# Wstęp do matematyki olimpijskiej

# Indukcja matematyczna

**Przykład 1**
Wykazać, że dla każdej liczby dodatniej całkowitej $n$ zachodzi nierówność

$$2^n \geqslant n + 1.$$

*Rozwiązanie*
Zauważamy, że dla $n = 1$ mamy $2^n = 2 = n + 1$, a więc postulowana nierówność istotnie zachodzi. Załóżmy, że dla pewnej liczby dodatniej całkowitej $k$ zachodzi nierówność $2^k \geqslant k + 1$. Zauważmy, że wówczas

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \geqslant 2 \cdot (k + 1) = 2k + 2 \geqslant k + 2.$$

Wykazaliśmy, że jeśli postulowana nierówność zachodzi dla pewnej dodatniej liczby całkowitej $k$, to zachodzi również dla liczby $k + 1$. Skoro zachodzi ona dla $n = 1$, to zachodzi również dla $1 + 1 = 2,\ 2 + 1 = 3,\ 3 + 1 = 4, ...$ – wszystkich liczb naturalnych.

Metodę dowodzenia zastosowaną w ostatnim akapicie powyższego rozwiązania nazywamy **zasadą indukcji matematycznej**.

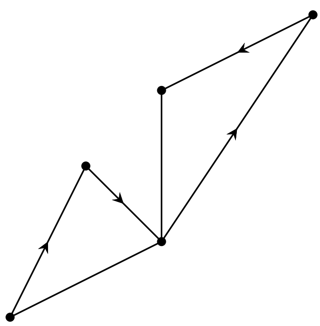
Alternatywnym, ale równoważnym, sposobem zakończenia rozwiązania powyższego przykładu jest rozpatrzenie najmniejszego naturalnego $n$, dla którego teza nie zachodzi. A więc dla $n - 1$ nierówność musi zachodzić, chyba że $n = 1$. Ale w tym przypadku sprawdzamy, że teza zachodzi. Skoro dla $n - 1$ teza jest prawdziwa, a dla $n$ już nie, to otrzymujemy sprzeczność z wcześniej poczynioną obserwacją.

Formalizując, dowód indukcyjny zdania logicznego $Z(n)$ dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej $n$ składa się z dwóch części:

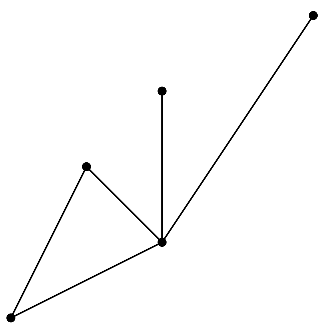
1. Baza indukcji – sprawdzenie prawdziwości zdania $Z(1)$.
2. Krok indukcyjny – udowodnienie, że jeśli zachodzi zdanie $Z(k)$ to zachodzi $Z(k+1)$.

Indukcję matematyczną da się wykorzystać także poza algebrą. Pokażemy jedno jego zastosowanie kombinatoryczne. Ale najpierw musimy zdefiniować kilka pojęć z teorii grafów.

*Grafem* nazywamy pewien zbiór *wierzchołków* na płaszczyźnie, które są połączone *krawędziami*. *Ścieżką* nazywamy ciąg parami różnych krawędzi pewnego grafu, z których dwie kolejne mają wspólny wierzchołek. *Ścieżką Hamiltona* nazwamy ścieżkę, która przechodzi przez każdy wierzchołek dokładnie raz.



Graf posiada ścieżkę Hamiltona – zaznaczono ją strzałkami

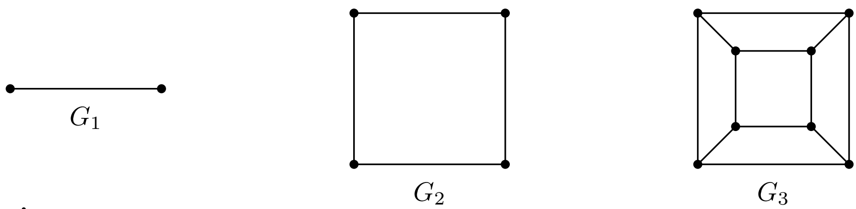


Graf nie posiada ścieżki Hamiltona

**Przykład 2** Zdefinujmy ciąg grafów $(G_n)_{n \geqslant 1}$ w następujący sposób.

- Graf $G_1$ jest grafem złożonym z dwóch połączonych ze sobą wierzchołków,
- Graf $G_{i+1}$ dla $i \geqslant 2$ otrzymujemy poprzez połączenie dwóch grafów $G_i$, aby każdy wierzchołek z jednego z tych grafów był połączony z dokładnie jednym wierzchołkiem z drugiego z tych grafów.

