

Paweł Gadziński

# Wstęp do matematyki olimpijskiej

zadania niegeometryczne

wersja z 14 lipca 2021

Książka w wersji online dostępna pod adresem:  
<http://wdmo.pl>

# Wstęp

Książka ta jest skierowana do osób, które mają już pewne doświadczenie z matematyką olimpijską i chcieliby powalczyć o tytuł finalisty Olimpiady Matematycznej. Jeśli czytelniczka/czytelnik nie ma takowego doświadczenia, to zachęcamy, aby najpierw zapoznać się z zadaniami i materiałami z Olimpiady Matematycznej Juniorów.

Każdy z rozdziałów zaczyna się omówieniem pewnego zagadnienia teoretycznego. Postaram się zamieścić w tej książce wszystkie niezbędne narzędzia, które mogą przydać się na drugim etapie OM.

Jednak to nie wiedza teoretyczna jest najważniejsza na Olimpiadzie. Znacznie istotniejsze jest jej kreatywne zastosowanie, często wykraczające poza schematy. Dlatego częścią każdego rozdziału jest kilka zadań. Są one dobrane tak, aby były niesztampowe oraz poszerzały horyzonty myślowe. Absolutnie nie należy traktować ich jako ćwiczeń do poprzedzającej ich części teoretycznej. Mogą one do niej nawiązywać, ale nie zawsze będą. Trenowanie na zadaniach, które są bardziej zróżnicowane pod względem tematyki jest bardziej efektywne, czego dowodzą liczne badania prowadzone w tym zakresie (Roher, Dedrick i Burgess, 2014).

Do każdego z zadań zamieszczono do trzech podpowiedzi. Zachęcamy do skorzystania z nich przed zobaczeniem na rozwiązanie. Przy większości zadań przeczytanie wszystkich podpowiedzi powinno pozwolić na samodzielne wymyślenie rozwiązania, a to daje satysfakcję.

Książka jest dostępna za darmo, ale jednak proszę osoby, które z niej korzystają o drobną przysługę. Jeśli zostanie zauważony jakiś błąd, nieścisłość, czy też uważasz, że można coś napisać lepiej, to bardzo proszę o zwrócenie uwagi przez formularz dostępny w wersji on-line publikacji lub też pisanie na maila *admin@wdmo.pl*.

Paweł Gadziński

# Spis treści

<b>Wstęp</b>	<b>1</b>
<b>Teoria i zadania</b>	<b>6</b>
Indukcja matematyczna . . . . .	6
Równania funkcyjne . . . . .	10
Bijekcje i bajki kombinatoryczne . . . . .	14
Liczby pierwsze i reszty z dzielenia . . . . .	17
Nierówności między średnimi . . . . .	20
Konstrukcje . . . . .	25
Wielomiany . . . . .	28
Grafy . . . . .	34
Indukcja matematyczna 2 . . . . .	38
Podzielności . . . . .	42
Gry . . . . .	48
Bardziej zaawansowane nierówności . . . . .	52
Równania funkcyjne 2 . . . . .	57
Twierdzenia z teorii liczb . . . . .	62
Grafy skierowane . . . . .	67
Ciągi . . . . .	73
Rozstrzygnij, czy . . . . .	78
Grafy 2 . . . . .	82
Nierówności z pomysłem . . . . .	87
Klasyczne zadania z teorii liczb . . . . .	90
Maksima, niezmienniki i procesy . . . . .	94
Wielomiany 2 . . . . .	97
Kombinatoryka z elementami geometrii . . . . .	102
Szachownice, klocki i kolorowanie . . . . .	105
<b>Podpowiedzi 1</b>	<b>110</b>
Indukcja matematyczna . . . . .	110
Równania funkcyjne . . . . .	110
Bijekcje i bajki kombinatoryczne . . . . .	110
Liczby pierwsze i reszty z dzielenia . . . . .	111
Nierówności między średnimi . . . . .	111
Konstrukcje . . . . .	111
Wielomiany . . . . .	111
Wielomiany . . . . .	112
Indukcja matematyczna 2 . . . . .	112
Podzielności . . . . .	113
Gry . . . . .	113
Bardziej zaawansowane nierówności . . . . .	113
Równania funkcyjne i wielomianowe . . . . .	114
Twierdzenia z teorii liczb . . . . .	114
Grafy skierowane . . . . .	114
Ciągi . . . . .	115
Rozstrzygnij, czy . . . . .	115
Grafy 2 . . . . .	115
Nierówności z pomysłem . . . . .	115

