UNIVERSIDAD SAN SEBASTIAN
VOCACIÓN POR LA EXCELENCIA

FIAD USS
Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño
UNIVERSIDAD SAN SEBASTIÁN

Optimización

Unidad 1: Programación Lineal

Nolbert Morales.

Facultad De Ingeniería, Arquitectura Y Diseño
Universidad San Sebastián

15 de marzo de 2024

Métodos para determinar Soluciones

Existen numerosos métodos para abordar problemas de optimización, y su aplicación se lleva a cabo después de haber modelado matemáticamente el problema, es decir, una vez que se ha expresado de manera simbólica.

Método gráfico

Este método es exclusivamente aplicable a problemas que involucran exactamente dos variables. El procedimiento implica la construcción de un gráfico bidimensional con x e y como ejes. El primer paso consiste en identificar los valores de (x, y) permitidos por las restricciones. Este objetivo se logra trazando cada una de las rectas que limitan los valores permitidos según cada restricción. Una vez que la región generada por las restricciones está delimitada tenemos dos opciones para proceder:

Cálculo en los Puntos de Esquina

En este proceso, es necesario conocer todos los puntos de intersección de las rectas que forman la región dada por las restricciones (los puntos de esquina). Supongamos que tenemos n puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, y la función a optimizar es z que depende de x e y $(z(x, y))$. Entonces, debemos calcular todos los valores de z para cada uno de los puntos de esquina, es decir, calcular

$$z(x_1, y_1), \quad z(x_2, y_2), \quad \ldots, \quad z(x_n, y_n).$$

Luego, se comparan todos los valores y, según sea el caso de minimización o maximización, se eligen los x_i e y_i que generen $z(x_i, y_i)$ menor o mayor, respectivamente. Es decir, estos valores x_i e y_i son los valores para los cuales la función es óptima.

La WYNDOR GLASS CO

La WYNDOR GLASS CO. produce artículos de vidrio de alta calidad, entre ellos ventanas y puertas de vidrio. Tiene tres plantas. Los marcos y molduras de aluminio se hacen en la planta 1, los de madera en la planta 2; la 3 produce el vidrio y ensambla los productos. Debido a una reducción de las ganancias, la alta administración ha decidido reorganizar la línea de producción de la compañía. Se discontinuarán varios productos no rentables y se dejará libre una parte de la capacidad de producción para emprender la fabricación de dos productos nuevos cuyas ventas potenciales son muy prometedoras:

Producto 1: una puerta de vidrio de 8 pies con marco de aluminio.
Producto 2: una ventana corrediza con marco de madera de 4 por 6 pies

Sabiendo que el producto 1 requiere parte de la capacidad de producción en las plantas 1 y 3 y nada en la planta 2. El producto 2 sólo necesita trabajo en las plantas 2 y 3. La división de comercialización ha concluido que la compañía puede vender todos los productos que se puedan fabricar en las plantas.

Sin embargo, como ambos productos competirían por la misma capacidad de producción en la planta 3, no está claro cuál mezcla de productos sería la más rentable. Además, el número de horas de producción disponibles por semana en cada planta para fabricar estos, número de horas de fabricación que se emplea para producir cada lote de cada artículo nuevo en cada una de las plantas y las ganancias por lote de cada producto nuevo están dadas por la siguiente tabla:

	Tiempo de producción por lote, horas		
	Producto		
Planta	**1**	**2**	**Tiempo de producción disponible a la semana, horas**
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
Ganancia por lote	$3 000	$5 000	

Determinar cuáles tasas de producción deben tener los dos productos con el fin de maximizar las utilidades totales, sujetas a las restricciones impuestas por las capacidades de producción limitadas disponibles en las tres plantas. (Cada producto se fabricará en lotes de 20 unidades, de manera que la tasa de producción está definida como el número de lotes que se producen a la semana.) Se permite cualquier combinación de tasas de producción que satisfaga estas restricciones, incluso no fabricar uno de los productos y elaborar todo lo que sea posible del otro.

Solución. Para resolver este problema, primero debemos conocer las variables, la función a optimizar y las restricciones.

