رياضيات تخصصية

التفاضل

التفاضل

١

اسم الوحدة: التفاضل

الجدارة: معرفة مفهوم التفاضل وكيفية تفاضل الدوال المشهورة

الأهداف:

بعد دراسة هذه الوحدة يكون للطالب القدرة على معرفة:

- المفهوم الرياضى للتفاضل.
- التفسير الهندسي للمشتقة.
- تفاضل الدوال الأساسية (كثيرات الحدود، والدوال المثلثية، والأسية واللوغارتمية).
- إيجاد القيم الصغرى والعظمى للدالة.

مستوى الأداء المطلوب: أن يصل المتدرب إلى إتقان هذه الوحدة بنسبة ٨٠٪ .

الوقت المتوقع للتدريب: إثنا عشر ساعة.

التفاضل

١. تعريف المشتقة

ليكن I مجالا من $\Re$، x_0 نقطة من I، $I \neq \{x_0\}$ و $f : I \to \Re$

نقول عن الدالة f أنها قابلة للاشتقاق عند x_0 إذا وجد عدد حقيقي b بحيث

$\lim\limits_{x \to x_0, x \neq x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = b$ و تسمى b مشتقة f عند x_0 و نرمز لها بـ $f'(x_0)$

و نقول عن f أنها قابلة للاشتقاق على مجال I إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة x_0 من I وتسمى الدالة

$$f' : I \to \Re$$
$$x \to f'(x)$$

بالمشتقة الأولى للدالة f

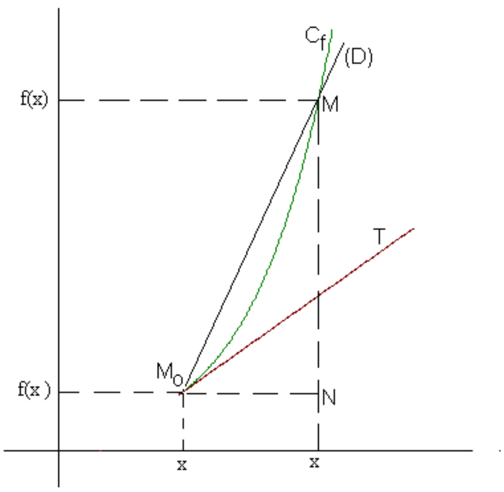
ملاحظة١: f قابلة للاشتقاق عند x_0 إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي b و تابع ε لمتغير حقيقي بحيث من أجل كل $(x_0 + h)$ يكون لدينا

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + bh + h\varepsilon(h), \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

ملاحظة٢: $f'(x_0) \neq (f(x_0))'$

٢. التفسير الهندسي لمفهوم المشتقة

مشتقة f عند x_0 هو ميل المماس للمنحني C_f الممثل لـ f عند النقطة M_0 ذات الإحداثية $(x_0, f(x_0))$



$$\text{ميل المستقيم } (D) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\overline{NM}}{\overline{M_0N}}$$

عندما يؤول x إلى x_0 نلاحظ أن المستقيم (D) يؤول إلى M_0T المماس لـ C_f عند M_0

٣. القوانين العامة للمشتقات

القانون ١: اشتقاق الدوال ذات الأس n

لتكن الدالة: $y = f(x) = x^n$

فإن $y' = nx^{n-1}$

مثال ٧: إذا كانت $y = x^3$

فإن $y' = 3x^{3-1} = 3x^2$

مثال ٨: إذا كانت $y = x^{-4}$

فإن $y' = -4x^{-4-1} = -4x^{-5}$

ومنه فان مشتقة $y = x$ تساوي العدد 1

لأن $y = x \Rightarrow y' = 1x^{1-1} = x^0 = 1$

القانون ٢: مشتق الدالة الثابتة $y = c$ حيث c عدد حقيقي معلوم هو $y' = 0$

مثال ٩: إذا كانت $y = 7$ فإن $y' = 0$ و إذا كانت $y = -5$ فإن $y' = 0$

القانون ٣: مشتق الدالة $y = ax^n$ هو $y' = nax^{n-1}$

مثال ١٠: إذا كانت $y = 3x^6$

فإن $y' = 3 \times 6x^{6-1} = 18x^5$

مثال ١١: أوجد مشتقة الدالة $y = 5\sqrt[3]{x}$

الحل:

لدينا $y = 5\sqrt[3]{x} = 5(x)^{\frac{1}{3}}$

إذاً $y' = \frac{1}{3} \times 5x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{5}{3}x^{\frac{-2}{3}}$

القانون ٤: مشتقة مجموع أو فوارق دوال

لتكن الدالة $F(x)$ تكتب على الشكل $F(x) = f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_{n-1}(x) \pm f_n(x)$ حيث $f_1, \ldots, f_n(x)$ دوال قابلة للاشتقاق فإن $F'(x) = f_1'(x) \pm f_2'(x) \pm \ldots \pm f_{n-1}(x) \pm f_n(x_n)$

مثال ١٢: لتكن الدالة $y = 4x^{-3} - 5x^2 + 7x - 12$

فإن $y' = -3 \times 4x^{-3-1} - 5 \times 2x^{2-1} + 7x^{1-1} = -12x^{-4} - 10x + 7$

القانون ٥: مشتقة جداء دالتين

لتكن الدالة $F(x)$ تكتب على الشكل $F(x) = f_1(x).f_2(x)$ حيث $f_1(x), f_2(x)$ دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال I من $\Re$. فإن $F'(x) = f_1'(x)f_2(x) + f_2'(x)f_1(x)$

مثال ١٣: لتكن الدالة $F(x) = (3x-2)(4x+1)$

فإن
$$F'(x) = 3(4x+1) + 4(3x-2)$$
$$= 12x + 3 + 12x - 8 = 24x - 5$$

القانون ٦: مشتقة قسمة دالتين

لتكن الدالة $F(x)$ تكتب على الشكل $F(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ حيث $f_1(x), f_2(x)$ قابلتين للاشتقاق على المجال I من $\Re$ و $f_2(x) \neq 0$ على المجال I من $\Re$. فإن
$$F'(x) = \frac{f_1'(x)f_2(x) - f_2'(x)f_1(x)}{\left(f_2(x)\right)^2}$$

مثال ١٤: أوجد مشتقة الدالة $y = \frac{8x^7}{2x-1}$ حيث $x \neq \frac{1}{2}$

الحل:

لدينا $f_1(x) = 8x^7 \Rightarrow f_1'(x) = 7 \times 8x^{7-1} = 56x^6$ و $f_2(x) = 2x - 1 \Rightarrow f_2'(x) = 2$

إذاً
$$F'(x) = \frac{f_1'(x)f_2(x) - f_2'(x)f_1(x)}{(f_2(x))^2} = \frac{56x^6(2x-1) - 2\times 8x^7}{(2x-1)^2} = \frac{56x^6(2x-1) - 16x^7}{(2x-1)^2}$$
$$= \frac{112x^7 - 56x^6 - 16x^7}{(2x-1)^2} = \frac{96x^7 - 56x^6}{(2x-1)^2} = \frac{8x^6(12x-7)}{(2x-1)^2}$$

القانون ٧: مشتقة الدالة التي تكتب على الشكل $F(x) = (f(x))^n$

إذا كانت $F(x) = (f(x))^n$ حيث $f(x)$ قابلة للاشتقاق فإن
$$F'(x) = n(f(x))^{n-1} f'(x)$$

مثال ١٥: أوجد مشتقة الدالة $y = F(x) = 4(2x^2 + 3x - 2)^2$

الحل:

لدينا $f(x) = (2x^2 + 3x - 2) \Rightarrow f'(x) = 4x + 3$

إذا $y' = F'(x) = 2 \times 4(2x^2 + 3x - 2)^{2-1}(4x+3) = 8(2x^2 + 3x - 2)(4x+3)$

تمارين

أوجد المشتقة الأولى لما يلي:

1) $y=(2x^3-7)(3x^2)$	6) $y=\frac{(3x-2)(x+7)}{3x-1}$	11) $y=\left(\frac{\sqrt{2x-7}}{x^2}\right)^{-1}$	16) $y=\frac{(3-2x)^{\frac{4}{3}}}{x^2}$
2) $y=\frac{2x^2-5}{3x}$	7) $y=\frac{3x^2}{(5x+7)(2x-1)}$	12) $y=\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{3/2}$	17) $y=x^3(5x^2+1)^{\frac{-2}{3}}$
3) $y=\frac{2}{3x^2-7x+4}$	8) $y=(2x^4-1.9)^3$	13) $y=\sqrt{\frac{2x}{x^2+1.8}}$	18) $y=2x^{-3}+7x^{-5}$
4) $y=\frac{5}{4x^3-3x^2}$	9) $y=\frac{\sqrt{x^3+4}}{x^2(x-2)^3}$ $\square$	14) $y=x^2\sqrt{x-1}$	19) $y=(4x^2\sqrt{x^3})^{1/4}$
5) $y=\frac{1}{x+2}-x$	10) $y=(2x^3-4x+7)^{-2}$	15) $y=\frac{1.9}{(2x+4)^3}$	20) $y=\sqrt{\frac{x-2}{x^2+5}}$

٤. قواعد إشتقاق الدوال المثلثية:

١) لتكن الدالة $y = \sin u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$ فإن

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(\sin u)}{du}\frac{du}{dx} = \cos u\frac{du}{dx}$$

٢) لتكن الدالة $y = \cos u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$ فإن

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(\cos u)}{du}\frac{du}{dx} = -\sin u\frac{du}{dx}$$

مثال ١٦: لتكن الدالة $y = \sin(2x^3 - 3)$

فإن $y' = 3 \times 2x^2 \cos(2x^3 - 3) = 6x^2 \cos(2x^3 - 3)$

مثال١٧: أوجد مشتقة الدالة $y = \cos(2\theta^3 - 3\theta^{-2})$

الحل:

لدينا $u = 2\theta^3 - 3\theta^{-2} \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = 6\theta^2 + 6\theta^{-3}$

إذاً $y' = -(6\theta^2 + 6\theta^{-3})\sin(2\theta^3 - 3\theta^{-2})$

٣) لتكن الدالة $y = \tan u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$ فإن

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{d(\tan u)}{du}\frac{du}{dx} = \sec^2 u\frac{du}{dx}$$

مثال ١٨: إذا كانت $y = \tan x^{-2}$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

لدينا $u = x^{-2} \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2x^{-3}$

إذاً $y' = \frac{d(\tan u)}{dx} = \frac{du}{dx}\sec^2 u = -2x^{-3}\sec^2 x^{-2}$

٤) لتكن الدالة $y = \cot u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$ فإن

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{d(\cot u)}{du}\frac{du}{dx} = -\csc^2 u\frac{du}{dx}$$

مثال ١٩: احسب مشتقة الدالة $y=\cot 3x$

الحل:

لدينا $u=3x \Rightarrow \dfrac{du}{dx}=3$

ومنه فإن $y'=\dfrac{d(\cot u)}{dx}=-\dfrac{du}{dx}\csc^2 u=-3\csc^2 3x$

٥) لتكن الدالة $y=\sec u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$ فإن

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\frac{d(\sec u)}{du}\frac{du}{dx}=\frac{du}{dx}\tan u\,\sec u$$

مثال ٢٠: احسب مشتقة الدالة $y=\sec\theta^2$

الحل:

لدينا $u=\theta^2 \Rightarrow \dfrac{du}{d\theta}=2\theta$

ومنه $y'=\dfrac{d(\sec u)}{d\theta}=\dfrac{du}{d\theta}\tan u\,\sec u=2\theta\tan\theta^2\sec\theta^2$

٦) لتكن الدالة $y=\csc u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$ فإن

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\frac{d(\csc u)}{du}\frac{du}{dx}=-\frac{du}{dx}\cot u\csc u$$

مثال ٢١: احسب مشتقة الدالة $y=\csc x^3$

الحل:

لدينا $u=x^3 \Rightarrow \dfrac{du}{dx}=3x^2$

ومنه $y'=\dfrac{d(\csc u)}{dx}=-\dfrac{du}{dx}\cot u\,\csc u=-3x^2\cot x^3\csc x^3$

مثال ٢٢: احسب مشتقة الدالة $y=\csc(2x^5-3)$

الحل:

لدينا $u=2x^5-3 \Rightarrow \dfrac{du}{dx}=10x^4$

$$y'=\frac{d(\csc u)}{dx}=-\frac{du}{dx}\cot u\,\csc u=-10x^4\cot(2x^5-3)\csc(2x^5-3)$$

تمارين: احسب المشتقة الأولى للدوال التالية:

1) $y=\sin^5 3x^2$	5) $y=\csc^3(-7x^4)$	9) $y=\dfrac{\sin x^2}{\cos^2 x^2}$	13) $y=\sin(\cos 2x)$
2) $y=x\tan\dfrac{1}{x}$	6) $y=\sqrt{1+\cos^2 x}$	10) $y=\sec(2x+1)^{\frac{5}{2}}$	14) $y=\sqrt{1+\sin x}$
3) $y=\sqrt{x}\cos 2x$	7) $y=\tan^2(x^2+1)$	11) $y=\dfrac{1}{x^2\sin^3 x}$	15) $y=x\cot(-4x)$
4) $y=\sqrt{\csc x^3}$	8) $y=(x^4-\cot x)^3$	12) $y=(\sin x-\cos x)^2$	16) $y=x\ \csc x$

٥. اشتقاق الدوال الأسية واللوغارتمية

١,٥. قوانين اشتقاق الدوال الأسية

القانون ١: إذا كانت لدينا الدالة $y = ba^u$ حيث u دالة قابلة للاشتقاق في x فإن

$$\frac{dy}{dt} = ba^u \ln a\, u'$$

مثال ٢٢: اشتق الدالة المعرفة كما يلي: $y = 8\ 2^{\left(3x^2+4x+5\right)}$

الحل:

$$y' = 8\ 2^{3x^2+4x+5} \ln 2\left(6x+4\right) = \left(48x+32\right)\ln 2\ 2^{3x^2+4x+5}$$

القانون ٢: اشتقاق الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعي أي $e \cong 2{,}718$

إذا كانت لدينا الدالة $y = b\ e^u$ حيث u دالة قابلة للاشتقاق في x فإن

$$y' = \frac{dy}{dt} = b e^u u'$$

مثال ٢٣: احسب المشتقة الأولى للدالة التالية: $y = 8\ e^{2x+1}$

الحل:

المشتقة الأولى للدالة السابقة يعطى كما يلي: $y' = 8 \times 2 e^{2x+1} = 16 e^{2x+1}$

مثال ٢٤: إذا كانت $y = -5\ e^{\sin x}$

فإن $y' = -5\ \cos x\, e^{\sin x}$

٢,٥. قوانين اشتقاق الدوال اللوغارتمية

القانون ١: إذا كانت لدينا الدالة $y = b \log_a u$ حيث $a > 0, a \neq 1$ ولتكن u دالة قابلة للاشتقاق في x

فإن المشتقة الأولى تعطى كما يلي:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = b\frac{u'}{u}\log_a e$$

مثال٢٥: احسب المشتقة الأولى للدالة التالية: $y = 3\log\left(6x^5\right)$

الحل:

المشتقة الأولى للدالة السابقة يعطى كما يلي : $y' = \frac{3\left(30x^4\right)\log e}{6x^5} = \frac{15x^4}{x^5}\log e = \frac{15}{x}\log e.$

القانون ٢: إذا كانت لدينا الدالة $y=\ln u$ حيث u دالة قابلة للاشتقاق في x فإن

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{u'}{u}$$

مثال ٢٦: اشتق الدالة التالية: $y=e^{-x}\ln x^2$

الحل:

$$y'=-e^{-x}\ln x^2+\frac{2x}{x^2}e^{-x}=\left(\frac{2}{x}-\ln x^2\right)e^{-x}$$