Klasyczne zadania z teorii liczb . . . . .	116
Maksima, niezmienniki i procesy . . . . .	116
Wielomiany 2 . . . . .	117
Kombinatoryka z elementami geometrii . . . . .	117
Szachownice, klocki i kolorowanie . . . . .	117
<b>Podpowiedzi 2</b>	<b>119</b>
Indukcja matematyczna . . . . .	119
Równania funkcyjne . . . . .	119
Bijekcje i bajki kombinatoryczne . . . . .	119
Liczby pierwsze i reszty z dzielenia . . . . .	120
Nierówności między średnimi . . . . .	120
Konstrukcje . . . . .	120
Wielomiany . . . . .	121
Wielomiany . . . . .	121
Indukcja matematyczna 2 . . . . .	121
Podzielności . . . . .	122
Gry . . . . .	122
Bardziej zaawansowane nierówności . . . . .	122
Równania funkcyjne i wielomianowe . . . . .	122
Twierdzenia z teorii liczb . . . . .	123
Grafy skierowane . . . . .	123
Ciągi . . . . .	123
Rozstrzygnij, czy . . . . .	124
Grafy 2 . . . . .	124
Nierówności z pomysłem . . . . .	125
Klasyczne zadania z teorii liczb . . . . .	125
Maksima, niezmienniki i procesy . . . . .	125
Wielomiany 2 . . . . .	125
Kombinatoryka z elementami geometrii . . . . .	126
Szachownice, klocki i kolorowanie . . . . .	126
<b>Podpowiedzi 3</b>	<b>129</b>
Indukcja matematyczna . . . . .	129
Równania funkcyjne . . . . .	129
Bijekcje i bajki kombinatoryczne . . . . .	130
Liczby pierwsze i reszty z dzielenia . . . . .	130
Nierówności między średnimi . . . . .	130
Konstrukcje . . . . .	130
Wielomiany . . . . .	131
Wielomiany . . . . .	131
Indukcja matematyczna 2 . . . . .	131
Podzielności . . . . .	132
Gry . . . . .	132
Bardziej zaawansowane nierówności . . . . .	133
Równania funkcyjne i wielomianowe . . . . .	133
Twierdzenia z teorii liczb . . . . .	133
Grafy skierowane . . . . .	134
Ciągi . . . . .	134
Rozstrzygnij, czy . . . . .	134

Grafy 2 . . . . .	135
Nierówności z pomysłem . . . . .	135
Klasyczne zadania z teorii liczb . . . . .	135
Maksima, niezmienniki i procesy . . . . .	135
Wielomiany 2 . . . . .	136
Kombinatoryka z elementami geometrii . . . . .	136
Szachownice, klocki i kolorowanie . . . . .	137
<b>Rozwiązania</b>	<b>139</b>
Indukcja matematyczna . . . . .	139
Równania funkcyjne . . . . .	144
Bijekcje i bajki kombinatoryczne . . . . .	148
Liczby pierwsze i reszty z dzielenia . . . . .	152
Nierówności między średnimi . . . . .	154
Konstrukcje . . . . .	156
Wielomiany . . . . .	159
Grafy . . . . .	163
Indukcja matematyczna 2 . . . . .	167
Podzielności . . . . .	171
Gry . . . . .	175
Bardziej zaawansowane nierówności . . . . .	179
Równania funkcyjne i wielomianowe . . . . .	182
Twierdzenia z teorii liczb . . . . .	186
Grafy skierowane . . . . .	189
Ciągi . . . . .	194
Rozstrzygnij, czy . . . . .	198
Grafy 2 . . . . .	201
Nierówności z pomysłem . . . . .	204
Klasyczne zadania z teorii liczb . . . . .	207
Maksima, niezmienniki i procesy . . . . .	211
Wielomiany 2 . . . . .	215
Kombinatoryka z elementami geometrii . . . . .	219
Szachownice, klocki i kolorowanie . . . . .	224
<b>Źródła zadań i pomysłów na rozwiązania</b>	<b>230</b>
Indukcja matematyczna . . . . .	230
Bijekcje i bajki kombinatoryczne . . . . .	230
Nierówności między średnimi . . . . .	230
Konstrukcje . . . . .	230
Grafy . . . . .	231
Indukcja matematyczna 2 . . . . .	231
Reszty kwadratowe . . . . .	231
Gry . . . . .	231
Bardziej zaawansowane nierówności . . . . .	232
Równania funkcyjne 2 . . . . .	232
Twierdzenia z teorii liczb . . . . .	232
Grafy skierowane . . . . .	232
Ciągi . . . . .	233
Rozstrzygnij, czy . . . . .	233
Grafy 2 . . . . .	233

Nierówności z pomysłem . . . . .	234
Klasyczne zadania z teorii liczb . . . . .	234
Maksima, niezmienniki i procesy . . . . .	234
Wielomiany 2 . . . . .	235
Kombinatoryka z elementami geometrii . . . . .	235
Szachownice, kloki i kolorowanie . . . . .	235

# Teoria i zadania

# Indukcja matematyczna

## Przykład 1

Wykazać, że dla każdej liczby dodatniej całkowitej  $n$  zachodzi nierówność

$$2^n \geq n + 1.$$

## Rozwiązanie

Dla  $n = 1$  mamy  $2^n = 2 = n + 1$ , a więc postulowana nierówność istotnie zachodzi. Załóżmy, że dla pewnej liczby dodatniej całkowitej  $k$  zachodzi nierówność  $2^k \geq k + 1$ . Zauważmy, że wówczas

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \geq 2 \cdot (k + 1) = 2k + 2 \geq k + 2.$$

Wykazaliśmy, że jeśli postulowana nierówność zachodzi dla pewnej dodatniej liczby całkowitej  $k$ , to zachodzi również dla liczby  $k + 1$ . Skoro zachodzi ona dla  $n = 1$ , to zachodzi również dla  $1 + 1 = 2$ ,  $2 + 1 = 3$ ,  $3 + 1 = 4$ , ... – wszystkich liczb naturalnych. ■

Alternatywnym, ale równoważnym, sposobem zakończenia rozwiązania powyższego przykładu jest rozpatrzenie najmniejszego naturalnego  $n$ , dla którego teza nie zachodzi. A więc dla  $n - 1$  nierówność musi zachodzić, chyba że  $n = 1$ . Ale w tym przypadku sprawdzamy, że teza zachodzi. Skoro dla  $n - 1$  teza jest prawdziwa, a dla  $n$  już nie, to otrzymujemy sprzeczność z wcześniej poczynioną obserwacją.

