PRIMER PARCIAL DE ÁNALISIS MATEMÁTICO I

Fecha..............Aula.............. Curso....... Turno:........................... Tema 1

1		2		3		4	
1 a	1 b	2 a	2 b	3 a	3 b	abc	d
Nota:							

Nombre y Apellido……………………………………….DNI………………………

Escribir todos los razonamientos que justifiquen las respuestas

1.a) Hallar el Dominio y la Imagen de la sig. aplicación $f(x) = 2 - \sqrt{5 - x}$

Determinar la fórmula de su función inversa, el Dominio y su Imagen. Graficar ambas funciones en el mismo sistema.

b) Demostrar gráfica y analíticamente que la asíntota oblicua a la curva de ecuación $y = \dfrac{x^3 - 6.x^2}{2.x^2 - 1}$ corta a la función.

2.a) Hallar, si existen, "a", "b" para que la siguiente función sea derivable en todo "x" real. Graficar la función.

$$f(x) = \begin{cases} ax + 5 & si \quad x \leq 1 \\ bx^2 + 2 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

b) Derivar $y = (\ln x)^{senx}$

3.- a) Indicar V o F y justificar la respuesta.

$P(x) = 3x^8 - x - 1$ tiene al menos una raíz real en el intervalo (-1, 0).

b) ¿Se puede aplicar el teorema de Lagrange a la función $f(x) = \frac{x}{x+1}$ en el intervalo [0,4]? De ser posible hallar el punto intermedio c.

4.- Al investigar el poder bactericida de un compuesto se observa que si "P" representa el número de bacterias presentes en la muestra "t" horas después de agregado el bactericida, entonces $P(t) = 1000\frac{48-4t}{t+6}$. Se pide:

a) El número de bacterias al momento de agregar el bactericida.

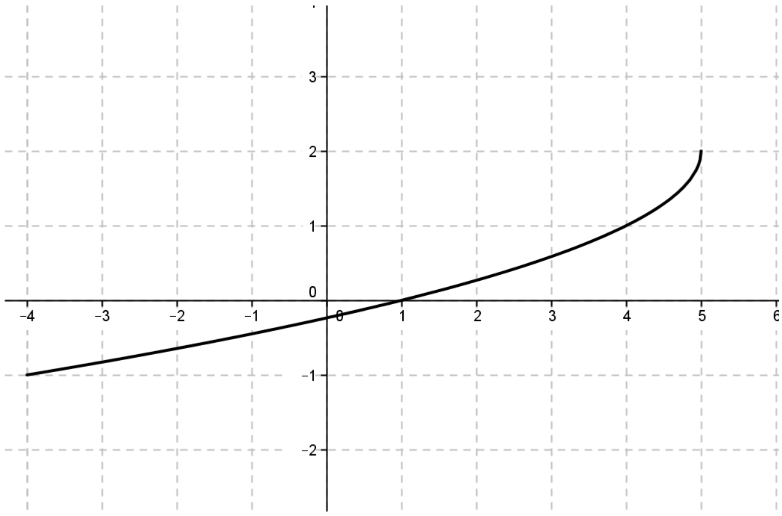
b) Calcular el tiempo que se requiere para eliminar la mitad de las bacterias.

c) El prospecto indica que el producto conserva su poder bactericida durante 12 horas ¿es cierto? ¿Por qué?

d) Encuentre la función inversa (primero determinar dominio e imagen para que P sea biyectiva) ¿qué significa en el contexto del problema?.