تمارين: احسب المشتقة الأولى للدوال التالية:

1) $y=\log_3\left(3x^2-5\right)$	5) $y=\ln\frac{x^4}{(3x-4)^2}$	9) $y=e^{x^2}$	13) $y=e^{-x}\ln x$
2) $y=\ln(x+3)^2$	6) $f(x)=\ln\ \sin 3x$	10) $y=5^{3x^2}$	14) $y=e^{-2x}\sin 3x$
3) $y=\ln^2(x+3)$	7) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$	11) $y=x^2 3^x$	15) $f(x)=\ln\tan e^{x^2}$
4) $y=\ln\left(x^2+2\right)\left(x^2+3\right)$	8) $y=e^{-\frac{1}{2}x}$	12) $y=5e^{\sin 2x}-x$	16) $f(x)=\ln\sqrt{1-2x}$

٦ . الاشتقاق الضمني

تعرف الدالة في بعض الحالات بمعادلة من الشكل $f(x,y)=0$ تحتوي المتغير x وقيمة الدالة y

مثال٢٧ :

$$xy=1 \qquad (1)$$

إحدى الطرق لحساب المشتقة الأولى $\frac{dy}{dx}$ هي كتابة المعادلة (1) من الشكل:

$$y=\frac{1}{x} \qquad (2)$$

ومنه يمكن حساب المشتقة كما يلي:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\right]=-\frac{1}{x^2}$$

كما أنه يوجد إمكانية أخرى وذلك باشتقاق طرفي المعادلة (1) قبل كتابة y بدلالة دالة في المتغير x ، باعتبارها دالة قابلة للاشتقاق(وإن كان ليس دائما هو الحال)، ومنه فإن:

$$\frac{d}{dx}(xy)=\frac{d}{dx}(1)\Rightarrow x\frac{d}{dx}(y)+y\frac{d}{dx}(x)=0\Rightarrow x\frac{dy}{dx}+y=0$$

ثم نستخرج $\frac{dy}{dx}$ بدلالة x,y

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$$

نعوض (2) في العبارة الأخيرة فنحصل على:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^2}$$

- الطريقة الثانية لحساب المشتقة تسمى بالاشتقاق الضمني وتستعمل في حساب مشتقة دالة معرفة بشكل ضمني بمعادلة من الشكل: $f(x,y)=0$

دون حل هذه المعادلة وذلك باشتقاق طرفي هذه المعادلة ثم نستخرج قيمة المشتقة y' بدلالة x, y

- ويستعمل الاشتقاق الضمني خاصة عندما يصعب أو لا يمكن كتابة y بدلالة المتغير x وعندها نكتفي في حساب المشتقة y' بكتابة عبارتها بدلالة x, y

قاعدة

لتكن المعادلة $f(x,y)=0$ تحتوي المتغير x وقيمة الدالة y فإن اشتقاق y^n بالنسبة لـ x يعطى بما يلي:

$$\frac{d(y^n)}{dx}=ny^{n-1}\frac{dy}{dx}=ny^{n-1}y'$$

إننا اشتققنا y ضمنيا بالنسبة لـ x و ذلك باعتبار y دالة في x معرفة بشكل ضمني بالمعادلة المعطاة

$$f(x,y)=0$$

مثال٢٨: أوجد $\frac{dy}{dx}$ في ما يلي :

$$xy^3-3x^2=xy+5 \qquad (1)$$

الحل:

نشتق طرفي المعادلة (1) فنحصل على:

$$y^3+3xy^2y'-6x=y+xy'$$
$$\Rightarrow 3xy^2y'-xy'=y-y^3+6x$$
$$\Rightarrow y'\left[x(3y^2-1)\right]=y-y^3+6x$$
$$\Rightarrow y'=\frac{y-y^3+6x}{x(3y^2-1)}$$

مثال٢٩: ليكن $x^2-2xy+y^2=0$ أوجد المشتقة الأولى y'

الحل:

نشتق طرفي المعادلة المعطاة فنحصل على:

$$\frac{d}{dx}(x^2-2xy+y^2)=\frac{d}{dx}(0)$$
$$\Rightarrow 2x-2y-2xy'+2yy'=0$$
$$\Rightarrow y'(2y-2x)=2y-2x \Rightarrow y'=\frac{2y-2x}{2y-2x}=1$$

مثال٣٠: استخدم الاشتقاق الضمني لحساب المشتقة الأولى فيما يلي:

$$1)\ \ 5y^2+\sin y=x^2,\quad 2)\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=1,\quad 3)\,x^2=\frac{x+y}{x-y}\quad 4)x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}-y=1$$

الحل

1) نشتق طرفي المعادلة بالنسبة لـ x فنحصل على

$$\frac{d}{dx}\left[5y^2+\sin y\right]=\frac{d}{dx}\left[x^2\right]\Rightarrow 10yy'+y'\cos y=2x$$

ومنه فإن $(10y+\cos y)y'=2x$

وبالتالي فإنه يمكن كتابة المشتقة الأولى y' بدلالة x,y

$$y'=\frac{2x}{10y+\cos y}$$

وباتباع نفس الخطوات السابقة يكون لدينا ما يلي:

$2)\quad \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right]=\frac{d}{dx}(1)\ \Rightarrow -y^{-2}y'-x^{-2}=0$ $\Rightarrow y'=-\frac{x^{-2}}{y^{-2}}=\frac{y^2}{x^2}$
$3)\ \frac{d}{dx}\left[x^2\right]=\frac{d}{dx}\left[\frac{x+y}{x-y}\right]\Rightarrow 2x=\frac{(1+y')(x-y)-(1-y')(x+y)}{(x-y)^2}$ $\Rightarrow 2x(x-y)^2=(1+y')(x-y)-(1-y')(x+y)$ $\Rightarrow 2x(x-y)^2=y'(x-y+x+y)+x-y-x-y$ $\Rightarrow 2x(x-y)^2=y'(2x)-2y$ $\Rightarrow y'=\frac{2x(x-y)^2+2y}{2x}\Rightarrow y'=(x-y)^2+\frac{y}{x}$

$$(4)\ x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}-y=1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'-y'=0$$

$$\Rightarrow y'\left(\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}+1\right)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow y'=\frac{2}{3}\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{\left(\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}+1\right)}$$

يمكن استخدام الاشتقاق الضمني لحساب المشتقة لدوال لم نتطرق إليها من قبل أو يصعب معرفة قانون المشتقة لها كما هو موضح في المثال التالي:.

مثال ٣١: أوجد y' إذا كان $y=x^x$

الحل:

لدينا $y=x^x \Rightarrow \ln y=\ln x^x \Rightarrow \ln y = x\ln x$

نشتق الطرفين فنحصل على:

$$\frac{y'}{y}=\ln x + x\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{y'}{y}=\ln x+1 \Rightarrow y'=y(\ln x+1)$$

نعوض قيمة $y=x^x$ إذن يصبح لدينا $y=x^x(\ln x+1)$

تمارين

تمرين ١ : احسب ضمنيا المشتقة الأولى للدوال التالية

1) $xy+e^{xy}-y^3\sin x=y^3+9x$

2) $3x^2y^2+4xy-2y=0$

3) $x^3y^2-5x^2y+x=13$

4) $\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=1$

5) $(x^2+3y^2)^3=x$

7) $x^2=\frac{\cot y}{1+\csc y}$

8) $\tan^3(xy^2+y)=x$

9) $3x^2-4y^2=7$

10) $y^3\sin x-x^2=y^3e^{2x}$

11) $y+\sin y=x$

$6)\ xy^{2/3} + yx^{2/3} = x^2$ $\quad$ $12)\ x\cos y = y$

تمرين ٢ : احسب ميل المماس لمنحنى الدوال التالية عند النقاط المعطاة:

$1)\ x^2y - 5xy^2 + 6 = 0;\ (3,1)$	$2)\ x^{2/3} - y^{2/3} - y = 1;\ (1,-1)$
$3)\ y^2 - x + 1 = 0;\ (10,3)$	$4)\ \dfrac{1-y}{1+y} = x;\ (0,1)$

٧. المشتقات من الرتبة العليا

تعريف:

تعرف المشتقة من الرتبة n للدالة $f(x)$ على أنها المشتقة الأولى للمشتقة $(n-1)$ للدالة $f(x)$ بشرط أن تكون الدالة قابلة للاشتقاق n من المرات

فمثلا المشتقة السابعة هي المشتقة الأولى للمشتقة السادسة ولذلك لإيجاد المشتقة من الرتبة n نبدأ بالدالة فنحسب المشتقة الأولى ثم الثانية ثم الثالثة....ثم المشتقة من الرتبة $n-1$ ثم المشتقة من الرتبة n

لتكن $y = f(x)$ حيث y دالة في x و لنفرض أن f قابلة لاشتقاق n من المرات على المجال $I \subset \Re$.

فيكون لدينا التعريفات الآتية:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d\left(f(x)\right)}{dx} = f'(x)$$ (المشتقة الأولى لـ y بالنسبة لـ x)

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\left(f'(x)\right)}{dx} = f''(x)$$ (المشتقة الثانية لـ y بالنسبة لـ x)

$$y''' = \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d\left(f''(x)\right)}{dx} = f'''(x)$$ (المشتقة الثالثة لـ y بالنسبة لـ x)

$$y^{(4)} = \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{d\left(f'''(x)\right)}{dx} = f^{(4)}(x)$$ (للمشتقة الرابعة لـ y بالنسبة لـ x)

. . . .

. . . .

. . . .

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d\left(f^{(n-1)}(x)\right)}{dx} = f^{(n)}(x)$$ (للمشتقة n لـ y بالنسبة لـ x)

مثال٣٢ : أوجد المشتقة الثانية للدالة $y = \sin x$

الحل:

$$y' = \frac{d \sin x}{dx} = \cos x$$

$$y'' = \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$$

مثال ٣٣ : أوجد $\frac{d^3 y}{dx}$ (المشتقة الثالثة) إذا كانت $y = 6x^5$

الحل:

$$y' = \frac{d}{dx}\left(6x^5\right) = 5 \times 6x^4 = 30x^4$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(30x^4\right) = 4 \times 30x^3 = 120x^3$$

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(120x^3\right) = 3\times 120x^2 = 360x^2$$

قاعدة: إذا كان y كثيرة حدود من الدرجة n فإن المشتقة من الدرجة $n+1$ تساوي الصفر.

مثال ٣٤: أوجد $y^{(6)}$ للدالة $y = 2x^5 + 3x^3 + 5x - 1$

الحل:

بما أن y كثيرة حدود من الدرجة الخامسة إذن $y^{(6)} = 0$

مثال ٣٥: إذا كانت $y = e^{-x}\ln x$ فأوجد y''

الحل:

$$y' = e^{-x}\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}\left(e^{-x}\right) = \frac{e^{-x}}{x} - e^{-x}\ln x = \frac{e^{-x}}{x} - y$$

$$y'' = \frac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} - y' = \frac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} - \frac{e^{-x}}{x} + e^{-x}\ln x = -e^{-x}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \ln x\right)$$

مثال٣٦: إذا كانت $y = e^{-x}\ln x^2$ فأوجد y''

الحل: لدينا $y = e^{-x}\ln x^2 = 2e^{-x}\ln x$

ومنه ومن المثال السابق فإن $y'' = -2e^{-x}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \ln x\right)$

مثال ٣٧: إذا كانت $y = e^{-2x}\sin 3x$ فأوجد y''

