MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Un movimiento oscilatorio es un movimiento periódico de vaivén en torno a una posición central, denominada posición de equilibrio.

Simulación extraída de WIKIPEDIA

El movimiento de un cuerpo unido a un muelle o resorte es un **movimiento periódico**, pues en él se repiten todas las magnitudes del movimiento a intervalos regulares de tiempo.

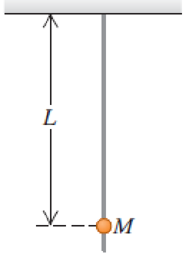
Como se aprecia en la imagen, se produce un movimiento de ida y vuelta en el que en cada una de las posiciones el cuerpo tiene una velocidad y aceleración determinadas, que hacen que se reproduzca de manera reiterada a lo largo del tiempo. Se dice, entonces, que tiene lugar un **movimiento oscilatorio o vibratorio**.

Entonces, **un movimiento oscilatorio es siempre un movimiento periódico**. Sin embargo, un movimiento periódico no es necesariamente un movimiento oscilatorio. Por ejemplo, los movimientos circulares uniformes, son movimientos periódicos, que se repiten en intervalos fijos de tiempo llamados **periodos**, pero en los que no se produce oscilación alguna en torno a una posición de equilibrio.

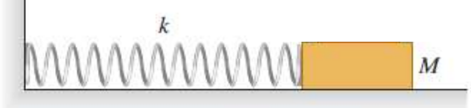
*Una partícula describe un **movimiento armónico simple** cuando se produce un movimiento de vaivén en torno a una determinada posición de equilibrio, estando sometida la partícula a una fuerza recuperadora constantemente dirigida hacia el centro de la trayectoria y proporcional a la elongación.*

Una partícula o un sistema que posee un movimiento oscilatorio constituye un **oscilador**. Un ejemplo de ese sistema puede ser un resorte y una masa asociada, un péndulo simple, una cuerda oscilando, partículas subatómicas vibrando, un cristal de cuarzo (Relojes electrónicos), etc

Péndulo simple



Oscilador Masa - Resorte



PARÁMETROS DEL MOVIMIENTO OSCILATORIO

Dado que un movimiento oscilatorio, es un movimiento periódico como el circular, por ejemplo, también se caracteriza por una serie de parámetros que son

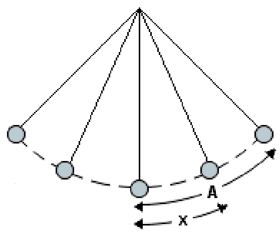
- **Periodo (*T*)**: es el tiempo que se necesita para describir una oscilación completa (de ida y vuelta). Se mide en segundos (s).
- **Frecuencia (*f* o *v*)**: es el número de oscilaciones completas efectuadas por unidad de tiempo. Se mide en hercios (Hz).

$$f = \frac{1}{T} \longrightarrow \frac{1}{\mathrm{s}} = \mathrm{s}^{-1} = \mathrm{Hz}\ (\text{hercio})$$

Así, para un cuerpo que describe cuatro oscilaciones completas cada segundo:

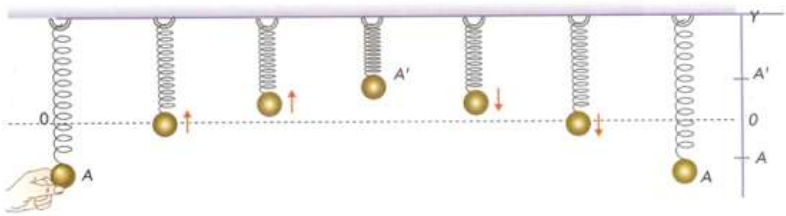
$$f = 4\ \mathrm{Hz} \longrightarrow T = \frac{1}{4} = 0'25\ \mathrm{s}$$

- **Elongación (*x*, Θ)** : es la posición de la partícula respecto a la posición de equilibrio.
- **Amplitud (*A*)**: es el valor máximo de la elongación, por lo que la distancia entre las dos posiciones extremas es igual a 2*A*.



ANÁLISIS DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Siempre que una partícula se desplaza desde una posición de equilibrio estable, el movimiento de la partícula es **armónico simple** (si los desplazamientos son suficientemente pequeños). La partícula que describe un movimiento (vibratorio) armónico simple se denomina **oscilador armónico**, y está constantemente sometida a una **fuerza restauradora**[1], proporcional a la elongación, que se opone al movimiento.



[1] Dependiendo del oscilador, el cuerpo puede estar sometido a una fuerza restauradora o un momento restaurador

Un cuerpo que tiene un movimiento periódico se caracteriza por una posición de equilibrio estable. Al separarlo de esa posición, entra en acción una fuerza y/o un momento para volverlo al equilibrio (porque es estable). Para cuando llega a esa posición, tiene adquirida una cantidad de energía cinética hace que continúe su trayectoria hasta una posición extrema en el lado opuesto. En esa posición se detiene y comienza a moverse en sentido contrario originando el movimiento oscilatorio. Si no existe trabajo neto de fuerzas no conservativas, la energía mecánica se mantiene constante, y el movimiento se mantiene de forma indefinida.