Solución

1. a) Hallar el Dominio y la Imagen de la siguiente aplicación $f(x) = 2 - \sqrt{5 - x}$
Para esto observamos que f es una traslación horizontal de 5 unidades hacia la izquierda de $g(x) = \sqrt{x}$. De esta manera obtendríamos $h(x) = \sqrt{x + 5}$ A su vez a "h" se le realizó una reflexión respecto al eje y $h(-x) = \sqrt{-x + 5}$, otra reflexión respecto al eje x y por último una traslación vertical dos unidades hacia arriba, con lo cual el gráfico de f es:



Para calcular el dominio planteamos $5 - x \geq 0 \Rightarrow 5 \geq x$ De esto y del gráfico concluimos que $D_f = (-\infty, 5]$ $I_f = (-\infty, 2]$
Por el gráfico nos damos cuenta que trazando rectas horizontales éstas cuando cortan al gráfico lo hacen una sola vez, por lo que es inyectiva. Para que sea sobreyectiva y por lo tanto biyectiva definimos: $f : (-\infty, 5] \to (-\infty, 2] / \ f(x) = 2 - \sqrt{5 - x}$ Con lo cual:
$f^{-1} : (-\infty, 2] \to (-\infty, 5]$ y nos falta calcular la regla de definición:

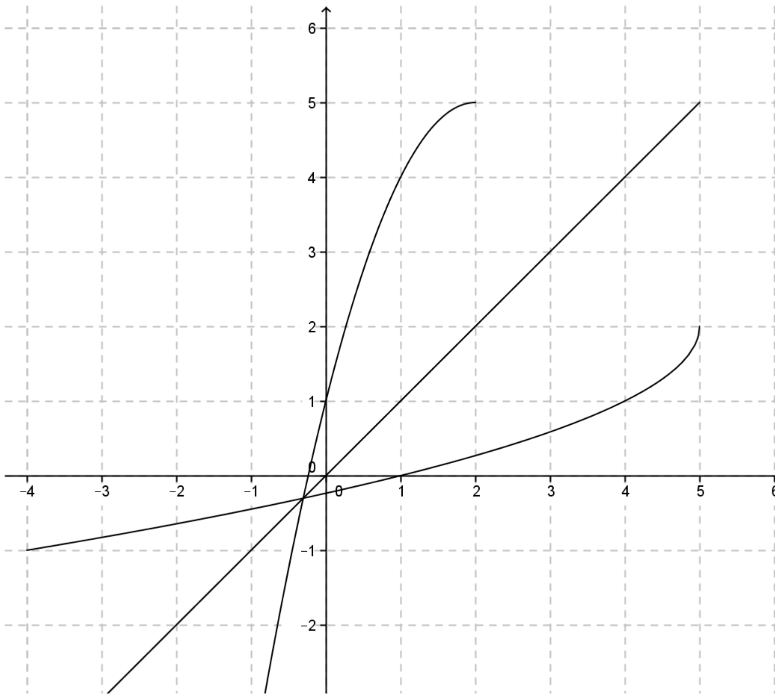
$y = 2 - \sqrt{5 - x}$

$\sqrt{5 - x} = 2 - y$

$5 - x = (2 - y)^2$

$5 - (2 - y)^2 = x$

Cambiando el nombre de las variables la respuesta completa será:
$f^{-1} : (-\infty, 2] \to (-\infty, 5] / \ f^{-1}(x) = 5 - (2 - x)^2$



b. $y = \dfrac{x^3 - 6.x^2}{2.x^2 - 1}$ Calculemos su asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{x^3 - 6.x^2}{2.x^2 - 1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 6.x^2}{2.x^3 - x} = 1/2$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3 - 6.x^2}{2.x^2 - 1} - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 12x^2 - 2x^3 + x}{.(2x^2 - 1)2} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-12x^2 + x}{.(2x^2 - 1)2} = -\frac{12}{4} = -3$$

Luego la asíntota oblicua tiene por ecuación y = ½ x -3
Planteamos la intersección de dicha asíntota con la función original:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^3 - 6.x^2}{2.x^2 - 1} \\ \\ y = \dfrac{1}{2}x - 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^3 - 6.x^2}{2.x^2 - 1} = \frac{1}{2}x - 3 \Rightarrow 2x^3 - 12x^2 = 2x^3 - 12x^2 - x + 6$$

$x = 6$ Luego el punto de intersección es (6,0).

2.

