Fecha: 13/10/12. Aula: 309 Curso: 05

1		2		3		4	
1 a	1 b	2 a	2 b	3 a	3 b	4a	4 b
Nota:							

<u>1ER PARCIAL ANALISIS MAT I</u>

Nombre y Apellido……………………………………………DNI………………………

En cada ejercicio escribe todos los razonamientos que justifican la respuesta

1.- a) Define función par y función impar. Indica si la siguiente función es par o impar $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$. Justifica.

b) Encuentra la función inversa de la función dada, y determina el dominio de la función y el de su inversa $f(x)=-4e^{2x}$. Haz los gráficos correspondientes.

2.- a) Si $f(x)=\dfrac{ax+1}{-4x+b}$ verifica que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ *y* $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=+\infty$, determina a y b y grafica la curva.

b) Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{senx}{x}=1$ demuestra que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$

3.- a) Determina las asíntotas, si existen $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+2x-3}$. Haz un gráfico aproximado de la función y sus asíntotas.

b) Escribir V o F y justificar

"Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{2-x}{2x}$, $g(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{x}$, la función $f_0 g$ tiene una discontinuidad esencial en x=2.

4. - a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación

$x^2+y^2-xy=7$ en los puntos de abscisa x=2

b) Verificar que la siguiente función cumple las condiciones del Teorema de Lagrange en el intervalo [-1, 2] y hallar el punto "c

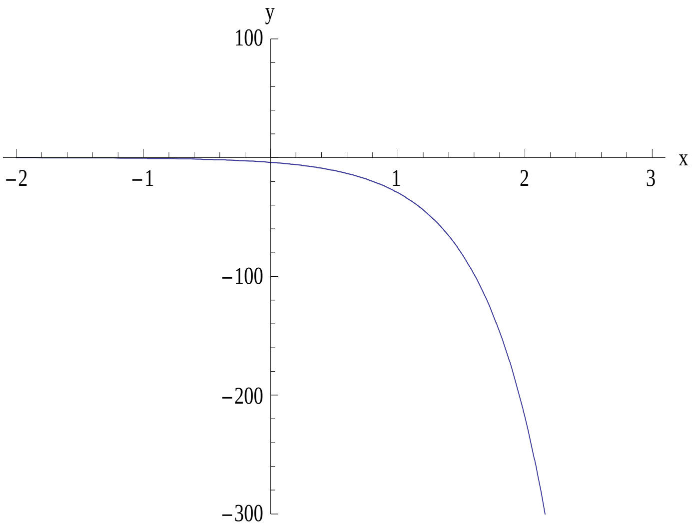
$$f(x)=\begin{cases}-2x^3+8 \; si \; x\le 1\\ \dfrac{6}{x} \; si \; x>1\end{cases}$$

SOLUCIÓN

1.a) Las definiciones pedidas fueron dadas en clase.
Para ver si f es par o impar planteamos:

$$f(-x)=\frac{-x}{1+(-x)^2}=-\frac{x}{1+x^2}=-f(x) \quad \text{por lo tanto f es impar}$$

b) Dada $f(x)=-4e^{2x}$ determinemos dominio e imagen para que sea biyectiva. El dominio es el conjunto de números reales. Para determinar la imagen graficamos:



De donde deducimos que $\mathrm{Im}_f=(-\infty,0)$. La función es inyectiva ya que trazando rectas horizontales al gráfico cuando lo corta lo corta en un solo punto. Por lo que si definimos f de la siguiente manera: $f:R\to(-\infty,0)\,/\,f(x)=-4e^{2x}$ es biyectiva. Busquemos su inversa que sabemos que cumple con: $f^{-1}:(-\infty,0)\to R$

$$y=-4e^{2x} \quad\Rightarrow\quad \frac{y}{-4}=e^{2x} \quad\Rightarrow\quad \ln\left(\frac{y}{-4}\right)=2x \quad\Rightarrow\quad x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{y}{-4}\right)$$

Ahora hacemos el cambio de variables y escribimos la respuesta completa:

$$f^{-1}:(-\infty,0)\to R\,/\,f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{x}{4}\right)$$

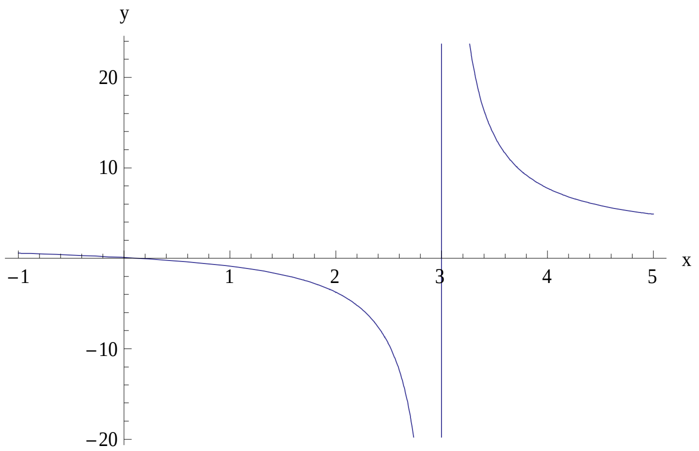
2 a) Calculemos los límites para que $f(x)=\dfrac{ax+1}{-4x+b}$ verifique lo pedido:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+1}{-4x+b}=\frac{a}{-4}=2\Rightarrow a=-8$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{-8x+1}{-4x+b} = \infty \quad \Rightarrow \quad -4.3+b=0 \quad \wedge \quad -8.3+1\neq 0 \quad \Rightarrow \quad b=12$$