Análisis de un oscilador Masa – Resorte.

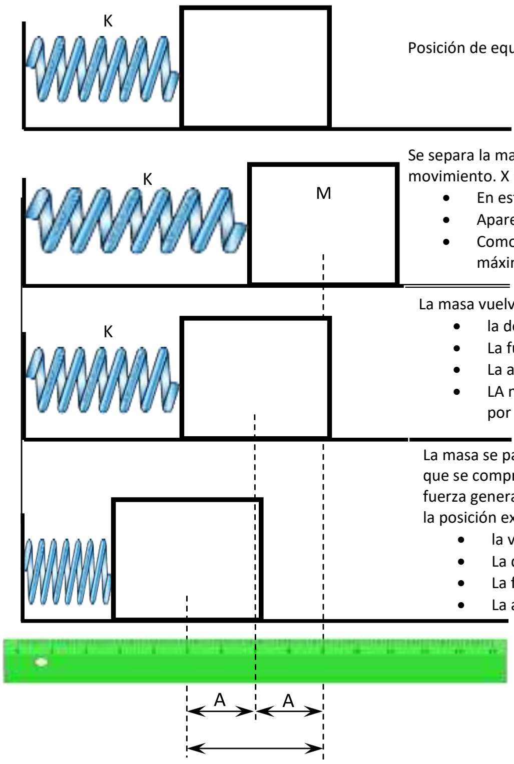
CINEMÁTICA DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Como se enunció previamente, una partícula que describe un **movimiento armónico simple** constituye un **oscilador armónico.** El modelo Masa - Resorte se basa en la **fuerza restauradora** que se impone el resorte y siempre se opone al movimiento. Al tratarse de un muelle o resorte, la fuerza responde a la **ley de Hooke**

$$\textbf{Ley de Hooke} \rightarrow \vec{F} = -k \cdot \vec{x}$$

El signo negativo indica que se trata de una fuerza restauradora, que se opone al desplazamiento respecto a la posición de equilibrio, y *k* es la **constante elástica del resorte**, característica de su rigidez y construcción.

Básicamente el movimiento responde a la siguiente secuencia:



Posición de equilibrio estable. X = 0

Se separa la masa de su posición de equilibrio y se mantiene hasta que se inicia el movimiento. X = A

- En esta posición, la velocidad de la masa es cero
- Aparece una fuerza recuperadora en el resorte
- Como el resorte está en su maxima deformación, la fuerza será también la máxima, y por lo tanto, la aceleración que recibe la masa es maxima

La masa vuelve a su posición de equilibrio inicial. X = 0. En ese momento:

- la deformación en el resrote es cero
- La fuerza sobre la masa es cero
- La aceleración es cero
- LA masa tiene su máxima velocidad, es decir tiene energía cinética y por lo tanto, sigue comprimiendo el resorte hacia la izquierda.

La masa se pasa de la posición de equilibrio comprimiendo al resorte. A medida que se comprime, aparece nuevamente la fuerza restauradora en el resorte, esta fuerza genera una aceleración que tiene sentido contrario a la velocidad. Al llegar a la posición extrema izquierda, X = -A:

- la velocidad se hace cero
- La defomración en el resorte es máxima
- La fuerza elástica es máxima.
- La aceleración es máxima

Haciendo un análisis de la fuerza elástica y lo relacionamos con la segunda ley de Newton:

$$\boldsymbol{F = -k \cdot x = m \cdot a \longrightarrow a = -\frac{k}{m} \cdot x}$$

De esta relación se desprende un rasgo característico del movimiento armónico simple:

Cuando un cuerpo se mueve con una aceleración proporcional a su desplazamiento, pero de sentido opuesto al desplazamiento, diremos que describe un movimiento armónico simple.

Teniendo en cuenta que la aceleración es la derivada segunda de *x* respecto a *t*:

$$-k * x = m * \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m * \frac{d^2x}{dt^2} + k * x = 0$$

$$m * \ddot{x} + k * x = 0$$

La ecuación característica de un Movimiento Oscilatorio Armónico tiene la forma:

$Cte1 * \ddot{v} + Cte2 * v = Cte3$

Que puede escribirse de la forma:

$$\ddot{v} + Cte4 * v = Cte5$$

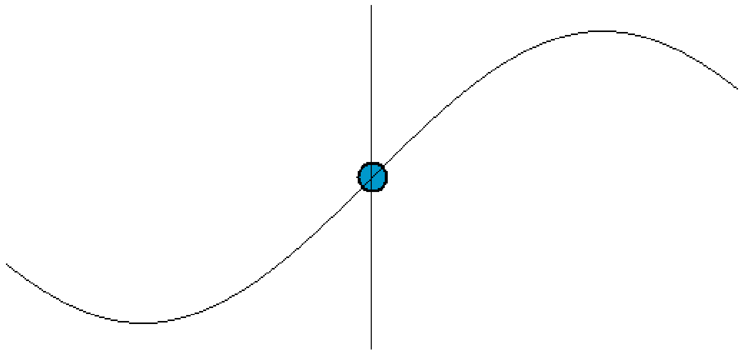
Donde la Cte4 = ω^2

La Cte5 puede ser 0 o número real cualquiera.

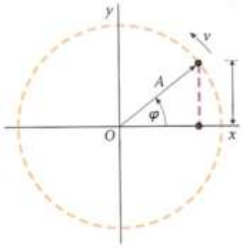
La solución a esta ecuación diferencial puede escribirse así[2]:

$$\boldsymbol{x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)}$$

[2] Notar que se puede usar esta expresión o de igual forma se puede relacionar usando la función Seno. Ver Aclaración Importante



Esta ecuación es la que describe el movimiento armónico simple, y podemos comprobar que mantiene una **relación con el movimiento circular uniforme**:



$$x = A\cos\varphi$$

$$\text{Siendo } \varphi = \omega t \longrightarrow x = A\cos(\omega t)$$

$$\text{Si } \varphi \neq 0 \longrightarrow \boldsymbol{x = A\cos(\omega t + \varphi_0)}$$

En estas expresiones:

- ***x*** es la **elongación** o desplazamiento respecto al punto de equilibrio, por lo que se mide en metros (m).
- ***A*** es la **amplitud** o elongación máxima, por lo que también se mide en metros (m).
- ***φ*** es la **constante de fase**, o simplemente fase, y φ_0 es la **fase inicial**, medidas en radianes (rad).
- ***ω*** es una constante denominada **frecuencia angular (o pulsación)**, y tiene las mismas unidades radianes por segundo (rad/s).

Teniendo en cuenta que se trata de un **movimiento periódico**, si en el tiempo *t* el oscilador armónico se encuentra en la posición *x*, cuando el tiempo $t' = t + T$, su posición es x':

$$x' = A \cdot \cos[\omega(t+T) + \varphi_0] = A \cdot \cos[\omega t + \varphi_0 + \omega T]$$

$$\text{Para que sea periódico} \longrightarrow x = x' \longrightarrow A \cdot \cos[\omega t + \varphi_0] = A \cdot \cos[\omega t + \varphi_0 + \omega T]$$

$$\text{Para que se repita la función coseno} \longrightarrow \omega T = 2\pi$$

Considerando esta condición de **igualdad de fase**, la frecuencia angular será:

$$\boldsymbol{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

$$\textbf{Siendo } \boldsymbol{T = \frac{1}{f} \longrightarrow \omega = 2\pi f}$$

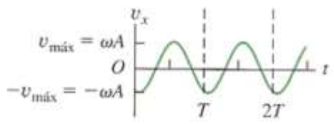
Por último, **las expresiones de la velocidad y la aceleración en el movimiento armónico simple se pueden obtener por derivación**:

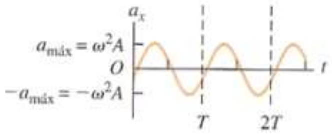
$$\text{Velocidad} \longrightarrow v = \frac{dx}{dt} \longrightarrow \boxed{v = -A\omega\,\text{sen}(\omega t + \varphi_0)}$$

$$\text{Cuando } (\omega t + \varphi_0) = (2n+1)\frac{\pi}{2} \longrightarrow \text{sen}(\omega t + \varphi_0) = \pm 1 \longrightarrow |v_{máx}| = A\omega$$

$$\text{Aceleración} \longrightarrow a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \longrightarrow \boxed{a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0)}$$

$$\text{Cuando } (\omega t + \varphi_0) = n\pi \longrightarrow \cos(\omega t + \varphi_0) = \pm 1 \longrightarrow |a_{máx}| = A\omega^2$$





En el punto de equilibrio la velocidad es máxima y la aceleración es nula, Justo es el punto donde la fuerza y por lo tanto la aceleración cambia de signo, siempre oponiéndose al movimiento. Por eso, al alejarse de la posición de reposo, la fuerza aumenta y la velocidad disminuye, de modo que en los máximos de elongación la partícula tiene velocidad nula, y la aceleración alcanza su valor máximo forzando un cambio en el sentido de su movimiento.

