Universidad Nacional de La Matanza
Departamento de Ingeniería e
Investigaciones Tecnológicas.

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA II (1032)

GUÍA DE ACTIVIDADES TEÓRICO-PRÁCTICAS CON APLICACIONES.

Coordinadora de materia: Dra. Marcela C. Falsetti

Bibliografía básica de consulta para la asignatura.

- Hernández, E. *Álgebra y Geometría.* Addison Wesley/Universidad Autónoma de Madrid. Segunda Edición. USA. 1994
- Poole, D. *Álgebra Lineal. Una introducción moderna.* Thomson. Mexico. 2004.
- Lay, David C. *Álgebra Lineal y sus aplicaciones.* Pearson - Addison Wesley. Mexico. 2007

Presentación

0.1 Generalidades de la Asignatura.

La asignatura Álgebra y Geometría Analítica II (1032) se desarrolla sobre lo aprendido en la asignatura Álgebra y Geometría Analítica I pero rápidamente toma nuevos rumbos hacia el desarrollo de nociones importantes por sus aplicaciones a la ciencia y la tecnología. Los principales temas de esta asignatura son:

1. Cambio de coordenadas. Matriz de cambio de coordenadas.
2. Transformaciones lineales entre espacios vectoriales y su representación matricial
3. Autovalores y autovectores. Diagonalización de matrices.
4. Espacios con producto interno. Ortogonalización y Proyección ortogonal.
5. Diagonalización de matrices simétricas.

Los mismos están intimamente relacionados entre sí y se desarrollan en forma incluyente, no en forma segmentada. Es indiscutible el papel que juegan hoy estos temas en aplicaciones tecnológicas como: el procesamiento de señales, las bases de datos, los sistemas dinámicos, informática, entre otras, y sin duda en otras ramas de la Matemática pura como la Geometría Analítica. Entre los temas de Geometría encarados figuran:

1. Transformaciones Lineales geométricas.
2. Cónicas.

Se intenta en esta asignatura desarrollar los temas con la profundidad necesaria para que el estudiante pueda usarlos flexible y creativamente y no como "cajas negras" indesarmables en futuras aplicaciones y especialmente en asignaturas superiores que desarrollen dichas aplicaciones. Se trata en el desarrollo de la materia de no perder de vista el diálogo entre lo formativo del conocimiento matemático en sí mediante el abordaje de situaciones problemáticas, el manejo reflexivo de la información y las aplicaciones a otras ramas del saber.

Carga horaria

En su versin cuatrimestral, la carga horaria de la asignatura es de 4 horas reloj semanales de clase en 16 semanas que dura el cuatrimestre, haciendo un total de 64 horas. Se sugiere que el estudiante disponga de por lo menos 4 a 8 horas semanales fuera de clase para el estudio de los temas esta asignatura.

Clases de consulta.

Sólo para los cursos cuatrimestrales, se cuenta con clases de consulta los días miércoles por la tarde y sábados por la tarde en los que se atienden dudas y se desarrollan ejercicios prácticos.

Evaluación

El régimen de regularización y de aprobación de la asignatura es el que rige para toda la UNLAM. Las instancias de evaluación son:

- Dos exámenes parciales que se califican y un sólo recuperatorio.
- Dos trabajos prácticos obligatorios que se acreditan con la condición de aprobado o desaprobado.

0.2 Cómo usar la guía de actividades.

Se trata de una guía pensada para que las definiciones, propiedades y relaciones matemáticas surjan a partir de la realización de las actividades propuestas. Es decir que el desarrollo teórico está muy ligado a la práctica, las respuestas a los ejercicios aportan a la formulación o profundización de alguna noción teórica. Se trata además de una guía secuenciada de modo que un lector inquieto e independiente podría por su cuenta ir encarando algunas actividades con la ayuda de los libros propuestos. De este modo las clases resultarían ampliatorias y en lugar de que el estudiante tenga un rol pasivo en ellas podría plantear sus dudas y reflexiones personales, participar de mayor intercambio con compañeros y con los profesores.

Las actividades son de tipo constructivas desde el punto de vista del conocimiento, invitan a:

- Relacionar distintas nociones que se aprenden en la asignatura e incluso otras nociones matemáticas.
- Pasar de lo general a lo particular y viceversa.
- Profundizar conceptos.
- Usar flexiblemente objetos matemáticos de distinta índole encontrando los patrones comunes entre ellos.
- Pasar flexiblemente de los objetos pertenecientes a un espacio vectorial de dimensión finita (transformaciones,productos internos, polinomios, funciones, etc.) a su representación matricial para trabajar con álgebra de matrices.
- Reflexionar sobre el modo en que se construye el conocimiento matemático específico de esta asignatura y sobre cómo se aplica en distintas ramas de saber.

En este sentido el estudiante debe estar dispuesto a tratar de razonar, asociar y relacionar y estar atento a los aportes, técnicos y teóricos, que cada actividad le deja y no empecinarse en reducir el asunto a manipulacin de fórmulas o "recetas.

Ineludiblemente en Álgebra Lineal abunda la notación matemática pero la misma debe ir siempre acompañada de la palabra, del lenguaje coloquial, para construir mejor los significados y la red de relaciones necesaria para soportar el conocimiento. Por eso es que en la guía figuran muchas preguntas conceptuales que el alumno no debe pasar por alto sino responder por escrito en forma completa, prolija y justificada.

Las actividades se dividen en ejercicios y problemas, preguntas, aplicaciones de los temas y ejercicios adicionales. Muchas de ellas actividades se realizarán en clase con la orientación y explicación del profesor en forma dialogada con los alumnos. Los alumnos contarán con la orientación necesaria para encarar las actividades que no se realicen en la clase, por lo que es responsabilidad del alumno encarar y resolver las actividades que no se desarrollen en la clase, especialmente los ejercicios adicionales. Los alumnos contarán con los espacios de la clase destinados a consultas así como las clases de consulta para el caso de los cursos cuatrimestrales. **Todo** el contenido de esta guía es material de aprendizaje y por lo tanto es insumo para la evaluación.

Dra. Marcela C. Falsetti

1 Espacios vectoriales - Base - Subespacios.

1. Indicar si $(V, +, K, \cdot)$ es un espacio vectorial en cada uno de los siguientes casos.
   (a) $V = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$, con la suma usual de pares ordenados y el producto por un escalar se define: $k \cdot (x_1, x_2) = (kx_1, x_2)$.
   (b) $V = \{M \in \mathbb{R}^{n\times n} : M$ es simétrica$\}$, $K = \mathbb{R}$ con la suma usual de matrices y el producto de un número por una matriz que multiplica el número por cada término de la matriz.
   (c) $V = P_2(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1X + a_2X^2 :$ con $a_0 \in \mathbb{R}, a_1 \in \mathbb{R}, a_2 \in \mathbb{R}\}$
   (d) Dado $I \neq \emptyset$, $V = \mathcal{F}_I^{\mathbb{R}} = \{f : I \to \mathbb{R} : f$ es una función$\}$, $K = \mathbb{R}$, con las operaciones: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$. (A este espacio vectorial también se lo nota $I^{\mathbb{R}}$)

2. Dado el conjunto $B = \{(1, 1), (2, 0), (-1, 1)\}$
   (a) Indicar si B es un conjunto de generadores de $(\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R}, \cdot)$.
   (b) En caso afirmativo escribir a $v = \left(2, \frac{3}{4}\right)$ como combinación lineal de los vectores de B.
   (c) Dar si es posible un subconjunto $B' \subset B$ tal que B' sea base de $\mathbb{R}^2$.
   (d) En la base B' elegida, hallar las coordenadas de $v = \left(2, \frac{3}{4}\right)$. Mostrarlo gráficamente
   (e) En la base B' elegida dar las coordenadas de cualquier vector (x, y).

3. Dado el conjunto $B = \left\{(1, 1, -2), (2, 0, 1), (1, 1, 0), \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)\right\}$
   (a) Indicar si B es un conjunto de generadores de $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$.
   (b) En caso afirmativo escribir a $v = \left(-1, 2, \frac{3}{4}\right)$ como combinación lineal de los vectores de B. Mostrarlo gráficamente.
   (c) Dar si es posible un subconjunto $B' \subset B$ tal que B' sea base de $\mathbb{R}^3$.
   (d) En la base B' elegida, hallar las coordenadas de $v = \left(-1, 2, \frac{3}{4}\right)$ y luego de cualquier vector genérico (x, y, z).

4. En base a la definición de conjunto generador de un espacio vectorial, dar un criterio operativo que sirva para decidir cuándo un conjunto de vectores es generador del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$.

5. Para cada uno de los siguientes conjuntos W, se pide:
   (a) Si $W \subset \mathbb{R}^2$ o $W \subset \mathbb{R}^3$, dar una interpretación geométrica de W.
   (b) Indicar si W es subespacio en cada caso.
   (c) En caso de que W sea subespacio, hallar una base y la dimensión del mismo cuando sea posible.
      i. En $(\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $W = \{(x, y) : 2x = 0\}$,
      ii. En $(\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $W = \{(x, y) : (x, y) = \lambda(2, -1) + \beta(0, 2)\}$,
      iii. En $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $W = \{(x, y, z) : x = 3\}$,
      iv. En $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $W = \{(x, y, z) : 2x + y - z = 0\}$,
      v. En $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $W = \{(x, y, z) : (x, y, z) = \lambda(1, -2, 1)\}$
      vi. En $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $W = \{(x, y, z) : y = 0, x - 2z = 0\}$,
      vii. En $(\mathbb{R}^4, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $W = \{(x, y, z, w) : 2x + y - z = 0, x - w = 0\}$,
      viii. En $(\mathbb{R}^4, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $W = \{(x, y, z, w) : (x, y, z, w) = \lambda(2, 1, 3 - 1) + (0, 2, 0, 0)\}$,

ix. En $(\mathcal{P}_2[\mathbb{R}], +, \mathbb{R}, \cdot)$, $W = \{p(x) : p_0 = p_1 + p_2\}$, donde $p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2$.

x. En $(\mathbb{R}^{3\times 2}, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $W = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 2} : a_{11} - a_{21} = a_{22} + a_{32}\}$

xi. En $V = \mathcal{F}_{[a,b]}^{\mathbb{R}}$ (ver ejercicio 1) $W = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ es constante}\}$.

xii. En $V = \mathcal{F}_{[-a,a]}^{\mathbb{R}}$ (con $a > 0$) (ver ejercicio 1) $W = \{f : [-a,a] \to \mathbb{R} : f \text{ es función par}\}$. En este caso, si resultara subespacio no calcular base.

xiii. En $V = \mathcal{F}_{[-a,a]}^{\mathbb{R}}$ ($a > 0$) (ver ejercicio 1) $W = \{f : [-a,a] \to \mathbb{R} : f \text{ es función impar}\}$. En este caso, si resultara subespacio no calcular base.

