Pontificia Universidad Catolica de Chile
Facultad de Matemáticas
Semestre 2019-1

Curso: MAT1203- Álgebra Lineal
Profesor: Camilo Perez
Ayudante: Ignacio Castañeda
Mail: `mat1203@ifcastaneda.cl`

Ayudantía 2

Sistemas de ecuaciones lineales, formas escalonadas y conjunto solución

21 de marzo de 2019

1. Determinar si el siguiente sistema es consistente o no

$$\begin{aligned} x_1 - 6x_2 &= 5 \\ x_2 - 4x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_1 + 6x_2 + x_3 + 5x_4 &= 3 \\ -x_2 + 5x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Solución:
En primer lugar, escribiremos el sistema en notación matricial

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

A continuación, utilizando operaciones de fila, llevaremos esta matriz a su forma escalonada

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & 4 & 0 \end{array}\right] \underset{F_4+F_2}{\overset{F_3+F_1}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right] \overset{F_4-F_3}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right]$$

Aqui podemos apreciar que en el la última fila, todas las variables tienen coeficiente cero y la columna de coeficientes aumentados tiene valor, lo que no es posible, ya que esto significaría que se cumple la igualdad $0 = -8$, lo que no es cierto. Dicho esto, el sistema no es consistente.

2. Lleve las siguientes matrices ampliadas a su forma escalonada reducida y determine la existencia y unicidad de las soluciones del sistema.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

Solución:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix} \underset{F_3-3F_1}{\overset{F_2-2F_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & -12 \end{bmatrix} \underset{F_3\leftarrow -\frac{1}{3}F_3}{\overset{F_2\leftarrow -\frac{1}{2}F_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$
$\overset{F_3-F_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{F_1-4F_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Como hay una variable libre (2 pivotes y 3 filas), existen infinitas soluciones.

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 4 & 2 \end{bmatrix} \underset{F_3-4F_1}{\overset{F_2-2F_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & -12 & -18 \end{bmatrix} \underset{F_3\leftarrow -\frac{1}{3}F_2}{\overset{F_2\leftarrow -\frac{1}{3}F_3}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
$\underset{F_2-4F_3}{\overset{F_1-4F_3}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{F_1-2F_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Como tiene 3 pivotes y 3 filas, el sistema posee solución única

3. Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{bmatrix}$

a) Determinar el conjunto solución de su sistema homogeneo.

b) Describir todas las soluciones de $Ax = b$ con $b = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Solución:

a) Determinar el conjunto solución de su sistema homogeneo.

El sistema homogeneo corresponde a la ecuación $Ax = \vec{0}$, por lo que nuestra matriz aumentada sería

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & -8 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Esto corresponde al sistema

$$\begin{aligned} x_1 - \tfrac{4}{3}x_3 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} x_1 &= \tfrac{4}{3}x_3 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= x_3 \end{aligned} \rightarrow x = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, la solución del sistema homogeneo es

$$S = Gen \left\{ \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

b) Describir todas las soluciones de $Ax = b$ con $b = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Para esto, hacemos lo mismo que en la parte a), pero aumentando la matriz por el vector b, es decir

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 7 \\ -3 & -2 & 4 & -1 \\ 6 & 1 & -8 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & -9 & 0 & -18 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Esto corresponde al sistema

$$\begin{aligned} x_1 - \tfrac{4}{3}x_3 &= -1 \\ x_2 &= 2 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} x_1 &= -1 + \tfrac{4}{3}x_3 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= x_3 \end{aligned}$$

$$x = \begin{pmatrix} -1 + \frac{4}{3}x_3 \\ 2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, la solución del sistema $Ax = b$ es

$$S = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + Gen \left\{ \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Finalmente, podriamos amplificar el vector del generado por 3, para que quede más bonito, con lo que

$$S = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + Gen \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

4. Considere el siguiente sistema de ecuaciones, donde a es una constante.

$$\begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 1 \\ x_1 & +x_2 & +ax_3 & = 1 \\ ax_1 & +ax_2 & +x_3 & = a \\ x_1 & -ax_2 & +ax_3 & = 0 \end{array}$$

a) Determine valores de a para los cuales el sistema es inconsistente.

b) Determine valores de a para los cuales el sistema es consistente, y encuentre la solución.

