DINAMICA DEL SISTEMA DE PARTICULAS

Vamos a enfocarnos en dos conceptos nuevos, *momento lineal* e *impulso*, y una nueva ley de conservación, la de *conservación del momento lineal*, tan importante como la de conservación de la energía. En el ámbito de la mecánica newtoniana, la conservación del momento lineal nos permite analizar muchas situaciones que serían muy difíciles si tratáramos de aplicar las leyes de Newton directamente.

Momento Lineal

De acuerdo a la segunda ley de Newton para una partícula de masa constante *m*:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$$

Siendo $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

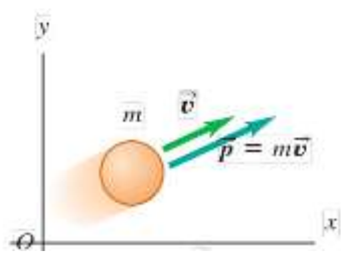
Podemos reemplazar en la segunda ley de Newton $\Sigma\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$

Y podemos introducir *m* en la derivada porque es constante $\Sigma\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$ (1)

Al producto de la masa y la velocidad de la partícula $(m\vec{v})$ lo llamamos *momento lineal o cantidad de movimiento de la partícula* y su símbolo es la letra $\vec{p}$.

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Las unidades del momento lineal en el SI son $kg\frac{m}{s}$



El momento lineal es una cantidad vectorial con la misma dirección y sentido que la velocidad de la partícula.

A menudo expresamos el momento lineal de una partícula en términos de sus componentes. Si la partícula tiene componentes de velocidad v_x, v_y y v_z, entonces sus componentes de momento lineal p_x, p_y y p_z están dadas por:

$$p_x = mv_x \qquad p_y = mv_y \qquad p_z = mv_z$$

Si sustituimos en la ecuación (1), con la definición de momento lineal:

$$\Sigma\vec{F} = \frac{d(\vec{p})}{dt} \quad (2)$$

Así, la segunda ley de Newton dice que la fuerza neta que actúa sobre una partícula es igual a la rapidez de cambio del momento lineal de la partícula.

Teorema del Impulso y el Momento Lineal

Consideremos primero una partícula sobre la cual actúa una fuerza neta constante $\Sigma\vec{F}$ durante un intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$

El impulso de la fuerza neta $\vec{I}$ se define como el producto de la fuerza neta y el intervalo de tiempo

$$\vec{I} = \Sigma\vec{F}\,\Delta t = \Sigma\vec{F}\,(t_2 - t_1) \quad \text{(suponiendo una fuerza neta contante)} \quad (3)$$

El impulso es una cantidad vectorial con la misma dirección y sentido que la fuerza neta.

Las unidades de impulso en el SI son el newton-segundo [N . s]

Volviendo a la ecuación (2), si la fuerza neta $\Sigma\vec{F}$ es constante, $\frac{d(\vec{p})}{dt}$ también es constante e igual al cambio total de momento lineal $(\vec{p}_2 - \vec{p}_1)$ durante el lapso $(t_2 - t_1)$, dividido dicho lapso:

$$\Sigma\vec{F} = \frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{t_2 - t_1}$$

Operando:

$$\Sigma\vec{F}\,(t_2 - t_1) = (\vec{p}_2 - \vec{p}_1)$$

Al comparar con la ecuación (3) obtenemos un resultado conocido como teorema del impulso y el momento lineal*: **El cambio del momento lineal de una partícula durante un intervalo de tiempo es igual al impulso de la fuerza neta que actúa sobre la partícula durante ese intervalo.***

$$\vec{I} = (\vec{p}_2 - \vec{p}_1) \quad \text{(teorema del impulso y el momento lineal)}$$

El teorema del impulso y el momento lineal también se cumple si las fuerzas no son constantes. Para comprobarlo, integramos los dos miembros de la ecuación (2) con respecto al tiempo entre los límites t_1 y t_2:

$$\int_{t1}^{t2} \Sigma\vec{F}dt = \int_{t1}^{t2} \frac{d(\vec{p})}{dt}\,dt = \int_{p1}^{p2} d(\vec{p}) = (\vec{p}_2 - \vec{p}_1)$$

La integral de la izquierda es, por definición, el impulso $\vec{I}$ de la fuerza neta $\Sigma\vec{F}$ durante este intervalo:

$$\vec{I} = \int_{t1}^{t2} \Sigma\vec{F}dt \qquad \text{(definición general de impulso)}$$

Es decir, si la sumatoria de todas las Fuerzas externas es cero, la cantidad de movimiento p se mantiene constante. Siendo que p es el vector v multiplicado por la masa, esto indica que la velocidad v también se mantiene constante porque la masa la consideramos constante.

