Dinámica de Fluidos
UNLaM. Cátedra de Física 1
Primer Cuatrimestre. 2020

Generalidades

Fluidos perfectos

En las unidades anteriores de la materia el protagonismo lo tiene ya sea una partícula puntual o un conjunto de partículas, siendo una de sus características más destacadas la masa. En el caso de los fluidos (gases y líquidos) también es necesario considerar que esa masa puede modificar su volumen ante la presencia de fuerzas externas (esfuerzos de corte). El nuevo objeto de estudio será por lo tanto un elemento de volumen de un fluido, caracterizado ahora por su densidad (y su volumen por supuesto).
En esta parte de la materia se considerarán magnitudes macroscópicas promedio (presión, densidad, etc.) que son el resultado de la interacción entre múltiples partículas discretas. A fin de simplificar el tratamiento de estas interacciones, se trabajará considerando una distribución continua de materia. Por lo tanto, en vez de centrar nuestra descripción en una partícula puntual o un conjunto de partículas discretas, nos centraremos en un *elemento de volumen* de este nuevo sistema continuo, que denominamos fluido.
Los fluidos, ya sean gases o líquidos, son materiales que pueden variar sus volúmenes y que sufren deformaciones cuando se les realiza un esfuerzo cortante (fuerza tangencial por unidad de área).
Además, dejaremos de lado los fluidos reales y nos dedicaremos a los fluidos perfectos o ideales, que son aquellos incompresibles y que no tienen rozamiento interno o viscosidad. La hipótesis de incompresibilidad indica que la densidad será constante e independiente de la posición y del tiempo. Por otro lado, la ausencia de viscosidad sugiere que no hay interacciones entre elementos adyacentes que den lugar a esfuerzos cortantes cuando el fluido se desplaza.

Presión

La presión p, a veces también llamada presión hidrostática, es el resultado macroscópico de la interacción (microscópica) de múltiples colisiones de moléculas entre elementos de fluido adyacentes o entre elementos de fluido y superficies.
La fuerza $\Delta\mathbf{F}$ que un elemento de fluido realiza sobre un elemento adyacente de área ΔA viene dado por la ecuación 1:

$$\Delta F = p\Delta A \quad (1)$$

Si consideramos que todo elemento de superficie ΔA puede ser representado con un vector $\Delta\mathbf{A}$ de dirección perpendicular al elemento, eso significa que los vectores que representan tanto a la fuerza como al área son paralelos, y por lo tanto puede escribirse la presión en términos de la relación escalar (ec. 2):

$$p = \frac{F}{A_{\perp}} \quad (2)$$

La dirección de la fuerza considerada es siempre perpendicular a la superficie, ya que la componente tangencial es la responsable de hacer que el elemento comience a fluir y por lo tanto no puede considerarse en esta descripción.

La presión tiene unidades de fuerza sobre unidades de área. En el Sistema Internacional, se emplea el Pascal, $1N/m^2$. Las equivalencias entre el Pascal y otras unidades comúnmente empleadas pueden consultarse en la guía de ejercicios de la materia.

Densidad

La densidad ρ de un pequeño elemento de cualquier material es la masa Δm dividida su volumen ΔV (ec. 3):

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (3)$$

Si el objeto es homogéneo, es decir, posee la misma densidad para todos los puntos del material que lo conforman, se obtiene la ecuación 4:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (4)$$

Al ser un cociente entre masa y volumen, las unidades asignadas a esta magnitud escalar son kg/m^3, aunque también suelen emplearse g/cm^3.

La densidad del un material dado suele depender de la temperatura y de la presión. En general, la densidad disminuye a medida que se aumenta la temperatura, ya que aumenta la movilidad de las moléculas que conforman el material y su volumen también crece. Una de las excepciones más conocidas a este comportamiento es el agua, cuya densidad en estado líquido (1000 kg/m^3) es mayor a la del estado sólido (917 kg/m^3), lo que trae innumerables ventajas a los sistemas biológicos.

Para los fines prácticos de este curso, la densidad de líquidos y sólidos varía muy poco para grandes intervalos de presión y temperatura y por lo tanto pueden considerarse como incompresibles. Para los gases, sin embargo, el volumen se relaciona de manera directa con la temperatura y de manera indirecta con la presión (bajo la hipótesis de gas ideal), con lo cual el rango de densidad constante debe ser revisado cuidadosamente.

La densidad relativa, ρ_r, se define como la densidad de cierto material x sobre la densidad de una sustancia de referencia, que suele ser el agua pura (ec. 5).

$$\rho_{rx} = \frac{\rho_x}{\rho_{H_2 0}} \quad (5)$$

1. Hidroestática

En esta sección se realizará el estudio del comportamiento de los fluidos en reposo.

