

Introducción a la Probabilidad y Estadística - Probabilidad y Estadística

Grisel Britos

2023

PRUEBA DE HIPOTESIS BASADA EN UNA SOLA MUESTRA

Pruebas de hipótesis es una parte de la ESTADÍSTICA INFERENCIAL y tiene su analogía con los pasos que se realizan en un JUICIO.

Objetivo: Aquí no se busca estimar el parámetro θ sino determinar cuál de las hipótesis contrapuestas propuestas por el investigador es la correcta para cierto nivel.

Esquema del procedimiento de Prueba de Hipótesis

- El investigador establecerá las hipótesis en base a la teoría que quiere verificar.
- Tomar una muestra aleatoria de la población en estudio.
- Comparar lo observado con su teoría, si lo observado se contrapone a su teoría se rechaza su hipótesis en caso contrario se dice que no se observó cambio.

A continuación se definirán los elementos necesarios para llevar adelante una Prueba de hipótesis.

El investigador debe establecer dos hipótesis contrapuestas de interés para θ , llamadas **Hipótesis Nula** (H_0) e **Hipótesis Alternativa** (H_a).

H_0 hipótesis de no cambio, no diferencia, no mejoría, etc.

H_a hipótesis que el investigador pretende validar.

Si θ es el parámetro de interés y θ_0 un valor fijado por el investigador entonces en nuestro tratamiento de Prueba de hipótesis consideraremos estas posibles hipótesis alternativas:

$$H_a = \begin{cases} \theta \neq 0 & \text{Prueba bilateral} \\ \theta > \theta_0 & \text{Prueba unilateral a cola superior} \\ \theta < \theta_0 & \text{Prueba unilateral a cola inferior} \end{cases}$$

Llamaremos Θ al conjunto de posibles valores del parámetro θ . Por ejemplo: si $\theta = \mu$, $\Theta = \mathbb{R}$.

Llamaremos Θ_0 al conjunto de posibles valores del parámetro θ cuando H_0 es verdadera.

Al realizar una prueba de hipótesis se pueden cometer dos tipos de errores que se señalan en la siguiente tabla:

	Aceptar H_0	Rechazar H_0
H_0 es verdadera	Decisión correcta	Error de tipo I
H_0 es falsa	Error de tipo II	Decisión correcta

Las funciones definidas como las probabilidades de cometer los errores tipo I y tipo II son denotados con las letras griegas α y β respectivamente:

La función $\alpha : \Theta_0 \rightarrow [0, 1]$ se define como

$$\alpha(\theta) = P_{\theta}(\text{Error tipo I})$$

La función $\beta : (\Theta - \Theta_0) \rightarrow [0, 1]$ se define como

$$\beta(\theta) = P_{\theta}(\text{Error tipo II})$$

Se llamará **nivel de significación** de una prueba al valor

$$\alpha = \max_{\theta \in \Theta_0} \alpha(\theta), \quad \text{donde} \quad H_0 : \theta \in \Theta_0$$

Estadístico de Prueba: estadístico con distribución conocida bajo hipótesis nula, sobre el cual se basará la decisión a tomar.

Región de Rechazo de H_0 (RR): conjunto de valores del estadístico de prueba para los cuales H_0 será rechazada, o sea H_0 será rechazada si el valor observado o alcanzado del estadístico pertenece a la RR, en cuyo caso diremos que la H_a es la correcta.

En caso contrario diremos que no se encontró evidencia suficiente para rechazar H_0 .

La región de rechazo determina las probabilidades de cometer cada uno de los errores.

Problema 1: Supongamos que el 10 % de las tarjetas de circuito producidas por cierto fabricante son defectuosas. Con el fin de reducir la proporción de tarjetas defectuosas se ha sugerido un nuevo proceso de producción. En este caso $\theta = p$ es la verdadera proporción de tarjetas defectuosas con este nuevo método de producción. Se desea estudiar la eficacia del nuevo método de producción.