الحل:

$$y' = e^{-2x}\frac{d}{dx}(\sin 3x) + \sin 3x\frac{d}{dx}\left(e^{-2x}\right) = 3e^{-2x}\cos 3x - 2e^{-2x}\sin 3x = 3e^{-2x}\cos 3x - 2y$$

$$\begin{aligned} y'' &= 3e^{-2x}\frac{d}{dx}(\cos 3x) + 3\cos 3x\frac{d}{dx}\left(e^{-2x}\right) - 2y' \\ &= -9e^{-2x}\sin 3x - 6e^{-2x}\cos 3x - 2\left(3e^{-2x}\cos 3x - 2e^{-2x}\sin 3x\right) \\ &= -e^{-2x}\left(12\cos 3x + 5\sin 3x\right) \end{aligned}$$

تمرين: جسم يتحرك على خط مستقيم بحيث أن المسافة (s) بالقدم feet عند الزمن (t) بالثانية تعطى بالمعادلة $s = t^3 - 2t$

١) أوجد السرعة الآنية عند اللحظة t تساوي ٤ ثواني

٢) أوجد التسارع الآني عند اللحظة t تساوي ٤ ثواني

٣) أوجد الزمن اللازم عندما يكون التسارع يساوي $2\ fet/\sec^2$

الحل

١) السرعة الآنية هي معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن

إذن $\frac{ds}{dt} = 3t^2 - 2$ هي السرعة بعد الزمن (t) ثانية أو عند الزمن (t) من بداية الحركة

السرعة بعد 4 ثواني $\frac{ds(4)}{dt} = (3t^2 - 2)|_{t=4} = 3(4^2) - 2 = 46\ ft/\sec$

٢) العجلة (التسارع) هي معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن

إذن $\frac{d^2s}{dt^2} = 6t$ العجلة بعد الزمن (t) ثانية أو عند الزمن (t) من بداية الحركة

التسارع بعد 4 ثواني

$$\frac{d^2s}{dt^2}\Big|_{t=4} = 6t\Big|_{t=4} = 6 \times 4 = 24\ ft/\sec^2$$

٣) الزمن اللازم عندما يكون التسارع يساوي $2\ fet/\sec^2$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 6t = 2 \Rightarrow t = \frac{1}{3}\sec$$

تمارين :

تمرين ١: أوجد المشتقة المشار إليها للدوال التالية:

1) $y = 3x^2 - 2x^3;\quad y''$

2) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{5}x^5\ ;\ y''$

3) $y = 7 + 6x^2 - 4x^4;\ y'''$

4) $y = 8x^3 - 2x^4;\ y'''$

5) $y = x(x-1)^3;y''$

6) $y = e^{-2x}(\cos 3x - \sin 2x);\ y''$

7) $y = 3x^5 - 10x^3 + 15x\ ;\ \dfrac{d^6y}{dx^6}$

8) $y = \dfrac{x}{x-4}\ ;\ \dfrac{d^2y}{dx^2}$

9) $y = \dfrac{2x}{x^2+1}\ ;y''$

10) $y = \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{x}{4};\ \dfrac{d^3y}{dx^3}$

11) $y = \sqrt{\dfrac{1}{x^2-1}}\ ;y''$

12) $y = (1+x^2)\ln x\ ;y''$

تمرين ٢: احسب المشتقة الثانية للدوال التالية عند النقاط المشار إليها:

1) $f(x) = 8x^{10} + 2x^8 - 4x^5 + 1\ ;x=1$

2) $f(x) = \sqrt{4 - x + 2x^4}\ ;\ x=1$

3) $f(x) = \dfrac{4x^2}{3x-7}\ ;\ x=2$

4) $f(x) = 2x^2\sqrt{2x^4+3}\ ;\ x=-1$

تمرين ٣: تعطى معادلة المسافة $s(km)$ بدلالة الزمن $t(h)$ أوجد السرعة والتسارع عند الزمن المشار إليه

1) $s = (2t^2-3)^4\ ;t = 2h$

2) $s = \sqrt{3.4 - t^4}\ ;t = 1h$

3) $s = t^2\sqrt{1+t^2}\ ;t = 1h$

4) $s = \dfrac{t}{2t^2-3}\ ;\ t = 4h$

5) $s = (2t+7)\sqrt{t^3-1}\ ;\ t = 2h$

6) $s = 1.8t^3 - 2.9t^2 - 1\ ;t = 3h$