ESTATICA

La estática es la parte de la física que estudia los cuerpos en equilibrio cuando son sometidos a sistemas de fuerzas. Si sobre un cuerpo no actúan fuerzas o actúan varias fuerzas cuya resultante es cero, decimos que el cuerpo está en equilibrio. Entonces, que un cuerpo está en equilibrio, significa que está en reposo o se mueve en línea recta con velocidad constante. Para un cuerpo en equilibrio, la fuerza neta que actúa sobre él es cero.

Las aplicaciones prácticas de la estática en la ingeniería son muy numerosas, siendo quizá la parte de la mecánica, la más empleada. Esto es así especialmente en la ingeniería civil y en el análisis estructural: por lo general las estructuras se diseñan para estar y permanecer en reposo bajo las cargas de servicio estáticas, o para que su movimiento bajo cargas dinámicas sea pequeño y estable (que soporte las vibraciones). La estática y estabilidad se utilizan para estudiar las fuerzas que soportan, por ejemplo, una escalera, las columnas de hormigón de una edificio, la estructura de puentes, las paredes de embalses, etc.

En esta parte se estudiará la estática o equilibrio de los sistemas, entendida como la ausencia de movimiento. Se trata por tanto de un caso particular de la dinámica, pero que por su importancia, sobre todo en la ingeniería, merece un tratamiento especial.

Si sobre un cuerpo actúa un sistema de fuerzas, podemos calcular la Fuerza neta ($\mathbf{F_n}$), o Fuerza total ($\mathbf{F_t}$), o Resultante (**R**), como la sumatoria de todas la fuerzas que actúan sobre el cuerpo:

$$\mathbf{F_t = \sum F_i} \qquad (1)$$

Todas las fuerzas son vectores, eso implica que tienen dirección, sentido y módulo. Cuando se calcula la $\mathbf{F_t}$, esta es siempre una suma de vectores.

Si la F_t es distinta de cero, es decir que no es nula, entonces el cuerpo NO está en equilibrio. A partir de la segunda ley de Newton, $\mathbf{F_t = \sum F_i = m.a}$ entonces hay aceleración y el cuerpo se mueve en la dirección de la fuerza total.

Para lograr el equilibrio, habrá que agregar otra fuerza, capaz de contrarrestar la F_t, que tenga igual módulo, dirección y sentido contrario a la fuerza neta.

Entonces si el cuerpo esta en equilibrio: $\sum \mathbf{F_i = 0}$. (2)

Las fuerzas aplicadas sobre el sistema pueden estar en 1-2 o 3 dimensiones, por lo que la condición de equilibrio debe darse en las 3 dimensiones.

$\sum \mathbf{Fx_i = 0}$; $\sum \mathbf{Fy_i = 0}$; $\sum \mathbf{Fz_i = 0}$ (3)

En este curso, solo veremos sistemas de fuerzas aplicadas en 2 dimensiones, que se conoce como sistemas coplanares de fuerzas.

Fuerzas Concurrentes

Si consideramos al cuerpo como un punto material, sin forma geométrica ni tamaño, pero si con masa, entonces las fuerzas que actúan sobre el cuerpo están aplicadas en el mismo punto. Esas fuerzas se las denomina fuerzas concurrentes.

Entonces cuando se colocan las fuerzas, todas tienen el origen en el punto material.

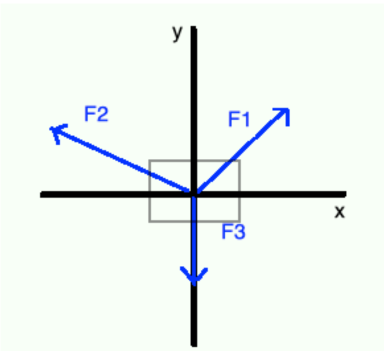


Figura 1.

Hagamos un ejemplo!

Para resolver estos problemas se utiliza sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas lineales. Conviene repasar los métodos de resolución de estos sistemas de ecuaciones. Aquí utilizaremos el método de sustitución.