Wykazać, że graf $G_{2020}$ ma ścieżkę Hamiltona.
*Uwaga.* Można zauważyć, że $G_n$ to w istocie $n$ wymiarowy hipersześcian.




**Rozwiązanie**

Wykażemy, że teza jest prawdziwa dla każdego $n \geqslant 1$. Co więcej wykażemy, że ścieżka Hamiltona może zaczynać się w każdym z wierzchołków $G_n$.

Zauważmy, że dla $n = 1$ teza jest oczywista – ścieżka złożona z jednej krawędzi spełnia warunki zadania.

Załóżmy, że dla $G_n$ istnieje ścieżka Hamiltona. Wykażemy, że istnieje ona dla $G_{n+1}$. Graf $G_{n+1}$ składa się z dwóch połączonych ze sobą cześci izomorficznych z grafem $G_n$ – nazwijmy je $A$ oraz $B$. Oznaczmy wierzchołki $G_{n+1}$ kolejno jako $a_1, a_2, ..., a_{2^n}$ – cześć $A$ oraz $b_1, b_2, ..., b_{2^n}$ – część $B$, przy czym $a_i$ jest połączone właśnie z $b_i$.

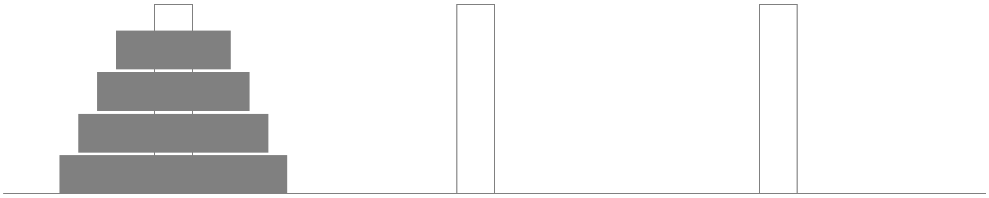
Ścieżka Hamiltonowska w grafie $G_{n+1}$ będzie się składać z 3 cześći:

- Na mocy założenia istnieje ścieżka zaczynająca się w $a_1$ przechodząca przez wszystkie wierzchołki $A$. Możemy ją przejść od tyłu. Wówczas przejdziemy wszystkie wierzchołki częsci $A$ kończąc w $a_1$.
- Następnie przedziemy krawędzią między $a_1$ i $b_1$ do części $B$.
- Na mocy założenia z punktu $b_1$ da się poprowadzić ścieżkę, która przejdzie przez każdy z wierzchołków części $B$ dokładnie raz.

Łatwo zauważyć, że podany sposób przejścia grafu $G_{n+1}$ tworzy ścieżkę Hamiltonowską.

## Zadania

1. Wykazać, że suma miar kątów wewnętrznych w $n$-kącie wypukłym wynosi $(n-2) \cdot 180°$.
2. Wykazać, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej $n$ zachodzi toższamość
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
3. Dana jest nastepująca gra, zwana *wieżami Hanoi*. Na początku ułożono $n$ dysków na jednej igle tak jak na rysunku. W każdym ruchu gracz może przemieścić dysk, wraz z wszystkimi dyskami nań leżącymy, na inną igłę, przy czym dysk ten nie może zostać położony na dysk o innej średnicy. Wykazać, że gracz jest w stanie przenieść wszystkie dyski na trzecią igłę.

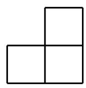


4. W przestrzeni danych jest $n \geqslant 3$ punktów, że żadne trzy z nich nie leżą na jednej prostej. Każde dwa z tych punktów połączono odcinkiem o kolorze zielonym lub czerwonym. Wykazać, że można wybrać tak jeden z tych kolorów, aby każde dwa z danych punktów były połączone odcinkiem lub łamaną tego koloru.