- Las variables son los valores que se manipularán para obtener la solución óptima. En este caso, son el número de lotes de cada uno de los productos, es decir,

$$x_1 = \text{número de lotes del producto 1 que se fabrican por semana},$$

$$x_2 = \text{número de lotes del producto 2 que se fabrican por semana}.$$

- La función a optimizar está dada por

$$z = \text{ganancia semanal total (en miles de dólares) que generan estos dos productos.}$$

- Las restricciones son las siguientes:
  1. La tabla indica que cada lote del producto 1 que se produce por semana emplea una hora de producción en la planta 1, y solo se dispone de 4 horas semanales. En términos matemáticos, esta restricción se expresa mediante la desigualdad $x_1 \leq 4$.
  2. De igual manera, la planta 2 impone la restricción $2x_2 \leq 12$.
  3. El número de horas de producción usado a la semana en la planta 3 que se consume al elegir x_1 y x_2 como las tasas de producción de los nuevos productos sería $3x_1 + 2x_2$. En consecuencia, la expresión matemática de la restricción de la planta 3 es $3x_1 + 2x_2 \leq 18$.
  4. Por último, como las tasas de producción no pueden ser negativas, es necesario restringir las variables de decisión a valores no negativos: $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$.

Para resumir, en el lenguaje matemático de programación lineal, el problema consiste en seleccionar valores de x_1 y x_2 para maximizar

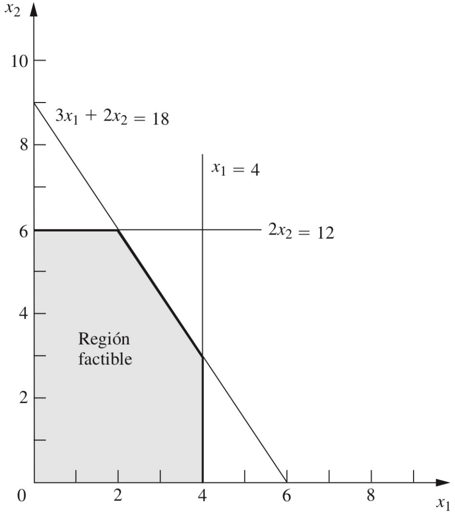
$$z = 3x_1 + 5x_2,$$

sujeto a las restricciones

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 4, \\ x_2 &\leq 6, \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18, \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

A partir de este punto, aplicamos el método gráfico mediante el cálculo en los puntos de esquina. Para esto, determinamos la región dada por las restricciones. La forma para determinar esta región es considerar cada una de las desigualdades de las restricciones como igualdades, dibujarlas en el plano cartesiano y determinar todos los puntos de esquina de la región. En este caso, tenemos lo siguiente:


x_2
10
8
6
4
2
0
2
4
6
8
x_1
$3x_1 + 2x_2 = 18$
$x_1 = 4$
$2x_2 = 12$
Región
factible

Es fácil apreciar tres puntos de esquina los cuales son:

- el punto $p_1 = (0,0)$ intersección de los ejes coordenados,
- el punto $p_2 = (0,6)$ que es la intersección del eje x_2 con la recta $x_2 = 6$,
- y el punto $p_3 = (4,0)$ intersección del eje x_1 y la recta $x_1 = 4$.

Además, existen dos puntos de esquina más, que son las intersecciones de las rectas $x_2 = 6$ con $3x_1 + 2x_2 = 18$ y la intersección de $x_1 = 4$ con $3x_1 + 2x_2 = 18$. Para determinar las coordenadas de estos puntos, debemos resolver el sistema de ecuaciones que se forma con las dos ecuaciones de las gráficas que se intersectan.

