



## Física 1

### Cinemática

#### 1. Generalidades:

Llamamos cinemática a la rama de la mecánica que estudia el movimiento desde el punto de vista descriptivo. Para la descripción del movimiento usaremos dos conceptos fundamentales que son el **espacio y el tiempo**. Dichos conceptos se han modificado sustancialmente a lo largo de la historia. En la actualidad aceptamos la idea de que el espacio y el tiempo no son absolutos sino que dependen tanto del observador como de la distribución de materia y energía en el universo. No obstante, nosotros usaremos la noción **Newtoniana** de **espacio y tiempo absolutos** sobre la cual se construyó históricamente la mecánica clásica. El **vector de posición**  $\vec{r}$  representa la posición de un punto, vista por un observador privilegiado que está en reposo respecto del espacio absoluto y que llamaremos **sistema de referencia (O)**. Si la posición del punto cambia, llamaremos **ecuación horaria** a la evolución temporal del vector de posición; es decir, a la función vectorial  $\vec{r}(t)$ . Para lo que sigue, vamos a suponer que la ecuación horaria es dos veces diferenciable y vamos interpretar físicamente a sus dos primeras derivadas sucesivas. Los elementos para la descripción del movimiento surgirán de dicha interpretación.

#### 1.1 Primera derivada de la ecuación horaria. El vector velocidad:

El **vector desplazamiento**  $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$  en el intervalo de tiempo finito  $[t, t + \Delta t]$  es la posición actual  $\vec{r}(t + \Delta t)$  vista desde la posición anterior  $\vec{r}(t)$ . La **velocidad media**, es la tasa de cambio temporal del vector de posición en dicho intervalo de tiempo, es decir:

$$\bar{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \quad (1)$$

La **velocidad instantánea** (o simplemente **velocidad**) es el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo es infinitamente pequeño. Es decir, la **derivada** de la posición respecto del tiempo:

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (2)$$

El vector velocidad tiene la dirección y el sentido del desplazamiento infinitesimal  $d\vec{r} = \vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t)$  (que coincide con la dirección y el sentido de la trayectoria en cada punto).

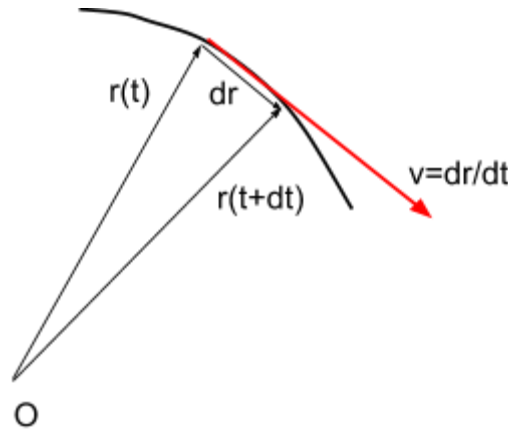


Figura 1: El vector velocidad es tangente a la trayectoria

## 1.2 Segunda derivada de la ecuación horaria. El vector aceleración:

Análogamente, las **aceleraciones media e instantánea** son las tasas de cambio temporales finitas e instantáneas respectivamente del vector velocidad. El vector aceleración es entonces la derivada temporal de la velocidad o la derivada segunda de la posición.

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{v}(t+\Delta t) - \bar{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad (3)$$

### 1.3 Coordenadas intrínsecas de la trayectoria. Interpretación geométrica de la aceleración:

La interpretación geométrica del vector aceleración requiere de algunos conceptos adicionales. Una trayectoria tiene una **circunferencia osculatriz** o **circunferencia tangente** que es la circunferencia que aproxima a la trayectoria localmente; es decir, punto a punto <sup>1</sup>. Usando esta idea, definiremos las llamadas coordenadas intrínsecas  $(r, \theta)$  que son las coordenadas normal y tangencial a la trayectoria. El **versor tangencial**  $\hat{\theta} = \vec{v}/|\vec{v}|$  es el vector unitario que tiene la dirección y el sentido de la velocidad. El **versor normal**  $\hat{r}$  es el (único) vector unitario ortogonal a  $\hat{\theta}$  en el plano de la circunferencia osculatriz o **plano osculador** cuyo sentido se aleja del **centro de curvatura (O)**. Los vectores normal y tangencial a la trayectoria son funciones del tiempo  $\hat{r} = \hat{r}(t)$  y  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(t)$  ya que cambian a medida que la posición del punto móvil evoluciona.