Dicho de otra forma y confirmando la primera ley de Newton, al no existir fuerzas externas, la aceleración es nula y la velocidad se mantiene constante.

Centro de masa

El concepto de momento lineal tiene especial importancia en situaciones en las que interactúan dos o más cuerpos.

Supongamos que tenemos varias partículas con masas m_1, m_2, etcétera. Las coordenadas de m_1 son (x_1, y_1), las de m_2 son (x_2, y_2), y así sucesivamente. Definimos el *centro de masa del sistema* como el punto con coordenadas (x_{cm}, y_{cm}) dadas por:

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots} = \frac{\sum_i m_ix_i}{\sum_i m_i}$$

$$y_{cm} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots} = \frac{\sum_i m_iy_i}{\sum_i m_i}$$

El vector posición del centro de masa se puede expresar en términos de los vectores posición de las partículas como:

$\overrightarrow{r_{cm}} = \frac{m_1\overrightarrow{r_1} + m_2\overrightarrow{r_2} + m_3\overrightarrow{r_3} \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots} = \frac{\sum_i m_i\overrightarrow{r_i}}{\sum_i m_i}$ Posición del centro de masa desde el origen (4)

En la terminología estadística, el centro de masa es una posición media ponderada por la masa de las partículas.

Movimiento del centro de masa

Para comprender la importancia del centro de masa de un conjunto de partículas, debemos preguntar qué le sucede cuando las partículas se mueven. Las componentes x e y de velocidad del centro de masa, v_{cm-x} y v_{cm-y} son las derivadas de x_{cm} e y_{cm} respecto al tiempo:

$$v_{cm-x} = \frac{m_1v_{1x} + m_2v_{2x} + m_3v_{3x} + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots} = \frac{\sum_i m_iv_{ix}}{\sum_i m_i}$$

$$v_{cm-y} = \frac{m_1v_{1y} + m_2v_{2y} + m_3v_{3y} + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots} = \frac{\sum_i m_iv_{iy}}{\sum_i m_i}$$

Estas ecuaciones son equivalentes a la ecuación de un solo vector que se obtiene al derivar la ecuación (4) respecto al tiempo:

$$\overrightarrow{v_{cm}} = \frac{m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} + m_3\overrightarrow{v_3} \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots} = \frac{\sum_i m_i\overrightarrow{v_i}}{\sum_i m_i}$$

Si llamamos M a la masa total $m_1 + m_2 + m_3 + \ldots$ podemos reescribir la ecuación anterior como:

$$M\overrightarrow{v_{cm}} = m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} + m_3\overrightarrow{v_3} \ldots \qquad (5)$$

Ahora bien, el momento lineal total de un sistema con cualquier número de partículas m_1, m_2, m_3, …… se define como la suma vectorial de los momentos lineales de cada partícula individual.

$$\vec{P} = \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} + \ldots = m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} + \ldots$$

Entonces, el segundo miembro de la ecuación (5) representa el momento lineal total de un sistema de masas ($\vec{P}$) y queda así demostrado que ***el momento lineal total de un sistema es igual a la masa total multiplicada por la velocidad del centro de masa.***

$$M\overrightarrow{v_{cm}} = \vec{P} \qquad (6)$$

Por ejemplo, al atrapar una pelota, realmente estamos atrapando un conjunto de un gran número de moléculas de masas m_1, m_2, m_3, … El impulso que sentimos se debe al momento lineal total de ese conjunto, pero es el mismo que si estuviéramos atrapando una sola partícula de masa *M*= $m_1 + m_2 + m_3 + \ldots$ que se mueve con velocidad $\overrightarrow{v_{cm}}$

Fuerzas externas y movimiento del centro de masa

En cualquier sistema, las fuerzas que las partículas ejercen entre sí se denominan *fuerzas internas*; las ejercidas sobre cualquier parte del sistema por algún objeto externo son *fuerzas externas*.

En ausencia de fuerzas externas, decimos que nuestro sistema se encuentra *aislado*.

