Clasificación de Errores

El error se define como *la diferencia entre el valor verdadero y el obtenido experimentalmente.*
Los errores no siguen una ley determinada y su origen está en múltiples causas.

Se pueden clasificar en dos grandes grupos:

Errores sistemáticos

- ✓ Constante a lo largo de todo el proceso de medida
- ✓ Afecta a todas las medidas de un modo definido
- ✓ Es el mismo para todas ellas.
- ✓ Tienen siempre un signo determinado
- ✓ Causas probables

Errores instrumentales (de aparatos); por ejemplo, el error de calibrado de los instrumentos.

Error personal: es debido a las limitaciones de carácter personal (por ejemplo, los errores de paralaje, o los problemas de tipo visual).

Errores de método de medida: que corresponden a una elección inadecuada del método de medida;.

tres posibilidades :
la inadecuación del aparato de medida,
del observador
del método de medida propiamente dicho

Errores accidentales

Se deben a las pequeñas variaciones que aparecen entre observaciones sucesivas realizadas por el mismo observador y bajo las mismas condiciones.

Las variaciones no son reproducibles de una medición a otra .
sus valores están sometidos tan sólo a las leyes del azar
Sus causas son completamente incontrolables para un observador.

Los errores accidentales poseen, en su mayoría, un valor absoluto muy pequeño y si se realiza un número suficiente de medidas se obtienen tantas desviaciones positivas como negativas.

Se pueden emplearse *métodos estadísticos*, pudiéndose llegar a algunas conclusiones relativas al valor más probable en un conjunto de mediciones.

Exactitud

Grado de concordancia entre el valor "verdadero" y el experimental.

Un aparato es *exacto* si las medidas realizadas con él son todas muy próximas al valor "verdadero" de la magnitud medida.

Precisión

Concordancia entre las medidas de una misma magnitud realizadas en condiciones sensiblemente iguales.

Una aparato será *preciso* cuando la diferencia entre diferentes mediciones de una misma magnitud sean muy pequeñas.

Sensibilidad

Valor mínimo de la magnitud que es capaz de medir un equipo.

(Si la sensibilidad de una balanza es 5 mg implica que para masas inferiores, la balanza no acusa ninguna desviación).

Normalmente, se admite que la sensibilidad de un aparato viene indicada por *el valor de la división más pequeña de la escala de medida.*

Errores absolutos y relativos

Si medimos una cierta magnitud física *x* cuyo valor "verdadero" es x_0, el error absoluto de dicha medida es la diferencia

$$\Delta x = x - x_0$$

en donde, en general, se supone que $\Delta x \ll |x_0|$

da una medida de la desviación, en términos absolutos, respecto al valor "verdadero"

El error relativo es el cociente entre el error absoluto y el valor "verdadero":

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_0} \longrightarrow \text{en forma porcentual} \quad \varepsilon \times 100\ \%$$

El resultado de una medida (o de un conjunto de medidas) de una magnitud, debe indicarse siempre con su *grado de incertidumbre* $\longrightarrow$ $x \pm \Delta x$

El valor de la magnitud debe de tener sólo las cifras necesarias para que su última cifra significativa sea del mismo orden decimal que la última del error absoluto, (*cifra de acotamiento)*

Valores incorrectos	Valores correctos
$3{,}418 \pm 0{,}123$	$3{,}4 \pm 0{,}1$
$6{,}3 \pm 0{,}09$	$6{,}30 \pm 0{,}09$
46288 ± 1551	$(4{,}6 \pm 2) \times 10^3$
$428{,}351 \pm 0{,}27$	$428{,}4 \pm 0{,}3$
$0{,}01683 \pm 0{,}0058$	$0{,}017 \pm 0{,}006$

Errores en mediciones directas

Dado que no conocemos el valor "verdadero" de la magnitud que deseamos medir, hay para hacer una estimación, tanto del valor "verdadero", como de una *cota de error*, que nos indiquen la incertidumbre de la medición realizada.

