Introducción a la Probabilidad y Estadística - Probabilidad y Estadística

Grisel Britos

2023

INTERVALOS DE CONFIANZA BASADOS EN UNA SOLA MUESTRA

Una estimación puntual sólo proporciona un valor numérico, pero NO proporciona información sobre la precisión y confiabilidad de la estimación del parámetro. Entonces una alternativa es calcular lo que llamaremos INTERVALO DE CONFIANZA.

Un Intervalo de Confianza (IC) para el parámetro θ permite tener una medida de la CONFIABILIDAD y PRECISIÓN de la estimación del parámetro.

La PRECISIÓN de un IC tiene que ver con su longitud: cuanto menor sea su longitud, mayor es la precisión.

La CONFIABILIDAD es medida con el nivel de confianza del intervalo, que denotaremos con $(1-\alpha)$. Los niveles más usados son de 0.90 , 0.95 y 0.99. Cuanto mayor sea el nivel de confianza, mayor es la chance de que el IC contenga al verdadero valor poblacional.

Luego es bueno pedirle a un IC que tenga una longitud pequeña y una alta confiabilidad de contener al parámetro poblacional.

Método para generar un IC para θ

Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una muestra aleatoria (m.a.) con distribución que depende de θ.

1ro) Hallar un estadístico $h(X_1, X_2, ..., X_n; \theta)$ con distribución conocida y que no dependa de θ.

2do) Fijar un nivel de confianza $(1-\alpha)$ y, usando la distribución del estadístico, encontrar $a < b$ tales que

$$P(a \leq h(X_1, X_2, ..., X_n; \theta) \leq b) = (1-\alpha) \tag{1}$$

3ro) A partir de la expresión del evento $(a \leq h(X_1, X_2, ..., X_n; \theta) \leq b)$ hay que tratar de obtener $l(X_1, X_2, ..., X_n)$ y $u(X_1, X_2, ..., X_n)$ tales que

$$P(l(X_1, X_2, ..., X_n) \leq \theta \leq u(X_1, X_2, ..., X_n)) = (1-\alpha)$$

Luego $[l(X_1, X_2, ..., X_n); u(X_1, X_2, ..., X_n)]$ es un IC aleatorio para θ con un nivel de confianza $(1-\alpha)$.

Notación: Denotaremos con $\boldsymbol{z_\beta}$ al **valor crítico**, hallado en la tabla de la distribución Normal Estándar, tal que: $\boldsymbol{\Phi(z_\beta) = 1 - \beta}$

IC para la media poblacional μ

CASO A:

Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una m.a. con distribución $\boldsymbol{N(\mu, \sigma^2)}$, con $\boldsymbol{\sigma^2}$ **conocida**.

1ro) Conocemos la distribución del promedio muestral $\overline{X}$ y esta es:

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}).$$

Al estandarizar $\overline{X}$ obtenemos una v.a. con distribución N(0,1):

$$\frac{(\overline{X} - \mu)}{\sigma}\sqrt{n} = h(X_1, X_2, ..., X_n; \theta) \sim N(0, 1)$$

2do) Fijado un nivel de confianza $(1 - \alpha)$, hay que buscar en la tabla normal estándar los valores de a y b tales que cumplan (1). Estos valores son $a = -z_{\alpha/2}$ y $b = z_{\alpha/2}$.

3ro) Trabajando desde la expresión del evento $(a \leq h(X_1, X_2, ..., X_n; \theta) \leq b)$ se tiene que

$$P((\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})) = (1 - \alpha)$$

Por lo tanto un **IC aleatorio de nivel** $(1 - \alpha)$ **para** $\theta = \mu$ es:

$$\boxed{\boldsymbol{\overline{X} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}$$

Por lo tanto, si se observa que en un evento $\omega \in \Omega$:

$$X_1(\omega) = x_1; X_2(\omega) = x_2; ...; X_n(\omega) = x_n,$$

un IC con un nivel de confianza $(1 - \alpha)$ para μ es

$$\overline{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

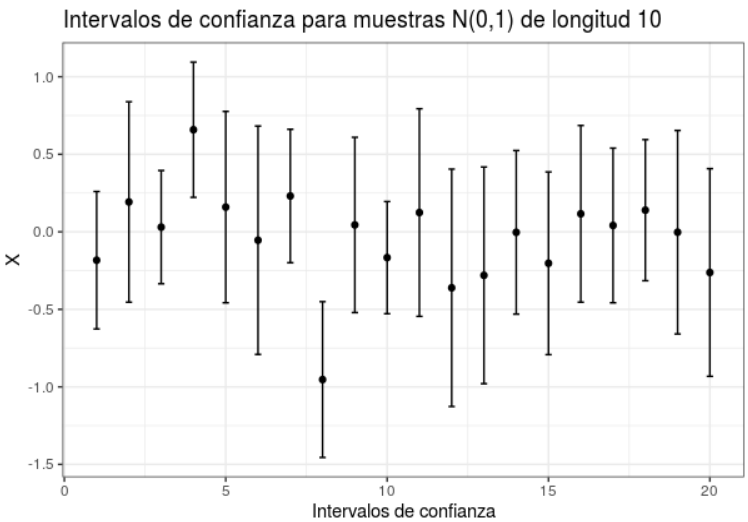
Interpretación del nivel de confianza de un intervalo