- Intersección de las rectas $x_2 = 6, 3x_1 + 2x_2 = 18$. El caso más simple es despejar una variable de una ecuación y reemplazar en la otra ecuación, aquí tenemos la variable x_2 ya despejada así que reemplazamos este valor en la otra ecuación y obtenemos:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2(6) &= 18, \\ 3x_1 &= 6, \\ x_1 &= 2, \end{aligned}$$

  Por lo tanto, el punto tiene por coordenadas $p_4 = (x_1, x_2) = (2, 6)$.
- Intersección de las rectas $x_1 = 4, 3x_1 + 2x_2 = 18$. Similar al caso anterior, tenemos que:

$$\begin{aligned} 3(4) + 2x_2 &= 18, \\ 2x_2 &= 6, \\ x_2 &= 3, \end{aligned}$$

  Por lo tanto, el punto tiene por coordenadas $p_5 = (x_1, x_2) = (4, 3)$.

Una vez obtenidos todos los puntos de esquina, es necesario evaluar la función a optimizar z en cada uno de los puntos de esquina y ordenar los valores. En este caso, tenemos que:

$$\begin{aligned}
z_{p_1} &= 3(0) + 5(0) = 0,\\
z_{p_2} &= 3(0) + 5(6) = 30,\\
z_{p_3} &= 3(4) + 5(0) = 12,\\
z_{p_4} &= 3(2) + 5(6) = 36,\\
z_{p_5} &= 3(4) + 5(3) = 27.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que $z_{p_1} < z_{p_3} < z_{p_5} < z_{p_2} < z_{p_4}$. De lo que se concluye que en el punto $p_4 = (2, 6)$ la función tiene un máximo, este es el punto óptimo para este caso.

Análisis de la Función a Optimizar

En este caso, se requiere trazar rectas paralelas y observar los puntos extremos superiores e inferiores de la región generada por las restricciones que son tocados por las rectas trazadas. Para hacer esto, asignamos un valor a la función a optimizar, digamos $z = z_0$, y trazamos la recta $L : z = ax + by$ en el plano. Luego, trazamos rectas paralelas a L, tanto superiores como inferiores. A continuación, nos enfocamos en el último punto superior e inferior que tocan las rectas paralelas más altas y bajas. Estos son los candidatos que maximizan y minimizan z.

Ejemplo WYNDOR GLASS CO

Aplicaremos el análisis de la función a optimizar al problema "La WYNDOR GLASS CO".
Del ejemplo anterior sabemos que debemos:

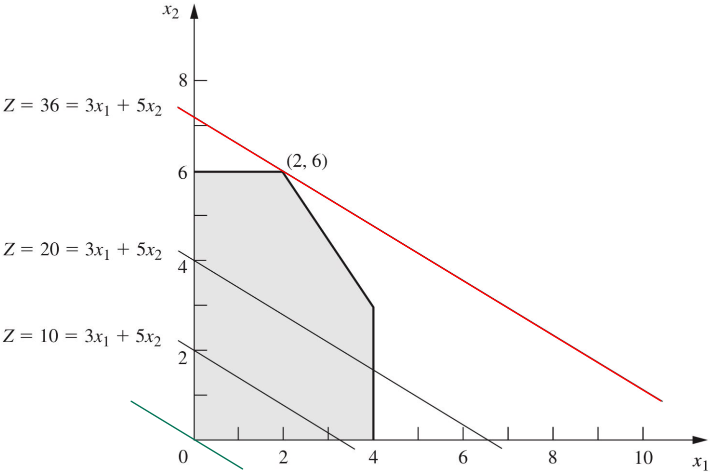
$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 5x_2 \ ,$$

sujeta a las restricciones

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 4 \\ x_2 &\leq 6 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Una vez obtenido el modelo simbólico, determinamos la región a optimizar. Luego, asignamos un valor a z, digamos $z = 10$ (puede ser cualquier valor, por ejemplo, $z = 20$). Entonces, tenemos la recta $L : 10 = 3x_1 + 5x_2$ la cual se gráfica en el plano. A continuación, trazamos rectas hacia arriba y hacia abajo, y observamos los dos puntos extremos que tocan las paralelas tanto superior como inferior.


x_2
8
$Z = 36 = 3x_1 + 5x_2$
(2, 6)
6
$Z = 20 = 3x_1 + 5x_2$
4
$Z = 10 = 3x_1 + 5x_2$
2
0
2
4
6
8
10
x_1

Observamos que los puntos extremos son el origen $p_1 = (0, 0)$ y la intersección de las rectas $x_2 = 6$ con $3x_1 + 2x_2 = 18$, cuyas coordenadas por el ejemplo anterior son $p_2 = (2, 6)$. Luego, al reemplazar estos puntos en la función a optimizar, obtenemos

$$z_{p_1} = 0, \quad z_{p_2} = 36.$$

Con esta información, podemos determinar los puntos que optimizan, tanto el que maximiza como el que minimiza. En nuestro caso, el punto buscado es $p_2 = (2, 6)$, el cual maximiza nuestra función.

