UNIDAD 3.

Contenidos:

DINAMICA.

Hasta ahora, lo que estudiamos en la unidad de Cinemática es cómo se mueve un cuerpo, desde una descripción que relaciona su posición, velocidad, aceleración y tiempo, sin dar detalles de las causas que generan en cada caso, ese movimiento. En Cinemática, simplemente hacemos una descripción de un movimiento pero no sabemos por qué se mueve de esa determinada manera.

La Dinámica, justamente se encarga de explicar el movimiento, en función de las causas que lo producen. Para ello, Newton, en 1867, postuló tres leyes, que se conocen como **Leyes de Newton**. Las mismas son:

1) <u>Principio de Inercia:</u> Todo cuerpo continúa en su estado de reposo (v=0) o de movimiento rectilíneo uniforme (v=cte), si sobre el mismo, no hay fuerzas netas aplicadas. Define la causa de movimientos distintos a MRU: las fuerzas.

En otras palabras, un cuerpo libre de fuerzas netas, va a seguir SIEMPRE un movimiento rectilíneo uniforme (MRU). Cualquier caso contrario, el movimiento va a ser otro (MRUV, MCU, MCUV, etc.).

2) <u>Principio de masa:</u>

$$\boxed{\sum \vec{F} = m\vec{a}} \quad (1)$$

Relaciona la suma de fuerzas que actúan sobre un cuerpo de masa m, con su aceleración $\vec{a}$. Si la suma de fuerzas sobre un cuerpo es cero, la aceleración es cero, y su movimiento es un MRU o se encuentra en reposo.

La masa da una noción de la cantidad de materia que tiene un cuerpo. Para una misma fuerza aplicada, cuánto más masa tenga el cuerpo, menor va a ser su aceleración y viceversa.

Nótese que la ecuación (1) es vectorial. Tanto la fuerza como la aceleración son vectores, y de ella se observa fácilmente que la fuerza neta sobre un cuerpo y la aceleración del mismo tienen la misma dirección y sentido.

Siempre que $\vec{a} \neq 0$, existen fuerzas netas aplicadas sobre el cuerpo.

Al ser $\vec{F}$ y $\vec{a}$ cantidades vectoriales, se tienen tres ecuaciones que permiten describir de manera completa, el movimiento de un cuerpo en sus tres dimensiones espaciales *x*, *y*, *z*:

$$\sum F_x = ma_x$$
$$\sum F_y = ma_y$$
$$\sum F_z = ma_z$$

Unidades usuales:

[m]=kg, gr.
[a]=m/seg^2 , cm/seg^2

Las unidades de fuerza, se derivan de las dos anteriores, obteniendo:

[F]=[m][a]=kgm/seg^2=1N (Newton) (sistema MKS).
[F]=[m][a]=gr cm/seg^2=1dina (sistema CGS).

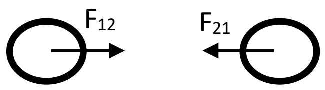
Observen que resolviendo las ecuaciones de Newton, se obtiene información sobre la aceleración del cuerpo. Y como se vio en la Unidad 2, la aceleración, la velocidad y la posición, están relacionadas. Es decir, integrando la aceleración, se puede obtener la velocidad, e integrando la velocidad, se obtiene la posición en función del tiempo del objeto. En otras palabras, estudiando las fuerzas sobre un cuerpo, se pueden obtener las ecuaciones cinemáticas del mismo.

3) <u>Principio de acción y reacción:</u>

Siempre que un cuerpo (llámese 1) ejerce una fuerza (llámese **Acción**) sobre otro objeto (llámese 2), el cuerpo 2 ejerce una fuerza de <u>igual magnitud y dirección</u> (llámese **Reacción**), <u>pero en sentido contrario</u> sobre el primero.

En otras palabras, todas las fuerzas vienen de a pares: **no existe acción, sin reacción**.

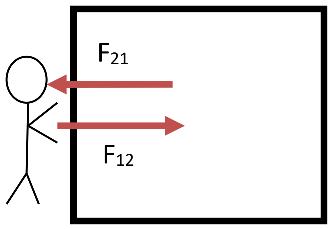
Gráficamente,



Siendo $\boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}}$

Ejemplo:

Supongamos una persona de masa m_1 ejerciendo una fuerza sobre un bloque de masa m_2 (donde $m_1 << m_2$).



El bloque "siente" la fuerza que hace la persona (llámese $\vec{F}_{12}$, a la fuerza que ejerce 1 a 2). La ecuación de Newton correspondiente para el bloque en la dirección de esta fuerza es,

$$\vec{F}_{12} = m_2\vec{a}_2$$

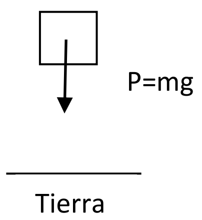
La persona experimenta la fuerza que hace el bloque sobre ella, que como es el par de acción y reacción de $\vec{F}_{12}$, la llamaremos $\vec{F}_{21}$ (la fuerza que ejerce 2 sobre 1). La ecuación de Newton correspondiente es por lo tanto,

$$\vec{F}_{21} = m_1\vec{a}_1$$

Observen que si bien las fuerzas son iguales en módulo, como $m_1 << m_2$, se tiene que $|\vec{a}_1| \gg |\vec{a}_2|$. Eso explica por qué el bloque y la persona no tienen la misma aceleración.

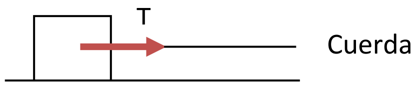
<u>Algunas fuerzas:</u>

1) <u>Peso:</u> Se define como la fuerza *P* que ejerce el centro de la tierra sobre un cuerpo como consecuencia de la atracción gravitatoria. <u>Siempre</u> apunta hacia el centro de la tierra.



2) <u>Fuerzas de contacto:</u> Un ejemplo es la **Normal** (N), la cual es <u>perpendicular</u> a la superficie de contacto.

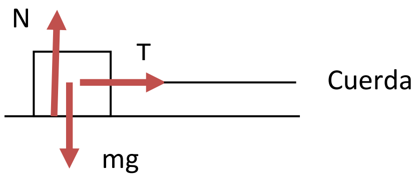
3) <u>Tensión:</u> Debido a la presencia de una cuerda que ejerce una fuerza sobre un cuerpo.



Nótese que siempre la tensión *T* tiene la misma dirección que la cuerda, y el sentido de la fuerza es siempre hacia "afuera".

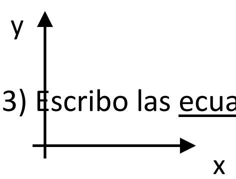
<u>Cómo proceder a la resolución de un problema de dinámica.</u>

1) <u>Diagrama de cuerpo libre:</u> Gráficamente, se indican todas las fuerzas (con su correspondiente dirección y sentido) que actúan sobre cada cuerpo del sistema. Por ejemplo:



2) <u>Elección de sistema de referencia:</u> Se elige un sistema de referencia conveniente, según el cual se van a escribir las ecuaciones de Newton. Este sistema es arbitrario, pero una mala elección del mismo, puede ocasionar dificultades a la hora de escribir las ecuaciones de Newton. En general, siempre conviene elegir uno de los ejes en la dirección de movimiento de la partícula.

En el caso del ejemplo:



3) Escribo las <u>ecuaciones de Newton</u> de acuerdo al sistema de referencia adoptado.

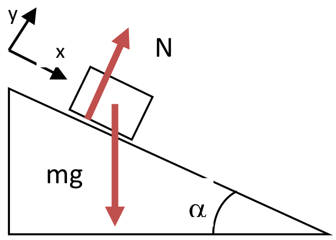
Siguiendo con el ejemplo:

$\hat{x}) \quad +T = ma_x$
$\hat{y}) \quad -mg + N = 0$

En la dirección *y*, no se tiene aceleración: el peso se compensa con la normal y el cuerpo no se separa de la superficie. El peso es negativo, dado que apunta en sentido contrario a donde crece *y*, y la normal es positiva dado que su sentido coincide con el sentido de las *y* positivas. Un análisis similar se hace para determinar los signos de la fuerza T en la dirección *x*.

4) <u>Resuelvo el sistema</u> de ecuaciones de acuerdo a los datos e incógnitas que se presenten en el problema.

Otro ejemplo:



Sabemos que el movimiento se va a producir paralelo al plano inclinado. Elijo uno de los ejes en esa dirección (en este caso, *x*). Definido el eje *x*, el eje *y* es perpendicular al mismo.
En este caso, observen que hay sólo dos fuerzas: la normal *N*, y el peso *mg*. La normal apunta solamente en la dirección y, pero el peso, no apunta completamente en ninguno de los dos. Es un vector que debe descomponerse en una componente en la dirección *x,* y otra en *y*. De hecho, el cuerpo se desliza sobre el plano, debido a la acción del peso en la dirección del mismo.

Las ecuaciones de Newton resultan:

$\hat{x}) \ +mg\sin\alpha = ma_x$
$\hat{y}) \ -mg\cos\alpha + N = 0$

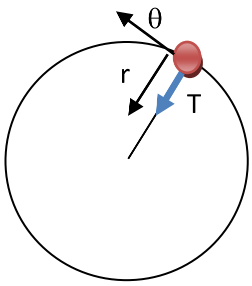
En la dirección y, la aceleración del cuerpo es cero (no se mueve). De acuerdo a los datos que presenta el problema, se resuelve el sistema de ecuaciones.

Dinámica de movimiento circular.

Como se explicó anteriormente, todo movimiento de un cuerpo que no se corresponde con un MRU, implica que sobre el mismo, hay fuerzas netas aplicadas. El movimiento circular es uno de esos casos.

Supongamos una partícula de masa m apoyada sobre una mesa horizontal, unida a una cuerda inextensible de masa despreciable. El cuerpo realiza un movimiento circular de radio R (la longitud del hilo no varía en el tiempo).

