Cinemática del Cuerpo Rígido

UNLaM. Cátedra de Física 1

14 de mayo de 2020

1. Generalidades

Un sólido rígido o *cuerpo rígido* es un sistema de partículas tal que la distancia entre dos partículas cualesquiera del sistema permanece constante durante el transcurso del movimiento. Esta es la llamada *condición de rigidez*. Si imaginamos al sólido como una colectividad de partículas de masas m_i en posiciones $\vec{r}_i$ que denotaremos $\{m_i, \vec{r}_i\}$, la condición de rigidez expresa que la magnitud de la posición relativa entre cualquier par de partículas del sistema permanece constante:

$$\frac{d}{dt} |\vec{r}_i - \vec{r}_j| = 0 \ \forall i, j \tag{1}$$

La condición de rigidez implica que el cuerpo no puede romperse ni deformarse. Por supuesto, los sistemas realmente existentes en la naturaleza sólo pueden satisfacer esta condición de modo aproximado. Sin embargo, para la mayoría de los cuerpos sólidos, los cambio de forma y tamaño son tan pequeños que pueden despreciarse. Naturalmente, este hecho impone severas restricciones a las posibilidades de movimiento del sistema. En lo que sigue intentaremos comprender cuales son esas restricciones y, en definitiva, cual es la descripción más adecuada para el movimiento del sólido. Como debemos describir la velocidad de una colectividad de partículas que puede ser finita (o numerable) pero que también puede ser un continuo, usaremos el concepto de *campo de velocidades* del sólido. El campo de velocidades será una función vectorial que a cada partícula del sistema m_i en la posición $\vec{r}_i$ le asignará un vector velocidad $\vec{v}_i$. En el caso continuo el campo será de la forma: $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$. Antes de ver la forma más general que puede tomar el campo de velocidades de un sólido estudiaremos sus movimientos elementales: la *traslación rígida* y la *rotación pura*.

2. Movimientos elementales del sólido

2.1. Traslación rígida

Si todos los puntos del sólido se mueven con la misma velocidad, entonces el campo de velocidades es uniforme, es decir $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}) = cte$. En ese caso decimos que el movimiento del cuerpo es una traslación rígida. Como $\vec{v}_i = \vec{v}_j$, entonces $d(\vec{r}_i - \vec{r}_j)/dt = 0$ y $\vec{r}_i - \vec{r}_j = cte$, que es aún más restrictiva que la condición de rigidez. La posición relativa entre dos puntos cualesquiera del cuerpo se transporta paralelamente y la orientación del cuerpo no se modifica.

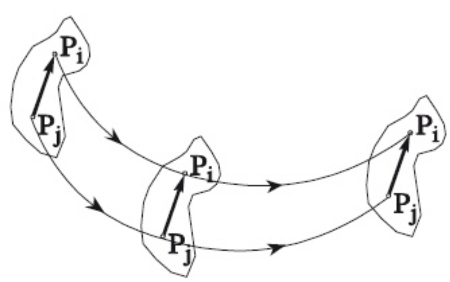

Figura 1: Movimiento de traslación rígida. La posición relativa de dos puntos se transporta paralelamente

2.2. Rotación pura. Velocidad angular

En el movimiento de rotación pura, todos los puntos del sólido giran con velocidad angular ω alrededor de un eje fijo llamado *eje de rotación*.

El campo de velocidades es rotacional alrededor de dicho eje. Mientras los puntos del eje permanecen invariantes, todos los puntos de una circunferencia de radio R con centro en el eje y en un plano perpendicular al mismo tienen velocidades tangentes a la circunferencia y la velocidad aumenta a medida que nos alejamos del eje según la ley $v = \omega R$. La orientación de los vectores velocidad puede ser *horaria* o *antihoraria* y se corresponderá, como veremos, a una orientación del eje de rotación. En la figura 2 se representan algunos vectores velocidad de un campo rotacional. Las velocidades son tangentes a las circunferencias concéntricas y aumentan linealmente a medida que se alejan del eje.