Observaciones

Observación

Es fácil observar que el primer método no es muy eficiente cuando se trata de un número grande de puntos de intersección, ya que conlleva mucho trabajo encontrar exactamente dichos puntos. Por otro lado, el segundo método no es práctico cuando los puntos de intersección están muy cercanos. Esto se debe a que visualizar el punto extremo de intersección con las paralelas no es muy claro al identificar cuando el gráfico esta hecho a mano. Por lo tanto, en ocasiones se requiere la aplicación de ambos métodos para descartar puntos y evitar errores en la observación a simple vista.

Observación

También es importante notar que al asignar ciertos valores a z *y realizar la gráfica, las rectas pueden ascender o descender. Esto indica la dirección en la que se encuentra el punto óptimo que estamos buscando, lo cual nos permite descartar puntos y agilizar la búsqueda.*

Modelo de Reddy Mikks.

Ejercicio

Resolver el problema de optimización del modelo de Reddy Mikks.

Solución. En el modelo de Reddy Mikks, obtenemos el problema simbólico:

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 4x_2$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 &\leq 24 && (1)\\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 && (2)\\ -x_1 + x_2 &\leq 1 && (3)\\ x_2 &\leq 2 && (4)\\ x_1, x_2 &\geq 0 && (5) \end{aligned}$$

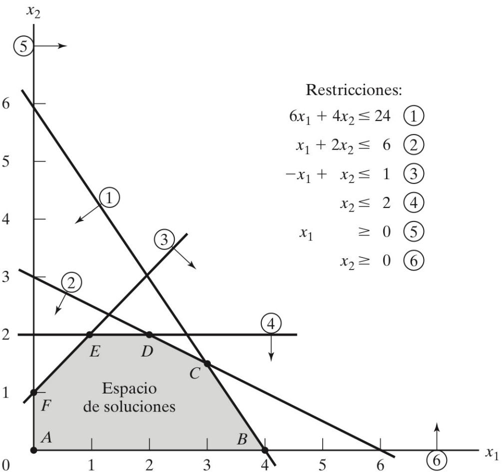
Primero, graficamos la región dada por las restricciones. Consideramos todas las restricciones con igualdad, trazamos las rectas en el plano y observamos la región correcta que representa dicha restricción.

$$6x_1 + 4x_2 = 24 \quad (I), \quad x_1 + 2x_2 = 6 \quad (II), \quad -x_1 + x_2 = 1 \quad (III)$$

$$x_2 = 2 \quad (IV), \quad x_1 = 0 \quad (V), \quad x_2 = 0 (VI)$$

Para dibujar una recta, solo necesitamos dos puntos de ella y unirlos con una recta, esto divide el plano en dos regiones. Luego elegimos un punto por encima o debajo de la recta y verificamos si dicho punto satisface la desigualdad dada por la restricción de donde procede la recta. Si el punto satisface la desigualdad, entonces la región donde está el punto es la región correcta que establece la restricción; de lo contrario, será la otra región la que satisface la restricción.

Hacemos esto con cada una de las restricciones y vemos la intersección de todas las regiones, esta será la región donde reside nuestra solución óptima.



Cálculo en los Puntos de Esquina:

Cálculo en los Puntos de Esquina: Procedemos a calcular los puntos de intersección. En este caso, es fácil reconocer puntos: el punto $A = (0,0)$, $B = (4,0)$ y $F(0,1)$. Para el resto de los puntos, realizamos los cálculos.

