

---

# Rapport TP

## TL Traitement Du Signal

---

*Réalisé par:*  
Nabil ABDELOUAHED  
Yann MARTIN

June 2, 2025

# Contents

<b>1</b>	<b>Partie 1: Quelques opérations de base sur les signaux</b>	<b>1</b>
1.1	Signal numérique de synthèse . . . . .	1
1.1.1	Génération du signal . . . . .	1
1.1.2	Énergie et puissance . . . . .	1
1.1.3	Quantification . . . . .	2
1.2	Signal audio . . . . .	3
1.2.1	Enregistrement . . . . .	3
1.2.2	Restitution à différentes fréquences . . . . .	3
1.2.3	Quantification du signal audio . . . . .	4
1.2.4	Extraction et séparation de mots . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Partie 2: Classification des signaux</b>	<b>5</b>
2.1	Exemple de calcul théorique . . . . .	5
2.2	Programmation . . . . .	5
2.3	Application à la classification de quelques signaux simples . . . . .	6
2.4	Classification de signaux de parole voisés ou non voisés . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Partie 3: Aspects fréquentiels</b>	<b>11</b>
3.1	Echantillonnage . . . . .	11
3.2	La Transformée de Fourier discrète (TFD) . . . . .	11

# 1 Partie 1: Quelques opérations de base sur les signaux

## 1.1 Signal numérique de synthèse

### 1.1.1 Génération du signal

Un signal sinusoïdal de fréquence  $f_0$  est généré par la fonction suivante:

$$x[n] = \sin\left(2\pi f_0 \frac{n}{f_e}\right)$$

où  $f_e$  est la fréquence d'échantillonnage et  $N$  le nombre d'échantillons.

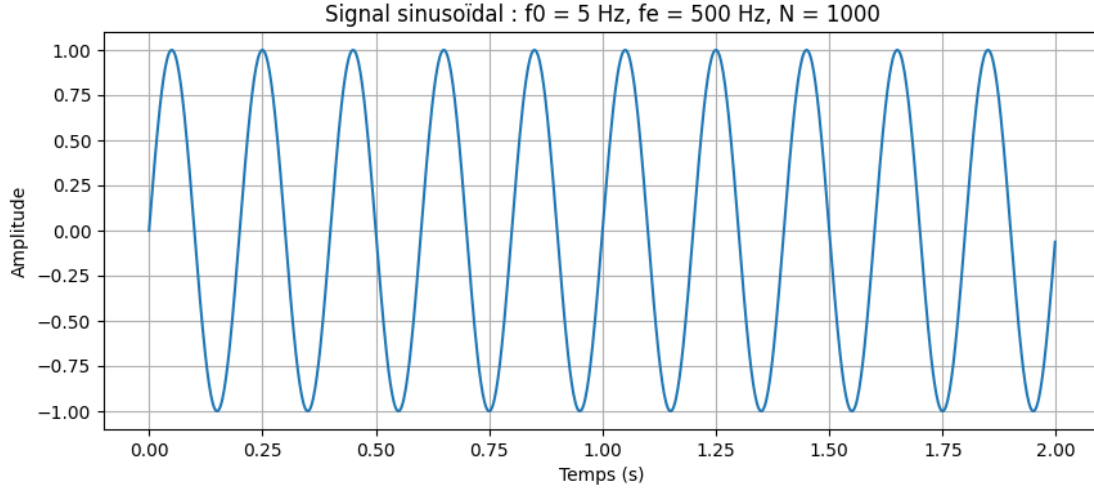


Figure 1: Signal sinusoïdal échantillonné

### 1.1.2 Énergie et puissance

L'énergie d'un signal discret  $x[n]$  est donnée par :

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]^2$$

Et la puissance moyenne par :

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]^2$$

Considérons un signal sinusoïdal discret de la forme :

$$x[n] = A \cdot \sin\left(2\pi f_0 \frac{n}{f_e}\right)$$

La puissance moyenne théorique d'un signal périodique est calculée par la formule:

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]^2$$

En utilisant l'identité trigonométrique :

$$\sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

on obtient :

$$x[n]^2 = A^2 \cdot \frac{1 - \cos\left(4\pi f_0 \frac{n}{f_e}\right)}{2}$$

Ainsi, la puissance devient :

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A^2 \cdot \frac{1 - \cos\left(4\pi f_0 \frac{n}{f_e}\right)}{2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(4\pi f_0 \frac{n}{f_e}\right) = \frac{A^2}{2}$$

Donc dans notre cas la puissance moyenne théorique est égale à 0.5.

Pour la puissance moyenne calculée numériquement pour le signal échantillonné on a la même formule mais sans la limite:

$$P = \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(4\pi f_0 \frac{n}{f_e}\right)$$

**Cas idéal :** si  $N$  est un multiple entier de la période du signal (i.e.,  $N$  couvre un nombre entier de périodes), alors la somme des cosinus s'annule :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos(4\pi f_0 t) = 0 \Rightarrow P = \frac{A^2}{2}$$

**Cas général :** si  $N$  n'est pas un multiple exact de la période, la somme ne s'annule pas et on observe une légère déviation de la puissance par rapport à  $\frac{A^2}{2}$ . Cela est dû au fait que le signal est tronqué entre deux points non symétriques.

En variant  $N$  on trouve plusieurs valeurs de la puissance moyenne qui restent proches de la valeur théorique:

```

• (.venv) deappool@deadpool-laptop:~/Desktop/td1_TS$ /home/deappool/De
puissance moyenne du signal échantillonné : 0.49999999999999895
• (.venv) deappool@deadpool-laptop:~/Desktop/td1_TS$ /home/deappool/De
puissance moyenne du signal échantillonné : 0.5
• (.venv) deappool@deadpool-laptop:~/Desktop/td1_TS$ /home/deappool/De
puissance moyenne du signal échantillonné : 0.50000000000000001
• (.venv) deappool@deadpool-laptop:~/Desktop/td1_TS$ /home/deappool/De
puissance moyenne du signal échantillonné : 0.4999999999999995

