II) Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ m.a. tal que $X_i \sim P(\lambda)$
$\forall i=1,\ldots,n$, $\lambda>0$.

Como $X_i \sim P(\lambda) \Rightarrow P_{X_i}(x,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & \text{si } x\in\mathbb{N}\cup\{0\} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$

Sea $\underline{x}\in\mathbb{R}^n$.

$$P_{\underline{X}}(\underline{x},\lambda) \overset{X_i\text{'s independientes}}{=} \prod_{i=1}^{n} P_{X_i}(x_i,\lambda)$$

- Si $\exists$ algún $x_i \notin \mathbb{N}\cup\{0\} \Rightarrow P(\underline{x},\lambda)=0$
- Si $x_i\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ $\forall i=1,\ldots,n$; pero $x_i\neq 0$ $\forall i=1,\ldots,n$

$$P_{\underline{X}}(\underline{x},\lambda) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!}\right) = \frac{e^{-\lambda n}\cdot\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}$$

Es decir,

$$\boxed{P_{\underline{X}}(\underline{x},\lambda) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda n}\cdot\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!} & \text{si } x_i\in\mathbb{N}\cup\{0\}\ \forall i=1,\ldots,n \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}}$$

Se busca el Estimador de Máxima Verosimilitud para λ. Para ello, tenemos que buscar el λ para el cuál $P_{\underline{X}}(\underline{x},\lambda)$ es máximo $\forall\, \underline{x}\in\mathbb{R}^n$ y $\forall \lambda>0$.

Encontrar el λ que maximiza $P_{\underline{X}}(\underline{x},\lambda)$ es equivalente a maximizar $\ln(P_{\underline{X}}(\underline{x},\lambda))$ (pues $\ln(\cdot)$ es función creciente y continua).

Sea $h(\lambda)=\ln(P_{\underline{X}}(\underline{x},\lambda))$

El λ que maximiza $h(\cdot)$ tiene que estar en el caso $x_i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ $\forall i=1,\dots,n$; es por eso que vamos a buscar el máximo allí:

$$h(\lambda)=\ln(P_{\underline{X}}(\underline{x},\lambda))=\ln(e^{-\lambda n})+\ln(\lambda^{\sum x_i})-\ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i!\right)$$

$$=-\lambda n+\left(\sum x_i\right)\ln(\lambda)-\ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i!\right)$$

$$\Rightarrow h'(\lambda)=-n+\sum_{i=1}^{n} x_i\cdot\frac{1}{\lambda}$$

si $h'(\lambda)=0 \Rightarrow -n+\frac{\sum x_i}{\lambda}=0 \Rightarrow \lambda=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}=\bar{x}$ es un punto crítico, candidato a maximizar h.

Veamos que en verdad maximiza:

$$h''(\lambda)=\sum_{i=1}^{n} x_i\left(-\frac{1}{\lambda^2}\right)=-\frac{\sum x_i}{\lambda^2}$$

$$h''(\bar{x})=-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\bar{x}^2}=-\frac{n\cancel{\bar{x}}}{\bar{x}^{\cancel{2}}}=-\frac{n}{\bar{x}}<0$$ pues $\bar{x}>0$ pues $x_i\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ $\forall i=1,\dots,n$

multip y div. por n

$\therefore\ \hat{\lambda}_{MV}=\bar{x}$ es punto de máximo.

- Si $x_i=0$ $\forall i=1,\dots,n \Rightarrow P_{\underline{X}}(\underline{x},\lambda)=\underbrace{e^{-n\lambda}}_{\text{función decreciente}}$

$\Rightarrow$ el máximo es alcanzado cuando $\lambda=0=\bar{x}$

$\therefore\ \hat{\lambda}_{MV}=\bar{X}$ es el estimador de máxima verosimilitud para λ