Pontificia Universidad Catolica de Chile
Facultad de Matemáticas
Semestre 2019-1

Curso: MAT1203- Álgebra Lineal
Profesor: Camilo Perez
Ayudante: Ignacio Castañeda
Mail: mat1203@ifcastaneda.cl

Ayudantía 1

Vectores, rectas y planos en el espacio

14 de marzo de 2019

1. Realiza las siguientes operaciones con los vectores dados

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}; \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}; \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 13 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

a) $v_1 + v_2$ b) $v_3 - v_4$ c) $v_2 \cdot v_3$ d) $v_1 \times v_2$

e) $v_2 \times v_1$ f) $(v_1 \times v_2) \cdot v_2$ g) $3 - ((2v_1) \cdot v_2)$ h) $v_2 - v_3 \times v_1$

Solución:

a) $v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $v_3 - v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $v_2 \cdot v_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -4 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 3 = -7$

d) $v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = i \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$

$$= i(7 \cdot (-3) - 8 \cdot 2) - j(1 \cdot (-3) - 8 \cdot (-4)) + k(1 \cdot 2 - 7 \cdot (-4))$$

$$= i(-21 - 16)) - j(-3 - -32) + k(2 - -28)$$

$$-37i - 29j + 30k = \begin{pmatrix} -37 \\ -29 \\ 30 \end{pmatrix}$$

e) $v_2 \times v_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = i \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$

$$= i(2 \cdot 8 - (-3) \cdot 7) - j((-4) \cdot 8 - (-3) \cdot 1) + k((-4) \cdot 7 - 2 \cdot 1)$$

$$= i(16 - -21) + j(-32 - -3) + k(-28 - 2)$$

$$37i + 29j - 30k = \begin{pmatrix} 37 \\ 29 \\ -30 \end{pmatrix}$$

f) $(v_1 \times v_2) \cdot v_2 = \begin{pmatrix} -37 \\ -29 \\ 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = (-37) \cdot (-4) + (-29) \cdot 2 + 30 \cdot (-3)$

$$= 148 + -58 - 90 = 0$$

g) $3 - ((2v_1) \cdot v_2) = 3 - \left(\left(2 \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right) = 3 - \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$

$$= 3 - (2 \cdot (-4) + 14 \cdot 2 + 16 \cdot (-3))$$

$$3 - (-8 + 28 - 48)$$

h) $v_2 - v_3 \times v_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$

$$= -4i + 2j - 3k - (i(8 - 21)) - j(0 - 3) + k(0 - 1))$$

$$= -4i + 2j - 3k + 13i - 3j + k = 9i - j - 2k$$

$$= \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2. Verificar si los siguientes puntos son o no colineares entre si

a) $P(3, 2, 5),\ P(0, 1/2, -1),\ P(5, 3, 9)$ b) $P(1, 1, 4),\ P(-2, -3. -8),\ P(4, 4, 16)$

Solución:

a) $\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0\\1/2\\-1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}5\\3\\9\end{pmatrix}$

En primer lugar, debemos encontrar dos vectores directores entre dos pares de puntos distintos

$$d_1 = \begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1/2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3/2\\6\end{pmatrix}$$

$$d_2 = \begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\3\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\-4\end{pmatrix}$$

Dado que es posible representar d_1 de la forma $d_1 = \lambda d_2$, con $\lambda = -1,5$, los puntos son colineales.

b) $\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}-2\\-3\\-8\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}4\\4\\16\end{pmatrix}$

Igual que antes, buscaremos dos vectores directores

$$d_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\-3\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\\12\end{pmatrix}$$

$$d_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\4\\16\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-3\\-12\end{pmatrix}$$

Observando las dos primeras componentes de cada vector, vemos que es imposible representar uno en función del otro, por lo que los puntos no son colineales

3. Sean los vectores

$$v_1 = \begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}; \qquad v_2 = \begin{pmatrix}-1\\-3\\0\end{pmatrix}$$

a) Buscar un vector v_3 que sea perpendicular a v_1 y v_2 y verificar que efectivamente sea perpendicular a ambos.