```

Figure 2: Énergie et puissance du signal

### 1.1.3 Quantification

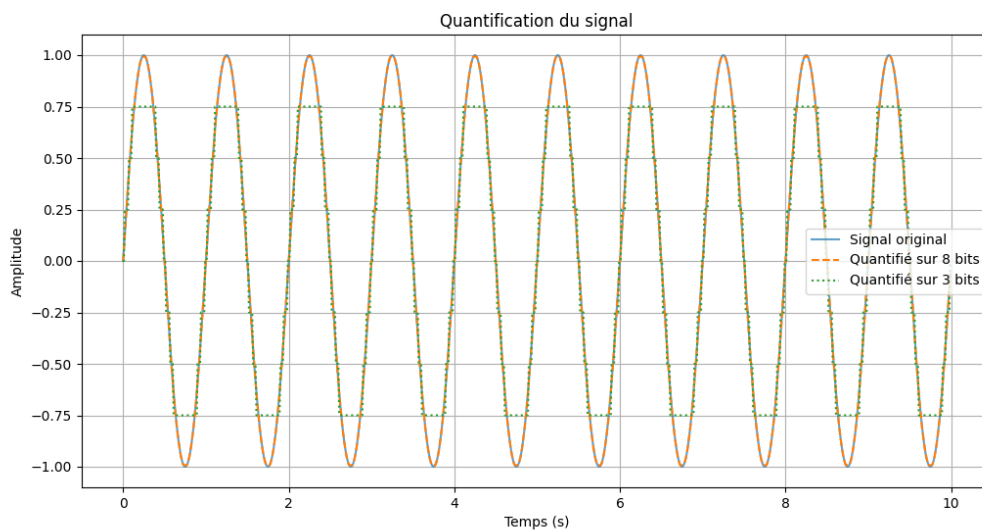


Figure 3: Quantification du signal à 3 et 8 bits

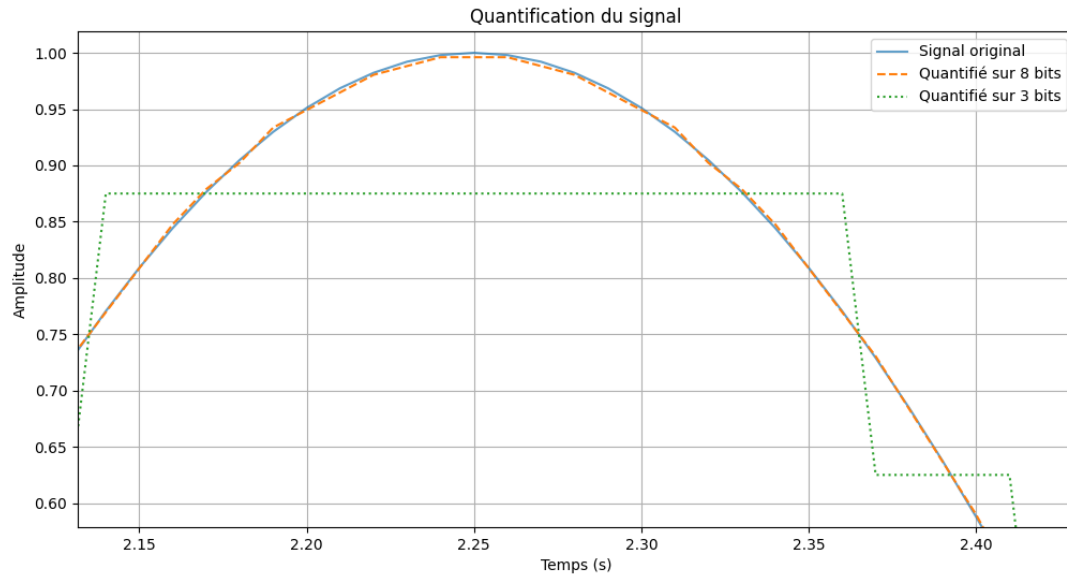


Figure 4: Zoom sur la quantification du signal à 3 et 8 bits

Pour la quantification à 3 bits, on retrouve bien 8 niveaux de quantification.

Le signal à 8 bits suit mieux la forme continue du signal d'origine mais on voit quand même quelques erreurs. À 3 bits, les marches sont plus visibles et le signal produit est significativement moins fidèle au signal d'origine.

**SNR (Signal-to-Noise Ratio) :**

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \left( \frac{E_{\text{signal}}}{E_{\text{bruit}}} \right)$$

```
Énergie du bruit de quantification (8 bits): 0.006400
SNR (8 bits): 49,92 dB

Énergie du bruit de quantification (3 bits): 6.236655
SNR (3 bits): 19,82 dB
```

Figure 5: SNR pour chaque niveau de quantification

On remarque que l'énergie du bruit est plus élevée pour le signal quantifié à 3 bits. Le résultat est logique car on voit sur le graphe que ce signal est plus éloigné du signal d'origine comparé au signal quantifié à 8 bits. On a la même conclusion en raisonnant sur le SNR:  $\text{SNR}_{q8} > \text{SNR}_{q3}$ .

## 1.2 Signal audio

### 1.2.1 Enregistrement

Les mots « Bonjour » et « ChatGpt » ont été enregistrés via Audacity (voir figure 6).

### 1.2.2 Restitution à différentes fréquences

L'audio est lu à  $f_e$ ,  $2f_e$  et  $\frac{f_e}{2}$ .

**Effets observés :**

- **Durée :** doubler la fréquence de restitution divise la durée par deux (voix accélérée), tandis que la diviser par deux double la durée (voix ralentie).

- **Hauteur** : multiplier la fréquence de restitution rend la voix plus aiguë (fréquences doublées), la diminuer la rend plus grave (fréquences divisées).

Lorsque la fréquence de restitution est trop grande ou trop petite comparée à la fréquence d'échantillonnage, le son devient incompréhensible. Le son est trop rapide ou trop lent, mais aussi on ne reconnaît plus les mots. Cela s'explique notamment par le déplacement des formants, c'est-à-dire des pics de résonance caractéristiques des voyelles et consonnes, qui changent de position dans le spectre. Leur modification rend la parole méconnaissable, car ce sont eux qui permettent d'identifier les sons du langage.

### 1.2.3 Quantification du signal audio

- À 3 bits : le son devient rugueux et très bruité, fortement altéré.
- À 8 bits : la voix reste compréhensible mais moins naturelle.

### 1.2.4 Extraction et séparation de mots

Après repérage visuel, les deux mots ont été extraits via tranches temporelles.