1) Identificamos las fuerzas.



Sólo actúa la tensión sobre el cuerpo, que apunta hacia el centro de giro.

2) Sistema de referencia: en estos casos, siempre elegir un sistema tal que un eje apunte en la dirección radial (normal), con sentido hacia el centro de giro (denominado versor *r*), y otro, en la dirección tangencial, denominado versor θ (como se indica en la figura).

3) Escribimos las ecuaciones de Newton correspondientes (recuerden las expresiones de aceleración centrípeta y tangencial estudiadas en la Unidad 1).

$$\hat{r})\ +T = ma_{centrípeta} = mR\omega^2 = m\frac{v_{tangencial}^2}{R}$$

$$\hat{\theta})\ \sum F_{tangencial} = ma_{tangencial} = 0$$

En la dirección tangencial, no hace falta plantear la ecuación. No hay fuerzas actuando en esa dirección.

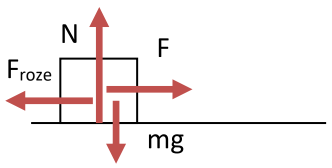
4) Resolvemos el sistema, de acuerdo a los datos que nos proporciona el problema.

ROZAMIENTO.

Supongamos un cuerpo deslizándose a velocidad constante sobre una superficie horizontal. Por la primera ley de Newton, vimos que si no hay fuerzas actuando sobre ese cuerpo, el mismo seguiría moviéndose con dicha velocidad. Pensemos en nuestra vida cotidiana. Supongamos que le damos un "empujón" al cuerpo sobre esa superficie. ¿Qué esperarían que suceda? ¿Continúa moviéndose indefinidamente? ¿Se detiene? Lo que observamos, es que en general, el objeto se va desacelerando hasta detenerse. La causa de esto, es la presencia de una fuerza llamada **Rozamiento**, debida a la interacción entre las superficies en contacto (en este caso, del cuerpo con la superficie horizontal). Esta fuerza, tiene en cuenta las irregularidades presentes en dichas superficies.

Pueden presentarse dos situaciones:

Caso Estático: Se tiene un cuerpo de masa *m*, inicialmente en reposo. Se aplica una fuerza *F*. La interacción entre las superficies hace que aparezca una fuerza de rozamiento que se opone a que el cuerpo inicie el movimiento. Esta fuerza se denomina **Fuerza de Rozamiento Estática**, que compensa a la fuerza *F*, de modo que el objeto permanezca en reposo.



Si se va incrementando el valor de *F*, llega un momento en el cual el cuerpo inicia el movimiento. En este caso, la fuerza *F* vence a la máxima resistencia que podía ejercer el cuerpo a moverse, como consecuencia de la rugosidad entre las superficies. Esto implica que la **fuerza de rozamiento estática** tiene una cota superior (valor máximo). Una vez en movimiento, comienza a actuar la **fuerza de rozamiento dinámica**.

Caso dinámico: se produce cuando el cuerpo está en movimiento (desliza una superficie respecto de la otra). Actúa la **fuerza de rozamiento dinámica**, la cual es constante y se opone al sentido de movimiento.

En ambos casos, la fuerza de rozamiento depende, por un lado, del tipo de superficies en contacto, y por el otro, de la normal entre las mismas. A mayor normal, mayor es la resistencia al movimiento (lo mismo sucede, a mayor rugosidad entre superficies).

Se observa que:

$F_{roze} \leq \mu_e N$
$F_{rozd} = \mu_d N$

donde μ_e y μ_d son los coeficientes de rozamiento estático y dinámico, respectivamente. Estos coeficientes dependen de las superficies intervinientes. Se cumple que $\mu_d < \mu_e$. Esto significa que estando el objeto reposo, la fuerza que debe hacerse para ponerlo en movimiento es mayor que la que luego debe mantenerse para que continúe haciéndolo.

Ejercicios de la Unidad 3 – Dinámica y Rozamiento.

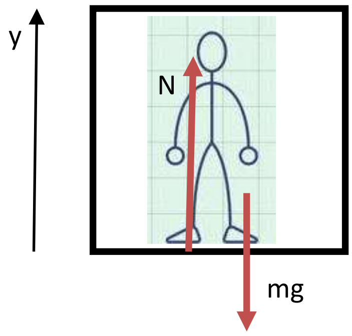
Dinámica.

En todos los casos, seguimos los pasos descriptos en el apunte.

3.1) Matías se encuentra sobre una balanza situada en un ascensor que sube con aceleración **a**. La escala de la balanza marca ***960 N.*** Matías alza una caja de ***20 kg*** y entonces la escala marca ***1200 N.*** Calcule la masa de Matías, su peso y la aceleración del ascensor. [Rta.: $\boldsymbol{m = 80\,kg,\ P = 784\,N,\ a = 2{,}2\,m/s^2}$]

Resolución.

Diagrama de cuerpo libre y sistema de referencia:



Todas las fuerzas actúan en una única dirección. Sólo se necesita definir un eje (y). Se tiene el peso de Matías, actuando hacia abajo, y la normal entre la balanza y Matias. La normal, es la fuerza que siente Matias debido a la balanza, que por el principio de acción y reacción, es la misma (y en sentido contrario) a la fuerza que siente la balanza debido a Matias. Esto significa que la medición de la balanza, corresponde al valor de la normal.

$N - m_{Matías}g = m_{Matías}a$

La aceleración es la aceleración de Matías, que es la aceleración del ascensor. Las ecuaciones de Newton son válidas sólo descriptas desde sistemas de referencia no acelerados (con lo cual, el eje y, está fuera del ascensor). Reemplazando,

$$960N - m_{Matías}g = m_{Matías}a \quad (1)$$

Se tiene una ecuación con dos incógnitas. Por ello, se tiene la segunda situación. Considero a Matías y a la caja de masa *m* como un único objeto. La normal N' será la nueva medición de la balanza y la ecuación de Newton resulta,

$$N' - (m_{Matías} + m)g = (m_{Matías} + m)a$$

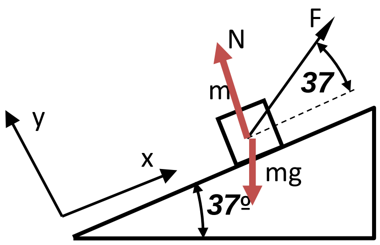
La aceleración no cambia, porque es la del ascensor.

$$1200N - (m_{Matías} + 20kg)g = (m_{Matías} + 20kg)a \quad (2)$$

Se tienen dos ecuaciones con dos incógnitas, las cuales se resuelven fácilmente y resulta:

$$m_{Matías} = 80kg$$
$$P_{Matías} = m_{Matías}g = 80kg\frac{9.8m}{seg^2} = 784N$$
$$a = 2.2m/seg^2$$

3.13) Un cuerpo de masa **m** = ***60*** **kg**, está apoyado sobre un plano inclinado ***37º***, tal y como muestra la figura. El módulo de la fuerza F es de ***500*** **N.** Calcule la aceleración del bloque. Considere el sistema libre de rozamiento. *[Rta.: a =* ***0,76 m/s²****].*



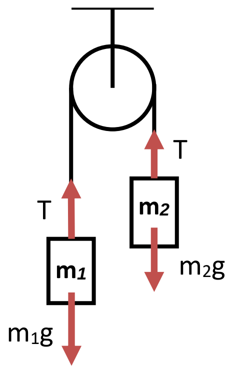
Resolución.

1) Hacemos diagrama de cuerpo libre y definimos sistema de referencia en la figura de arriba.
2) Escribimos las ecuaciones de Newton en *x* e *y,* descomponiendo el peso y la fuerza *F*:

$\hat{x}) + Fcos37º - mg \sin \alpha = ma_x$ (1)
$\hat{y}) + Fsin37º - mg \cos \alpha + N = ma_y = 0$ (2)

Sólo hace falta despejar de la ecuación en x para obtener *a=0.76m/seg²*. Comentario: la ecuación (2) muestra que la normal, no necesariamente coincide con el peso del cuerpo! La normal surge de despejar N de la ecuación (2).

3.14) Dos cuerpos tienen masas **m_1** y **m_2** que suman ***10* kg**. Se los suspende de los extremos de una cuerda que pasa por la garganta de una polea de masa despreciable tal como muestra la figura; se deja libre el sistema y la aceleración de las masas resulta ser de **2 m/s²**. Calcule los valores de **m_1** y **m_2**. *[Rta.:* ***m_1* = *4 kg*, *m_2* = *6 kg***].



Resolución.

Realizamos el diagrama de cuerpo libre sobre cada cuerpo. Como la polea es ideal (no tiene masa), las tensiones son siempre las mismas a lo largo de la polea. Se podría definir el sistema de referencia de dos maneras que merecen ser discutidas:

1) El eje *y* apuntando hacia arriba.

Escribo las ecuaciones de Newton para cada cuerpo. El movimiento es unidimensional, vamos a tener una ecuación por cada masa.

Cuerpo 1: $+T - m_1 g = m_1 a_1$ (1)
Cuerpo 2: $+T - m_2 g = m_2 a_2$ (2)

Además: $m_1 + m_2 = 10kg$ (3)

Falta una ecuación que relaciona las dos aceleraciones. Los cuerpos están unidos por un hilo inextensible, lo cual implica que ambas aceleraciones tienen que ser la misma en módulo, para que el hilo no se estire ni se afloje (todo el movimiento debe garantizar esta condición). Esto implica que las velocidades de ambos cuerpos, también deben tener el mismo valor en módulo. Que en módulo valgan lo mismo, no significa que tienen el mismo signo. Esto depende del sistema de referencia, y la ecuación que surge de relacionar las aceleraciones se denomina ecuación de vínculo.