1.1 Teorema General de la Hidrostática

Comencemos estudiando las fuerzas a las que está sometido un elemento de fluido de área A y espesor dy, que se encuentra en equilibrio a una altura y por sobre el fondo del recipiente (Fig. 1a)). El objetivo de esta inspección es estudiar la dependencia de la presión con la altura.
En la Fig. 1 b) puede observarse que las fuerzas externas actuantes son: una fuerza de abajo arriba de magnitud pA, debido a presión ejercida por el fluido que se encuentra debajo de la cara inferior del elemento, una fuerza (p+dp)A con sentido arriba abajo debido al fluido por sobre la cara superior del elemento , el peso de elemento y fuerzas laterales sobre sus distintas caras.

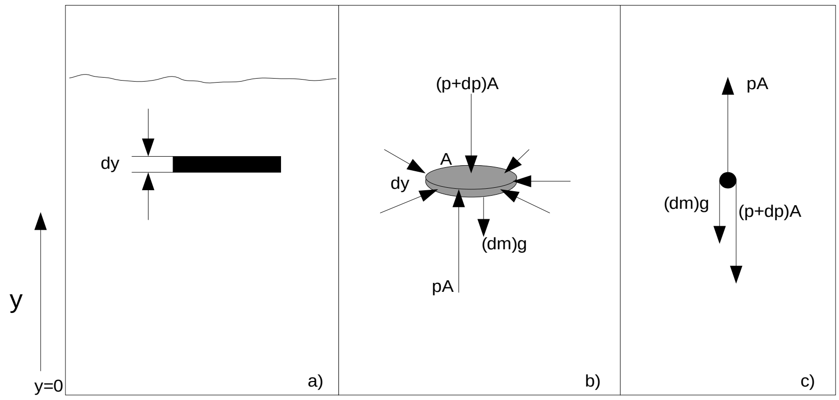


Figura 1: a) Elemento de fluido en reposo. b) Fuerzas actuando sobre el elemento. c) Diagrama de cuerpo libre del elemento.

Dichas fuerzas laterales (horizontales) provienen de las interacciones del elemento con el fluido circundante y ya que el elemento se encuentra en equilibrio, se cancelan mutuamente. El diagrama de cuerpo libre final se muestra en la Fig. 1c).
La ecuación (6) muestra la sumatoria de fuerzas en la dirección vertical:

$$\sum F_y = pA - (p + dp)A - \rho g A dy = 0 \quad (6)$$

que puede reordenarse para evidenciar la relación entre la variación de la presión con la altura (ec. 7):

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g \quad (7)$$

el término ρg puede considerarse constante para los líquidos, si se considera que son casi incompresibles y por lo tanto su densidad es constante. Por otro lado, la variación de g con la altura suele ser despreciable para la mayoría de las situaciones cotidianas.
Para la integración de la ec. (7) se separarán las variables presión y altura y se considerarán presiones arbitrarias p_2 y p_1 y una diferencia de altura también aleatoria y_2-y_1. La integral queda entonces (ec. 8):

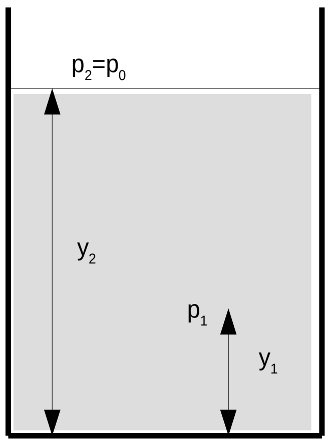
$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\int_{y_1}^{y_2} \rho g dp \quad (8)$$

de donde se obtiene la siguiente expresión (ec. 9):

$$p_2 - p_1 = -\rho g(y_2 - y_1) \quad (9)$$

que es la expresión más general del Teorema Fundamental de la Hidrostática para un líquido homogéneo.
Dicha expresión indica que la presión crece a medida que descendemos hacia el fondo del recipiente, o lo que es equivalente, a medida que aumenta la columna de líquido por sobre el elemento de fluido.

Tomemos como ejemplo un recipiente con uno de sus extremos abierto, como se muestra en la Fig. 2. El extremo superior está sometido a la presión atmosférica, que llamaremos p_o y se encuentra a una altura y_2. Un punto intermedio, con altura y_1, soporta una presión p_1. Si tomamos $h= y_2-y_1$, la dependencia de la presión $p_1=p$ viene dada por la ecuación (10):



$$p = p_0 + \rho g h \quad (10)$$

Figura 2: Recipiente con un líquido que posee una superficie superior libre.

que es una expresión general para un punto cualquiera ubicado a una altura h de la superficie libre de la masa de fluido.