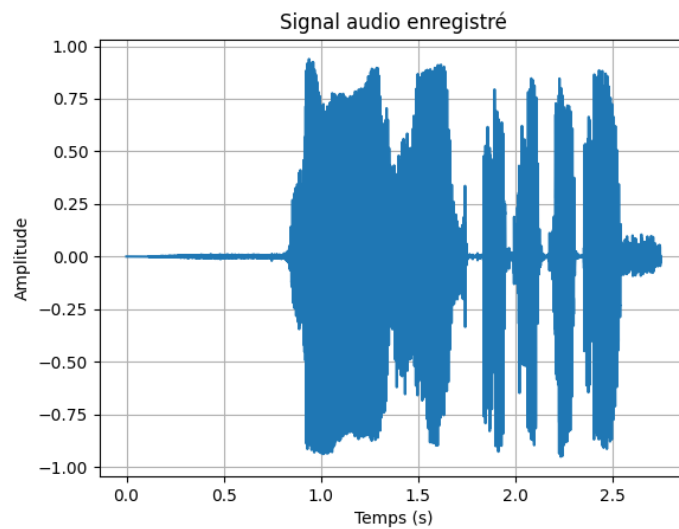
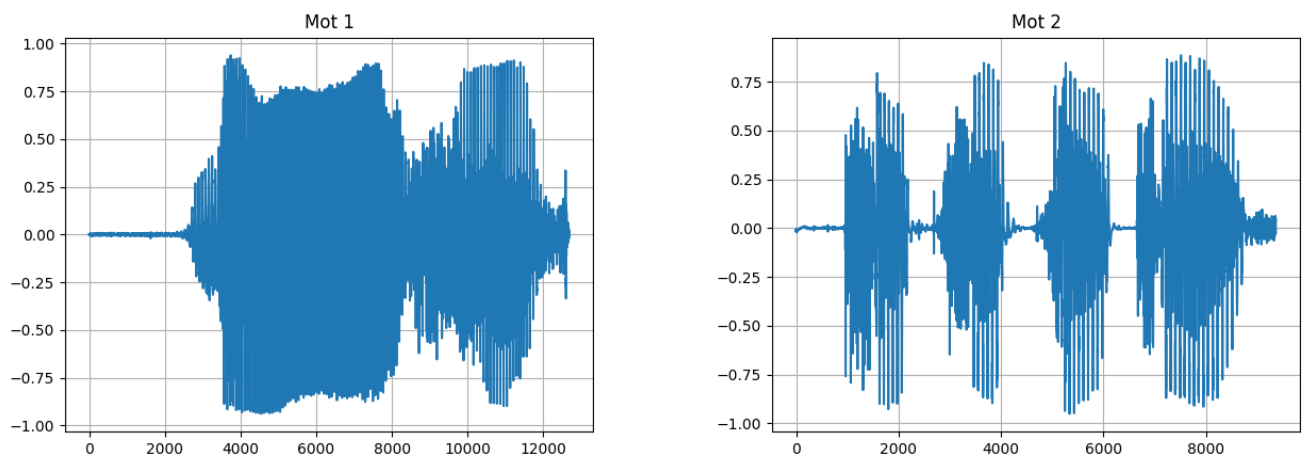


Figure 6: Signal audio enregistré



(a) Mot 1: "Bonjour"

(b) Mot 2: "ChatGpt"

Figure 7: Séparation des mots dans le signal audio

## 2 Partie 2: Classification des signaux

### 2.1 Exemple de calcul théorique

Soit un signal sinusoïdal discret défini par :

$$x[n] = A \sin(2\pi f n T_e)$$

L'autocorrélation théorique du signal discret est définie par :

$$R_{xx}[k] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot x[n+k]$$

En remplaçant l'expression de  $x[n]$  :

$$\begin{aligned} R_{xx}[k] &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A \sin(2\pi f n T_e) \cdot A \sin(2\pi f (n+k) T_e) \\ &= A^2 \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sin(2\pi f n T_e) \cdot \sin(2\pi f n T_e + 2\pi f k T_e) \end{aligned}$$

En utilisant l'identité trigonométrique :

$$\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

On a :

$$\sin(2\pi f n T_e) \cdot \sin(2\pi f n T_e + 2\pi f k T_e) = \frac{1}{2} [\cos(2\pi f k T_e) - \cos(4\pi f n T_e + 2\pi f k T_e)]$$

$$\Rightarrow R_{xx}[k] = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f k T_e)$$

car la somme de  $\cos(4\pi f n T_e + \cdot)$  sur une grande fenêtre  $N$  tend vers 0.

**Conclusion :** l'autocorrélation théorique du signal sinusoïdal discret est donnée par :

$$R_{xx}[k] = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f k T_e)$$

où :

- $A$  est l'amplitude du signal,
- $f$  est la fréquence du signal en Hz,
- $T_e = \frac{1}{f_e}$  est la période d'échantillonnage,
- $k \in \mathbb{Z}$  est le décalage (lag) discret.

### 2.2 Programmation

On calcule l'autocorrélation pour un signal sinusoïdal échantillonné en utilisant la formule :

$$R_{xx}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot x[n+k]$$

```
def autocorrelation_manual(x):
    N = len(x)
    r = np.zeros(2*N - 1)
    lags = np.arange(-N + 1, N)
    for k in range(-N + 1, N):
        somme = 0
        for n in range(N - abs(k)):
            somme += x[n] * x[n+k] if k >= 0 else x[n - k] * x[n]
        r[k + N - 1] = somme
    return lags, r
```