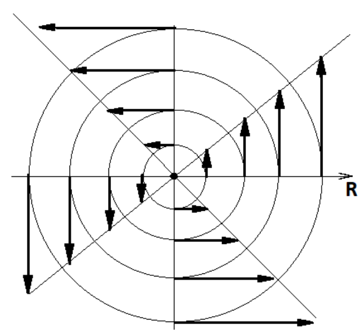

Figura 2: El campo rotacional en un plano perpendicular al eje de rotación

La magnitud de la velocidad angular ω con la dirección y el sentido del eje de rotación, definen el vector *velocidad angular* $\vec{\omega}$. Con esta definición, el campo de velocidades puede escribirse como el *producto vectorial* $\vec{v}\,(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r}$ donde $\vec{r}$ es el vector de posición de un punto cualquiera del sólido visto desde un observador fijo sobre el eje de rotación. En efecto, como se observa en la figura 3, la velocidad es ortogonal al plano determinado por $\vec{r}$ y $\vec{\omega}$ de modo que $\vec{v} \perp \vec{\omega}$ y $\vec{v} \perp \vec{r}$ y además $|\vec{v}| = \omega r \operatorname{sen}\theta = \omega R$ siendo θ el ángulo que subtienden el vector de posición $\vec{r}$ y la velocidad angular $\vec{\omega}$. El vector de posición coincide en todo instante con la generatriz del cono y realiza un movimiento de precesión alrededor del eje de rotación con velocidad angular ω. La inversión del sentido en la velocidad angular implica revertir el sentido

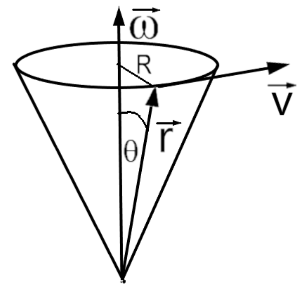

Figura 3: El vector velocidad angular

de giro. La orientación del sentido de giro está relacionada con el sentido del vector velocidad angular a través de la *regla de la mano derecha*: esto es, la orientación del triedro $(\vec{r}, \vec{v}\,\vec{\omega})$ coincide con la orientación (derecha) del espacio $(\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z})$.

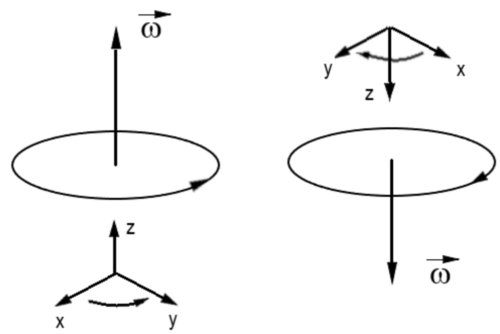

Figura 4: La orientación de giro se define por el sentido de la velocidad angular

3. Movimiento rototraslatorio

Para construir el campo de velocidades que describe el movimiento más general, consideremos dos puntos cualesquiera del sólido, un punto P de referencia y otro punto arbitrario Q (figura 5). La posición del punto Q

respecto de un observador fijo O siempre podrá escribirse:

$$\vec{r}_Q = \vec{r}_P + \vec{r} \tag{2}$$

donde $\vec{r} = \vec{r}_Q - \vec{r}_P$ es la posición relativa de Q vista desde P. La velocidad del punto Q se obtiene derivando respecto del tiempo la ecuación (2) y tendrá entonces dos contribuciones: la primera será la velocidad del punto P, $d\vec{r}_P/dt$, la segunda será la velocidad relativa $d\vec{r}/dt$. La velocidad relativa da cuenta del movimiento del punto Q visto desde un observador solidario al punto P. La condición de rigidez implica que $|\vec{r}_Q - \vec{r}_P| = r = cte$. Luego, para un observador solidario al punto P el punto Q solo puede moverse sobre una superficie esférica de radio r. Dicho movimiento, considerado en un intervalo de tiempo infinitesimal dt solo puede ser una rotación pura.

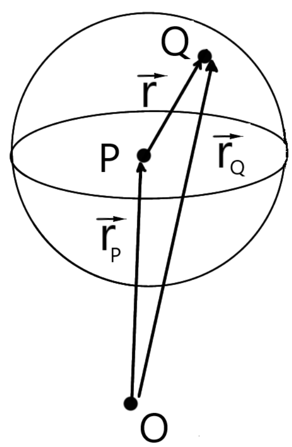

Figura 5: Movimiento general del sólido

Por lo tanto, siempre existe $\vec{\omega}$ de modo que en cada instante, el movimiento de todo punto Q del sólido puede descomponerse en dos contribuciones elementales: un movimiento de traslación rígida de velocidad $\vec{v}_P$ (la misma para cualquier punto Q) y una rotación pura de velocidad angular $\vec{\omega}$ para la posición relativa. La ecuación (3) define la *reducción cinemática en el punto P del campo de velocidades rototraslatorio.*