## Zasada indukcji matematycznej

Metodę dowodzenia zastosowaną w ostatnim akapicie powyższego rozwiązania nazywamy *zasadą indukcji matematycznej*.

Formalizując, dowód indukcyjny zdania logicznego  $Z(n)$  dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej  $n$  składa się z dwóch części:

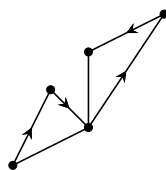
1. Baza indukcji – sprawdzenie prawdziwości zdania  $Z(1)$ .
2. Krok indukcyjny – udowodnienie, że jeśli zachodzi zdanie  $Z(k)$  to zachodzi  $Z(k + 1)$ .

Indukcję matematyczną da się wykorzystać poza algebrą. Pokażemy jedno jego zastosowanie kombinatoryczne. Ale najpierw musimy zdefiniować kilka pojęć z teorii grafów.

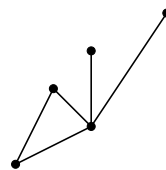
## Grafy i ścieżki Hamiltona

*Grafem* nazywamy pewien zbiór *wierzchołków* na płaszczyźnie, które są połączone *krawędziami*. *Ścieżką* nazywamy ciąg parami różnych krawędzi pewnego grafu, z których dwie kolejne mają wspólny wierzchołek. *Ścieżką Hamiltona* nazywamy ścieżkę, która przechodzi przez każdy wierzchołek dokładnie raz.





Graf posiada ścieżkę Hamiltona –  
zaznaczono ją strzałkami



Graf nie posiada ścieżki Hamiltona

## Przykład 2

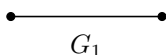
Zdefiniujmy ciąg grafów  $(G_n)_{n \geq 1}$  w następujący sposób.

- Graf  $G_1$  jest grafem złożonym z dwóch połączonych ze sobą wierzchołków,
- Graf  $G_{i+1}$  dla  $i \geq 2$  otrzymujemy poprzez połączenie dwóch grafów  $G_i$ , aby każdy wierzchołek z jednego z tych grafów był połączony z dokładnie jednym wierzchołkiem z drugiego z tych grafów.

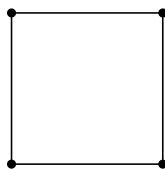
Wykazać, że graf  $G_{2020}$  ma ścieżkę Hamiltona.

*Uwaga*

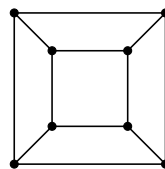
Można zauważyć, że  $G_n$  to w istocie  $n$ -wymiarowy hipersześcian.



$G_1$



$G_2$



$G_3$

## Rozwiązanie

Wykażemy, że teza jest prawdziwa dla każdego  $n \geq 1$ . Co więcej wykażemy, że ścieżka Hamiltona może zaczynać się w każdym z wierzchołków  $G_n$ .

Zauważmy, że dla  $n = 1$  teza jest oczywista – ścieżka złożona z jednej krawędzi spełnia warunki zadania.

Założmy, że dla  $G_n$  istnieje ścieżka Hamiltona. Wykażemy, że istnieje ona dla  $G_{n+1}$ . Graf  $G_{n+1}$  składa się z dwóch połączonych ze sobą części izomorficznych z grafem  $G_n$  – nazwijmy je  $A$  oraz  $B$ . Oznaczmy wierzchołki  $G_{n+1}$  kolejno jako  $a_1, a_2, \dots, a_{2^n}$  – część  $A$  oraz  $b_1, b_2, \dots, b_{2^n}$  – część  $B$ , przy czym  $a_i$  jest połączone właśnie z  $b_i$ .

Ścieżka Hamiltonowska w grafie  $G_{n+1}$  będzie się składać z 3 części:

- Na mocy założenia istnieje ścieżka zaczynająca się w  $a_1$  przechodząca przez wszystkie wierzchołki  $A$ . Możemy ją przejść od tyłu. Wówczas przejdziemy wszystkie wierzchołki części  $A$  kończąc w  $a_1$ .
- Następnie przejdziemy krawędzią między  $a_1$  i  $b_1$  do części  $B$ .
- Na mocy założenia z punktu  $b_1$  da się poprowadzić ścieżkę, która przejdzie przez każdy z wierzchołków części  $B$  dokładnie raz.

Łatwo zauważyć, że podany sposób przejścia grafu  $G_{n+1}$  tworzy ścieżkę Hamiltonowską. ■

### Zadanie 1

Wykazać, że suma miar kątów w  $n$ -kącie wypukłym wynosi  $(n - 2) \cdot 180^\circ$ .