5. Dany jest ciąg liczb rzeczywistych $a_0 \neq 0, 1$, $a_1 = 1 - a_0$, $a_{n+1} = 1 - a_n(1 - a_n)$. Wykazać, że dla wszystkich $n$

$$a_1 a_2 ... a_n \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} \right) = 1.$$

6. Wykazać, że planszę o wymiarach $2^n \times 2^n$ dla pewnego $n \geqslant 1$ z usuniętym jednym z rogów da się przykryć pewną liczbą $L$ klocków.



7. Niech $n$ będzie nieparzystą liczbą naturalną, a liczby $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ będa parami różne. Dla każdych dwóch liczb $x_i$ oraz $x_j$ zapisano na tablicy wartość bezwzględną ich różnicy. Wykazać, że można podzielić zapisane liczby na dwa zbiory o równej sumie.

**Indukcja matematyczna**

1. Przeprowadź rozumowanie indukcyjne po liczbie wierzchołków $n$.
2. Sprawdź, że równość zachodzi dla $n = 1$. Załóż, że równość zachodzi dla $n$ i spróbuj wykazać ją dla $n + 1$.
3. Przeprowadź indukcję po liczbie $n$. Skorzystaj dla wszystkich początkowych dysków poza najniżej położonym.
4. Rozpatrz $n + 1$ punktów i zobacz co się stanie jeśli usuniemy jeden z nich.
5. Spróbuj wykazać tezę inducją po $n$. Aby to zrobić, trzeba będzie wykazać indukcyjnie inną równość pomocniczą.
6. Spróbuj podzielić planszę $2^{n+1} \cdot 2^{n+1}$ na kilka części.
7. Zastosuj indukcję co 2.

## Indukcja matematyczna

1. Rozpatrz trójkąt tworzony przez trzy kolejne wierzchołki $n$-kąta.
2. Odejmij stronami tezę zadania dla $n+1$ i $n$.
3. Z założenia indukcyjnego możemy przenieść wszystkie dyski, poza najniżej położonym, na drugą igłę. Należy zauważyć, że dysk, którego nie używamy nie przeszkodzi w wykonaniu takiego przełożenia.
4. Co mówi założenie indukcyjne? Rozpatrz przypadek, gdy z wyróżnionego punktu wychodza krawędzie różnych kolorów.
5. Wykaż, że dla każdej liczby $n$ zachodzi równość $a_{n+1} = 1 - a_1 a_2 a_3 \cdot ... \cdot a_n$..
6. Podziel planszę na cztery części na pomocą dwóch prostych.
7. Usuń dwie liczby i podziel na dwa zbiory o równej sumie elementów.

## Indukcja matematyczna

1. Skorzystaj z faktu, że suma kątów w trójkącie wynosi $180°$ oraz z założenia indukcyjnego.

2. *

3. *

4. Zauważ, że jeśli z wyróżnionego punktu wychodza np. tylko czerwone odcinki, to pomiędzy dowolnymi dwoma punktami da się przejść odcinkami czerwonymi.

5. Wykaż tezę indukcyjnie za pomocą założenia i udowodnionej równości. Zauważ, że

$$a_1a_2a_3...a_na_{n+1}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}\right) = \cdot a_1a_2a_3...a_na_{n+1}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+...+\right.$$

$$+a_1a_2a$$

6. Podziel plansze na 1 L-klocek i cztery części, które można pokryć na mocy założenia indukcyjnego.

7. Zauważ, że suma liczb

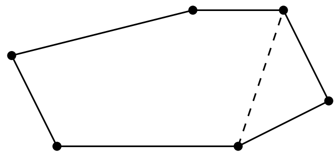
$$(x_{2k+3}-x_{2k+1}, x_{2k+3}-x_{2k}, \cdots, x_{2k+3}-x_{k+2}) \cup (x_{2k+2}-x_{k+1}, \cdots, x_{2k+2}-x_1),$$

jest równa sumie liczb

$$(x_{2k+3}-x_{2k+2}) \cup (x_{2k+2}-x_{2k+1}, x_{2k+2}-x_{2k}, \cdots, x_{2k+3}-x_{k+2}) \cup (x_{2k+3}-x_{k+1}, \cdots, x_{2k+3}-$$

## Indukcja matematyczna

1. Zauważmy, że dla $n = 3$ teza jest znanym faktem – mianowicie suma kątów w trójkącie wynosi $180°$.

   Załóżmy, że dla każdego $n$-kąta wypukłego suma jego kątów wewnętrznych wynosi $(n-2)\cdot 180°$. Rozpatrzmy dowolny $n+1$-kąt wypukły. Zauważmy, że ma on więcej niż trzy wierzchołki, więc możemy „odciąć” trójkąt złożony z trzech kolejnych wierzchołków. Podzielimy w ten sposób $n+1$ kąt na $n$-kąt i trójkąt. Korzystając z wypukłości rozpatrywanego wielokąta możemy zauważyć, że suma miar jego kątów wewnętrznych jest sumą miar kątów obu tych wielokątów. Wynosi więc ona

   $$(n-2)\cdot 180° + 180° = (n-1)\cdot 180°,$$

   czego należało dowieść.