- a) *Establecer las hipótesis de interés.*
- b) *Se tomó una muestra aleatoria de $n = 200$ tarjetas producidas con este nuevo método. Determinar el Estadístico de Prueba y su distribución.*
- c) *Dada la $RR = \{x : x \leq 15\}$, calcular el nivel de significancia aproximado y hallar una expresión para la probabilidad aproximada de cometer el Error de tipo II.*
- d) *Si ahora la $RR = \{x : x \leq 12\}$, calcular el nivel de significancia aproximado.*
- e) *Si en la muestra aleatoria se obtuvo $x = 13$, ¿cuál sería su conclusión? Usando la región de rechazo dada en el ítem c).*

Observaciones sobre el Problema 1:

- i) $\beta(p)$ crece cuando p se aproxima a 0.10 por la izquierda.
- ii) $\alpha = \max_{p \geq 0.10} \alpha(p) = \alpha(0.10)$. Por lo tanto esta prueba seguirá teniendo el mismo nivel de significancia para la hipótesis simplificada $H_0 : p = 0.10$.

Debido a esto, **de ahora en más nuestra hipótesis nula será:**

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

En resumen los pasos a seguir para realizar una Prueba de Hipótesis son:

- a) Identificar el parámetro de interés.
- b) Determinar las Hipótesis nula y alternativa para el problema.
- c) Determinar el Estadístico de Prueba adecuado, con distribución conocida bajo H_0 .
- d) Fijado un nivel de significancia α determinar la Región de Rechazo.
- e) Calcular el valor observado o alcanzado del estadístico de prueba con la muestra obtenida.
- f) Determinar si H_0 debe ser rechazada o no para el nivel de significación dado, estableciendo una conclusión en el contexto del problema.

Pruebas de Hipótesis para la media poblacional

Así como hicimos para construir IC, consideraremos diferentes situaciones para plantear la Prueba de Hipótesis.

Hipótesis Nula:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

CASO A:

Sea X_1, \dots, X_n una m.a. de **distribución $N(\mu, \sigma^2)$** con **σ^2 conocido**. Bajo estos supuestos sabemos que

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

o equivalentemente

$$\frac{(\bar{X} - \mu)\sqrt{n}}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Estadístico de Prueba:

$$\frac{(\bar{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma} \sim N(0, 1), \quad \text{bajo } H_0$$

Si la Hipótesis alternativa fuese:

$$H_a : \mu < \mu_0$$

Fijado un nivel de significancia α entonces veamos cómo definir la Región de Rechazo (RR_α) y estudiemos el comportamiento de la función β .

$$RR_\alpha = \{\bar{x} : \bar{x} \leq k_\alpha = -z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \mu_0\} = \{z : z \leq -z_\alpha\}$$

La probabilidad de cometer el error tipo II es:

$$\beta(\mu) = 1 - \Phi\left(-z_\alpha + \frac{(\mu_0 - \mu)}{\sigma} \sqrt{n}\right) \quad \forall \mu < \mu_0$$

Observaciones sobre esta función:

- i) $\lim_{\mu \rightarrow \mu_0^-} \beta(\mu) = 1 - \alpha$ y $\lim_{\mu \rightarrow -\infty} \beta(\mu) = 0$
- ii) β es una función creciente con punto de inflexión en $k_\alpha = -z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \mu_0$
- iii) Ahora si queremos determinar el tamaño de muestra necesario para que una prueba de nivel α sea tal que $\beta(\mu') \leq \beta_0$ para un valor fijo $\mu' \leq \mu_0$. Entonces:

$$n \geq \left[\frac{(z_{\beta_0} + z_\alpha)}{(\mu_0 - \mu')} \sigma \right]^2$$

Problema 2: Se sabe que el tiempo de secado de cierto tipo de pintura, bajo ciertas condiciones de prueba, está normalmente distribuido con valor medio de 75 minutos y una desviación estándar de 9 minutos. Un equipo de químicos ha diseñado un nuevo aditivo para reducir el tiempo medio de secado de la pintura. Se supone que el tiempo de secado para la pintura con el nuevo aditivo seguirá teniendo distribución normal con desviación estándar de 9 minutos. Debido al gasto asociado con el aditivo, la evidencia debe sugerir de forma contundente una disminución en el tiempo medio de secado (μ) para su aceptación.

