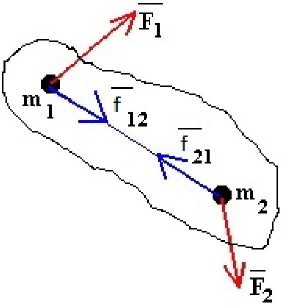
Dinámica de un sistema de partículas

En un sistema de partículas tenemos las interacciones entre las partículas del sistema y las interacciones entre ellas y otras partículas que están fuera del sistema. Denotaremos como $\vec{f}_{ij}$ a la fuerza sobre la partícula i debida a la partícula j y $\vec{F}_i$ a la resultante de las fuerzas exteriores sobre la partícula i. Para dos partículas el grafo de interaccioes sería:



Las ecuaciones de movimiento son:

1. $\vec{f}_{12} + \vec{F}_1 = m_1 \vec{a}_1$
2. $\vec{f}_{21} + \vec{F}_2 = m_2 \vec{a}_2$

Sumando miembro a miembro las dos ecuaciones vemos que las interacciones se cancelan por el principio de acción y reacción ($\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$) quedando entonces:

- $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2$

Finalmente, multiplicando y dividiendo el segundo miembro por la masa total $M = m_1 + m_2$ resulta:

- $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = M \vec{a}_{cm}$

Donde $\vec{a}_{cm} = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_{cm}$ con $\vec{r}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$

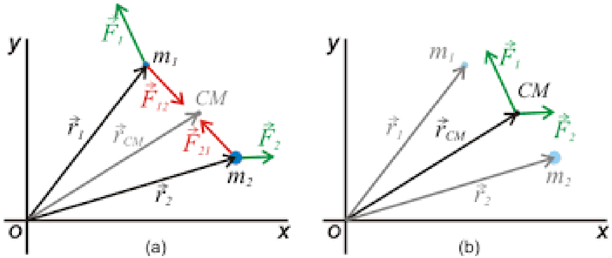
La generalización para N partículas es inmediata:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = M \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \right)$$

Las fuerzas exteriores concurren al *centro de masa del sistema:*

Centro de Masa

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$



Cantidad de movimiento

Def:Cantidad de movimiento de un sistema de N partículas como

Cantidad de movimiento

- $\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$
- $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$

Usando la definición anterior podemos escribir:

- $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = M \frac{d}{dt} \vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{P}}{dt}$

Luego podemos enunciar el siguiente:

Teorema de conservación de la Cantidad de Movimiento

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- La resultante de las fuerzas exteriores es nula $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0$
- La velocidad del centro de masa permanece constante
- La cantidad de movimiento del sistema se conserva

Impulso entregado por una fuerza y cantidad de movimiento

Consideremos una fuerza sobre una partícula de masa m constante que varía con el tiempo, es decir, de la forma $\vec{F}(t)$. La segunda ley de Newton puede escribirse entonces como una ecuación de primer orden de la forma:

$$\vec{F}(t) = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

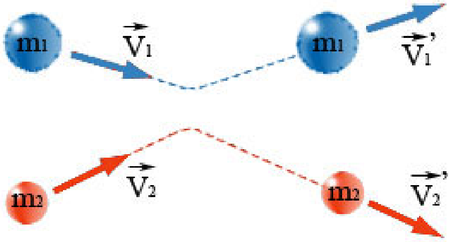
Integrando en un intervalo de tiempo finito $[t_0, t]$ resulta:

El impulso entregado por la fuerza en un intervalo de tiempo es igual a la variación de la cantidad de movimiento

$$\int_{t_0}^{t} \vec{F}(t')dt' = \int_{\vec{p}(t_0)}^{\vec{p}(t)} d\vec{p}' = \vec{p}(t) - \vec{p}(t_0)$$

Choques

En general, en un choque o colisión, dos partículas de masas m_1 y m_2 se aproximan con velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ respectivamente a una región del espacio donde van a interactuar (la zona de interacción). Cuando emergen de dicha zona luego de la interacción, se dispersan con velocidades finales $\vec{v'}_1$ y $\vec{v'}_2$



Como durante la colisión las fuerzas sobre las partículas son interacciones $\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$ entonces la resultante de las fuerzas exteriores es nula y por lo tanto la cantidad de movimiento como la velocidad del centro de masa del sistema se conservan:

Conservación de la cantidad de movimiento

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v'}_1 + m_2 \vec{v'}_2$$

El problema de calcular las velocidades finales conociendo las velocidades iniciales no puede resolverse

- 3D 3 ecuaciones, 6 incógnitas
- 1D 1 ecuación, 2 incógnitas

Choques

El sistema de coordenadas del centro de masa

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

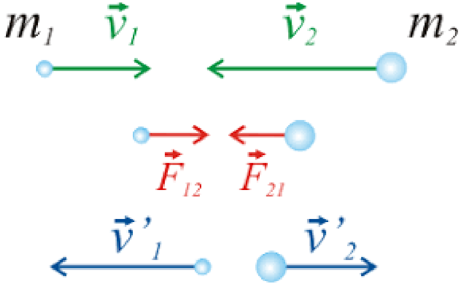
Variación de energía cinética en el sistema laboratorio $(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$

- $\Delta E_c = \frac{1}{2}\left(m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2\right) - \frac{1}{2}\left(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2\right)$

Variación de energía cinética en el sistema centro de masa $(\vec{r}_{CM}, \vec{r})$

- $\Delta E_c = \frac{1}{2}\mu\left(v'^2 - v^2\right)$
- Masa reducida: $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$, v: velocidad relativa inicial, v': velocidad relativa final

