关于“物理态处于非分子态组分的概率”是否等同于“波函数重整化常数”

Author: Mengchuan Du

1. 引言

本文旨在说明，波函数重整化常数作为抵消项出现在重整化场论中时，对于某些情况，自能修正发散的消除要求波函数重整化常数是发散量或者是减除方案依赖的有限量，它将不可能等于减除方案无关的有限的量Z_w，这时将Z_w称之为“波函数重整化常数”是不正确的。在某些理论中，可以仅仅通过重整化质量消除自能发散，此时可以通过额外引入波函数重整化常数来重定义场，使得重整化后的场传播子在物理质量上具有1的留数。这种情况下波函数重整化常数的引入是纯粹形式的，并且其取值是有限值，近似可以与Z_w相等。后者情况多见于使用非相对论理论描述近阈强子态的文章中，此时这两个概念的混用具有其合理性。但即便如此，在同一过程的相对论版本的理论中，往往会出现发散的波函数重整化常数，因而一般性的意义上不能将这两个概念划等号。

2. $Z = Z_w$的条件和理由:

为了说明这个问题，以$X(3872)$为例，考虑$X(3872)$与$D^*\bar{D}$的耦合，即拉氏量取如下形式的裸的场论：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_B^{\mu\nu}F_{B\mu\nu} + \frac{1}{2}m_B^2 X_B^\mu X_{B\mu} + g_B X_B^\mu V_\mu P, \tag{1}$$

其中$F_B^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu X_B^\nu - \partial^\nu X_B^\mu$，下标B表示相应的量都是裸量。$X, V, P$分别代表$X(3872), D^*$和$\bar{D}$的场。首先我将说明在什么情况下可以认为$Z = Z_w$，然后会讨论这一等式不成立的情况。

首先我想要说明通常文献中如何将“波函数重整化常数”和“处于非分子态组分的概率”联系起来的。以场论(1)中的量为基础，可以计算$X_B \to V_B P_B \to X_B$的单圈图振幅$i\Sigma_B^{\mu\nu}$（μ,ν为外线X_B场的洛伦兹指标）。我们通常的近似是认为在单圈过程$X_B \to V_B P_B \to X_B$中，近阈的运动学条件导致中间态D^*的纵向极化被压低（即D^*的极化求和由$-g^{\mu\nu}+\frac{q^\mu q^\nu}{m_{D^*}^2}$近似为$\delta^{ij}$）。这一近似下，单圈振幅$i\Sigma_B^{\mu\nu}$可以近似为$i\Sigma_B\delta^{ij}$，这使得对$X(3872)$传播子重求和变得很容易，最后的结果取如下的形式

$$G_{X_B} = \frac{i\,\delta^{ij}}{s - m_B^2 + \Sigma_B(s)}. \tag{2}$$

在 (4) 中，需要用m_B^2吸收Σ_B的发散，通常我们是定义重正化质量m^2使得$m^2 - m_B^2 + \Sigma_B(m^2) = 0$，暂且不考虑$\Sigma_B$可能是复数的情况。用重整化质量$m^2$写出传播子，然后把分母在$s \sim m^2$处展开便可得到传播子在极点附近的行为：

$$G_{X_B} \simeq \frac{i\,\delta^{ij}}{(s - m^2)(1 + \Sigma_B'(m^2))}. \tag{3}$$

另一方面，如果我们想要用重整化场论来得到相同的计算结果，并且要求新场论中的X场和场论(1) 中的X_B场满足$X_B = \sqrt{Z}X$，且X的质量为m。在进行任何具体计算之前，我们就可以给出在极点附近的传播子的行为。由于$X_B = \sqrt{Z}X$，对于X场的重求和后的传播子G_X，在极点附近应该有

$$G_X = \frac{1}{s - m^2} = \frac{1}{Z} G_{X_B}. \tag{4}$$

结合(4), (3)可知，波函数重整化常数Z应该取

$$Z = \frac{1}{1 + \Sigma_B'(m^2)}. \tag{5}$$

由于$\Sigma_B(s)$中的发散项不依赖于s，所得到的Z值是有限的实数。这是通常对波函数重整化常数的计算。至于它如何和“找到非分子态的概率”联系起来，定义g_{NR}是物理态和$D^*\bar{D}$的耦合常数，它和束缚能B，Z_w的关系由Weinberg的文章给出:

$$g_{NR}^2 = \frac{2\pi\sqrt{2\mu B}}{\mu^2}(1 - Z_w). \tag{6}$$

接下来将证明在g_B充分小的时候$Z = Z_w$。此时可以认为“波函数重整化常数”即是“在物理态中找到非分子态的概率”。

证明$Z = Z_w$:

如果要证明$Z = Z_w$，只需要证明在非相对论近似下(5)(6)满足

$$\frac{1}{1 + \Sigma_B'(m^2)} = 1 - \frac{g_{NR}^2 \mu^2}{2\pi\sqrt{2\mu B}}. \tag{7}$$