1.2 Teorema de Pascal

El teorema de Pascal indica que l*a presión aplicada a un fluido confinado se transmite íntegramente a todas las partes del fluido y a las paredes del recipiente que lo contiene*.
Entonces, un cambio de presión aplicado a un punto de un fluido confinado y en reposo, deberá transmitirse sin alteración a través de todo el fluido. Esto significa que la presión será igual en todas las direcciones y actuará mediante fuerzas perpendiculares a las paredes que lo contienen.

En la Fig. 3 se muestra un dispositivo que suele emplearse para levantar objetos pesados, como automóviles u otros objetos de gran tamaño y se conoce como Prensa Hidráulica. Sobre un pistón o émbolo de área A_1 se ejerce una fuerza (externa) F_1. Del otro lado de la prensa, el objeto de masa M ejerce una fuerza Mg sobre un émbolo de área A_0. El objeto se encuentra en equilibrio gracias al empuje E que realiza el fluido sobre el émbolo.

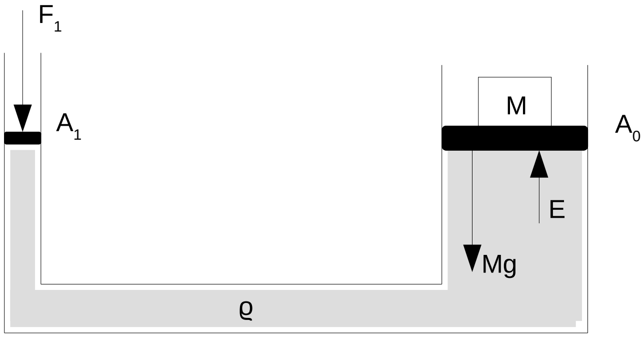


Figura 3: prensa hidráulica. Se aplica una fuerza F_i para provocar una reacción E y levantar un objeto masivo M.

Debido al principio de Pascal, la presión $P_i=F_i/A_i$ sobre el émbolo pequeño debe ser igual a la presión $P_0=F_0/A_0$ sobre el émbolo grande, obteniéndose de esta manera la ecuación 11:

$$\frac{F_i}{A_i}=\frac{F_0}{A_0} \quad (11)$$

Al reordenar la ecuación, se consigue la expresión de la fuerza externa F_i que debe realizarse para levantar el objeto pesado.

$$F_i = F_0\frac{A_i}{A_0} = Mg\frac{A_i}{A_0} \quad (12)$$

De esta manera, la aplicación de una fuerza F_i relativamente pequeña, pude emplearse para elevar un objeto de gran tamaño.

1.3 Principio de Arquímedes:

Se define como empuje a la fuerza que un líquido ejerce sobre un cuerpo. Si el cuerpo se encuentra en reposo, el empuje E (también llamado fuerza de flotación) viene dado por la ecuación (13):

$$E = \rho_{liq} g V_{sum} \quad (13)$$

donde ρ_{liq} es la densidad del líquido y V_{sum} es el volumen del cuerpo que se encuentra sumergido dentro del líquido.

El Teorema de Arquímedes indica que t*odo cuerpo total o parcialmente sumergido en un fluido sufre un empuje de abajo arriba por una fuerza de magnitud igual a la del peso de fluido que desaloja*.

Por esta razón, en la definición de E se considera solo el volumen de cuerpo sumergido y no su volumen total.

Para comprender el efecto de este teorema, basta con llenar con agua un recipiente hasta su borde superior y tratar de introducir un objeto en él: la cantidad de líquido derramada será igual al volumen del objeto introducido. Ejemplos cotidianos de este suceso se observan al agregar cubos de hielo a un vaso con alguna bebida o al introducirnos en una bañadera con un nivel de agua cercano a su nivel superior.

Este principio puede ser empleado para obtener ya sea densidades relativas (si se conocen los volúmenes) o volúmenes (si se conocen las densidades). Un típico ejemplo es calcular el porcentaje del volumen de un iceberg que está expuesta por sobre el nivel del agua (Problema 7.11), considerando que la densidad del hielo es de 917 kg/m³.
Ya que el iceberg se encuentra en reposo, el principio de Arquímedes permite calcular el empuje sobre el volumen sumergido (V_{sum}), que es igual al peso de la masa completa del iceberg (ec. 13). La masa puede ser expresada en términos de la densidad del iceberg (ρ_i) y el volumen total (V_i) del iceberg, con lo que se obtiene la ec. (14):

$$\rho_{agua} g V_{sum} = \rho_i V_i g \quad (14)$$

La relación entre el volumen sumergido y el volumen total resulta (ec. 15)

$$\frac{V_{sum}}{V_i} = \frac{\rho_i}{\rho_{agua}} = 0{,}917 \Rightarrow 91{,}7\% \quad (15)$$

Esto significa que el volumen expuesto del iceberg es solo el 8,3 % de su volumen total, explicando por qué su presencia en las rutas navieras representa un peligro.