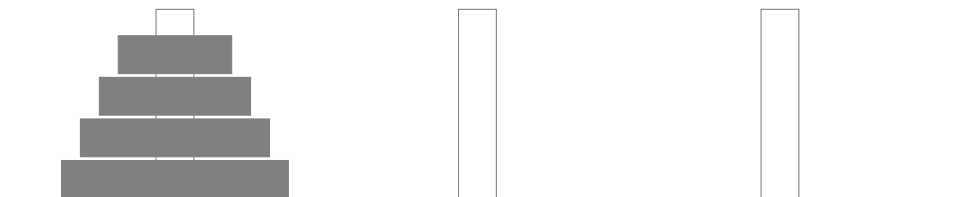
### Zadanie 2

Wykazać, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej  $n$  zachodzi tożsamość

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

### Zadanie 3

Dana jest następująca gra, zwana *wieżami Hanoi*. Na początku ułożono  $n$  dysków na jednej igle tak jak na rysunku. W każdym ruchu gracz może przemieścić dysk, wraz z wszystkimi dyskami nań leżącymi, na inną igłę, przy czym dysk ten nie może zostać położony na dysk o innej średnicy. Wykazać, że gracz jest w stanie przenieść wszystkie dyski na trzecią igłę.



### Zadanie 4

W przestrzeni danych jest  $n \geq 3$  punktów, że żadne trzy z nich nie leżą na jednej prostej. Każde dwa z tych punktów połączono odcinkiem o kolorze zielonym lub czerwonym. Wykazać, że można wybrać tak jeden z tych kolorów, aby każde dwa z danych punktów były połączone odcinkiem lub łamaną tego koloru.

### Zadanie 5

Dany jest ciąg liczb rzeczywistych

$$a_0 \neq 0, 1, \quad a_1 = 1 - a_0, \quad a_{n+1} = 1 - a_n(1 - a_n).$$

Wykazać, że dla wszystkich  $n$

$$a_1 a_2 \dots a_n \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) = 1.$$

### Zadanie 6

Wykazać, że planszę o wymiarach  $2^n \times 2^n$  dla pewnego  $n \geq 1$  z usuniętym jednym z rogów da się przykryć pewną liczbą  $L$  klocków (takich jak na rysunku). Klocki można obracać.



### Zadanie 7

Niech  $n$  będzie nieparzystą liczbą naturalną, a liczby  $x_1, x_2, \dots, x_n$  będą parami różne. Dla każdych dwóch liczb  $x_i$  oraz  $x_j$  zapisano na tablicy wartość bezwzględną ich różnicy. Wykazać, że można podzielić zapisane liczby na dwa zbiory o równej sumie.

# Równania funkcyjne

## Przykład 1

Znajdź wszystkie funkcje  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniające dla wszystkich  $x, y \in \mathbb{R}$ , równanie

$$f(x + y) = f(x) - f(y).$$

## Rozwiązanie

Zauważmy, że skoro dane równanie jest spełnione dla wszystkich liczb rzeczywistych  $x$  i  $y$  to jest spełnione w szczególności dla  $x = y = 0$ . Wówczas

$$f(0) = f(0) - f(0) = 0.$$

Podstawiając do wyjściowej równości  $x = 0$  otrzymujemy

$$f(y) = f(0) - f(y).$$

Na mocy wyżej wykazanej zależności  $f(y) = 0$  mamy

$$\begin{aligned} f(y) &= -f(y) \\ f(y) &= 0. \end{aligned}$$

Wykazaliśmy, że  $f(x) = 0$  dla wszystkich liczb rzeczywistych  $x$ . Pozostaje sprawdzić, że istotnie taka funkcja spełnia warunki zadania. Zauważmy, że wówczas

$$f(x + y) = 0 = f(x) - f(y).$$

■

Metodę, polegającą na podstawianiu szczególnych wartości do danego równania, jest najważniejszym narzędziem w walce z równaniami funkcyjnymi. Często, aby zadania rozwiązać, należy użyć jej kilka lub nawet kilkanaście razy.

Należy zaznaczyć, że bardzo często rozwiązując równanie funkcyjne, wyznacza się zbiór funkcji, które mogą spełniać dane równanie. Jednak często nie oznacza to, że muszą one go spełniać, gdyż podstawianie zazwyczaj nie jest przejściem równoważnym. Dlatego należy zawsze w swoim rozwiązaniu zawrzeć sprawdzenie tego, czy otrzymane funkcje istotnie działają. Brak takiego sprawdzenia w większości przypadków skutkuje obniżeniem oceny za dane zadanie.

## Przykład 2

Znajdź wszystkie funkcje  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniające dla wszystkich  $x, y \in \mathbb{R}$  równanie

$$f(2f(x) + f(y)) = 2x + f(y).$$

## Rozwiązanie

Rozwiązanie rozpoczniemy od wykazania następującego lematu.

Lemat 1. Dla każdego  $a \in \mathbb{R}$  istnieje  $x \in \mathbb{R}$ , że  $f(x) = a$ .