On compare avec l'autocorrélation calculée avec numpy et on trace la différence entre les deux résultats pour visualiser les écarts. Pour convertir les abscisses en secondes, on utilise la formule :

$$t = k.T_e = \frac{k}{f_e}$$

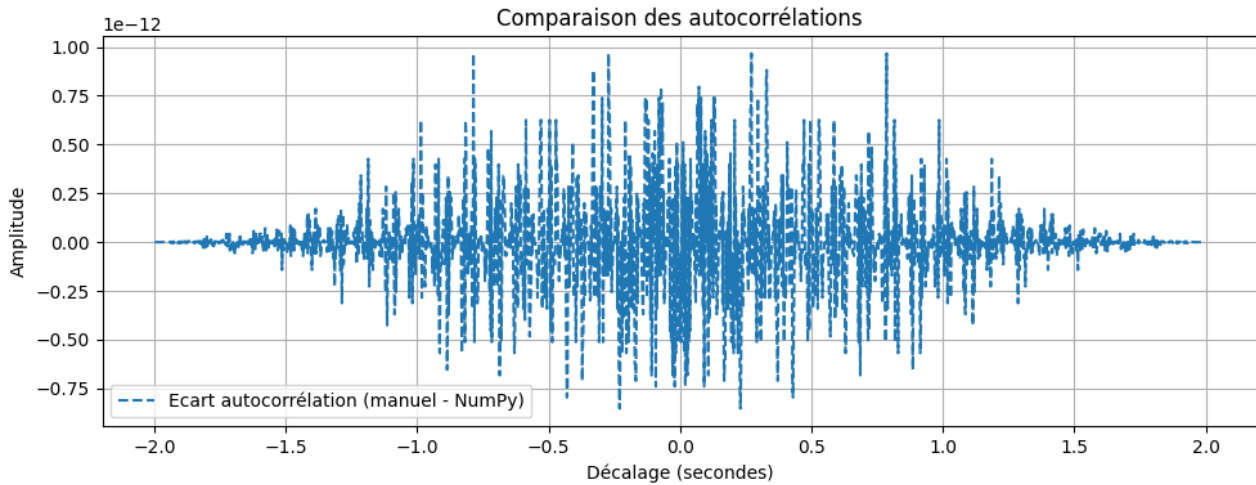


Figure 8: Ecart entre l'autocorrélation manuelle et celle de numpy

L'écart est trop petit entre les deux méthodes (de l'ordre de  $10^{-12}$ ). Ceci est dû à la précision numérique des calculs et au fait que l'autocorrélation numpy est calculée différemment en utilisant plusieurs techniques d'optimisation.

On calcule le rapport des énergies entre la différence entre les deux méthodes et l'autocorrélation de numpy:

$$\text{rapport} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \text{diff}[k]^2}{\sum_{k=0}^{N-1} \text{autocorr}[k]^2}$$

On trouve plusieurs valeurs de rapport pour différentes valeurs de N. Ceci est dû à la variation de l'énergie du signal en fonction de N, car l'autocorrélation et l'énergie sont sensibles à la longueur du signal (somme de 0 à N-1). On rajoute donc des valeurs au numérateur et au dénominateur dans le calcul de ce rapport (qui ne sont pas équivalentes vu l'écart entre les deux méthodes) ce qui explique des valeurs de rapport différentes.

```

• (.venv) deappool@deadpool-laptop:~/Desktop/td1_TS$ /home/deappool/D
Rapport d'énergie (diff vs autocorrélation NumPy) : 2.7622e-30
• (.venv) deappool@deadpool-laptop:~/Desktop/td1_TS$ /home/deappool/D
Rapport d'énergie (diff vs autocorrélation NumPy) : 2.7622e-30
• (.venv) deappool@deadpool-laptop:~/Desktop/td1_TS$ /home/deappool/D
Rapport d'énergie (diff vs autocorrélation NumPy) : 1.2268e-29
• (.venv) deappool@deadpool-laptop:~/Desktop/td1_TS$ /home/deappool/D
Rapport d'énergie (diff vs autocorrélation NumPy) : 6.2075e-29

```

Figure 9: Valeurs du rapport pour plusieurs valeurs de N

## 2.3 Application à la classification de quelques signaux simples

On génère les signaux demandés avec le code suivant :



```

# Parametres communs
fe = 11000          # frequence d'echantillonnage
duration = 1        # duree en secondes
t = np.linspace(0, duration, int(fe * duration), endpoint=False)

# 1. Signal sinusoidal de 200 Hz
f = 200
sinus = np.sin(2 * np.pi * f * t)

# 2. Signal triangulaire centre en 0 (serie de Fourier avec 10 termes)
tri = np.zeros_like(t)
for k in range(1, 11):
    n = 2 * k - 1 # uniquement les harmoniques impaires
    tri += ((-1)**((k+1)) / n**2) * np.sin(2 * np.pi * n * f * t)
tri *= (8 / (np.pi**2)) # normalisation serie de Fourier

# 3. Bruit blanc gaussien
taille = fe # 1 seconde
bruit = np.random.randn(taille)
bruit /= np.max(np.abs(bruit)) # normalisation pour eviter la saturation

