\$24.00	—	—	\$9.00
15	29	High	62	72	\$24.00	\$1.80	—	\$7.20

Figura 7.15: Simulation Table for Baking 60 Loaves per Day

If we now complete the manual simulation for the period of 15 days, the total profit earned dllring this time comes to \$94.80. This gives us an average daily profit figure of $\frac{94.80}{15} = \$6.32$. However, this cannot be accepted as the final profit margin for this policy. The simulation results over this short a period are likely to be highly dependent on the sequence of random numbers generated, so they cannot be accepted as statistically valid. The simulation would have to be carried out over a long period of time before the profit margin is accepted as truly representative.

7.4 Simulations with continuous random variables

- The simulation examples presented thus far used only discrete probability distributions for the random variables. However, in many simulations, it is more realistic and practical to use continuous random variables.
- In this section, we present and discuss several procedures for generating random variates from continuous distributions. The basic principle is very similar to the discrete case. As in the

discrete method, we first genera te a $U(0,1)$ random number and then transform it into a random variate from the specified distribution.

- The process for carrying out the transformation, however, is quite different from the discrete case.
- There are many different methods for generating continuous random variates. The selection of a particular algorithm will depend on the distribution from which we wish to generate, taking into account such factors as the exactness of the random variables, the computational and storage efficiencies, and the complexity of the algorithm.
- The two most commonly used algorithms are the inverse transformation method (ITM) and the acceptance-rejection method (ARM). Between these two methods, it is possible to generate random variables from **almost** all ofthe most frequently used distributions.
- We present a detailed description of both these algorithms, along with several examples for each method. In addition to this, we present two methods for generating random variables from the normal distribution.

7.4.1 Inverse transformation method

- The inverse transformation method is generally used for distributions whose cumulative distribution function can be obtained in closed form.
- Examples include the exponential, the uniform, the triangular, and the Weibull distributions. For distributions whose cdf does not exist in closed form, it may be possible to use some numerical method, such as a power-series expansion, within the algorithm to evaluate the cdf.
- However, this is likely to complicate the procedure to such an extent that it may be more efficient to use a different algorithm to generate the random variates.
- The ITM is relatively easy to describe and execute. It consists of the following three steps:

Step 1. Given a probability density function (**pdf**) $f(x)$ for a random variable x, obtain the cumulative distribution function $F(x)$ as

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

Step 2. Generate a random number r

Step 3. Set $F(x) = r$ and solve for x. The variable x is then a random variate from the distribution whose pdf is given by $f(x)$.

Ejemplo **7.2** We now describe the mechanics of the algorithm using an example. For this, we consider the distribution given by the function

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

A function of this type is called a ramp function. It can be represented graphically as shown in Figure 7.16. The area under the curve, $f(x) = x/2$ represents the probability of the occurrence of the random variable x. We as sume that in this case, x represents the service times of a bank teller.

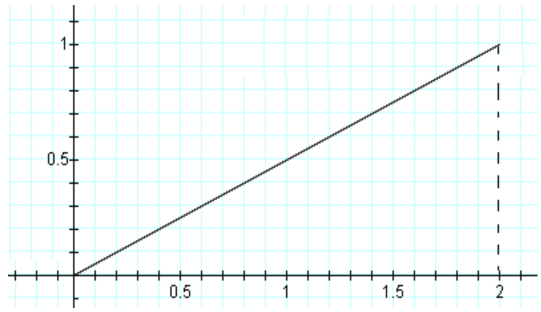


Figura 7.16: The pdf of a Ramp Function

Solución:

To obtain random variates from this distribution using the inverse transformation method, we first compute (for $0 \leq x \leq 2$) the cdf as

$$F(x) = \int_0^x \frac{t}{2}\, dt$$

This cdf is represented formally by the function

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Next, in Step 2, we generate a random number r. Finally, in Step 3, we set $F(x) = r$ and solve for x.

$$\frac{x^2}{4} = r, \quad x = \pm 2\sqrt{r}$$

Since the service times are defined only for positive values of x, a service time of $x = -2\sqrt{r}$ is not feasible. This leaves us with $x = 2\sqrt{r}$ as the solution for x. This equation is called a random variate generator or a process generator. Thus, to obtain a service time, we first generate a random number and then transform it using the preceding equation. Each execution of the equation will give us one service time from the given distribution. For instance, if a random number $r = 0.64$ is obtained, a service time of $x = 2\sqrt{0.64} = 1.6$ will be generated.