2. Sprawdzamy, że dla $n = 1$ postulowana równość zachodzi.

   Załóżmy, że równość

   $$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

   zachodzi dla pewnej liczby $n$. Chcemy wykazać tezę dla $n+1$, czyli

   $$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

   Zauważmy, że sprowadza się ona do wykazania tożsamości

   $$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

   Przekształcając powyższą równość równoważnie otrzymujemy kolejno

   $$\begin{aligned} n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2 &= (n+1)(n+2)(2n+3), \\ 2n^3 + 3n^2 + n + 6(n+1)^2 &= 2n^3 + 9n^2 + 13n + 6, \\ 6(n+1)^2 &= 6n^2 + 12n + 6, \\ (n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1. \end{aligned}$$

   Prawdziwość ostatniej równości dowodzi tezy.

3. Tezę wykażemy indukcją po $n$. Zauważmy, że dla $n = 1$ teza jest oczywista – wystarczy po prostu przełożyć dysk na trzecią igłę.

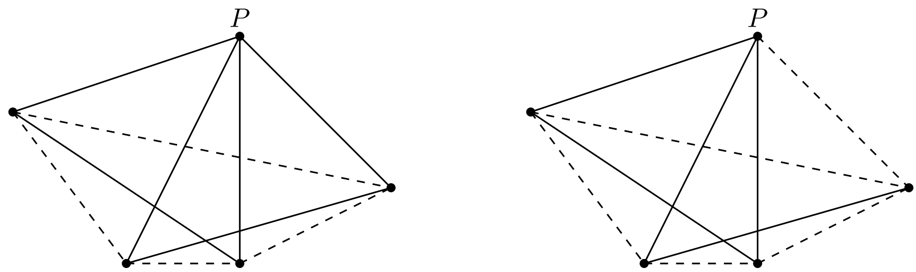
   Załóżmy, że jesteśmy w stanie przełożyć $n-1$ dysków z pierwszej igły na trzecią. Możemy oczywiście zauważyć, że jest to równoważne chociażby możliwości przełożenia ich z igły pierwszej na drugą.

   Przełożenia $n$ dysków dokonujemy w następujący sposób:

(a) Przekładamy $n-1$ dysków z góry pierwszej igły na drugą igłę. Zauważmy, że dysk o największym rozmiarze nie przeszkadza nam skorzystać z założenia indukcyjnego, gdyż nie uniemożliwi on wykonania żadnego ruchu.
(b) Dysk pozostawiony na pierwszej igle przekładamy na igłę ostatnią.
(c) Przekładamy $n-1$ dysków z drugiej igły na trzecią. Analogicznie zauważamy, że obecność jednego dysku na trzeciej igle nie jest problemem.

4. Dla $n=3$ mamy trójkąt. Wybierając kolor, na który pomalowano co najmniej dwa odcinki odcinki, postulowana własność będzie spełniona.

   Załóżmy, że dla teza zachodzi dla $n$ punktów. Rozpatrzmy zbiór $n+1$ punktów. Wyróżnijmy pewien punkt $P$. Punktów poza $P$ jest dokładnie $n$, więc na mocy założenia istnieje kolor – bez straty ogólności czerwony – że pomiędzy kąždymi dwoma punktami poza $P$ istnieje łamana tego koloru.




Na rysunku zamiast kolorów użyto podziału na linię ciągła i przerywaną.