Dando un paso más, derivamos la ecuación (5) respecto al tiempo para obtener la aceleración del centro de masa en términos de las aceleraciones de las partículas individuales:

$$M\overrightarrow{a_{cm}} = m_1\overrightarrow{a_1} + m_2\overrightarrow{a_2} + m_3\overrightarrow{a_3} \ldots$$

Ahora bien $m_1\overrightarrow{a_1}$, es la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre la primera partícula, y así sucesivamente, por lo que el segundo miembro de la ecuación anterior es igual a la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre todas las partículas. Ya dijimos que estas fuerzas las podemos clasificar como *fuerza interna* o *fuerza externa* a nuestro sistema. La suma de todas las fuerzas que actúan sobre todas las partículas es entonces:

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_{ext} + \sum \vec{F}_{int} = M\overrightarrow{a_{cm}}$$

Según la tercera ley de Newton, si una partícula del sistema ejerce una fuerza sobre otra, la segunda ejerce sobre la primera una fuerza de la misma magnitud, pero dirección opuesta. Por lo tanto, todas las fuerzas internas se cancelan en pares ($\sum \vec{F}_{int} = 0$) La ecuación anterior queda:

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\overrightarrow{a_{cm}} \qquad (7)$$

Cuando actúan fuerzas externas sobre un cuerpo o un conjunto de partículas, el centro de masa se mueve como si toda la masa estuviera concentrada en ese punto y sobre ella actuara una fuerza neta igual a la suma de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema.

Este resultado explica por qué sólo fuerzas externas pueden afectar el movimiento de un cuerpo. Por ejemplo, supongamos que un proyectil con una trayectoria parabólica (ignorando la resistencia del aire, es decir, no hay fuerzas externas actuando sobre el cuerpo) estalla en pleno vuelo dividiéndose en dos partes de igual masa. Los fragmentos siguen nuevas trayectorias parabólicas, pero el centro de masa sigue la trayectoria parabólica original, igual que si la masa aún estuviera concentrada ahí.

Conservación del Momento Lineal

Hay otra forma útil de describir el movimiento de un sistema de partículas:

Siendo $\overrightarrow{a_{cm}} = \frac{d\overrightarrow{v_{cm}}}{dt}$, podemos escribir $M\overrightarrow{a_{cm}} = M\frac{d\overrightarrow{v_{cm}}}{dt}$

Introducimos *M* en la derivada porque es constante $M\overrightarrow{a_{cm}} = \frac{d(M\overrightarrow{v_{cm}})}{dt}$

De acuerdo a las ecuaciones (6) y (7)

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Si la suma vectorial de las fuerzas externas sobre un sistema es cero, el momento lineal total del sistema es constante y entonces la velocidad del centro de masa también es constante (la aceleración del centro de masa es cero)

Las interacciones entre las partículas del sistema pueden alterar los momentos lineales individuales de las partículas, pero el momento lineal total del sistema sólo puede cambiar si actúan fuerzas externas sobre el sistema.

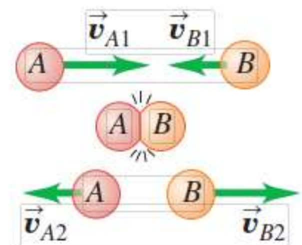
Choques

Llamamos *choque* a cualquier interacción en la que dos cuerpos ejercen, uno sobre el otro, fuerzas muy grandes durante un lapso muy breve.

Si las fuerzas entre los cuerpos son mucho mayores que las externas, como suele suceder en los choques, podemos ignorar las fuerzas externas y tratar los cuerpos como un sistema aislado. Entonces, ***el momento lineal total del sistema se conserva y tendrá el mismo valor antes y después del choque.***

Antes de estudiar los distintos tipos de choque, vamos a definir el coeficiente de restitución *k* como *la relación entre la velocidad relativa final y la velocidad relativa inicial de los dos cuerpos sometidos al choque.*

$$k = -\frac{v_{A2} - v_{B2}}{v_{A1} - v_{B1}}$$



Donde, v_{A2} es la velocidad del primer cuerpo después del choque.

v_{B2} es la velocidad del segundo cuerpo después del choque.

v_{A1} es la velocidad del primer cuerpo antes del choque.

v_{B1} es la velocidad del segundo cuerpo antes del choque.