1.1 Ejercicios adicionales.

1. Dadas las siguientes condiciones completar la línea punteada diciendo cuáles corresponden a un conjunto de vectores linealmente independiente (l.i), a uno linealmente dependiente (l.d) o no puede identificarse si es l.i o l.d.

   (a) Si un conjunto de vectores es tal que ningún vector entre los dados puede escribirse como combinación lineal del resto entonces el conjunto es ....

   (b) Si un conjunto de vectores es tal que existe una combinación lineal del vector nulo de modo que los escalares de dicha combinación son todos cero, entonces el conjunto es............................

   (c) Si un conjunto de vectores es tal que alguno de ellos puede escribirse como combinación lineal del resto, entonces el conjunto es.................................

   (d) Si un conjunto de vectores contiene al vector nulo entonces el conjunto es ....

   (e) Si un conjunto de vectores es tal que la única combinación lineal de ellos que da por resultado el vector nulo del espacio es sólo cuando los escalares son todos cero entonces el conjunto es.................................

2. Responder explicando y justificando.

   (a) Exhibir espacios vectoriales cuyos elementos no sean $n - uplas$

   (b) ¿Qué es una combinación lineal de vectores? ¿Cuáles son los axiomas de espacio vectorial que permiten definir combinación lineal?

   (c) En un espacio vectorial, ¿cuál es la diferencia entre conjunto generador y base ?

   (d) Dado un espacio vectorial V y un subconjunto $W \subset V$, ¿Cuáles son las condiciones para probar que W es subespacio? ¿Cuáles propiedades se "heredan" de $(V, +, K, \cdot)$ y cuáles no?

   (e) ¿Cuál es la dimensión del subespacio nulo?

   (f) Para un espacio vectorial de dimensión finita, ¿la base es única? ¿la dimensión es única?

3. Probar que $W = \left\{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ es subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Hallar base y dimensión de W. Completar la base de W a una base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

4. Probar que $W = \{p(x) \in \mathcal{P}_3[\mathbb{R}] : p(-1) + p(0) + p(1) = 0\}$ es subespacio. Encontrar base y dimensión de W. Completar la base de W a una base de $\mathcal{P}_3[\mathbb{R}]$.

5. Sea $S \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que S es el conjunto de matrices de traza nula (Recordar que la traza es el número que resulta de sumar los elementos de la diagonal de una matriz.) Hallar base y dimensión de S. Encontrar el subespacio $S \cap W$, siendo W el subespacio del ejercicio 3.

2 Cambio de coordenadas - Matriz de cambio de coordenadas.

Nota: Las coordenadas de los vectores se escribirán en matrices columnas

1. Verificar en cada caso si el conjunto B es base del espacio vectorial dado; en caso afirmativo, hallar las coordenadas del vector indicado.

   (a) En $(\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $B = \{(-1,3),(4,5)\}$, $v = (1,2)$;

   (b) En $(\{M \in \mathbb{R}^{2\times 2} : M = M^t\}, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$,
   $v = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Sea V un espacio vectorial con base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$. Escribir las coordenadas de los siguientes vectores en esta base:

   (a) $v_1 + v_2 + v_3$

   (b) $v_1 - v_2$

   (c) v_3

   (d) $v_1 + 5.(v_2 - 4v_3)$

3. En $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, el espacio de polinomios de grado a lo sumo 2 con coeficientes reales, se dan los polinomios: $p_1 = 2 + x + 4x^2$, $p_2 = 1 - x + 3x^2$ y $p_3 = 3 + 2x + 5x^2$.

   (a) Verificar que $\{p_1, p_2, p_3\}$ es una base de $\mathcal{P}_2[\mathbb{R}]$

   (b) Hallar las coordenadas en esa base de los siguientes vectores:

      i. $q_1 = 5 + 9x + 5x^2$

      ii. $q_2 = 2 + 6x^2$

      iii. $q_3 = 2 + 2x$

4. Sea S el espacio generado por las funciones $f(x) = \cos^2 x$ y $g(x) = \sin^2 x$, decir cuáles de las siguientes funciones pertenecen a ese espacio y dar sus coordenadas considerando como base $B = \{f, g\}$.
   (a) $h(x) = \cos 2x$ (b)$t(x) = 1$ (c) $u(x) = \sin x$

5. En $\mathbb{R}^2$, dadas las bases $B_1 = \{(1,1),(-2,1)\}$ y $B_2 = \{(-2,-1),(0,3)\}$ se pide:

   (a) Determinar gráfica y analíticamente las coordenadas del vector $v = (-1,5)$ en las bases B_1 y B_2

   (b) Hallar las coordenadas en base B_2 del vector v, sabiendo que $v = -\frac{1}{3}v_1 - 4v_2$, con v_1 y v_2 los vectores de B_1.

   (c) Hallar las coordenadas en base B_2 de cada vector de la base B_1 y armar las combinaciones lineales correspondientes.

   (d) Hallar las coordenadas en base B_2 del vector v, sabiendo que $v = -3v_1 - \frac{1}{2}v_2$, con v_1 y v_2 los vectores de B_1, usando las combinaciones lineales obtenidas en el item 5c.

6. Dadas en $\mathbb{R}^3$ las bases $B = \{(1,1,-1),(2,0,2),(0,1,1)\}$ y $B' = \{(2,2,1),(-3,2,0),(0,1,0)\}$:

   (a) Indicar las coordenadas de $v = (1,1,-1)$ en cada una de las bases.

(b) Verificar que las coordenadas de $v=(3,-3,2)$ en la base B son:

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} \\ \frac{11}{6} \\ -\frac{7}{3} \end{pmatrix}.$$

(c) Hallar en coordenadas canónicas el vector cuyas coordenadas en base B' son:

$$[v]_{B'} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

7. (a) Con las coordenadas obtenidas en el item 5c, armar matriz de cambio de coordenadas. ¿De qué base a qué base realiza el cambio de coordenadas?

   (b) Teniendo en cuenta el ejercicio 6, hallar la matriz de **cambio de coordenadas** de B a B'. Con dicha matriz hallar $[v]_{B'}$ sabiendo que $[v]_B = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} \\ \frac{2}{6} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

8. En $\mathbb{R}^2$ consideremos la base $B=\{(1,-2),(2,3)\}$. Sea $B'=\{v_1,v_2\}$ tal que la matriz de cambio de coordenadas de B a B' es: $C_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

   (a) ¿Cuáles son los vectores que integran la base B'?

   (b) Graficar en el plano las bases B y B'.

   (c) Hallar las coordenadas de $W=-3v_1+2v_2$ en base B.

9. En $\mathbb{R}^3$, dadas las bases $B=\{(1,-1,1),(2,0,1),(0,1,1)\}$ y $B'=\{(0,1,1),(-1,1,0),(0,0,1)\}$.

   (a) Hallar $C_{BB'}$.

   (b) Si $[v]_{B'}=(-1,2,2)$ hallar sus coordenadas en base B.

   (c) Usando la definición de matriz de cambio de coordenadas hallar C_{BB}. ¿Cuál es la relación entre $C_{BB'}$ y $C_{B'B}$? ¿Es generalizable esa relación a matrices de cambio de coordenadas en general?

10. Sea V un espacio vectorial y B y B' bases distintas de V. Probar que $C_{BB'}^{-1}=C_{B'B}$.

11. Sea $B=\{x,x^2-1,2+3x\}$ una base en $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y sea B' otra base del mismo espacio tal que:

$$C_{B'B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   (a) ¿Cuáles son los polinomios que integran la base B'?

   (b) Hallar las coordenadas de $p(x)=x^2$ en base B y en base B' usando matrices de cambio de coordenadas.

   (c) Sabiendo que $[p(x)]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, hallar las coordenadas del polinomio en la otra base.

12. Sea V un espacio vectorial de dimensión 3. Sean $B_1=\{u_1,u_2,u_3\}$, $B_2=\{v_1,v_2,v_3\}$ y $B_3=\{w_1,w_2,w_3\}$ bases de V tales que:

   (a) $v_1=-u_1; v_2=2u_1+3u_2-u_3; v_3=u_1+u_3;$

(b) La matriz de cambio de base de B_3 a B_2 es: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Se pide:

(a) Hallar la matriz de cambio de base de B_1 a B_2.

(b) Si $v = -3u_1 + 2u_2 + 5u_3$ hallar las coordenadas de v en la base B_2. ¿Cómo puede hacerlo usando la matriz del item anterior?

(c) Hallar las coordenadas de v en la base B_3.

(d) Hallar la matriz que le permite cambiar las coordenadas de un vector en base B_1 a coordenadas en base B_3.

(e) Enunciar como propiedad la síntesis del procedimiento de los items anteriores.

2.1 Aplicaciones de cambio de coordenadas.

Transformación de ecuaciones mediante cambio de coordenadas

1. Sea en $\mathbb{R}^2$ la base canónica $E = \{(1,0),(0,1)\}$ y la base $B = \{v_1, v_2\}$ donde v_1 es vector director de la recta $L : x - 2y = 0$ y v_2 es perpendicular a v_1. Tomar vectores cualesquiera de la recta L y dar sus coordenadas en base canónica y sus coordenadas en base B. ¿Qué observas? ¿Cuál sería la ecuación de la recta L en coordenadas (x', y') de la base B?

2. Se consideran en $\mathbb{R}^2$ la base canónica $E = \{(1,0),(0,1)\}$ y la base $B = \{v_1, v_2\}$ tales que $C_{BE} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & -\frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$.

   (a) Dibujar en el plano ambos sistemas de ejes coordenados (el de la base E y el de la base B).

   (b) Dada la recta $2x - 3y = 0$ donde (x, y) son las coordenadas de los puntos de la recta en base canónica, graficarla en el dibujo anterior y anticipar cuál sería la ecuación de la recta en el sistema dado por la base B.

   (c) Hallar la ecuación de esta recta en coordenadas (x', y') de la base B usando la matriz de cambio de coordenadas.¿Coincide con la anticipación realizada?

3. Se consideran en $\mathbb{R}^2$ la base canónica $E = \{(1,0),(0,1)\}$ y la base $B = \{v_1, v_2\}$ tales que $C_{BE} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

   (a) Dibujar en un sistema de ejes coordenados la base B.