注意到

$$
\begin{aligned}
\Sigma_B =& -ig_B^2\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{1}{(q^2-m_1^2)[(p-q)^2-m_2^2]}\\
&\simeq \Lambda+i\frac{g_B^2\mu}{8\pi m_1m_2}\sqrt{2\mu E+i\epsilon}.\\
\Sigma_B' =& \frac{g_B^2\mu}{8\pi m_1m_2}\frac{2\mu}{2\sqrt{2\mu B}}=\frac{g_B^2\mu^2}{8\pi m_1m_2\sqrt{2\mu B}}
\end{aligned}
$$

如果g_B充分小，则可以做近似

$$
\frac{1}{1+\Sigma_B'(m^2)}\simeq 1-\frac{g_B^2\mu^2}{8\pi m_1m_2\sqrt{2\mu B}}. \tag{8}
$$

那么要求(7)成立只需要非相对论耦合和相对论耦合常数之间满足

$$
g_{NR}^2=\frac{g_B^2}{4m_1m_2}
$$

而这一关系是可以证明的（参考毕业论文附录B的最后一式）。所以$Z=Z_w$在近似(8)下是可以证明的。这一近似要求

$$
\sqrt{2\mu B}\gg\frac{g_{NR}^2\mu^2}{2\pi}. \tag{9}
$$

3. $Z_w\neq Z$的条件和理由

实际上我将要说明，在相当一般的情况下Z是一个发散的量或者是减除方案依赖的有限量，因而没有理由会和一个有限的值Z_w相等。我将从(1)对应的重整化场论模型出发，在没有近似的情况下计算Z，并且看出Z具有上述性质。实际上这种例子屡见不鲜，比如在QED中费米子场的重整化常数Z_2便是如此。

裸的场论(1)所对应的重整化场论是:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}=\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_I+\mathcal{L}_{ct},\\
&\mathcal{L}_0=-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\frac{1}{2}m^2X^\mu X_\mu\\
&\mathcal{L}_I=gX^\mu V_\mu P\\
&\mathcal{L}_{ct}=-\frac{Z-1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\frac{Z-1}{2}m^2X^\mu X_\mu-\frac{Z}{2}\delta m^2X^\mu X_\mu+(Z_g\sqrt{Z}-1)gX^\mu V_\mu P.
\end{aligned} \tag{10}
$$

这里Z_g的定义是$g=Z_g^{-1}g_B$。由于在场论(10)中没有对$X\to VP$的圈图修正，所以不妨取$Z_g=1/\sqrt{Z}$。场论(10)中对X的g^2阶自能修正振幅是

$$
\begin{aligned}
i\Sigma^{\mu\nu} =& -i(Z-1)(g^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu) + i[(Z-1)m^2 - Z\delta m^2]g^{\mu\nu} + i\Sigma^{\mu\nu}_{loop} \\
=& \, i\left[(Z-1)(m^2-p^2) - Z\delta m^2\right]g^{\mu\nu} + i(Z-1)p^\mu p^\nu + i\Sigma^{\mu\nu}_{loop},
\end{aligned} \tag{11}
$$

其中$\Sigma^{\mu\nu}_{loop}$是单圈图振幅:

$$
\begin{aligned}
i\Sigma^{\mu\nu}_{loop}(s, m_b^2) =& \, g^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{m_b^2})}{(q^2-m_b^2)[(p-q)^2-m_a^2]} \\
=& \, ia_0 p^2 g^{\mu\nu} + ia_1 p^\mu p^\nu.
\end{aligned} \tag{12}
$$

(11)中$p^\mu p^\nu$前面的项用于消除(12)中a_1的发散，而(11)中$g^{\mu\nu}$前面的项用于消除(12)中a_0的发散，即

$$
Z = 1 - a_1(m^2), \tag{13}
$$

$$
\delta m^2 = \frac{m^2 a_0(m^2)}{1-a_1(m^2)}. \tag{14}
$$

此时可以认为Z是发散的，或者Z是收敛且减除方案依赖的，但无论如何必不可能等价于收敛且减除方案无关的Z_w。

此外需要提及的是，Z发散是由于单圈振幅$\Sigma^{\mu\nu}_{loop}$的积分中明显地包含了D^*的纵向极化部分，其中$q^\mu q^\nu$项会导致积分结果显式地依赖于$p^\mu p^\nu$，所以必须通过重整化X场吸收掉这部分发散。在这个模型的非相对论理论中，D^*的极化只有横向部分被保留，$\Sigma^{\mu\nu}_{loop}$的结果只会显式地依赖于$g^{\mu\nu}$，因而没有重整化X场算符的需要。

总结

本文使用简化的$X(3872)$衰变模型说明，“波函数重整化常数”一般地不能等同于“物理态中找到非分子态的概率”。理论做非相对论近似后，可以在$\sqrt{2\mu B} \gg \frac{g_{NR}^2\mu^2}{2\pi}$条件满足时，认为$Z \simeq Z_w$。注意本文只是在强调概念的不等同性，并没有否定$Z_w$的合理性，也不意味着我们不能在$Z \neq Z_w$的时候谈论$Z_w$。实际上，在$Z \neq Z_w$时，在通过理论模型和实验数据的拟合抽取出$g_{NR}$和束缚能$B$后，$Z_w$是可以计算的。