- ✓ Si sólo se puede realizar una sola medida, x, de la magnitud

  El error absoluto coincide con el valor absoluto de la sensibilidad (S) del aparato utilizado para realizar la medida.

  $$x \pm S$$

- ✓ Si se realizan varias medidas de una misma magnitud

  Es conveniente repetir varias veces la determinación del valor de la magnitud problema.

  Los resultados de las medidas individuales pueden presentarse poco o muy dispersas. En función de esta dispersión será conveniente aumentar o no el número de mediciones de la magnitud.

  Para decidir el número de determinaciones que hay que efectuar del valor de la magnitud física que deseamos medir, seguiremos el siguiente procedimiento:

  Se realizan 3 medidas de la magnitud (x_1, x_2 y x_3), se calcula el valor medio de las tres medidas

  $$\bar{x}_3 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

  Se halla la *dispersión total, D :* la diferencia entre los valores extremos de las medidas (valor máximo menos el valor mínimo).

  Se obtiene el *tanto por ciento de dispersión, T,* que viene dado por:

  $$T = \frac{D}{\bar{x}_3}.$$

Si $D \leq S$

tomamos como estimación del valor "verdadero" $\overline{x_3}$

El error absoluto es la sensibilidad

$$\overline{x_3} \pm S$$

Si $D > S$

Aumentamos el número de medidas de la magnitud.
El *criterio* a seguir en este aumento depende del valor del porcentaje dispersión T según tabla:

T en las tres primeras medidas	**Nº total de medidas necesarias**
$T_3 \leq 2$ %	Bastan las 3 medidas realizadas
$2\% < T_3 \leq 8\%$	Hay que hacer 3 medidas más, hasta un total de 6
$8\% < T_6 \leq 15\%$	Hay que hacer un total de 15 medidas
$15\% < T_{15}$	Hay que hacer un mínimo de 50 medidas

Realizadas las medidas necesarias, se toma como valor de la magnitud *el valor medio*, calculado sobre el número total de medidas realizadas y en cuanto al correspondiente error, se determina según los casos

- Si se han realizado tres medidas, se toma como error absoluto el valor de la sensibilidad del aparato

$$\Delta x = S$$

- Si se han realizado seis medidas,

  se calcula el error de dispersión definido como D6/4 (la cuarta parte de la dispersión total de las seis medidas, es decir, la diferencia entre la mayor y la menor de todas).

  Se asigna como error absoluto de las medidas, el mayor de entre este valor y la sensibilidad del aparato. Es decir,

$$\Delta x = \max\,(D6/4,\ S)$$

- Si se han realizado más de 15 medidas,

  se calcula el absoluto por la expresión:

$$\Delta x = \left[\frac{\Sigma (x_i - \overline{x_n})^2}{N} \right]^{1/2} \longrightarrow \boxed{\text{Error cuadrático medio}}$$

En una serie repetida de medidas de una misma magnitud, la distribución estadística de éstas alrededor del valor medio representa una forma típica, que recibe el nombre de *distribución gaussiana* o *distribución normal*.

Histogramas

Un Histograma es un gráfico realizado en un sistema de coordenadas cartesianas.

N es el número de datos experimentales medidos.

El eje X se divide en NI intervalos de ancho δX llamados Intervalos de Clases.

En el eje Y se representa el número de datos (ND) que cae dentro de cada intervalo y se lo denomina Frecuencia de Clase.

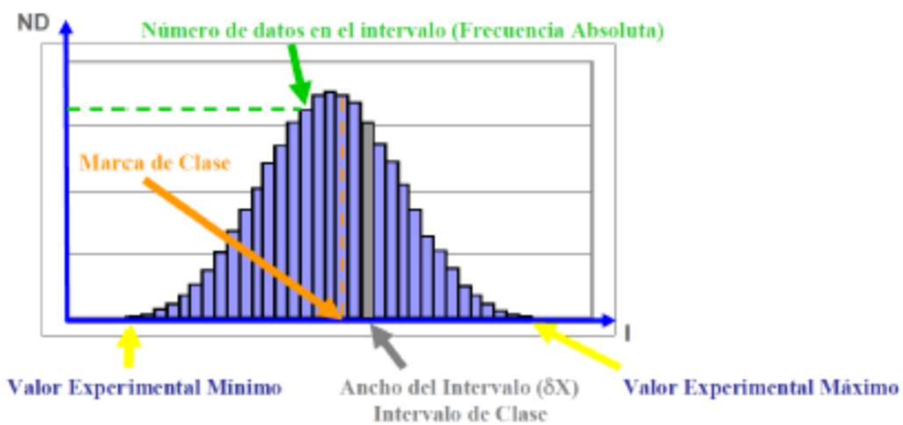
El número de intervalos y su ancho se calculan como (Regla de Stuges) :