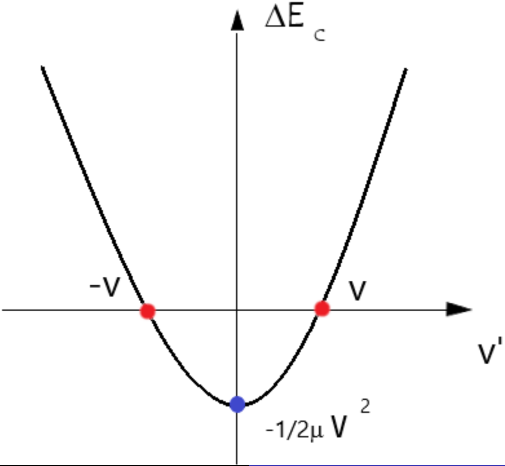
En el caso unidimensional las velocidades iniciales y finales están en la misma dirección (pueden considerarse escalares). Entonces las ecuaciones de conservación de $\vec{P}$ y de ΔE_c definen dos ecuaciones con dos incógnitas y permiten despejar las dos velocidades finales.



Variación de la energía cinética: Casos singulares

$\Delta E_c \left(v'\right)$

- $\Delta E_c = \frac{1}{2}\mu \left(v'^2 - v^2\right)$

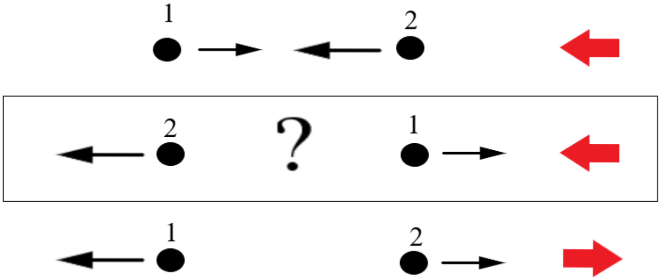


Tipos de choque I

Choque perfectamente elástico $\Delta E_c = 0$

$$v^2 = v'^2 \implies v = \pm v$$

En realidad las velocidades relativas deben tener distinto signo. El caso $v = v'$ corresponde a una solución extraña. Ejemplo: partículas idénticas ($m_1 = m_2 = m$)



Tipos de choque I (bis)

Choque perfectamente elástico $\Delta E_c = 0$

$$\begin{aligned} m_1 v_1' + m_2 v_2' &= m_1 v_1 + m_2 v_2 = p \\ v_2' - v_1' &= v_1 - v_2 = -v \end{aligned}$$

Si conocemos las velocidades iniciales y las incógnitas son las velocidades finales, las anteriores pueden formularse matricialmente:

Choque perfectamente elástico $\Delta E_c = 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} m_1 & m_2 & p \\ -1 & 1 & -v \end{array} \right)$$

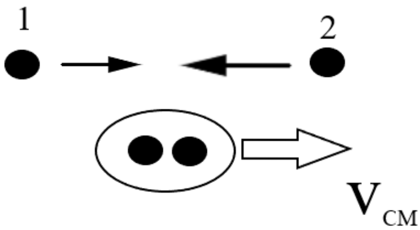
Tipos de choque II

Choque plástico, máxima perdida de energía cinética $\Delta E_c = -\frac{1}{2}\mu v^2$

$$v' = 0 \Longrightarrow v'_1 = v'_2 = v_{CM}$$

Choque plástico $-\Delta E_c = max$

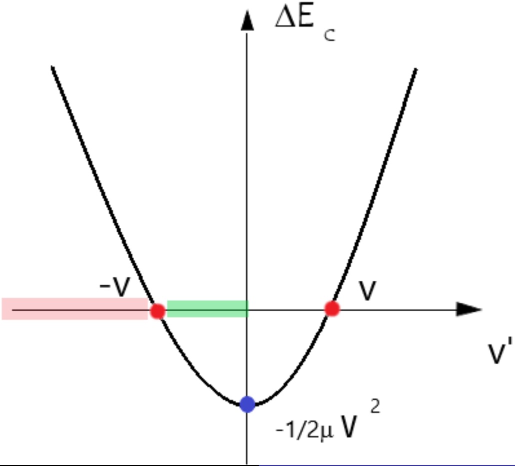
$$\begin{aligned} m_1 v'_1 + m_2 v'_2 =& m_1 v_1 + m_2 v_2 = p \\ v'_2 - v'_1 =& 0 \end{aligned}$$



Variación de la energía cinética: Casos regulares

$\Delta E_c \left(v'\right)$

- $\Delta E_c = \frac{1}{2}\mu\left(v'^2 - v^2\right)$



Tipos de choque III

Def: Coeficiente de restitución:

$$k = -\frac{v'}{v} = -\frac{v_2' - v_1'}{v_2 - v_1}$$

Choque semielástico $-\frac{1}{2}\mu v^2 < \Delta E_c < 0 \Longrightarrow -v < v' < 0$

$$0 < k < 1$$

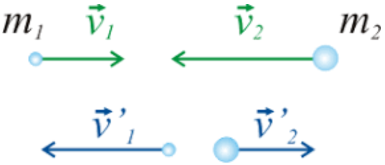
Choque explosivo $\Delta E_c > 0 \Longrightarrow v' < -v$

$$k > 1$$

Casos singulares:

- Choque perfectamente elástico $k = 1$
- Choque plástico $k = 0$

Choques en una dimensión: Síntesis



La siguiente ecuación matricial resuelve todos los choques posibles:

k>0 parametriza todos los tipos de choques

$$\left(\begin{array}{cc|c} m_1 & m_2 & p \\ -1 & 1 & -kv \end{array}\right)$$

- $k = 1$ choque perfectamente elástico
- $k = 0$ choque plástico
- $0 < k < 1$ choque semielástico
- $k > 1$ choque explosivo