En este problema, cuando el cuerpo 1 se acelera hacia arriba ($a_1>0$), el cuerpo 2 lo hace hacia abajo ($a_2<0$), y viceversa. Tenemos,

$a_1 = -a_2 \equiv a$ (4)

Y además,
$a = 2m/seg^2$ (5)

Reemplazando (4) en (1) y (2), y luego haciendo (2)-(1), las tensiones (no son dato) se cancelan y queda:

$$m_2 g - m_1 g = (m_1 + m_2)a$$

y usando la ecuación (3) en esta última, se obtiene el resultado de la guía.

2) Eje *y* torcido, siguiendo la dirección del hilo. En este caso, las ecuaciones de Newton resultan,

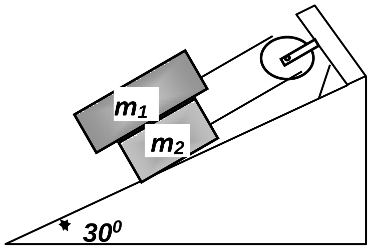
Cuerpo 1: $+T - m_1 g = m_1 a_1$ (1)
Cuerpo 2: $-T + m_2 g = m_2 a_2$ (2)

Pero la física debe ser la misma! Dónde está la diferencia? En la ecuación de vínculo. En este caso, cuando m_1 asciende con $a_1>0$, el cuerpo desciende, pero del lado del cuerpo 2, esa aceleración también es positiva ($a_2>0$) ya que apunta en el sentido en el que crece *y*. Por lo tanto, la ecuación de vínculo queda,

$$a_1 = a_2 \equiv a$$

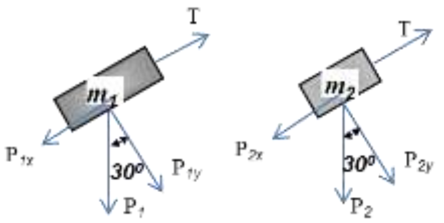
Las cuentas son las mismas y se obtiene el mismo resultado.

3.16) Calcule la aceleración de cada bloque y el esfuerzo que hace la cuerda que conecta ambos bloques si $\boldsymbol{m_1 = 20kg}$ y $\boldsymbol{m_2 = 10kg}$. Todas las superficies carecen de fricción.*[Rta:a =* ***1,6m/s²; T = 65 N****]*



Resolución.

Diagrama de cuerpo libre para ambos cuerpos:



Sistema de referencia: Adoptamos el sistema de referencia con el eje *x* paralelo al plano y positivo hacia arriba, y el eje *y* perpendicular al plano, positivo hacia arriba.

Ecuaciones de Newton: son dos para cada cuerpo, pero en este problema sólo es suficiente con hacerlo en el eje x.

m_1:
$\hat{x}) - m_1 g\ sin30° + T = m_1 a_1$

m_2:
$\hat{x}) - m_2 g\ sin30° + T = m_2 a_2$

m_1 y m_2 están unidas por una cuerda, por lo que se tiene una ecuación de vínculo que relaciona las aceleraciones de ambos cuerpos.

$a_2 = -a_1 \equiv a$

El razonamiento es el mismo que en el caso del problema anterior. Cuando m_1 acelera en el sentido de *x* positivo, m_2 lo hace del mismo modo, pero en el sentido de las *x* negativas. Reemplazando la ecuación de vínculo en las ecuaciones de Newton, obtenemos,

$\hat{x}) - m_1 g\ sin30° + T = m_1(-a)$ (1)
$\hat{x}) - m_2 g\ sin30° + T = m_2 a$ (2)

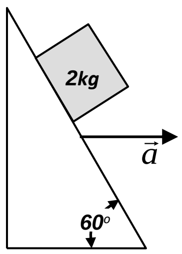
La tensión es una incógnita del problema, una manera sencilla de resolver este sistema de ecuaciones es sumando o restando las ecuaciones, de modo que alguna de las incógnitas de cancele. En este caso, podemos hacer (2) – (1), obteniendo,

$$\hat{x}) - m_2 g\ sin30° + T - m_1 g\ sin30° - T = (m_2 + m_1)a$$

Las tensiones se van, y resulta una ecuación con una incógnita (a). Despejando la aceleración, tenemos:
$a = 1.6 m/seg^2$

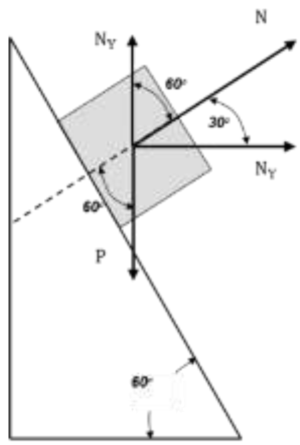
La tensión la obtenemos reemplazando la aceleración en cualquiera de las ecuaciones (1) o (2). Se obtiene T=65N.

3.17) Un cuerpo de ***2*kg**descansa sobre una superficie pulida que tiene una inclinación de ***60***° (ver la figur*a)* y una aceleración ***a*** hacia la derecha de tal modo que la masa permanece estacionaria con relación al plano. *a)* Determine ***a****; b)* ¿Qué ocurriría si el plano adquiriese una aceleración superior?.*[Rta: a) a =* ***17m/s²****]*

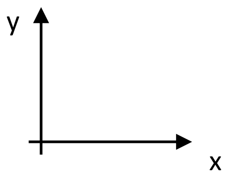


Resolución.

Diagrama de cuerpo libre: sólo actúan el peso (hacia abajo) y la normal N, perpendicular al plano.



Sistema de referencia: por un lado dijimos que el sistema no puede definirse sobre un sistema acelerado (ya que no se cumplen las ecuaciones de Newton como las estudiamos). Esto implica un sistema de ejes ubicado fuera del plano inclinado. Por el otro lado, marcamos la importancia de definir uno de los ejes, paralelos al movimiento del cuerpo. El cuerpo permanece quieto respecto del plano, y el plano se mueve en la dirección horizonal. Por lo tanto, el cuerpo se mueve en la dirección horintal. Esto permite definir el siguiente sistema de referencia:



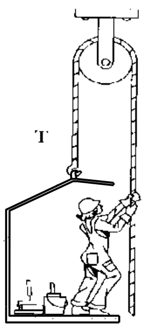
Ecuaciones de Newton:

$\hat{x})\ N\ sin60° = ma$ (1)
$\hat{y}) - mg + N\ cos60° = 0$ (2)

Observar que en este caso, la fuerza que hay que descomponer es la normal N. El peso, actúa en el eje y (en este sistema de referencia)

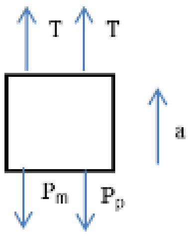
De la ecuación (2), obtenemos *N=39.2N*, y reemplazando en la ecuación (1), *a=16.97m/seg²*.

3.21) Una muchacha de ***50kg*** está de pie sobre una plataforma de aluminio de ***15 kg*** a fin de pintar la fachada de una casa. Una cuerda sujeta a la plataforma que pasa por una polea dispuesta en la parte alta de la casa, le permite elevarse a sí misma y a la plataforma. *a)* Al comienzo acelera a sí misma y a la plataforma con una aceleración de ***0,2 m/s²***. *b)* Cuando alcanza una velocidad de ***1 m/s***, ella ejerce una fuerza tal que ella y la plataforma suben a una velocidad constante. Para los casos *(a)* y *(b)*: ¿Qué fuerza se ejerce sobre la cuerda? (Ignore la masa de la cuerda.*) [Rta: a)* ***T = 325*** *N; b)* ***319*** *N]*



Resolución.

Diagrama de cuerpo libre: puedo considerar a la plataforma y la muchacha como un todo. En ese caso, tenemos,



Donde P_m y P_p son el peso de la muchacha y de la plataforma, respectivamente. Se adopta un eje y positivo hacia arriba, como sistema de referencia.

a) La ecuación de Newton resulta,

$$\hat{y})\quad 2T - (m_m + m_p)g = (m_m + m_p)a$$

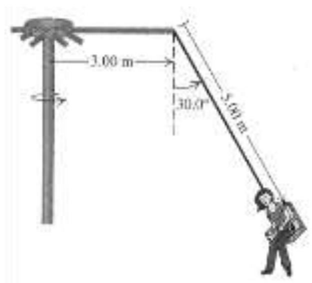
de donde podemos despejar la tensión, resultando *T=325N*.

b) La plataforma asciende a una velocidad constante (a=0), y la fuerza que hace la muchacha corresponde a la tensión de la cuerda, por lo tanto,

$$\hat{y})\quad 2T - (m_m + m_p)g = (m_m + m_p)a = 0$$

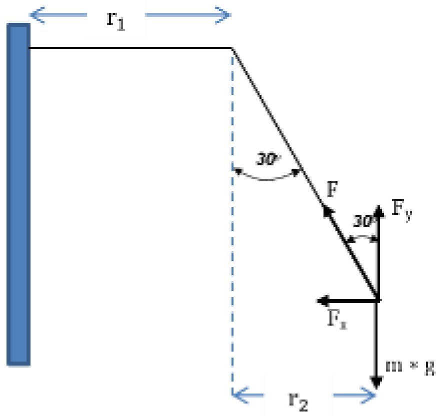
y despejando la tensión, resulta *T=318.5N*.

3.22) El Columpio Gigante de un parque de diversiones, consiste en un eje vertical central con varios brazos horizontales en su extremo superior (figura). Cada brazo sostiene un asiento suspendido de un cable de ***5*** *m* de longitud sujeto al brazo a ***3*** *m* del eje central. a) Calcule el tiempo de una revolución del columpio si el cable forma un ángulo de ***30***° con la vertical. b) ¿Depende el ángulo del peso del pasajero para una rapidez de giro dada?. [Rta: a) *T* = ***6,19*** *s;* b) *No]*



Resolución.

a) Diagrama de cuerpo libre:



Las únicas fuerzas presentes en este sistema son: la fuerza F que ejerce el cable sobre la persona (en la dirección del cable), y el peso hacia abajo.

