Introducción a la
Lógica de Primer Orden

Lógica y Programación

Ignacio Yuste López

1. Introducción

La lógica de primer orden es el siguiente paso a la lógica proposicional. En ella encontramos nuevos elementos con los cuales somos capaces de expresar y construir ideas más complejas.

En la lógica proposicional, un átomo representa una sentencia declarativa que puede ser verdadera o falsa pero no ambas. Sin embargo hay muchas ideas que no pueden ser expresadas de esta manera. Por ejemplo, si decimos:

-Todos los hombres son mortales, como Sócrates es un hombre

Sócrates es mortal.

Pero sin embargo, si establecemos:

P: Todos los hombres son mortales

Q: Sócrates es un hombre

R: Sócrates es mortal

No podemos decir que R es consecuencia lógica de P y Q ya que estos no existen en el marco de la lógica proposicional. En la lógica de primer orden se introducen tres nuevas nociones lógicas: términos, predicados y cuantificadores. Gracias a estos términos podremos traducir gran parte del lenguaje matemático en la lógica de primer orden.

1.1 Símbolos en la lógica de primer orden.

Los símbolos de la lógica de primer orden que usamos para construir *átomos* son:

1. Símbolos **individuales** o **constantes**. Nombres de objetos/personas como Juan.
2. Símbolos de **variable**. Normalmente letras minúsculas (x, y, z,…)
3. Símbolos de **función**. Normalmente letras minúsculas (f, g, h,…)
4. Símbolos de **predicado**. Normalmente letras mayúsculas (P, Q, R,…) o palabras en mayúscula como *PADRE*.

Supongamos que queremos representar “*x es mayor que 23*” . Primero definiríamos un predicado *MAYOR(x,y)* que representa “*x es mayor que y*”. Entonces la frase “*x es mayor que 23*” queda representada como *MAYOR(x, 23).*

Al igual que las funciones, los predicados pueden categorizarse según su aridad. Por lo que el predicado MAYOR(x,y) sería un predicado binario. La definición formal sería:

Definición: Los términos se definen *recursivamente* como sigue:

1. Una **constante** es un término
2. Una **variable** es un término
3. Si *f* es una función n-aria, los símbolos $t_1, ..., t_n$ son términos, entonces $\boldsymbol{f(t_1, ..., t_n)}$ es un término.
4. Todos los términos son generados aplicando las reglas anteriores.

Los predicados se pueden definir como una función de mapeo que mapea una lista de constantes a Verdadero o Falso. Habiendo definido los términos, podemos definir formalmente los átomos en la lógica de primer orden.

Definición: Si P es un **predicado** n-ario, $t_1, ..., t_n$ términos, entonces $P\ (t_1, \ldots, t_n)$ es un **átomo.** Ninguna otra expresión puede ser un átomo.

1.2 Fórmulas bien formadas.

A diferencia de en la lógica proposicional, en la lógica de primer orden encontramos variables. Para caracterizarlas introducimos el concepto de cuantificadores:

- ∀ . Cuantificador **universal**. Dada x un variable, se lee como "*para todo x*"
- ∃ . Cuantificador **existencial**. Dada x un variable, se lee como "*existe un x*"

Ejemplo:

- $(\forall x)\ (Q(x) \rightarrow R(x))$ Para todo x existe un Q(x) que impleca R(x)

Esto se llama fórmula. Pero antes de dar una definición formal de fórmula hemos de definir los conceptos de **variables ligadas y libres**.

Definición: Una ocurrencia de una variable es **ligada** sii la ocurrencia está dentro del radio de acción de un cuantificador o es la ocurrencia del cuantificador.

Definición: Una variable es **libre** sii al menos una ocurrencia de la variable no está dentro del radio de acción de un cuantificador.

Una vez definido esto, pasamos a definir las *fórmulas bien formadas* usando átomos, conectivas lógicas y cuantificadores.