$$NI = 1 + 3.3322 \log N$$

$$\delta X = [V_{Emax} - V_{Emin}]/NI$$

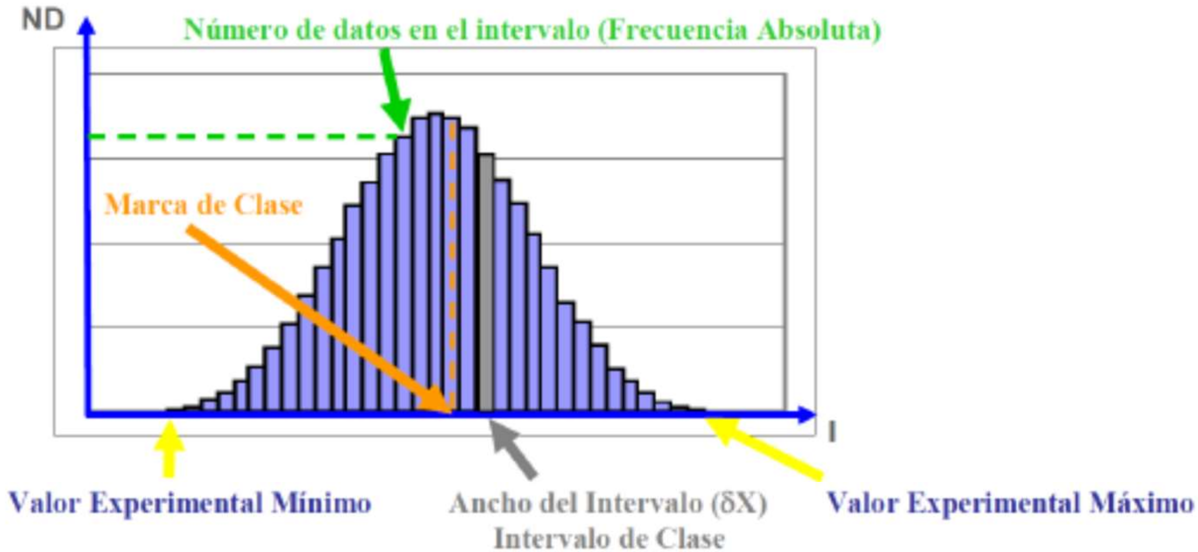
Valor experimental máximo

Valor experimental mínimo



Si N es un número chico (N~10) el valor de **NI** puede en principio considerarse igual a 6.

El punto medio del Intervalo de Clases se denomina Marca de Clase y puede tomarse como el valor representativo de cada clase.



Con los valores experimentales pueden calcularse Parámetros Estadísticos de dos tipos:

Parámetros de Tendencia Central → estiman el valor más probable de una serie de datos

Parámetros de Dispersión → estiman como se dispersan los datos respecto de los valores centrales

- ✓ Parámetros de Tendencia Central

Mediana: es el valor del eje X que separa en partes iguales el área del histograma.

Moda : es el valor en el eje horizontal en el cual el histograma tiene su valor máximo.

Media : es el valor promedio del conjunto de valores experimentales. Indica cual es el valor más probable y se calcula como:

$$V_{EP} = [V_E(1) + V_E(2) + \ldots\ldots + V_E(N)]/N$$

- ✓ Parámetros de dispersión

Rango: es la diferencia entre el valor experimental máximo y el valor experimental mínimo.

