Introducción a la Probabilidad y Estadística - Probabilidad y Estadística

Grisel Britos

2023

PROBABILIDAD

Nociones de probabilidad

En esta área de estudio podemos distinguir dos tipos de sucesos: Determinístico o Aleatorio.

En un suceso determinístico se puede predecir el resultado con exactitud. Por ej.: dado un valor t_0 y una función $f(t) = at + b$, la respuesta invariable de f al valor t_0 será $f(t_0) = at_0 + b$

En cambio, en un suceso aleatorio, no se puede predecir su resultado con exactitud.

A sucesos aleatorios, asociados a un experimento, se asignará lo que llamaremos PROBABILIDAD.

- Ejemplo de suceso aleatorio: Supongamos que el experimento consiste en arrojar una moneda. Dicho experimento es aleatorio ya que no se puede predecir su resultado con exactitud pero sí se pueden listar los resultados posibles, en este caso, que salga cara (C) o que salga cruz (X).

La Teoría frecuentista dice que en una larga serie de tiradas de la moneda, la frecuencia relativa de que resulte C, para este ejemplo, tiende a estabilizarse alrededor de un número fijo llamado probabilidad del suceso (en el caso que la moneda sea honesta este sería 1/2).

La definición que daremos de Probabilidad será tal que sea consistente con la Teoría frecuentista.

Repaso de algunas propiedades sobre conjuntos:

a) $\overline{A} \cup A = \Omega$

b) $\overline{\Omega} = \emptyset$ y $\overline{\emptyset} = \Omega$

c) $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

d) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

e) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

f) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Modelo probabilístico

Los sucesos aleatorios están frecuentemente presentes en situaciones de la vida real. Para describir y estudiar fenómenos reales, la matemática utiliza modelos.

Veamos algunos conceptos que nos permitirán construir una definición de modelo para dichos sucesos aleatorios.

Definiciones:

- **Experimento aleatorio:** es todo proceso que genera resultados aleatorios.
- **Espacio muestral (Ω):** es el conjunto de todos los resultados posibles del experimento.
- **Evento:** es cualquier subconjunto de Ω. Si el evento tiene sólo un elemento se lo llama evento simple y si tiene por lo menos dos elementos se lo llama compuesto.
- **Familia de eventos de Ω ($\mathcal{A}$):** es un conjunto de elementos de Ω no vacío y que cumple las siguientes condiciones:
  - Si $A \in \mathcal{A}$ entonces $\overline{A} \in \mathcal{A}$
  - Si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ son eventos en $\mathcal{A}$ entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

  Un caso particular es tomar $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ (se lee partes de Ω) que está formado por todos los subconjuntos del espacio muestral, incluído el vacío.
- **Probabilidad:** es una función $P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ que debe cumplir:
  1) $0 \leq P(A) \leq 1$ para cada $A \in \mathcal{A}$
  2) $P(\Omega) = 1$
  3) $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ para $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ eventos disjuntos en $\mathcal{A}$

  Notar que esta condición también vale para uniones finitas de eventos disjuntos.
- **Modelo probabilístico:** está conformado por el espacio muestral (Ω), una familia de eventos de Ω ($\mathcal{A}$) y una medida de probabilidad (P). Se denota con $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Observación: Dado un Ω asociado a un experimento tal que $\#\Omega = N < \infty$ y donde cada resultado es igualmente probable entonces:

- $P(E) = \frac{1}{N}$ para todo evento simple $E \in \mathcal{A}$
- $P(A) = \frac{\#(A)}{N}$ para todo evento $A \in \mathcal{A}$

Ejemplo 1:
El experimento consiste en arrojar tres veces una moneda honesta y registrar los resultados de cada tirada.

a) *Determinar un modelo probabilístico para este experimento.*

b) *Calcular la probabilidad del evento:*

   i) *A:"la primera tirada es cara (c)"*

   ii) *B:"exactamente dos son caras"*

   iii) *C:"al menos una es cara"*

   iv) $A \cup B$

c) *¿A y B son eventos disjuntos?*

d) *¿A y B son eventos complementarios?*

Ejemplo 2:
El experimento consiste en lanzar un dado honesto hasta obtener un 6.

i) Defina un modelo probabilístico adecuado para este experimento.

ii) Calcular la probabilidad de que se necesite lanzar un dado por entre dos a cuatro veces hasta obtener un 6.