   (b) Dada la ecuación $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$, donde (x, y) son las coordenadas de los puntos en base canónica, se pide hallar la ecuación que cumplen los mismos puntos en coordenadas (x', y') en base B y si es posible graficar el conjunto de puntos cuyas coordenadas la satisfacen.

Relación entre potencia y frecuencia de funciones trigonométricas.

En el espacio de funciones continuas $C^{\mathbb{R}}_{[0,2\pi]}$, se considera el subespacio W generado por los siguientes vectores linealmente independientes: $B = \{1, \cos t, \cos^2 t, \cos^3 t\}$.

1. Mostrar que $\sin^2 t \in W$.

2. Asumiendo que valen las siguientes identidades, explicar por qué el conjunto $B' = \{1, \cos t, \cos 2t, \cos 3t\}$ es base de W.
$$\begin{aligned} \cos 2t &= -1 + 2\cos^2 t \\ \cos 3t &= -3\cos t + 4\cos^3 t \end{aligned}$$

3. Hallar $C_{BB'}$ y $C_{B'B}$.

4. Indicar los períodos de cada función de B.

5. Usar 3 para hallar las coordenadas $[\sin^2 t]_{B'}$. Luego escribirlos como combinación lineal de los vectores de base B'.

2.2 Ejercicios adicionales.

1. **Repaso conceptual**. Responder justificadamente y explicar.

   (a) Considere en $\mathbb{R}^3$ la base canónica y en $\mathcal{P}_2[\mathbb{R}]$ la base $B = \{x^2, x, 1\}$. Sean los vectores u y U pertenecientes respectivamente a cada uno de los espacios vectoriales dados, tales que: $[u]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $[U]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Interprete dichos vectores en cada caso.

   (b) Al multiplicar las coordenadas de un vector por una matriz de cambio de coordenadas, ¿se obtienen las coordenadas de otro vector distinto al dado?

   (c) ¿Por qué una vez fijada una base de un espacio, las coordenadas de cualquier vector en esa base son únicas?

   (d) Una matriz de cambio de coordenadas correspondiente a bases del espacio $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ¿es una matriz de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ o de $\mathbb{R}^{4\times 4}$?

   (e) Se conocen las matrices de cambio de coordenadas $C_{B_1B_2}$ y $C_{B_2B_3}$ correspondientes a las bases B_1, B_2 y B_3 de un mismo espacio vectorial. ¿Cómo utiliza dichas matrices en cada uno de los siguientes casos?

      i. se quiere pasar $[v]_{B_1}$ a $[v]_{B_3}$,

      ii. se quiere pasar $[v]_{B_2}$ a $[v]_{B_3}$,

      iii. se quiere pasar $[v]_{B_3}$ a $[v]_{B_1}$.

2. En $\mathcal{P}_2[\mathbb{R}]$, la matriz de cambio de coordenadas de $B = \{x^2 - 1, 2x + x^2, 1\}$ a $B' = \{v_1', v_2', v_3'\}$ es $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (a) Hallar los vectores que integran la base B'.

   (b) Hallar las coordenadas de $z = 3v_1' - v_2' + 2v_3'$ en la base B.

3. La matriz de cambio de coordenadas de $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ a $B' = \{v_1', v_2', v_3'\}$ es $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ hallar las coordenadas de $z = 3v_1' - v_2' + 2v_3'$ en la base B.

4. Sea A la matriz de cambio de coordenadas de $B_1 = \{e_1, e_2, \dots e_n\}$ a $B_2 = \{f_1, f_2, \dots f_n\}$. Determinar cómo cambia la matriz A si: a) se conmutan los vectores e_i y e_j. b) se conmutan f_k con f_l.

5. Sean $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ y $B'=\{w_1,w_2,w_3\}$ bases de V tales que $C_{BB'}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 1 & -1 & \gamma \end{pmatrix}$. Hallar las coordenadas de $u=3w_1-w_2$ en base B sabiendo que las coordenadas de $v=-2v_1+v_2+v_3$ en base B' son $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

6. Dado en $\mathbb{R}^{2\times 2}$ el conjunto

$$B=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

se pide:

(a) Comprobar que B es una base.

(b) Hallar la matriz $M\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ sabiendo que $[M]_B=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

7. Dada la ecuación cuadrática $x^2+2\sqrt{3}xy+3y^2=4\sqrt{3}x-4y+4$ en coordenadas canónicas, hallar la nueva ecuación en coordenadas $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ en base B sabiendo que $B=\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$. En un mismo gráfico, exhibir los dos sistemas de coordenadas y graficar el conjunto de puntos que satisface la ecuación.

8. Dada en $\mathbb{R}^3$ la ecuación del plano $2x-y+2z=-2$, en base canónica, determinar una base B tal que si $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ son las coordenadas genéricas en esa base, la ecuación del plano sea: $y'=k$, con k constante. Mostrar analíticamente que efectivamente la nueva ecuación es $y'=k$. ¿Es única la base B que cumple la condición pedida?

3 Transformaciones lineales - Matrices de transformación lineal.

Nota: El cuerpo de escalares de los espacios vectoriales considerados en esta práctica es el conjunto $\mathbb{R}$ salvo que se especifique otro.

1. Verificar algebraicamente que las siguientes transformaciones del plano son transformaciones lineales y dar una interpretación geométrica de las mismas:
   (a) $f(x_1, x_2) = (x_1, 0)$ (b) $f(x_1, x_2) = (0, x_2)$ (c) $f(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$ (d)$f(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$

2. Decidir si las siguientes funciones son transformaciones lineales:
   (a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - x_2 + x_3$
   (b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, x_2 - x_3)$
   (c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 1, x_2 - x_3)$

3. Estudiar los siguientes casos y extraer conclusiones.
   (a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal que satisface: $f(3, 1) = (1, 2)$ y $f(-1, 0) = (1, 1)$. Calcular si es posible $f(3, 2)$ y $f(x_1, x_2)$, para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$
   (b) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal que satisface: $f(-1, 1, 0) = (1, 2)$ y $f(1, 2, 1) = (1, 1)$. Calcular si es posible, $f(2, 16, 6)$ y $f(x_1, x_2, x_3)$, para todo $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

4. Dada una transformación $T : V \to W$, probar que:
   (a) $Nu\,T$ es subespacio de V y $Im\,T$ es subespacio de W.
   (b) Si $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ son generadores de V, entonces $T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)$ son generadores de $Im\,T$.
   (c) T es monomorfismo si y sólo si $Nu\,T = \left\{\vec{0}\right\}$

5. Hallar bases de $Nu\,f$ y de $Im\,f$ para los siguientes casos:
   (a) Todos las transformaciones lineales de los ejercicios 1, 2, 3
   (b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_3, -x_2 - x_3)$
   (c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_3 - 3x_1, x_2, x_1 + 2x_2 - x_3)$
   (d) $f : \mathbb{R}^{2x2} \to \mathbb{R}^{3x3}$
   $$f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} + a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{21} + a_{22} & a_{11} \\ a_{22} & 3a_{11} + a_{22} & a_{11} \end{pmatrix}$$
   (e) $f : \mathbb{R}^{2x2} \to \mathbb{R}$, $f(A) = tr(A)$. La $tr(A)$ es la suma de los elementos de la diagonal de la matriz A.
   (f) $f : V \to V$, V espacio vectorial de dimensión 3 y base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, con $f(v_1) = 2v_1 - v_2$, $f(v_2) = v_1 - v_2 + 3v_3$, $f(v_3) = v_2 - 6v_3$

6. Definir transformaciones lineales que verifiquen las condiciones dadas:
   (a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $Nu\,f = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\}$
   (b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $Nu\,f =$ gen $\{(1, 3)\}$; $Im\,f =$ gen $\{(1, 0)\}$.
   (c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $(1, 3, 0) \in Nu\,f$ y f sea epimorfismo.

7. Responder y justificar la respuesta.
   (a) Sea $f : V \to W$ una transformación lineal inyectiva , $\dim V = 3$ y $\dim W = 3$, ¿es f isomorfismo?
   (b) ¿Existe una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que su núcleo es la recta $2x + 5y = 0$ y su imagen sea el plano $2x - 5y + 3z = 0$?
   (c) ¿Existe una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que su núcleo es la recta $2x + 5y = 0$ y su imagen sea la misma recta?
8. Calcular las inversas de los siguientes isomorfismos:
   (a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$
   (b) $f : \mathbb{R}^{2x3} \to \mathbb{R}^{3x2}$ $f(A) = A^t$ (traspuesta de A).
   (c) $f : \mathbb{R}^{2x2} \to \mathbb{R}^4$
   $$f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_{11} - a_{12}, a_{11} + a_{12}, a_{22}, a_{21})$$

Matrices de transformaciones lineales.

Nota: La notación para la matriz de una transformación lineal $f : V \to W$, considerando a B como base del espacio de salida (V) y B' como base del espacio de llegada W es $Mf_{BB'}$.

11. Para cada una de las siguientes transformaciones lineales determinar la matriz asociada en cada caso y transformar al vector indicado en cada item:
   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (3x_1 - x_2, x_2)$
      i. Si B y B' son ambas la bases canónicas. v es el primer vector de la base canónica.
      ii. Si $B = \{(1, 1), (0, -1)\}$, $B' = \{(0, 1), (1, 1)\}$. v es el primer vector de la base canónica.
   (b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 - 5x_3$
      i. Si B y B' son ambas la bases canónicas. v es el primer vector de la base canónica.
      ii. Si $B = \{(1, -1, 1),\ (0, -1, 2),\ (0, 0, 1)\}$ y $B' = \{5\}$. v es el primer vector de la base canónica.
   (c) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^3$,
   $$f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_{11} - 2a_{12}, 3a_{21} + a_{11} - a_{22}, a_{12} + a_{22}),$$
      i. con B base canónica y $B' = \{(1, -1, 1),\ (0, -1, 2),\ (0, 0, 1)\}$. $v = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, en base canónica.
      ii. si $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ y
      $B' = \{(1, -1, 1),\ (0, -1, 2),\ (0, 0, 1)\}$. $v = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, en base canónica.
12. Dada $B = \{(1, -1, 2), (1, 2, 0), (1, 0, 1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y la transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(1, -1, 2) = (0, 1, 1)$, $f(1, 2, 0) = (2, -3, 5)$, $f(1, 0, 1) = (0, -5, 3)$, decir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando la respuesta.

(a) $Mf_{BB} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) $Mf_{EE} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$, donde E es la base canónica de R^3.

(c) $\{(0,1,1),(2,-3,5),(0,-5,3)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

(d) $\{(0,1,1),(2,-3,5),(0,-5,3)\}$ es una base de la imagen de f.