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{r}_Q}{dt} =& \frac{d\vec{r}_P}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \\
\vec{v}_Q\left(\vec{r}\right) =& \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \vec{r}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Téngase en cuenta que la posición relativa $\vec{r}$ puede corresponder o no a un punto del sólido ya que el campo de velocidades, expresa idealmente la velocidad de cada punto del espacio que se mueve solidario al sólido. Tanto la velocidad angular $\vec{\omega}$ como la posición relativa del punto campo $\vec{r}$ se refieren a un sistema de coordenadas centrado en el punto P que se traslada rígidamente. Podríamos preguntarnos cuan relevante es la elección del punto P del sólido que en principio es arbitraria y como cambiaría la descripción del movimiento si hiciéramos alguna otra elección. Responderemos a esa pregunta en la sección siguiente.

3.1. Caracter absoluto de la velocidad angular

La velocidad angular resulta independiente del punto P que tomemos como referencia. Esa libertad de elección del punto P es un elemento relevante de la descripción del movimiento del sólido. En efecto, tal como sugiere la figura (6), consideremos otro punto de referencia R de modo que la posición de Q vista desde R es $\vec{r'} = \vec{r}_Q - \vec{r}_R$. Sea $\vec{a} = \vec{r}_R - \vec{r}_P$ la posición de la nueva referencia R vista desde P. La velocidad del punto Q puede escribirse:

$$
\begin{aligned}
\vec{v}_Q =& \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \vec{r} \\
=& \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \left(\vec{a} + \vec{r'}\right) \\
=& \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \vec{a} + \vec{\omega} \times \vec{r'} \\
=& \vec{v}_R + \vec{\omega} \times \vec{r'}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

La ecuación (4) no es otra cosa que la reducción cinemática del campo de velocidades en el punto R. Luego, tanto la forma matemática del campo como la velocidad angular se mantienen invariantes lo cual significa que la elección del punto P es arbitraria y que el vector velocidad angular $\vec{\omega}$ es una propiedad del sólido en su conjunto teniendo entonces caracter absoluto. Todo punto Q del sólido rota con la misma velocidad angular visto desde cualquier otro punto.

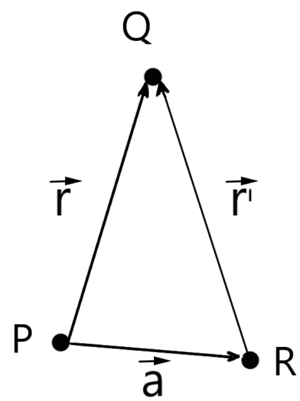

Figura 6: El campo de velocidades es invariante frente a la elección del punto de referencia

Siendo que todas las elecciones del punto P son equivalentes, la elección más conveniente es tomar al punto P como el centro de masa del sólido.

3.2. Eje instantáneo de rotación

Supongamos que en un instante dado, algún punto Q del sólido (o fuera de él) tiene velocidad nula. Entonces valen las dos proposiciones siguientes:

1. El campo de velocidades es perpendicular a la velocidad angular.

2. La velocidad de cualquier punto sobre el eje paralelo a la velocidad angular $\vec{\omega}$ que pasa por el punto Q es nula.

Dem 1: De acuerdo a la ecuación (3) $-\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Se concluye entonces que la velocidad del punto P y de cualquier otro punto del sólido son perpendiculares a $\vec{\omega}$. En efecto, la velocidad de cualquier otro punto Q' será $\vec{v}_{Q'} = \vec{v}_P + \omega \times \vec{r'}$ donde $\vec{r'}$ es la posición de Q' vista desde P. Resulta entonces $\vec{v}_{Q'} \cdot \vec{\omega} = \left(\vec{v}_P + \omega \times \vec{r'}\right) \cdot \vec{\omega} = \vec{v}_P \cdot \vec{\omega} + \left(\omega \times \vec{r'}\right) \cdot \vec{\omega} = 0$.