Lo primero que hay que hacer es dibujar el esquema con el objeto y identificar todas las fuerzas involucradas mediante un diagrama de cuerpo libre. Las reacciones son lo más difícil de determinar, y muchas veces hay que suponer un sentido para las mismas. Si suponemos el sentido contrario al que realmente es, no importa, porque al plantear la ecuación (2) encontraremos que la reacción tiene un signo negativo en la solución del sistema. Esto no es grave, solo que la reacción va en el sentido contrario al que le pusimos al principio.

Con la figura de arriba (fig. 1), si $\mathbf{F_1}$ = 20 N con un ángulo α de 45 grados con la horizontal, $\mathbf{F_3}$ = 50N, calcule cuanto tiene que valer el módulo de $\mathbf{F_2}$ y su ángulo β con la horizontal.

Primero definimos el sistema de ejes x-y (como se ve en la figura 1) y descomponemos la fuerzas en esos ejes, usando trigonometría:

$F_{1x} = F_1 \cos \alpha$; $F_{1y} = F_1 \text{ sen } \alpha$ (4)

$F_{2x} = F_2 \cos \beta$; $F_{2y} = F_2 \text{ sen } \beta$ (5)

$F_{3x} = 0$; $F_{3y} = F_3$

Lo primero es usar la ecuación (2), **ΣF = 0**, donde F es la resultante de todas las fuerzas ejercidas sobre la partícula, que debe ser cero. En general, conviene escribir **ΣF = 0,** en el sistema x-y, lo cual nos permite plantear el sistema con 2 ecuaciones con 2 incógnitas. Las fuerzas son vectores, así que hay que colocar los signos de cada componente según el sentido de cada fuerza y el sistema de coordenadas elegido.

Entonces usamos la ecuación (3):

x) $\sum \mathbf{Fx_i = 0} \Rightarrow - F_{1x} + F_{2x} = 0$ (6)

y) $\sum \mathbf{Fy_i = 0} \Rightarrow F_{1y} + F_{2y} - F_3 = 0$ (7)

Escribimos la ecuación (6) como: $- F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta = 0$ (8)

Escribimos la ecuación (7) como: $F_1 \text{ sen } \alpha + F_2 \text{ sen } \beta = F_3$ (9)

De (8) despejamos $F_2 \Rightarrow F_1 \cos \alpha / \cos \beta = F_2$ (10)

y los reemplazamos en la ecuación (9) =>

F_1 sen α + F_1 cos α tg β = F_3 (11)

Despejamos β que es la única incógnita: tg β = (F_3 - F_1 sen α) / F_1 cos α

Reemplazamos por los datos del problema:

tg β = (50N - 20N sen 45) / 20N cos 45 => β = arctg(2.53) = 68.4

Con el valor de β, lo reemplazamos en la ec. (10) y encontramos el módulo de F_2 = 38.4 N.

Fuerzas No Concurrentes

Ahora dejamos de lado la idea del cuerpo como un punto material y usamos la noción de cuerpo rígido, en donde el cuerpo tiene forma y una geometría dada.

Una condición necesaria para que una partícula en reposo permanezca en ese estado es que la fuerza resultante que actúa sobre ella sea cero. Cuando tenemos un cuerpo rígido, y aplicamos las fuerzas, además de que la fuerza resultante sea cero para que este en reposo, tenemos que pedirle que no pueda girar o rotar. Si hay rotación alrededor de cualquier punto, el cuerpo no está en equilibrio estático. Entonces, para que haya equilibrio estático, el momento total o resultante que actúa sobre un cuerpo debe ser cero respecto a cualquier punto P. Esta condición es muy útil en la resolución de los ejercicios, porque nos permite elegir el punto más conveniente para el cálculo de los momentos.