```

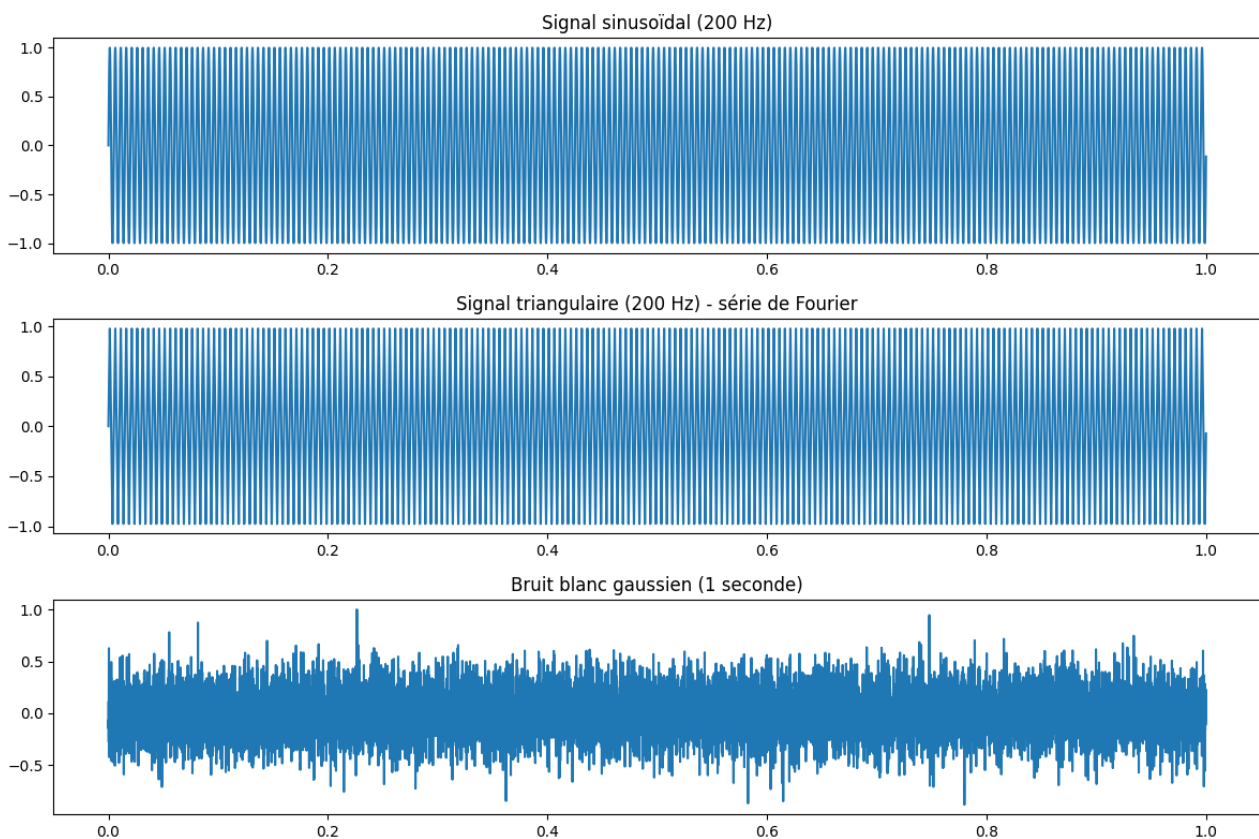


Figure 10: Signaux générés

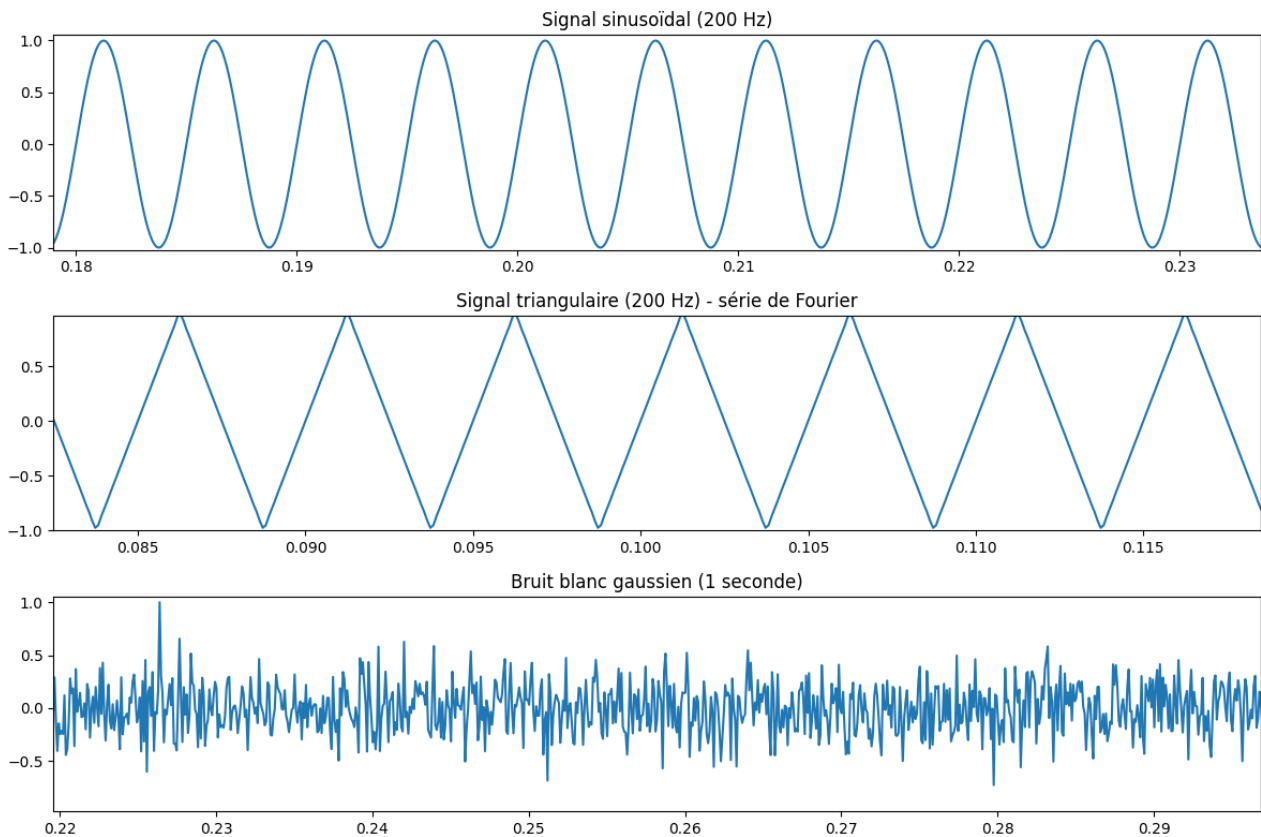


Figure 11: Signaux générés (zoom)

On calcule l'autocorrélation pour chaque signal sur une partie de durée de 30ms. C'est une durée typique en traitement du signal pour analyser la parole (équilibre entre résolution temporelle et fréquence). Elle est suffisante pour voir une structure (formants, périodicité...) sans mélanger des parties trop différentes du signal. On trace également l'autocorrélation du signal enregistré sur deux tranches de 30ms (et 80ms) à des moments différents (1000ms et 1500ms). Cela nous permettra de comparer l'autocorrélation à différents moments afin de mettre en oeuvre la non-stationnarité du signal.

Un signal est dit **stationnaire** si ses propriétés statistiques, telles que la moyenne, la variance et l'autocorrélation, ne varient pas dans le temps.

L'analyse des autocorrélations montre que :

- Le signal vocal « aa » est **non stationnaire** car ses caractéristiques changent entre différentes tranches temporelles (voix humaine évolue dans le temps).
- Le signal de bruit blanc gaussien est **stationnaire**, ses propriétés statistiques étant constantes dans le temps (Pic au centre, décroissance rapide).
- Les signaux sinusoïdal et triangulaire, synthétisés sur quelques périodes, sont également **stationnaires** car ils sont périodiques et leurs statistiques ne varient pas dans le temps.

