PRIMER PARCIAL DE CALCULO I/ ANALISIS MATEMATICO I

Fecha…………Aula…….. **Tema I**

1		2		3		4	
abc	d	a	b	a	b	a	b

Nombre y Apellido………………………………………..DNI……………………...

1. Al investigar el poder bactericida de un compuesto se observa que si "P" representa el número de bacterias presentes en la muestra "t" horas después de agregado el bactericida, entonces $P(t) = 1000\frac{48-4t}{t+6}$. Se pide:

a) El número de bacterias al momento de agregar el bactericida.
b) Calcular el tiempo que se requiere para eliminar la mitad de las bacterias.
c) El prospecto indica que el producto conserva su poder bactericida durante 12 horas ¿es cierto? ¿Por qué?
d) Encuentre la función inversa (primero determinar dominio e imagen para que P sea biyectiva) ¿qué significa en el contexto del problema?

2. Responde V o F. Justifica la respuesta:

a) $m(x) = \frac{2x-4}{x-2}$ tiene una asíntota vertical en x = 2.

b) La función $\begin{cases} x = -t+2 \\ y = e^t + 1 \end{cases}$ no tiene asíntotas.

3. a) Calcular k para que siguiente función y = g(x) tenga una discontinuidad evitable en x = 0

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{sen(2x)}{tg\ x} & x < 0 \\ \dfrac{k\ (\sqrt{1+x}-1)}{x} & x > 0 \end{cases}$$

Para ese valor de k redefinir g para que sea continua en x = 0.

b) ¿En qué punto de la curva $f(x) = \sqrt[5]{x}$ con abscisa positiva la recta tangente es paralela a 3y-x+6=0? Hallar la recta tangente y graficarla junta con la curva.

4. a) Calcular la función derivada de $f(x) = x|x-1|$. Graficar f y f 'en un mismo par de ejes cartesianos.
b) ¿Se puede aplicar el teorema de Lagrange a la función $f(x) = \frac{x}{x+1}$ en el intervalo [0,4]? De serlo hallar el punto intermedio c, si no se puede aplicar justificar por qué.

SOLUCIÓN

1. a) En el momento de agregar el bactericida el tiempo es t = 0, por lo que tendríamos que calcular P(0) que en este caso da 8000 bacterias.
b) Buscamos el tiempo para eliminar la mitad de las bacterias es decir t tal que P(t)=4000:

$$4000 = 1000\frac{48-4t}{t+6} \quad \Rightarrow \quad 4(t+6) = 48-4t \quad \Rightarrow 4t+24 = 48-4t \quad \Rightarrow 8t = 24$$
$$t = 3$$

Se necesitan 3 horas para eliminar la mitad de las bacterias.

c) P(12) = 0, por lo que a las 12 hs se eliminaron todas las bacterias, el prospecto es verdadero.

d) De acuerdo al contexto del problema:

$P:[0,12] \to [0,8000]$ es biyectiva; por lo que su función inversa $P^{-1}:[0,8000] \to [0,12]$

Busquemos la expresión analítica:

$$y = 1000\frac{48-4t}{t+6} \Rightarrow \frac{y}{1000}(t+6) = 48-4t \Rightarrow \frac{y\,t}{1000} + \frac{6\,y}{1000} = 48-4t \Rightarrow \frac{y\,t}{1000} + 4t = 48 - \frac{6\,y}{1000}$$

$$t\left(\frac{y}{1000}+4\right) = 48 - \frac{6\,y}{1000} \Rightarrow t = \frac{48-\frac{6\,y}{1000}}{\left(\frac{y}{1000}+4\right)} = \frac{\frac{48000-6y}{1000}}{\frac{y+4000}{1000}} = \frac{48000-6y}{4000+y}$$

Luego: $P^{-1}:[0,8000] \to [0,12] / \dfrac{48000-6y}{4000+y}$ en el contexto del problema nos da el tiempo que se necesita para que queden una cantidad y de bacterias.

2. a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2(x-2)}{x-2} = 2$ por lo que la función m no tiene asíntota vertical en x = 2.

b) $\begin{cases} x = -t+2 \\ y = e^{t}+1 \end{cases}$ despejemos y en función de x:

$$x = -t+2 \Rightarrow t = 2-x \Rightarrow y = e^{2-t}+1$$

Asíntotas verticales no tiene. Es una función exponencial trasladada en forma vertical, horizontal y reflejada, por lo que tiene:

$$\lim_{t \to +\infty} (e^{2-t} + 1) = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 1 \quad AH$$

3. a) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{sen(2x)}{tg\ x} & x < 0 \\ \dfrac{k\ (\sqrt{1+x} - 1)}{x} & x > 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(2x)}{tg(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{sen(2x)}{2x} 2x}{\dfrac{tg(x)}{x} x} = 2$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{k(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = k \lim_{x \to 0} \frac{1 + x - 1}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = k \lim_{x \to 0} \frac{x}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{k}{2}$$

Luego para que g tenga una discontinuidad evitable debe existir el límite en x = 0 por lo que los límites laterales deben ser iguales entonces k = 4. Redefinimos la función asignando a x = 0 el valor del límite es decir g(0) = 2.

b)

