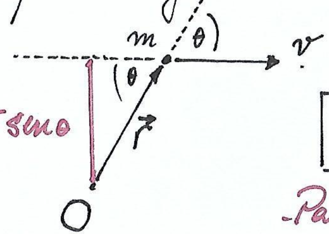
Impulso angular:

1P)



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

$$\boxed{\begin{aligned} L &= m r \operatorname{sen}\theta\, v \\ &= m v b \end{aligned}}$$

Parámetro de impacto

Teorema de conservación del impulso angular:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = m(\dot{\vec{r}} \times \vec{v}) + m(\vec{r} \times \dot{\vec{v}})$$

$$= \cancel{m(\vec{v} \times \vec{v})} + \vec{r} \times m\vec{a}$$

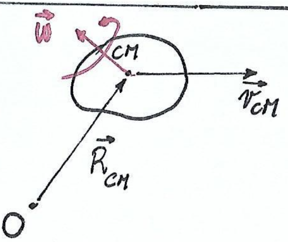
0

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

"El momento de la fuerza neta es la tasa de cambio instantánea del impulso angular"

$$\Rightarrow \text{Si } \vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{L} = cte}$$

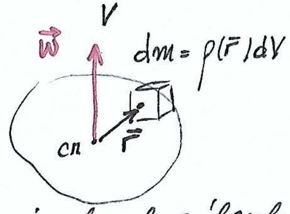
Sólido rígido: Si $P = CM$



$$\vec{L} = \vec{L}_{orb} + \vec{L}_{rot}$$

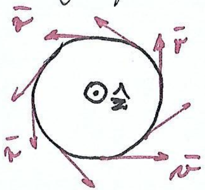
$$= \underbrace{M(\vec{R}_{CM} \times \vec{v}_{CM})}_{\vec{L}_{orb}} + \vec{L}_{rot}$$

$$\vec{L}_{rot} = \int_V \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\, \rho(\vec{r})\, dV$$



Haciendo el cálculo para:

- problemas coplanares. ($\vec{v} \perp \hat{z}$,
- rotaciones alrededor de un eje paralelo al eje de simetría



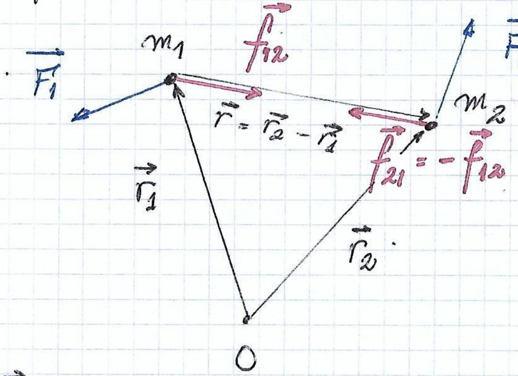
$$\boxed{\vec{L}_{rot} = I_{cm}\, \omega\, \hat{z}}$$

Si $P = EIR$ $\Rightarrow$ se anula el $\vec{L}_{orb}$!

El movimiento se reduce a una rotación pura:

$$\boxed{\vec{L}_{rot\text{-}pura} = I_{EIR}\, \omega}$$

"Las interacciones en los sistemas de partículas no hacen momento."



$$\vec{M}_0 = \vec{r}_1 \times (\vec{F}_1 + \vec{f}_{12}) + \vec{r}_2 \times (\vec{F}_2 + \vec{f}_{21})$$

$$= \underbrace{\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2}_{} + \vec{r}_1 \times \vec{f}_{12} + \vec{r}_2 \times \vec{f}_{21}$$

$$= \vec{M}_0^{ext} + \vec{r}_1 \times (-\vec{f}_{21}) + \vec{r}_2 \times \vec{f}_{21}$$

$$= \vec{M}_0^{ext} + \underbrace{\cancel{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{f}_{21}}}_{=0}$$

Teorema de conservación del impulso angular para un sistema de partículas:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_0^{ext}}$$

$\Downarrow$

<u>también vale para el sólido!</u>

$$\Rightarrow \text{si } \vec{M}_0^{ext} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

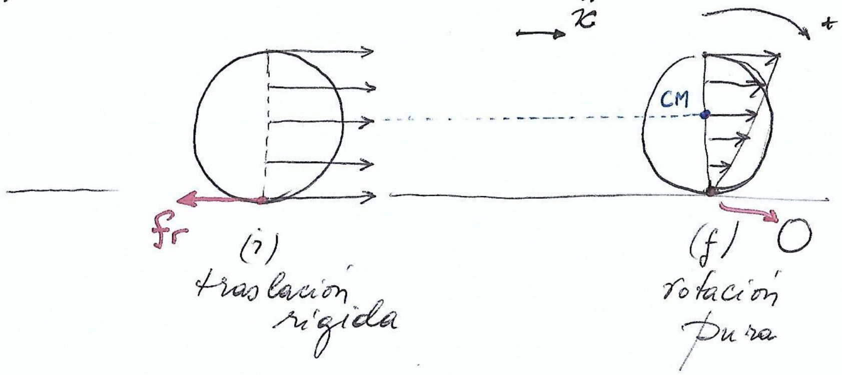
$$\text{y} \quad \bar{L} = cte$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\vec{L}_i = \vec{L}_f}$$