   Rozpatrzmy dwa przypadki:

   (a) Punkt $P$ jest połączony czerwoną krawędzią z pewnym innym punktem $Q$. Wówczas wybierając dowolny punkt $X$, na mocy założenia wiemy, że istnieje czerwona ścieżka między $X$ i $Q$. Dokładając do niej odcinek między $P$ i $Q$ otrzymujemy ścieżkę między $P$ oraz $X$. Wykazaliśmy, że istnieje ścieżka między punktem $P$ i każdym innym punktem. Łącząc to z faktem, że na mocy założenia indukcyjnego taka ścieżka istnieje między każdą inną parą punktów, otrzymujemy, że dla koloru czerwonego teza jest spełniona.
   (b) Punkt $P$ jest połączony z każdym innym punktem niebieskim odcinkiem. Wówczas łatwo zauważyć, że pomiędzy każda parą punktów możemy przejść jednym albo dwoma niebieskimi odcinkami przechodzącymi przez punkt $P$.

5. Na początku wykażemy indukcyjnie, że dla każdego $n$ zachodzi równość

$$a_{n+1} = 1 - a_1 a_2 a_3 \cdot ... \cdot a_n.$$

   Równośc dla $n=0$ zachodzi na mocy założeń.

   Załóżmy, że

$$a_n = 1 - a_1 a_2 a_3 \cdot ... \cdot a_{n-1}.$$

   Skoro $a_{n+1} = 1 - a_n(1-a_n)$, to otrzymujemy

$$a_{n+1} = 1 - a_n(1-a_n) = 1 - a_n \cdot a_1 a_2 a_3 \cdot ... \cdot a_{n-1} = 1 - a_1 a_2 a_3 \cdot ... \cdot a_n.$$

   Wieć na mocy zasady indukcji matematycznej postulowana równość zachodzi.

Teraz przejdziemy do udowodnienia tezy.

Dla $n = 1$ jest ona oczywista.

Załóżmy, że zachodzi równość

$$a_1a_2a_3...a_n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_n}\right)=1.$$

Chcemy wykazać, że

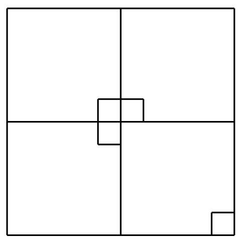
$$a_1a_2a_3...a_na_{n+1}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}\right)=1.$$

Przekształcamy powyższą równość korzystając z założenia

$$a_1a_2a_3...a_na_{n+1}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}\right)=a_{n+1}\cdot a_1a_2a_3...a_n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+...\right.$$

$$+\,a_1a_2a_3...a_n = a_{n+1}+a_1a_2a_3...a_n = 1-a_1a_2a_3...a_n+a_1a_2a_3...a_n=1.$$

6. Zauważmy, że plansza $2\times 2$ z usuniętym rogiem jest w istocie L-klockiem, więc da się ją pokryć.



Załóżmy, że dla planszy $2^{n-1}\times 2^{n-1}$ istnieje szukane pokrycie. Pokrycie dla planszy $2^n\times 2^n$ kontruujemy następująco. Dzielimi plansze dwiema prostymi na trzy jednakowe części i czwartą taką samą, tylko bez rok. Kładziemy jeden klocek na środku tak jak na rysunku. Wówczas plansza jest podzielona na cztery jednakowe puste części, które na mocy założenia indukcyjnego można pokryć.

7. Przez multizbiór rozumiemy zbiór w którym jeden element może występować kilka razy.

Załóżmy, że $x_1 \geqslant x_2 \geqslant ... \geqslant x_n$.

Wykażemy tezę dla $n = 3$. Podział na zbiory $\{x_1-x_2, x_2-x_3\}$ oraz $\{x_1-x_3\}$ spełnia warunki zadania.

Załóżmy, że teza zachodzi dla $2n+1$, wykażemy ją dla $2n+3$. Rozpatrzmy szukany podział multizbioru różnic zbioru $\{x_1, x_2, ..., x_{2n+1}\}$ na multizbiory $A$ i $B$ o równej sumie elementów.

Dorzucamy do multizbioru $A$ liczby

$$(x_{2k+3}-x_{2k+1}, x_{2k+3}-x_{2k}, \cdots, x_{2k+3}-x_{k+2})\cup(x_{2k+2}-x_{k+1}, \cdots, x_{2k+2}-x_1),$$

a do multizbioru $B$ liczby

$$(x_{2k+3}-x_{2k+2})\cup(x_{2k+2}-x_{2k+1}, x_{2k+2}-x_{2k}, \cdots, x_{2k+3}-x_{k+2})\cup(x_{2k+3}-x_{k+1}, \cdots, x_{2k+3}-$$

Łatwo sprawdzić, że suma dorzuconych elementów jest równa.