(e) Si $B' = \{(0,1,1),(0,-5,3),(1,0,1)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$ entonces $Mf_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

13. Consideremos V y W espacios vectoriales con $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $B' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ sus respectivas bases. La transformación $T : V \to W$ es tal que:

$$T(v_1) = 2w_1 - 3w_2 \quad T(v_2) = w_1 - 5w_2 + 3w_3 \quad T(v_3) = 7w_2 - 3w_3$$

(a) Encontrar la matriz de la transformación T en las bases dadas.

(b) Hallar NuT e ImT.

14. Sea V un espacio vectorial con bases $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $B' = \{v_1 - v_2, v_1 + v_2 - 2v_3, v_1 - 2v_3\}$. Si $T : V \to V$ es una transformación lineal tal que $T(v_1) = v_1 - v_2$, $T(v_2) = v_1 + 2v_2 + v_3$, $T(v_3) = 3v_1 + v_3$, hallar $MT_{BB'}$ y hallar las bases de NuT y de ImT.

15. Demostrar que:

(a) Si A es la matriz asociada a una transformación lineal T en ciertas bases fijadas, entonces $rg(A) = dim(Im(T))$. Deducir que si A y A' son matrices asociadas a una misma transformación lineal, entonces $rgA = rgA'$, es decir que el rango de la matriz asociada a una transformación lineal no depende de la base elegida.

(b) Dados V y W dos espacios vectoriales de igual dimensión sobre el cuerpo $\mathbf{K}$ y $T : V \to W$ una transformación lineal probar que T es inversible (isomorfismo) si y sólo si la matriz asociada a T respecto a bases B y B' de V y W respectivamente es inversible.

16. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una transformación lineal tal que la matriz asociada a T en las bases $B = \{(0,0,2)\,(0,1,-1)\,(2,1,0)\}$ y $B' = \{(1,0,0,0)\,(1,1,1,0)\,(1,-1,0,1)\,(0,1,1,1)\}$ es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calcular $T(U)$, siendo $U = 3\,(0,0,2) + 2\,(0,1,-1) - 5(2,1,0)$.

(b) Si $V = (3,0,1)$ en la base canónica, calcular $T(V)$.

(c) Hallar una base de la imagen de T.

17. (a) La transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ está dada por la matriz $Mf_{EB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, siendo E base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $B = \{(1,-1),(2,5)\}$ base de $\mathbb{R}^2$.

i. ¿Cuál es $f(1,0,0)$ en base canónica de $\mathbb{R}^2$?

ii. ¿Cuál es la dimensión de la imagen? ¿cuáles vectores generan el núcleo?

iii. Sean B_1 base de $\mathbb{R}^3$ y B_1' base de $\mathbb{R}^2$ tales que: $C_{EB_1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y

$C_{BB_1'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar $Mf_{B_1B_1'}$.

(b) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_2, x_1 + x_2)$.
Dadas las bases $B = \{(1, -1), (2, 5)\}$ y E base canónica de $\mathbb{R}^2$; $B' = \{(4, 1, 3), (2, 2, 1), (3, 0, 1)\}$, $B'' = \{(-1, 2, 1), (0, 1, 1), (-2, 0, 2)\}$ y E' base canónica de $\mathbb{R}^3$.
Hallar $Mf_{BB'}$, $Mf_{BB''}$, $Mf_{EB''}$ sólo usando productos entre matrices de cambios de coordenadas y la matriz en bases canónicas $Mf_{EE'}$.

18. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal cuya matriz de transformación en las bases $B = \{(-1, 1, 1), (2, 0, 1), (2, 2, 3)\}$ y $B' = \{(2, 3), (3, 1)\}$ es $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(a) Mostrar $f(-2, 2, 2)$

(b) Dar Nuf e Imf

(c) Hallar la forma explícita de la función $f(x_1, x_2, x_3)$ para cualquier par (x_1, x_2, x_3) en base canónica.

19. Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una transformación lineal y $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es su matriz asociada respecto de las bases $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $B' = \{w_1, w_2, w_3\}$. Si $C = \{z_1, z_2, z_3\}$ con $z_1 = 2v_1 + v_2$; $z_2 = v_2 + 2v_3$; $z_3 = v_1 - v_2 + v_3$

(a) Probar que C es una base de $\mathbb{R}^3$

(b) Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases C y B'

20. Decimos que dos matrices A y A' son semejantes cuando existe una matriz inversible C tal que $A = C^{-1}\,A'\,C$. Dada una transformación lineal endomorfismo $f : V \to V$,

(a) mostrar que si $A = Mf_{BB}$ y $A' = Mf_{B'B'}$ entonces A y A' son semejantes.

(b) Demostrar que si A y A' son matrices semejantes entonces sus determinantes son iguales: $\det A = \det A'$.

21. Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, transformaciones lineales con $f(x, y) = (2x - 3y, x + y)$ y E la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Decir cuándo $f = g$ en los siguientes casos:

(a) $Mg_{BB} = \begin{pmatrix} \frac{15}{7} & \frac{5}{7} \\ -\frac{31}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix}$, siendo $C_{EB} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$

(b) $Mg_{BB} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{25}{2} & \frac{11}{2} \end{pmatrix}$, siendo $C_{BE} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $Mg_{BB} = \begin{pmatrix} -10 & -5 \\ 27 & 10 \end{pmatrix}$, siendo $C_{EB} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

3.1 Aplicaciones de transformaciones lineales.

Transformaciones lineales geométricas.

1. Hallar en base canónica las matrices de las siguientes transformaciones geométricas:

   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f$ es una simetría axial respecto de la recta $5x - 4y = 0$.

   (b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f$ es la simetría respecto del plano $2x - 3y + z = 0$.

   (c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f$ es una rotación de ángulo $\frac{\pi}{3}$ alrededor del origen de coordenadas.

   (d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f$ es una rotación de ángulo $\frac{\pi}{3}$ alrededor de la recta generada por $(-1, 2, 2)$.

2. El simétrico del punto $P = (1, 1)$ por una simetría axial de eje que pasa por el origen es $P' = (-\frac{7}{5}, -\frac{1}{5})$. Hallar la matriz de la simetría en base canónica.

3. Determinar una matriz que represente el producto de una reflexión del plano con respecto a la recta $y = x$ seguida por una reflexión con respecto a la recta $y = \sqrt{3}x$. Describir la matriz de la transformación resultante.

4. Dados v un vector no nulo de $\mathbb{R}^3$ y los vectores w y u perpendiculares a v (los productos escalares $v \cdot w = 0$ y $v \cdot u = 0$) de modo que $B = \{v, w, u\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$. Se define una transformación lineal tal que $T(v) = v$, $T(w) = -w$ y $T(u) = -u$.

   (a) Dar MT_{BB}.

   (b) Describa el "efecto geométrico" de esta transformación.

   (c) Para el caso en que $v = (2, 1, -1)$ hallar MT_{EE}.

Transformaciones entre espacios de funciones.

1. Sea $\mathcal{P}_2[\mathbb{R}]$ el espacio de polinomios de grado a lo sumo 2. Considere la transformación lineal $f : \mathcal{P}_2[\mathbb{R}] \to \mathcal{P}_2[\mathbb{R}]$, dada por $f(p(x)) = p(2x - 1)$.

   (a) Obtenga la imagen de $3 + 2x - x^2$ haciendo la evaluación directa.

   (b) Hallar la matriz de f considerando como base de entrada y de salida $B = \{1, x, x^2\}$.

   (c) Obtenga la imagen de $3 + 2x - x^2$ utilizando la matriz.

2. Dada $f : \mathcal{P}_3[\mathbb{R}] \to \mathcal{P}_3[\mathbb{R}]$, $f(p(x)) = p(x+1)$, comprobar que es una transformación lineal y luego hallar núcleo e imagen.

3.2 Ejercicios adicionales

1. Responder a lo solicitado explicando la respuesta:

   (a) Dé ejemplos distintos de transformaciones lineales $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   (b) ¿Puede el núcleo ser un conjunto vacío para alguna transformación lineal?

   (c) Para una transformación lineal $T : V \to W$, Si $T(v) = w_1$, ¿Puede ser $T(a\ v) = w_2$, con w_2 linealmente independiente respecto de w_1?

   (d) Si una transformación es constante, es decir la imagen de todos los vectores del espacio vectorial de salida es un mismo vector fijo del espacio de llegada, ¿puede ser una transformación lineal?

2. Se consideran los espacios vectoriales V y W de dimensión 3, con B y B' bases de V. Dada la transformación lineal $f : V \to V$, indicar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

(a) $Mf_{BB'} = (Mf_{B'B})^{-1}$.

(b) $Mf_{BB'}$ tiene el mismo determinante que Mf_{BB}.

(c) $Mf_{BB'}$ tiene el mismo rango que Mf_{BB}.

3. Hallar en cada caso, cuando sea posible, una transformación lineal que cumpla con los requisitos enunciados. Cuando no sea posible hallarla, explicar por qué y cuando sí sea posible decir si es o no única.

   (a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ epimorfismo y $Nu\, f \subseteq \{(x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$.

   (b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $Nuf = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 = (1; -1; 1) \cdot (x; y; z) = 0\}$.

   (c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que el núcleo sea el plano de ecuación 2x - y + z = 0, $(1, 2) \in Imf$ $(-2; 2) \in Imf$.

   (d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_3[\mathbb{R}]$ que satisfaga $Nu\, f = gen\{(0; 1; -1); (1; -1; 0)\}$ y $Imf = gen\{x^2 - x + 1\}$

4. Sea $\mathcal{P}_2[\mathbb{R}]$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales, de grado a lo sumo 2, junto con el polinomio nulo. Sea $B' = \{2, x, x^2 + 3\}$ base de $\mathcal{P}_2[\mathbb{R}]$. Dada la transformación lineal $T : \mathcal{P}_2[\mathbb{R}] \to \mathbb{R}^2$ definida por: $T(p(x)) = (p(1), p(-1))$ se pide:

   (a) Hallar base y dimensión de $Nu\, T$.

   (b) Hallar base y dimensión de $Im\, T$.

   (c) Hallar la matriz $MT_{B'E}$, donde E es la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

   (d) Si $q(x) = -x^2 + \frac{1}{2}x - 3$, hallar $T(Q(x))$ usando la matriz $MT_{B'E}$.

5. La matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$, es la matriz de una transformación lineal T sobre $\mathbb{R}^3$ en una base ortonormal B. T deja fijo al vector $(3, 1, 1)$, es decir $T(3, 1, 1) = (3, 1, 1)$.

   (a) Mostrar que la transformación es una rotación.