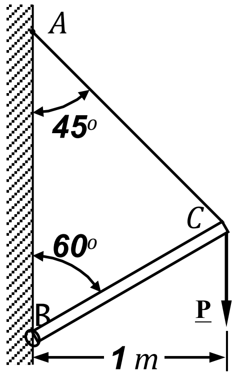
Entonces las condiciones necesarias para que un cuerpo rígido esté en equilibrio es:

$$\sum \mathbf{F_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum \mathbf{Fx_i} = 0 \; ; \; \sum \mathbf{Fy_i} = 0 \; ; \; \sum \mathbf{Fz_i} = 0 \qquad (2\text{-}3)$$

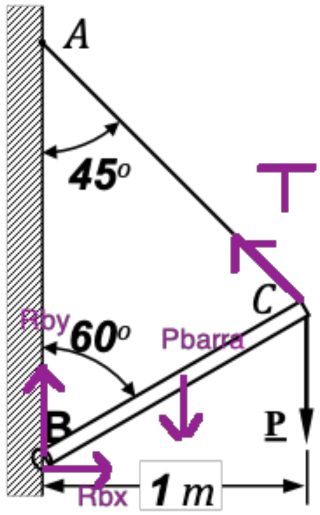
$$\sum \mathbf{M_P} = 0 \quad \Rightarrow \sum \mathbf{M_P} = \sum \mathbf{r_i} \otimes \mathbf{F_i} = \mathbf{r_1} \otimes \mathbf{F_1} + \mathbf{r_2} \otimes \mathbf{F_2} + \ldots = 0 \qquad (12)$$

Veamos un ejemplo!

Calcule las reacciones en el vínculo simple A, y en el doble B, si P = 1000 N, y la barra homogénea BC pesa 2000 N.



Primero hacemos un diagrama con todas las fuerzas que hay. La reacción o fuerza de vínculo que hay en el punto B, se da de forma horizontal y vertical. El origen de cada fuerza de contacto es independiente de la otra fuerza. Entonces hay que escribirlas y pensarlas como dos fuerzas independientes (por ejemplo el rozamiento en el eje vertical y la normal en el eje horizontal).



Y ahora aplicamos la ecuaciones (3) y (12):

$\sum$ **Fx$_i$ = 0** => Rbx – Tx = 0 => Rbx = T*sen(45) (13)

$\sum$ **Fy$_i$ = 0** => Rby + Ty – P – P_{barra} = 0 => Rby + T*cos(45) = P + P_{barra} (14)

Para aplicar el momento nos paramos en el punto B:

$\sum$ **M_B = 0** => **$d_b \otimes R_b + d_{barra} \otimes P_{barra} + d_T \otimes T + d_P \otimes P = 0$**

Acá hay que tener en cuenta que el momento de las fuerzas es un producto vectorial! Tanto la distancia como las fuerzas pueden tener componentes en x y en y. Así que tener en cuenta el sentido de las fuerzas! Y el momento va en el eje z:

- ⇨ $\sum$ **M_B =** $(d_{bx}, d_{by}) \otimes (Rbx, R_{by}) + (d_{\mathbf{barrax}}, d_{\mathbf{barray}}) \otimes (P_{barrax}, P_{barray}) + (d_{Tx}, d_{Ty}) \otimes (T_x, T_y) + (d_{Px}, d_{Py}) \otimes (P_x, P_y) = 0$

El momento de la reacción en Rb es cero, porque la distancia del punto B al punto B es cero.

- ⇨ $\sum$**M_B=** ((L/2)*cos(30) , (L/2)*sen(30)) ⊗ (0 , -P_{bar}) + (L*cos(30), L*sen(30)) ⊗ (-T*sen(45) , T*cos(45)) + (L*cos(30), L*sen(30)) ⊗ (0 , -P) = 0

- ⇨ $\sum$**M_B =** - (L/2)*cos(30)*P_{barra} + L*cos(30)* T*cos(45) + L*sen(30)* T*sen(45) - L*cos(30)*P = 0
- ⇨ 0.5*cos(30)*P_{barra} + cos(30)*P = cos(30)*T*cos(45) + sen(30)*T*sen(45)
- ⇨ reemplamos P_{barra} y P por los datos del problema y despejamos T.
- ⇨ T = 1793 N
- ⇨ Este valor lo reemplazamos en (13) y (14) y encontramos las reacciones en el punto B. => Rbx = 1268 N ; Rby = 1732 N. La reacción en el punto A es la tensión de la cuerda (T).