Desviación Media: es el promedio de las desviaciones que presenta cada medida respecto del valor promedio. Se calcula como:

$$D_M = \{ |V_E(1) - V_{EP}| + |V_E(2) - V_{EP}| + \ldots\ldots + |V_E(N) - V_{EP}| \}/N$$

Desviación Típica (Dispersión Estándar o Error Cuadrático Medio): es el error cuadrático medio de una serie de mediciones y se calcula como:

$$\sigma = \{([V_E(1) - V_{EP}]^2 + [V_E(2) - V_{EP}]^2 + \ldots\ldots + [V_E(N) - V_{EP}]^2)/[N-1]\}^{1/2}$$

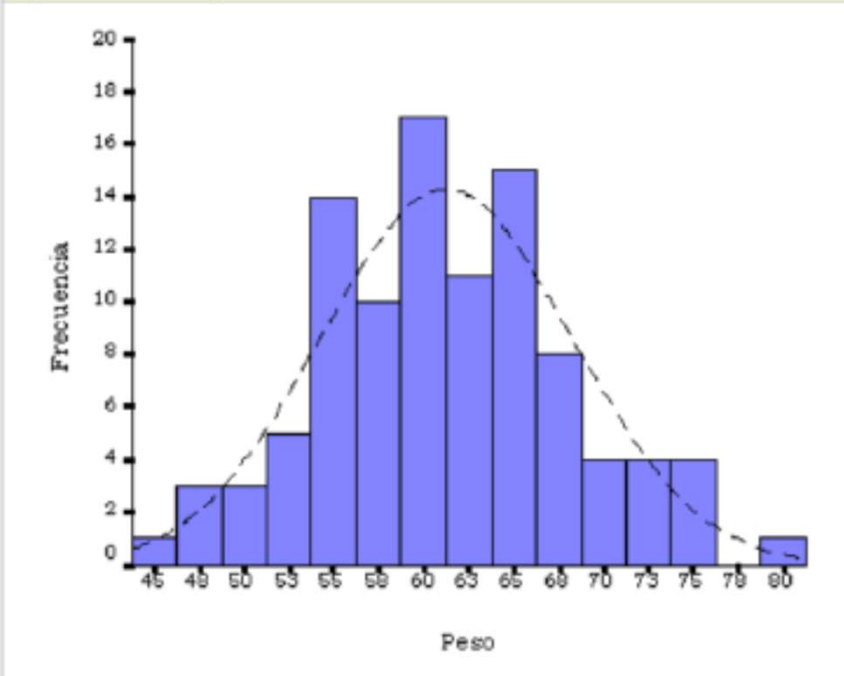
Varianza: es el cuadrado de la desviación estándar (σ^2).

Error Estándar de la Media (Error Cuadrático Medio del Promedio): es el error cuadrático medio del promedio. Se calcula como:

$$\xi = \sigma/(N)^{1/2}$$

Figura 4. Histogramas y gráficos de probabilidad normal de los valores de peso y edad en dos muestras de pacientes.

Figura 4a.- Histogramas



La distribución normal fue reconocida por primera vez por Abraham de Moivre (1667-1754).

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) formuló la ecuación de la curva; por eso se la conoce como la "campana de Gauss".

La distribución de una variable normal está completamente determinada por dos parámetros, su media y su desviación estándar.

Con esta notación, la densidad de la normal viene dada por la ecuación:

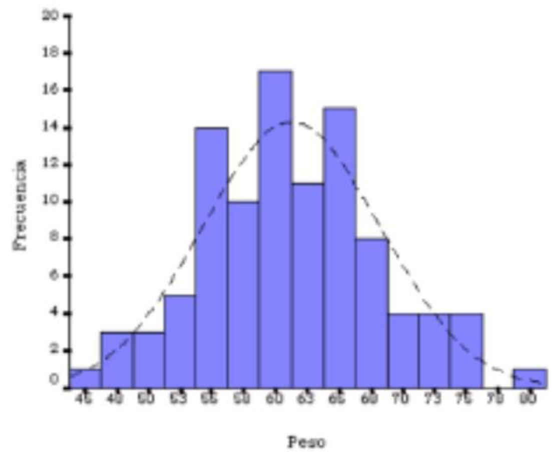
Valor medio

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}; \quad -\infty < x < \infty$$