Solución:
En primer lugar, escribamos el sistema en su forma matricial, esto es

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ a & a & 1 & a \\ 1 & -a & a & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora, lo que debemos hacer es pivotear la matriz intentando evitar dividir por a. En el caso de que sea estrictamente necesario hacerlo, debemos ver el caso donde $a = 0$ por separado y luego continuar.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ a & a & 1 & a \\ 1 & -a & a & 0 \end{bmatrix} \underset{F_4-F_1}{\overset{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-aF_1}}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & -1-a & a-1 & -1 \end{bmatrix} \overset{F_2 \leftrightarrow F_4}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1-a & a-1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{F_4+F_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1-a & a-1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{F_2+F_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1-a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) En la tercera fila no existe ningún valor de a para el cual el sistema es inconsistente, por lo que esta no nos restringe a. Sin embargo, en la segunda fila, si podemos elegir un valor de a para que el sistema sea inconsistente. Esto es,

$$-1 - a = 0 \rightarrow a = -1$$

b) Para el resto de valores de a, el sistema es consistente, es decir, para

$$a \neq -1$$

Luego, teniendo la matriz en su forma escalonada, obtener la solución del sistema es sencillo.
Veamos primero el caso donde $a = 1$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego,

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_3 + \frac{1}{2} \\ x_2 &= \frac{1}{2} \\ x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \to x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Si es que $a \neq 1$, entonces

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1-a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{F_3 \leftarrow \frac{1}{1-a} F_3}{\overset{F_2 \leftarrow \frac{1}{-1-a} F_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{1+a} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{F_1 - F_3}{\overset{F_1 - F_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{a}{1+a} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{1+a} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{a}{1+a} \\ x_2 &= \frac{1}{1+a} \\ x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \to x = \begin{pmatrix} \frac{a}{1+a} \\ \frac{1}{1+a} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Notemos que esta última corresponde siempre a una solución única pero que depende de a.

5. Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -4 & 2 & -6 \\ -3 & -2 & -7 \end{bmatrix}$ y b un vector en R^3. ¿La ecuación $Ax = b$ es consistente para todo b?

Solución:

Diremos que $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. Luego, el sistema $Ax = b$ se puede representar como

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & b_1 \\ -4 & 2 & -6 & b_2 \\ -3 & -2 & -7 & b_3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & b_1 \\ 0 & 14 & 10 & b_2 + 4b_1 \\ 0 & 7 & 5 & b_3 + 3b_1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & b_1 \\ 0 & 14 & 10 & b_2 + 4b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 + 3b_1 - \frac{1}{2}(b_2 + 4b_1) \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & b_1 \\ 0 & 14 & 10 & b_2 + 4b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 - \frac{1}{2}b_2 + 4b_3 \end{array}\right]$$

Luego, el sistema será consistente para $b_1 - \dfrac{1}{2}b_2 + b_3 = 0$. Esto se puede representar como

$$\begin{array}{rcl} b_1 & = & \frac{1}{2}b_2 - b_3 \\ b_2 & = & b_2 \\ b_3 & = & b_3 \end{array} \quad \to b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}b_2 - b_3 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente,

$$b = Gen\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

6. Sean los vectores

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}; \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

determinar si $Gen\{v_1, v_2, v_3\} = R^3$.

Solución:
Para ver si estos tres vectores generan $\mathbb{R}^3$, tiene que pasar que todos sean L.I. entre si. Una forma de ver esto, es formar una matriz con los vectores y ver la cantidad de pivotes que hay, es decir

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como la matriz tiene 3 pivotes, quiere decir que hay 3 vectores L.I., es decir, todos son linealmente independientes entre si, formando asi $\mathbb{R}^3$

7. Sean

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \quad y \quad v_3 = \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

¿Para qué valor(es) de h $Gen\{v_1, v_2, v_3\} = Gen\{v_1, v_2\}$?

Solución:
Para que $Gen\{v_1, v_2, v_3\} = Gen\{v_1, v_2\}$, debe ocurrir que estos generados tengan la misma cantidad de vectores L.I. o dicho de otra forma, al poner estos vectores en una matriz y escalonarla, las matrices deben tener la misma cantidad de pivotes.

Comencemos por $Gen\{v_1, v_2\}$, dado que h no influye en este generado.

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Notemos que esta matriz tiene 2 pivotes, por lo que debemos elegir h, de tal manera que $Gen\{v_1, v_2, v_3\}$ también tenga 2 pivotes.

Procedamos ahora con $Gen\{v_1, v_2, v_3\}$,

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & h \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 7 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & h \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2h-2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & h \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2h-2 \end{bmatrix}$$

Luego, para que la matriz tenga 2 pivotes, debe ocurrir que

$$2h - 2 = 0 \rightarrow h = 1$$