REACCIONES

Grados de libertad – Vínculos

Un cuerpo rígido sometido a fuerzas exteriores puede desplazarse en el espacio, de dos maneras: traslación y/o rotación. El cuerpo puede tener un movimiento de traslación en 3 dimensiones (x-y-z) y un movimiento de rotación también en 3 dimensiones (x-y-z). Se dice entonces que el cuerpo rígido tiene 6 grados de libertad (3 de traslación + 3 de rotación) en su movimiento.

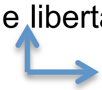
Los vínculos (enlaces, ligaduras, apoyos, etc.) son dispositivos que restringen de alguna manera los movimientos del cuerpo o del sistema. Las restricciones al movimiento están asociadas a fuerzas de reacción o reacciones, que son las acciones necesarias para impedir o coaccionar los movimientos que los enlaces restringen. Estas fuerzas se denominan de reacción porque sólo se producen como reacción o respuesta a un intento de realizar el movimiento que el vínculo prohíbe. Su valor por tanto no es conocido a priori, sino sólo como consecuencia de la solución de las ecuaciones del equilibrio.

Por ejemplo una chapa puede trasladarse en 2 dimensiones (x-y) y rotar en una dimensión (z). Si por ejemplo le martillamos un clavo, agarrándola a la pared, entonces le restringimos la traslación y sólo le dejamos un grado de libertad (la rotación).

Los vínculos pueden ser internos (nudos) que relacionan elementos estructurales de características similares a través de uniones, empalmes, etc.; o externos (apoyos) que relacionan elementos estructurales de características diferentes a través de losas, vigas, columnas, etc..

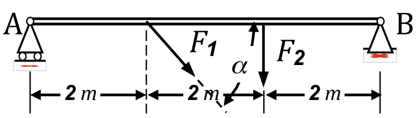
Los apoyos pueden ser de dos tipos:

Apoyo móvil o vínculo de primera especie: Restringe un grado de libertad. En general esa restricción es en la dirección vertical  . Se representa en los gráficos de la siguiente manera: 

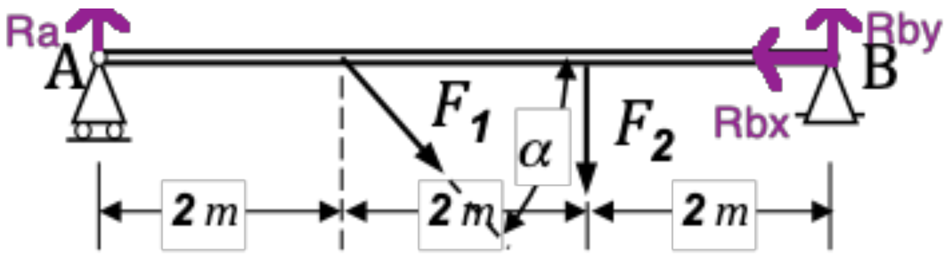
Apoyo fijo o vínculo de segunda especie: Restringe dos grados de libertad. Así que esa restricción va en la dirección horizontal y vertical  . Se representa en los gráficos de la siguiente manera: 

Veamos un ejemplo:

Para el sistema indicado en la figura, donde F1 = F2 = 200 N, y α = 45º, determine las reacciones de los vínculos A y B.



En el punto A hay un apoyo móvil y en B un apoyo fijo. Entonces las fuerzas quedan como:



Planteamos las ecuaciones (2-3) y (12) para que el cuerpo esté en equilibrio estático:

$\sum$ **Fx_i = 0** => -Rbx + F_{1x} = 0 => Rbx = F_1*cos(45) = 141.5 N

$\sum$ **Fy_i = 0** => Rby + Ra – F_{1y} – F_2 = 0 => Rby + Ra = F_1*sen(45) + F_2 (15)

$\sum$ **M_A = 0** => d_b x R_b + d_{F2} x F_2 + d_{F1} x F_1 + d_a x Ra = 0 =>

$\sum$ **M_A =** 6*Rby – 4*F_2 – 2*F_1*sen(45) = 0 =>

Rby = (4*F_2 + 2*F_1*sen(45))/6 => Rby = 180.5 N

Reemplazo en (16) y encuentro Ra = 161 N.