- a) Plantear las hipótesis pertinentes.
- b) Dar el estadístico de prueba y su distribución bajo hipótesis nula.
- c) Se tomó una muestra aleatoria de tamaño 25 obteniéndose un promedio muestral de 72.3 minutos. ¿Cuál sería su conclusión usando un nivel de significancia de 0,01? Justifique su respuesta.
- d) ¿Cuál es el nivel de significación para la $RR = \{z : z \leq -2,88\}$?
- e) Para la RR dada en d), dar el valor de la probabilidad de cometer el error tipo II cuando $\mu = 70$.
- f) Para la RR dada en d), ¿cuál es el menor tamaño de muestra que debería tomar para asegurar que $\beta(70) \leq 0,01$?

Problema 3: Una mezcla de ceniza pulverizada de combustible y cemento Portland para techar debe tener una resistencia a la compresión de más de 1300 KN/m². La mezcla no se utilizará a menos que una evidencia experimental indique de manera concluyente que se ha cumplido la especificación de resistencia. Supongamos que la resistencia a la compresión para especímenes de esta mezcla está distribuida normalmente con $\sigma = 60$. Sea μ la resistencia media de compresión de la mezcla.

- a) ¿Cuáles son las hipótesis nula y alternativa pertinentes?
- b) Considere el procedimiento de prueba basado en el estadístico \bar{X} para $n = 20$ muestras, ¿cuál es su distribución cuando H_0 es verdadera?
- c) Dada la siguiente $RR = \{\bar{x} : \bar{x} \geq 1331,26\}$ determine el nivel de significación de la prueba de hipótesis.
- d) ¿Cuál es la distribución del estadístico de prueba cuando $\mu = 1350$? Usando la RR dada en c), ¿cuál es la probabilidad de que la mezcla se considere no satisfactoria cuando $\mu = 1350$?
- e) ¿Cómo debería cambiar la RR para que la prueba tenga un nivel de significancia de 0.05? ¿Qué impacto tendría este cambio en la probabilidad del ítem d)?

Problema 4: La calibración de una báscula debe ser revisada al pesar 25 veces un espécimen de prueba de 10 kg. Suponga que los resultados de diferentes pesos son independientes entre sí y que el peso en cada intento está normalmente distribuido con $\sigma = 0,2$ kg. Sea μ el valor medio de lectura de peso de la báscula.

- a) ¿Cuáles son las hipótesis pertinentes?
- b) Suponga que la báscula debe ser revisada si $\bar{x} \leq 9,8968$ ó $\bar{x} \geq 10,1032$ entonces ¿cuál es la probabilidad de que la revisión se realice cuando no sea necesaria?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que la revisión se considere innecesaria cuando $\mu = 10,1$? ¿Y cuándo $\mu = 9,8$?
- d) Sea $z = (\bar{x} - 10)\sqrt{n}/\sigma$ ¿cuál es el valor de c para que la región de rechazo del ítem b) sea equivalente a rechazar si $|z| \geq c$?
- e) Si ahora el tamaño de muestra fuese de 10 en lugar de 25, ¿cómo se alteraría la RR del ítem d) para que $\alpha = 0,05$?
- f) Mediante el uso de la RR definida en el ítem e) , ¿cuál sería su conclusión usando los siguientes datos muestrales?

9,981	9,728	10,006	10,439	9,857
10,214	10,107	10,190	9,888	9,793

Resumiendo:

Supuestos:

Sea X_1, X_2, \dots, X_n una m.a. de distribución $N(\mu, \sigma^2)$ con σ^2 conocido.