Trabajando con las expresiones anteriores, pueden determinarse la fase inicial y la amplitud a partir de las condiciones iniciales (*t = 0*):

Fase inicial:

$$\frac{x_0}{v_0} = \frac{A\cos\varphi_0}{-A\omega\,\text{sen}\,\varphi_0} \longrightarrow \boxed{\omega\frac{v_0}{x_0} = -\text{tg}\,\varphi_0}$$

Amplitud:

$$x_0^2 = A^2\cos^2\varphi_0$$

$$v_0^2 = A^2\omega^2\,\text{sen}^2\,\varphi_0 \longrightarrow \frac{v_0^2}{\omega^2} = A^2\,\text{sen}^2\,v_0^2$$

$$x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} = A^2(\cos^2\varphi_0 + \text{sen}^2\,v_0^2) \longrightarrow \boxed{A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}}$$

ACLARACIÓN IMPORTANTE:

En algunos libros la ecuación del movimiento armónico no viene expresada en función del coseno sino del seno. Aunque no lo parezca: ¡no importa! Hemos relacionado el movimiento armónico con la proyección en el eje x de un movimiento circular uniforme, pero nada nos hubiera impedido realizar la proyección sobre el eje y.

Proyección sobre el eje $\boldsymbol{x \longrightarrow A\cos(\omega t + \varphi_0)}$

Proyección sobre el eje $\boldsymbol{y = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0)}$

Estas expresiones sólo se diferencian en la fase. Observa que si a la segunda le restamos $\pi/2$ se transforma en la anterior:

$$A\,\mathrm{sen}\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

De manera similar podríamos relacionar las ecuaciones de la velocidad y la aceleración.

DINÁMICA DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Retomando la **ley de Hooke**:

Ley de Hooke $\boldsymbol{\longrightarrow \vec{F} = -k \cdot \vec{x}}$

Y relacionando con la segunda ley de Newton:

$$\boldsymbol{F = -k \cdot x = m \cdot a \longrightarrow a = -\frac{k}{m} \cdot x}$$

Teniendo en cuenta la expresión para la aceleración determinada en el estudio cinemático del movimiento armónico simple y reemplazando:

$$a = -\omega^2 x \longrightarrow -\omega^2 x = -\frac{k}{m} \cdot x \longrightarrow \omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\boxed{\boldsymbol{k = m \cdot \omega^2 \leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}}$$

$$\text{Además: } \omega = \frac{2\pi}{T} \longrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Es decir, que la máxima aceleración que ocurre cuando la elongación es máxima:

$x_{max} = A$

Tenemos que:

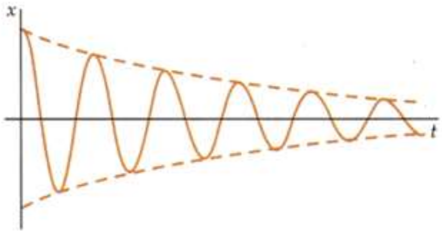
$a_{max} = w^2 * A$

luego: $w^2 = k/m$ *entonces:* $a_{max} = k/m * A$

El periodo de oscilación (y, por tanto, la frecuencia) del cuerpo no depende de la amplitud de las oscilaciones y sólo depende de su masa y de la constante recuperadora (o constante armónica) del oscilador.

EL MOVIMIENTO ARMÓNICO AMORTIGUADO

Si sobre el oscilador no actuasen fuerzas externas (de rozamiento por ejemplo), oscilaría de manera indefinida. Sin embargo, en los movimientos oscilatorios reales se producen pérdidas de energía debidas a fuerzas disipativas que amortiguan la vibración (se habla, entonces, de **osciladores amortiguados**). Para mantener constante este movimiento habría que suministrar a la partícula o al sistema una energía igual a la disipada por el rozamiento (**osciladores forzados o sostenidos**).



La pérdida de energía en los osciladores amortiguados se traduce en una **disminución progresiva de la amplitud** de la vibración hasta que, finalmente, se detiene. En general, podemos considerar que existe una fuerza que frena el movimiento y que es proporcional a la velocidad, por tanto:

$$\vec{F_f} = -b\vec{v} = -b\frac{d\vec{x}}{dt}$$

$b \longrightarrow$ constante de amortiguamiento

El movimiento de un sistema amortiguado se puede deducir a partir de la 2ª ley de Newton:

$$-k \cdot x - b \cdot \frac{dx}{dt} = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\text{Dividiendo entre m} \longrightarrow -\frac{k}{m} \cdot x - \frac{b}{m} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\text{Siendo } k = m \cdot \omega_0^2 \longrightarrow \boldsymbol{\omega_0^2 = \frac{k}{m}} \text{ y definiendo } \boldsymbol{\gamma = \frac{b}{2m}} \longrightarrow 2\gamma = \frac{b}{m}$$

$$\text{Sustituyendo} \rightarrow -\omega_0^2 \cdot x - 2 \cdot \gamma \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{\omega_0^2 x + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2} = 0}}$$