Desviación standard

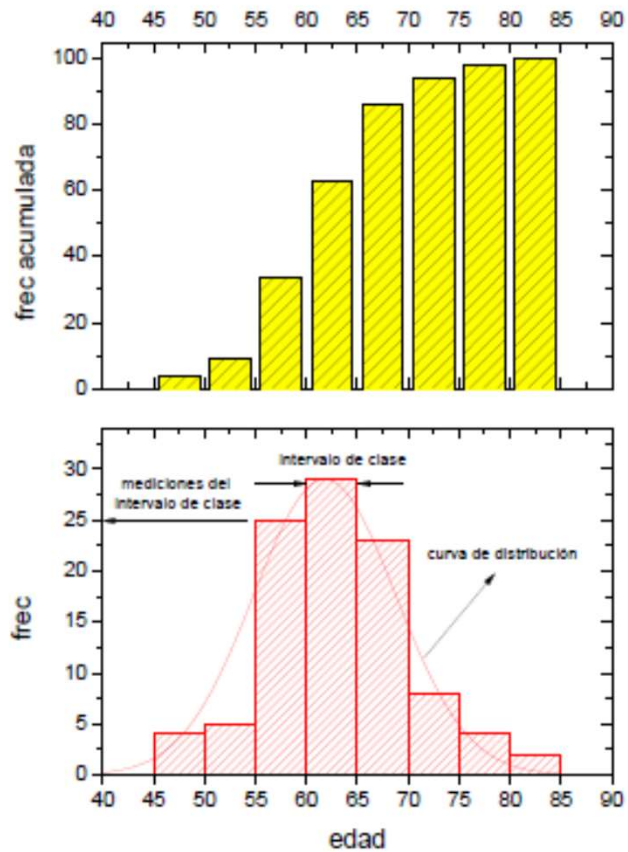
Propiedades importantes de la distribución normal:

1. Tiene una única moda, que coincide con su media y su mediana.
2. La curva normal es asintótica al eje de abscisas. Por ello, cualquier valor entre $-\infty$ y ∞ es teóricamente posible. El área total bajo la curva es, por tanto, igual a 1.
3. Es simétrica con respecto a su media μ .
4. La distancia entre la línea trazada en la media y el punto de inflexión de la curva es igual a una desviación típica (σ).
5. El área bajo la curva comprendido entre los valores situados aproximadamente a dos desviaciones estándar de la media es igual a 0.95.
6. La forma de la campana de Gauss depende de los parámetros μ y σ. La media indica la posición de la campana, de modo que para diferentes valores de μ la gráfica es desplazada a lo largo del eje horizontal.
7. La desviación estándar σ determina el grado de apuntamiento de la curva. Cuanto mayor sea el valor de σ, más se dispersarán los datos en torno a la media y la curva será más plana.



$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\},$$

Histograma



	N tota	Mean	Stand	Sum	Mode	Minim	Media	Maxi
A	100	61.8	7.006	6180	60	45	60	80

Muestreo de una población

Regla de Sturges

Se utiliza para estimar la cantidad de intervalos de clase un histograma (número de clases)

$$c = 1 + 3.322 \cdot \log N$$

siendo N la cantidad de datos.

	A	B	C
1	**N**	**clase**	**clase redondeado**
2	100	7,66	8
3	33	6,04	6

$$\underbrace{\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}}_{\text{promedio}}$$

$$\underbrace{s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}_{\text{varianza}}$$

$$\underbrace{\sigma = \sqrt{s^2}}_{\text{Desv. estandard}}$$

Mediciones indirectas

- La medida indirecta de una magnitud se alcanza por aplicación de una fórmula a un conjunto de medidas directas, (variables independientes o datos), que las relacionan con la magnitud problema.
- Mediante dicha fórmula se obtiene también el error de la medida.
- Si en la fórmula hay números irracionales (tales como π o e) se deben elegir con un número de cifras significativas que no afecten a la magnitud del error absoluto de la magnitud que queremos determinar.
- Esta elección determinará el valor del error asignado a dicha constante.
- Cuando se trabaja con calculadora o computadora lo más conveniente es tomar todos los decimales que aparecen para el número en cuestión (así, su error es muy pequeño y puede despreciarse frente a los del resto de las magnitudes que intervengan).