Hipótesis Nula:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

Estadístico de Prueba:

$$Z = \frac{(\bar{X} - \mu)\sqrt{n}}{\sigma} \sim N(0, 1), \quad \text{bajo } H_0$$

H_a	RR_α	$\beta(\mu)$
$\mu < \mu_0$	$z \leq -z_\alpha$	$1 - \Phi(-z_\alpha + \frac{(\mu_0 - \mu)\sqrt{n}}{\sigma})$
$\mu > \mu_0$	$z \geq z_\alpha$	$\Phi(z_\alpha + \frac{(\mu_0 - \mu)\sqrt{n}}{\sigma})$
$\mu \neq \mu_0$	$ z \geq z_{\alpha/2}$	$\Phi(z_{\alpha/2} + \frac{(\mu_0 - \mu)\sqrt{n}}{\sigma}) - \Phi(-z_{\alpha/2} + \frac{(\mu_0 - \mu)\sqrt{n}}{\sigma})$

Para este caso, si la prueba de hipótesis es unilateral, el mínimo tamaño de muestra necesario para que una prueba de nivel α sea tal que $\beta(\mu') \leq \beta_0$ es

$$n \geq \left[\frac{(z_{\beta_0} + z_\alpha)}{(\mu_0 - \mu')} \sigma \right]^2$$

Si la prueba de hipótesis es bilateral, el mínimo tamaño de muestra necesario para que una prueba de nivel α sea tal que $\beta(\mu') \leq \beta_0$ es

$$n \geq \left[\frac{(z_{\beta_0} + z_{\frac{\alpha}{2}})}{(\mu_0 - \mu')} \sigma \right]^2$$

CASO B:

Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria con valor medio μ y varianza σ^2 respectivamente. Si el tamaño de **muestra es suficientemente grande** entonces por TCL:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

o equivalentemente,

$$\frac{(\bar{X} - \mu)\sqrt{n}}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Hipótesis Nula:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

- Si $n \geq 30$ y σ es **conocida**:

Estadístico de Prueba:

$$Z = \frac{(\bar{X} - \mu)\sqrt{n}}{\sigma} \sim N(0, 1), \quad \text{bajo } H_0$$

H_a	RR_α	$\beta(\mu)$
$\mu < \mu_0$	$z \leq -z_\alpha$	$1 - \Phi\left(-z_\alpha + \frac{(\mu_0 - \mu)\sqrt{n}}{\sigma}\right)$
$\mu > \mu_0$	$z \geq z_\alpha$	$\Phi\left(z_\alpha + \frac{(\mu_0 - \mu)\sqrt{n}}{\sigma}\right)$
$\mu \neq \mu_0$	$ z \geq z_{\alpha/2}$	$\Phi\left(z_{\alpha/2} + \frac{(\mu_0 - \mu)\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \Phi\left(-z_{\alpha/2} + \frac{(\mu_0 - \mu)\sqrt{n}}{\sigma}\right)$

- Si $n \geq 40$ y σ es **desconocida**, se reemplaza σ por S_{n-1} :

Estadístico de Prueba:

$$Z = \frac{(\bar{X} - \mu)\sqrt{n}}{S_{n-1}} \sim N(0, 1), \quad \text{bajo } H_0$$

H_a	RR_α	$\beta(\mu)$
$\mu < \mu_0$	$z \leq -z_\alpha$	$1 - \Phi\left(-z_\alpha + \frac{(\mu_0 - \mu)\sqrt{n}}{s_{n-1}}\right)$
$\mu > \mu_0$	$z \geq z_\alpha$	$\Phi\left(z_\alpha + \frac{(\mu_0 - \mu)\sqrt{n}}{s_{n-1}}\right)$
$\mu \neq \mu_0$	$ z \geq z_{\alpha/2}$	$\Phi\left(z_{\alpha/2} + \frac{(\mu_0 - \mu)\sqrt{n}}{s_{n-1}}\right) - \Phi\left(-z_{\alpha/2} + \frac{(\mu_0 - \mu)\sqrt{n}}{s_{n-1}}\right)$

Para este caso, si la prueba de hipótesis es unilateral, el mínimo tamaño de muestra necesario para que una prueba de nivel α sea tal que $\beta(\mu') \leq \beta_0$ es

$$n \geq \left[\frac{(z_{\beta_0} + z_{\alpha})}{(\mu_0 - \mu')} \sigma \right]^2$$