- Intersección de las rectas (I) y (II). Despejamos la variable x_1 en (II) y reemplazamos este valor en la ecuación (I) para obtener:

$$\begin{aligned} 6(6-2x_2)+4x_2 &= 24, \\ 12 &= 8x_2, \\ \frac{3}{2} &= x_2. \end{aligned}$$

Luego reemplazamos x_2 en cualquiera de las dos ecuaciones y obtenemos que $x_1 = 3$. Por lo tanto, el punto tiene coordenadas $C = (3, \frac{3}{2})$.

- Intersección de las rectas (II) y (IV). Similar al caso anterior, tenemos que $D = (2, 2)$.
- Intersección de las rectas (III) y (IV). Tenemos que $E = (1, 2)$.

Luego, calculamos la función a optimizar en cada uno de estos puntos, es decir,

$$z_A = 5(0)+4(0) = 0, \quad z_B = 5(4)+4(0) = 20, \quad z_C = 5(3)+4(\frac{3}{2}) = 21,$$

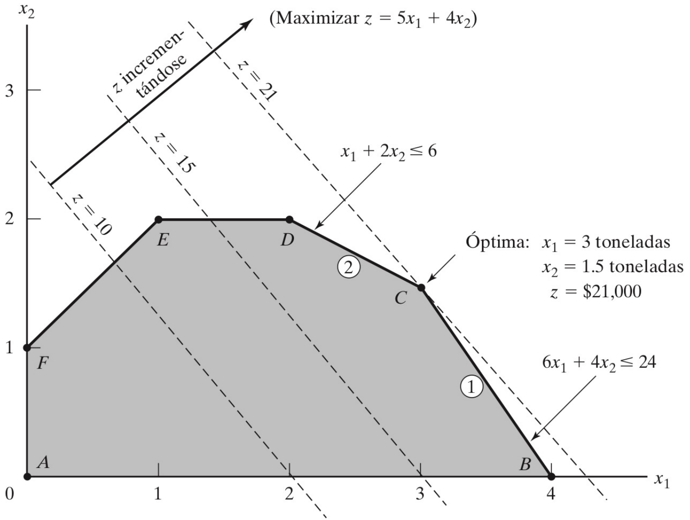
$$z_D = 5(2)+4(2) = 18, \quad z_E = 5(1)+4(2) = 13, \quad z_F = 5(0)+4(1) = 4.$$

Así, obtenemos que el valor máximo se alcanza en z_C. Por lo tanto, los valores buscados son $x_1 = 3$ y $x_2 = \frac{3}{2}$.

Respuesta: La solución es $x_1 = 3$ y $x_2 = 1{,}5$, con $z = 5(3) + 4(1{,}5) = 21$, lo que demanda una combinación de producción diaria de 3 toneladas de pintura para exteriores y 1.5 toneladas de pintura para interiores. La utilidad diaria asociada es de $21,000.

Análisis de la Función a Optimizar

Análisis de la Función a Optimizar.
Si queremos aplicar este método, es necesario, al igual que en el caso anterior, trazar la región a optimizar. Luego, damos un valor a z (la función a optimizar), en este caso tomamos $z = 10$ para obtener la recta $10 = 5x_1 + 4x_2$, la cual trazamos sobre el plano. Podemos notar que al dar otros valores a z más grandes, como $z = 15$ o $z = 20$, al trazar la gráfica, obtenemos rectas paralelas hacia arriba, lo que implica que en esa dirección está el punto que maximiza la función. Luego, observamos que el último punto en la región óptima que toca la recta paralela más alta es el punto C. Es en este punto donde se encuentra la solución óptima que maximiza la función.


(Maximizar $z = 5x_1 + 4x_2$)
x_2
x_1
z incrementándose
$z = 21$
$z = 15$
$z = 10$
$x_1 + 2x_2 \leq 6$
$6x_1 + 4x_2 \leq 24$
Óptima: $x_1 = 3$ toneladas
$x_2 = 1.5$ toneladas
$z = \$21,000$
A
B
C
D
E
F
1
2
0
1
2
3
4
1
2
3

Procedemos a calcular el punto, el cual es la intersección de las rectas (I) y (II). Despejamos la variable x_1 en (II) y reemplazamos este valor en la ecuación (I), obteniendo:

$$\begin{aligned} 6(6-2x_2)+4x_2 &= 24, \\ 12 &= 8x_2, \\ \frac{3}{2} &= x_2. \end{aligned}$$

Luego, reemplazamos x_2 en cualquiera de las dos ecuaciones y se tiene que $x_1 = 3$. Por lo tanto, el punto tiene por coordenadas $C = (3, \frac{3}{2})$.