1. 4 Presión atmosférica

Lo que conocemos como presión atmosférica es el resultado del peso de la masa de aire atmosférica sobre la superficie de la Tierra. Para la mayoría de los gases, su densidad es pequeña y la diferencia de presión puede considerarse nula para dos puntos muy próximos. Sin embargo, esta diferencia puede variar drásticamente para diferencias de altura considerables.
Ya que la densidad de los gases también varía con la altura (y con la temperatura), para encontrar la dependencia de la presión con la altura *p(y)* hay que conocer de antemano ρ(y). Para simplificar la deducción, se considera una temperatura constante y una relación de proporcionalidad de la densidad con la presión. También se considerará un valor de g constante e independiente de la altura.
Partiendo de la ec. (7) y considerando la relación entre ρ y p (ec. 16):

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0} \quad (16)$$

para la cual ρ_0 y p_0 son la densidad y la presión del aire, respectivamente, sobre la superficie de la Tierra (nivel del mar). Se obtiene entonces:

$$\frac{dp}{dy} = -g\rho_0 \frac{p}{p_0} \quad (17)$$

que puede reordenarse para dar lugar a la ecuación 18:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g\rho_0}{p_0} dy \quad (18)$$

Los límites de integración se toman entre la presión superficial p_0 y la final p y entre la altura inicial nula $y=0$ y la altura final y.

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = -\int_{0}^{y} \frac{g\rho_0}{p_0} dy \quad (19)$$

Luego de integrar y reemplazar, nos queda la ecuación 20:

$$\ln \frac{p_0}{p} = -\frac{g\rho_0}{p_0} y \quad (20)$$

Al despejar la presión en función de la altura, obtenemos la expresión final (ec.21):

$$p(y) = p_0 e^{-(g\rho_0/p_0)y} \quad (21)$$

Un cálculo aproximado indica que la presión atmosférica decae en un factor de 10 cuando la altura cambia aproximadamente 20 km, lo que explica de manera simplificada por qué es muy difícil la respiración humana en montañas de gran altitud y por qué es necesario presurizar las cabinas de los aviones.

2 Hidrodinámica

En este apartado, se estudiará cómo es posible describir y caracterizar el movimiento de un elemento de fluido ideal. Las hipótesis de trabajo indican que el flujo considerado será siempre:

- Estacionario: la velocidad y la densidad en un punto determinado no dependen del tiempo, pudiendo tomar diferentes valores en puntos distintos.
- Incompresible: la densidad no varía.
- Laminar: el flujo es perfectamente ordenado, estratificado y suave, de forma tal que el fluido se mueve en láminas paralelas sin entremezclarse. Las capas adyacentes del fluido se deslizan suavemente entre sí.
- No viscoso: cuando las fuerzas de rozamiento son muy pequeñas o pueden ser despreciadas, lo que implica que no existen fuerzas tangenciales entre capas de fluido en movimiento y no hay disipación de energía mecánica.
- Irrotacional: cuando el elemento del fluido en un punto dado no tiene una velocidad angular neta alrededor de dicho punto y por lo tanto no se forman remolinos.

2.1 Líneas de corriente y Ecuación de continuidad

Para un flujo estacionario, cada elemento de fluido que pasa por un determinado punto lo hace con la misma velocidad que todas las partículas que pasaron antes por ese mismo punto. Eso significa, que la velocidad v_p de todo elemento de fluido que pase por el punto P será la misma (Fig. 3). A su vez, cada elemento de fluido que pase por Q y por R experimentará velocidades v_Q y v_R respectivamente. El movimiento de cada elemento que pase por un punto determinado será el mismo, y este fenómeno es lo que define una *línea de corriente*. Si bien tanto la magnitud como la dirección del vector velocidad pueden variar a lo largo de una línea de corriente, dicho vector será siempre tangente a la línea de corriente.

Las líneas de corriente no pueden cruzarse entre sí: esto implicaría que un elemento que llegase a una intersección tendría dos caminos posibles, y esto contradice la hipótesis de flujo estacionario.

Si se toma un haz compuesto de múltiples líneas de corriente, se obtiene un *tubo de flujo*. Para este tubo, la frontera está formada por líneas de corriente y puesto que los elementos de fluido no pueden seguir otra trayectoria, se considera que no existen fuentes que agreguen elementos adicionales al tubo, así como tampoco sumideros donde los elementos queden retenidos.

