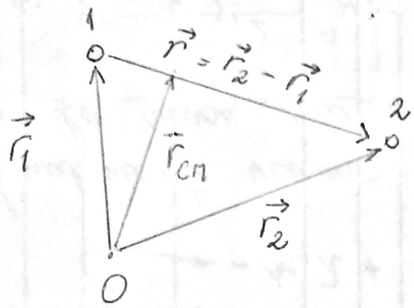
La energía cinética en las coordenadas del CM:



$$(1)\begin{cases} \vec{r}_{CM} = \dfrac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}}{m_1 + m_2} \\ \vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1} \end{cases}$$

Para escribir las relaciones inversas de (1) hacemos el truco siguiente: "sumo y resto $m_2\vec{r_1}$"

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r_1} + \overbrace{m_2\vec{r_2} - m_2\vec{r_1} + m_2\vec{r_1}}}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{(m_1 + m_2)\vec{r_1} + m_2(\vec{r_2} - \vec{r_1})}{m_1 + m_2} = \vec{r_1} + \lambda\vec{r}$$

$\hookrightarrow$ con $\lambda = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}$

del mismo modo ....

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2} - m_1\vec{r_2} + m_1\vec{r_2}}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{(m_1 + m_2)\vec{r_2} - m_1(\vec{r_2} - \vec{r_1})}{m_1 + m_2} = \vec{r_2} - \lambda'\vec{r}$$

$\hookrightarrow$ con $\lambda' = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}$

$$\boxed{(2)\ \begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{r}_{CM} - \lambda \vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{r}_{CM} + \lambda' \vec{r} \end{cases}}$$

con $\lambda = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}$ y $\lambda' = \dfrac{m_1}{m_1+m_2}$

La <u>energía cinética</u> es entonces:

$$E_C = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \overset{\text{de (2)}}{=} \frac{1}{2} m_1 |\vec{v}_{CM} - \lambda \vec{v}|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\vec{v}_{CM} + \lambda' \vec{v}|^2$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \left(v_{CM}^2 - 2\lambda \vec{v}_{CM} \cdot \vec{v} + \lambda^2 v^2\right) + \frac{1}{2} m_2 \left(v_{CM}^2 + 2\lambda' \vec{v}_{CM} \cdot \vec{v} + \lambda'^2 v^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{CM}^2 + \frac{1}{2}\left(m_1 \lambda^2 + m_2 \lambda'^2\right) v^2$$

dado que los dos términos que contienen $\vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}$ se cancelan ....

$$\longrightarrow -m_1 \lambda + m_2 \lambda' = -\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} + \frac{m_2 m_1}{m_1+m_2} = 0$$

finalmente veamos que el paréntesis que acompaña a v^2 es la masa reducida.

$$m_1 \lambda^2 + m_2 \lambda'^2 = \frac{m_1\, m_2^2 + m_2\, m_1^2}{(m_1+m_2)^2} = \frac{m_1 m_2 \cancel{(m_1+m_2)}}{(m_1+m_2)^2}$$

cancelan ....

$$\hookrightarrow -m_1 \lambda + m_2 \lambda' = -\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} + \frac{m_2 m_1}{m_1+m_2} = 0$$

finalmente veamos que el paréntesis que acompaña a v^2 es la masa reducida.

$$m_1 \lambda^2 + m_2 \lambda'^2 = \frac{m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2}{(m_1+m_2)^2} = \frac{m_1 m_2 \cancel{(m_1+m_2)}}{(m_1+m_2)^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \equiv \mu \rightarrow \text{masa reducida.}$$

Luego, en el sistema CM

$$(3) \qquad \boxed{E_C = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\, v_{CM}^2 + \frac{1}{2}\mu\, v^2}$$

Energía cinética asociada al movimiento del CM

Energía cinética asociada al movimiento relativo.