Sistema de referencia: adoptamos el eje *y* positivo hacia arriba, y el eje *x* positivo apuntando del centro de giro. El peso tendrá componente sólo en y, mientras que la fuerza del cable, habrá que descomponerla en la dirección radial (*x*) y la vertical (*y*).

Ecuaciones de Newton:

$\hat{x})\ \ F \sin 30° = mR\omega^2 \quad (1)$
$\hat{y})\ \ -mg + F\cos 30° = 0 \quad (2)$

donde ω es la velocidad angular.

Importante: R siempre corresponde a la distancia del cuerpo (que describe el movimiento circular) al centro de giro. En este caso,

$$R = r_1 + r_2 = 3m + 5m\sin 30° = 5.5m$$

La masa del pasajero no es dato. Podemos despejar *m* de la ecuación (2),

$$m = \frac{F\cos 30°}{g}$$

y reemplazarla en (1)

$\hat{x})\ \ F \sin 30° = \dfrac{F \cos 30°}{g} R\omega^2$

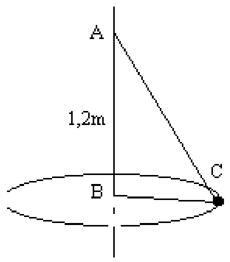
La fuerza *F* del cable se cancela, y podemos despejar ω, la cual está relacionada con el tiempo de una revolución (período τ).

$$\sqrt{\frac{\tan 30°\, g}{R}} = \omega = \frac{2\pi}{\tau}$$

Resultando el período, $\tau = 6.2/seg$

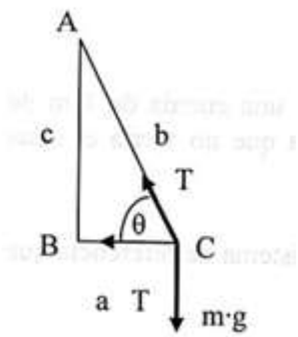
b) No, todos los resultados obtenidos, no dependen del peso del pasajero (se canceló), sin importar el ángulo.

3.23) Un pequeño cuerpo perforado de ***200*** *g* se puede deslizar libremente por una cuerda de ***1,8*** *m* de largo, atada en los puntos A y B a una varilla vertical alrededor de la cual gira de tal manera que el segmento BC queda horizontal. Calcule la rapidez del cuerpo. [Rta:*v* = ***2,71*** *m/s*]



Resolución.

Diagrama de cuerpo libre: Se tiene las tensiones sobre el cuerpo (nótese que son dos!), y el peso del mismo.



Sistema de referencia: adoptamos el eje *x* positivo hacia el centro de giro (B), y el eje *y* positivo hacia arriba.

Ecuaciones de Newton:

$\hat{x}) + T + T\cos\theta = m\frac{v^2}{\overline{BC}}$ (1)
$\hat{y})\ T\sin\theta - mg = 0$ (2)

Necesitamos conocer la distancia BC, y nos dan como dato la longitud total de la cuerda y el largo de la varilla AB:

$\overline{AC} + \overline{BC} = 1.8m$
$\overline{AB} = 1.2m$

Con estos datos, podemos aplicar Pitágoras,

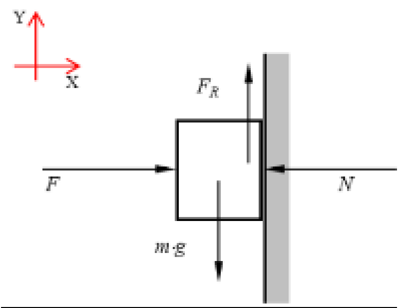
$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$
$(1.2m)^2 + \overline{BC}^2 = (1.8m - \overline{BC})^2$

de las cuales se obtiene que $\overline{BC} = 0.5m$ y $\tan\theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$, resultando $\theta = 67.38°$.

Reemplazando en (2), se obtiene T=2.12N y reemplazando T en (1), tenemos finalmente que *v=2.71 m/seg*.

Rozamiento.

3.34) Un bloque de ***5kg***s e mantiene en reposo contra una pared vertical mediante una fuerza horizontal de ***200N*.** Determine: *a)* La fuerza de rozamiento ejercida por la pared sobre el bloque. *b)* La fuerza horizontal mínima necesaria para evitar que el bloque caiga, siendo el coeficiente de rozamiento entre el bloque y la pared: μ = ***0,4***. *[Rta: a) f = **49** N; b) F = **123** N]*



Resolución.

El diagrama de cuerpo libre se presenta en la figura, junto con el sistema de referencia. Observen que si no hubiese rozamiento entre el bloque y la pared, la única fuerza presente en el eje *y* sería el peso. La normal es perpendicular al peso, y por más grande que sea *N*, el bloque caería debido a su peso. Lo único que evita que esto suceda, es el rozamiento. Al existir rugosidad entre la pared y el bloque, el valor de la normal sí va a influir en los resultados, pues influye en la fuerza de rozamiento, cuya dirección está en el eje *y*. Pensemos que si *N* es muy chico, la fuerza de rozamiento no sería suficiente para evitar que el bloque se caiga. Se tendrá, por lo tanto, un valor de *N* a partir del cual, la fuerza de rozamiento se compense con el peso y el sistema se mantenga en reposo.

Las ecuaciones de Newton (en reposo) resultan,

$\hat{x}) - N + F = 0$ (1)
$\hat{y}) - mg + F_{roze} = 0$ (2)

a) En este caso, se sabe que el sistema está en reposo (lo dice el enunciado). De la ecuación (2), despejando,

$$F_{roze} = mg = 49N$$

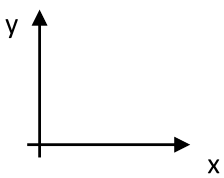
b) A mayor valor de la fuerza *F*, mayor va a ser la normal, y por lo tanto, mayor la fuerza de rozamiento. Para hallar el mínimo valor de *F*, debemos partir de la ecuación (2) y plantear la desigualdad asociada a la fuerza de rozamiento estática:

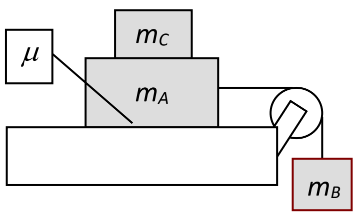
$$F_{roze} = mg \leq \mu_e N = \mu_e F$$

Por lo tanto, $mg \leq \mu_e F$, y finalmente,

$$F \geq \frac{mg}{\mu_e} = 122.5N$$

3.42) Para el sistema mostrado en la figura, que se encuentra inicialmente en reposo, calcule: *a)* El mínimo valor de $\mathbf{m_c}$ que evite el movimiento; *b)* La aceleración al quitar m_c. Datos:$\boldsymbol{m_A}$ = ***20kg***;$\boldsymbol{m_B}$= ***10kg***; μ_e = ***0,2***; μ_C = ***0,1.*** *[Rta: a)* $(m_C)_{mín.}$ = ***30*** *kg; b) a =* ***2,6*** *m/s²]*

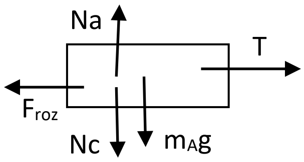




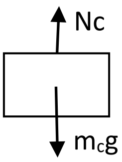
Resolución.

Diagrama de cuerpo libre para cada cuerpo.

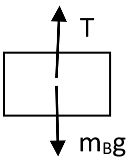
m_A:



m_C:



m_B:



donde N_A es la normal que entre el suelo y el bloque A, y N_c es la normal entre los bloques A y C. Notar que N_c aparece en ambos bloques y con sentidos opuestos (par de acción y reacción).

a) Dado el sistema de referencia indicado arriba, las ecuaciones de Newton son,

m_B:
$T - m_B g = 0$ (1)
m_C:
$N_C - m_C g = 0$ (2)
m_A:
$\hat{x}) - F_{roze} + T = 0$ (3)
$\hat{y})\ N_A - N_C - m_A g = 0$ (4)

De la ecuación (1), se obtiene $T=m_B g$, de la (2), $N_C=m_C g$, y de la (4), $N_A= m_A g+ m_C g$.
Con estos resultados, de (3) se obtiene que $F_{roze}= m_B g$.

El mínimo valor de m_c que evite el movimiento, está relacionado con el máximo valor que puede alcanzar la F_{roze}. En estos casos, siempre conviene plantear la desigualdad que conocemos sobre la fuerza de rozamiento estática e ir resolviéndola para poder responder lo que nos piden. Tenemos,

$$F_{roze} = m_B g \leq \mu_e N_A = \mu_e(m_A g + m_C g)$$

Con lo cual, nos queda la siguiente relación, que es la que va a dar una cota inferior para la masa del bloque C:

$m_B g \leq \mu_e(m_A g + m_C g)$

Resolviendo, finalmente se obtiene,

$m_C \geq \dfrac{m_B g - \mu_e m_A}{\mu_e} = 30kg$

b) Si quitamos el bloque C, el planteo cambia. Tenemos una ecuación de Newton menos, y desaparece la normal N_c debida al contacto entre A y C. Por otro lado, al quitar C, el sistema deja de está en reposo, y la fuerza de rozamiento que actúa sobre el bloque A, es dinámica. Las ecuaciones, por lo tanto, resultan,

m_B:
$T - m_B g = m_B a_B$ (1)
m_A:
$\hat{x}) - F_{rozd} + T = m_A a_A$ (2)
$\hat{y}) \; N_A - m_A g = 0$ (3)

Como la fuerza de rozamiento es dinámica, su valor es constante y está definido:

$F_{rozd} = \mu_d N_A = \mu_d m_A g$ (4)

El bloque A y el bloque B están unidos por una cuerda inextensible. Las aceleraciones, de acuerdo al sistema de referencia, se relacionan,

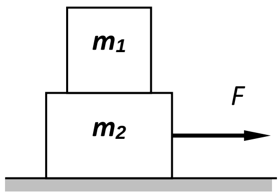
$a_A = -a_B \equiv a$ (5)

Reemplazando T de (1) en (2), y usando el resultado en (4) y la ecuación de vínculo (5), tenemos,

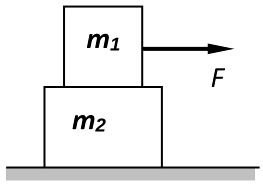
$-\mu_d m_A g + m_B g - m_B a = m_A a$

De donde, finalmente, obtenemos la aceleración pedida en el ejercicio (*a=2.61m/seg*^{2}).