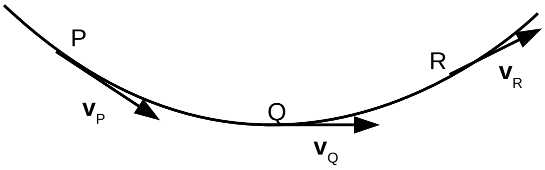


Figura 3: Línea de corriente indicando los puntos P, Q y R y sus respectivas velocidades, tangentes a dicha línea.

En la Fig. 4 se muestra un tubo de flujo, conformado por varias líneas de corriente. El fluido que entra a la sección P del tubo de flujo atraviesa un área transversal A_1, y abandona el tubo en R, atravesando un área transversal A_2.

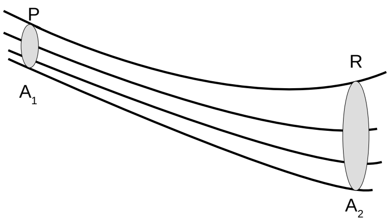


Figura 4: Tubo de flujo de sección transversal A_1 en P y A_2 en R.

En el punto P una partícula de fluido posee una velocidad v_1, mientras que la velocidad es v_2 al pasar por R. Un elemento de fluido recorre, en un intervalo temporal Δt, una distancia que puede aproximarse como $v\Delta t$. Eso significa que dicho elemento tendrá un volumen aproximado de $A_1 v_1 \Delta t$ al pasar por P y un volumen $A_2 v_2 \Delta t$ al pasar por R. Si la densidad en esos puntos es respectivamente, la masa Δm_1 del fluido en P viene dado por la ecuación 22:

$$\Delta m_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t \quad (22)$$

Se denomina *flujo de masa* a la masa del fluido por unidad de tiempo $\Delta m/\Delta t$, que atraviesa el área A_1. Si se hace tender Δt a cero, ni el área ni la velocidad cambian significativamente durante la distancia viajada y el flujo de masa viene dado por la ecuación 23:

$$\rho_1 A_1 v_1 \quad (23)$$

Un análisis similar puede realizarse en el punto R.
Bajo la hipótesis que no existen ni fuentes ni sumideros que puedan contribuir o restar material al flujo, el flujo en cualquier punto del tubo debe conservarse, lo que implica :

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \quad (24)$$

Al ser la densidad una constante del fluido, obtenemos la ecuación 25:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (25)$$

que se conoce como *Ley de Conservación de la Masa* o *Ecuación de Continuidad* e implica que la cantidad Av es constante, para cualquier punto del tubo de flujo. Esta relación entre la sección

transversal y a velocidad indica que, si por ejemplo, la sección de una cañería se angosta la velocidad debe aumentar, ya que la cantidad de fluido circulante es la misma en ambos sectores.
A la cantidad Av se la denomina caudal Q, y posee unidades de volumen por unidad de tiempo (m^3/s en el S.I).

2.2 Teorema de Bernoulli

A grandes rasgos el Teorema de Bernoulli es el resultado de aplicar conceptos tradicionales de la Mecánica Clásica a la descripción de los fluidos en movimiento.
Para dicha descripción, es necesario considerar que el flujo del fluido perfecto es:

- estacionario
- incompresible
- laminar
- no viscoso
- irrotacional

En la Fig. 5a se muestra un elemento de fluido de masa Δm dentro de una tubería cerrada de sección A_1 y elevación y_1 respecto a cierto nivel de referencia. La tubería se eleva y se ensancha, de manera que en otro sector posee una sección A_1 y está a una altura y_2.
Un elemento de fluido se encuentra en la primera sección, en donde experimenta una presión p_1 y en la cual adquiere una velocidad v_1. Luego de cierto tiempo, habrá alcanzado la segunda sección, con presión y velocidad p_2 y v_2 respectivamente.

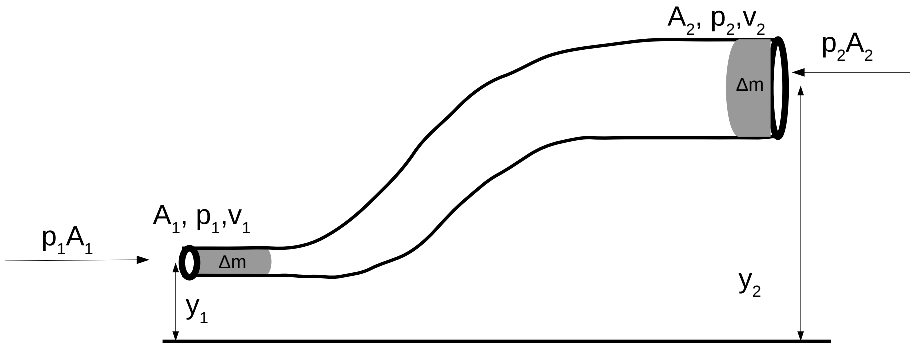


Figura 5: Un elemento de fluido Δm se traslada de izquierda a derecha dentro de una tubería.

