Pontificia Universidad Catolica de Chile
Facultad de Matemáticas
Semestre 2019-1

Curso: MAT1610- Cálculo I
Profesor: Amal Taarabt
Ayudante: Ignacio Castañeda
Mail: `mat1610@ifcastaneda.cl`

Ayudantía 1

Límites

12 de marzo de 2019

1. Calcule los siguientes límites, en caso de que existan

a) $\lim_{x\to 5} \dfrac{1}{x-5}$

b) $\lim_{x\to 2} \dfrac{4x}{6-x}$

c) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2-1}$

d) $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{4-x}-1}{x-3}$

e) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}$

f) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^4+2x^3-3x^2+4x-4}{x^4+2x-3}$

g) $\lim_{x\to 0} \dfrac{|x|(|x|-x)}{x^2}$

h) $\lim_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{|x|}\right)$

Solución:

a) $\lim_{x\to 5} \dfrac{1}{x-5}$

Al evaluar en $x=5$, podemos ver que se genera una discontinuidad,

$$\lim_{x\to 5} \frac{1}{x-5} = \frac{1}{5-5} = \frac{1}{0} = \infty = \nexists$$

Por lo tanto, concluimos que el límite no existe.

b) $\lim_{x\to 2} \dfrac{4x}{6-x}$

Como no se genera ninguna discontinuidad en $x=2$, podemos evaluar directamente, obteniendo

$$\lim_{x\to 2} \frac{4x}{6-x} = \frac{4\cdot 2}{6-2} = \frac{8}{4} = 2$$

c) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2-1}$

Al evaluar en $x = -1$, podemos notar que obtendremos $\frac{0}{0}$, lo que no nos dice nada. Entonces, tenemos que buscar otra forma de evaluar el límite. Intentemos factorizar.

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^2-1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to -1} \frac{(x^2-x+1)}{(x-1)} = -\frac{3}{2}$$

Al factorizar somos capaces de eliminar lo que nos generaba problemas y luego podemos evaluar directamente.

d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{4-x}-1}{x-3}$

En este caso, nos ocurre algo similar al ejercicio anterior, sin embargo, no es tan sencillo la simplificación que debemos hacer.
Para esto, utilicemos el método de la sustitución. Sea $u = \sqrt{4-x}$,
Luego,

$$x \to 3$$

$$-x \to -3$$

$$4-x \to 1$$

$$\sqrt{4-x} \to 1$$

$$u \to 1$$

Procedemos a escribir el límite en términos de u

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{4-x}-1}{x-3} = \lim_{u\to 1} \frac{u-1}{1-u^2}$$

Ahora, resolvemos como siempre, es decir,

$$\lim_{u\to 1} \frac{u-1}{1-u^2} = \lim_{u\to 1} \frac{u-1}{(1+u)(1-u)} = \lim_{u\to 1} \frac{-(1-u)}{(1+u)(1-u)} = \lim_{u\to 1} \frac{-1}{(1+u)} = -\frac{1}{2}$$

e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}$

En este caso podríamos utilizar sustitución como antes, pero dado que hay dos raices distintas, sería complicado. Por lo tanto, usaremos la técnica de la racionalización, esto es

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1} = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1} \cdot \frac{\sqrt{3-x}+1}{\sqrt{3-x}+1} = \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{6-x}-2)(\sqrt{3-x}+1)}{2-x}$$

Ahora, como lo que nos da problemas es el parentesis izquierdo, usaremos la sustitución

$$u = \sqrt{6-x} \Longrightarrow u \to 2$$

Con esto, obtenemos el límite

$$\lim_{u\to 2} \frac{(u-2)(\sqrt{u^2-3}+1)}{u^2-4} = \lim_{u\to 2} \frac{(u-2)(\sqrt{u^2-3}+1)}{(u+2)(u-2)} = \lim_{u\to 2} \frac{\sqrt{u^2-3}+1}{u+2} = \frac{1}{2}$$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^4+2x^3-3x^2+4x-4}{x^4+2x-3}$

Aquí podemos ver claramente que ambas partes del limite se hacen 0 en $x=1$. Sin embargo, al ser un polinomio de grado 4, se hace dificil factorizarlo *al ojo*.
Recordemos que por el Teorema del Resto, sabemos que si un polinomio $P(x)$ cumple con $P(a)=0$, entonces $P(x)$ es divisible por $(x-a)$. Por lo tanto, ya sabemos que ambas partes son divisibles por $(x-1)$. Para factorizar entonces, podemos utilizar la división polinómica, dividiendo numerador y denominador por $(x-1)$. En primer lugar, hagamos $x^4+2x^3-3x^2+4x-4 : x-1$, es decir,