3.43) Un cuerpo de masa $\boldsymbol{m_1 = 1kg}$ se apoya sobre otro de masa $\boldsymbol{m_2 = 4\ kg}$s/indica la figura. El coeficiente de rozamiento estático entre ambos es μ_E = ***0,3***. No hay rozamiento entre la mesa y el cuerpo ***2***. a)¿Qué máxima fuerza horizontal puede aplicarse al cuerpo ***2*** sin que los cuerpos deslicen entre sí?; b) ¿Qué máxima fuerza horizontal puede aplicarse al cuerpo ***1*** sin que los cuerpos deslicen entre sí?. *[Rta: a) $F_{máx.}$ = **14,7** N;b) $F_{máx.}$ = **3,7N**]*



Caso a



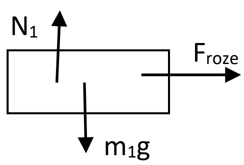
Caso b

Resolución.

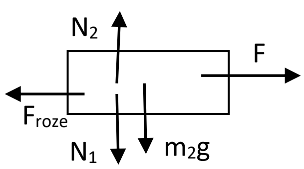
Vamos a plantear sólo el primer caso, es importante que les quede como ejercicio resolver el segundo.

Diagrama de cuerpo libre para cada cuerpo: existe rozamiento entre los bloques, pero no entre el bloque 2 y el piso. La fuerza *F* se aplica sobre el cuerpo 2.

m_1:



m_2:



donde N_1 corresponde a la normal debido al contacto entre el cuerpo 1 y 2. Cuando se ejercer la fuerza *F* sobre m_2, la presencia del bloque de arriba, ofrece una resistencia a que el cuerpo 2 se mueva en el sentido de *F*, por lo tanto la fuerza de rozamiento que "siente" m_2, es hacia la izquierda. Definida la fuerza de rozamiento para un cuerpo, por el principio de acción y reacción, sabemos que para el otro bloque, debe ser la misma, pero con sentido contrario. El bloque 1, "siente" que el bloque 2 lo empuja en la dirección de la fuerza.

Si F es muy grande, el bloque 2 deslizaría respecto del bloque 1. Lo que piden en el ejercicio es determinar el máximo valor de F actuando sobre 2, para que no haya deslizamiento relativo entre ambos objetos (fuerza de rozamiento estática). Está claro que el sistema no está en reposo, ambos cuerpos se mueve con la misma aceleración.

Ecuaciones de Newton: Adoptamos el eje x positivo hacia la derecha y el eje y positivo hacia arriba.

Cuerpo 1:
$\hat{x})\ F_{roze} = m_1 a$ (1)
$\hat{y})\ N_1 - m_1 g = 0 \rightarrow N_1 = m_1 g$ (2)

Cuerpo 2:
$\hat{x})\ F - F_{roze} = m_2 a$ (3)
$\hat{y})\ N_2 - N_1 - m_2 g = 0 \rightarrow N_2 = m_1 g + m_2 g$ (4)

De (1), se puede escribir,

$$F_{roze} = m_1 a \leq \mu_e N_1 = \mu_e m_1 g \rightarrow a \leq \mu_e g \quad (5)$$

Por otro lado, la ecuación (3) cumple,

$$F - m_2 a = F_{roze} \leq \mu_e N_1 = \mu_e m_1 g$$

Despejando F de la expresión de arriba, y utilizando el resultado en (5), finalmente obtenemos,

$$F \leq \mu_e m_1 g + m_2 a \leq \mu_e m_1 g + \mu_e m_2 g$$
$$F \leq 14.7N$$

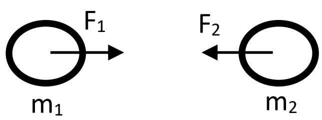
GRAVITACIÓN.

La **ley de Gravitación Universal**, formulada por Newton en 1687, describe un tipo de interacción presente entre dos cuerpos masivos (denominada **interacción gravitatoria**). La misma, establece que esta fuerza F (en módulo) entre dos cuerpos, debe ser proporcional a sus masas (m_1 y m_2) e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r (de centro a centro) entre ellos:

$$\boxed{F = \frac{m_1 m_2}{r^2} G}$$

donde ***G*** es un factor de proporcionalidad, denominado **Constante de Gravitación Universal**. Su valor es $G = 6.67384 \times 10^{-11} Nm^2 kg^{-2}$, en el sistema MKS. La dirección de esta fuerza se encuentra en el eje que une a ambos cuerpos.

Supongamos dos cuerpos de masa m_1 y m_2 respectivamente:



Por el principio de acción y reacción (tercera ley de Newton), se tiene que ambas fuerzas son iguales en módulo y signo opuesto. Es decir,

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Por otro lado, para m_1, la ecuación de Newton resulta:

$$\frac{m_1 m_2}{r^2} G = m_1 a_1$$

y su aceleración,

$$\frac{m_2}{r^2} G = a_1$$

Análogamente, para m_2, se tiene:

$$\frac{m_1 m_2}{r^2} G = m_2 a_2$$

$$\frac{m_1}{r^2} G = a_2$$

Si consideramos que $m_2=M_T$ es la tierra y m_1 es un cuerpo sobre la superficie terrestre (de radio $R_T=6.37\ 10^6 m$), tenemos

$$\frac{m_1 M_T}{R_T^2} G = m_1 a_1 = m_1 g$$

de la cual, se obtiene una relación muy utilizada en los ejercicios:

$$\boxed{M_T G = g R_T^2}$$

Leyes de Kepler.

Las leyes de Kepler fueron enunciadas previas a la ley de Gravitación Universal, a partir de observaciones, por Johannes Kepler, entre los años 1609 y 1619. Las mismas describen matemáticamente el movimiento de los planetas alrededor del sol.

Primera ley: Los planetas describen órbitas elípticas alrededor del sol, el cual se encuentra en uno de los focos de la elipse.

Segunda ley: Enuncia la conservación de la velocidad areolar. El radio vector que une al planeta con el sol, barre áreas iguales en tiempos iguales. Es decir, cuando un planeta se encuentra en una región de la órbita más cercana al sol, su velocidad de traslación es mayor que cuando se encuentra más alejado del mismo, de modo que el área barrida por unidad de tiempo, se mantenga constante.

Tercera ley: Establece una relación entre el período T y el radio mayor de la órbita elíptica a, la cual cumple,

$$\frac{T^2}{a^3} = cte$$

La primera y la tercera ley, pueden deducirse de la ley de Gravitación Universal. Si consideramos el caso de un planeta de masa m_1 orbitando alrededor del sol (M_{sol}), y aproximando su órbita como circular, se tiene que:

$$\frac{m_1 M_{sol}}{r^2} G = m_1 a_{centrípeta} = m_1 r \omega^2 = m_1 r \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

y reordenando la expresión de arriba, vemos que se cumple la tercera ley

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{M_{sol} G} = cte$$

Ejercicios de Gravitación.

3.51) ¿Cuál es la altitud de un satélite geoestacionario?. [Rta: *H* = ***3,59x10^7*** *m*].

Un satélite geoestacionario es aquel que posee la misma velocidad angular que la tierra. De ese modo, el mismo siempre se encuentra situado sobre un mismo punto de la tierra. Planteando fuerza gravitatoria sobre el satélite (m_{sat}), debido a la tierra (M_T), tenemos, por lo visto en el apunte,

$$\frac{m_{sat}M_T}{(R_T+h)^2}G = m_{sat}a_{centrípeta} = m_{sat}(R_T+h)\omega_{sat}^2 \quad (1)$$

Imponiendo la condición de geoestacionario y relacionando la velocidad angular con su período,

$$\omega_{sat} = \omega_{tierra} = \frac{2\pi}{24hs} = \frac{2\pi}{24\times 3600seg} \quad (2)$$

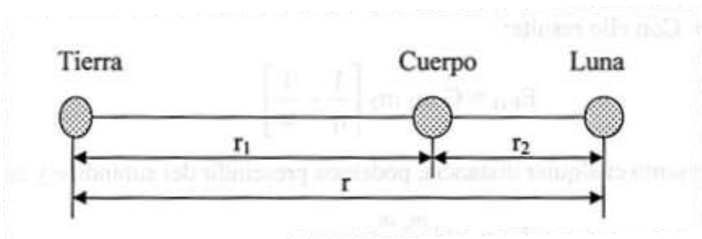
Reemplazando (2) en (1) y utilizando $M_TG = gR_T^2$, al despejar *h*, obtenemos finalmente,

$$h = \left(\frac{R_T^2 g}{\omega_{sat}^2}\right)^{1/3} - R_T = 3.59\times 10^7 m$$

3.52) ¿En qué puntos (medidos desde el centro de la Tierra) son iguales los módulos de las fuerzas de atracción gravitatoria ejercidas sobre un cuerpo, respectivamente, por la Tierra y la Luna? Datos: Distancia Tierra-Luna =***60***R_T; m_T = ***81***m_L. [Rta:x_1 = ***3.46x10^8*** *m* x_2 = ***4,32x10^8*** *m*]

Resolución.