En este caso, ***ω₀* es la frecuencia angular sin amortiguación**. La ecuación diferencial del movimiento amortiguado obtenida incluye un elemento más que la del oscilador armónico ideal, y su resolución requiere el uso de números complejos. Para pequeños amortiguamientos ($\gamma < \omega$):

$$x = A_0 \cdot e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \rightarrow x = A_0 \cdot e^{-t/2\tau} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Donde $\tau = {}^{1}/_{2\gamma} = {}^{m}/_{b}$ se denomina **tiempo de extinción** o **constante de tiempo**

Y la frecuencia viene dada por:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}}$$

El valor crítico se obtiene cuando $\omega_0 = \gamma$:

$$\omega_0 = \gamma \rightarrow \omega_0 = \frac{b}{2m} \rightarrow b = 2m\omega_0$$

En esta situación la partícula vuelve a su posición de equilibrio en el tiempo más breve posible sin oscilación. Si *b* aumenta más, la ecuación se vuelve imaginaria, no hay oscilación y la partícula se irá acercando gradualmente a la posición de equilibrio. Por tanto, se pueden considerar tres circunstancias:

Oscilador infraamortiguado:

$$\omega_0^2 > \gamma^2 \longrightarrow x = A_0 \cdot e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Oscilador amortiguado críticamente:

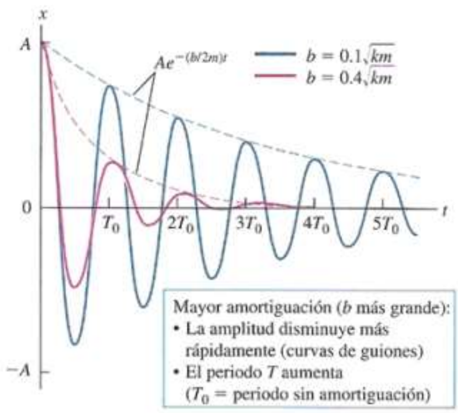
$$\omega_0^2 = \gamma^2 \longrightarrow b = 2m\omega_0$$

Oscilador sobreamortiguado o supercrítico:

$$\omega_0^2 < \gamma^2 \longrightarrow b > 2m\omega_0$$

La amplitud va decreciendo según la siguiente expresión:

$$A = A_0 \cdot e^{-\gamma t} = A_0 \cdot e^{-b \cdot t/2m} = A_0 \cdot e^{-t/2\tau}$$



Como la energía es proporcional al cuadrado de la amplitud:

$$E = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} k \left(A_0 \cdot e^{-t/2\tau} \right)^2 = \frac{1}{2} k A_0^2 \, e^{-t/\tau}$$

$$\boldsymbol{E = E_0 \cdot e^{-t/\tau} = E_0 \cdot e^{-2\gamma t} = E_0 \cdot e^{-b \cdot t/m}}$$

EJERCICIO DE APLICACIÓN

Se tiene una masa m unida a un resorte de constante k y con un amortiguamiento debido a una fuerza disipativa proporcional a la velocidad de la masa, con la constante de proporcionalidad igual a $k/2$:

a. ¿Cuánto tiempo transcurre hasta que la amplitud se reduce a la mitad?

La amortiguación de la amplitud se verifica a un ritmo $A = A_0 \cdot e^{-bt/2m}$. Como $b = k/2$, para que la amplitud se reduzca a la mitad:

$$\frac{A_0}{2} = A_0 \cdot e^{-kt/4m} \longrightarrow \frac{1}{2} = e^{-kt/4m} \longrightarrow \ln 2^{-1} = -\frac{kt}{4m} \longrightarrow \ln 2 = \frac{kt}{4m}$$

$$\boxed{t = \frac{4m}{k} \ln 2}$$

b. ¿Cuánto tiempo transcurre hasta que se ha disipado la mitad de la energía total inicial?

La amortiguación de la energía varía según la expresión $E = E_0 \, e^{-bt/m}$. Como $b = k/2$, para que la energía se reduzca a la mitad:

$$\frac{E_0}{2} = E_0 \, e^{-kt/2m} \longrightarrow \frac{1}{2} = e^{-kt/2m} \longrightarrow \ln 2^{-1} = -\frac{kt}{2m} \longrightarrow \ln 2 = \frac{kt}{2m}$$

$$\boxed{t = \frac{2m}{k} \ln 2}$$

ANÁLISIS ENERGÉTICO DE UN OSCILADOR ARMONICO MASA RESORTE IDEAL CON CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

Si no hay trabajo de Fuerzas no conservativas, la energía mecánica del sistema se mantiene constante. Esto no significa que la fuerza elástica no genera trabajo, de hecho, **el trabajo total realizado sobre la masa del oscilador armónico es igual a la variación de la energía cinética que experimenta**[3]**.**

y se puede calcular como la suma de la Energía cinética, debido al movimiento de la partícula (MASA) y la Energía potencial que se almacena en el resorte cuando se lo separa del equilibrio.