   (b) Determine la matriz de la transformación en base canónica.

4 Autovalores y Autovectores de Endomorfismos y de Matrices.

1. Haciendo uso de las definiciones de transformación lineal y de autovector y autovalor de un endomorfismo, responder justificadamente.

   (a) ¿Existe un endomorfismo con autovector nulo? En caso afirmativo, dar un ejemplo.

   (b) ¿Existe un endomorfismo con autovalor nulo? En caso afirmativo, dar un ejemplo.

   (c) ¿Existe un endomorfismo que no tenga autovectores?

   (d) $f : V \to V$ tiene autovalor λ y su correspondiente autovector es v. Para la transformación $g(x) = 3 \cdot f(x)$, encuentre un autovector y autovalor relacionados con los dados.

   (e) Para un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con autovector v, ¿todos los vectores de la recta cuyo vector director es v son autovectores?

   (f) Para un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con autovectores v y w de un mismo autovalor λ, ¿todos los vectores del plano generado por v y w son autovectores?

   (g) Considere un endomorfismo $f : V \to V$ y v y w dos autovectores distintos correspondientes a un mismo autovalor λ.

      i. Un múltiplo de v, es decir αv, $\alpha \in \mathbb{R}$, ¿Es autovector de f? en caso afirmativo, dar el autovalor correspondiente. ¿Y un múltiplo de w?

      ii. Mostrar que $v + w$ es autovector de f de autovalor λ.

      iii. Mostrar que cualquier combinación lineal de v y w es autovector de f de autovalor λ.

   (h) Si $f : V \to V$ es un endomorfismo, v y w son dos autovectores distintos de autovalores distintos λ y β respectivamente, el vector $v + w$ ¿es necesariamente autovector?

2. Para cada uno de los siguientes casos indicar, por argumentos geométricos, cuáles de las siguientes transformaciones lineales tienen autovectores. Anticipar cuáles serían esos autovectores y los subespacios propios.

   (a) Simetría axial de eje $y = \frac{1}{2}x$.

   (b) Rotación de ángulo $\frac{\pi}{2}$.

   (c) Analizar distintos casos de rotaciones en el plano con distintos ángulos.

   (d) La simetría central de centro en el origen.

   (e) La homotecia de razón $-\frac{1}{2}$.

3. Para un endomorfismo $f : V \to V$, se define *conjunto propio correspondiente a un autovalor* λ al conjunto formado por todos los autovectores de autovalor λ junto con el vector nulo $\mathbf{0} \in V$ del espacio vectorial.
   Compruebe que se trata de un subespacio al que se llama *subespacio propio o autoespacio* correspondiente a λ denotado por $\Lambda(f)_\lambda$ o $E(f)_\lambda$. La dimensión del autoespacio de autovalor λ se llama *multiplicidad geométrica de* λ.

4. Dado $f : V \to V$ un endomorfismo con autovalor λ y ι es el endomorfismo identidad, o sea $\iota(v) = v, \forall v \in V$,

   (a) Describir cómo actúa la transformación: $f - \alpha\iota$ para $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (b) Mostrar que el subespacio propio o autoespacio de $\lambda \in \mathbb{R}$ es el núcleo de la transformación lineal $f - \lambda\iota$, es decir: $\Lambda(f)_\lambda = Nu(f - \lambda\iota)$.

5. En cada caso, determinar los autovalores y los siguientes autoespacios:

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (-x + y - z, 2x - y, x - z)$;

(b) $T : \mathbb{R}^2 \to R^2,\ T(x, y) = (5x - y, 4x + y)$;

(c) $T : \mathbb{R}^2 \to R^2,\ T(-1, 0) = (-4, -3), T(1, -2) = (4, 1)$

6. Dado el espacio $V = \mathcal{P}_2[\mathbb{R}]$, determinar, cuando existan, los autovalores y sus respectivos autoespacios para los siguientes endomorfismos:

   (a) $f(P(x)) = P(x + 1)$.

   (b) $f(ax^2 + bx + c) = \frac{a}{2}x^2 + (2b - 2a)x + b - \frac{a}{2} + \frac{c}{2}$.

7. **Cálculo de autovalores y autovectores de transformaciones mediante matrices.** Dado un endomorfismo $f : V \to V$ siendo $B = \{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ base de V

   (a) Para v autovector de f de autovalor λ, ¿cuál es el resultado del producto matricial entre $Mf_{BB}\ [v]_B$?

   (b) ¿Cuál es la matriz de la transformación identidad ι en base B?

   (c) ¿Cuál es la relación entre las matrices: $A = Mf_{BB}$ y $A' = M(f - \alpha\iota)_{BB}$, para $\alpha \in \mathbb{R}$?

   (d) Suponiendo que λ es autovalor de f, ¿Cómo calcula las coordenadas de los vectores del subespacio propio correspondiente a λ haciendo uso de la matriz $M(f - \lambda\iota)_{BB}$? Obtener conclusiones sobre el sistema de ecuaciones planteado.

   (e) Muestre que si λ es autovalor de f, $\det(M(f - \lambda\iota)_{BB}) = 0$. Concluya que si λ es autovalor entonces es raíz del polinomio $P_\lambda(A) = \det M(f - \lambda\iota)_{BB}$ llamado *polinomio característico de A*.

   (f) **Independencia del cálculo de autovalores respecto de la base.**

      i. Si $B' = \{v'_1, v'_2, \ldots v'_n\}$ otra base de V, relacionar las matrices A y $G = Mf_{B'B'}$ y las matrices A', $G' = M(f - \alpha\iota)_{B'B'}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

      ii. Mostrar la igualdad entre los polinomios característicos $P_\alpha(A) = P_\alpha(G)$. ¿Por qué decimos que el cálculo de autovalores de una transformación es independiente de la base considerada en su representación matricial?.

      iii. ¿El cálculo de los autovectores es independiente de la base considerada?

8. **Autovalores y autovectores de matrices.**
   Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ decimos que λ es autovalor de A si λ es raíz del polinomio característico $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda\ I)$. La matriz columna $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ es autovector de A correspondiente a λ si es solución del sistema lineal homogeneo: $(A - \lambda I)X = 0$ o de su equivalente $AX = \lambda X$.

   (a) Realizar identificaciones entre las definiciones de autovalores y autovectores de un endomorfismo con las autovalores y autovectores de una matriz.

9. Determinar para cada una de las transformaciones del ejercicio 2 la matriz de la transformación en base canónica y hallar analíticamente los autovalores y autovectores correspondientes. Comparar con lo realizado en el ejercicio 2.

10. **Relación entre independencia lineal de autovectores y sus autovalores.**
    (a) Probar que dos autovectores de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de autovalores distintos son linealmente independientes.
    (b) Probar que si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ son autovalores distintos los respectivos autovectores son lineamente independientes entre sí .
    (c) Si dos vectores v y w son autovectores linealmente independientes de un endomorfismo $f : V \to V$ ¿corresponden a autovalores distintos?
    (d) Probar que la multiplicidad geométrica de un autovalor es menor o igual que su multiplicidad algebraica.
11. (a) Probar que si λ es autovalor de la matriz A entonces λ^n es autovalor de A^n.
    (b) Probar que A es inversible si y sólo si no tiene autovalores nulos.
    (c) Probar que si A es inversible y $\lambda \neq 0$ es autovalor de A, entonces λ^{-1} es autovalor de A^{-1}

4.1 Diagonalización de matrices.

12. Mostrar la equivalencia entre las siguientes definiciones:

    Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonalizable en $\mathbb{R}$ cuando es semejante a una matriz diagonal. Esto significa que existen $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz inversible y $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz diagonal, tales que $A = CDC^{-1}$ (o bien $A = C^{-1}DC$)

    Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonalizable en $\mathbb{R}$ cuando existe una base de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores de A.

13. Mostrar que si una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tiene n autovalores reales y distintos, entonces es diagonalizable.
14. Enunciar la recíproca de la proposición de arriba y estudiar su validez.
15. Mostrar que si una matriz A tiene solo autovalores reales y para todos ellos la multiplicidad geométrica coincide con la multiplicidad algebraica entonces A es diagonalizable.
16. En relación con lo visto en los items anteriores estudiar cuáles de las siguientes matrices son diagonalizables.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}. \quad A = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}. \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

17. Hallar los autovalores y autovectores de las siguientes matrices y diagonalizar cuando sea posible:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

18. Dada una matriz $A \in R^{n \times n}$ diagonalizable. Mostrar cómo se calcula A^n a partir de D^n, siendo D la matriz diagonal correspondiente.

19. La transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ en base canónica está representada por la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

    (a) Diagonalizar A, si es posible.

    (b) Decir si se trata de una simetría respecto a un plano.

20. Para cada una de las siguientes matrices A se pide:

    (a) Diagonalizar cuando sea posible y expresar la matriz dada en función de la matriz diagonal usando el cambio de coordenadas conveniente.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

21. Responder las siguientes preguntas justificadamente. Se tiene una transformación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

    (a) Si sus autovalores son 3, 0 y 4 se podría asegurar que su matriz en la base canónica es diagonalizable.

    (b) Si sus únicos autovalores son -1 y -5 y los subespacios asociados a ellos son $E_{-1} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \text{ y } x_1 + x_3 = 0\}$ y $E_{-5} = gen\{(2, 1, 2)\}$ entonces resulta que f es diagonalizable.

    (c) Dada $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$, mostrar que d es autovalor y hallar su correspondiente autovector.

    (d) Determinar para qué valores de a y b es diagonalizable la siguiente matriz: $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

    (e) Mostrar que si $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es una matriz simétrica, es siempre diagonalizable.

Aplicaciones de autovalores y autovectores.

Sistemas dinámicos

Para ampliar este tema puede consultar el libro Álgebra Lineal y sus aplicaciones, de David Lay, Pearson y Addison Wesley, 2007

Consideramos un sistema dinámico como el modelo matemático en el cual se expresa la relación de elementos variables que interactúan. La relación depende del tiempo que transcurre. Los sistemas dinámicos son discretos si la relación matemática se describe en función de periíodos fijos de tiempo a los que se llama "pasos" (por hora, por día, por mes, etc.), en ese caso la variable tiempo en lugar de llamarla t se la denota con k. Si en cambio el tiempo se describe en forma continua, el sistema dinámico se llama continuo.

En general, interesa conocer el comportamiento del sistema a largo plazo, es decir hacer que $k \to \infty$, para el caso de mediciones discretas del tiempo, o bien $t \to \infty$, para mediciones continuas del tiempo y poder predecir matemáticamente qué sucede con x_k o con $x(t)$, respectivamente.