Respuesta: La solución es $x_1 = 3$ y $x_2 = 1{,}5$ con $z = 5(3) + 4(1{,}5) = 21$, lo que demanda una combinación diaria de 3 toneladas de pintura para exteriores y 1.5 toneladas de pintura para interiores. La utilidad diaria asociada es de $21 000.

Problema de optimización de la dieta

Ejercicio

Resolver el problema de optimización de la dieta.

Solución

Del modelo del problema de la dieta, hemos obtenido el problema simbólico:

$$\text{Minimizar } z = 0{,}3x_1 + 0{,}9x_2$$

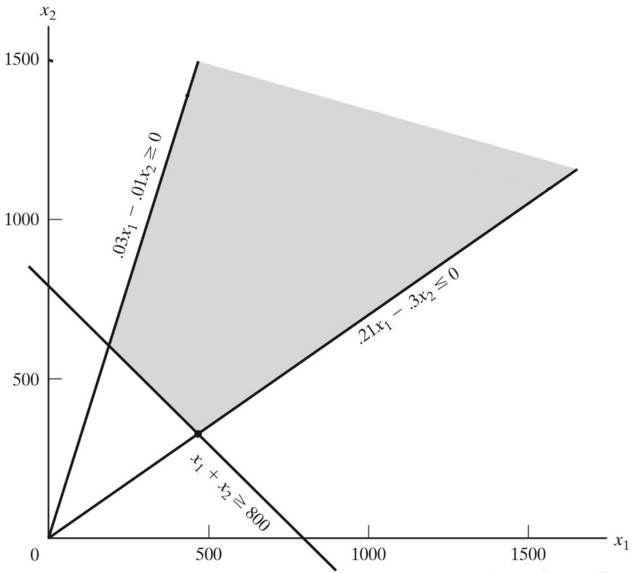
sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 800 \\ 0{,}21x_1 - 0{,}3x_2 &\leq 0 \\ 0{,}03x_1 - 0{,}01x_2 &\geq 0 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Primero se grafica la región dada por las restricciones. Consideramos

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 800 && (I) \\ 0{,}21x_1 - 0{,}3x_2 &= 0 && (II) \\ 0{,}03x_1 - 0{,}01x_2 &= 0 && (III) \\ x_1 &= 0 && (IV) \\ x_2 &= 0 && (V) \end{aligned}$$

Trazamos todas las rectas y observamos la región que representa cada una de las restricciones. Luego, vemos la intersección de todas las regiones dadas por las restricciones, y esta será la región donde reside nuestra solución óptima.


x_2
1500
1000
500
0
500
1000
1500
x_1
$.03x_1 - .01x_2 \geq 0$
$.21x_1 - .3x_2 \leq 0$
$x_1 + x_2 \geq 800$

Cálculo en los Puntos de Esquina

Cálculo en los Puntos de Esquina. En este caso, solo tenemos dos puntos posibles:

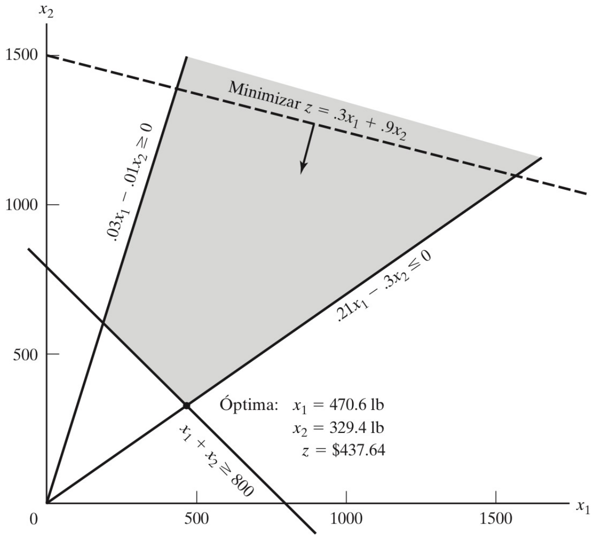
- Intersección de las rectas (I) y (II). Obtenemos que $x_1 = 470{,}6$ y $x_2 = 329{,}4$.
- Intersección de las rectas (I) y (III). Tenemos que $x_1 = 200$ y $x_2 = 600$.