Luego los valores que hacen que la curva cumpla con lo solicitado son a = -8 y b = 12, con lo cual

$f : R-\{3\} \to R-\{2\} \,/\, f(x) = \dfrac{-8x+1}{-4x+12}$ función homográfica con gráfico:



b)
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}\,\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{sen^2 x}{x(1+\cos x)} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{senx\; senx}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{senx}{x}\,\frac{senx}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{senx}{x} \lim_{x\to 0} \frac{senx}{1+\cos x} = 1.0 = 0$$

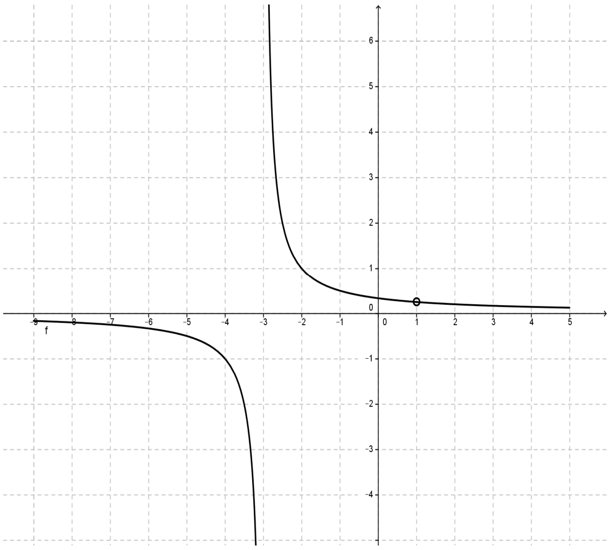
3. a) Para hallar las asíntotas de $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+2x-3}$ calculamos los ceros del denominador, ya que al ser un cociente de polinomios, la única posibilidad que haya asíntota vertical es que se anule el denominador. Los ceros del denominador son x = 1 y x = -3. Tomemos los límites respectivos:

$$\lim_{x\to -3} \frac{x-1}{x^2+2x-3} = \infty \quad \Rightarrow \quad x=-3 \quad AV$$

$\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x+3)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x+3)} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow$ no tenemos asíntota vertical en x = 1.

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x-1}{x^2+2x-3} = 0 \quad \Rightarrow \quad y=0 \quad AH$$

Gráfico:



b) $f(x)=\dfrac{2-x}{2x}$, $g(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{x}$

$g: R-\{0\}\rightarrow R$

$f: R-\{0\}\rightarrow R-\{-1/2\}$

Como la imagen de g no está incluida en el dominio de f debemos restringir dominio de g:

$$x\in D_g \quad \wedge \quad g(x)\in D_f$$
$$x\neq 0 \quad \wedge \quad \frac{x}{2}-\frac{2}{x}\neq 0$$
$$x\neq 0 \quad \wedge \quad \frac{x^2-4}{2x}\neq 0$$
$$x\neq 0 \quad \wedge \quad x\neq 2 \quad \wedge \quad x\neq -2$$

Luego D^*_g = R – {0,2,-2} y podemos componer:

$$f\circ g: R-\{0,2,-2\}\rightarrow R-\{-1/2\} / \ f\circ g(x)=f(g(x))=f\left(\frac{x^2-4}{2x}\right)=\frac{2-\frac{x^2-4}{2x}}{2\frac{x^2-4}{2x}}=\frac{\frac{4x-x^2+4}{2x}}{\frac{x^2-4}{x}}$$

$$=\frac{4x-x^2+4}{2(x^2-4)}$$

Para saber si x = 2 es una discontinuidad esencial calculamos el límite en ese punto:

$\lim_{x \to 2} \frac{4x+4-x^2}{2(x^2-4)} = \infty$ luego x = 2 es una discontinuidad esencial de salto infinito de la función compuesta.

4.a) Primero vamos a reemplazar x = 2 en la ecuación de la curva $x^2 + y^2 - xy = 7$ para saber en qué puntos debemos hallar la recta tangente:

$$2^2 + y^2 - 2y = 7 \quad \Rightarrow \quad y^2 - 2y - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -1 \quad y_2 = 3$$

Es decir los puntos son (2,-1) y (2,3) (La curva es una elipse rotada, no es función sino relación). Como está dada en forma implícita derivamos teniendo en cuenta que y es función de x:

$$x^2 + y^2 - xy = 7 \quad \Rightarrow \quad 2x + 2yy' - (y + xy') = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + 2yy' - y - xy') = 0$$

$$y'(2y - x) = y - 2x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{y-2x}{2y-x}$$