Ejemplos:

- Modelo poblacional unidimensional: Podemos suponer que la población de una bacteria da origen a una cierta cantidad de organismos de ese tipo en un momento dado. Todo depende del estado inicial, que llamamos x_0 y de la tasa de crecimiento, que llamamos a. Vamos a suponer que la población tiene una población máxima posible, debido a la finitud del alimento y del espacio de crecimiento. La proporción de individuos con respecto al máximo en un cierto momento $k+1$ depende de la proporción medida en el momento o período anterior y de la tasa de crecimiento. La forma de expresar esto es:

  $$x_{k+1} = a \cdot x_k(1 - x_k).$$

  donde x_k expresa la proporción de población en un lapso k (la notación matemática más usual sería $x(k)$ en lugar de x_k).

  Si el tiempo se mide como variable continua, el modelo matemático queda expresado a través de una ecuación diferencial y es un sistema dinámico continuo.

  $$\frac{dx}{dt} = a \cdot x(1 - x).$$

- Modelo poblacional bidimensional: Por ejemplo, un sistema de predador-presa, en el que la población de cada uno depende de la población de ambos. Un ejemplo es el modelo de predador: buhos o lechuzas y presa: ratas,dado por las siguientes relaciones:

  $$\begin{array}{rcl} B_{k+1} & = & 0.5B_k + 0.4R_k \\ R_{k+1} & = & -0.10B_k + 1.1R_k \end{array}$$

  En el que k es el tiempo medido en meses (en lugar de llamarlo t) y se supone que entre un mes y otro no hay medición alguna.

  Observemos que en este caso, la relación es una combinación lineal de las variables, por lo que el sistema dinámico discreto se llama lineal. El mismo puede expresarse en forma matricial. Llamando, $x_k = \begin{pmatrix} B_k \\ R_k \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 \\ 0.1 & 1.1 \end{pmatrix}$ el sistema de arriba puede escribirse:

  $$x_{k+1} = A \cdot x_k$$

Sistemas dinámicos discretos.

1. En un sistema dinámico lineal discreto de 2×2 del tipo $x_{k+1} = A \cdot x_k$, si x_0 es el vector de estados iniciales, el sistema actúa de forma tal que $x_1 = Ax_0$ y $x_{k+1} = Ax_k$. Con estos datos indicar la forma de obtener x_k a partir de x_0.

2. Suponga que la matriz A es diagonalizable,

   (a) Escriba un modo de obtener x_k en función de los autovectores y los autovalores.

   (b) Si λ_1 y λ_2 son los autovalores de A de modo que $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ (autovalor dominante), muestre entonces cuál sería el límite de $\frac{1}{\lambda_1{}^k} x_{k+1}$.

   (c) ¿Por qué es posible decir que la dirección de x_{k+1} tiende a la dirección del autovector de autovalor dominante?.

3. Para cada uno de los sistemas dinámicos discretos, del tipo "predador-presa", dado por la siguientes matrices, se pide:

   (a) Hallar una fórmula no recursiva para conocer la población de ambas especies en un momento k,

(b) Haga un gráfico que muestre la tendencia de los puntos de estado $x_1, x_2, x_3, \ldots$ partiendo de distintos estados iniciales x_0.

(c) Clasifique el origen $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en punto atractor, repulsor o punto silla.

(d) Interprete los valores del comportamiento a largo plazo del sistema. Para ello responda las siguientes preguntas: ¿Cuál es el factor de aumento o disminución de las poblaciones a largo plazo? ¿Y la proporción final de ambas poblaciones?

$$\begin{pmatrix} 1.44 & 0 \\ 0 & 1.2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 \\ -0.104 & 1.1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1.7 & -0.3 \\ -1.2 & 0.8 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1.25 & -0.75 \\ -0.75 & 1.25 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 \\ -0.4 & 1.3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ -0.4 & 1.5 \end{pmatrix},$$

4. Una empresa de publicidad encargada de la propaganda de un supermercado A, determina que del total de clientes que compran en el supermercado A un fin de semana, el 80% vuelve a comprar en A el siguiente fin de semana, mientras que el 20% restante va a comprar al supermercado B. Se sabe también que del total de clientes que compra en B un fin de semana, el 70% vuelve a comprar el fin de semana siguiente en ese supermercado y el 30% restante va al supermercado A. Cul es la distribucin de clientes luego de ocho fines de semanas siguientes al estado inicial? (Extraído de la página http://www.frsn.utn.edu.ar/gie/av/).

4.2 Ejercicios adicionales.

1. Responder explicando y justificando:

   (a) ¿Cuál es el subespacio que se calcula cuando se quiere obtener el autoespacio de un endomorfismo?

   (b) ¿Qué es la multiplicidad geométrica de un autovalor? ¿Qué es la multiplicidad algebraica? ¿Cómo se relacionan?

   (c) Describa el criterio para decidir si una matriz es diagonalizable usando las nociones de multiplicidad geométrica y de multiplicidad algebraica.

   (d) Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, explicar qué posibilidades de diagonalización se tienen si A tiene un autovalor de multiplicidad algebraica 2.

2. Hallar los autovalores y autovectores en forma matricial de las transformaciones del ejercicio 6.

3. Decir si la siguiente matriz es diagonalizable o no. En caso de serlo, hallar A^3 usando la factorización con la matriz diagonal semejante a la dada. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Sea $M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -8 & 0 & -4 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ (a) Probar que M es diagonalizable. (b) Hallar una base de autovectores asociada a M: (c) ¿Es M^8 diagonalizable?, en caso afirmativo, ¿cuáles son los autovalores y los autovectores de M^8?

5. Sea A una matriz inversible con autovalor λ. a) Probar que λ^{-1} es autovalor de A^{-1}. Mostrar que coinciden los autoespacios $E_A(\lambda) = E_{A^{-1}}(\lambda^{-1})$.

6. Para cada una de las siguientes matrices A se pide:

   (a) Indicar los autoespacios de las transformaciones asociadas a estas matrices.

   (b) En caso de ser diagonalizable, hallar la expresión genérica de A^n en función de la potencia de matriz diagonal semejante D.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

5 Espacios con producto interno.

Nota: Los espacios vectoriales son de dimensión finita

1. Comprobar cuáles de las siguientes funciones son producto interno sobre los espacios vectoriales indicados. En caso de no serlo, mostrar cuál es la propiedad que no se cumple.
   (a) $V = \mathbb{R}^2$, $< x, y >= x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_2$
   (b) El espacio vectorial es $\mathcal{F}^{\mathbb{R}}[\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}]$ que es el espacio de funciones definidas sobre el conjunto finito $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ cuyas imágenes son números reales. Entre pares de funciones de este espacio se define $< f, g >= \sum_{i=1}^{n} f(a_i)g(a_i)$. Comprobar que es un producto interno.
   (c) El espacio vectorial es $\mathcal{P}_n[\mathbb{R}]$ de polinomios de grado a lo sumo n junto con el polinomio nulo $\mathbf{O}$. Dado un conjunto discreto $\{a_1, a_2, \ldots a_m\}$ con $m > n$, entre pares de polinomios de este espacio se define $< f, g >= \sum_{i=1}^{m} f(a_i)g(a_i)$. Comprobar que es un producto interno.

2. Probar las siguientes propiedades en un espacio euclídeo e interpretar geométricamente en $\mathbb{R}^2$ con el producto interno usual que es el producto escalar.
   (a) Para todo los v y $w \in V$, tenemos: $| < v, w > | \leq \|v\|\|w\|$ (**Desigualdad de Schwarz**)
   (b) $< x, y >= 0 \Leftrightarrow \|x + y\| = \|x - y\|$.
   (c) $< x, y >= 0 \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (**Teorema de Pitágoras)**
   (d) $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\| \cos\theta$
   (e) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ **(Desigualdad triangular)**

3. En el espacio euclídeo $V = \mathbb{R}^2$, $< x, y >= x_1y_1 + (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + 2x_2y_2$
   (a) Hallar el ángulo entre los vectores canónicos: $\{(1, 0), (0, 1)\}$.
   (b) Hallar algún vector ortogonal al $(1, 0)$ ¿Cuántos puede hallar?
   (c) Dibujar el conjunto de vectores ortogonales a $(1, 1)$. ¿Es un subespacio?

4. En el espacio euclídeo $\mathcal{F}^{\mathbb{R}}[\{-10, -9, \ldots, 10\}]$ con el producto definido en 1b,
   (a) Las funciones $g(x) = 1$ y $f(x) = x$ ¿son ortogonales?. ¿Las funciones $g(x) = 1$ y $f(x) = -2x$ son ortogonales?
   (b) Hallar la norma de la función $f(x) = \sin \frac{\pi}{2}(\frac{x}{10} + 1)$
   (c) Hallar el ángulo entre las funciones $g(x) = 1$ y $f(x) = -x + 1$.

5. Dado un conjunto de vectores no nulos de un espacio euclideo $\{v_1, v_2, \ldots v_k\} \in E$, probar que si los vectores pertenecientes a él son ortogonales de a dos: $< v_i, v_j >= 0,\ 1 \leq i, j \leq k, i \neq j$, entonces es un conjunto linealmente independiente.

6. En el espacio euclídeo $(E, <, >)$ de dimensión finita suponga que tiene una base ortogonal $\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$. Mostrar cómo se obtienen las coordenadas de cualquier vector de v haciendo uso del producto interno.

7. Utilizar el método de ortogonalización para construir una base ortogonal en un subespacio tridimensional de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores: $u_1 = (1, 2, 1, 3)$, $u_2 = (4, 1, 1, 1)$ y $u_3 = (3, 1, 1, 0)$.

8. Encontrar una base ortogonal de $M \subset \mathbb{R}^3$ si $M = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$, para cada uno de los siguientes productos internos:

(a) El producto interno usual.

(b) Con el producto dado por $< x, y >= x_1y_1 + (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3)$

9. Encontrar bases ortogonales para los siguientes subespacios.

   (a) $W \subseteq \mathbb{R}^3 \quad W = \{(x_1, x_2, x_3)/2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0\}$, $\mathbb{R}^3$ con el producto usual.

   (b) $W \subseteq \mathbb{R}^4 \quad W = gen\{(-1, 2, 3, 0), (-1, -1, -1, 1), (3, 2, 1, 3)\}$, $\mathbb{R}^4$ con el producto usual.