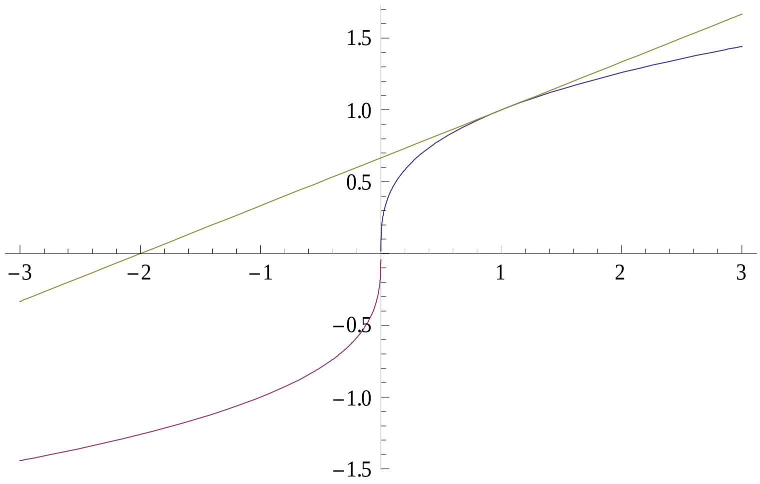
Derivemos f: $f'(x) = \dfrac{1}{3} x^{-2/3} = \dfrac{1}{3x^{2/3}}$

Despejamos y para obtener la pendiente de la recta: $y = \dfrac{1}{3}(x - 6) = \dfrac{x}{3} - 2$ por lo que la pendiente es m = 1/3.

Si queremos punto de tangente paralela a esa recta, planteamos:

$\dfrac{1}{3x^{2/3}} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow x^{2/3} = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ Como pide abscisa positiva elegimos x = 1.

Buscamos la recta tangente: y – 1 = 1/3 (x-1) entonces y = (1/3) x + (2/3)
Graficamos:



a) Calcular la función derivada de $f(x) = x|x-1|$. Graficar f y f ’en un mismo par de ejes cartesianos.

$$f(x) = x|x-1| = \begin{cases} x(x-1) & x \geq 1 \\ -x(x-1) & x < 1 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - x & x \geq 1 \\ -x^2 + x & x < 1 \end{cases}$$

Buscamos f’:

x > 1

$$f'(x) = 2x - 1$$

x < 1

$$f'(x) = -2x + 1$$

x = 1

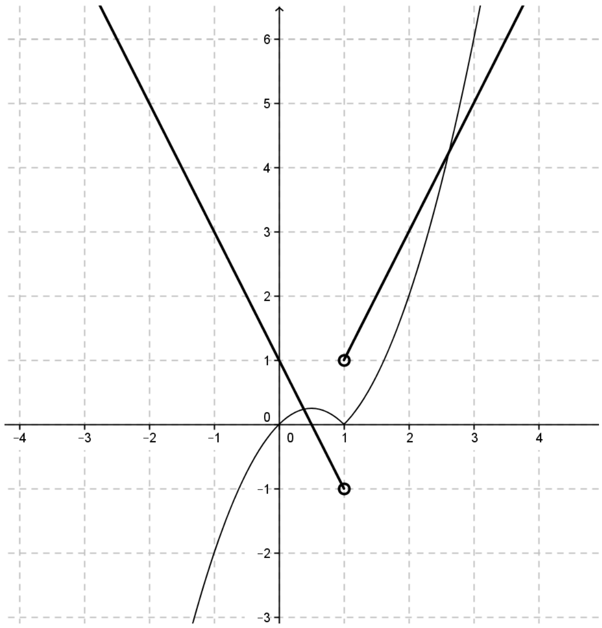
$$f'_{-}(1) = \lim_{x \to 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1-} \frac{-x(x-1)}{x-1} = -1$$

$$f'_{+}(1) = \lim_{x \to 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1+} \frac{x(x-1)}{x-1} = 1$$

Como las derivadas laterales son distintas no existe derivada en x = 1. Luego la función derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x > 1 \\ -2x + 1 & x < 1 \end{cases}$$

Graficamos:



b) ¿Se puede aplicar el teorema de Lagrange a la función $f(x) = \frac{x}{x+1}$ en el intervalo [0,4]? De serlo hallar el punto intermedio c, si no se puede aplicar justificar por qué.

Estudiemos las hipótesis del teorema

Continuidad en [0,4]

a = 0

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{x}{x+1} = 0 = f(0)$$ luego es continua por derecha en a = 0

0 < a < 4

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{x}{x+1} = \frac{a}{a+1} = f(a)$$ luego f es continua en (0,4)

a = 4

$$\lim_{x \to 4-} f(x) = \lim_{x \to 4-} \frac{x}{x+1} = \frac{4}{5} = f(4)$$ luego f es continua por izquierda en a = 4

De las tres consideraciones f es continua en [0,4]

Derivable en (0,4)

$$f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} \quad \forall x \neq -1$$

Luego f es derivable en (0,4)

Entonces, por el teorema de Lagrange existe c en (0,4) tal que:

$$f'(c)=\frac{f(4)-f(0)}{4-0}$$

$$\frac{1}{(c+1)^2}=\frac{\frac{4}{5}-0}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(c+1)^2}=\frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad (c+1)^2=5 \quad \Rightarrow \quad c+1=\pm\sqrt{5} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad c=\pm\sqrt{5}-1$$

El punto que pertenece a (0,4) es $c=\sqrt{5}-1$