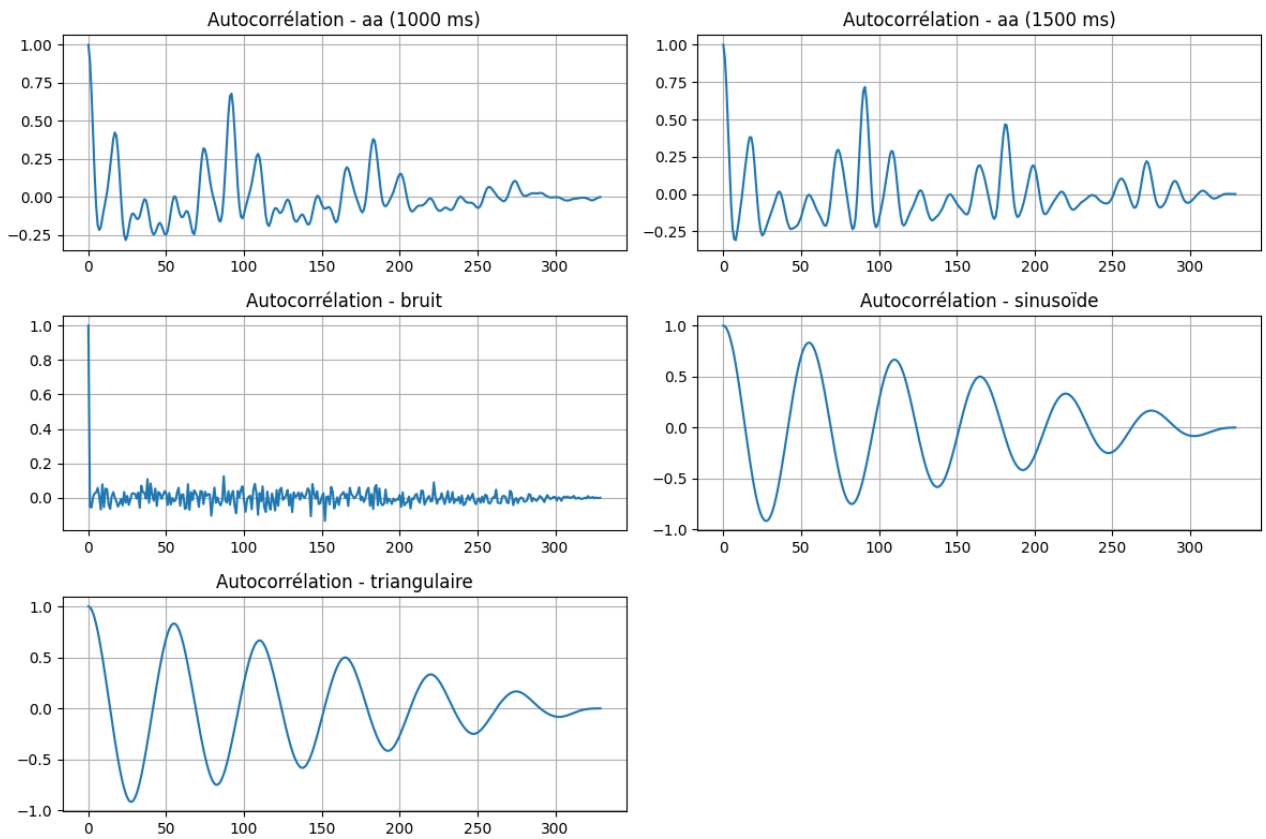


Figure 12: autocorrélation des signaux sur 30ms

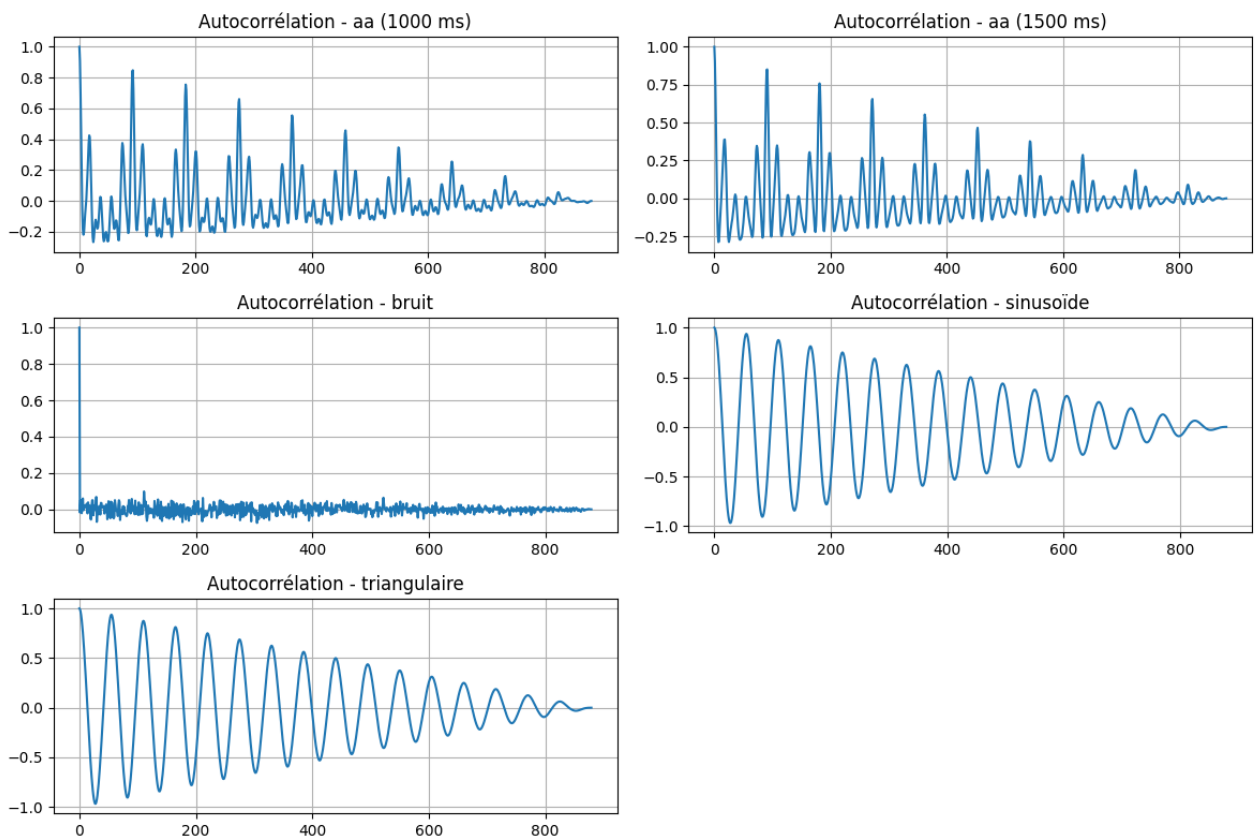


Figure 13: autocorrélation des signaux sur 80ms

## 2.4 Classification de signaux de parole voisés ou non voisés

Le signal est découpé en tranches de 30 ms pour analyser leur autocorrélation. Les résultats montrent clairement deux types de comportements :