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & 1 & 2 & -3 & 4 & -4 \\ \hline & & 1 & 3 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 3 & 0 & 4 & 0 \end{array}$$

por lo que $x^4+2x^3-3x^2+4x-4 : x-1 = x^3+3x^2+4$
Luego, $x^4+2x-3 : x-1$, esto es,

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ \hline & & 1 & 1 & 1 & 3 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

por lo que $x^4+2x-3 : x-1 = x^3+x^2+x+3$ Entonces, podemos escribir el límite como

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x^3+3x^2+4)(x-1)}{(x^3+x^2+x+3)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^3+3x^2+4)}{(x^3+x^2+x+3)} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{|x|(|x|-x)}{x^2}$

Dado que el límite posee valores absolutos y estamos buscando el límite justo en el punto donde la definición del valor absoluto cambia, debemos evaluar el límite desde ambos lados.

Recordemos que

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Entonces el límite por el lado izquierdo es

$$\lim_{x\to 0-} \frac{|x|(|x|-x)}{x^2} = \lim_{x\to 0-} \frac{x(x-x)}{x^2} = \lim_{x\to 0-} \frac{0}{x} = \lim_{x\to 0-} 0 = 0$$

Notemos que este límite es 0, dado que los x se anulan entre si **antes** de evaluar el límite.

Luego, por el lado derecho,

$$\lim_{x\to 0+} \frac{|x|(|x|-x)}{x^2} = \lim_{x\to 0+} \frac{-x(-x-x)}{x^2} = \lim_{x\to 0+} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

Como los límites laterales no coinciden, el límite no existe.

h) $\lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}\right)$

Un error común aquí sería hacer el límite por ambos lados cambiando el signo. Sin embargo, notemos que estamos buscando el límite en torno a $x = 2$. A ambos lados de $x = 2$, el valor absoluto seguira utilizando la misma definición, por lo que basta con evaluar inmediatamente. Con esto,

$$\lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{|2|} = 0$$

2. Determina a para que el siguiente límite exista:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + ax + 6}{x^2 - 4}$$

Solución:
A simple vista podemos ver que el denominador se anula en $x = 2$. La única forma para que el límite exista es que el numerador también se anule y que luego podamos solucionar eso con alguna de las técnicas vistas anteriormente.

Por lo tanto, debemos buscar a, de manera que

$$x^2 + ax + 6 = 0$$

cuando $x = 2$, es decir,

$$4 + 2a + 6 = 0 \rightarrow 2a = -10 \rightarrow a = -5$$

Podemos verificar esto resolviendo el límite

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-3}{x+2} = -\frac{1}{4}$$

3. Aplicando la definición de límite, demostrar que

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+3}{2} = 2$$

Solución:
Para demostrar el límite por definición, debemos demostrar que

$$\left|\frac{x+3}{2} - 2\right| < \epsilon \rightarrow |x-1| < \delta$$

para algún ϵ y δ. Procedamos,

$$\left|\frac{x+3}{2} - 2\right| < \epsilon$$

$$\left|\frac{x+3-4}{2}\right| < \epsilon$$

$$\left|\frac{x-1}{2}\right| < \epsilon$$

$$\frac{|x-1|}{2} < \epsilon$$

$$|x-1| < 2\epsilon$$

Luego, basta tomar $\delta = 2\epsilon$ y se cumple la definición del límite.
De sere necesario, se podría demostrar tomando un valor arbitrario suficientemente pequeño de ϵ y su correspondiente δ

4. Calcule el siguiente límite, en caso de que exista

$$\lim_{x\to 0} x^2 e^{\sin\frac{1}{x}}$$

Hint: *Utilice el teorema del sandwich*

Solución:
Cuando x tiende a 0, la función $\sin\frac{1}{x}$ oscilará infinitamente entre 1 y -1. Sabiendo esto, intentemos acotar nuestra función,

$$-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$$

$$e^{-1} \leq e^{\sin\frac{1}{x}} \leq e$$

$$x^2 e^{-1} \leq x^2 e^{\sin\frac{1}{x}} \leq x^2 e$$

$$\lim_{x\to 0} x^2 e^{-1} \leq \lim_{x\to 0} x^2 e^{\sin\frac{1}{x}} \leq \lim_{x\to 0} x^2 e$$

$$0 \leq \lim_{x\to 0} x^2 e^{\sin\frac{1}{x}} \leq 0$$

Por lo tanto, por el teorema del sandwich, concluimos que

$$\lim_{x\to 0} x^2 e^{\sin\frac{1}{x}} = 0$$