Podstawmy  $\frac{a - f(y)}{2}$  w miejsce zmiennej  $x$

$$f\left(f\left(\frac{a - f(y)}{2}\right) + f(y)\right) = 2\left(\frac{a - f(y)}{2}\right) + f(y) = a.$$

Zauważmy, że z otrzymanej równości wynika teza lematu – liczbę  $a$  można wybrać dowolnie, zaś po prawej stronie otrzymamy argument, dla którego funkcja przyjmie tę wartość.

Korzystając z lematu, podstawmy w miejsce  $y$  taką liczbę  $a$ , aby  $f(a) = -2f(a)$ . Wówczas

$$f(0) = 2x - 2f(x)$$

$$f(x) = x + \frac{1}{2}f(0).$$

Podstawiając do powyższej równości  $x = 0$  otrzymujemy, że  $f(0) = 0$ . Stąd

$$f(x) = x + \frac{1}{2}f(0) = x.$$

Sprawdzamy, że funkcja  $f(x) = x$  istotnie spełnia warunki zadania. ■

W powyższym rozumowaniu kluczowe było wykazanie, że dana funkcja przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste – inaczej mówiąc jest surjekcją. Mogliśmy także wykazać więcej, mianowicie, że dana funkcja jest różnowartościowa. Zakładając, że  $f(a) = f(b)$  dla pewnych liczb  $a, b$  podstawiamy w miejsce  $(x, y)$  kolejno  $(a, 0)$  i  $(b, 0)$  otrzymując

$$f(2f(a) + f(y)) = 2a + f(y) \quad \text{oraz} \quad f(2f(b) + f(y)) = 2b + f(y).$$

Na mocy wyżej założonej równości lewe strony obu zależności są sobie równe. Stąd prawe również, skąd  $a = b$ . Implikacja  $f(a) = f(b) \implies a = b$  jest równoważna temu, że funkcja  $f$  jest różnowartościowa.

W większości rozwiązań funkcyjnych konieczne będzie wykonanie wielu „sztampowych” podstawień i spróbować wykazać własności funkcji – chociażby te wspomniane wyżej. Niekiedy do rozwiązania zadania potrzebny będzie błyskotliwy pomysł czy niesztampowe połączenie faktów. W innych zaś przypadkach samo rzetelne i uważne próbowanie znanych trików może okazać się wystarczające.

### Zadanie 1

Znajdź wszystkie funkcje  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniające dla wszystkich  $x, y \in \mathbb{R}$  równanie

$$f(x) + f(y) = f(xy).$$

**Zadanie 2**

Znajdź wszystkie funkcje  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniające dla wszystkich  $x, y \in \mathbb{R}$  równanie

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y.$$

**Zadanie 3**

Znajdź wszystkie funkcje  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniające dla wszystkich  $x, y \in \mathbb{R}$  równanie

$$f(x^2y) = f(xy) + yf(f(x) + y).$$

**Zadanie 4**

Znajdź wszystkie funkcje  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniające dla wszystkich  $x, y \in \mathbb{R}$  równanie

$$2f(x) + f(1 - x) = x^2.$$

**Zadanie 5**

Znajdź wszystkie funkcje  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniające dla wszystkich  $x, y \in \mathbb{R}$  równanie

$$f(x + y) = f(f(x)) + y + 1.$$

**Zadanie 6**

Znajdź wszystkie funkcje różnowartościowe  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniające dla wszystkich  $x, y \in \mathbb{R}$  równość

$$f(f(x) + y) = f(x + y) + 1.$$

**Zadanie 7**

Znajdź wszystkie funkcje  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniające dla wszystkich  $x, y \in \mathbb{R}$  nierówność

$$f(x^2 + y) + f(y) \geq f(x^2) + f(x).$$

**Zadanie 8**

Znajdź wszystkie funkcje  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  spełniające dla wszystkich  $x \in \mathbb{Z}$  równanie

$$f(f(x)) = x + 1.$$

**Zadanie 9**

Znajdź wszystkie funkcje  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniające dla wszystkich  $x, y \in \mathbb{R}$  równanie

$$f(x)f(y) = f(x - y).$$

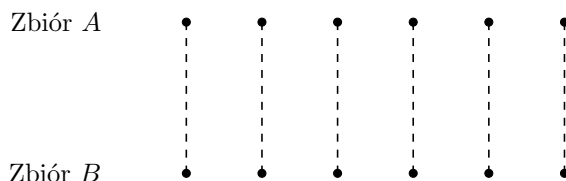
### Zadanie 10

Udowodnij, że nie istnieje taka funkcja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x, y$  zachodzi równość:

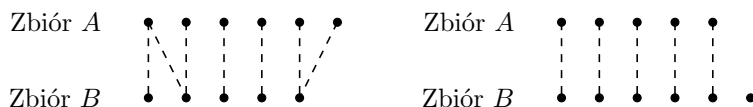
$$f(f(x) + 2f(y)) = x + y.$$

# Bijekcje i bajki kombinatoryczne

W tym rozdziale będziemy analizować różne zbiory i relacje między nimi. W części zadań trzeba będzie pokazać, że pewne dwa zbiory mają tyle samo elementów. Jedną z metod dowodzenia tego typu stwierdzeń jest połączenie elementów danych zbiorów w pary. Takie przyporządkowanie nazywamy *bijekcją*.