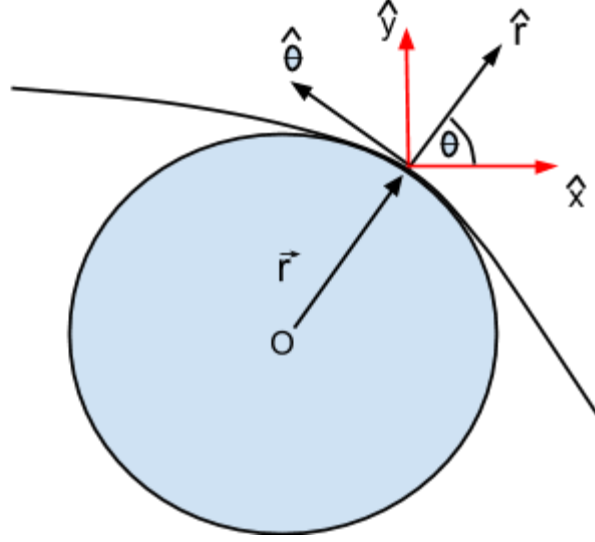
Imaginemos que en un instante  $t$ , el sistema de referencia O coincide con el centro de la circunferencia osculatriz (el centro de curvatura), de modo que el vector de posición se escribe  $\vec{r} = r\hat{r}$  (ver figura 2). Podemos pensar que en el intervalo de tiempo infinitesimal que sigue a ese instante  $(t, t + dt)$  la trayectoria coincide con el arco infinitesimal de la circunferencia osculatriz. Por definición, la velocidad en ese instante es  $\vec{v} = d\vec{r}/dt = d(r\hat{r})/dt$ . Luego, derivando el producto y considerando que  $r = cte$ :

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} = r\frac{d\hat{r}}{dt} \quad (4)$$

---

<sup>1</sup> Por ejemplo, cuando viajamos en automóvil, debemos mover el volante para permanecer en el camino. Si la trayectoria es rectilínea, enderezamos el volante de modo que las ruedas delanteras permanezcan alineadas; si hay una curva, lo movemos en sentido horario o antihorario dependiendo del sentido de la curva. Si en algún instante fijamos la posición del volante (¡dejamos de moverlo!) nuestro automóvil comenzará a girar siguiendo una circunferencia. Esta es la circunferencia tangente del camino.

Para completar el cálculo, debemos evaluar la velocidad del versor  $\hat{r}$  y para ello debemos escribirlo en función de los versores cartesianos fijos. Para los que no recuerden, las coordenadas cartesianas son uniformes (iguales en todo punto) y sus versores son  $\hat{x}$  horizontal hacia la derecha e  $\hat{y}$  vertical hacia arriba



**Figura 2: Circunferencia osculatriz y coordenadas intrínsecas de la trayectoria**

La relación entre los versores intrínsecos (móviles en negro) y los versores cartesianos (fijos en rojo) es:

$$\hat{r} = \cos\theta \hat{x} + \sin\theta \hat{y} \quad (5)$$

$$\hat{\theta} = -\sin\theta \hat{x} + \cos\theta \hat{y} \quad (6)$$

Las derivadas temporales de las relaciones (5) y (6) dan:

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = (-\sin\theta \hat{x} + \cos\theta \hat{y}) \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta} \quad (7)$$

