

GUÍA DOCENTE: El Espectro Modular de π

Pentalogía de Talleres Interactivos para STEM

Basado en la investigación de José Ignacio Peinador Sala

1. Introducción y Contexto

Esta serie de cinco cuadernos interactivos (Google Colab) traslada una investigación matemática reciente al aula de Bachillerato y primeros cursos universitarios. El objetivo es romper la barrera entre las 'matemáticas de libro de texto' y la investigación actual, permitiendo a los alumnos redescubrir el número π y la estructura de los números enteros a través de un enfoque novedoso: la **Aritmética Modular**.

A diferencia de la enseñanza tradicional, donde se memorizan fórmulas, aquí el alumno utiliza la programación (Python) para **experimentar, visualizar y verificar** teoremas en tiempo real, conectando áreas dispares como la Teoría de Números, la Estadística, la Física Cuántica y la Computación.

Referencia de la Investigación Original

Este material didáctico se basa en la investigación:

Peinador Sala, J. I. (2025). *The Modular Spectrum of π : From Prime Channel Structure to Elliptic Supercongruences* (Versión 1). Zenodo.
<https://doi.org/10.5281/zenodo.17680024>

Repositorio del Proyecto: [GitHub - Espectro Modular Pi](#)

2. Estructura del Curso

El curso se divide en cinco sesiones o módulos, diseñados para aumentar progresivamente la complejidad conceptual, desde la aritmética básica hasta la física teórica.

1. **Aritmética y Patrones:** Sumas infinitas y el reloj modular $6k$.
2. **Análisis y Conexiones:** Productos, Estadística y Complejos.
3. **Geometría y Aplicación:** Volúmenes, Monte Carlo y lo Imposible.
4. **Herramientas del Infinito:** Función Zeta, Ingeniería y Algoritmos.
5. **El Código Fuente:** Sucesiones, Derivadas Modulares y Matrices.

Nivel recomendado: Estudiantes de 16 a 18 años (Bachillerato de Ciencias/Tecnología) o estudiantes de grado en materias introductorias.

3. Detalle de las Sesiones

3.1. Sesión 1: Desbloqueando los Secretos de π

Enlace al Colab: _____

- **Concepto Clave:** La velocidad de convergencia y el filtrado de números.
- **Puntos Didácticos:**
 - **El Problema de Leibniz:** Los alumnos comienzan programando la serie clásica. Experimentan cambiando N para ver la lentitud de la convergencia.
 - **El Reloj Modular ($6k$):** Introducción visual. Se demuestra que los primos (y los términos de π) solo habitan en las posiciones 1 y 5 del reloj ($6k \pm 1$).
 - **La Duda Frecuente:** ¿Por qué incluimos compuestos como el 25? *Respuesta:* En la suma buscamos números coprimos con 6 (no divisibles por 2 ni 3), no necesariamente primos absolutos.

3.2. Sesión 2: El Universo Conectado de π

Enlace al Colab: _____

- **Concepto Clave:** π como constante universal más allá de la geometría.
- **Puntos Didácticos:**
 - **Producto de Wallis:** π nace de multiplicar fracciones.
 - **La Campana de Gauss (Estadística):** Conexión interdisciplinar. Se usa la serie modular para calcular el área bajo la curva normal.
 - **Identidad de Euler:** Introducción a los números complejos ($e^{i\pi} + 1 = 0$) validada con la estructura modular.
 - **Ramanujan:** Comparativa de Eficiencia vs. Comprensión.

3.3. Sesión 3: π en Acción (Geometría y Azar)

Enlace al Colab: _____

- **Concepto Clave:** El impacto del error y la simulación.
- **Puntos Didácticos:**
 - **El Efecto Mariposa:** Un error pequeño en π , elevado al cubo (r^3) en el volumen de la Tierra, genera un error masivo.
 - **Monte Carlo vs. Modular:** Enfrentamos el **Orden** (fórmula) contra el **Caos** (azar). El alumno comprueba que la estructura matemática vence al azar.
 - **Lo Imposible:** Cálculo del factorial de 0,5 usando la Función Gamma y π .

3.4. Sesión 4: Las Herramientas del Infinito (Ingeniería)

Enlace al Colab: _____

- **Concepto Clave:** Aplicaciones en Ciencia de Datos y Computación.
- **Puntos Didácticos:**

- **Función Zeta de Riemann:** Resolución del Problema de Basilea ($\sum 1/n^2 = \pi^2/6$) elevando al cuadrado la serie modular. Mejora drástica de convergencia.
- **Función Error (erf):** Aplicación en telecomunicaciones e ingeniería.
- **Algoritmos de Búsqueda de Primos:** Optimización de código. Se demuestra cómo descartar los canales $6k$ inútiles (pares y múltiplos de 3) acelera los algoritmos en un $\approx 33\%$.

3.5. Sesión 5: El Código Fuente de las Matemáticas (Teoría)

Enlace al Colab: _____

- **Concepto Clave:** Abstracción y cambio de paradigma.
- **Puntos Didácticos:**
 - **ADN Numérico:** Visualización de la recta numérica como 6 hilos entrelazados.
 - **Fibonacci Modular:** Descubrimiento del ciclo de 24 pasos (Periodo de Pisano) en la naturaleza.
 - **Cálculo Diferencial Modular:** Redefinición de la derivada como un salto discreto (Δ) en lugar de un límite continuo.
 - **Fourier y Matrices:** Descomposición de señales y matrices en 'canales de interacción' (Primos vs. Compuestos).

4. Instrucciones Técnicas

- **Plataforma:** Google Colab (navegador web, cuenta Google).
- **Librerías:** Python estándar (`math`, `numpy`, `matplotlib`, `cmath`, `sympy`, `time`). No requiere instalación local.
- **Dinámica:** El alumno ejecuta las celdas con **Shift + Enter**. Se recomienda encarecidamente modificar las variables N (iteraciones) para observar los cambios en precisión y tiempo.

5. Solucionario de Retos

- **Reto 1 (Precisión de π):** Para 6 decimales correctos con la serie modular, se requieren aprox. **500,000 términos**.
- **Reto 3 (Monte Carlo):** El azar converge con la raíz cuadrada del número de intentos. Para igualar la precisión modular de 100 términos, Monte Carlo necesitaría millones de puntos.
- **Reto 4 (Algoritmos):** La optimización modular en la búsqueda de primos reduce el espacio de búsqueda eliminando las clases 0, 2, 3, 4.

Material educativo de libre uso y distribución.

Citando la fuente original: **Peinador Sala, J. I. (2025). The Modular Spectrum of π .**