Électromagnétisme — Af.K

Résumé Complet — Chapitres I & II

Chapitre I
Analyse Vectorielle
+ Milieu Conducteur

Chapitre II
Magnétostatique
dans le Vide

Définition · Formule clé · Théorème · Attention · Exemple · Astuce

Chapitre I — Analyse Vectorielle & Électrocinétique

A — Opérateur Nabla et Opérateurs Différentiels

Opérateur Nabla $\vec{\nabla}$

L'opérateur nabla (ou del) est l'opérateur différentiel vectoriel fondamental. En coordonnées **cartésiennes** :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$$

Il peut s'appliquer à un scalaire ou à un vecteur, donnant des opérateurs différents.

Gradient d'un scalaire

Pour un champ scalaire $f(x, y, z, t)$:

$$\boxed{\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z}$$

Propriétés :

- $\vec{\nabla} f \perp$ aux surfaces de niveau $f = \text{cst}$
- $\vec{\nabla} f$ pointe dans la direction de **variation maximale** de f
- $|\vec{\nabla} f|$ est le taux de variation maximum

Divergence d'un vecteur

Pour un champ vectoriel $\vec{A}(x, y, z)$:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

Interprétation physique :

- $\text{div}\,\vec{A} > 0$: **source** (flux sortant)
- $\text{div}\,\vec{A} < 0$: **puits** (flux entrant)
- $\text{div}\,\vec{A} = 0$: champ **solénoïdal** (lignes fermées)

Rotationnel d'un vecteur

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$$

Sens physique : mesure la *circulation locale* du champ autour d'un point. $\text{rot}\,\vec{A} \neq \vec{0} \Rightarrow$ champ **tourbillonnaire**.

Laplacien scalaire et vectoriel

Laplacien scalaire ($f \mapsto \mathbb{R}$) :

$$\boxed{\Delta f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}$$

Laplacien vectoriel ($\vec{A} \mapsto \mathbb{R}^3$) :

$$\Delta \vec{A} = \Delta A_x\,\vec{e}_x + \Delta A_y\,\vec{e}_y + \Delta A_z\,\vec{e}_z$$

(en cartésien uniquement : composante par composante)

Si $\Delta f = 0$, on dit que f est **harmonique** (équation de Laplace).

B — Identités Vectorielles Fondamentales

Identités clés à connaître absolument

Nullités :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} f) = \vec{0} \quad \forall f$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0 \quad \forall \vec{A}$$

Identité fondamentale :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

Règles de Leibniz (produit) :

$$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla} g + g\vec{\nabla} f \qquad \vec{\nabla} \cdot (f\vec{A}) = f\,\mathrm{div}\vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{\nabla} f \qquad \vec{\nabla} \wedge (f\vec{A}) = \vec{\nabla} f \wedge \vec{A} + f\,\mathrm{rot}\vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \mathrm{rot}\vec{A} - \vec{A} \cdot \mathrm{rot}\vec{B} \qquad \vec{\nabla} \wedge (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{A}\,\mathrm{div}\vec{B} - \vec{B}\,\mathrm{div}\vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$$

Champ conservatif (irrotationnel)

$\vec{A}$ est **conservatif** si et seulement si :

$$\mathrm{rot}\,\vec{A} = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; \exists V \text{ tel que } \vec{A} = -\vec{\nabla} V$$

V est le **potentiel scalaire** associé. La circulation de $\vec{A}$ sur tout contour fermé est nulle : $\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = 0$.

Champ solénoïdal

$\vec{A}$ est **solénoïdal** si et seulement si :

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = 0 \;\Leftrightarrow\; \exists \vec{C} \text{ tel que } \vec{A} = \mathrm{rot}\,\vec{C}$$

$\vec{C}$ est le **potentiel vecteur** associé. Le flux de $\vec{A}$ à travers toute surface fermée est nul.