b) Buscar un vector paralelo a $(v_2 - v_3)$ y verificar que lo sea

c) Encontrar un vector perpendicular a $(v_3 + 3v_1)$

Solución:

a) Para que sea perpendicular a ambos, basta definir $v_3 = v_1 \times v_2$, es decir

$$v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = i(0+15) + j(0+5) + k(-6+1) = \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Para verificar basta utilizar el producto punto, donde obtendremos que

$$v_3 \cdot v_1 = 0$$

$$v_3 \cdot v_2 = 0$$

b) En primer lugar, calculemo el vector $v_2 - v_3$

$$v_4 = v_2 - v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Para obtener un vector paralelo, podemos simplemente ponderar el vector por un escalar, como por ejemplo, 2

$$v_5 = 2v_4 = 2 \begin{pmatrix} -16 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Para verificar utilizaremos el producto cruz, donde obtendremos que

$$v_5 \times v_4 = 0$$

c) Primero calculemos el vector $v_3 + 3v_1$

$$v_6 = v_3 + 3v_1 = \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Para obtener un vector perpendicular, podemos hacer producto cruz con cualquier otro vector arbitrario. Para hacer los calculos simples, utilizaremos

$$v_7 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$v_8 = v_6 \times v_7 = \begin{pmatrix} 21 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 10j + 2k = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4. Determinar el plano que pasa por los puntos $P_1(4, -1, -2)$, $P_2(0, 0, 1)$ y $P_3(2, -3, 0)$.

Solución:
Sabemos que un plano se define de la forma

$$Ax + By + Cz = D$$

Reemplazando esto con los tres puntos que tenemos, obtendremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} 4A - B - 2C & = & D \\ C & = & D \\ 2A - 3B & = & D \end{array}\right|$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 4A - B - 2C & = & C \\ 2A - 3B & = & C \end{array}\right|$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 4A - B - 3C & = & 0 \\ 2A - 3B - C & = & 0 \end{array}\right|$$

$$(1) - 2(2)$$

$$5B - C = 0 \rightarrow 5B = C$$

Como hay 4 variables y teníamos 3 ecuaciones, debemos elegir el valor de una de ellas de manera arbitraria.

$$C = 5$$

$$\rightarrow D = 5$$

$$\rightarrow B = 1$$

$$4A - 1 - 15 = 0 \rightarrow 4A = 16 \rightarrow A = 4$$

Finalmente, el plano es

$$\Pi : 4x + y + 5z = 5$$

5. Dado $P_1(0, 2, -3)$ y $P_2(1, 0, 3)$, determinar la recta que pasa por P_1 y P_2.

Solución:

Buscamos un vector director

$$\vec{d} = P_2 - P_1 = (1, -2, 0)$$

Luego, la recta que pasa por P_1 y P_2 esta definida por

$$< x, y, z >= (0, 2, -3) + \lambda(1, -2, 0)$$

6. Encontrar las ecuaciones de dos planos diferentes cuya intersección sea la recta que pasa por el punto $P_1(1, 3, -2)$ y $P_2(2, 0, 4)$.

Solución:
Para realizar esto, basta con utilizar dos trios de puntos que contengan a los dos puntos dados y buscar dos planos. La intersección entre estos planos será la recta que pasa por ambos puntos. Para esto, definiremos puntos arbitrarios.
Diremos que

$$P_3(0, 0, 0), \quad P_4(1, 0, 0)$$

Partamos usando los puntos P_1, P_2 y P_3. Sabemos que la ecuación del plano es de la forma

$$Ax + By + Cz = D$$

Reemplazando con estos tres puntos, obtenemos el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} A + 3B - 2C & = & D \\ 2A + 4C & = & D \\ 0 & = & D \end{array}\right|$$

$$\left.\begin{array}{rcl} A + 3B - 2C & = & 0 \\ 2A + 4C & = & 0 \end{array}\right|$$