Sea $f(x) = \begin{cases} ax + 5 & si \quad x \leq 1 \\ bx^2 + 2 & si \quad x > 1 \end{cases}$

Para que la función sea continua en todo R debe ser continua en a = 1, ya que en los otros puntos lo es. Por esto planteamos:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (ax+5) = a+5$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (bx^2+2) = b+2$$

$$f(1) = a+5$$

De lo cual deducimos que a + 5 = b + 2 (1)

La función es derivable en todo R salvo en a = 1 donde debemos analizar ahora la derivabilidad:

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(ax+5)-(a+5)}{(x-1)} = \lim_{x \to 1^-} \frac{a(x-1)}{x-1} = a$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(bx^2+2)-(b+2)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{b(x^2-1)}{x-1} =$$

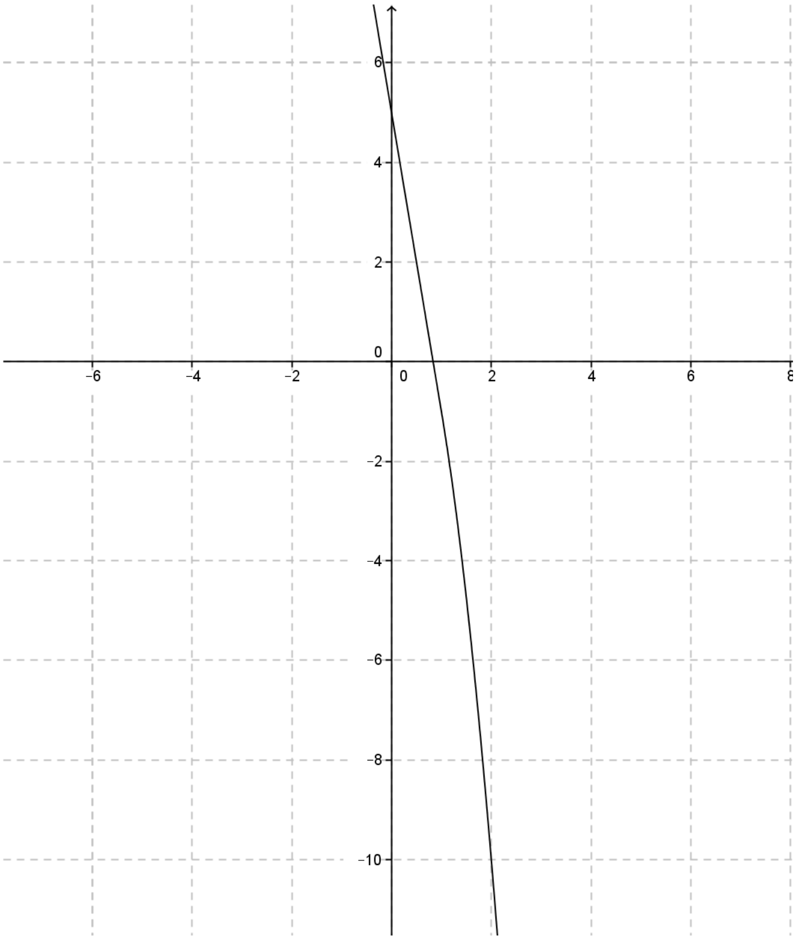
$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{b(x-1)(x+1)}{x-1} = 2b$$

Tuvimos en cuenta la igualdad (1)

Luego las derivadas laterales deben ser iguales, por lo que a = 2b (2)

De (1) y (2) a = -6   b = -3

Gráficamente:



$$y = (\ln x)^{senx} \Rightarrow \ln y = senx \ln(\ln x) \Rightarrow \frac{y'}{y} = \cos x \ln(\ln x) + senx \frac{1}{\ln x}\frac{1}{x} \Rightarrow$$

b.

$$\Rightarrow y' = \left(\cos x \ln(\ln x) + senx \frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}\right) y \Rightarrow y' = \left(\cos x \ln(\ln x) + senx \frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}\right)(\ln x)^{senx}$$

3. a)

$P(x) = 3x^8 - x - 1$ tiene al menos una raíz real en el intervalo (-1, 0).