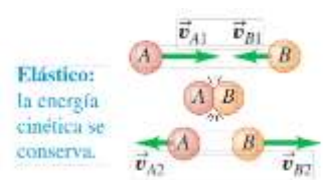
Clasificación de los choques

Un **choque plástico** (o totalmente inelástico) es aquel en el que los cuerpos se pegan y se mueven como uno solo después del choque. La conservación del momento lineal da la relación:

$m_A\overrightarrow{v_{A1}} + m_B\overrightarrow{v_{B1}} = (m_A + m_B)\overrightarrow{v_2}$

Siendo la velocidad final común para ambos cuerpos, el coeficiente de restitución será *k= 0.*

Un **choque elástico** se produce si las fuerzas entre los cuerpos son conservativas, de manera que no se pierde ni se gana energía mecánica en el choque y la energía cinética total del sistema es la misma antes y después. Por la conservación de la energía cinética tenemos:



$\frac{1}{2}m_A{v_{A1}}^2 + \frac{1}{2}m_B{v_{B1}}^2 = \frac{1}{2}m_A{v_{A2}}^2 + \frac{1}{2}m_B{v_{B2}}^2$

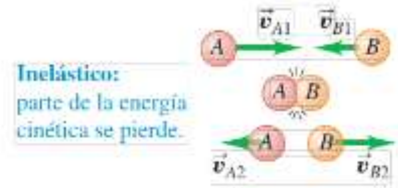
y la conservación del momento lineal da: $m_A\overrightarrow{v_{A1}} + m_B\overrightarrow{v_{B1}} = m_A\overrightarrow{v_{A2}} + m_B\overrightarrow{v_{B2}}$

En un choque rectilíneo elástico de dos cuerpos, las velocidades relativas antes y después del choque tienen la misma magnitud pero signo opuesto, por lo tanto el coeficiente de restitución será *k= 1.*

Un **choque semi elástico** (o inelástico) es aquel en el que la energía cinética final es menor que la inicial, aunque los cuerpos no se mueven como uno solo después del choque.

La conservación del momento lineal da: $m_A\overrightarrow{v_{A1}} + m_B\overrightarrow{v_{B1}} = m_A\overrightarrow{v_{A2}} + m_B\overrightarrow{v_{B2}}$

Y el coeficiente de restitución está comprendido entre 0< *k*< *1.*



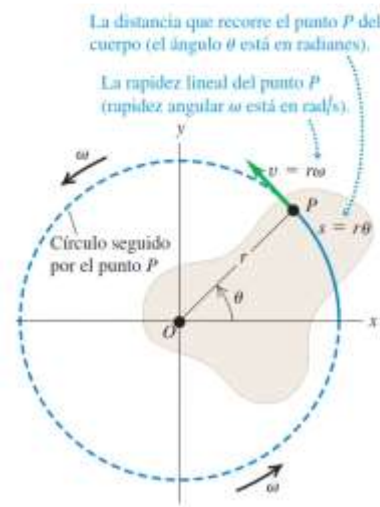
Velocidad de rotación de un cuerpo rígido

A partir de ahora, vamos a considerar los cuerpos con tamaño y forma definidos que, en general, pueden tener movimiento rotacional además de trasladarse.

Llamamos *cuerpo rígido* a un modelo idealizado de cuerpo con forma y tamaño perfectamente definidos e inmutables.

Cuando un cuerpo rígido gira sobre un eje fijo, todas sus partículas se mueven en una trayectoria circular. El círculo yace en un plano perpendicular al eje y está centrado en el mismo.

En la figura, el punto *P* está a una distancia constante *r* del eje de rotación, así que se mueve en un círculo de radio *r*. En cualquier instante, el ángulo Θ (en rad) y la longitud de arco *s* están relacionadas por:



$$s = r.\theta$$

Si derivamos con respecto al tiempo y obtenemos el valor absoluto de ambos lados (*r* es constante para una partícula específica)

$$\left|\frac{ds}{dt}\right| = r\left|\frac{d\theta}{dt}\right|$$

El primer miembro de la ecuación anterior es igual al valor absoluto de la velocidad lineal instantánea de la partícula. De manera análoga, $\left|\frac{d\theta}{dt}\right|$ es el valor absoluto de la velocidad angular instantánea.

$$v = r.\omega \quad (8)$$

Energía en el Movimiento Rotacional y Momento de Inercia

Consideremos que el cuerpo está formado por un gran número de partículas, con masas m_1, m_2, …, a distancias r_1, r_2, … del eje de rotación. Como las partículas no tienen que estar necesariamente todas en el mismo plano, especificamos que r_i es la distancia ***perpendicular*** de la partícula m_i al eje.