Graphically, the inverse transformation method can be represented as shown in Figure 7.17. We see from this graph that the range of values for the random variable (that is, $0 \leq x \leq 2$) coincides with the cumulative probabilities, $0 \leq F(x) \leq 1.0$. In other words, for any value of $F(x)$ over the interval $[0, 1]$, there exists a corresponding value of the random variable, given

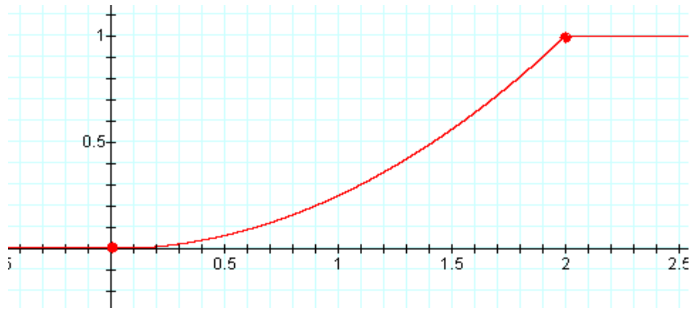


Figura 7.17: Graphical Representation of Inverse Transformation Method

by x. Since a random number is also defined in the range between 0 and 1, this implies that a random number can be translated directly into a corresponding value of x using the relation $r = F(x)$. The solution for x in terms of r is known as taking the inverse of $F(x)$, denoted by $x = F^{-1}(r)$—hence the name inverse transformation.

Note that if r is equal to zero, we will generate a random variate equal to zero, the smallest possible value of x. Similarly, if we generate a random number equal to 1, it will be transformed to 2, the largest possible value of x.

To show that the ITM generates numbers with the same distribution as x, consider the fact that for any two numbers x_1 and x_2, the probability

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

Then what we have to show is that the probability that the generated value of x lies between x_1 and x_2 is also the same. From Figure 7.17, we see that the generated value of x will be between x_1 and x_2 if and only if the chosen random number is between $r_1 = F(x_1)$ and $r_2 = F(x_2)$. Thus, the probability that the generated value of x is between x_1 and x_2 is also $F(x_2) - F(x_1)$. This shows that the ITM does indeed generate numbers with the same distribution as X.

- As this example shows, the major advantage of the inverse transformation method is its simplicity and ease of application. However, as mentioned earlier, we must be able to determine $F(x)$ in closed form for the desired distribution before we can use the method efficiently. Also, in this example, we see that we need exactly one random number to produce one random variable. Other methods, such as the acceptance–rejection method, may require several random numbers to generate a single value of x. The following three examples illustrate the application of the ITM.

EJEMPLO **7.3** (**The Exponential Distribution**) As mentioned before, the exponential distribution has important applications in the mathematical representation of queuing systems. The pdf of the exponential (see Fig. 7.18) distribution is given by

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0, \lambda > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Use the inverse transformation method to generate observations from an exponential distribution.

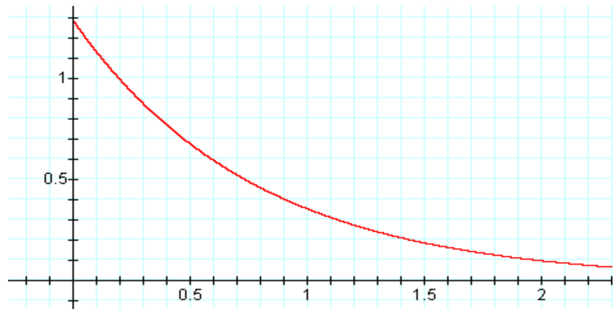


Figura 7.18: The pdf of the exponential distribution.

Solución:

In Step 1, we compute the cdf (see Fig. 7.19). This is given by

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

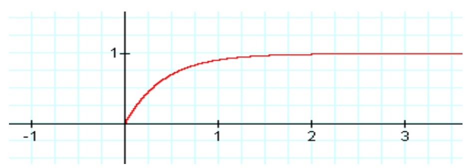


Figura 7.19: The cdf.

Next, we generate a random number r and set $F(x) = r$ to solve for x. This gives us

$$1 - e^{-\lambda x} = r$$

Rearranging to

$$e^{-\lambda x} = 1 - r$$

and taking the natural logarithm of both sides, we have

$$-\lambda x = \ln(1 - r)$$

Finally, solving for x gives the solution

$$x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - r)$$

To simplify our computations, we can replace $(1-r)$ by r. Since r is a random number, $(1-r)$ will al so be a random number. This means that we have not changed anything except the way we are writing the $U(0,1)$ random number. Thus, our process generator for the exponential distribution will now be

$$x = -\frac{\ln r}{\lambda}$$

For instance, $r = 1/e$ yields $x = 1/\lambda$ and $r = 1$ yields $x = 0$.

Ejemplo **7.4** (**The Uniform Distribution**) Consider a random variable x that is uniformly distributed on the interval $[a, b]$. The pdf of this distribution is given by the function

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Use the ITM to generate observations from this random variable.

Solución: The cdf of this distribution is given by

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

To use the ITM to generate observations from a uniform distribution, we first generate a random number r and then set $F(x) = r$ to solve for x. This gives

$$\frac{x-a}{b-a} = r$$

Solving for x yields

$$x = a + (b-a)r$$

as the process generator for the uniform distribution. For example, $r = \dfrac{1}{2}$ yields $x = \dfrac{a+b}{2}$, $r = 1$ yields $x = b$, $r = 0$ yields $x = a$, and so on.