Se generaron 20 muestras aleatorias de distribución $N(0, 1)$ de tamaño $n = 10$.
Con cada muestra se calculó el IC del 90 % para μ dado por

$$\overline{x} \pm 1{,}645\frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \text{con } z_{0{,}05} = 1{,}645$$

Los 20 IC se muestran en la siguiente gráfica:
Como se puede observar en la gráfica, el verdadero valor de μ, que sabemos es igual a cero, NO pertenece a sólo el 10 % de los IC hallados.
Por eso un IC del 0,90 significa que hay una confiabilidad del 90 % de que el valor verdadero del parámetro se encuentre entre la cota inferior y superior hallada.

Algunas observaciones:



a) La longitud del IC de nivel $(1-\alpha)$ para μ es igual a

$$2z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

b) A mayor confiabilidad $(1-\alpha)$, se pierde precisión.

c) Si se quiere obtener un intervalo de confianza de longitud a lo sumo L y una confiabilidad $(1-\alpha)$ para μ entonces hay que tomar

$$n \geq (2z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{L})^2$$

Ejercicio 1: La calibración de una báscula debe ser revisada al pesar 25 veces un espécimen de 10 Kg. Suponga que los resultados de los diferentes pesos son independientes entre sí y que la variable peso esta normalmente distribuida con un desvío estándar $\sigma = 0,20$ Kg. Sea μ el verdadero valor medio de lectura de peso de la báscula.

a) ¿Cuál es el nivel de confianza para el intervalo $\overline{x} \pm 2{,}81\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ para μ?

b) ¿Cuál es el valor de $z_{\alpha/2}$ para un IC del 99,7 % para μ?

c) Si de la muestra observada se obtuvo un promedio y desvío estándar muestrales de $\overline{x} = 10{,}30$ Kg y $s_{n-1} = 0{,}19$ Kg respectivamente, obtenga un IC del 95 % para μ. Interprete el intervalo obtenido.

d) ¿Qué tan grande debería ser el tamaño de muestra tal que la longitud del IC del 95 % para μ sea a lo sumo de 0.05?

CASO B:

Por T.C.L., si $X_1, X_2, ..., X_n$ es una m.a. con $E(X) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$ entonces, para n suficientemente grande se tiene que $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ tiene distribución aproximadamente $N(\mu, \sigma^2/n)$, o equivalentemente,

$$\frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{\sigma} \dot{\sim} N(0,1)$$

- Luego, si $\boldsymbol{n \geq 30}$ y $\boldsymbol{\sigma}$ **conocido**, y trabajando de igual forma que lo realizado en el Caso A, se obtiene que un IC aleatorio de nivel aproximado $(1-\alpha)$ para μ es:

$$\boxed{\boldsymbol{\overline{X} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}$$

- Si $\boldsymbol{\sigma}$ es **desconocido**, a partir de $\boldsymbol{n \geq 40}$,

$$\frac{(\overline{X} - \mu)\sqrt{n}}{S_{n-1}} \dot{\sim} N(0,1)$$

Luego un IC aleatorio de nivel aproximado $(1 - \alpha)$ para μ es:

$$\boxed{\boldsymbol{\overline{X} \pm z_{\alpha/2} \frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}}}$$

donde $S_{n-1} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$.

Observación: En el caso en que σ sea conocida, un IC de nivel aproximado $(1-\alpha)$ para μ de longitud a lo sumo L se obtiene con una muestra de tamaño al menos:

$$\boldsymbol{n \geq (2 z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{L})^2}$$

Ejercicio 2: Se tiene una muestra de la duración de eco de radar de 110 relámpagos en cierta región. El promedio muestral fue de 0.81 segundos y el desviación estándar muestral (s_{n-1}) de 0.34 segundos. Calcular un IC de nivel aproximado 0.99 para la media de duración de eco μ.

Distribución t-student con ν grados de libertad

Definición: Sean Z y X dos variables aleatorias independientes tales que $Z \sim N(0,1)$ y $X \sim \chi^2_\nu$. Entonces $T = \frac{Z}{\sqrt{X/\nu}}$ se dice que tiene distribución t-student con ν grados de libertad.