Como vimos anteriormente, cuando un cuerpo rígido gira sobre un eje fijo, el valor absoluto de la velocidad v_i de cada partícula está dada por la ecuación (8), siendo ω igual para todas (si no, el cuerpo no sería rígido)

$$v_i = r_i.\omega$$

La energía cinética de cada partícula es:

$$\frac{1}{2}m_i{v_i}^2 = \frac{1}{2}m_i{r_i}^2\omega^2$$

La energía cinética total del cuerpo es la suma de las energías cinéticas de todas sus partículas:

$$E_c = \sum \frac{1}{2} m_i {r_i}^2 \omega^2$$

Ordenando:

$$E_c = \frac{1}{2} (\sum m_i {r_i}^2) \omega^2$$

La cantidad entre paréntesis, que se obtiene multiplicando la masa de cada partícula por el cuadrado de su distancia al eje de rotación y sumando los productos, se indica con I y es el *momento de inercia del cuerpo con respecto a este eje de rotación.*

$I = \sum_i m_i {r_i}^2$ (definición del momento de inercia)

Para un cuerpo con un eje de rotación dado y una masa total dada, cuanto mayor sea la distancia del eje a las partículas que constituyen el cuerpo, mayor será el momento de inercia. En un cuerpo rígido, las distancias r_i son constantes, en tanto que I es independiente de cómo gira el cuerpo en torno al eje dado.

La unidad del momento de inercia en el SI es el ($kg.m^2$)

La energía cinética rotacional de un cuerpo rígido se puede entonces expresar como:

$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2$ (energía cinética rotacional de un cuerpo rígido)

La energía cinética así calculada es simplemente la suma de las energías cinéticas de las partículas que constituyen el cuerpo rígido en rotación.

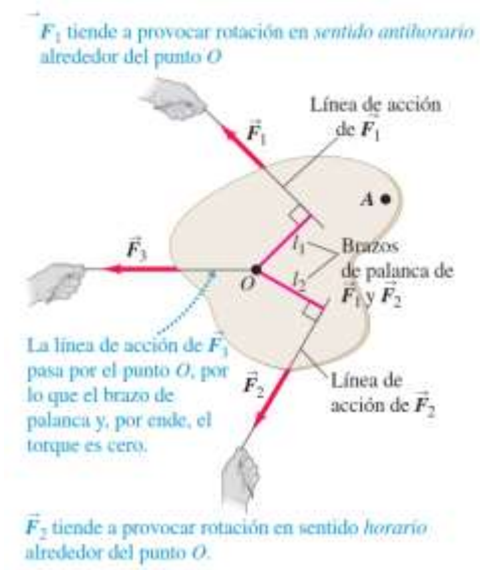
El momento de inercia es una medida de la resistencia de un cuerpo a experimentar cambios en su movimiento de rotación respecto de un eje (es el análogo rotacional del concepto de masa)

Finalmente, si un cuerpo rígido es una distribución continua de masa (como un cilindro o una esfera sólidos) no puede representarse con una cantidad de masas puntuales. En este caso, la sumatoria de masas y distancias que define el momento de inercia se vuelve una integral. Es como dividir el cuerpo en elementos muy pequeños de masa dm, de modo que todos los puntos de un elemento estén prácticamente a la misma distancia perpendicular del eje de rotación. Llamamos r a esta distancia, como antes. El momento de inercia es, entonces,

$$I = \int r^2 \, dm$$

Momento de una Fuerza o Torque

Denominamos así a la medida de la tendencia de una fuerza para causar o alterar la rotación de un cuerpo.



Miremos la figura, donde el cuerpo puede girar alrededor de un eje que es perpendicular al plano de la figura y pasa por el punto O. Sobre el cuerpo actúan tres fuerzas: $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ y $\overrightarrow{F_3}$ en el plano de la figura. La tendencia de $\overrightarrow{F_1}$ a causar una rotación alrededor de O depende de su magnitud F_1 y también de la distancia **perpendicular** l_1 entre el punto O y la recta de acción de la fuerza (la línea sobre la cual está el vector fuerza) La distancia l_1 se denomina brazo de palanca de $\overrightarrow{F_1}$ alrededor de O. El esfuerzo de torsión es directamente proporcional tanto a F_1 como a l_1.