$$\boxed{E_M = E_p + E_c}$$

ENERGÍA CINÉTICA:

La energía cinética de un cuerpo de masa *m* que avanza con velocidad *v* es:

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} m v^2}$$

Recordando la ecuación de velocidad de un movimiento armónico simple:

$$\text{Siendo } x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \longrightarrow v = \frac{dx}{dt} = -A \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow v^2 = A^2 \omega^2 \text{sen}^2(\omega t + \varphi_0) \longrightarrow v^2 = A^2\omega^2[1 - \cos^2(\omega t + \varphi_0)] \longrightarrow$$
$$\longrightarrow v^2 = A^2\omega^2 - A^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) \longrightarrow v^2 = A^2\omega^2 - x^2\omega^2$$
$$\text{Por tanto: } v^2 = \omega^2(A^2 - x^2)$$

Sustituyendo en la expresión general de la energía cinética:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 (A^2 - x^2)$$
$$\text{Dado que } k = m\omega^2 \longrightarrow \boxed{\mathbf{E_c = \frac{1}{2} k (A^2 - x^2)}}$$

Por tanto, **la energía cinética del oscilador armónico varía con la distancia al punto de equilibrio**: es nula en los extremos (la velocidad es nula) y es máxima cuando pasa por el punto de equilibrio (porque la velocidad también es máxima).

[3] Este enunciado se conoce como teorema de la energía cinética o de las fuerzas vivas. Una consecuencia es que **si el trabajo total realizado sobre una partícula es nulo, la energía cinética no varía** y, por tanto, su velocidad es constante. Esto sucede, por ejemplo, cuando la resultante es nula o es perpendicular al desplazamiento.

$$E_c = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2) = \frac{1}{2}mv^2 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boldsymbol{v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} \longrightarrow v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}}$$

Como todo oscilador se mueve gracias a la existencia de una **fuerza recuperadora** que varía en función de la elongación en cada instante:

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 F \cdot dr \cdot \cos 180 = -\int_1^2 F \cdot dr$$

$$\text{Teniendo en cuenta la ley de Hooke} \longrightarrow W = -\int_1^2 k \cdot x \cdot dx =$$

$$= -k\int_1^2 x \cdot dx = -k \cdot \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2 = -\left(\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2\right) = -[E_c(2) - E_c(1)] = -\Delta E_c$$

$$\boldsymbol{W_{fuerza} = -\Delta E_c \leftrightarrow W_{ext} = \Delta E_c}$$

ENERGÍA POTENCIAL

La fuerza recuperadora que se opone al movimiento de un oscilador es una fuerza central y, en consecuencia, es una **fuerza conservativa**[4] a la que va asociada siempre una energía potencial.

La **variación de la energía potencial** asociada a un oscilador armónico que se desplaza entre dos puntos es:

$$\int dE_p = -\int F * dx$$

Como $F = -k * \Delta x$

$$\int_a^b dE_p = -\int_a^b -k * x\, dx$$

$$\Delta E_p = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2$$

Como la energía potencial está asociada a una determinada posición, y ésta depende del sistema de referencia, **no podemos determinar energías potenciales absolutas**, sino que solamente podemos calcular variaciones de energía potencial. Sin embargo, si fijamos el sistema de referencia (arbitrariamente) en el punto de equilibrio, tendremos que en esa posición la energía potencial se anula y, por tanto, la energía potencial en cualquier otro punto será:

$$\boldsymbol{E_p = \frac{1}{2}kx^2}$$

[4] *Una fuerza es conservativa si el trabajo que efectúa al trasladar una partícula de un punto a otro sólo depende de las posiciones inicial y final, independientemente del camino seguido.*

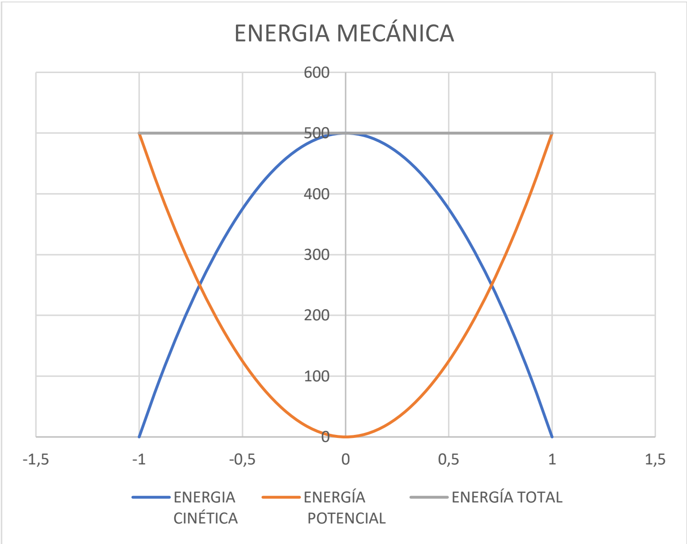
ENERGÍA MECÁNICA DE UN OSCILADOR ARMÓNICO