Definición. Las fórmulas bien formadas, a partir de ahora *fbf* ,de la lógica de primer orden se definen:

1. Un átomo es una *fbf*.
2. Si F y G son fórmulas, entonces $\sim F$, $(F \vee G)$, $(F \wedge G)$, $(F \rightarrow G)$ y $(F \leftrightarrow G)$ son *fbf*.
3. Si F es una *fbf* y x es una variable libre en F, entonces $\forall xF$ y $\exists xF$ son *fbf*
4. Las *fbf* son formadas por una aplicación finita de (1.), (2.) y (3.)

Ahora tenemos todos los elementos de la lógica de primer orden. Como ejemplo de su uso definiremos los axiomas de los números naturales:

A_1: Para cada número hay un único sucesor inmediato
A_2: No existe un número para el que el 0 es el sucesor.
A_3: Para cada número distinto de 0, existe únicamente un predecesor

A_1: $\forall x \exists y\, (E(y, f(x)) \wedge \forall z(E(z, f(x)) \rightarrow E(y, z)))$
A_2: $\sim(\exists x E(0, f(x))$
A_3: $\forall x(\sim E(x, 0) \rightarrow (\exists y(E(y, g(x)) \wedge \forall z\, (E(z, g(x)) \rightarrow E(y, z))))$

Donde $E(x, y)$:= "*x es igual a y*", $f(x)$ representa el sucesor inmediato de x y $g(x)$ representa el predecesor inmediato de x.

2. Interpretaciones de las fórmulas en la lógica de primer orden.

2.1 Dominio de una interpretación.

Definición: Una interpretación de una fórmula *F* en la lógica de primer orden consiste en un dominio no vacío D, y la asignación de "valores" a cada constante, símbolo de función y símbolos de predicado que ocurren en *F* como sigue.

1. A cada constante le asignamos un elemento de D
2. A cada símbolo de función n-aria le asignamos un mapeo de D^n a D.
3. A cada símbolo de predicado n-ario le asignamos un mapeo de D^n a {Verdadero, Falso}

Es decir, para definir una interpretación de una fórmula hay que especificar dos cosas: El dominio y la asignación a las constantes, funciones y predicados de la fórmula.

A veces, para enfatizar el dominio D, hablamos de una interpretación de la fórmula *sobre* el dominio D. Entonces evaluamos la veracidad de la fórmula en una interpretación sobre el dominio D. $\forall x$ se interpreta como "*para todos los elementos de D*" y $\exists x$ como "*existe un elemento en D*"

Para cada interpretación de una fórmula sobre un dominio D, la fórmula puede ser evaluada como V o F (Verdadero o Falso) siguiendo las siguientes reglas:

1. Si los valores de verdad de las fórmulas *G y F* son evaluados, entonces los valores de verdad de $\sim F$, $(F \lor G)$, $(F \land G)$, $(F \rightarrow G)$ y $(F \leftrightarrow G)$ se evalúan mediante la siguiente tabla:

G	H	$\sim G$	$(G \land H)$	$(G \lor H)$	$(G \rightarrow H)$	$(G \leftrightarrow H)$
T	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*	*T*
T	*F*	*F*	*F*	*T*	*F*	*F*
F	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*F*
F	*F*	*T*	*F*	*F*	*T*	*T*

2. ∀x*G* se evalúa como V si el valor de verdad de *G* es evaluado como V para todo *d* en *D*. Si no se evalúa como F.
3. ∃x*G* se evalúa como V si el valor de verdad de *G* es evaluado como V para al menos un *d* en *D*. Si no se evalúa como F.

Cualquier fórmula que contenga variables libres no podrá ser interpretada.
Veamos un ejemplo de una interpretación:

Ejemplo:

Considera la fórmula: ∀x∃y(*P(x, y))*

Definimos la interpretación como sigue:

$$D = \{1,2\}$$

$P(1,1)$	$P(1,2)$	$P(2,1)$	$P(2,2)$
T	F	F	T

- Si x == 1, vemos que existe un y == 1 tal que *P(1, y) == T*
- Si x == 2, vemos que existe un y == 2 tal qur *P(2, y) == T*

Por tanto, en esta interpretación concluimos que la fórmula es verdadera.

2.2. Conceptos de satisfabilidad, validez y consecuencia lógica.

Los conceptos de validez, inconsistencia y consecuencia lógica de la lógica proposicional tienen su análogo en la lógica de primer orden.

