SECCIÓN 1. PROBLEMAS DE λ-CÁLCULUS Y LÓGICA COMBINATORIA

Ignacio Yoste López

1º

$(\lambda z.xzy)(\lambda xz.x)$

$sub(\lambda z.xzy) \cup sub(\lambda xz.x) = \{\lambda z.xzy\} \cup sub\{x, zy\} \cup \{\lambda xz.x\}$
$\cup\, sub(\lambda z.x)$
$= \{\lambda z.xzy, \lambda xz.x\} \cup sub((xz)y) \cup \{\lambda z.x\} \cup sub(x)$
$= \{\lambda z.xzy, \lambda xz.x, \lambda z.x\} \cup \{x, y, z\} \cup sub(xz) \cup sub(y) \cup \{x\}$
$= \{\lambda z.xzy, \lambda xz.x, \lambda z.x, x, xzy\} \cup \{xz\} \cup sub(x) \cup sub(z) \cup \{y\}$
$= \{\lambda z.xzy, \lambda xz.x, \lambda z.x, x, xzy, z, y\}$

2º

a) $(\lambda y.xy)[x:=y] \overset{*}{\equiv} (\lambda z.xz[y:=z])[x:=y]$
$\equiv \lambda z.yz$

$*$ Prop. 5) $\begin{cases} x \in FV(xy) \\ y \in FV(y) \end{cases}$ 5): $(\lambda y.M)[x:=N] \equiv (\lambda z.M[y:=z])[x:=N]$

b) $((\lambda z.zx)(\lambda x.x))[x:=y]$
$\overset{*}{\equiv} (\lambda z.zx)^{*}[x:=y](\lambda x.x)^{**}[x:=y]$
$\equiv (\lambda z.zx[x:=y])(\lambda x.x) \equiv (\lambda z.zy)(\lambda x.x)$

$*$ 4): $(\lambda y.M)[x:=N) \equiv \lambda y.M[x:N]$
$**$ 3): $(\lambda x.M)[x:=N] \equiv \lambda x.M$

c) $((\lambda y.xy)z)[x:=\lambda x.xy]$
$\equiv ((\lambda y.xy)[x:=\lambda x.xy])^{*1}(z[x:=\lambda x.xy])$
$\equiv ((\lambda z.\cancel{xy}xz[y:=z])^{*2}[x:=\lambda x.xy])z^{*3}$
$\equiv (\lambda z\,\lambda x.xyz)z$

$*_1$: $(M_1M_2)[x:=N] \equiv (M_1[x:=N])(M_2[x:=N])$
$*_2$: $y[x:=N] = y$
$*$: 5)$_1$

3°

$\lambda x. x KN \# \lambda x. x SN = (I(K(N))) \# (I(SN))$

$I(KN) = I(SN) = KN = SN$

Por la transitividad referencial $\dfrac{KN = SN}{K = S}$

y ya demostramos en los apuntes de teoría que al incorporar $S=K$ a la teoría la hace inconsistente ~~porque~~

por lo que $\lambda x. x KN \# \lambda x. x SN$

4°

$$\begin{tikzcd}
WWW \arrow[d, shift left] & (\lambda y. yyy)W \arrow[l] \\
(\lambda y. Wyy)W \arrow[u, shift left] \arrow[r, shift left] & (\lambda y. (\lambda z. yzz)y)W \arrow[l, shift left] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

6°

Sea $\lambda yx. x(yx) \equiv G$

$(\lambda xy. y(xxy))(\lambda xy. y(xxy)) \equiv M$

a) $G(M) = M$

Considero $x \notin FV(G)$ y construyo W según el teorema de punto fijo.

$W \equiv \lambda x. G(xx)$

$\lambda x(\lambda yx. x(yx))(xx) = \lambda x(\lambda x. x(yx))[y:=xx]$

$^* \equiv \lambda x. (\lambda z. z(yz))[y:=xx] \equiv \lambda x. (\lambda z. (z(yz))[y:=xx])$

$\equiv \lambda x. (\lambda z(z(xxz))) \equiv \lambda xy. y(xxy) \equiv M$

y $W \equiv M$ que es un punto fijo de G por demostración del Teorema de punto fijo

* Sustitución clásica: si $\begin{cases} x \in FV(M) \\ y \in FV(N) \end{cases}$ z tq $\notin FV(N) \cup FV(M)$

$(\lambda y. M)[x:=N] \equiv \lambda z. M[y:=z])[x:=N]$

** Igualdad alfa

b) Suponemos que N es cerrado y que $GN = N$. Demostramos entonces que N es un operador de punto fijo.

Tenemos que demostrar que para todo λ-término F se cumple

$$F(NF) = NF$$

Entonces:

$$NF = (GN)F \equiv ((\lambda yx. x(yx))N)F$$
$$\equiv (\lambda x. x(Nx))F$$
$$= x(Nx)[x := F] = F(NF)$$

Por tanto, $F(NF) = NF$ y N un operado de punto fijo.

c) En el apartado anterior hemos demostrado que dado un N punto fijo de G, N es un operador de punto fijo y en el primer apartado hemos demostrado que M es un punto fijo por lo que M es ~~una~~ también un operador de punto fijo de G

7º

$$(\lambda xy. xyy)_{CL} \equiv \lambda^* x. \lambda^* y. xyy$$
$$\equiv \lambda^* x. S(\lambda^* y. xy)(\lambda^* y. y)$$
$$\equiv \lambda^* x. S(S(\lambda y^*. x)(\lambda^* y. x))I$$
$$\equiv \lambda^* x. S(S(Kx)I)I$$
$$\equiv S(\lambda^* x. S(S(KK)I)(\lambda^* x. I)$$
$$\equiv S(S(\lambda^* x. S(S(KK)))(\lambda^* x. I))(KI)$$
$$\equiv S(S(KS)(S(S(KS)(S(KK)I))(KI))(KI)$$