El Teorema de las Fuerzas Vivas establece que el trabajo de las fuerzas resultantes (externas) es igual a la variación de la energía cinética. Ya que el flujo es considerado no viscoso, las únicas fuerzas que actúan sobre el elemento de fluido son las asociadas a las presiones p_1A_1 y p_2A_2, que actúan en los extremos del tubo cuando el elemento se desplaza distancias Δl_1 y Δl_2, y el peso.
El trabajo total entonces puede escribirse como (ec. 26):

$$W = p_1 A_1 \Delta l_1 - p_2 A_2 \Delta l_2 - \Delta m g (y_2 - y_1) \quad (26)$$

El volumen del elemento de fluido es constante a lo largo de todo el movimiento dentro de la tubería, por lo que $A_1\Delta l_1 = A_2\,\Delta l_2 = \Delta m/\rho$, lo que permite escribir el trabajo como (ec. 27):

$$W = (p_1 - p_2)(\Delta m / \rho) - \Delta m g (y_2 - y_1) \quad (27)$$

La energía cinética del elemento de fluido puede escribirse como (ec. 28):

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}\Delta m v_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m v_1^2 \quad (28)$$

Con lo que el teorema de las fuerzas vivas resulta (ec. 29):

$$(p_1 - p_2)(\Delta m / \rho) - \Delta m g (y_2 - y_1) = \frac{1}{2}\Delta m v_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m v_1^2 \quad (29)$$

que puede reordenarse en la ecuación 30:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 \quad (30)$$

que es la *Ecuación de Bernoulli* para flujos estacionarios, incompresibles, no rotatorios y no viscosos. Cabe destacar, que esta ecuación posee unidades de presión, y no de energía, lo que suele servir para chequear que cada uno de los términos esté correctamente escrito.

Esta ecuación también suele expresarse como una cantidad conservada (ec.31), en clara alusión a la conservación de la energía mecánica:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = cte \quad (31)$$

Los términos p y ρgh suelen asociarse en la denominada *presión estática*, mientras que $1/2\rho v^2$ se conoce como *presión dinámica*. De hecho, al considerar un fluido en reposo (v=0) con una diferencia de altura entre secciones y al anularse el término dinámico en la ec. (30), se recupera el resultado (9) de la sección de Hidrostática.

2.3 Viscosidad

La viscosidad está relacionada con la oposición de un fluido a las deformaciones tangenciales, en las que se produce rozamiento entre las distintas partes del fluido.

En la Fig. 6 se muestran dos placas separadas una distancia D, que alojan un fluido viscoso. La placa inferior se encuentra en reposo mientras que la superior está siendo impulsada por una fuerza tangencial **F**, lo que provoca un esfuerzo de corte. Si se considera al fluido como formado por láminas de espesor dy, cada lámina con un movimiento limitado por las láminas con las que está en contacto. Esta resistencia al flujo es lo que origina un perfil de velocidades que va de cero en placa fija hasta una velocidad máxima en la placa superior, con velocidades intermedias para las láminas.

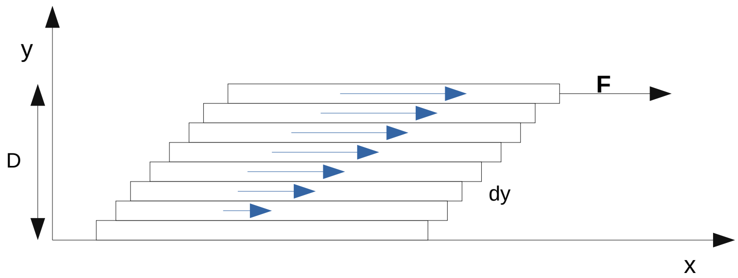


Figura 6: Un fluido viscoso atrapado entre dos placas planas, separadas una distancia D, pequeña en comparación con el área de las placas. La placa inferior está en reposo y la superior se mueve gracias a una fuerza **F**. Fas flechas indican la velocidad de cada lámina de fluido.