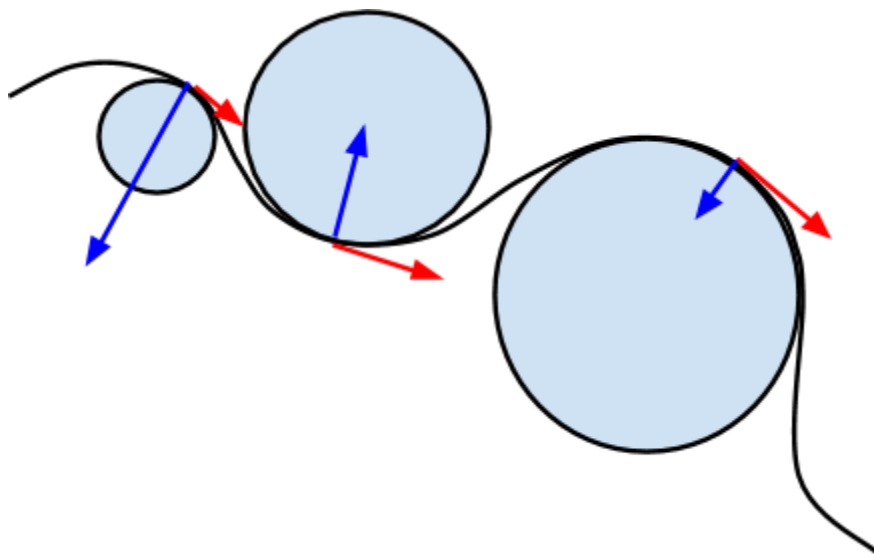
$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -(\cos\theta \hat{x} + \sin\theta \hat{y}) \frac{d\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \hat{r} \quad (8)$$

Combinando las ecuaciones (4) y (7) confirmamos que el vector velocidad se escribe:

$\vec{v} = r \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta}$  de donde la magnitud de la velocidad es  $|\vec{v}| = r \left| \frac{d\theta}{dt} \right|$ . La cantidad  $v = r \frac{d\theta}{dt}$  se llama **velocidad tangencial** y  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$  es la **velocidad angular**.

Siguiendo la misma idea, definiendo la **aceleración angular**  $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$  podemos calcular el vector aceleración como la derivada temporal de la velocidad angular:

$$\vec{a} = r \frac{d}{dt}(\omega \hat{\theta}) = r\alpha \hat{\theta} + r\omega \frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\omega^2 r \hat{r} + \alpha r \hat{\theta} \quad (9)$$



**Figura 3: Componentes tangenciales (rojo) y normales (azul) de la aceleración**

De acuerdo a la ecuación (9), el vector aceleración tiene componentes normal y tangencial a la trayectoria. La **aceleración tangencial**  $a_\theta = \alpha r$  es responsable del cambio en la magnitud de la velocidad mientras que la **aceleración normal o centrípeta**  $a_r = -\omega^2 r = -\frac{v^2}{r}$  es responsable del cambio de dirección. El signo negativo en la componente normal de la aceleración significa que su sentido es siempre hacia el centro de curvatura. En efecto, supongamos que la aceleración tangencial  $a_\theta = \alpha r$  se anula de modo que  $\alpha = 0$ . Entonces, la velocidad angular  $\omega$  es constante y por lo tanto también lo son la velocidad tangencial y la aceleración centrípeta. En ese caso, la partícula recorre la trayectoria (el arco de la circunferencia oscultriz) con rapidez constante aunque modificando su dirección. Si esta situación no se modifica a lo largo del tiempo, la partícula recorre una circunferencia de radio  $r$  con

rapidez constante. Se trata del **Movimiento Circular Uniforme (MCU)**. Si en cambio la aceleración normal  $a_r = -v^2/r$  es nula, entonces concluimos que el radio de la circunferencia osculatriz se hace infinito lo cual significa que la trayectoria es (localmente) una línea recta <sup>2</sup>. De ese modo, en ese instante la dirección del vector velocidad no se modifica. Si esta situación no se altera a lo largo del tiempo, la partícula recorre una línea recta. Se trata del **Movimiento Rectilíneo (MR)**