Dem 2: Consideremos a la recta: $\vec{X} = \vec{r}_Q + \lambda\vec{\omega}$, $\lambda \in \Re$. Por construcción es paralela a la velocidad angular $\vec{\omega}$ y pasa por el punto Q. Todos los puntos de la recta tienen velocidad nula y por lo tanto llamaremos a dicha recta *eje instantáneo de rotación*. En efecto:

$$
\begin{aligned}
\vec{v}_X =& \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \left(\vec{X} - \vec{r}_P\right) \\
=& \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \left(\vec{r}_Q + \lambda\vec{\omega} - \vec{r}_P\right) \\
=& \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \left(\vec{r} + \lambda\vec{\omega}\right) \\
=& \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\lambda\vec{\omega}\right) \\
=& \vec{v}_Q + \lambda\left(\vec{\omega} \times \vec{\omega}\right) = 0
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Si elegimos al punto P sobre el eje instantáneo de rotación, entonces el movimiento del sólido es una *rotación pura* ya que $\vec{v}_P = 0$

4. Rodadura sin deslizamiento

Como ejemplo de aplicación, consideremos una rueda de radio R que rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal. El campo de velocidades puede construirse a partir de la relación de vínculo entre la velocidad del centro de masa y la velocidad angular como sigue: si en un intervalo de tiempo Δt el centro de masa del rodante se desplaza una distancia Δx, el punto de contacto inicial entre la periferia del rodante y la superficie de contacto debe recorrer un arco de circunferencia de radio R de longitud Δx. Luego $R\Delta\theta = \Delta x$. Dividiendo miembro a miembro entre Δt y pasando al límite cuando $\Delta t \longrightarrow 0$ resulta:

$$v_{CM} = \omega R \tag{6}$$

relación llamada *condición de rodadura*. Consideremos al sistema de coordenadas de la figura 7 centrado en el centro de masa del rodante trasladándose rígidamente. En ese sistema, la velocidad del centro de masa y la velocidad angular se escriben $\vec{v}_{CM} = v\hat{x}$ y $\vec{\omega} = -\omega\hat{z}$ respectivamente. Usando la condición de rodadura, la reducción cinemática del campo de velocidades en el centro de masa se escribe:

$$\vec{v}\,(\vec{r}) = v\hat{x} - \frac{v}{R}\,(\hat{z} \times \vec{r}) \tag{7}$$

Donde $\vec{r}$ es la posición del punto campo vista desde el centro de masa expresada en el sistema de coordenadas de la figura 7 que se traaslada rígidamente.

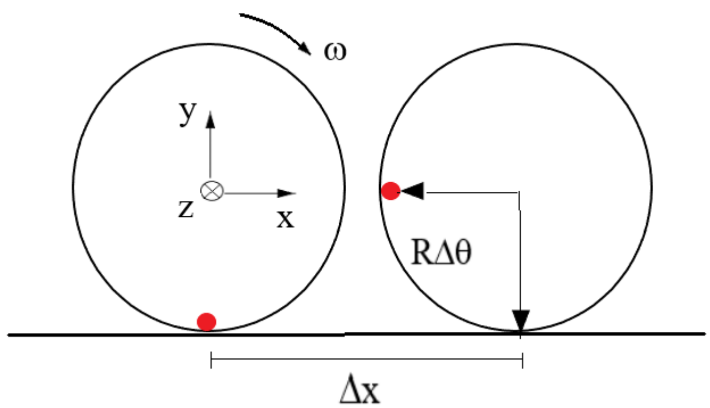

Figura 7: Rodadura sin deslizamiento: El punto de la periferia recorre un arco igual al desplazamiento del centro de masa

Veamos como utilizar la fórmula 7 mostrando que el punto de contacto con la superficie horizontal contiene al eje instantáneo de rotación. En efecto, la posición relativa del punto de contacto con el suelo (visto desde el centro de masa) es $\vec{r} = -R\hat{y}$. Luego su velocidad es $\vec{v} = v\hat{x} + v\,(\hat{z} \times \hat{y}) = v\hat{x} + v\,(-\hat{x}) = 0$. El movimiento completo puede considerarse en cada instante como una rotación pura vista desde el punto de contacto con la superficie. La figura

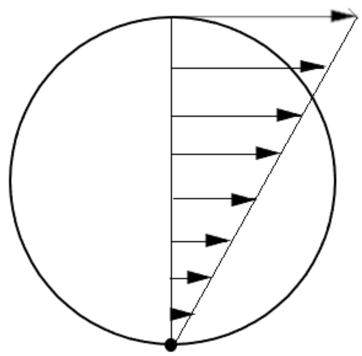

Figura 8: Rodadura sin deslizamiento: El campo de velocidades sobre el diámetro polar del rodante

8 es una representación del campo sobre el diámetro vertical del rodante. El eje instanténeo de rotación es perpendicular al plano de la hoja y pasa por punto de contacto sobre la superficie de apoyo. La velocidad aumenta linealmente con la distancia al punto de apoyo. La velocidad del centro de masa es $v_{CM} = \omega R$. La velocidad del punto más alto es lo tanto $2v_{CM} = 2\omega R$