   (c) $W \subseteq \mathcal{P}_3[\mathbb{R}]$, $W = gen\{p(t) = t^2, q(t) = 2t + 2, r(t) = -3\}$ con el producto dado por

$$< a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0 \ , \ b_3t^3 + b_2t^2 + b_1t + b_0 >= a_3b_3 + a_2b_2 + a_1b_1 + a_0b_0$$

10. Mostrar que para todo espacio euclideo E siempre es posible hallar una base ortonormal del mismo.

11. **Complemento ortogonal de un subespacio.** Dado un espacio euclídeo $(E, <, >)$ y un subespacio W de E, se define complemento ortogonal de W al conjunto

$$W^{\perp} = \{z \in E :< z, w >= 0, \ \forall w \in W\}.$$

   (a) ¿Cuáles son los elementos en común que tienen W y $W^{\perp}$.

   (b) Si $E = \mathbb{R}^2$, con el producto interno usual, y $W = gen\{(-1, 1)\}$, mostrar algunos elementos de $W^{\perp}$, ¿puede describir todos los elementos de $W^{\perp}$? ¿Qué conjunto forma?

   (c) Realice el mismo análisis para $E = \mathbb{R}^3$, con el producto interno usual, y $W = gen\{(-1, 1, 0)\}$.

   (d) Para un espacio euclídeo genérico $(E, <, >)$ pruebe que $W^{\perp}$ es subespacio.

   (e) Si $W = gen\{w_1, \ldots w_k\}$, entonces $W^{\perp} = \{z \in E :< z, w_i >= 0, \ i = 1, 2, \ldots, k\}$. Es decir, basta encontrar los vectores que sean ortogonales a un conjunto generador de W.

12. Hallar el complemento ortogonal a cada uno de los subespacios dados en 9.

13. Hallar el complemento ortogonal de

   (a) En $\mathbb{R}^2$, $W = \{(x, y) : 2x - 3y = 0\}$.

   (b) Subespacio en $\mathbb{R}^4$ generado por $b_1 = (2, 1, 1, -1), \ b_2 = (1, 1, 3, 0)$.

   (c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/x + y - z = 0\}$

   (d) $\{p(x) \in P^3 [\mathbb{R}] /p(x) = \alpha(x^2 - 1) + \beta(x + 1), \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, con el producto interno presentado en 1c, siendo el conjunto de puntos $\left\{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}, 0, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

14. Pruebe que todo elemento $x \in E$ puede escribirse como suma: $x = w + \bar{w}$ donde $w \in W$, $\bar{w} \in W^{\perp}$. Pruebe que si existieran $w' \in W$ i $\bar{w}' \in W^{\perp}$ tales que $x = w' + \bar{w}'$ entonces necesariamente $w = w'$ y $\bar{w} = \bar{w}'$. Esto significa que la descomposición de cada vector x es única.

15. Dado un subespacio W, describir el procedimiento para obtener la proyección ortogonal de un vector genérico v sobre W en los siguientes casos:

   (a) Haciendo uso de una base ortonormal de W.

   (b) Sin hacer uso de una base ortonormal de W.

16. Hallar la proyección ortogonal de

   (a) $(-1, 2)$ sobre el subespacio generado por el vector $(1, 1)$.

   (b) $(-1, 0, 0, 2)$ sobre subespacio generado por $b_1 = (2, 1, 1, -1), \ b_2 = (1, 1, 3, 0)$.

(c) Un vector genérico (x_1, x_2, x_3, x_4) sobre el mismo subespacio anterior.

(d) $(3, 3, 3)$ al subespacio $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}$.

(e) Idem $(1, 1, -1)$ al subespacio del item anterior.

(f) Un vector genérico (x_1, x_2, x_3) sobre el subespacio del item anterior.

17. (a) **Mínima distancia de un vector a un subespacio.** Sea $W \subset V$ un subespacio de V, $v \in V$ y v_W es la proyección ortogonal de v sobre W. Demostrar que $\|v - v_W\| \leq \|v - z\| \; \forall z \in W$.

(b) Dado un vector v en un espacio euclideo $(E, <, >)$ y W un subespacio del mismo. ¿Qué significa que el vector proyección ortogonal de v sobre W es el que minimiza la distancia de v a ese subespacio?

(c) En cada caso del ejercicio anterior encontrar la distancia de cada vector al subespacio de proyección. Compruebe en algún caso que tomando otro vector cualquiera del subespacio, distinto de su proyección ortogonal, la distancia del vector dado a ese vector elegido en el subespacio es mayor que la distancia calculada anteriormente.

18. Sea $(E, <, >)$ un espacio euclideo y $W \subset E$, subespacio, con $\dim W = 2$ y base ortonormal $\{v_1, v_2\}$. Sea $v \in E$ tal que $\|v\| = 4$, $< v, v_1 >= \frac{3}{2}$ y $< v, v_2 >= 2$. Hallar la distancia de v a W.

Matrices y producto interno.

1. **Representación matricial del producto interno.** Dado un espacio euclideo $(E, <, >)$, se considera una base $B = \{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ del mismo.

(a) Dados dos vectores genéricos x, y en E, tales que $[x]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ y $[y]_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, mostrar, usando propiedades del producto interno, que

$$< x, y >=< \sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \sum_{j=1}^{n} y_j v_j >= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j < v_i, v_j > . \tag{5.1}$$

(b) Mostrar que la expresión anterior 5.1 se escribe como producto de matrices:

$$[x]_B^t \cdot \mathcal{M}_B \cdot [y]_B, \text{ siendo } \quad \mathcal{M}_B = \begin{pmatrix} < v_1, v_1 > & < v_1, v_2 > & \ldots & < v_1, v_n > \\ < v_2, v_1 > & < v_2, v_2 > & \ldots & < v_2, v_n > \\ & \vdots & & \\ < v_n, v_1 > & < v_n, v_2 > & \ldots & < v_n, v_n > \end{pmatrix}$$

(c) Probar que si se tiene otra base U el resultado del producto interno usando la representación matricial referida a esta base es el mismo que el obtenido con la base B. Esto significa que el resultado del producto interno es independiente de la representación matricial que se utilice.

(d) Si la base B es ortonormal, ¿cómo es la representación matricial del producto interno entre dos vectores x y y? Relacionar la respuesta con el producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$.

(e) Si $f : V \to V$ es un endomorfismo y A es la matriz del endomorfismo en una base ortonormal B, ¿cómo representa matricialmente el producto $< f(x), y >$?

2. Hallar la matriz cuadrada del producto interno en cada uno de los siguientes casos:

   (a) $E = \mathbb{R}^2$, $< x, y >= x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_2$ y $B = \{(1,1),(0,-1)\}$.

   (b) $E = P_2[\{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}, 0, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, 1\}]$, polinomios de grado a lo sumo 2, con el producto interno 1c. $B = \{x^2 - 1, x + 1, 1\}$

3. Usando las matrices del item anterior, hallar el producto interno de los siguientes vectores:

   (a) $x = (2,1)$ y $y = (-1,3)$.

   (b) $p(x) = 3x^2 - x + 1$ y $q(x) = -x + 2x + 2$.

4. Sea $E, <,>$ un espacio euclídeo y sean B y B' bases ortonormales de E. Probar que la matriz de cambio de coordenadas $C_{BB'}$ es una matriz ortogonal, es decir $C_{BB'}^{-1} = C_{BB'}^t$.

Aplicación de proyecciones ortogonales: Aproximación por cuadrados mínimos de funciones mediante polinomios.

Aproximación mediante producto "discretizado".

Sugerencia: Trabajar en forma numérica con ayuda de la calculadora o un software de graficación y cálculo.

1. Sobre el espacio $\mathcal{F}_I^{\mathbb{R}}$, con $I = \{x_i : x_i = 10 + \frac{i-1}{5}, i = 1, \dots 6\}$, hallar un conjunto de polinomios ortogonales de grado a lo sumo 2 usando el producto interno 1b.

2. Utilizar un graficador (puede ser el Mathematica o cualquier otro) para graficar los polinomios obtenidos en el item anterior extendiendo su dominio a $\mathbb{R}$.

3. Para la función $f(x) = \sin \pi(x - 10)$

   (a) Hallar la mejor aproximación cuadrática p de la función mediante proyección ortogonal al subespacio generado por los polinomios obtenidos en el item anterior.

   (b) Hallar, en forma aproximada, el error de aproximación.

   (c) Graficar en un mismo sistema, las funciones $f(x+10)$ y la aproximación cuadrática $p(x+10)$ sobre el dominio real $[0,1]$ (están trasladadas para que se pueda graficar en el intervalo real $[0,1]$).

   (d) Realizar el mismo procedimiento para un polinomio cúbico.

4. Para la función $f(x) = e^x$

   (a) Hallar la mejor aproximación cuadrática p de la función mediante proyección ortogonal al subespacio generado por los polinomios obtenidos en el item anterior.

   (b) Hallar, en forma aproximada, el error de aproximación.

   (c) Graficar en un mismo sistema, las funciones $f(x+10)$ y la aproximación cuadrática $p(x+10)$ sobre el dominio real $[0,1]$ (están trasladadas para que se pueda graficar en el intervalo real $[0,1]$).

5.1 Ejercicios Adicionales.

1. **Responder explicando y justificando.**

   (a) Dados dos espacios euclídeos sobre un mismo espacio vectorial: $(V, <, >_1)$ y $(V, <, >_2)$ y dos vectores pertenecientes a él: $v \in V$, $w \in V$. Si $< v_1, v_2 >_1 = 0$ ¿necesariamente $< v_1, v_2 >_2 = 0$?

   (b) Describir el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.

   (c) ¿La proyección ortogonal de un vector sobre otro, ¿depende del producto interno considerado?

   (d) Dado un espacio euclídeo de dimensión 2, una base B de un espacio euclídeo y $\mathcal{M}_B$ la matriz de productos internos entre los vectores de la base.

      i. ¿Por qué la matriz es simétrica?

      ii. ¿Qué puede decir del valor del determinante de $\mathcal{M}_B$?

2. Sea en R^2 el producto definido por

$$< (x_1, y_1), (x_2, y_2) >= x_1 x_2 + (x_1 - y_1)(x_2 - y_2).$$

   (a) Mostrar que es realmente un producto interno.

   (b) Exhibir el complemento ortogonal del subespacio $W = gen(-2, 1)$

   (c) Dado $v = (-3, 3)$ hallar un vector w en el subespacio W que se encuentre a la menor distancia posible de v. Hallar dicha distancia.

3. Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^2$ generado por el vector $v = (3, 4)$ y $<, >$ el producto interno canónico, P la proyección ortogonal sobre W. Hallar:

   (a) Una fórmula para P.

   (b) La matriz de P en la base canónica.

   (c) El subespacio ortogonal de W

   (d) Una base conveniente para que la matriz de P sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. ¿La base es ortonormal? ¿Es necesario que la base sea ortonormal para que la matriz tenga esa forma?