De manera general, un sólido responderá frente a un esfuerzo F/A con un cambio en su forma (deformación). El fluido no puede reaccionar de esa forma y por lo tanto manifiesta el resultado de esa interacción como una variación de su velocidad dv a través de cada capa dy. La razón entre el esfuerzo y la deformación del fluido se conoce como coeficiente de viscosidad η (ec. 32):

$$\eta = \frac{F/A}{dv/dy} \quad (32)$$

Los efectos de la viscosidad cobran gran visibilidad en una variedad de aplicaciones ingenieriles. Por ejemplo, dentro de una tubería las capas de fluido en contacto con la pared del caño se mueven más lentamente que aquellas en el centro, obteniéndose un perfil de velocidades similar al mostrado en la Fig. 6. Por otro lado, asegurar y mantener el movimiento de fluidos viscosos por largos trayectos implica un gasto de energía mecánica y la necesidad de emplear bombas hidráulicas que impulsen el fluido.
Para fluidos viscosos, la Ecuación de Bernoulli debe ser modificada, para incorporar un término que suele llamarse *pérdida de carga* y que remite justamente a la *pérdida* de energía mecánica.

3 Ejercicios Resueltos

3.1 Hidrostática

7.6 Un depósito cúbico de L=3 m de lado está lleno de agua. Calcule la fuerza que se ejerce sobre el fondo y sobre una de las caras laterales [Rta.: 264600 N y 132300 N]

En la Fig. 7 se muestra un esquema de las distintas presiones que actúan sobre una cara lateral y sobre el fondo del depósito.

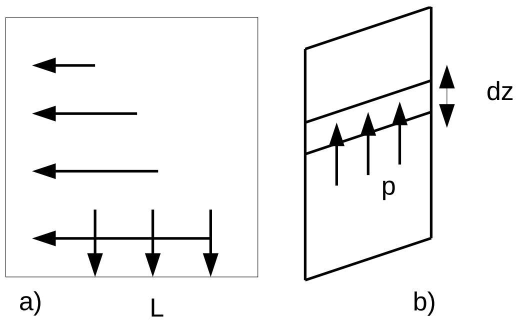


Figura 7: a) las flechas indican las fuerzas que se ejercen sobre las caras laterales y sobre el fondo de un depósito cúbico de lado L. b)Presión ejercida sobre el fluido sobre un sector Ldz de la cara lateral.

Ya sabemos que la fuerza sobre el fondo del depósito será constante y corresponde al peso de una columna agua de altura L (p_0=0 ya que el recipiente está lleno de agua).

$$F_{fondo} = p_{fondo}L^2 = (p_0 + \rho g L)L^2 = \rho g L^3$$

Para las caras laterales, la fuerza depende de la presión, que a su vez depende de la posición. SI se toma una sección pequeña de la cara lateral, de área Ldz, la fuerza sobre ls caras laterales viene dada por:

$$F_{cara} = \int_0^L p(z)Ldz = \int_0^L \rho g z L dz = \frac{\rho g L^3}{2}$$

Por lo tanto,

$$F_{fondo} = 2F_{cara}$$

7.8 En el tubo de la figura se coloca agua en una rama y aceite (de menor densidad que el agua) en la otra rama. ¿Cuál es la densidad del aceite?. [Rta. ρ_{ac}: 0,9 g/cm^3 = 900Kg/m^3]

En la Fig. 8 se muestra un tubo con dos líquidos inmiscibles. Este dispositivo es un ejemplo de manómetro simple. Ya que los puntos A y B están a la misma altura y esa parte del tubo contiene un único líquido, las presiones en esos puntos deben ser iguales.

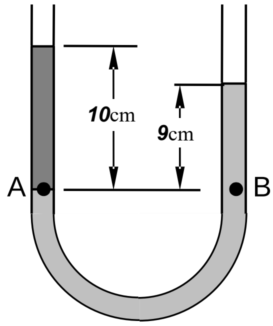


Figura 8: Tubo que contiene dos líquidos inmiscibles: agua (gris claro, rama derecha) y aceite (gris oscuro, rama izquierda)

La presión en la rama A se debe a la presencia de la columna de 10 cm de aceite más la contribución de la presión atmosférica p_0. La presión de la rama B es el resultado de los 9 cm de agua más p_0. Ya que la presión atmosférica se encuentra en ambos miembros se cancelará

$$\rho_{ac} g h_{ac} = \rho_{H_2O} g h_{H_2O}$$

Reemplazando con los datos del problema, se obtiene el valor de densidad del aceite ρ_{ac}:

$$\rho_{ac} = \rho_{H_2O} \frac{h_{H_2O}}{h_{ac}} = 900 Kg/m^3$$

7.10 Un trozo de una aleación de aluminio y oro tiene una masa de 5 kg. Al sumergirlo en agua suspendido de un dinamómetro, la lectura de la escala indica el peso correspondiente a una masa de 4 kg. Calcule las masas respectivas de oro y aluminio de la aleación, sabiendo que la densidad relativa del oro es ρ_{rAu} = 19,3 y la del aluminio es ρ_{rAl} = 2,5. [Rta.:2,87 kg de oro y 2,13 kg de Al]