Buscamos la recta tangente en (2,-1). Para esto reemplazamos en y' por el punto para obtener la pendiente de dicha recta:

$$\left.\frac{y-2x}{2y-x}\right|_{\substack{x=2 \\ y=-1}} = \frac{-1-4}{-2-2} = \frac{5}{4}$$

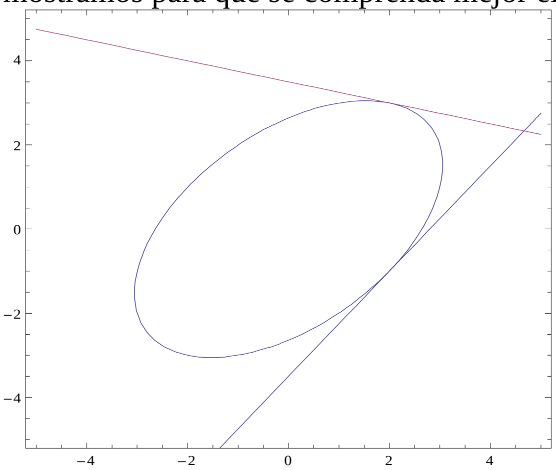
Luego la ecuación buscada es: $y + 1 = \frac{5}{4}(x-2) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{5}{4}x - \frac{7}{2}$

Para el otro punto procedemos de la misma manera:

$$\left.\frac{y-2x}{2y-x}\right|_{\substack{x=2 \\ y=3}} = \frac{3-4}{6-2} = \frac{-1}{4}$$

Luego la ecuación buscada es: $y - 3 = \frac{-1}{4}(x-2) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$

El gráfico no se pide ya que no saben cómo graficar la función implícita, igualmente lo mostramos para que se comprenda mejor el ejercicio:



b) El teorema de Lagrange tiene las hipótesis de continuidad en [a,b] y la derivabilidad en (a,b). Comencemos estudiando la **continuidad** de la función dada en el intervalo [-1,2]

Al ser f una función definida por partes debemos considerar diferentes situaciones

$$f(x) = \begin{cases} -2x^3 + 8 \ si \ x \le 1 \\ \frac{6}{x} si \ x > 1 \end{cases}$$

-1< a < 1

$$\lim_{x \to a} (-2x^3 + 8) = -2a^3 + 8 = f(a) \quad \Rightarrow$$ f es continua en x = a

a = 1

$$\lim_{x \to 1^-} (-2x^3 + 8) = 6$$
$$\lim_{x \to 1+} (6/x) = 6$$

Los límites laterales son iguales, por lo tanto existe el límite en a = 1 y vale 6 que también coincide con el valor de la función en dicho punto. Por lo tanto f es continua en a = 1.

1 < a < 2

$$\lim_{x \to a} (6/x) = 6/a = f(a) \quad \Rightarrow$$ f es continua en x = a.

De lo demostrado hasta ahora concluimos que f es continua en (-1,2). Falta estudiar a la derecha de a = -1 y a la izquierda de a = 2.

a= -1

$$\lim_{x \to -1^+} (-2x^3 + 8) = 10 = f(-1) \quad \Rightarrow$$ f es continua por derecha en a = -1

a= 2

$$\lim_{x \to 2^-} (6/x) = 3 = f(2) \quad \Rightarrow$$ f es continua por izquierda en a = 2.

Con esto completamos la continuidad en [-1,2]. Ahora debemos buscar f'. Para esto primero derivamos en los intervalos (-1,1) y (1,2) y luego buscaremos f'(1):

-1 < x < 1

$$f'(x) = -6x^2$$

1 < x < 2

$f'(x) = -6/x^2$

x = 1

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(-2x^3+8)-6}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-2x^3+2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-2(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1^-} -2(x^2+x+1) = -6$$

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{6/x-6}{(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{6-6x}{x}}{(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{-6(x-1)}{x}}{(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-6}{x} = -6$$

Luego las derivadas laterales son iguales por lo tanto la función es derivable en x = 1 y podemos escribir la función derivada en el intervalo (-1,2) de la siguiente manera:

$$f'(x) = \begin{cases} -6x^2 & -1 < x \le 1 \\ -6/x^2 & 1 < x < 2 \end{cases}$$

Luego por el teorema de Lagrange existe c que pertenece a (-1,2) tal que:

$$f'(c) = \frac{f(2)-f(-1)}{2+1} = \frac{3-10}{3} = -\frac{7}{3}$$

Para buscar c igualamos las dos expresiones de la derivada a -7/3:

$f'(c) = -6x^2 = -\frac{7}{3} \quad \Rightarrow x^2 = \frac{7}{18} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{7}{18}} \cong \pm 0.62$ los dos valores pertenecen al intervalo en cuestión. Busquemos para la otra expresión:

$f'(c) = -6/x^2 = -\frac{7}{3} \quad \Rightarrow x^2 = \frac{18}{7} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{18}{7}} \cong \pm 1.60$ en este caso sólo el valor positivo pertenece al intervalo. Luego los puntos que verifican la tesis del teorema son:

$$c_1 = \sqrt{\frac{7}{18}} \quad c_2 = -\sqrt{\frac{7}{18}} \quad c_3 = \sqrt{\frac{18}{7}}$$