Sabemos que P es un polinomio de grado 8 y por lo tanto es una función continua en todo R entonces es continua en el intervalo [-1,0]. Además P(-1) = 3 y P(0) = -1, por lo que toma distinto signo en los extremos del intervalo, con lo cual por el teorema de Bolzano tiene al menos una raíz real en (-1,0). La afirmación es **verdadera**

b) ¿Se puede aplicar el teorema de Lagrange a la función $f(x) = \frac{x}{x+1}$ en el intervalo [0,4]? De ser posible hallar el punto intermedio c.

$f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ Veamos que es continua en [0,4]. Primero tomamos a en el abierto (0,4):

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{a}{a+1}=f(a)$ luego f es continua en (0,4). Probemos ahora a la derecha en

x = 0 y a la izquierda en x = 4:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x+1}=0=f(0)$$

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{x}{x+1}=\frac{4}{5}=f(4)$$

De todo el análisis f es continua en [0,4]. Para ver si es derivable hacemos:

$y=\dfrac{x}{x+1}\Rightarrow y'=\dfrac{x+1-x}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{(x+1)^2}$ $\forall x\in(0,4)$ por lo que la función es derivable en dicho intervalo. Luego por el teorema de Lagrange existe c en (0,4) tal que:

$$f'(c)=\frac{f(4)-f(0)}{4-0}\Rightarrow\frac{1}{(c+1)^2}=\frac{\frac{4}{5}}{4}\Rightarrow\frac{1}{(c+1)^2}=\frac{1}{5}\Rightarrow(c+1)^2=5$$

$$c+1=\pm\sqrt{5}\Rightarrow c=-1+\sqrt{5}\quad o\quad c=-1-\sqrt{5}$$

De los dos puntos el que pertenece al intervalo es el primero, es decir: $c=-1+\sqrt{5}$

4.- Al investigar el poder bactericida de un compuesto se observa que si “P” representa el número de bacterias presentes en la muestra “t” horas después de agregado el bactericida, entonces $P(t)=1000\frac{48-4t}{t+6}$. Se pide:

a) El número de bacterias al momento de agregar el bactericida.
b) Calcular el tiempo que se requiere para eliminar la mitad de las bacterias.
c) El prospecto indica que el producto conserva su poder bactericida durante 12 horas ¿es cierto? ¿Por qué?
d) Encuentre la función inversa (primero determinar dominio e imagen para que P sea biyectiva) ¿qué significa en el contexto del problema?

a) El número de bacterias presentes en el momento de agregar el bactericida corresponde a la imagen de t = 0, por lo que es de 8000 bacterias.
b) Para calcular dicho tiempo hacemos:

$1000\dfrac{48-4t}{t+6}=4000\Rightarrow 48-4t=4t+24\Rightarrow 24=8t\Rightarrow t=3$ Por lo que se requieren tres horas para que las bacterias se reduzcan a la mitad.

c) Es cierto porque para ese tiempo se eliminaron todas las bacterias.
d) En el contexto del problema tenemos: $P:[0,12]\rightarrow[0,8000]$ es biyectiva (es homográfica y está definida como para que sea sobreyectiva). Por lo que:
$P^{-1}:[0,8000]\rightarrow[0,12]$ para calcular la regla de definición hacemos:

$$y=1000\frac{48-4t}{t+6}\Rightarrow yt+6y=48000-4000t\Rightarrow yt+4000t=48000-6y$$

$$\Rightarrow t(y+4000)=48000-6y\Rightarrow t=\frac{48000-6y}{y+4000}$$

Por lo que: $P^{-1}:[0,8000]\rightarrow[0,12]/\ y=\dfrac{48000-6t}{t+4000}$ que indica el tiempo que hace que se colocó el bactericida cuando quedan t bacterias.