$$(2) + 2(1)$$

$$4A + 6B = 0 \rightarrow A = -\frac{6B}{4} \rightarrow A = -\frac{3B}{2}$$

Le pondremos un valor arbitrario a B,

$$B = 4$$

$$\rightarrow A = -6$$

$$\rightarrow -12 + 4C = 0 \rightarrow C = 3$$

Por ende,

$$\Pi_1 : -6x + 4y + 3z = 0$$

Ahora realizamos lo mismo con los puntos P_1, P_2, P_4. Sea la ecuación del plano

$$Ax + By + Cz = D$$

Reemplazando con estos tres puntos, obtenemos el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} A + 3B - 2C & = & D \\ 2A + 4C & = & D \\ A & = & D \end{array}\right|$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 3B - 2C & = & 0 \\ A + 4C & = & 0 \end{array}\right|$$

$$\left.\begin{array}{rcr} 3B & = & 2C \\ A & = & -4C \end{array}\right|$$

Le daremos un valor arbitrario a C

$$C = 3$$

$$\to B = 2$$

$$\to A = -12$$

$$\to D = -12$$

Con lo que obtenemos el plano

$$\Pi_2 : -12x + 2y + 3z = -12$$

Finalmente, los planos buscados son:

$$\Pi_1 : -6x + 4y + 3z = 0$$

$$\Pi_2 : -12x + 2y + 3z = -12$$

7. Encontrar un plano que sea perpendicular al plano cuya ecuación es $3x - 7y + 2z = 5$ y que pase por el punto $P(0, 2, -1)$

Solución:
En primer lugar, debemos encontrar el vector normal del plano, que esta dado por

los coeficientes de su ecuación, es decir

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Si los vectores normales de dos planos son perpendiculares entre si, los planos también lo serán, por lo que basta encontrar un vector perpendicular a $\vec{n}$ y utilizarlo como vector normal para nuestro nuevo plano. Para encontrar un vector perpendicular, realizaremos el producto cruz entre $\vec{n}$ y un vector arbitrario elegido por nosotros

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Para encontrar el plano asociado, basta que utilicemos los coeficientes del vector como coeficientes de la ecuación del plano

$$-9x - y + 10z = D$$

Por último, para encontrar D, reemplazamos el punto que nos dan en la ecuación del plano

$$-2 - 10 = D \rightarrow D = -12$$

Finalmente,

$$\Pi : -9x - y + 10z = -12$$

8. Determinar la ecuación de un plano que pase por $P(4, 2, 1)$ y que sea paralelo al plano de ecuación $2x - 5y + z = 6$

Solución:
De forma análoga, para que dos planos sean paralelos, basta con que sus vectores normales sean paralelos. Dicho de otra forma, lo que va a cambiar será el parametro D. Es decir, nuestro plano es

$$2x - 5y + z = D$$

Reemplazando con el punto,

$$8 - 10 + 1 = D \rightarrow D = -1$$

Luego, el plano buscado es

$$\Pi : 2x - 5y + z = -1$$

9. a) Sean $a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, calcule el vector $b - proy_a b$ y verifique que este es ortogonal a a.

b) Demuestre que si a y $b \in \mathbb{R}^3$ el vector $b - proy_a b$ es ortogonal a a.

Solución:

a) La proyección de b sobre a corresponde a

$$proy_a b = \frac{b \cdot a}{|a|^2} a = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$b - proy_a b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Podemos verificar que el resultado es perpendicular a a utilizando el producto punto, esto es

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

b) Para demostrar esto, debemos demostrar que

$$(b - proy_a b) \cdot a = 0$$

Desarrollando,

$$\left(b - \frac{b \cdot a}{|a|^2} a \right) \cdot a = 0$$

$$b \cdot a - \frac{b \cdot a}{|a|^2} a \cdot a = 0$$

Sea α el ángulo que se genera entre a y b, utilizando la definición del producto punto tenemos,

$$|b||a| \cos\alpha - \frac{|b||a| \cos\alpha}{|a|^2} |a|^2 = 0$$

$$|b||a| \cos\alpha - |b||a| \cos\alpha = 0$$

$$0 = 0$$

$\blacksquare$