La función densidad para una v.a. con distribución t-student con ν grados de libertad es:

$$f(x;\nu) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})} (1 + \frac{x^2}{\nu})^{-(\nu+1)/2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Propiedades de la densidad de una t-student con ν gl.

a) Tiene forma de campana y es simétrica entorno del origen.

b) La diferencia con la N (0; 1) es que tiene mayor dispersión para ν pequeño.

c) Cuando $\nu \to \infty$ la densidad se aproxima a la N (0; 1).

Para el cálculo de probabilidades usaremos la Tabla A-5 del libro de Devore.

Notación: $t_{\alpha,\nu}$ es el valor crítico cuya área a cola superior es igual a α y los grados de libertad son ν.

Ejercicio: Para una distribución t-student con ν grados de libertad.

I) *Determinar los siguientes valores críticos:*

a) $t_{0,025,5}$
b) $t_{0,025,25}$
c) $t_{0,975,5}$

II) *Determinar el valor crítico que contenga el área descripta en los siguientes casos:*

a) *Área a cola inferior 0,025 y grados de libertad 15.*
b) *Área central 0,95 y grados de libertad 15.*
c) *Área central 0,99 y grados de libertad 25.*

Teorema: Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una m.a. con distribución $N(\mu, \sigma^2)$ entonces:

a) $Z = \frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{\sigma} \sim N(0,1)$ y $(n-1)\frac{S^2_{n-1}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

b) Z y W son variables aleatorias independientes.

Por lo tanto de a) y b) resulta que

$$\frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{S_{n-1}} \sim t_{n-1}$$

CASO C:

Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una m.a. con **distribución $\boldsymbol{N(\mu, \sigma^2)}$** , con **$\boldsymbol{\sigma^2}$ desconocida**.
Ya sabemos que

$$\frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{\sigma} \sim N(0,1)$$

Por lo tanto, por lo visto en el Caso B, si $n \geq 40$ un IC aleatorio de nivel aproximado $(1-\alpha)$ para μ es:

$$\overline{X} \pm z_{\alpha/2}\frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}$$

Pero ¿qué hacer si $\boldsymbol{n < 40}$?

Debido al teorema visto recién y trabajando en forma similar a lo realizado cuando la distribución es normal estándar, se tiene que un IC aleatorio de nivel $(1-\alpha)$ para μ es:

$$\boxed{\boldsymbol{\overline{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}}}$$

Ejercicio 3: Un artículo sobre envejecimiento del papel aislante en transformadores de potencia, contiene la siguiente tabla sobre el grado de polimerización en muestra de papel:

418	421	421	422	425	427	431	434	437
439	446	447	448	453	454	463	465	

Suponiendo que muestra proviene de una distribución normal

a) *Construir un intervalo de confianza del 95 % para el grado de polimerización medio.*

b) *A partir del intervalo obtenido ¿es factible el valor de 440 para la polimerización media? ¿y un valor de 450? Justifique su respuesta.*

Distribución χ^2 con ν grados de libertad (gl)

La distribución χ^2 con ν g.l. es un caso particular de la distribución Gamma:

$$\chi^2_\nu = \Gamma(\frac{\nu}{2}, 2).$$

La función densidad de esta variable aleatoria no es simétrica respecto del origen. Para el cálculo de probabilidades usaremos la Tabla A-7 del libro de Devore.

Notación: $\chi^2_{\alpha,\nu}$ es el valor crítico cuya área a cola superior es igual a α y los grados de libertad son ν.

Ejercicio: Sea X una variable aleatoria con distribución Chi-cuadrado, entonces hallar:

a) *El valor crítico que me deja un área a cola superior de 0,005 con gl=25.*

b) *El valor crítico que me deja un área a cola superior de 0,95 con gl=25.*

c) *El percentil 95 % para X con gl=10.*

d) *El percentil 5 % para X con gl= 15.*

e) $P(10,98 \leq X \leq 36,78)$ *con gl=22.*

f) $P((X < 14,611) \cup (X > 37,652))$ *con gl=25.*

IC para σ^2 y σ de nivel $(1-\alpha)$

Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una m.a.con **distribución $N(\mu, \sigma^2)$**.