C — Théorèmes Intégraux

Théorème de Stokes

Relie la **circulation** d'un champ sur un contour $\mathcal{C}$ au flux de son rotationnel sur toute surface $\mathcal{S}$ s'appuyant sur $\mathcal{C}$:

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{\mathcal{S}} \mathrm{rot}\,\vec{A} \cdot d\vec{S}}$$

Convention : le sens de $\mathcal{C}$ et l'orientation de $d\vec{S}$ sont liés par la *règle du tire-bouchon* (ou de la main droite).
Forme locale (si $\mathcal{S}$ contractée en un point) : on retrouve la définition du rotationnel.

Théorème de Green-Ostrogradsky

Relie le **flux** d'un champ à travers une surface *fermée* $\mathcal{S}$ au volume $\mathcal{V}$ qu'elle délimite :

$$\boxed{\oiint_{\mathcal{S}} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\,\vec{A}\, d\tau}$$

Convention : $d\vec{S}$ orienté vers *l'extérieur* du volume $\mathcal{V}$.
Forme locale : en contractant le volume, on retrouve la définition de la divergence.

★ Astuces & Remarques

- **Stokes** est utile pour passer des formes intégrales aux formes locales (Maxwell-Faraday, Ampère).
- **Green-Ostrogradsky** est utile pour l'équation de continuité et Maxwell-Gauss.
- Les deux théorèmes permettent de prouver les identités $\mathrm{rot}(\vec{\nabla} f) = \vec{0}$ et $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{A}) = 0$.
- **Théorème fondamental du gradient** : $\int_A^B \vec{\nabla} f \cdot d\vec{l} = f(B) - f(A)$ (indépendant du chemin si f est régulière).

D — Milieu Conducteur & Courant Électrique

Densité de courant volumique $\vec{j}$

Dans un conducteur, les porteurs (électrons) de charge $q_e = -e = -1{,}6 \times 10^{-19}$ C se déplacent à la vitesse $\vec{v}$. La densité volumique de courant est :

$$\boxed{\vec{j} = \rho_m \vec{v} = -ne\vec{v}}$$

avec n le nombre d'électrons par unité de volume et $\rho_m = -ne$ la densité de charges mobiles.

Intensité à travers une surface $\mathcal{S}$:

$$I = \iint_{\mathcal{S}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \frac{dQ}{dt}$$

Le sens conventionnel du courant est **opposé** au déplacement des électrons.

Courant surfacique $\vec{j}_s$

Pour une nappe de courant (distribution surfacique), on définit :

$$\vec{j}_s = \rho_s \vec{v}$$

L'intensité linéique est : $dI = \vec{j}_s \cdot \vec{n}\, dl$, et le courant total enlacé par un contour $\mathcal{C}$:

$$I = \oint_{\mathcal{C}} \vec{j}_s \cdot \vec{n}\, dl$$

Unité : A/m (ampères par mètre). C'est la limite d'un volume de courant infiniment mince.

Équation de Continuité — Conservation de la Charge

La charge électrique est une **grandeur conservative**. La loi fondamentale est :

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \qquad \text{(forme locale)}$$

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} \rho\, d\tau \qquad \text{(forme intégrale)}$$

En régime permanent ($\partial\rho/\partial t = 0$) : $\operatorname{div} \vec{j} = 0 \Rightarrow \vec{j}$ est à flux conservatif $\Rightarrow$ **loi des nœuds** : $\sum I_k = 0$.

Modèle de Drude — Loi d'Ohm locale

Un électron dans le conducteur obéit à :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v}$$

(τ = temps de relaxation entre deux collisions, typiquement $\sim 10^{-14}$ s dans les métaux.)

En **régime permanent** ($d\vec{v}/dt = 0$) :

$$\vec{v} = -\frac{e\tau}{m}\vec{E} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{j} = \gamma \vec{E}}$$

avec la **conductivité** :

$$\gamma = \frac{ne^2\tau}{m} \quad [\mathrm{S\,m^{-1}}]$$

et la **résistivité** $\rho_r = 1/\gamma$ $[\Omega\,\mathrm{m}]$.