Aby stwierdzić czy przyporządkowanie jest bijekcją wystarczy sprawdzić, czy każdy element jednego zbioru jest przyporządkowany do *dokładnie* jednego elementu drugiego zbioru. Poniżej dwa przykłady przyporządkowania, które nie jest bijekcją.



## Przykład 1

Dla pewnej liczby całkowitej  $n$  jej *podziałem* nazwiemy takie liczby  $(a_1, \dots, a_t)$ , że

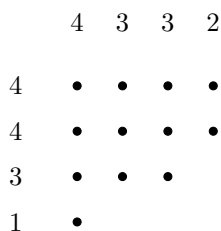
$$n = a_1 + a_2 + \dots + a_t$$

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_t \geq 0.$$

Niech  $n, k$  będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Wykazać, że liczba podziałów  $n$ , które składają się dokładnie z  $k$  liczb jest równa liczbie podziałów  $n$ , takich, że największy składnik każdego z nich jest równy dokładnie  $k$ .

## Rozwiązanie

Weźmy dowolny podział liczby  $n$ . Niech  $n = a_1 + a_2 + \dots + a_t$ . Rozpatrzmy jego reprezentację graficzną zwaną diagramem Ferrera. Poniżej narysowano diagram Ferrera dla podziału  $12 = 4 + 4 + 3 + 1$ . W każdym kolejnym wierszu znajduje się tyle kropek, ile wynosi kolejny składnik z podziału.





Zastanówmy się co znaczą założenia zadania w języku rozpatrywanych diagramów. Jeśli w podziale jest dokładnie  $k$  liczb, to diagram Ferrera będzie składał się dokładnie z  $k$  wierszy. Jeśli największy składnik podziału jest równy  $k$ , to kolumn będzie dokładnie  $k$ .

Zauważmy, że patrząc na dowolny diagram Ferrera „od góry” – traktujemy kolumny jako wiersze i vice versa – otrzymamy inny diagram Ferrera. W podanym przykładzie z podziału  $12 = 4 + 4 + 3 + 1$  otrzymamy w ten sposób podział  $12 = 4 + 3 + 3 + 2$ .

Jeśli diagram Ferrera przedstawiał podział  $n$ , który składa się dokładnie z  $k$  liczb, to podział otrzymany w powyższy sposób ma największy składnik każdego z nich jest równy dokładnie  $k$ . Obie z tych własności są równoważne temu, że diagram na  $k$  wierszy.

Powyższe przyporządkowanie łączy elementy danych w zadaniu zbiorów w pary – dokładnie jeden podział pierwszego rodzaju z dokładnie jednym podziałem drugiego rodzaju. Rysując diagram dla pewnego podziału otrzymamy dokładnie jeden podział z drugiego zbioru, więc to parowanie jest dobre. Stąd wynika, że rozpatrywane zbiory mają tyle samo elementów.



Pokazaliśmy, że pewne dwa zbiory mają tę samą liczbę elementów. Teraz spróbujemy za pomocą kombinatoryki udowodnić równość algebraiczną.

### Przykład 2

Wykazać, że dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych  $n, k$  zachodzi równość

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = 3^n.$$

### Rozwiązanie

Na imprezę przyszło  $n$  matematyczek. Każda z nich wzięła kapelus, czapkę lub przyszła bez okrycia głowy. Obliczmy ile różnych wariantów nakryć głowy mogło się zdarzyć na dwa sposoby.

1. Każda z dziewczyn mogła wybrać jedną z trzech opcji ubioru, było ich  $n$ , więc liczba możliwości wynosi  $3^n$ .
2. Przyjmijmy, że  $n - k$  dziewczyn nie przyniosło żadnego nakrycia głowy. Wówczas możemy wybrać te dziewczyny na  $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$  sposobów. Następnie każda z pozostałych  $k$  dziewczyn wybrała jedno z dwóch dostępnych nakryć głowy. Więc mogą to zrobić na  $2^k$  sposobów. Z reguły mnożenia wynika, że dla ustalonej liczby  $k$  jest dokładnie  $\binom{n}{k} 2^k$  wariantów. Sumując po wszystkich  $k$  otrzymujemy  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$ .

Obliczając jedną rzecz na dwa sposoby otrzymaliśmy liczby, które muszą być równe.



Rozumowania podobne do powyższego nazywane są bajkami kombinatorycznymi.

#### Zadanie 1

Dane są liczby całkowite  $n$  i  $k$ . Wykaż, że

$$\sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}.$$

#### Zadanie 2

Wyznacz liczbę podzbiorów zbioru  $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ , których suma wynosi co najmniej 28.

#### Zadanie 3

Udowodnić, że dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych  $n, k$  zachodzi równość

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

#### Zadanie 4

Dana jest liczba pierwsza  $p \geq 3$ . Niech  $A_k$  oznacza zbiór permutacji  $(a_1, a_2, \dots, a_p)$  zbioru  $\{1, 2, 3, \dots, p\}$ , dla których liczba

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + pa_p - k$$

jest podzielna przez  $p$ . Wykazać, że zbiory  $A_1, A_2$  mają tyle samo elementów.