ELASTICIDAD

El término elasticidad es la propiedad física de ciertos materiales de sufrir deformaciones reversibles cuando se encuentran bajo la acción de fuerzas exteriores y de recuperar la forma original si estas fuerzas exteriores desaparecen. Por ejemplo, les permite cambiar su forma en el caso de que estén bajo un estiramiento, volviendo naturalmente a su posición de reposo cuando deja de estarlo.

La elasticidad es una propiedad que se le puede adjudicar únicamente a un cuerpo sólido, ya que los fluidos (gases y líquidos) tienen leyes del movimiento que no permiten una manifestación de este tipo.

Muchos de los objetos sólidos que aparecen en la vida cotidiana carecen completamente de elasticidad, como por ejemplo, un papel, un vidrio o un cartón, etc.. Sin embargo, la ingeniería de la construcción utiliza objetos elásticos para optimizar sus condiciones y sus aplicaciones. La Ley de Hooke es un aporte en este sentido, que afirma que el alargamiento unitario que experimenta un material elástico es directamente proporcional a la fuerza que se ejerce sobre el mismo.

Un cuerpo se deforma cuando al aplicarle fuerzas, éste cambia de forma o de tamaño. Los cuerpos reales pueden sufrir cambios de forma o de volumen aunque la resultante de las fuerzas exteriores sea cero. La deformación de estructuras (estiramientos, acortamientos, flexiones, retorceduras, etc.) debido a la acción de fuerzas implica la aparición de esfuerzos que pueden llevar hasta la ruptura.

El esfuerzo (**P**) en un punto se define como el valor límite de la fuerza por unidad de área.

$$P = \lim_{\Delta A \to 0} \Delta F/\Delta A \qquad (16)$$

El esfuerzo es una medida de la fuerza por unidad de área (en la que se aplica) que causa la deformación. Si la fuerza aplicada no es normal ni paralela a la superficie, siempre puede descomponerse en la suma vectorial de otras dos tal que siempre una sea normal y la otra paralela a la superficie considerada.

Los esfuerzos con dirección normal a la sección, se denotan normalmente como **σ** y se denominan como esfuerzo de tracción o tensión cuando apunta hacia afuera de la sección, tratando de estirar al elemento analizado, y como esfuerzo de compresión cuando apunta hacia la sección, tratando de aplastar al elemento analizado.

El esfuerzo con dirección paralela al área en la que se aplica se denota como ***τ*** y representa un esfuerzo de corte ya que este esfuerzo trata de cortar el elemento analizado, tal como una tijera cuando corta papel.

Las unidades de los esfuerzos son las de fuerza dividida por área ($Pa=N/m^2$), y el esfuerzo no es un vector sino un tensor.

A una barra de longitud ***l***, le aplicamos una fuerza de tracción **F** como se ve en la figura. La barra se deforma longitudinalmente, sufriendo un alargamiento Δl, entonces definimos a la deformación longitudinal como:

$$\varepsilon_l = \Delta l / l \qquad (17)$$

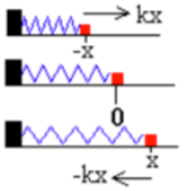
La razón de proporcionalidad entre el esfuerzo (fuerza por unidad de área) y deformación unitaria (deformación por unidad de longitud) está dada por la constante E, denominada módulo de Young o módulo de elasticidad lineal, que es característico de cada material.

$$F/A = E\,\Delta l / l \qquad (18)$$

Para un material elástico lineal e isótropo, el módulo de Young tiene el mismo valor para una tracción que para una compresión, siendo una constante independiente del esfuerzo siempre que no exceda de un valor máximo denominado límite elástico.