Loi d'Ohm intégrale & Résistance

Pour un conducteur cylindrique (longueur ℓ, section S, conductivité γ) :

$$\boxed{U = V_A - V_B = RI} \quad \text{avec} \quad \boxed{R = \rho_r \frac{\ell}{S} = \frac{\ell}{\gamma S}}$$

Puissance dissipée par effet Joule :

$$P = RI^2 = UI = \iiint \vec{j} \cdot \vec{E}\, d\tau$$

La densité volumique de puissance est $p = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2$.

En régime stationnaire, dans un conducteur ohmique : $\rho_f + \rho_m = 0$ (quasi-neutralité).

Exemple — Fil cylindrique

Fil de cuivre de longueur $\ell = 1$ m, rayon $a = 1$ mm, conductivité $\gamma_{\mathrm{Cu}} = 5{,}9 \times 10^7$ S/m.

$$R = \frac{\ell}{\gamma \pi a^2} = \frac{1}{5{,}9 \times 10^7 \times \pi \times 10^{-6}} \approx 5{,}4\,\mathrm{m}\Omega$$

Pour $I = 1$ A : $U = RI \approx 5{,}4$ mV et $P = RI^2 \approx 5{,}4$ mW.
Vitesse de dérive des électrons : $v = j/(ne) \approx 10^{-4}$ m/s (très faible !).

★ Astuces & Remarques

- Le courant conventionnel I va du $+$ vers le $-$ à l'extérieur du générateur, les électrons vont en sens inverse.
- $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ est **locale** : valable point par point, même si le conducteur n'est pas cylindrique.
- La quasi-neutralité ($\rho_f + \rho_m \approx 0$) est fondamentale en régime stationnaire : il n'y a pas de charge volumique nette dans le conducteur.
- Le temps de relaxation τ caractérise les collisions électrons/réseau. Plus τ est grand, meilleur est le conducteur.

Tableau récapitulatif — Chapitre I

Opérateur	Formule	Nature / Résultat
Gradient	$\vec{\nabla} f$	vecteur $\perp$ surfaces de niveau
Divergence	$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$	scalaire — sources/puits
Rotationnel	$\vec{\nabla} \wedge \vec{A}$	vecteur — circulation locale
Laplacien scalaire	$\Delta f = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f)$	scalaire
$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, f)$	$\vec{0}$	toujours nul
$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\, \vec{A})$	0	toujours nul
Stokes	$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint \mathrm{rot}\vec{A} \cdot d\vec{S}$	circ. $\leftrightarrow$ flux rot
Green-Ostrogradski	$\oiint \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint \mathrm{div}\vec{A}\, d\tau$	flux $\leftrightarrow$ vol. div
Continuité	$\mathrm{div}\, \vec{j} + \partial\rho/\partial t = 0$	conservation charge
Ohm locale	$\vec{j} = \gamma \vec{E}$	conducteur linéaire
Résistance	$R = \rho_r \ell / S$	géométrie + matériau
Joule	$P = \iiint \vec{j} \cdot \vec{E}\, d\tau = RI^2$	dissipation thermique

Chapitre II — Magnétostatique dans le Vide

A — Loi de Biot et Savart

Loi de Biot-Savart (filaire)

Le champ magnétique élémentaire $d\vec{B}$ créé au point M par un élément de courant $Id\vec{l}$ situé en P est :

$$\boxed{d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}}$$

Par superposition, le champ total d'un circuit $\mathcal{C}$:

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{\mathcal{C}} \frac{d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

Constante fondamentale :

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$$

(perméabilité magnétique du vide).

Généralisations à d'autres distributions

Distribution volumique ($\vec{j}$ en $\mathrm{A/m^2}$) :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}\,d\tau \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

Distribution surfacique ($\vec{j}_s$ en $\mathrm{A/m}$) :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}_s\,dS \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

Champ total dans tous les cas : on intègre sur la distribution (principe de superposition).

Exemples canoniques — Champs en régime magnétostatique

Fil infini (distance r) :

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$

Direction : orthoradiale (règle main droite), $\vec{e}_\theta$.