La energía mecánica es la **suma de la energía cinética y la energía potencial**:

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2) + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

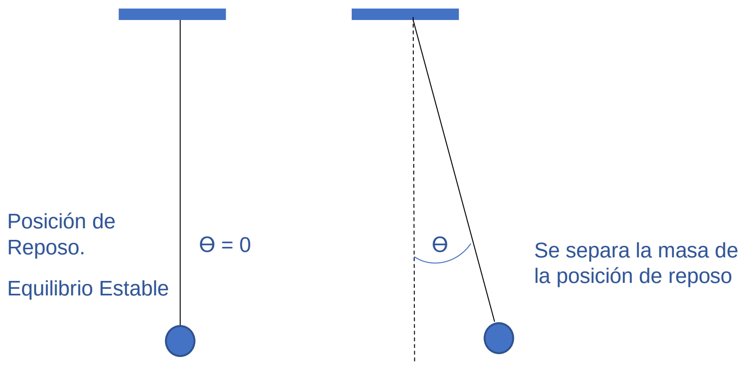
$$\boldsymbol{E_m = \frac{1}{2}kA^2}$$

La energía total del movimiento armónico simple **es proporcional al cuadrado de la amplitud** y **es constante**, lo cual era de esperar por tratarse de una fuerza conservativa.
*Según el **principio de conservación de la energía mecánica**, si sobre un cuerpo sólo realizan trabajo las fuerzas conservativas, su energía mecánica se conserva.*
En un oscilador armónico hay una **transformación continua de las energías cinética y potencial**:



En todo momento, la suma de la Energía cinética y la Energía Potencial es constante.

Este mismo análisis que se hizo con un oscilador Resorte Masa, puede hacerse con un péndulo simple:



En este caso, lo más conveniente es plantear los momentos de Fuerzas en torno al eje O.

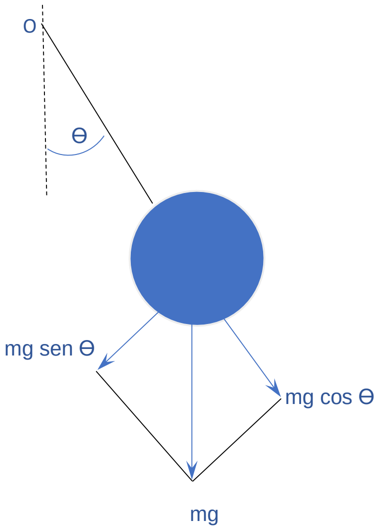
La tensión, pasa por el eje adoptado y por lo tanto no genera torque. El peso, en cambio, genera un torque que puede calcularse:

$$\tau = m * g * sen\theta * l$$

Recordando que $\sum \tau = I * \alpha$

Y que $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$, podemos armar la siguiente ecuación:

$$m * g * sen\theta * l = -I * \frac{d^2\theta}{dt^2}$$



Como antes, el signo negativo indica que la aceleración se opone al desplazamiento. Reordenando:

$$I * \frac{d^2\theta}{dt^2} + m * g * sen\theta * l = 0 \qquad \text{Ecuación 1}$$

Lo que se parece al modelo de ecuación diferencial vista antes y que representa un movimiento armónico simple, salvo que sen ϴ no es ϴ. ¿O si?

Apelando a lo estudiado en Análisis Matemático I, podemos considerar que :

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{sen(\theta)}{\theta}$$

o de otro modo:

$$sen\ (\theta) \to \theta\ para\ \theta \to 0$$

En rigor, podemos asumir que $sen(\theta) \sim \theta \qquad para\ angulos\ menores\ a\ 5°$

Por lo tanto, asumimos que la ecuación 1 podemos reescribirla de la siguiente forma:

$$I * \ddot{\theta} + m * g * \theta * l = 0$$

El momento de Inercia de la masa alrededor de 0 vale: I=m*l^2, es decir:

$$m * l^2 * \ddot{\theta} + m * g * l * \theta = 0$$

Dividiendo la ecuación por m*l^2:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} * \theta = 0$$

Ahora si, tiene la forma antes vista, donde la variable derivada dos veces está sola, y la variable sin derivar está multiplicada por una constante. Esa constante es la pulsación angular elevada al cuadrado. No olvidar, que del otro lado del igual también debe habar una constante, en este caso 0.

