Análisis Matemático II - (1033)

Unidad 4: Superficies, rectas y planos

Ejercicios sobre superficies, vectores y planos tangentes

Ejercicio 1. Considere la superficie parabólica

$$S: F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z - 2 = 0$$

$1.i)$ Determinar el único punto en el que el vector

$$\vec{N} = (4,2,1)$$

es normal a S.

$1.ii)$ Determinar la ecuación del plano π tangente a la superficie S en el punto hallado en el ítem anterior.

$1.iii)$ Determinar si la recta R que pasa por los puntos $A = (-1,-2,1)$ y $B = (1,1,1)$ se encuentra totalmente incluida en el plano π tangente a la superficie S en el punto hallado en el ítem ii).

Observación: Si una recta está totalmente incluida en un plano, entonces todos los puntos de la recta satisfacen la ecuación que define a ese plano.

Ejercicio 2. Considere la superficie parabólica

$$S: F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z - 2 = 0$$

$2.i)$ Determinar el único punto en el que el vector

$$\vec{N} = (4,2,1)$$

es normal a S.

$2.ii)$ Determinar si el plano tangente a la superficie S en el punto hallado en el ítem anterior contiene al punto $A = (-1,-2,1)$.

Ejercicio 3. Considere la superficie

$$S: P(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 - z^2 - 14 = 0$$

y el vector $\vec{N} = (8,-6,4)$.

$3.i)$ Hallar los únicos dos puntos, llámense P_1 y P_2, que pertenecen a la superficie S en los que el vector N es normal a S.

$3.ii)$ Calcular la distancia entre los dos puntos P_1 y P_2 hallados en el ítem anterior.

Ejercicio 4. Considere la superficie parabólica S definida por la ecuación

$$S: z = 1 - x^2 - y^2$$

y el plano π de ecuación

$$\pi: 2x - 2y + z = k^2$$

$i)$ Determinar analíticamente el conjunto de valores de "k" para que exista intersección no vacía entre la superficie S y el plano π.

$ii)$ Determinar, si existen, todos los valores de la constante "k" para que el plano π sea tangente a la superficie S. En caso de obtener una respuesta afirmativa sobre la existencia del valor o de los valores de "k", indicar el punto o los puntos de tangencia.