- **Parties non voisées** (« chhhh ») : l'autocorrélation est bruitée, sans périodicité marquée, caractéristique des sons fricatifs.
- **Parties voisées** (« aaaa ») : l'autocorrélation présente des pics réguliers, révélant une structure périodique due à la vibration des cordes vocales.

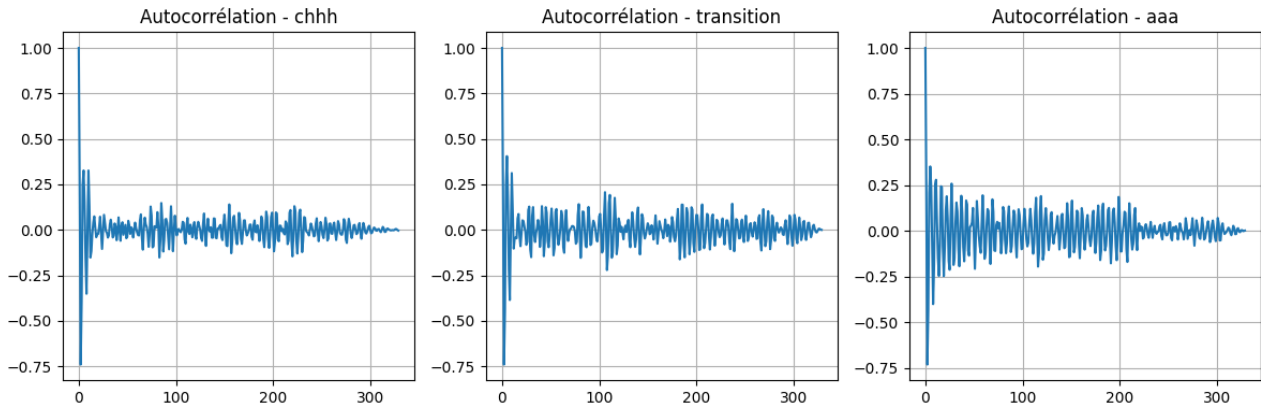


Figure 14: Autocorrélation de différentes tranches du mot « chat » : (gauche) non voisée, (milieu) transition, (droite) voisée.

L'autocorrélation permet d'estimer la fréquence fondamentale  $f_0$  d'un signal voisé. On s'attend à ce qu'un signal périodique présente un maximum secondaire au retard correspondant à sa période fondamentale  $T_0 = \frac{1}{f_0}$ .

Pour identifier les pics secondaires dans l'autocorrélation, nous utilisons la fonction `find_peaks` de `scipy.signal`. Afin d'éviter de détecter des pics non significatifs dus au bruit ou à des résonances (formants), deux paramètres doivent être soigneusement choisis :

- **distance minimale** entre les pics, choisie pour rejeter les pics trop proches de  $t = 0$ , qui ne peuvent pas correspondre à une fréquence fondamentale réaliste. On impose donc une période fondamentale minimale correspondant à une fréquence maximale plausible pour la voix humaine, généralement estimée à environ 400 Hz. Cela conduit à une période minimale d'une voix humaine raisonnable  $T_{0,\min} = \frac{1}{f_{0,\max}} = \frac{1}{400 \text{ Hz}} \Rightarrow \text{distance} = \frac{f_e}{f_{0,\max}} \approx 40$  échantillons.
- **hauteur minimale** des pics : après normalisation de l'autocorrélation (valeur maximale = 1), on impose que seuls les pics avec une amplitude supérieure à 0,1 soient retenus, pour éviter de détecter du bruit.

On utilise donc:

```
peaks, _ = find_peaks(ac, height=0.05, distance=40)
```

Pour la tranche correspondant à la voyelle « a » dans l'enregistrement (partie voisée), nous obtenons après traitement:

- Indices des 4 premiers pics détectés : [5, 59, 119, 199]
- Le premier pic au-delà de 40 échantillons est à lag = 59
- On en déduit une fréquence fondamentale :

$$f_0 = \frac{f_e}{\text{lag}} = \frac{16\,000}{59} \approx 271,2 \text{ Hz}$$

Sachant que l'enregistrement a été réalisé par un homme, on s'attend normalement à une fréquence fondamentale située entre 85 et 180 Hz. La valeur mesurée de 271 Hz est donc relativement élevée, ce qui peut s'expliquer par une voyelle très accentuée, un enregistrement particulier ou une éventuelle confusion dans la détection du pic de l'autocorrélation. Mais cette valeur reste plausible pour une voix humaine adulte et correspond à une vibration régulière des cordes vocales.