Consideremos el siguiente esquema:



La idea es ver en qué puntos, la fuerza ejercida por la tierra sobre el cuerpo (de masa *m*) es igual a la fuerza ejercida por la luna sobre el mismo. Planteamos las fuerzas gravitatorias correspondientes (de acuerdo a las distancias definidas en el gráfico) y las igualamos.

$$F_{tierra-cuerpo} = \frac{mM_T}{r_1^2}G = \frac{mM_{luna}}{(r-r_1)^2}G = F_{luna-cuerpo} \quad (1)$$

Por el otro lado, se sabe que $M_T=81M_{luna}$ y $r=60R_T$. Reemplazando en (1), la expresión resulta:

$$\frac{m81M_{luna}}{r_1^2}G = \frac{mM_{luna}}{(60R_T - r_1)^2}G$$

y simplificando,

$$\frac{81}{r_1^2} = \frac{1}{(60R_T - r_1)^2}$$

Entonces,

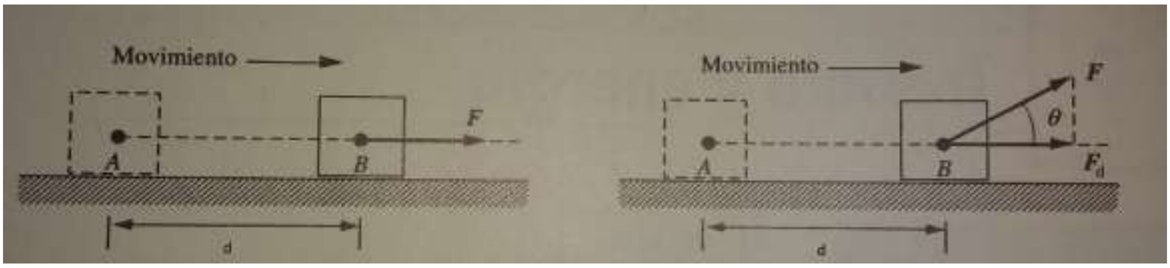
$$81(60R_T - r_1)^2 - r_1^2 = 0$$

Al desarrollar el cuadrado en la expresión entre paréntesis, y resolver la cuadrática, se obtienen los resultados de la guía. Observen que los mismos, no dependen de la masa del cuerpo, la cual se simplificó.

TRABAJO Y ENERGIA.

Definimos el **Trabajo** de una fuerza $\vec{F}$ como W= $\int_A^B \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr}$, donde A y B son las posiciones iniciales y finales de la partícula respectivamente y $\overrightarrow{dr}$ es el desplazamiento infinitesimal.

Si el desplazamiento es rectilíneo una distancia d y la fuerza es constante se puede particularizar como$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cdot cos\theta = F_d \cdot d$, donde θ es el ángulo formado entre la Fuerza y el desplazamiento.



a)Trabajo de una Fuerza constante paralela al desplazamiento

b) Trabajo de una fuerza constante que forma un ángulo con el desplazamiento

Notemos que si la fuerza es perpendicular al desplazamiento, esta no realiza trabajo ya que el $Cos\ 90° = 0$. En la práctica esto nos lleva a concluir que en la mayoría de los casos la normal no realice trabajo.
La unidad de trabajo en el mks es el Joule y 1J equivale a aplicar una fuerza de 1N recorriendo una distancia de 1m en la misma dirección.

Definimos la **Energía Cinética** como $Ec = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ donde m es la masa del cuerpo y *v* es la velocidad.

El teorema de las **Fuerzas Vivas** establece que el trabajo de las fuerzas resultantes es igual a la variación de la energía cinética.

$$W_F^{A \to B} = E_C(B) - E_C(A)$$

Algunos comentarios:

- La energía cinética de una partícula puede ser calculada en cualquier punto de su movimiento, si se conoce su velocidad. El trabajo en cambio, es una cantidad asociada con una fuerza y su desplazamiento, con lo cual depende de la trayectoria seguida, no solo de un punto en cuestión. Notemos que el teorema de las fuerzas vivas nos permite relacionar una característica de la partícula (Ec), con una cantidad que depende de su trayectoria ($W_F^{A \to B}$)
- Notemos que, si la fuerza resultante sobre una partícula es cero, su energía cinética permanece contante, con lo cual la velocidad de la partícula no varía. Siempre suponiendo que la partícula no pierde masa.

Definimos como **Fuerzas Conservativas** a aquellas tales que, el trabajo realizado para ir de A a B, dependen de los puntos A y B en cuestión, sin importar la trayectoria que se utilice para llegar de uno al otro. Se puede asociar a cada fuerza conservativa una **Energía Potencial** que sólo es función de la posición de la partícula.

Entonces, si F es una fuerza conservativa:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \underbrace{E_{P(a)}}_{\text{Inicial}} - \underbrace{E_{P(b)}}_{\text{Final}} = -\Delta E_P$$

El trabajo de las fuerzas conservativas equivale a “menos” la variación de la energía potencial.

Ejemplos de estas son el **Peso** que tiene asociada la **Energía Potencial Gravitatoria** (E_{PG}) y la **Fuerza Elástica** (producida por un resorte) que tiene asociada la **Energía Potencial Elástica**(E_{PE}).

Definimos la **Energía Potencial Gravitatoria** como $E_{PG}\,(y) = m \cdot g \cdot y + C$ donde m es la masa del cuerpo, g la gravedad, y es la posición en la dirección vertical y C es una constante arbitraria. Debido a esta arbitrariedad, el cero o nivel de referencia puede elegirse donde mejor nos convenga. Por ejemplo, para un cuerpo que cae libremente una buena elección sería el 0 de energía potencial gravitatoria en el suelo.

Definimos la **Energía Potencial Elástica** como $E_{PE}\,(x) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 + C$ donde k es la constante del resorte, x es la posición de la particula, medida desde su posicion de relajacion (cuando el resorte no hace fuerza) y C es una constante arbitraria la cual suele elegirse igual a cero cuando x=0.

Observación: Son Equivalentes

- F es una fuerza conservativa
- $W_F^{A\to B}$ sólo depende de A y B, y no de la trayectoria utilizada para llegar de uno a otro.
- $W_F^{A\to A} = 0$ el trabajo para ir de un punto a si mismo por cualquier trayectoria posible es cero

Por otro lado, veamos algunos ejemplos de **Fuerzas No Conservativas** son: Fuerzas de vínculo, contacto (la normal), rozamiento, etc.

Definimos la **Energía Mecánica** como la suma de la energía cinética más las energías potenciales involucradas $E_M = E_C + E_P$

El teorema de **Conservación de la Energía** mecánica nos dice que cuando la fuerza es conservativa la **Energía Mecánica** total permanece constante.

$$E_M = E_C + E_P = Cte$$

Durante el movimiento producido por fuerzas conservativas, la energía cinética y la potencial pueden variar, pero siempre de manera tal que su suma permanezca constante. De alguna manera existe un intercambio continuo de energía cinética en potencial y viceversa. Algunos ejemplos de esto son la caída libre, el tiro vertical, tiro oblicuo, el movimiento oscilatorio, etc.

En general un cuerpo puede estar sujeto a fuerzas conservativas como no conservativas al mismo tiempo. Con lo cual el trabajo puede ser separado en 2 términos, uno debido a fuerzas conservativas (W_{FC}) y uno debido a fuerzas no conservativas (W_{FNC}).$W = W_{FC} + W_{FNC}$Como el trabajo de las fuerzas conservativas es igual a menos la variación de la energía potencial, y el trabajo total es igual a la variación de la energía mecánica, se puede concluir un resultado de suma utilidad. El cuál se conoce como el **Teorema del Trabajo y la Energía** y nos dice que el trabajo de las fuerzas no conservativas es igual a la variación de la energía mecánica.

$$W_{FNC} = \Delta E_m$$

Este resultado se puede aplicar en muchos problemas, veamos por ejemplo que un cuerpo sobre un plano inclinado sin rozamiento, al cual no se le aplican fuerzas externas la energía mecánica se conserva, ya que la fuerza peso es conservativa y la normal no realiza trabajo, lo mismo ocurre en un loop.

Finalmente, esos resultados pueden ser aplicados tanto a una partícula puntual como a un sistema, de hecho, pueden definirse los ceros de potencial independientemente para cada cuerpo.

Resolución de Ejercicios

Ejercicio 3.54

Veamos que en este caso la fuerza es constante $\vec{F} = (2\hat{\imath} - 1\hat{\jmath})N$y el desplazamiento es rectilíneo según $\overrightarrow{\Delta r} = (3\hat{\imath} + 3\hat{\jmath})m$.

Obs: $\hat{\imath}$y$\hat{\jmath}$son los vectores unitarios (versor) en direccion x e y respecetivamente

Entonces el trabajo se calcula como:

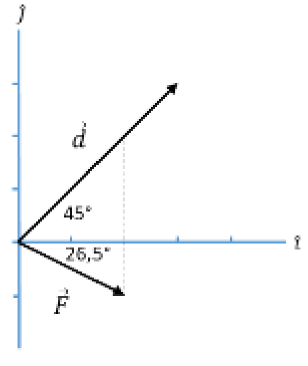
$$W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\Delta r} = (2\hat{\imath} - 1\hat{\jmath})N \cdot (3\hat{\imath} + 3\hat{\jmath})m$$

$$W = (2\hat{\imath} \cdot 3\hat{\imath} + 2\hat{\imath} \cdot 3\hat{\jmath} - 1\hat{\jmath} \cdot 3\hat{\imath} - 1\hat{\jmath} \cdot 3\hat{\jmath})Nm$$

Recordando que el producto escalar de 2 versores es 1 si son el mismo y 0 cero sin perpendiculares.

$$W = (6 + 0 - 0 - 3)J \quad \Rightarrow \quad W = 3J$$

El módulo de la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento es la proyección de la fuerza en esa dirección o lo que es lo mismo que $|\vec{F}| \cdot cos\phi$



En el grafico podemos ver como se calcula el ánguloϕ y que representa esta proyección en la direccion de $\vec{d}$

De esta manera podemos calcularlo como

$$|\vec{F}| \cdot \cos(45° + 26{,}5°) = \sqrt{5}N \cdot \cos(71{,}5°) = 0.7N$$

Ejercicio 3.56

En primer lugar, veamos que para calcular la energía cinética en X=0 simplemente tenemos que evaluar la velocidad inicial en este instante.

$$Ec = \frac{1}{2} \cdot 2kg \cdot \left(3\frac{m}{s}\right)^2 = 9J$$

Para poder calcular el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ entre X=0 y X=4 debemos mirar bien la definicion de este. W= $\int_A^B \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr}$. Como se ve es la integral de la fuerza en el recorrido, lo cual no es otra cosa que el área bajo la curva en el gráfico presentado en la guía F vs X.