Arc de cercle de rayon R, angle α :

$$B_{\text{axe}} = \frac{\mu_0 I \alpha}{4\pi R} \Rightarrow \text{spire complète : } B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

Solénoïde infini (n spires/m, courant I) :

$$\boxed{B_{\text{int}} = \mu_0 n I}, \quad B_{\text{ext}} = 0$$

Direction : axiale.

Fil cylindrique plein (rayon a, densité uniforme j) :

$$r < a \;:\; B = \frac{\mu_0 j r}{2} \propto r \qquad r > a \;:\; B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \propto \frac{1}{r}$$

B — Propriétés Fondamentales du Champ $\vec{B}$

Maxwell-flux (div B = 0)

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{B} = 0} \qquad \text{(toujours, partout)}$$

$$\oiint_{S_{\text{fermé}}} \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

Conséquences majeures :

- $\vec{B}$ est **solénoïdal** : ses lignes de champ sont toujours **fermées**
- Il n'existe **pas de monopôle magnétique**
- Il existe un **potentiel vecteur** $\vec{A}$ tel que $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$

Maxwell-Ampère (magnétostatique)

En magnétostatique (régime permanent, $\partial/\partial t = 0$) :

$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\,\vec{j}} \qquad \text{(forme locale)}$$

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\,I_{\text{enlac}}} \quad \text{(forme intégrale)}$$

où $I_{\text{enlac}} = \iint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}$ est le courant **algébrique** traversant toute surface s'appuyant sur $\mathcal{C}$.

Signe : règle du tire-bouchon entre $\mathcal{C}$ et l'orientation de $d\vec{S}$.

Potentiel Vecteur $\vec{A}$

Puisque div $\vec{B} = 0$, il existe $\vec{A}$ tel que :

$$\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A}$$

$\vec{A}$ n'est **pas unique** : on peut ajouter le gradient d'une fonction quelconque (**liberté de jauge**).

Jauge de Coulomb : on impose div $\vec{A} = 0$, ce qui donne en magnétostatique l'équation de **Poisson vectorielle** :

$$\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\vec{j}(P)}{PM}\,d\tau$$

Lien flux-circulation : $\Phi_\mathcal{S} = \iint \vec{B}\cdot d\vec{S} = \oint_{\partial\mathcal{S}} \vec{A}\cdot d\vec{l}$ (par Stokes).

C — Méthode d'Ampère : Symétries & Invariances

Utilisation du Théorème d'Ampère — Méthode systématique

Étape 1 — Déterminer la direction de $\vec{B}$ par les symétries :

- **Plan de symétrie** pour la distribution de courant : $\vec{B}(M) \perp$ ce plan (si M est dans le plan)
- **Plan d'antisymétrie** pour la distribution : $\vec{B}(M)$ est **contenu** dans ce plan
- Intersection des contraintes $\Rightarrow$ direction unique de $\vec{B}$ (souvent $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ ou $\vec{e}_z$)

Étape 2 — Déterminer les dépendances de $\|\vec{B}\|$ par les invariances :

- Invariance par translation selon un axe $\Rightarrow$ $\vec{B}$ ne dépend pas de cette coordonnée
- Invariance par rotation d'axe $z \Rightarrow \vec{B} = B(r)\,\vec{e}_\theta$ ou $\vec{B} = B(r)\,\vec{e}_z$

Étape 3 — Choisir le contour d'Ampère adapté :

- **Cercle coaxial** si symétrie cylindrique : $\vec{B}$ constant et tangent $\Rightarrow \oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = B\cdot 2\pi r$
- **Rectangle** si symétrie plane : $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = B\cdot L$ (sur la partie utile)

Étape 4 — Appliquer $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_\text{enlac}$ et calculer $I_\text{enlac} = \vec{j}\cdot\pi r^2$ ou $= nI$ selon la géométrie.