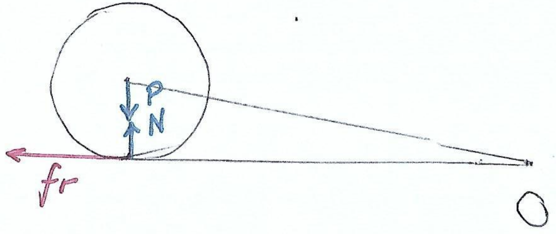
NOTA

5.32)

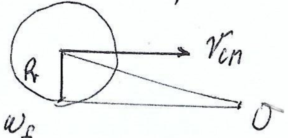


VISTO DESDE O (EIR)

- El momento de las fuerzas exteriores es nulo (Los momentos del peso y la normal se cancelan mutuamente y la fuerza de rozamiento es colineal con la posición)



$$L_i = m v_{cm} R$$



$$L_f = \left(\frac{2}{5} mR^2 + mR^2\right)\omega_f = \frac{7}{5} mR^{\cancel{2}} \frac{v_f}{\cancel{R}}$$

Como $L_i = L_f \Rightarrow \cancel{m} v_{cm} \cancel{R} = \frac{7}{5} \cancel{m} R\, v_f \Rightarrow \boxed{v_f = \frac{5}{7} v_{cm}}$

VISTO DESDE CM: la fuerza de rozamiento hace momento $\Rightarrow \frac{dL}{dt} \neq 0$

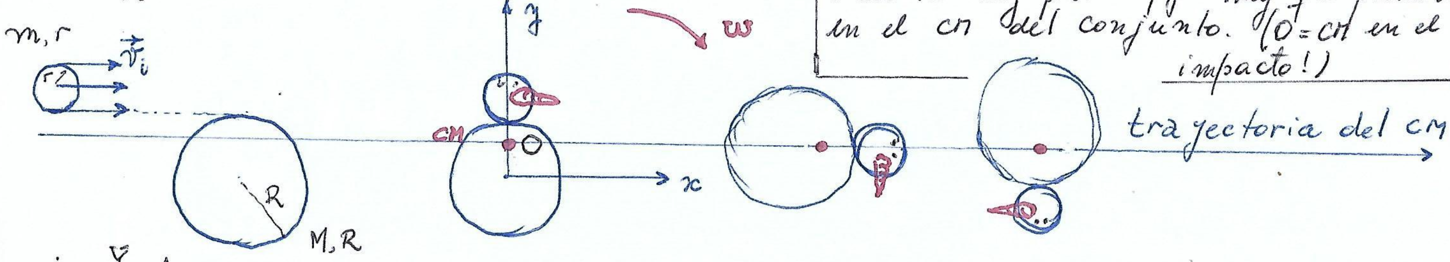
$$\left.\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= f_r R \Rightarrow dL = f_r R\, dt \text{ y } L_f - L_i = f_r R \Delta t \\ \frac{dp}{dt} &= -f_r \Rightarrow dp = -f_r\, dt \text{ y } p_f - p_i = -f_r \Delta t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{L_f - L_i = R(p_i - p_f)}$$

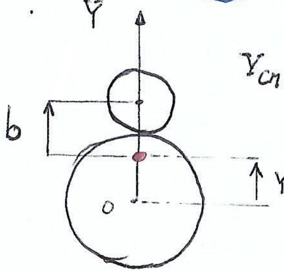
$$L_i = 0;\ L_f = I_{cm}\omega_f = \frac{2}{5} mR^2 \frac{v_f}{\cancel{R}} = \frac{2}{5} mR v_f \Rightarrow \frac{2}{5} \cancel{m}\cancel{R} v_f = \cancel{R}(v_{cm} - v_f)\cancel{m} \Rightarrow \frac{7}{5} v_f = v_{cm}$$

$$\boxed{v_f = \frac{5}{7} v_{cm}}$$

5.47

como no hay punto fijo hay que pararse en el cm del conjunto. (O = cm en el impacto!)





$$\underbrace{Y_{cm} = \frac{m}{M+m}(R+r)}_{Y_{cm}} \; ; \quad b = (R+r)\left(1 - \frac{m}{M+m}\right) = \underbrace{\frac{M}{M+m}(R+r)}_{b}$$

Un observador "lejano" ve un choque plástico $\boxed{\vec{v}_{cm} = \frac{m\,\vec{v}_i}{m+M} = cte}$

Para calcular w después del impacto planteo la conservación de $\vec{L}$ vista desde O (cm del conjunto al momento del impacto)

$L_i = L_f$ (los momentos de las fuerzas exteriores son cero)

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{orbital del} \\ \text{disco pequeño}}}{L_i =} \; m v_i b \qquad \underset{\substack{\downarrow \\ \text{rotación} \\ \text{pura del} \\ \text{"muñeco" tomando} \\ P = CM}}{L_f =} \; I_{cm} w = \Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}MR^2 + M Y_{cm}^2 + \tfrac{1}{2} m r^2 + m b^2}_{I_{cm}}\Big)\, w$$

$$\boxed{w = \frac{m\, b\, v_i}{I_{cm}}}$$