#### Zadanie 5

Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych  $n, k$  liczba  $(kn)!$  jest podzielna przez liczbę  $(n!)^k \cdot k!$ .

#### Zadanie 6

Dana jest liczba całkowita  $n$ . Niech  $T_n$  oznacza liczbę takich podzbiorów zbioru  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ , że ich średnia arytmetyczna jest liczbą całkowitą. Wykazać, że liczba  $T_n - n$  jest parzysta.

#### Zadanie 7

Niech  $n, k, r$  będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Wykaż, że

$$\sum_{k=0}^r \binom{n+k}{k} = \binom{n+r+1}{r}.$$

# Liczby pierwsze i reszty z dzielenia

Ten rozdział będzie nieco bardziej teoretyczny niż poprzednie. Zadania także będą trudniejsze – zachęcamy do skorzystania ze wskazówek i głębokiego przestudiowania rozwiązań. Chcemy wyrobić u czytelnika intuicję dotyczącą działań na resztach z dzielenia przez pewną liczbę pierwszą. Od czytelniczki/czytelnika wymaga się, aby znał własności kongruencji – opisano je chociażby w Gazecie OMJ „Kwadrat” nr 7.

We wszystkich poniższych zadaniach przez  $a$ ,  $b$  będziemy oznaczać liczby całkowite, zaś przez  $p$  dowolną liczbę pierwszą. Przez  $x|y$  będziemy oznaczać fakt, że liczba  $x$  jest dzielnikiem liczby  $y$ .

## Twierdzenie 1

Jeśli liczba  $ab$  jest podzielna przez  $p$ , to wówczas co najmniej jedna z liczb  $a$ ,  $b$  jest podzielna przez  $p$ .

Zauważmy, że założenie o pierwszości liczby  $p$  jest konieczne. Chociażby liczba  $4 \cdot 9 = 36$  dzieli się przez 6, ale żadna z liczb 4, 9 nie jest podzielna przez 6.

Zachęcamy do samodzielnej próby wykazania poniższych lematów. Poniżej, czcionką odwróconą, zapisano wskazówki.

## Lemat 1

Udowodnić, że jeśli  $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$  dla pewnej liczby pierwszej  $p$ , to

$$x \equiv 1 \pmod{p} \quad \text{lub} \quad x \equiv -1 \pmod{p}.$$

Podpowiedź: Zapisz założenia i tezę zadania bez użycia moduło.

## Dowód

Zauważamy, że zapis  $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$  jest równoważny zapisowi

$$p \mid x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1).$$

Skoro  $p$  jest liczbą pierwszą, to na mocy Twierdzenia 1  $p \mid x - 1$  lub  $p \mid x + 1$ , a to jest równoważne temu, co było do wykazania. ■

## Lemat 2

Liczba  $a$  nie jest podzielna przez  $p$ . Udowodnić, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita  $k$ , że

$$a^k \equiv 1 \pmod{p}.$$

Podpowiedź: Udowodnij, że istnieją takie  $r$  i  $s$ , że  $a^r \equiv a^s \pmod{p}$ .

## Dowód

Rozpatrzmy ciąg  $(1, a^1, a^2, a^3, \dots)$ . Zauważamy, że ma on nieskończenie wiele elementów, a reszt z dzielenia przez  $p$  jest skończenie wiele. Z Zasady Szufladkowej Dirichleta

mamy więc, że istnieją takie liczby  $r$  oraz  $s$  – założmy, że  $r \geq s$  – że

$$a^r \equiv a^s \pmod{p}.$$

Jest to równoważne temu, że

$$p \mid a^s(a^{r-s} - 1).$$

Skoro  $a$  nie jest podzielna przez  $p$ , to  $p \mid a^{r-s} - 1$ , to zachodzi  $a^{r-s} \equiv 1 \pmod{p}$ . ■

### Odwrotność modulo $p$

Z Lematu 2 można wywnioskować, że dla każdej liczby  $a$ , która nie jest podzielna przez  $p$  istnieje pewna liczba  $b \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ , że

$$ab \equiv 1 \pmod{p}.$$

Wystarczy wziąć  $b = a^{p-1} \pmod{p}$ .

Wykażemy teraz, że w zbiorze  $\{1, 2, \dots, p-1\}$  jest dokładnie jedna taka liczba  $b$ . Załóżmy, że dla pewnych  $b, c \in \{1, 2, \dots, p-1\}$

$$ab \equiv ac \equiv 1 \pmod{p}.$$

Wówczas

$$p \mid ab - ac = a(b - c) \implies p \mid b - c,$$

gdyż liczba  $a$  nie jest podzielna przez  $p$ . Skoro  $b, c \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ , to

$$-p < b - c < p.$$

Skoro  $p \mid b - c$ , to  $b - c = 0$ , czyli  $b = c$ .

Przyjmijmy, że liczba  $b$  jest *odwrotnością* liczby  $a$  modulo  $p$ . Zapiszemy  $b = a^{-1} \pmod{p}$ .

### Lemat 3

Dla dowolnej liczby  $a$ , która nie jest podzielna przez  $p$  ciąg

$$(a \pmod{p}, 2a \pmod{p}, 3a \pmod{p}, \dots, (p-1) \cdot a \pmod{p})$$

jest permutacją ciągu

$$(1, 2, 3, \dots, p-1).$$

Podpowiedź: Wykaż, że  $ai \not\equiv aj \pmod{p}$ , jeśli  $i \not\equiv j \pmod{p}$ .