Propiedades de la función Probabilidad

Dado un modelo probabilístico $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ asociado a un experimento. Para cualquier A y B eventos en $\mathcal{A}$ se cumplen:

I) Si $A \subset B$ entonces $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$ y $P(B) \geq P(A)$

II) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

III) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

IV) Si A y B son disjuntos, entonces $P(A \cap B) = 0$

La propiedad (III) puede ser generalizada a n eventos. Sean $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ eventos en $\mathcal{A}$ entonces:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} B_i$$

donde

$$B_i = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_i \leq n} P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap ... \cap A_{j_i})$$

Ejemplo 3:
Una empresa controla mensualmente el funcionamiento de sus múltiples servidores. Sea A el evento de que un servidor, elegido al azar, haya presentado una falla durante el mes de abril y sea B el evento análogo para el mes de octubre (A y B se refieren al mismo servidor). Suponga que $P(A) = 0{,}8$; $P(B) = 0{,}7$ y $P(A \cup B) = 0{,}9$. Calcular:

a) $P(\overline{A})$; $P(A \cap B)$ *y* $P(A \cap \overline{B})$.

b) *La probabilidad que de falle en exactamente uno de estos meses. (Describa el evento en término de los eventos A y B).*

Probabilidad condicional e independencia

Definición: Dado un modelo probabilístico $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ y A y B eventos tal que $P(B) > 0$, entonces se define la probabilidad condicional de A dado B como

$$\boldsymbol{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Propiedades de la probabilidad condicional

Dado un modelo probabilístico $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ y B evento tal que $P(B) > 0$ entonces

a) $0 \leq P(A|B) \leq 1 \ \forall A \in \mathcal{A}$

b) $P(\Omega|B) = 1$

c) $\forall A, C \in \mathcal{A}$ eventos disjuntos, entonces

$$P(A \cup C|B) = P(A|B) + P(C|B)$$

Nota: Esta última propiedad también es válida para una unión infinita de eventos disjuntos, o sea:

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$$

para $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ eventos disjuntos en $\mathcal{A}$.
Por lo tanto como $P_B(A) := P(A|B) \ \forall A \in \mathcal{A}$ cumple con las propiedades a), b) y c) resulta ser una función de probabilidad.

d) $P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B) \ \forall A \in \mathcal{A}$.

Independencia

Definición: Sean A y B eventos en $\mathcal{A}$. Diremos que son independientes si y sólo si

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A).P(B)}$$

Proposición: Si A y B son eventos independientes en $\mathcal{A}$, entonces:

a) $\overline{A}$ y B son independientes

b) A y $\overline{B}$ son independientes

c) $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son independientes

Definición: Diremos que $A_1, A_2, ..., A_n$ son eventos mutuamente independientes si para todo subconjunto de subíndices $\{i_r\}_{r=1}^{k} \subseteq \{1, 2, ..., n\}$ se cumple

$$P(\bigcap_{r=1}^{k} A_{i_r}) = \prod_{r=1}^{k} P(A_{i_r})$$

Ejemplo 4:

Sea un sistema compuesto con cuatro componentes idénticas conectadas en paralelo, tal que el sistema funciona (F) si las componentes 1 y 2 funcionan o las componentes 3 y 4 funcionan. Suponga que las componentes funcionan independientemente una de otra y que la probabilidad de funcionar cada una de ellas es 0.9 entonces ¿cuál es la probabilidad que el sistema funcione?

Regla de la multiplicación

Sean $A_1, A_2, ..., A_n$ eventos en $\mathcal{A}$ tal que $P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) > 0$ entonces:

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)...P(A_n|A_1 \cap ... \cap A_{n-1})$$

Ejemplo 5:

Una urna contiene 5 bolas blancas y 7 negras. Se seleccionan aleatoriamente dos bolas de la urna sin reposición, primero una y después la otra.

a) *Sea A el evento la primera bola es blanca y B la segunda bola es negra. ¿Son A y B eventos independientes? Justifique su respuesta.*

b) *Calcular la probabilidad que*

  i) *ambas bolas sean blancas*

  ii) *ambas bolas sean de igual color.*

Ley de Probabilidad Total

Sean $A_1, A_2, ..., A_n$ eventos mutuamente excluyentes tal que $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Entonces:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i); \qquad \forall B \in \mathcal{A}$$

Teorema de Bayes

Sean $A_1, A_2, ..., A_n$ eventos mutuamente excluyentes tal que $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ y $P(A_i) > 0 \quad \forall i = 1, 2, ..., n$. Entonces:

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)} \qquad \forall j = 1, 2, ..., n \quad y \quad \forall B \in \mathcal{A} \quad con \quad P(B) > 0.$$

Ejemplo 6:

Al llegar al último año de una determinada carrera universitaria, los alumnos deben elegir cursar una materia optativa entre tres opciones disponibles: A1, A2, A3. El 40 % de los estudiantes elige la materia A1, el 35 % elige A2 y el resto A3. Se sabe que, de los alumnos que cursan A1, el 30 % promociona, de los que cursan A2 el 60 % promociona y de los que cursan A3 el 50 % promociona.

a) *¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elija cursar A2 y promocione?*

b) *¿Cuál es la probabilidad de que el alumno elegido al azar promocione?*

c) *Si se sabe que el alumno promocionó, ¿cuál es la probabilidad que haya cursado A3 ?*