#### 1.4 Movimiento Rectilíneo:

Como hemos mencionado, si la aceleración centrípeta es nula en todo instante de tiempo, la aceleración y la velocidad son colineales y el movimiento resultante se produce sobre su línea de acción. Si el sistema de referencia está sobre dicha línea, el vector de posición tiene sólo una componente y es, por lo tanto, un escalar. La ecuación horaria será entonces una función de una variable real  $x = x(t)$ . En general, si conocemos la aceleración en función del tiempo, la ecuación horaria se deduce de la integración de la ecuación (escalar) de segundo orden:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a(t), \quad v(t_o) = v_o, \quad x(t_o) = x_o \quad (10)$$

Donde las dos condiciones iniciales dadas en un instante arbitrario  $t_o$  definen la posición y la velocidad iniciales.

El caso más sencillo es el **Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU)** donde la aceleración es cero y, por lo tanto la velocidad es constante. En ese caso  $dx/dt = v_o = cte$ ,  $x(t_o) = x_o$ . Integrando, se obtiene la ecuación horaria:

$$x(t) = x_o + v_o(t - t_o) \quad (11)$$

---

<sup>2</sup> Una circunferencia de radio infinito es, en efecto, una línea recta

Otro caso importante es el **Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado (MRUV)** en donde la aceleración es una constante distinta de cero  $a \neq 0$ . En ese caso escribimos  $d^2x/dt^2 = dv/dt = a$ ,  $v(t_o) = v_o$  cuya integral análoga a la ecuación (11) es:

$$v(t) = v_o + a(t - t_o) \quad (12)$$

Finalmente escribimos  $dx/dt = v(t)$ ,  $x(t_o) = x_o$  e integramos insertando la fórmula (12) de la velocidad para obtener:

$$\int_{x_o}^{x(t)} dx' = \int_{t_o}^t v(t') dt' \Rightarrow x(t) = x_o + v_o(t - t_o) + \frac{1}{2} a(t - t_o)^2 \quad (13)$$

Un ejemplo de movimiento uniformemente variado conectado con nuestra experiencia cotidiana es el de **caída libre**, en donde abandonamos a una partícula en un campo de aceleraciones uniforme. Sabemos que la magnitud de la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre es aproximadamente  $g = 9.8m/s^2$  en la dirección vertical y apuntando hacia el centro de la tierra. Como la dirección vertical no cambia apreciablemente en una pequeña zona de la superficie terrestre, el campo gravitatorio es localmente uniforme. Si la velocidad inicial es vertical, el movimiento se mantendrá en esa dirección. Si la partícula se abandona desde una altura  $h$  tomando la dirección  $\hat{x}$  vertical hacia arriba y  $x = 0$  en el piso, las ecuaciones horarias (12) y (13) tomarán la forma:

$$x(t) = h - \frac{1}{2}gt^2, \quad v(t) = -gt \quad (14)$$

El signo menos en el término cuadrático enfatiza el carácter vectorial de la aceleración ya que el sentido de  $\vec{g}$  es contrario al sentido de la coordenada  $\hat{x}$ . Sin perder generalidad se ha considerado que el instante inicial es  $t_o = 0$ .

### 1.5 Movimiento en dos dimensiones. Tiro Oblicuo:

Llamamos **tiro oblicuo** al movimiento más general de una partícula en un campo gravitatorio uniforme. Si la velocidad inicial no es vertical, entonces la aceleración tendrá una componente centrípeta y el movimiento dejará de ser rectilíneo. En este caso, la trayectoria será una curva plana parametrizable en el sistema de coordenadas cartesianas fijas. El vector de posición tendrá entonces dos componentes:  $\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y}$ . La ecuación horaria es la integral general de la ecuación (vectorial) de segundo orden:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -g\hat{y}, \quad \vec{v}(t_o) = v_o(\cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}), \quad \vec{r}(t_o) = x_o\hat{x} + y_o\hat{y} \quad (15)$$

Las condiciones iniciales describen la velocidad inicial del proyectil  $v_o$ , el ángulo de tiro  $\theta$  y la posición inicial del tirador (el punto del plano  $\vec{r}_o = (x_o, y_o)$ )