Luego procedemos a calcular la función a optimizar en cada uno de estos puntos, esto es:
Si $x_1 = 470{,}6$ y $x_2 = 329{,}4$, entonces $z = 437{,}64$.
Si $x_1 = 200$ y $x_2 = 600$, entonces $z = 600$.
De donde obtenemos que el valor mínimo se alcanza en $x_1 = 470{,}6$ y $x_2 = 329{,}4$.
Respuesta: La solución óptima mínima al problema es $x_1 = 470{,}6$ lb y $x_2 = 329{,}4$ lb. El costo mínimo de la mezcla de alimentos es $z =$ \$437.64 por día.

Análisis de la Función a Optimizar

.

Análisis de la Función a Optimizar. Damos un valor a z (la función a optimizar), en este caso tomamos $z = 1500$ para obtener la recta $1500 = 0{,}3x_1 + 0{,}9x_2$, la cual trazamos sobre el plano. Podemos notar que al dar otros valores a z más grandes obtenemos rectas paralelas hacia arriba, lo que implica que en esa dirección está el punto que maximiza la función y en sentido contrario están los valores que minimizan. Luego, observamos que el último punto en la región óptima que toca la recta paralela más baja es la intersección de las rectas (I) y (II). Es en este punto donde se encuentra la solución óptima que minimiza la función.


x_2
1500
1000
500
0
500
1000
1500
x_1
Minimizar $z = .3x_1 + .9x_2$
$.03x_1 - .01x_2 \geq 0$
$.21x_1 - .3x_2 \leq 0$
$x_1 + x_2 \geq 800$
Óptima: $x_1 = 470.6$ lb
$x_2 = 329.4$ lb
$z = \$437.64$

Procedemos a calcular el punto, la intersección de las rectas (I) y (II) y obtenemos que $x_1 = 470{,}6$ y $x_2 = 329{,}4$.
Respuesta: La solución óptima mínima al problema es $x_1 = 470{,}6$ lb y $x_2 = 329{,}4$ lb. El costo mínimo de la mezcla de alimentos es $z =$ \$437.64 por día.

Ejercicio (Tarea)

OilCo está construyendo una refinería para producir cuatro productos: diesel, gasolina, lubricantes y combustible para avión. La demanda mínima (en barriles por día) de cada uno de esos productos es de 14,000, 30,000, 10,000 y 8000, respectivamente. Iraq y Dubai firmaron un contrato para enviar crudo a OilCo. Debido a las cuotas de producción especificadas por la OPEP (Organización de Países Exportadores de Petróleo), la nueva refinería puede recibir por lo menos 40 % de su crudo de Iraq y el resto de Dubai. OilCo pronostica que la demanda y las cuotas de petróleo crudo no cambiarán durante los próximos 10 años. Las especificaciones de los dos crudos conducen a mezclas de productos diferentes: Un barril de crudo de Iraq rinde 0.2 barriles de diesel, 0.25 barriles de gasolina, 0.1 barril de lubricante y 0.15 barriles de combustible para avión. Los rendimientos correspondientes del crudo de Dubai son: 0.1, 0.6, 0.15 y 0.1, respectivamente. OilCo necesita determinar la capacidad mínima de la refinería (barriles por día).

Ejercicio (Tarea)

Resolver por método gráfico. Buscar los valores que maximizan y minimizan la función

$$z = -4x_2 + 3x_1$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geq 10 \\ 3x_1 - 2x_2 &\leq 12 \\ 4x_1 + 5x_2 &\geq 12 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 10 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$