Ejemplo **7.5** (**The Triangular Distribution**) Consider a random variable x whose pdf is given by

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{2} & 2 \leq x \leq 3 \\ \dfrac{1}{2}\left(2 - \dfrac{x}{3}\right) & 3 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

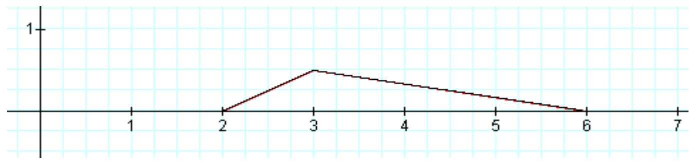


Figura 7.20: Density Function for a Triangular Distribution

Use the ITM to generate observations from the distribution. This distribution, called a triangular distribution, is represented graphically in Figure 7.20. It has the endpoints $[2, 6]$, and its mode is at 3. We can see that 25% of the area under the curve lies in the range of x from 2 to 3, and the other 75% lies in the range from 3 to 6. In other words, 25% of the values of the random variable x lie between 2 and 3, and the other 75% fall between 3 and 6. The triangular distribution has important applications in simulation. It is often used to represent activities for which there are few or no data. (For a detailed account of this distribution, see Banks and Carson (1984) or Low and Kelton (1982).)

Solución: The cdf of this triangular distribution is given by the function

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ \dfrac{(x-2)^2}{4} & 2 \leq x \leq 3 \\ -\dfrac{1}{12}(x^2 - 12x + 24) & 3 \leq x \leq 6 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

For simplicity, we redefine $F(x) = (\frac{1}{4})(x-2)^2$, for $2 \leq x \leq 3$, as $F_1(x)$, and $F(x) = (-\frac{1}{12})(x^2 - 12x + 24)$, for $3 \leq x \leq 6$, as $F_2(x)$. This cdf can be represented graphically as shown in Figure

Figura 7.21: The cdf of a triangular distribution.

7.21. Note that at $x = 3$, $F(3) = 0.25$. This implies that the function $F_1(x)$ covers the first 25% ofthe range ofthe cdf, and $F_2(x)$ applies over the remaining 75% of the range. Since we now have two separate functions representing the cdf, the ITM has to be modified to account for these two functions, their ranges, and the distribution of the ranges. As far as the ITM goes, the distribution of the ranges is the most important. This distribution is achieved by using the random number from Step 2. In other words, if $r < 0.25$, we use the function $F_1(x) = (1/4)(x-2)^2$ in Step 3. Otherwise, we use $F_2(x) = (-1/12)(x^2 - 12x + 24)$. Since $r < 0.25$ for 25% of the time and $r \geq 0.25$ for the other 75%, we achieve the desired distribution. In either case, we set the function $F_1(x)$ or $F_2(x)$ equal to r and solve for x. That is, we solve one of the following equations:

$$(\frac{1}{4})(x-2)^2 = r \quad \text{for} \quad 0 \leq r < 0.25$$
$$(-1/12)(x^2 - 12x + 24) = r \quad \text{for} \quad 0.25 \leq r \leq 1.0$$

x will then be our random variate of interest.

As the graph in Figure 7.21 shows, a random number between 0 and 0.25 will be transformed into a value of x between 2 and 3. Similarly, if $r \geq 0.25$, it will be transformed into a value of x between 3 and 6 . To solve the first equation, $(1/4)(x-2)^2 = r$, we multiply the equation by 4 and then take the square root of both sides. This gives us .

$$x - 2 = \pm\sqrt{4r}, \quad x = 2 \pm 2\sqrt{r}$$

Since x is defined only for values greater than 2, $x = 2 - 2\sqrt{r}$ is infeasible, leaving $x = 2 + 2\sqrt{r}$ as the process generator for a random number in the range from 0 to 0.25. Note that when $r = 0$, $x = 2$, the smallest possible value for this range. Similarly, when we generate $r = 0.25$, it will be transformed to $x = 3$.

To solve the second equation, $(-1/12)(x^2 - 12x + 24) = r$, we can use one of two methods: (1) employing the quadratic formula or (2) completing the square. Here, we use the method of completing the square. We multiply the equation by -12 and rearrange the terms to get

$$x^2 - 12x = -24 - 12r$$

To complete the square, we first divide the x terms coefficient by 2. This gives us -6. Next, we square this value to get 36. Finally, we add this resultant to both sides of the equation. This leaves us with the equation

$$x^2 - 12x + 36 = 12 - 12r$$
$$(x-6)^2 = 12 - 12r$$

Writing the equation in this form enables us to take the square root of both sides. That is,

$$x - 6 = \pm\sqrt{12 - 12r}, \quad x = 6 \pm 2\sqrt{3 - 3r}$$

As before, part of the solution is infeasible. In this case, x is feasible only for values less than 6. Thus, we use only the equation $x = 6 - 2\sqrt{3 - 3r}$ as our process generator. Note that when $r = 0.25$, our random variate is equal to 3. Similarly, when $r = 1$, we generate a random variate equal to 6.

Bibliografía

[1] ÁVILA J. F., *Álgebra y Trigonometría: Ejemplos y ejercicios*, Tecnológica de Costa Rica, Costa Rica, 1998.