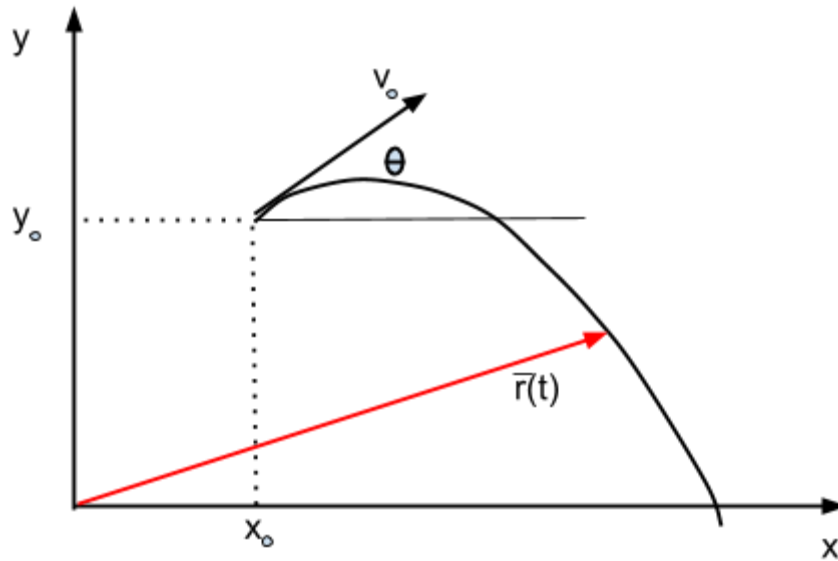


Figura 4: Tiro oblicuo

La integral general de (15) se reduce a un movimiento uniforme en la dirección horizontal y un tiro vertical en la dirección vertical, es decir:

$$x(t) = x_o + v_o \cos\theta(t - t_o) \quad (16)$$



$$y(t) = y_o + v_o \sin \theta (t - t_o) - \frac{1}{2} g (t - t_o)^2 \quad (17)$$

### 1.6 Movimiento Circular:

Si la trayectoria de la partícula es una circunferencia de radio  $r$  la ecuación horaria define el único grado de libertad de la partícula que es su posición angular  $\theta = \theta(t)$  medida respecto del semieje  $x > 0$ . Se trata entonces de otro ejemplo de movimiento unidimensional. Las coordenadas intrínsecas de la circunferencia coinciden con las coordenadas polares planas. Los vectores de posición, velocidad y aceleración vistos desde el centro de la circunferencia en coordenadas polares coinciden con los expresados en el parágrafo (1.3)

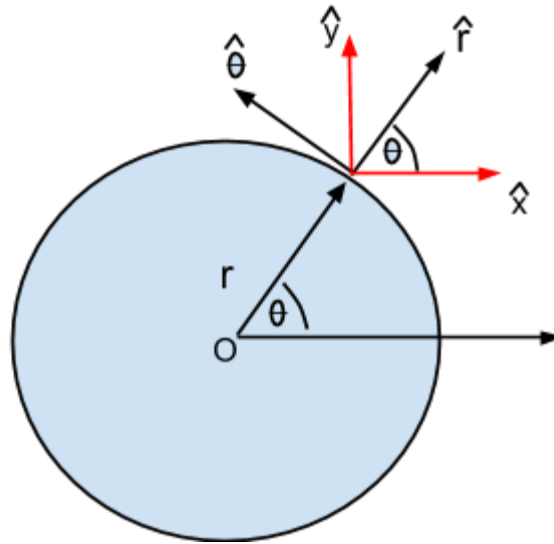


Figura 5: Movimiento Circular

En analogía con el movimiento rectilíneo podemos distinguir los casos **Movimiento Circular Uniforme (MCU)**  $\theta(t) = \theta_o + \omega(t - t_o)$  donde la velocidad angular  $\omega$  es constante y el **Movimiento Circular Uniformemente Variado (MCUV)**  $\theta(t) = \theta_o + \omega_o(t - t_o) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_o)^2$  donde la aceleración angular  $\alpha$  es constante.