De esta manera calcular el trabajo se reduce a calcular el área del triángulo de base 4m y altura 8N. $W = \frac{4m \cdot 8N}{2} = 16J$

Para calcular el módulo de la velocidad $|v_f|$cuando la masa pasa por x=4m utilizamos el teorema de las fuerzas vivas.

$$W_F^{X=0 \,\to\, X=4} = Ec(X = 4m) - Ec(X = 0m)$$

$$16J = \frac{1}{2} \cdot 2kg \cdot v_f^2 - 9J$$

Entonces la velocidad resulta ser en modulo igual a $|v_f| = 5\frac{m}{s}$

Como la fuerza en todo momento contribuyo a incrementar la energía cinética, podemos concluir que continúa moviéndose en la misma dirección que la inicial, pero como hemos visto con mayor celeridad.

Obs: Mediante consideraciones energéticas podemos calcular el módulo de la velocidad, no su dirección.

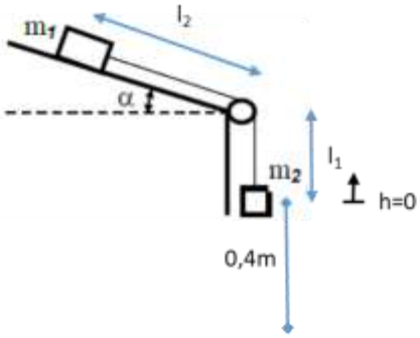
Obs: Se llama celeridad al módulo del vector velocidad.

Comentario General: Como proceder para la resolución de un ejerció de energía

- Definir el sistema y el sistema de referencia para cada cuerpo.
- Realizar el DCL de cada cuerpo.
- Analizar las fuerzas que actúan, y ver si son o no conservativas.
- Analizar si se conserva o no la energía mecánica.
- Identificar 2 instantes a comparar y evaluar en cada uno de ellos que energías involucradas aparecen y cuales son cero.

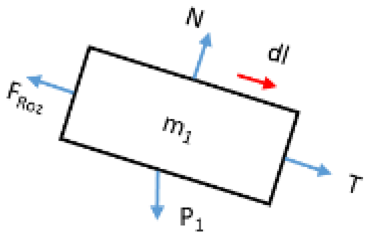
Ejercicio 3.64

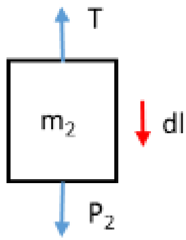
Al ser un problema de varios cuerpos vinculados identificamos el sistema, este constara de m_1, m_2 y la polea.



Se debe realizar el diagrama de cuerpo libre de cada masa y analizar el tipo de fuerza que actúa sobre ella y si realiza trabajo.

En m_1 actúan las siguientes fuerzas En m_2 actúan las siguientes fuerzas





Fuerza	Es conservativa	Realiza trabajo
Rozamiento	No	Si
Normal	No	No
Peso	Si	Si
Tensión	No	Si

Fuerza	Es conservativa	Realiza trabajo
Tensión	No	Si
Peso	Si	Si

- La normal no realiza trabajo, pues su dirección es siempre perpendicular al desplazamiento del cuerpo. Recordando que el cos 90°=0 se concluye que su trabajo es cero.
- El peso es conservativa y tiene entonces asociada a ella la energía potencial gravitatoria.

- Nuevamente, el peso es conservativa y tiene entonces asociada a ella la energía potencial gravitatoria.

Además, se puede ver también que el trabajo realizado por la tensión en 1, es igual a menos el trabajo realizado en 2, debido a que es la misma fuerza, pero con dirección en un caso igual al desplazamiento (dl) y en el otro caso opuesta al desplazamiento. Con lo cual el trabajo neto sobre debido a la tensión es cero. Esto ocurre siempre con las fuerzas internas a un sistema.

$$W_{T(m1)} = \int_0^{0,4m} T \cdot dl \cdot \cos 0 = T \cdot 0,4m$$

$$W_{T(m2)} = \int_0^{0,4m} T \cdot dl \cdot \cos 180 = -T \cdot 0,4m$$

$$\Rightarrow \quad W_{T(m1)} + W_{T(m2)} = 0$$

Finalmente, la única fuerza no conservativa que realiza trabajo es la de rozamiento, con lo cual.

$$\boxed{W_{FNC} = \Delta E_m \text{ se reduce a } W_{F\,Roz} = \Delta E_m}$$

Entonces veamos la energía mecánica inicial y final de cada partícula, como son varios términos analicemos cada uno en la siguiente tabla.

	Partícula 1		Partícula 2	
Inicial	Ec=0 pues Vi=0	Epg=m_1 g (l_1+ l_2 sen20)	Ec=0 pues Vi=0	Epg=0 pues elijo el cero ahí
Final	Ec asociada a Vf	Epg=m_1 g (l_1 + sen20(l_2-0,4m))	Ec asociada a Vf	Epg=m_2g(-0,4m)

La velocidad final de ambos cuerpos es la misma, por eso se le asocia V_f a ambas. Todas las alturas para la energía potencial gravitatoria son medidas desde la misma referencia, la cual se observa en el gráfico.

Entonces

$$\Delta E_m = E_{m\,final} - E_{m\,inicial}$$

$$= -m_1 \cdot g \cdot sen20 \cdot 0{,}4m - m_1 \cdot g \cdot 0{,}4m + \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot V_F^2$$

Por otro lado, calculemos el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento, evaluemos los datos numéricos del problema.

$$W_{FRoz} = \int_0^{0{,}4m} F_{Roz} \cdot dl \cdot \cos 180$$

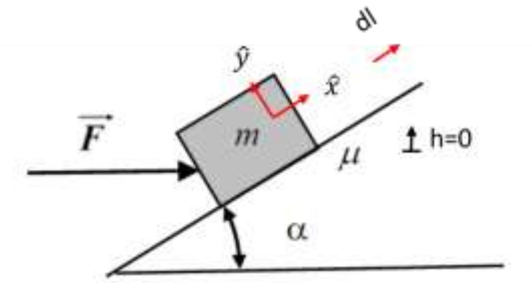
$$= -\int_0^{0{,}4m} \mu \cdot m \cdot g \cdot cos20 \cdot dl = -\mu \cdot m \cdot g \cdot cos20 \cdot 0{,}4m = -22{,}1J$$

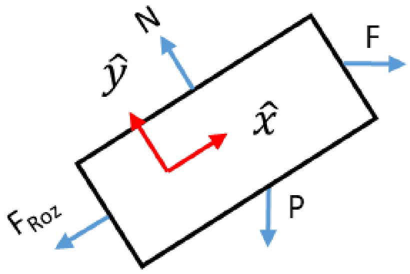
Como $W_{F\,Roz} = \Delta E_m$, podemos de esta igualdad despejar el modulo de la velocidad final del sistema.

$$|V_F| = 2{,}06\frac{m}{s}$$

Ejercicio 3.67

Primero, establecemos el sistema de referencia y realizamos el diagrama de cuerpo libre. Como avanza 1 metro hacia arriba, el desplazamiento (dl) va en sentido positivo de $\hat{x}$.





Descomponemos las Fuerzas F y P en la dirección de los versores.

Fx=F cos α	Px=m g sen α
Fy=F sen α	Py=m g cos α

Veamos entonces como clasificamos las fuerzas del problema. El peso $\vec{P}$es una fuerza conservativa, por lo que tiene asociado a ella la energía potencial gravitatoria. La normal $\vec{N}$ no realiza trabajo, pues es perpendicular al desplazamiento. $\vec{F}$ y $\overrightarrow{F_R}$ realizan trabajo, pero si miramos en detalle $\vec{F} = \overrightarrow{F_x}\,\widehat{x} - \overrightarrow{F_y}\,\widehat{y}$ con lo cual podemos ver que la componente Fy no realiza trabajo por ser perpendicular a $\overrightarrow{dl}$.