Si la prueba de hipótesis es bilateral, el mínimo tamaño de muestra necesario para que una prueba de nivel α sea tal que $\beta(\mu') \leq \beta_0$ es

$$n \geq \left[\frac{(z_{\beta_0} + z_{\frac{\alpha}{2}})}{(\mu_0 - \mu')} \sigma \right]^2$$

Problema 5: Cierta marca de focos son anunciados que poseen un tiempo de vida medio de 750 horas. Un cliente potencial ha estado evaluando su compra, previo convenio de compra, y sólo dará marcha atrás si se demuestra en forma concluyente que el tiempo de vida medio (μ) es menor a lo anunciado. Se seleccionó una muestra aleatoria de 50 focos y se determinó el tiempo de vida para cada uno de ellos, obteniéndose un promedio y desvío estándar muestral de 738,44 y 38,20 horas, respectivamente.

- Determinar las hipótesis pertinentes.
- Dar el estadístico de prueba y su distribución bajo hipótesis nula.
- Determinar la región de rechazo de H_0 al 5 % y ¿cuál sería su recomendación?
- ¿Cuál sería su recomendación? Considerando $\alpha = 0,01$.

CASO C:

Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria de **distribución $N(\mu, \sigma^2)$** con **σ^2 desconocido**. Bajo estos supuestos sabemos que

$$\frac{(\bar{X} - \mu)\sqrt{n}}{S_{n-1}} \sim t_{n-1}$$

Hipótesis Nula:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

Estadístico de Prueba:

$$T = \frac{(\bar{X} - \mu)\sqrt{n}}{S_{n-1}} \sim t_{n-1} \quad \text{bajo } H_0$$

H_a	RR_{α}
$\mu < \mu_0$	$t \leq -t_{\alpha;n-1}$
$\mu > \mu_0$	$z \geq t_{\alpha;n-1}$
$\mu \neq \mu_0$	$ t \geq t_{\alpha/2;n-1}$

En este caso no se dará la expresión de la probabilidad de cometer el Error Tipo II (ya que aparece una distribución t-student no central) y por ende, tampoco se determinará el valor de n como hacíamos en el caso distribución normal.

Problema 6: En cierta marca de aceite vegetal hidrogenado se anuncia que el producto tiene un punto de fusión de 95. Se ha determinado el punto de fusión en cada una de 16 muestras de esta marca de aceite vegetal hidrogenado y los resultados obtenidos fueron: $\bar{x} = 94,32$ y $s_{n-1} = 1,20$. Si se puede suponer que el tiempo de fusión en aceite vegetal tiene distribución normal entonces:

- Obtener un intervalo de confianza del 95 % para el punto de fusión medio para este aceite hidrogenado.
- Planteadas las hipótesis $H_0 : \mu = 95$ vs. $H_a : \mu \neq 95$ concluir al 5 %.
- Comparar los resultados obtenidos en los ítems anteriores.

Prueba de hipótesis para la varianza poblacional

Supuestos:

Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria con **distribución $N(\mu, \sigma^2)$** .

Bajo estas condiciones sabemos

$$\frac{(n-1)S_{n-1}^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

Este resultado nos servirá para obtener la región de rechazo para la prueba de hipótesis.

Hipótesis Nula:

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

Estadístico de Prueba:

$$\frac{(n-1)S_{n-1}^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2, \quad \text{bajo } H_0$$

Fijado un nivel de significación α y considerando la hipótesis alternativa

$$H_a : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

H_0 será rechazada para valores de s_{n-1}^2 que sean mayores que una constante k_α , o sea una región de rechazo razonable sería

$$RR_\alpha = \{s_{n-1}^2 : s_{n-1}^2 \geq k_\alpha\}$$

¿Cómo determinar el valor de la constante k_α ?

$$\alpha = P(S_{n-1}^2 \geq k_\alpha; \sigma_0^2) = P\left(\frac{(n-1)S_{n-1}^2}{\sigma_0^2} \geq \frac{(n-1)k_\alpha}{\sigma_0^2}\right)$$

Luego, buscando en la tabla de una distribución χ_{n-1}^2 se tiene que

$$\chi_{\alpha; n-1}^2 = \frac{(n-1)k_\alpha}{\sigma_0^2}$$

Por lo tanto,

$$RR_\alpha = \{s_{n-1}^2 : s_{n-1}^2 \geq k_\alpha = \frac{\chi_{\alpha; n-1}^2 \sigma_0^2}{n-1}\}$$

es una región de rechazo tal que la prueba para σ^2 tiene un nivel de significación α .

