Pontificia Universidad Catolica de Chile
Facultad de Matemáticas
Semestre 2019-1

Curso: MAT1610- Cálculo I
Profesor: Amal Taarabt
Ayudante: Ignacio Castañeda
Mail: mat1610@ifcastaneda.cl

Ayudantía 2

Límites trigonométricos y continuidad

19 de marzo de 2019

1. Calcule los siguientes límites, en caso de que existan

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{5x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{\sin 4x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\tan x$

f) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{(x-\pi)^2}{\sin^2 x}$

Solución:
Por lo general, para resolver límites que involucran funciones trigonométricas, debemos simplificar a modo de llegar a uno de los siguientes límites notables y luego reemplazar:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x} = 1$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{5x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{5x}\cdot\dfrac{3}{3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\dfrac{3}{5} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3}{5}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{\sin 4x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot\dfrac{1}{\sin 4x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot\dfrac{1}{\sin 4x}\cdot\dfrac{4x}{4x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{4x}{\sin 4x}\cdot\dfrac{4}{\cos x}$
$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4}{\cos x} = 4$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}\cdot\dfrac{1+\sqrt{\cos x}}{1+\sqrt{\cos x}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}\cdot\dfrac{1}{1+\sqrt{\cos x}} = \dfrac{1}{4}$

e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\tan x$

En este caso utilizaremos el cambio de variable $u = \frac{\pi}{2} - x$, con lo que

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan x = \lim_{u \to 0} u \tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \lim_{u \to 0} u \tan u = 0$$

f) $\lim_{x \to \pi} \frac{(x-\pi)^2}{\sin^2 x}$

De manera análoga, usaremos el cambio de variable $u = \pi - x$, con lo que

$$\lim_{x \to \pi} \frac{(x-\pi)^2}{\sin^2 x} = \lim_{u \to 0} \frac{u^2}{(\sin(\pi + u))^2} = \lim_{u \to 0} \frac{u^2}{(-\sin u)^2} = \lim_{u \to 0} \frac{1}{\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2} = 1$$

2. Analice las discontinuidades de la función

$$f(x) = \frac{\sin(\pi(x+1))}{x - x^2}$$

determinando si son removibles

Solución:
Factorizando, podemos ver que

$$f(x) = \frac{\sin(\pi(x+1))}{x(1-x)}$$

es claro que las discontinuidades se producen en $x = 0$ y $x = 1$.
Para ver si estas son removibles, debemos ver si el límite de la función existe en las discontinuidades.

Comenzando por $x = 0$,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\pi x + \pi)}{x(1-x)}$$

Usando la propiedad $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$,

$$= \lim_{x \to 0} -\frac{\sin(\pi x)}{x(1-x)}$$

Luego,

$$= \lim_{x \to 0} -\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \cdot \frac{\pi}{1-x} = -\pi$$

Por lo tanto en $x = 0$ hay una discontinuidad removible.

Para $x = 1$, usaremos el cambio de variable $u = 1 - x$, con lo que

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x + \pi)}{x(1-x)} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin(\pi(2-u))}{u(1-u)} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin(2\pi - \pi u)}{u(1-u)}$$

Utilizando la propiedad $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$,

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{\sin(\pi x)}{x(1-x)}$$

Luego,

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \cdot \frac{\pi}{1-x} = -\pi$$

3. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & x \leq 2 \\ ax + b & 2 < x < 3 \\ 2b - 3ax & x \geq 3 \end{cases}$$

Determina el valor de las constantes a y b para que la función $f(x)$ sea continua $\forall x \in \mathbb{R}$

Solución:
Para $x \neq 2$ y $x \neq 3$, la función es continua, ya que corresponde a una composición de funciones continuas.

Para $x = 2$, los límites laterales deben coincidir, por lo que

$$\lim_{x\to 2} 3x - 2 = \lim_{x\to 2} ax + b$$

$$4 = 2a + b$$

De manera análoga, en $x = 3$,

$$\lim_{x\to 3} ax + b = \lim_{x\to 3} 2b - 3ax$$

$$3a + b = 2b - 9a \to 12a - b = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rcl|} 2a + b & = & 4 \\ 12a - b & = & 0 \\ \hline \end{array}$$

Obtenemos

$$a = \frac{2}{7}, \qquad b = \frac{24}{7}$$

4. Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$, tal que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $g(0) = 1$ y $g(1) = 0$, demuestre que existe algun $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = g(c)$.

Solución:
Definamos una función auxiliar. Sea

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

Notemos que, dado que $h(x)$ es una composición de funciones continuas, esta también es continua.
Por lo tanto, demostrar que $f(c) = g(c)$ es equivalente a demostrar que $h(c) = 0$.

De la información que nos dan, podemos deducir que

$$h(0) = f(0) - g(0) = -1, \qquad h(1) = f(1) - g(1) = 1$$

Luego, por Teorema del Valor Intermedio (TVI), como $h(x)$ es una función continua en el intervalo $[0, 1]$ y $-1 < 0 < 1$, $\exists c \in [0, 1]$ tal que $h(c) = 0$. En consecuencia, también existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = g(c)$.