Pontificia Universidad Catolica de Chile
Facultad de Matemáticas
Semestre 2019-1

Curso: MAT1610- Cálculo I
Profesor: Amal Taarabt
Ayudante: Ignacio Castañeda
Mail: mat1610@ifcastaneda.cl

Ayudantía 3

Asíntotas y derivadas

26 de marzo de 2019

1. Determine las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas de las siguientes funciones, en caso de que existan

a) $f(x) = \dfrac{9-x^2}{x+2}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x^2+2x-8}$

Solución:

a) En primer lugar, veamos las asíntotas verticales. Todas las discontinuidades de la función serán los candidatos a asíntotas verticales.

En este caso, esto corresponde solo a $x = -2$. Veamos si el límite existe en $x = -2$

$$\lim_{x\to -2} \frac{9-x^2}{x+2} = \frac{5}{0} = \infty = \nexists$$

Como el límite no existe, entonces la función no posee asíntota vertical.

Ahora, veamos las asíntotas horizontales

b) En primer lugar, veamos las asíntotas verticales. Notemos que

$$f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2+2x-8} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x+4)(x-2)}$$

Luego, nuestros candidatos son $x = 2$ y $x = -4$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x+4)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-3}{x+4} = -\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to -4} \frac{(x-2)(x-3)}{(x+4)(x-2)} = \lim_{x\to -4} \frac{x-3}{x+4} = -\frac{1}{0} = -\infty = \nexists$$

Por lo tanto, la función posee una asíntota vertical en $x = -4$

2. Demuestra que la función $f(x) = e^{-x} + ln(x)$ posee al menos una solución.

Solución:
Evaluemos la función en puntos que podamos identificar claramente el signo.

$$f(1) = e^{-1} + ln(1) = \frac{1}{e} > 0$$
$$f(0{,}001) = e^{-0{,}001} + ln(0{,}001) < 0$$

Luego, por Teorema del Valor Intermedio, como $f(x)$ es un función continua en $[0{,}001, 1]$ y sabemos que $f(0{,}001) < 0$ y $f(1) > 0$, $\exists c \in [0{,}001, 1]$ tal que $f(c) = 0$, por lo que la función tiene al menos una solución.

3. Encuentra la función $g(x)$ que es tangente a la función $f(x) = x^2 + 1$ en el punto $x = 3$.

Solución:
En primer lugar, debemos obtener la derivada (pendiente) de la función $f(x)$ en el punto $x = 3$. Esto es

$$\lim_{h\to h} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h\to h} \frac{(3+h)^2 + 1 - 10}{h} = \lim_{h\to h} \frac{9 + 6h + h^2 + 1 - 10}{h}$$
$$= \lim_{h\to h} \frac{6h + h^2}{h} = \lim_{h\to h} \frac{h(6+h)}{h} = 6$$

Luego, la pendiente en $x = 3$ es 6. Por lo tanto, la función que buscamos será de la forma

$$g(x) = 6x + n$$

Además, sabemos que $g(3) = f(3)$, por lo que evaluando,

$$f(3) = g(3) \to 10 = 18 + n \to n = -8$$

Finalmente,

$$g(x) = 6x - 8$$

4. Calcular la derivada por definición de las siguientes funciones

a) $f(x) = x + 5$

b) $f(x) = 2x^2 - 3$

c) $f(x) = e^x$

d) $f(x) = x^n$

Solución:

Recordemos que

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

a)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h+5) - (x+5)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x+h+5-x-5}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

b)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(2(x+h)^2 - 3) - (2x^2 - 3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(x^2 + 2xh + h^2) - 3 - 2x^2 + 3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 - 3 - 2x^2 + 3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(4x+2h)}{h} = \lim_{h \to 0} 4x + 2h = 4x$$

c)

d)

5. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función derivable en (a,b) y sea $x_0 \in (a,b)$ fijo, se define

$$g(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

Calcular $\lim_{h \to 0} g(h)$

Solución:
El límite a calcular es

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

Es evidente que esto se parece a la definición del límite, sin embargo faltan algunos terminos para completarlo.
Vamos a restar y sumar el termino $f(x_0)$ al numerador, con lo que obtenemos

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) + f(x_0) - f(x_0 - h)}{2h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{2h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{2h}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{1}{2} \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h}$$

Es evidente que el lado izquierdo es la definición de límite en el punto $x = x_0$. Sin embargo, en el lado izquierdo, debemos realizar el cambio de variable $u = -x$. Luego,

$$= \frac{1}{2} f'(x_0) + \frac{1}{2} \lim_{u \to 0} \frac{f(x_0 + u) - f(x_0)}{u}$$

$$= \frac{1}{2} f'(x_0) + \frac{1}{2} f'(x_0)$$

Finalmente,

$$\lim_{h \to 0} g(h) = f'(x_0)$$

6. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}} & x > 1 \\ \alpha x + \beta & x \leq 1 \end{cases}$$

Determine los valores de α y β de manera que f sea derivable en $x = 1$

Solución:

Observemos que para que f sea derivable en $x = 1$, f debe ser continua en $x = 1$, por lo que se debe cumplir

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = \alpha + \beta$$

Para esto, debemos igualar también los límites laterales.

$$\lim_{x \to 1-} \alpha x + \beta = \lim_{x \to 1+} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$$

$$\alpha + \beta = \lim_{x \to 1+} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} \cdot \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$$

$$\alpha + \beta = \lim_{x \to 1+} \frac{(1-x)(1+\sqrt{x})}{1-x}$$

$$\alpha + \beta = \lim_{x \to 1+} 1 + \sqrt{x}$$

$$\alpha + \beta = 2$$

Juntando todo, nuestra primera condición es

$$\alpha + \beta = 2$$

Notemos que $f(1) = \alpha + \beta = 2$

La otra condición para que sea derivable, es que exista derivada en $x = 1$, es decir, debe existir

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

Observe que

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{\frac{1-(1+h)}{1-\sqrt{1+h}} - 2}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{\frac{-h(1+\sqrt{1+h})}{1-(1+h)} - 2}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{\frac{-h(1+\sqrt{1-h})}{-h} - 2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{\sqrt{1-h}-1}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{1-h-1}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{-h}{h} = -1$$

Por otra parte

$$\lim_{h\to 0-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{\alpha(1+h)+\beta-\alpha-\beta}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{\alpha h}{h} = \alpha$$

Luego se debe cumplir que

$$\alpha = -1$$

Con esto, concluimos que

$$\alpha = -1, \qquad \beta = 3$$