Trabajando de forma similar se puede hallar la RR_α para las otras dos posibles hipótesis alternativas.

H_a	RR_α
$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$x^2 \geq \chi_{\alpha;n-1}^2$
$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$x^2 \leq \chi_{1-\alpha;n-1}^2$
$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$x^2 \leq \chi_{1-\alpha/2;n-1}^2 \text{ ó } x^2 \geq \chi_{\alpha/2;n-1}^2$

donde $x^2 = \frac{(n-1)s_{n-1}^2}{\sigma_0^2}$.

Problema 7: Un investigador afirma que su equipo de medición tiene una variabilidad dada por una desviación estándar igual a 2. Una muestra aleatoria de $n = 16$ observaciones, provenientes de una distribución normal, arrojó una varianza muestral $s_{n-1}^2 = 6,1$. ¿Contradicen los datos lo que afirma el investigador? Justifique usando un $\alpha = 0,05$.

Pruebas de Hipótesis para la Proporción poblacional

Supuestos:

Sea X_1, X_2, \dots, X_n una m.a. de **distribución Bernoulli de parámetro p** , entonces la variable $X = \sum_{i=1}^n X_i \sim B(n, p)$.

Aquí tendremos dos casos a considerar:

- i) **Si n es suficientemente grande.**
- ii) **Si n es pequeño.**

CASO i):

Por TCL sabemos que

$$\hat{p} = \frac{X}{n} \dot{\sim} N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

Hipótesis Nula:

$$H_0 : p = p_0$$

Estadístico de Prueba:

$$Z = \frac{(\hat{p} - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \dot{\sim} N(0, 1), \quad \text{bajo } H_0$$

H_a	RR_α	$\beta(p)$
$p < p_0$	$z \leq -z_\alpha$	$1 - \Phi\left(-z_\alpha \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{p(1-p)}} + \frac{(p_0-p)\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right)$
$p > p_0$	$z \geq z_\alpha$	$\Phi\left(z_\alpha \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{p(1-p)}} + \frac{(p_0-p)\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right)$
$p \neq p_0$	$ z \geq z_{\alpha/2}$	$\Phi\left(z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{p(1-p)}} + \frac{(p_0-p)\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) - \Phi\left(-z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{p(1-p)}} + \frac{(p_0-p)\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right)$

Si $np_0 \geq 10$ y $n(1-p_0) \geq 10$

Para este caso, si la prueba de hipótesis es unilateral, el mínimo tamaño de muestra necesario para que una prueba de nivel α sea tal que $\beta(p') \leq \beta_0$ es

$$n \geq \left[\frac{(z_{\beta_0} \sqrt{p'(1-p')} + z_\alpha \sqrt{p_0(1-p_0)})}{(p_0 - p')} \right]^2$$

Si la prueba de hipótesis es bilateral, el mínimo tamaño de muestra necesario para que una prueba de nivel α sea tal que $\beta(p') \leq \beta_0$ es

$$n \geq \left[\frac{(z_{\beta_0} \sqrt{p'(1-p')} + z_{\alpha/2} \sqrt{p_0(1-p_0)})}{(p_0 - p')} \right]^2$$

Problema 8: Los registros de la Dirección de vehículos del automotor indican, que de todos los vehículos que fueron sometidos a una prueba de emisión de gases, el 70 % pasaron la prueba en el año 2011. Para mejorar las condiciones del medio ambiente se realizó, en cierta ciudad durante el año 2012, una campaña de difusión para aumentar este porcentaje. Se tomó una muestra aleatoria en el año 2013 de 200 automóviles, de esta ciudad, de los cuales 156 pasaron la prueba de emisión de gases.