Definimos al momento de fuerza o torque de $\overrightarrow{F_1}$ con respecto a O al producto $F_1 \,.\, l_1$ y lo identificaremos con la letra griega τ (tau)

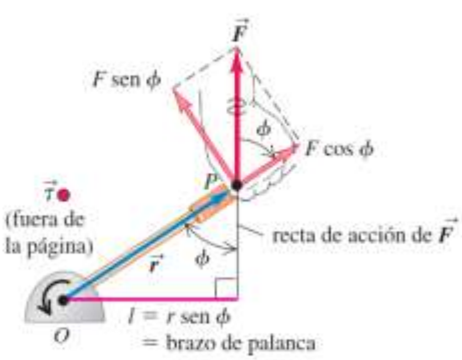
$$\tau = F \,.\, l$$

El brazo de palanca de $\overrightarrow{F_2}$ es la distancia perpendicular l_2.
La línea de acción de $\overrightarrow{F_3}$ pasa por el punto O, así que el brazo de palanca de $\overrightarrow{F_3}$ es cero y su torca con respecto a O es cero. Esto significa, que $\overrightarrow{F_3}$ no provoca ninguna rotación del cuerpo con respecto a *O.*

La unidad del torque en el SI es el *N.m* [newton-metro]. Al hablar de trabajo y energía a esta combinación la llamamos *Joule*; sin embargo, el torque no es trabajo ni energía, así que debemos expresarlo en newton-metro.

En nuestra figura, la fuerza $\overrightarrow{F_1}$ tiende a causar la rotación antihoraria del cuerpo alrededor de O, mientras que $\overrightarrow{F_2}$ tiende a causar rotación horaria. Para distinguir entre estas dos posibilidades, necesitamos elegir un sentido de rotación positivo. Esto nos lleva a generalizar la definición de torque de la siguiente manera: si una fuerza $\vec{F}$ actúa en un punto que tiene un vector posición $\vec{r}$ con respecto a un origen O, el torque $\vec{\tau}$ de la fuerza con respecto a O es la cantidad *vectorial*:

$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ (definición del vector torque o momento de fuerza) (9)



Al tratarse de un producto vectorial, $\vec{\tau}$ debe ser perpendicular al plano de los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$ y su sentido está dado por la regla de la mano derecha.
Y la magnitud del torque será:

$$\tau = F \,.\, l$$

$$\tau = F \,.r.\, \text{sen}\, \emptyset$$

Momento Angular

Para una partícula de masa constante $\boldsymbol{m}$, velocidad $\vec{\boldsymbol{v}}$, momento lineal $\vec{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{v}}$ y vector de posición $\vec{\boldsymbol{r}}$ relativo al origen *O* de un marco inercial, definimos el momento angular $\vec{\boldsymbol{L}}$ como:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \quad \text{(momento angular de una partícula)} \quad (10)$$

Para una partícula en movimiento rotacional, el momento angular es una cantidad análoga al momento lineal o cantidad de movimiento.

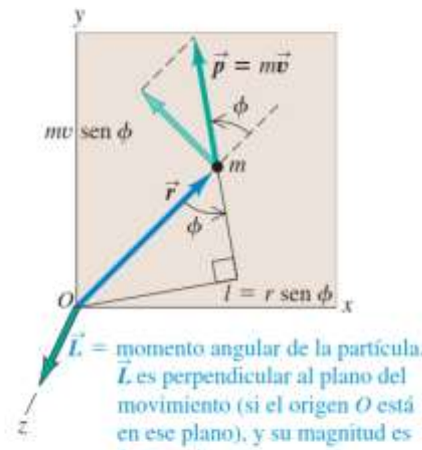
El valor de $\vec{L}$ depende del origen *O* elegido, ya que en él interviene el vector posición $\vec{r}$ de la partícula relativo al origen. Las unidades del momento angular son $kg\frac{m^2}{s}$

En la figura vemos una partícula que se mueve en el plano *x*-*y*, su vector posición $\vec{r}$ y su vector momento lineal $\vec{p} = m\vec{v}$. El vector momento angular $\vec{L}$ es perpendicular al plano *x*-*y*. La regla de la mano derecha para productos vectoriales nos indica que su dirección es en el eje *+z*, y su magnitud es:

$$L = m\,.v.\,l$$

$$L = m\,.v.r.\,\text{sen}\,\emptyset \quad (11)$$

donde l es la distancia perpendicular desde la línea de $\vec{p}$ a *O*. Esta distancia es el “brazo de palanca” para el vector de momento lineal.