En la mayor parte de los casos el valor mensurando Y no se mide directamente, sino que se determina a partir de otras N cantidades $X_1, X_2, \ldots, X_N$ a través de una relación funcional

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N)$$

Una estimación del mensurando Y, denotada por y, se calcula utilizando estimaciones de entrada $x_1, x_2, \ldots, x_N$.

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

En algunos casos, la estimación puede evaluarse con la ecuación:

$$y = \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_{1,k}, X_{2,k}, \ldots, X_{N,k})$$

media aritmética de n determinaciones independientes Y_k de Y

$X_{i,k}$ es la observación k de X_i, y cada determinación tiene la misma incertidumbre

$$\boxed{y = f(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_N), \text{ con } \overline{X}_i = \left(\sum_{k=1}^{n} X_{i,k}\right)\Big/ n \qquad \text{No se promedia así}}$$

La desviación estándar estimada, es la incertidumbre estándar combinada u_c(y) (o σ_c)

Se calcula de la desviación estándar estimada que se asocia a cada estimación x_i, denominada incertidumbre estándar y designada con μ (x_i.) (o muchas veces σ)

- ✓ La evaluación tipo A de la incertidumbre se basa en el primer caso (una distribución de frecuencias)
- ✓ La evaluación tipo B de la incertidumbre resulta de una distribución establecida a priori.
- ✓ Ambas reflejan nuestro conocimiento del proceso de medición

Evaluación tipo A de la incertidumbre estándar

En la mayor parte de los casos, la mejor estimación del valor esperado μ_q de una cantidad q, y para la cual se han hecho n mediciones independientes q_k es la media aritmética o promedio q :

$$\overline{q} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q_k \qquad s^2(q_k) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(q_k - \overline{q})^2$$

La mejor estimación de la varianza de la media, $\longrightarrow$ $\sigma^2(q) = \sigma^2/n$ $\qquad s^2(\overline{q}) = \frac{s^2(q_k)}{n}$

La evaluación tipo A de la incertidumbre estándar de un conjunto de mediciones x_k, tal como se definió previamente, se logra con la ecuación:

$$u(x_i) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n(n-1)}} \; .$$

Evaluación tipo B de la incertidumbre estándar

Cuando se tiene una estimación x_i de una cantidad X_i que no se ha obtenido de observaciones repetidas, la varianza estimada $\mu^2 (x_i)$ o la incertidumbre estándar $\mu (x_i)$ se evalúan por un juicio científico basado en toda la información disponible acerca de la variabilidad de X_i.

Entre ésta se pueden incluir:

- ✓ datos de mediciones anteriores ;
- ✓ experiencia o conocimiento general acerca del comportamiento y propiedades de materiales de referencia, patrones o instrumentos ;
- ✓ especificaciones del fabricante ;
- ✓ datos provistos en calibraciones u otros certificados
- ✓ incertidumbres asignadas a datos de referencia tomados de manuales .

Cálculo de incertidumbre estándar combinada

$$\mu_c = \sqrt{\mu_A^2 + \mu_B^2}$$

Existen diversos procedimientos para calcular la incertidumbre estándar combinada, dependiendo de si las variables son independientes o no, es decir, si existe alguna correlación entre ellas.

Variables de entrada no correlacionadas

- La incertidumbre estándar de *y*, donde *y* es la estimación del mensurando Y.
- El resultado de una medición, se obtiene al combinar apropiadamente las incertidumbres estándares de las estimaciones de entrada $x_1, x_2, \ldots, x_N$
- La incertidumbre estándar

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \Big(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}}_{\text{Coeficiente de sensibilidad}} \Big)^2 u^2(x_i)}$$

Regla de propagación de incertidumbre

Variables de entrada correlacionadas

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)$$

covarianza

La covarianza entre dos variables p y q se calcula

$$s(\overline{p}, \overline{q}) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n} (p_k - \overline{p})(q_k - \overline{q})$$

medias

p_k y q_k son las observaciones individuales de dichas cantidades