Para dar el IC en esta situación presentaremos una variable aleatoria presentada en el teorema anterior:

$$h(X_1, ..., X_n; \sigma^2) = (n-1)\frac{S^2_{n-1}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

donde $S^2_{n-1} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$

Luego con este resultado y trabajando en forma similar a lo realizado antes se tiene que un **IC aleatorio de nivel** $(1-\alpha)$ para $\boldsymbol{\sigma^2}$ es:

$$\boxed{[\frac{(n-1)S^2_{n-1}}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}; \frac{(n-1)S^2_{n-1}}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}]}$$

y para $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\boxed{[\sqrt{\frac{(n-1)s^2_{n-1}}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}}; \sqrt{\frac{(n-1)s^2_{n-1}}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}}]}$$

<u>Ejercicio 4:</u> Se efectuaron las siguientes observaciones de resistencia a la fractura de placas base de 18 % de acero maragizado al níquel:

69,5	71,9	72,6	73,1	73,3	73,5	75,5	75,7	75,8	76,1	76,2
76,2	77,0	77,9	78,1	79,6	79,7	79,9	80,1	82,2	83,7	83,7

Asuma que la muestra proviene de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$.

a) Construir un intervalo de confianza del 99 % para la resistencia media a la fractura.

b) Construir un intervalo de confianza del 99 % para la desviación estándar poblacional de la resistencia a la fractura.

IC para la proporción poblacional p

Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una m.a.con distribución Bernoulli(p) y tamaño de muestra suficientemente grande. Entonces por TCL resulta que

$$\frac{(\overline{X} - p)}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \dot{\sim} N(0,1)$$

donde $p = E(X)$ y $V(X) = p(1-p)$.
Denotaremos con $\hat{p} = \overline{X}$, entonces

$$\frac{(\hat{p} - p)}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \dot{\sim} N(0,1)$$

Planteando la ecuación:

$$P\left(\left|\frac{(\hat{p} - p)}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right| \leq z_{\alpha/2}\right) \simeq (1-\alpha)$$

y trabajando con el evento elevado al cuadrado se puede obtener una ecuación cuadrática en p donde las raíces de esa ecuación son la cota inferior y superior de un intervalo de confianza aproximado $(1-\alpha)$ para p, resultando:

$$\frac{\hat{p} + \frac{z^2_{\alpha/2}}{2n} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} + \frac{z^2_{\alpha/2}}{4n}}}{1 + \frac{z^2_{\alpha/2}}{n}}$$

Para n suficientemente grande:

- $\frac{z^2_{\alpha/2}}{2n}$ es insignificante en comparación con $\hat{p}$;
- $\frac{z^2_{\alpha/2}}{4n}$ es insignificante en comparación con $\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}$ y
- $\frac{z^2_{\alpha/2}}{n}$ es insignificante en comparación con 1.

Luego desechando esos términos insignificantes resulta este **IC aleatorio de nivel aproximado** $(1-\alpha)$ para $\boldsymbol{p}$ tradicional

$$\boxed{\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}$$

siempre que $n\hat{p} \geq 10$ y $n(1-\hat{p}) \geq 10$

Observación: Para este último intervalo, si se quiere un IC de nivel aproximado $(1-\alpha)$ para p y de longitud a lo sumo L entonces el tamaño de muestra debe ser tal que:

$$n \geq (\frac{z_{\alpha/2}}{L})^2$$

independientemente del valor de la proporción observada ($\hat{p}$).

Ejercicio 5: En un artículo sobre estimación de fuentes de defectos visuales, se reporta que se estudiaron con un sensor de inspección 356 matrices de silicio de las cuales 201 pasaron la prueba.

a) Construir un intervalo de confianza de nivel aproximado 0. 98 para la proporción poblacional de matrices que pasan la inspección.

b) ¿Qué tamaño de muestra sería necesario para que la longitud un intervalo de confianza de nivel aproximado 0.98 para la proporción poblacional de matrices que pasan la inspección sea a lo sumo 0.05, independientemente del valor $\hat{p}$?

Cuadro 1: Resumen de Intervalos de Confianza

θ	Supuestos	Estadístico y distribución	Intervalo de Confianza $(1-\alpha)$
μ	m.a. $N(\mu,\sigma^2)$; σ conocido	$\frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{\sigma} \sim N(0,1)$	$\overline{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
	m.a. $N(\mu,\sigma^2)$; σ desconocido	$\frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{S_{n-1}} \sim t_{n-1}$	$\overline{x} \pm t_{\alpha/2;n-1}\frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}}$
	m.a. con "$n \gg 0$"	$\frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{\sigma} \dot\sim N(0,1)$; si $n \geq 30$ y σ conocido	$\overline{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
		$\frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{S_{n-1}} \dot\sim N(0,1)$; si $n \geq 40$ y σ desconocido	$\overline{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}}$
σ^2	m.a. $N(\mu,\sigma^2)$	$(n-1)\frac{S^2_{n-1}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$	$[(n-1)\frac{s^2_{n-1}}{\chi^2_{\alpha/2;n-1}}, (n-1)\frac{s^2_{n-1}}{\chi^2_{1-\alpha/2;n-1}}]$
p	m.a. $Be(p)$ con "$n \gg 0$": $n\hat{p} \geq 10$ y $n(1-\hat{p}) \geq 10$	$\frac{(\hat{p}-p)}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \dot\sim N(0,1)$	$\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$