Fil infini par Ampère

Distribution de courant : fil infini selon z, courant I.
Symétrie : plan $(\vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est plan d'antisymétrie $\Rightarrow$ $\vec{B} = B(r)\vec{e}_\theta$.
Invariances : selon z et $\theta \Rightarrow B = B(r)$ seulement.
Contour : cercle de rayon r, $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = B\cdot 2\pi r$.
Résultat :

$$B\cdot 2\pi r = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\theta$$

Solénoïde infini par Ampère

n spires/m, courant I, axe z.
Symétrie : $\vec{B} = B(r)\vec{e}_z$ (invariance par rotation + plan de symétrie).
Contour rectangulaire : un côté intérieur ℓ, un côté extérieur ℓ.
$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = B_\text{int}\ell - B_\text{ext}\ell = \mu_0 n\ell I$.

Avec $B_\text{ext} = 0$ (par symétrie et champ lointain) :

$$\boxed{B_\text{int} = \mu_0 n I}$$

D — Conditions de Passage à l'Interface

Conditions de raccordement pour $\vec{B}$

À l'interface entre deux milieux (ou de part et d'autre d'une nappe de courant $\vec{j}_s$) :

Composante normale :

$$\boxed{B_{1n} = B_{2n}} \quad \text{(continue)}$$

Découle de $\text{div}\,\vec{B} = 0$ et de Green-Ostrogradsky appliqué à une "boîte à chapeau".

Composante tangentielle :

$$\boxed{\vec{B}_{2t} - \vec{B}_{1t} = \mu_0\,\vec{j}_s \wedge \hat{n}_{12}}$$

En l'absence de courant surfacique : $\vec{B}_t$ est continue. Découle de $\text{rot}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j}$ et Stokes sur un rectangle infiniment plat.

Attention — Magnétostatique vs. Maxwell complet

La relation $\text{rot}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j}$ est la version **magnétostatique** (régime permanent). En régime variable (Maxwell-Ampère), on ajoute le **courant de déplacement** :

$$\text{rot}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

En magnétostatique : $\partial\vec{E}/\partial t = 0$, donc le terme additionnel est nul.

★ Astuces & Remarques

- Pour utiliser Biot-Savart : décomposer le circuit en éléments simples (demi-droites, arcs) et superposer.
- Pour utiliser Ampère : **d'abord** les symétries, **ensuite** le contour, **enfin** le calcul. Ne jamais choisir le contour avant d'avoir $\vec{B}$ en direction.
- La jauge de Coulomb ($\text{div}\,\vec{A} = 0$) est standard en magnétostatique.

E — Force de Laplace & Énergie Magnétique

Force de Lorentz et de Laplace

Force de Lorentz sur une charge q animée de $\vec{v}$:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Force de Laplace sur un conducteur (porteurs de charge ρ_m à vitesse $\vec{v}$, c'est-à-dire densité $\vec{j} = \rho_m\vec{v}$) :

Volume :	**Surface :**	**Filaire :**
$d\vec{F} = (\vec{j} \wedge \vec{B})\,d\tau$	$d\vec{F} = (\vec{j}_s \wedge \vec{B})\,dS$	$d\vec{F} = I\,d\vec{l} \wedge \vec{B}$

Force totale : $\vec{F}_L = \iiint (\vec{j} \wedge \vec{B})\,d\tau$. Moment en O : $\mathcal{M}_O = \iiint \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{j} \wedge \vec{B})\,d\tau$.

Force entre deux fils parallèles

Deux fils infinis parallèles distants de d, parcourus par I_1 et I_2 :

$$\boxed{\frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}}$$

- Courants **même sens** : force **attractive**
- Courants **opposés** : force **répulsive**

C'est cette propriété qui définissait l'ampère (avant 2019).

Moment dipolaire magnétique

Pour une spire plane de surface S parcourue par I :

$$\boxed{\vec{m} = IS\,\hat{n}} \quad [\mathrm{A \cdot m^2}]$$

($\hat{n}$: normale orientée par la règle du tire-bouchon)

Dans un champ **uniforme** $\vec{B}$:

- Force résultante : $\vec{F} = \vec{0}$
- Couple : $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$
- Énergie potentielle : $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$

Équilibre stable : $\vec{m} \parallel \vec{B}$ (E_p minimale $\Leftrightarrow$ Φ maximal).