Entonces

$$W_{FNC} = \int_A^B \left(\overrightarrow{F_{Roz}} + \overrightarrow{F_X}\right) \cdot \overrightarrow{dl} = \left(F_{Roz}(-\widehat{x}) + F_X\hat{x}\right) \cdot dl\,\hat{x}$$

$$W_{FNC} = (-\mu \cdot N + F_X)\int_A^B dl = (-\mu \cdot (m\ g\ cos\alpha + F\ sen\ \alpha) + F\ cos\ \alpha) \cdot 1\text{m}$$

Obs: La normal la calculamos escribiendo la ecuación de newton en $\hat{y}$ y despejando

Por otro lado, calculamos la variación de la energía mecánica. Elegimos el cero de potencial en la posición inicial del cuerpo y como parte del reposo, la energía mecánica inicial es cero.

$$\Delta E_m = E_{m\,final} - E_{m\,inicial} = m \cdot g \cdot 1m \cdot sen\ \alpha + \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_F^2 = 26{,}47J$$

Obs: Si avanza un metro sobre el plano inclinado, su altura varia 1m sen α. Recordemos además que la velocidad final es dato

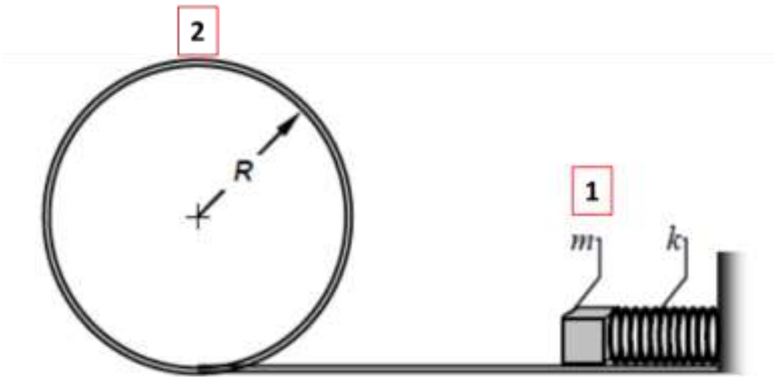
Entonces utilizando el teorema del Trabajo y la Energía $W_{FNC} = \Delta E_m$ despejamos el coeficiente de rozamiento, ya que todo el resto son datos del problema. $\mu = 0{,}318$

Ahora estamos en condiciones de calcular el trabajo de la fuerza de rozamiento.

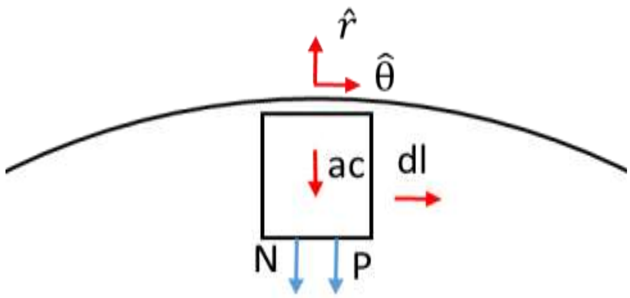
$$W_{FNC} = -\mu \cdot (m\ g\ cos\alpha + F\ sen\ \alpha) \cdot 1\text{m} = -21{,}44\text{J}$$

Ejercicio 3.71

Analicemos que fuerzas intervienen en el cuerpo. En todo momento actúa el peso (Fuerza conservativa), la normal (No realiza trabajo, al ser siempre perpendicular al desplazamiento). Y además cuando el bloque está en contacto con el resorte, actúa la Fuerza elástica, la cual es también conservativa y tiene asociada a ella la energía potencial elástica. De esta manera el trabajo de las fuerzas no conservativas es cero, la energía mecánica del sistema se conserva.$E_m(1) = E_m(2)$



Este ejercicio es muy similar al 2.70. Veamos que en ambos el punto crítico esa en la parte más alta del loop, punto que denominamos 2. En este punto crítico el cuerpo no solo debe llegar, sino que también lo debe hacer con suficiente velocidad como para mantenerse agarrado a la superficie, esto corresponde a pedir que la normal no se haga cero en ningún momento.Para calcular cuánto debe valer como mínimo la velocidad en 2, planteamos el diagrama de cuerpo libre en ese instante.



Escribimos la ecuación de Newton en coordenadas polares, ya que el movimiento descripto por el cuerpo es circular. Veamos que solo hay fuerzas en $\hat{r}$ y recordemos que la aceración centrípeta (a_c) también está en la misma dirección. Además todas son negativas respecto a la dirección de$\hat{r}$. Por otro lado, la dirección de movimiento se encuentra en la dirección de $\hat{\theta}$.

Ec. de Newton: $-N - P = m \cdot (-a_C) = -m \cdot (\omega^2 \cdot R) = -m \cdot \left(\frac{v^2}{R}\right)$

Donde ω es la velocidad angular y R el radio del loop. Además, la a_c puede también ser escrita en función de la velocidad tangencial v y de R.

Se despega de la superficie con N=0, entonces la velocidad mínima se despeja de la ecuación.

$$-m \cdot g = -m \cdot \left(\frac{{v_{min}}^2}{R}\right) \quad \Longrightarrow \ |v_{min}| = \sqrt{g \cdot R}$$

Ahora si podemos comparar la energía mecánica en 1 y en 2. Recordemos que en 1 parte del reposo y definimos este punto como el cero de potencial gravitatorio. Por lo que en 1 solo nos queda el término asociado al potencial elástico.

$$E_{PE}(1) = E_{PG}(2) + E_C(2)$$

$$\frac{1}{2} \cdot k \cdot {\Delta x_{min}}^2 = m \cdot g \cdot 2R + \frac{1}{2} \cdot m \cdot {v_{min}}^2$$

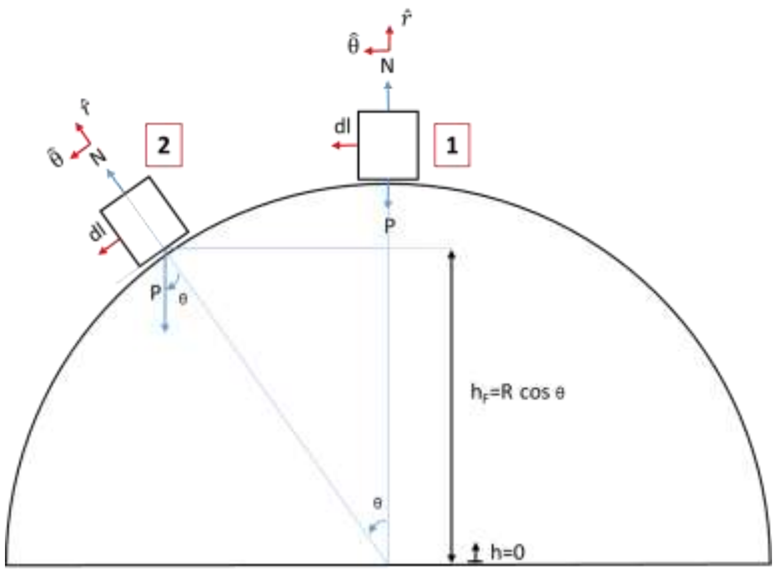
Obs: Cuando está en 2 está a una altura 2R del piso

Entonces la compresión mínima del resorte resulta

$$\Delta x_{min} = \sqrt{\frac{5 \cdot m \cdot g \cdot R}{k}} = 0{,}07m = 7cm$$

Ejercicio 3.75

Lo que nos pide el ejercicio es ver cuando el cuerpo pierde contacto con la semiesfera, nuevamente esto corresponde a analizar cuando la fuerza normal a la superficie se hace cero.



Veamos la descomposición en los versores polares de las fuerzas intervinientes.
$\vec{P} = -m \cdot g \cdot \cos\theta\, \hat{r} + m \cdot g \cdot sen\, \theta \hat{\theta}$ y en todo momento $\vec{N} = +N\, \hat{r}$
Planteamos la Ec. de Newton en $\hat{r}$: $N - m \cdot g \cdot \cos\theta = -m \cdot \left(\frac{v^2}{R}\right)$
El cuerpo se despega de la superficie cuando N=0, entonces la velocidad con la que se despega es $|v^*| = \sqrt{R \cdot g \cdot \cos\theta}$

Por otro lado, podemos preguntarnos ¿Se conserva la energía mecánica del sistema? Si, pues el trabajo de las fuerzas no conservativas es cero, pues la normal es siempre perpendicular al desplazamiento, por lo cual no realiza trabajo. Entonces $E_M(1) = E_M(2)$
Eligiendo el piso como cero de potencial, recordado que parte del reposo y que se desprende de la superficie con v^*, a una altura h_F que geométricamente podemos ver que es igual a R cos θ .

$$m \cdot g \cdot R = m \cdot g \cdot \cos\theta \cdot R + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^{*2}$$

Entonces

$$\cos\,\theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \quad \theta = 48°\, 11'$$

<u>Ejercicio 3.79</u>

El enunciado de este ejercicio nos dice que el conductor al aplicar los frenos provoca el bloqueo de las ruedas, esa es la condición en la cual, la fuerza de rozamiento es la máxima. $F_{Roz} = \mu \cdot N = \mu \cdot m \cdot g$. Como se detiene a raiz de solo esta fuerza que es constante, la camioneta describe un movimiento de MRUV. La ecuación de Newton en la dirección de movimiento nos dice que $m \cdot a = -F_{Roz}$ con lo cual la aceleración resulta $a = -\,\mu \cdot g$
Recordando cinemática y que la camioneta se detiene completamente, obtenemos que el tiempo de detención $\frac{v_F - v_I}{t_F - t_I} = \frac{0 - v_I}{t_F - 0} = a$ entonces $t_F = 3{,}4s$

Definimos la tasa con la cual hace trabajo la fuerza como la potencia: $P = \frac{dW}{dt}$

Dado que la única fuerza que realiza trabajo es la de rozamiento y que esta no depende del tiempo entonces resulta

$$P(t) = \frac{F \cdot dr(t)}{dt} = F \cdot \frac{dr(t)}{dt} = F \cdot v(t)$$

Obs: recordemos de cinemática que $\frac{dr}{dt} = v(t)$

Reemplazando F por la fuerza de rozamiento y v(t) la expresión de la velocidad para el MRUV descripto con los valores del problema

Resulta $P(t) = (62{,}2 \cdot s^{-1} \cdot t - 212) \cdot 10^3 W$ esto es válido entre $0 < t < t_F = 3{,}4s$

W (Watt) es la unidad de potencia del mks. 1 Watt corresponde a realizar un trabajo de 1 Joule en 1 segundo.

<u>Comentario:</u> Los ejercicios de la sub unidad Impulso y Cantidad de movimiento pueden resolverse con los contenidos que se explican en la unidad Dinámica de sistema de partículas