El trozo de aleación tiene una masa total

$$m_{total} = m_{Au} + m_{AL} = 5Kg \quad (1)$$

que puede expresarse en función de las densidades y los volúmenes individuales del aluminio y del oro.

$$m_{total} = \rho_{Au} V_{Au} + \rho_{Al} V_{Al} \quad (2)$$

De la misma manera, el volumen total será la suma de los volúmenes individuales

$$V_{total} = V_{Au} + V_{Al} \quad (3)$$

El peso indicado por el dinamómetro corresponde al de una masa de 4kg, lo que significa que el empuje del agua contrarresta el peso de 1kg de aleación y esa relación puede escribirse como

$$empuje = 1N = \rho_{H_2O} g V_{total} = m_{total} g \quad (4)$$

De combinar las ecuaciones (2) y (3) y reemplazarlas en (4), se obtiene la ecuación (5)

$$1N = \rho_{H_2O} g \left[\frac{m_{Au}}{\rho_{Au}} + \frac{m_{total} - m_{Au}}{\rho_{Al}} \right] = g \left[\frac{m_{Au}}{\rho_{rAu}} + \frac{m_{total} - m_{Au}}{\rho r_{Al}} \right] \quad (5)$$

de donde se puede despejar la masa del oro

$$m_{Au} = \frac{1N/g - m_{total}/\rho r_{Al}}{1/\rho_{rAu} - 1/\rho_{rAl}} = 2.87Kg$$

y reemplazando ese valor en la ecuación (1), es posible hallar la masa del aluminio

$$m_{Al} = 5Kg - 2.87Kg = 2.13Kg$$

7.12 Un cajón rectangular de madera de 60 kg flota en H_2O. Al agregar un cuerpo de 50 kg se hunde 3 cm más en el agua. Calcule: a) El volumen de H_2O que desplaza el cajón al ser apoyado vacío en el agua. b) El área de la sección transversal del cajón. ρ_{Agua} = 1g/cm^3=10^{-3} kg/cm^3 [Rta: a) 0,060 m^3 b)1,667 m^2]

La parte del cajón que se encuentra sumergida posee un volumen

$$V_{sumergido} = AL \quad (1)$$

Ya que se encuentra en reposo, el empuje es igual al peso del cajón completo

$$\rho_{H_2O} gAL = m_{cajón} g \quad (2)$$

Al agregar una masa m, el cajón se hunde 3 cm, con lo que el volumen sumergido es ahora A(L+3) y el peso total aumenta al considerar la masa total $m_{cajón}$+m. Así

$$\rho_{H_2O} gA(L+3) = (m_{cajón} + m)g \quad (3)$$

De realizar el cociente entre (2) y (3) se obtiene:

$$\frac{AL}{A(L+3)} = \frac{m_{cajón}}{m_{cajón} + m} \quad (4)$$

Entonces, es posible hallar L

$$L = \frac{3m_{cajón}}{m} = 3.6cm \quad (5)$$

y de igual manera el volumen sumergido (equivalente al volumen de líquido desplazado) y también la sección transversal del cajón.

$$V_{sumergido} = AL = m_{cajón} / \rho_{H_2O} = 0.06m^3 \quad (6)$$

$$A = 1.66m^2$$

3.2 Hidrodinámica

7.17 Una tubería horizontal de 15 cm de diámetro tiene un estrechamiento de 7,5 cm de diámetro. Si por ella circula agua y la velocidad en la tubería es de 1,2 m/s, calcule: a) la velocidad en el estrechamiento; b) el caudal y c) la diferencia de presión entre ambas secciones. [Rta: a) V_2= 4,8 m/s; b) Q= 0,0212 m^3/s; c) Δp= 10800 Pa]

El caudal puede calcularse empleando su definición, ya que conocemos tanto el área como la velocidad. En uno de los puntos de la tubería. Así

$$Q = A_1 v_1 = 0{,}0212 m^3 / s$$

Por otro lado, la velocidad en el estrechamiento puede calcularse mediante la ecuación de continuidad, ya que se conocen ambas secciones y la velocidad antes del estrechamiento. De manera equivalente, al conocer el caudal y el área en el estrechamiento, puede despejarse la velocidad directamente

$$v_2 = \frac{Q}{A_2} = 4{,}8 m / s$$

Por otro lado, ya que el enunciado del problema indica que la tubería es horizontal (lo cual es difícil de imaginar debido al cambio de sección), habrá que desechar el término ρgh de la ecuación de Bernoulli. Al aplicar dicha ecuación para ambos puntos de la tubería es posible averiguar la diferencia de presión entre ambas secciones

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) = 10.800 Pa$$