Ley de Hooke

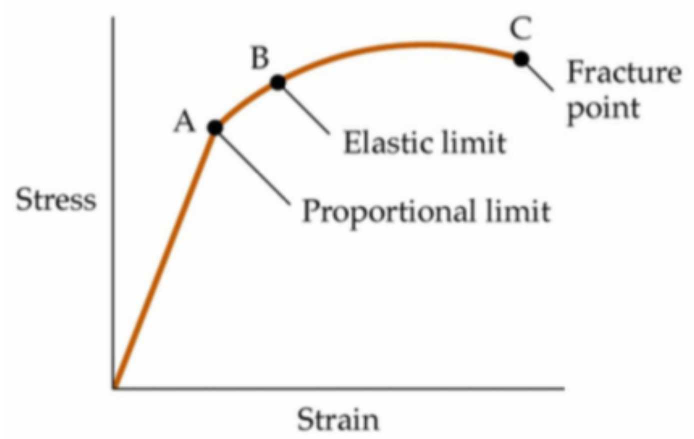
Si ahora consideramos en lugar de una barra a los resortes o muelles, se puede estudiar la deformación en función de la longitud. Cuando estiramos (o comprimimos) un resorte, la fuerza recuperadora es directamente proporcional a la deformación x (al cambio de longitud x respecto de la posición de equilibrio) y de signo contraria a ésta: F = - k x, Siendo k la constante elástica del muelle. El signo menos en la ecuación anterior se debe a que la fuerza recuperadora es opuesta a la deformación.



Para $x>0$, $F = - k x$

Para $x<0$, $F = k x$

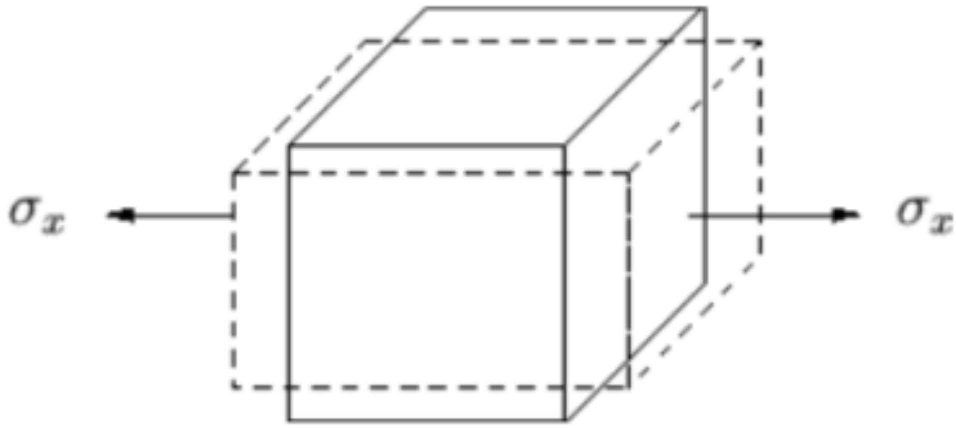
La ley de Hooke es solo aplicable a deformaciones unitarias pequeñas, hasta que se alcanza el límite de proporcionalidad.



En la curva de esfuerzo-deformación de un material hay un tramo de comportamiento perfectamente elástico en el que la relación es lineal (punto A). De ahí hasta otro punto B (de límite elástico) el material sigue un comportamiento elástico (sigue habiendo una relación entre esfuerzo y deformación, aunque no es lineal, y si se retira el esfuerzo se recupera la longitud inicial). Si se sigue aumentando la carga, el material se deforma rápidamente y si se retira el esfuerzo no se recupera la longitud inicial, quedando una deformación permanente. Si se sigue aumentando la carga, el material llega hasta un estado en el que se rompe (punto C).

La Ley de Hooke relaciona la deformación ε_x de una barra sometida a esfuerzo axial, con la tensión normal generada por dicho esfuerzo σ_x, mediante el módulo de Young (E).

$$\sigma_x = E\,\varepsilon_x$$



Entonces la rigidez de un material queda caracterizada el módulo de Young, que nos da la relación entre el esfuerzo σ_x y la deformación ε_x.