4. El subespacio W está generado por $\{(2, 1, -1), (0, 1, 1)\}$

   (a) Hallar una base ortonormal $\{w_1, w_2, w_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $W = gen\{w_1, w_2\}$. Explicar (sin hacer los cálculos) el procedimiento para encontrar las coordenadas de un vector genérico en esa base.

   (b) Hallar la matriz de simetría con respecto al plano W en base canónica.

   (c) Hallar la matriz de rotación alrededor del vector normal al plano de ángulo θ.

5. Sea el espacio euclídeo $\mathcal{P}_2[\mathbb{R}]$ de polinomios de grado a lo sumo dos de coeficientes reales, con el producto definido por

$$< p; q >= p(-2)q(-2) + p(0)q(0) + p(2)q(2)$$

   (a) Comprobar que se trata de un producto interno.

   (b) Hallar la norma de $1 - x^2$.

(c) Hallar el ángulo entre $x + 1$ y $x - 2$.

(d) Hallar el complemento ortogonal de $W = gen\{1; 1 - x^2\}$.

(e) Hallar la proyección de $x + 1$ sobre W.

(f) Graficar en un mismo sistema de ejes cartesianso las funciones $f(x) = x + 1$ y el polinomio encontrado en el item anterior.

6. En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ se define la transformación "simetría respecto de una recta L por el origen" según el procedimiento siguiente:

   i Dado un vector genérico w, se proyecta ortogonalmente sobre L obteniendo: $Proy_L(w)$.

   ii Luego, se realiza la diferencia: $w - Proy_L(w)$.

   iii Se realiza la diferencia $Proy_L(w) - (w - Proy_L(w))$. El resultado es el simétrico de w respecto de la recta L.

   (a) Realizar un gráfico aproximado que muestre el simétrico respecto de una recta según el procedimiento anterior.

   (b) Hallar la transformación para el caso particular en que la recta es $(x, y, z) = \lambda(-1, 1, 2)$ usando el producto interno.

   (c) Mostrar los autovalores y los autovectores de esta transformación.

6 Diagonalización de Matrices Simétricas. Cónicas.

1. Sean $(E, <,>)$ espacio euclideo, $T : E \to E$ un endomorfismo y B_1 y B_2 bases ortonormales cualesquiera de $\mathbb{R}^n$. Si $A = MT_{B_1 B_1}$ es simétrica entonces $A' = MT_{B_2 B_2}$ también es simétrica. Esto significa que si la matriz en una base ortonormal es simétrica, también lo será en cualquier otra base ortonormal.

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matriz simétrica, probar que:

   (a) Los autovectores de A correspondientes a autovalores distintos son ortogonales entre sí .

   (b) Los autovalores de A son reales.

   (c) Si v es un autovector de A, entonces $(\mathrm{gen}\{v\})^\perp$ es invariante por A.

   Notación: $O_{k\times\ell}$ es la matriz nula del espacio $\mathbb{R}^{k\times\ell}$.

   (d) Dado v, autovector de A de autovalor λ, se forma una base ortonormal B de $\mathbb{R}^n$ tal que $B = \{v, v_2, \dots v_n\}$. Mostrar que

   $$A \text{ es semejante a } \begin{pmatrix} \lambda & O_{1\times(n-1)} \\ O_{(n-1)\times 1} & B \end{pmatrix}.$$

   con $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ también matriz simétrica.

   (e) ¿B tiene autovalores reales? ¿Los autovalores reales de B son autovalores de A? ¿Qué relación hay entre los autovectores de B y los autovectores de A?

   (f) Mostrar que usando reiteradamente las conclusiones de los items anteriores se deduce que A es diagonalizable.

   (g) Mostrar que A es diagonalizable ortogonalmente, es decir existe una matriz ortogonal P y una matriz diagonal D tal que $A = P^{-1} \cdot D \cdot P$.

3. Dadas las siguientes transformaciones, diagonalizarlas en una base ortonormal.

   (a) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ A(x, y) = (2x + y, 2y + x)$

   (b) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ A(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$

   (c) $A : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}),\ T(A) = A^t$

4. Para las transformaciones 3a y 3b del ejercicio 3, determinar, si existen, transformaciones B y C sobre el mismo espacio tales que: $B^2 = A$ y $C^3 = A$.

5. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (a) Decir sin hacer cuentas por qué la matriz es diagonalizable.

   (b) Hallar una factorización ortogonal $A = P\ D\ P^{-1}$, mostrando la matriz D y P.

   (c) Encontrar los autovalores de A^8 (sug. usar la diagonalización.)

   (d) Mostrar que existe una matriz B tal que $B^3 = A$

6.1 Aplicaciones a la Geometría Analítica

Nota: Para resolver estos ejercicios se recomienda consultar el libro: Álgebra y Geometría de Eugenio Hernández. Addison Wesley - UAM- 2004.

1. **Definición métrica de las cónicas.**
   (a) En una elipse,
      i. ¿Cómo es la distancia entre los focos en relación con la constante de la definición de elipse?
      ii. ¿Cuántos vértices tiene una elipse? ¿Cuáles son?
      iii. Explicar cuáles son los ejes de simetría de una elipse.
      iv. Describir cuáles son los ejes intrínsecos de una elipse.
      v. Deducir la ecuación canónica de una elipse.
   (b) En una hipérbola,
      i. ¿Cómo es la distancia entre los focos en relación con la constante de la definición de hipérbola?
      ii. ¿Cuántos vértices tiene una hipérbola? ¿Cuáles son?
      iii. Explicar cuáles son los ejes de simetría de una hipérbola.
      iv. Describir cuáles son los ejes intrínsecos de una hipérbola.
      v. Deducir la ecuación canónica de una hipérbola.
   (c) En una parábola,
      i. ¿A qué se llama parámetro?
      ii. ¿Cuántos vértices tiene una parábola? ¿Cuáles son?
      iii. Explicar cuáles son los ejes de simetría de una parábola.
      iv. Describir cuáles son los ejes intrínsecos de una parábola.
      v. Deducir la ecuación canónica de una parábola.

2. Decir en cada caso respecto a qué sistema coordenado están expresadas las siguientes ecuaciones canónicas. Describir dicho sistema en relación a los elementos de cada cónica (focos, parámetro, directriz, etc.):
   (a) Elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
   (b) Hipérbola: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
   (c) Circunferencia: $x^2 + y^2 = r^2$
   (d) Parábola: $y^2 = 2px$

3. Dadas las siguientes ecuaciones en coordenadas canónicas, decir de qué tipo son las cónicas que representan y hallar sus elementos principales de acuerdo a cada caso (centro, semiejes, asíntotas, etc.) y graficar.
   (a) $5x^2 + 4xy + 2y^2 - \frac{25}{\sqrt{5}}x - \frac{4}{\sqrt{5}}y + 4 = 0$
   (b) $x^2 - 2xy + y^2 + 8x + 8y = 0$
   (c) $x^2 - 2xy + y^2 - 8 = 0$
   (d) $4x^2 + 6xy - 4y^2 - 5 = 0$
   (e) $x^2 - 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y = 0$

(f) $6x^2 - 4xy + 9y^2 - 20x - 10y - 5 = 0$

(g) $2xy + 2\sqrt{2}x - 1 = 0$

4. Citar cada uno de los casos degenerados de las cónicas diciendo en qué condiciones se dan esos casos. Indicar qué conjunto es en cada caso y graficar.

5. Dar un criterio para clasificar una cónica usando:

   (a) Los autovalores de la matriz de la forma cuadrática asociada.

   (b) El determinante de la forma cuadrática asociada.

Aplicación de la diagonalización de matrices simétricas: Descomposición en valores singulares.

Nota: Para ampliar este tema se puede consultar el libro: Álgebra Lineal. Una introducción moderna. David Poole. Thompson. 2004.

1. Dadas las siguientes matrices, separarlas en bloques de modo que en alguno de los bloques aparezca una matriz cuadrada diagonal con escalares no nulos en la diagonal de la mayor dimensión posible. Dar las dimensiones de las matrices nulas que forman los demás bloques.

$$D_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad D_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D_3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Dada una matriz rectangular $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$, mostrar que el producto matricial $H^t \cdot H$ es una matriz cuadrada y simétrica.

3. Sea $B = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$ una base ortonormal de autovectores de A y $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n\}$ sus autovalores que se llaman *valores singulares de H*.

   (a) ¿En qué espacio está incluido el conjunto $\{Hv_1, Hv_2, \dots Hv_n\}$?

   (b) Probar que $\{Hv_1, Hv_2, \dots Hv_n\}$ es un conjunto de vectores ortogonales.

   (c) ¿Qué sucede con estos vectores si $n > m$?.

   (d) Para $\sigma_i \neq 0$, $1 \leq i \leq r$, se define $u_i = \frac{1}{\sigma_i} v_i$ y con ellos se determina una base de $\mathbb{R}^m$ completando el conjunto l.i $\{u_1, \dots u_r\}$ a una base ortonormal $B' = \{u_1, \dots u_r, u_{r+1}, \dots u_m\}$. Si E es la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y E' la base canónica de $\mathbb{R}^m$, explicar por qué las matrices de cambio de coordenadas C_{BE} y $C_{B'E'}$ son ortogonales.

   (e) Sea $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ una transformación lineal asociada a la matriz H en las bases E y E', es decir $Mf_{EE'} = H$. Observando cómo se transforman los vectores de la base B, decir cómo es la matriz de la transformación $Mf_{BB'}$. Luego relacionar $Mf_{BB'}$ y $Mf_{EE'} = H$ mediante matrices de cambio de coordenadas.

   (f) Concluir que $H = U\Sigma V$, donde $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y tiene la siguiente forma:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} D & O_{n-r} \\ O_{m-r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}, \text{ con } D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_r. \end{pmatrix} \text{ con } U \text{ y } V \text{matrices ortogonales.}$$

4. Hallar la descomposición por valores singulares (DVS) de las siguientes matrices:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicios adicionales.

1. Se sabe que la matriz A es simétrica, que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, son autovectores de A de autovalor 1 y que -2 es también autovalor.

   (a) ¿Es posible hallar un tercer autovector linealmente independiente con los dados? En caso afirmativo indique cómo lo encuentra. Justifique la respuesta.

   (b) ¿Es posible hallar la matriz A con los datos dados. En caso afirmativo muestre cómo la obtendría. No hace falta hacer las cuentas finales. Justifique la respuesta.

2. Dada la matriz simétrica: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, diagonalizarla ortogonalmente.

3. Hallar la expresión genérica de A^n para $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.