Definición. Una fórmula *G* es **consistente** (**satisfacible**) sii existe una interpretación *I* tal que *G* es evaluado a V en *I*. Si una fórmula *G* es T en una interpretación *I*, decimos que *I* es un *modelo* de *G* e *I satisface a G.*

Definición. Una fórmula *G* es **inconsistente (insatisfacible)** sii no existe ninguna interpretación que satisfaga *G*.

Definición. Una fórmula *G* es **válida** sii todas y cada una de las interpretaciones de *G* la satisfacen .

Definición. Una fórmula G es **consecuencia lógica** de las fórmulas $F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n$ es cierto en *I*, *G* también es cierto en *I*

Vemos que la lógica de primer orden puede considerarse una extensión de la lógica proposicional. De hecho, cuando una fórmula de primer orden no contiene variables o cuantificadores, puede ser tratada como una fórmula de lógica proposicional.

En la lógica de primer orden, dado que hay un número infinito de dominios, en general, hay un número infinito de interpretaciones para una fórmula. Por tanto, a diferencia de la lógica proposicional, no es posible verificar si una fórmula es válida o inconsistente por medio de evaluar la fórmula en todas sus interpretaciones posibles. Sin embargo, existen diversos procedimientos para verificar que una fórmula es inconsistente.

3. Formas normales prenexas.

Además de la forma normal conjuntiva y la forma normal disyuntiva de la lógica proposicional, en la lógica de primer orden se añade una nueva forma normal llamada “forma normal prenexa”. Esta forma nos ayuda a simplificar los procedimientos que se dan en la lógica de primer orden.

Definición. Una fórmula *K* de la lógica de primer orden está en forma normal prenexa sii la fórmula *K* está en forma:

$$(Q_1x_1) \ldots (Q_nx_n)\ (M)$$

Donde cada Q_ix_i, $i=1, \ldots, n$, es un cuantificador y M es una fórmula sin cuantificadores. $(Q_1x_1) \ldots (Q_nx_n)$ es conocido como *prefijo* y M es llamada la *matriz* de la fórmula *F*.

Estos son algunos ejemplos de fórmulas en forma normal prenexa:

$$(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \wedge Q(y)), \qquad (\forall x)(\forall y)(\sim P(x,y) \rightarrow Q(y)),$$
$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(Q(x,y) \rightarrow R(z)).$$

Ahora debemos considerar la forma de pasar una fórmula a su forma normal prenexa. Esto se consigue en primer lugar considerando algunos pares de equivalencias en la lógica de primer orden. Sabemos que dos fórmulas son *equivalentes* sii los valores de verdad de ambas son los mismo dadas las mismas interpretaciones.

Por tanto introducimos una serie de reglas que nos serán necesarias si queremos calcular la forma normal prenexa.

- *Reglas para la conjunción y disyunción:*

- $(\forall x F) \wedge G := \forall x(F \wedge G)$ | $(\exists x F) \wedge G := \exists x(F \wedge G)$
- $(\forall x F) \vee G := \forall x(F \vee G)$ | $(\exists x F) \wedge G := \exists x(F \wedge G)$

Estas equivalencias sólo son válidas cuando x no aparece como libre de *G*. Si apareciese, debemos sustituirla por cualquier otra variable libre que no sea x.

- *Reglas para la negación.*

- $\sim(\exists x F) := \forall x (\sim F)$
- $\sim(\forall x F) := \exists x (\sim F)$

- *Reglas para la implicación*

- $(\exists x F) \rightarrow G := \forall x(G \rightarrow F)$ | $(\forall x F) \rightarrow G := \exists x(G \rightarrow F)$
- $F \rightarrow (\exists x G) := \exists x (F \rightarrow G)$ | $F \rightarrow (\forall x G) := \forall x (F \rightarrow G)$

También es importante mencionar que $\exists x \exists x := \exists x$ y lo mismo para el cuantificador universal.

Conocer las formas normales de la lógica de primer orden es la antesala de todos los procedimientos de esta, siendo el más importante la resolución. Este procedimiento es fundamental ya que gracias a el podemos demostrar si una fórmula de esta lógica es instatisfacible sin tener que hacer ninguna interpretación.