Travail des forces de Laplace — Théorème de Maxwell

Lors d'un déplacement d'un circuit rigide **parcouru par un courant constant** I, le travail élémentaire des forces de Laplace est :

$$\boxed{dW = I\, d\Phi_c}$$

où $d\Phi_c = d\Phi_{\text{final}} - d\Phi_{\text{initial}}$ est le **flux coupé** (variation du flux magnétique à travers le circuit lors du déplacement).

Règle du flux maximal : Un circuit parcouru par un courant constant tend à se déplacer de façon à **maximiser le flux** qui le traverse ($E_p = -I\Phi$ est minimale). La force de Laplace est **conservative**.

Translation : $F = I\dfrac{d\Phi}{dl}$ **Rotation** : $M = I\dfrac{d\Phi}{d\theta}$

★ Astuces & Remarques

- Les forces de Laplace s'appliquent sur le conducteur via la réaction du réseau sur les porteurs mobiles.
- Dans un champ **uniforme**, la force résultante sur tout circuit fermé est nulle. Il ne reste qu'un couple.
- Le flux coupé = variation du flux = $\Phi_\text{f} - \Phi_\text{i}$ (démontré par conservation du flux à travers une surface fermée).
- Pour calculer une force : $F = I\partial\Phi/\partial x$ (à $I = \text{cst}$) ou $F = -\partial E_p/\partial x$.

Tableau récapitulatif — Chapitre II : Magnétostatique

Résultat	Formule	*Contexte*
Biot-Savart (filaire)	$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{l}\wedge\hat{r}}{r^2}$	*Toute géométrie*
Fil infini	$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, **direction** $\vec{e}_\theta$	*Symétrie cylindrique*
Solénoïde infini	$B_{\text{int}} = \mu_0 n I$, $B_{\text{ext}} = 0$	*Ampère, rect.*
Fil cylindrique plein ($r < a$)	$B = \frac{\mu_0 j r}{2}$	*Ampère, cercle*
Maxwell-flux	$\text{div}\,\vec{B} = 0$	*Toujours valable*
Ampère (magnétostatique)	$\text{rot}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j}$	*Régime permanent*
Potentiel vecteur	$\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A}$, **jauge :** $\text{div}\,\vec{A} = 0$	*Coulomb*
Continuité B_n	$B_{1n} = B_{2n}$	*Interface*
Saut B_t	$\Delta\vec{B}_t = \mu_0\vec{j}_s\wedge\hat{n}$	*Nappe courant*
Laplace (filaire)	$d\vec{F} = I d\vec{l}\wedge\vec{B}$	*Conducteur dans* $\vec{B}$ *ext.*
Moment magnétique	$\vec{m} = IS\hat{n}$	*Spire / dipôle*
Couple dipolaire	$\vec{\Gamma} = \vec{m}\wedge\vec{B}$	*Champ uniforme*
Énergie dipolaire	$E_p = -\vec{m}\cdot\vec{B}$	*Stable si* $\vec{m}\parallel\vec{B}$
Travail Laplace	$dW = I\,d\Phi$	*Courant constant*
Force 2 fils	$F/\ell = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$	*Attraction/répulsion*

★ Feuille de route — Comment aborder un problème de magnétostatique

1. **Identifier la distribution :** linéique (fil), surfacique (nappe), volumique (bloc) ?
2. **Analyser les symétries :** plans de symétrie/antisymétrie $\Rightarrow$ direction de $\vec{B}$.
3. **Analyser les invariances :** translation, rotation $\Rightarrow$ dépendances de $\|\vec{B}\|$.
4. **Choisir la méthode** : Ampère (si symétrie suffisante) $\gg$ Biot-Savart (général).
5. **Choisir le contour d'Ampère** adapté (cercle, rectangle) et calculer I_{enlac}.
6. **Calculer les forces/couples** par Laplace, utiliser la règle du flux maximal si $I = \text{cst}$.
7. **Vérifier** : $\text{div}\,\vec{B} = 0$? conditions de passage à l'interface vérifiées ?