$\vec{L}$ = momento angular de la partícula. $\vec{L}$ es perpendicular al plano del movimiento (si el origen *O* está en ese plano), y su magnitud es $L = mvl$.

Si una fuerza neta $\vec{F}$ actúa sobre una partícula, cambian su velocidad y su momento lineal, y también puede cambiar su momento angular. Vamos a derivar la ecuación (10) con respecto al tiempo usando la regla de la derivada de un producto:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v}\right) + \left(\vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt}\right)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = (\vec{v} \times m\vec{v}) + (\vec{r} \times m\vec{a})$$

Observemos el segundo miembro de esta última ecuación, el primer término es cero porque contiene el producto vectorial de $\vec{v}$ consigo mismo. En el segundo término sustituimos $m\vec{a}$ por la fuerza neta $\vec{F}$ obteniendo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = (\vec{r} \times \vec{F})$$

De acuerdo a la ecuación (9)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mathrm{T}} \qquad (12)$$

La rapidez de cambio del momento angular de una partícula es igual al torque de la fuerza neta que actúa sobre ella.

- *Es interesante observar la analogía de este resultado con el obtenido en la ecuación (2)*

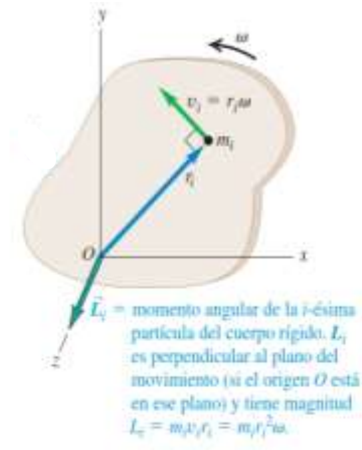
Vamos a calcular ahora el momento angular total de un cuerpo rígido que gira en torno al *eje z* con velocidad angular ω.

Cada partícula se mueve en un círculo centrado en el origen, y en cada instante su velocidad $\vec{v}_i$ es perpendicular a su vector posición $\vec{r}_i$. Por consiguiente, en la ecuación (11), *Ø= 90°* para todas las partículas.

Una partícula de masa m_i que está a una distancia r_i de *O* tiene una velocidad v_i igual a $r_i\ \omega$. Por la ecuación (11), la magnitud L_i de su momento angular es:

$$L_i = m_i(r_i.\omega)\,r_i$$

$$L_i = m_i.r_i^{\,2}.\omega$$



La dirección del momento angular de cada partícula, dada por la regla de la mano derecha para el producto vectorial, está ubicada sobre el eje *+z*.

El momento angular total es la suma de los momentos angulares L_i de las partículas:

$$L = \sum_i L_i$$

$$L = \sum_i (m_i r_i^{\,2}).\omega$$

Y de acuerdo a la definición de Momento de Inercia:

$L = I.\omega$, donde I es el momento de inercia alrededor del eje *z*.

Como ya hemos estudido, el vector de velocidad angular $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ está sobre el eje de rotación, por lo tanto, para un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje de simetría, $\vec{\boldsymbol{L}}$ y $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ tienen la misma dirección y tendremos siguiente relación vectorial:

$\vec{L} = I.\vec{\omega}$ (para un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje de simetría)

Por la ecuación (12), la rapidez de cambio del momento angular de una partícula es igual al torque de la fuerza neta que actúa sobre ella. *Para cualquier sistema de partículas (incluidos cuerpos rígidos y no rígidos), la rapidez de cambio del momento total es igual a la suma de los torques de todas las fuerzas que actúan sobre todas las partículas*. Según la tercera ley de Newton, si una partícula del sistema ejerce una fuerza sobre otra, la segunda ejerce sobre la primera una fuerza de la misma magnitud, pero dirección opuesta. Por lo tanto, todas las fuerzas internas se cancelan en pares y entonces los torques de las fuerzas internas suman cero. Así que la suma de los torques sólo incluye a los torques de las fuerzas externas.

$\sum \vec{\mathrm{T}}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ (para cualquier sistema de partículas)

Si el torque externo neto que actúa sobre un sistema es cero, el momento angular total del sistema es constante.

- *Es interesante observar la analogía entre la conservación del momento angular de un sistema cuando el torque externo total es cero, con la conservación del momento lineal cuando la sumatoria de fuerzas externas también es cero.*