- Determinar las hipótesis pertinentes.
- Dar el estadístico de prueba y su distribución bajo hipótesis nula.
- Determinar la región de rechazo de H_0 al 2 % y ¿cuál sería su conclusión respecto al éxito de la campaña de difusión?

CASO ii):

Si n es pequeño la prueba estadística estará basada en una distribución Binomial de parámetros n y p .

Hipótesis Nula:

$$H_0 : p = p_0$$

Estadístico de Prueba:

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \sim B(n, p_0), \quad \text{bajo } H_0$$

Problema 9: Una empresa está evaluando la posibilidad de establecerse para prestar servicio de TV por cable, en cierto pueblo de la provincia. Sea X el número de familias que estarían interesadas en

solicitar este servicio en una muestra aleatoria de 25 y p la proporción verdadera de familias interesadas en solicitar tal servicio. Considere las siguientes hipótesis:

$$H_0 : p = 0,5 \quad \text{vs.} \quad H_a : p > 0,5$$

- a) ¿Cuál es la distribución del estadístico de prueba X bajo H_0 ?
- b) ¿Cuáles de estas regiones de rechazo es la más adecuada para las hipótesis planteadas? ¿y por qué?

$$RR_1 = \{x : x \leq 7 \text{ o } x \geq 18\}$$

$$RR_2 = \{x : x \leq 8\}$$

$$RR_3 = \{x : x \geq 18\}$$

- c) Para la región de rechazo seleccionada en el ítem b), calcular el nivel de significación de la prueba.
- d) Calcular la probabilidad de cometer un error tipo II para $p = 0,6$ y para $p = 0,8$, para la región de rechazo seleccionada en el ítem b).
- e) Usando la región de rechazo seleccionada en el ítem b, ¿cuál sería su conclusión si 20 de las 25 familias estarían interesadas en solicitar este servicio de TV por cable?

p-valor para una prueba de Hipótesis

Definición: Se llama **p-valor** o **nivel de significancia** alcanzado al mínimo nivel de significancia a partir del cual rechazaría la hipótesis nula para un conjunto dado.

¿Cómo concluir a un nivel α usando el p-valor?

- Si $p\text{-valor} \leq \alpha$ entonces rechazar H_0 a un nivel α
- Si $p\text{-valor} > \alpha$ entonces diremos que no hay evidencia suficiente para rechazar H_0 a un nivel α .

¿Cómo calcular el p-valor?

Distribución del estadístico de prueba	Hipótesis Alternativa	$p - \text{valor}$
$Z \sim N(0, 1)$	Cola superior	$1 - \Phi(z_{obs})$
	Cola inferior	$\Phi(z_{obs})$
	Bilateral	$2(1 - \Phi(z_{obs}))$
$T \sim t_{n-1}$	Cola superior	$P(T > t_{obs})$
	Cola inferior	$P(T < t_{obs})$
	Bilateral	$2P(T > t_{obs})$
$\chi^2 \sim \chi_{n-1}^2$	Cola superior	$P(\chi^2 > \chi_{obs}^2)$
	Cola inferior	$P(\chi^2 < \chi_{obs}^2)$
	Bilateral	$2P(\chi^2 > \chi_{obs}^2)$

Ejercicio: Calcular los p valores para los problemas 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8.

Problema integrador:

Se necesita para cierto uso que el hierro contenga 0.85 g de silicio por cada 10g de hierro si esta condición no se cumple el hierro no se podrá utilizar. Se determino el contenido de silicio en 15 muestras seleccionadas al azar para éste uso y los resultados fueron:

1,057 0,731 0,682 0,914 0,645 0,817 0,882 0,979 0,801 0,931 0,940 0,991 1,016 0,922 0,832.

- Obtener un intervalo de confianza del 95 % para el valor medio de silicio por cada 10g de hierro.
- Plantear la hipótesis de interés en esta situación.
- ¿Qué conclusión se puede alcanzar para las hipótesis planteadas en a) a un nivel de significación de 0.05? Justifique su respuesta.
- Compare los resultados obtenidos en el ítem a) y c).
- ¿Cuáles son los supuestos para que la prueba tenga sentido?