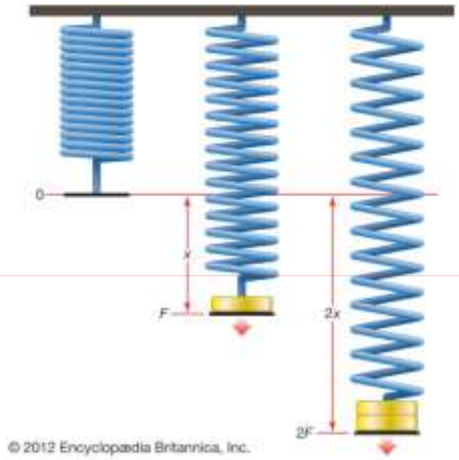
ATENCIÓN: Los ángulos deben ser tomados en radianes, para que haya compatibilidad de unidades y para que tenga validez el estudio realizado.

Desafíos:

- Analizar el sistema Masa – Resorte operando en posición vertical
- Encontrar la pulsación angular de un péndulo construido con un cuerpo irregular de momento de Inercia I alrededor del eje de sujeción 0.

ANEXO

Análisis del Comportamiento de un resorte ideal.



¿Cómo se comporta un resorte?

En principio se observa que al someter cualquier resorte a una fuerza que lo deforma, esa deformación es directamente proporcional a la fuerza aplicada[5]

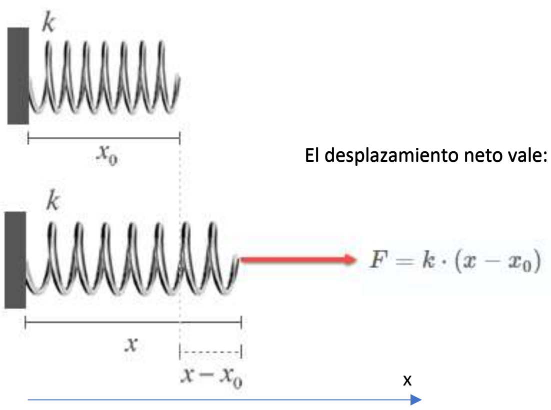
Comentado [AB1]:

En la imagen, el resorte sin carga tiene una posición inicial, al someterlo a una fuerza F, se estira hasta la posición x, cuando el peso se duplica, la fuerza que deforma al resorte vale entonces 2F, la deformación es 2x.

Si modelamos ese comportamiento con una ecuación, conseguimos escribir la Ley de Hooke que establece: **que el alargamiento de un muelle es directamente proporcional al módulo de la fuerza que se le aplique, siempre y cuando no se deforme permanentemente dicho muelle.**

$$\boxed{\textbf{Ley de Hooke} \rightarrow \vec{F} = -k \cdot \vec{x}}$$

El signo negativo indica que la fuerza generada por el resorte tiene signo contrario a la deformación. En términos generales:

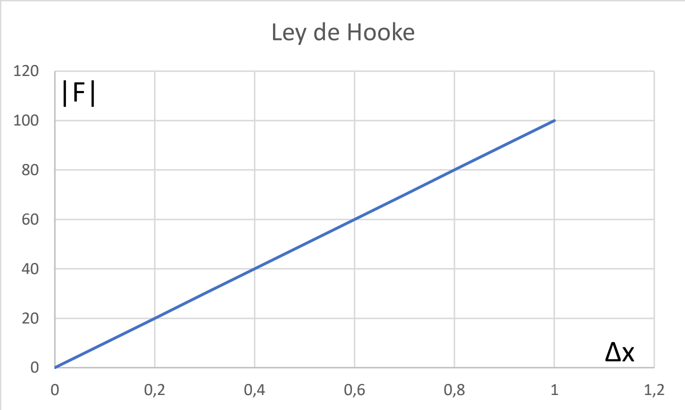


La Fuerza con sentido positivo es la que está deformando al resorte. El resorte hace una fuerza de igual módulo y sentido contrario.

El desplazamiento neto vale: ***x-x_0***

[5] Si al aplicar la fuerza, deformamos permanentemente el muelle decimos que hemos superado su **límite de elasticidad**.

Graficando la ecuación, rápidamente podemos observar que el módulo de la Fuerza con la que responde un resorte es una recta con una determinada pendiente.



Si ahora usamos otro resorte, en términos coloquiales, con otra dureza, y hacemos el mismo experimento, el comportamiento será también lineal pero esa deformación x será mayor si el resorte es “mas blando” o menor, si el resorte es “mas duro”

A esa característica típica de comportamiento de cada resorte, que depende del material con el que está construido , la forma, el grosor, etc (todas características constructivas del resorte) se la denomina ***Constante elástica*** y se la denomina con la letra k. Para mantener compatibilidad de unidades, k se mide en N/m.

Entonces, dependiendo de la constante elástica, tendremos rectas con mayor o menor inclinación, si k es mas grande o mas chica.