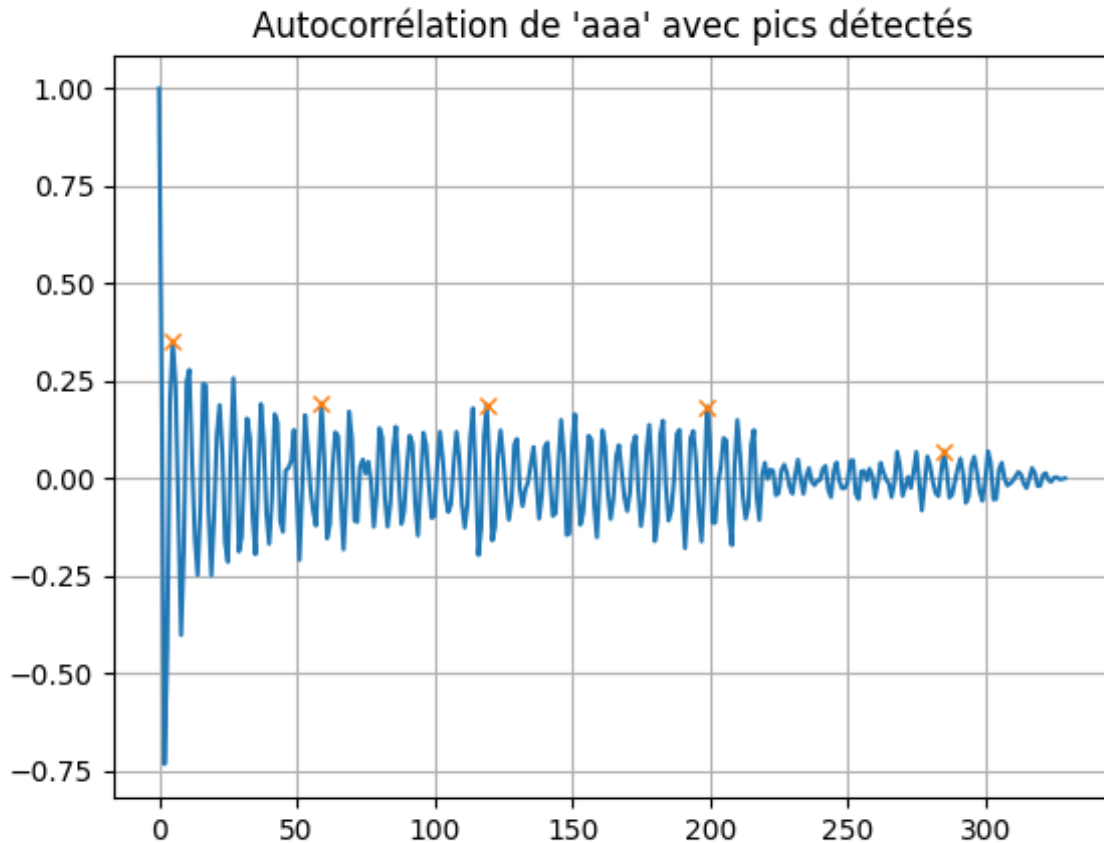


Figure 15: Autocorrélation de la tranche analysée avec les pics détectés.

### 3 Partie 3: Aspects fréquentiels

#### 3.1 Echantillonnage

Le théorème de Nyquist-Shannon stipule qu'un signal bande limitée, dont la fréquence maximale est  $f_0$ , peut être parfaitement reconstruit à partir de ses échantillons si la fréquence d'échantillonnage vérifie :

$$f_e > 2f_0$$

La fréquence  $f_e = 2f_0$  est appelée **fréquence de Nyquist** et constitue la limite minimale pour éviter le phénomène de repliement spectral (*aliasing*).

On échantillonne donc le signal selon trois cas distincts :

- **Cas 1** :  $f_e = 2f_0$  (fréquence de Nyquist),
- **Cas 2** :  $f_e = 5f_0$  (fréquence supérieure),
- **Cas 3** :  $f_e = 0,8f_0$  (fréquence inférieure).

On voit que pour les deux premiers cas, le signal échantillonné est fidèle à la forme du signal d'origine. En revanche, pour le troisième cas, l'échantillonnage à une fréquence inférieure à la fréquence de Nyquist entraîne un repliement spectral, rendant le signal méconnaissable.

#### 3.2 La Transformée de Fourier discrète (TFD)

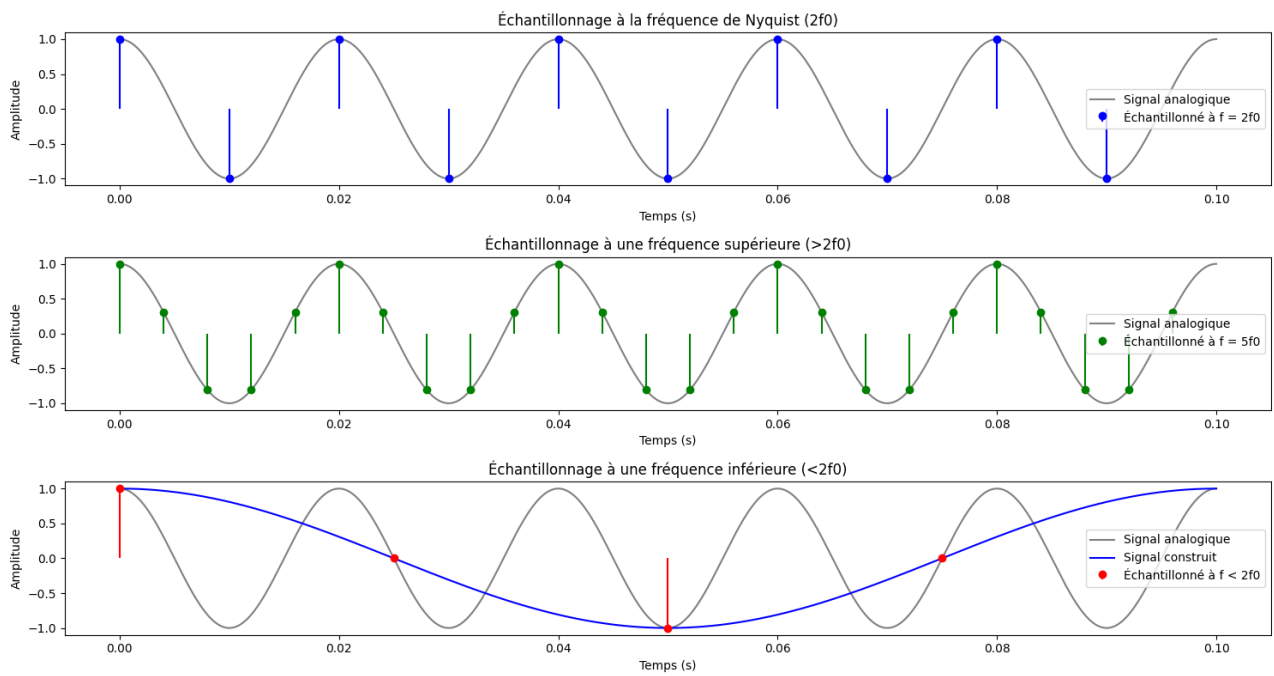


Figure 16: Signaux échantillonnés