### Dowód

Pokażmy, że jeśli  $i \not\equiv j \pmod{p}$ , to  $ai \not\equiv aj \pmod{p}$ . Załóżmy, że

$$ai \equiv aj \pmod{p}$$

dla pewnych  $i, j$ . Skoro  $p$  nie dzieli  $a$ , to istnieje odwrotność  $a$  modulo  $p$ . Mnożąc obie strony przez  $a^{-1}$  – lub równoważnie dzieląc przez  $a$  otrzymujemy

$$i \equiv j \pmod{p},$$

co dowodzi postulowanej implikacji.

Rozpatrzmy liczby  $a, 2a, (p-1)a$ . Oczywiście żadna z nich nie jest podzielna przez  $p$ . Z tego, że tych liczb jest  $p-1$ , niezerowych reszt z dzielenia przez  $p$  również jest  $p-1$ , oraz te liczby dają parami różne reszty niezerowe z dzielenia przez  $p$ , wynika teza. ■

## Małe twierdzenie Fermata

Dana jest liczba  $a$ , która nie jest podzielna przez  $p$ . Wykazać, że

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

### Dowód

Korzystając z poprzedniego lematu mamy, że ciąg

$$(a \pmod{p}, 2a \pmod{p}, 3a \pmod{p}, \dots, (p-1) \cdot a \pmod{p})$$

jest permutacją ciągu

$$(1, 2, 3, \dots, p-1).$$

Skoro te ciągi zawierają te same elementy modulo  $p$ , tylko, że w innej kolejności, to iloczyny tych elementów będą dawały taką samą resztę z dzielenia przez  $p$ . Więc

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-1) = a \cdot 2a \cdot 3a \cdot \dots \cdot (p-1)a \pmod{p},$$

$$(p-1)! \equiv a^{p-1}(p-1)! \pmod{p}.$$

Zauważmy, że  $(p-1)! \not\equiv 0 \pmod{p}$ . Mnożąc przystawanie stronami przez odwrotność liczby  $(p-1)!$  otrzymujemy tezę. ■

#### Zadanie 1

Dana jest liczba pierwsza  $p$ . Udowodnić, że istnieje taka liczba całkowita  $n$ , że

$$2^n \equiv n \pmod{p}.$$

#### Zadanie 2

Dana jest liczba pierwsza  $p \geq 3$ . Niech

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-1} = \frac{a}{b}$$

dla pewnych dodatnich liczb całkowitych  $a, b$ . Udowodnić, że  $p \mid a$ .

#### Zadanie 3

Udowodnij, że istnieje  $n$ , dla którego  $2^n + 3^n + 6^n \equiv 1 \pmod{p}$ .

#### Zadanie 4

Wykazać, że zachodzi przystawanie

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

# Nierówności między średnimi

Zakładamy, że czytelniczka/czytelnik zna metodę dowodzenia nierówności poprzez zwinienie do kwadratu. Zaprezentujemy jedno twierdzenie – nierówność między średnimi – oraz kilka metod pracy z nierównościami.

## Nierówności między średnimi

Dane są dodatnie liczby rzeczywiste  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ .

Średnią kwadratową nazywamy wartość

$$QM = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$

Średnią arytmetyczną nazywamy wartość

$$AM = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Średnią geometryczną nazywamy wartość

$$GM = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Średnią harmoniczną nazywamy wartość

$$HM = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

Wówczas zachodzą nierówności

$$QM \geq AM \geq GM \geq HM,$$

przy czym równość w którymkolwiek przypadku zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n.$$

Skróty  $QM, AM, GM, HM$  pochodzą z języka angielskiego i oznaczają odpowiednio *quadratic mean, arithmetic mean, geometric mean, harmonic mean*. Zaprezentujemy dowód jednej z podanych nierówności. Pozostałe są nieco bardziej złożone, więc nie będziemy ich przytaczać.

## Dowód nierówności między średnimi arytmetyczną a geometryczną

Część 1. Dowód  $n = 2$ .

Chcemy wykazać, że zachodzi nierówność

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}.$$

Jest ona równoważna prawdziwej nierówności

$$a_1 - 2\sqrt{a_1 a_2} + a_2 = (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0.$$

Cześć 2. Dowód dla  $n$  postaci  $n = 2^k$ ,  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ .

Będziemy indukować się po  $k$ . Dla  $k = 0$  nierówność jest oczywista. Załóżmy, że zachodzi dla  $k$ , wykażemy, że zachodzi dla  $k + 1$ .

Zauważmy, że

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} \left( \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2^k}}{2^k} + \frac{a_{2^k+1} + a_{2^k+2} + \dots + a_{2^{k+1}}}{2^k} \right)$$

Korzystając z założenia indukcyjnego – to jest nierówności dla  $n = 2^k$  mamy

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2^k}}{2^k} &\geq \sqrt[2^k]{a_1 a_2 \dots a_{2^k}} \\ \frac{a_{2^k+1} + a_{2^k+2} + \dots + a_{2^{k+1}}}{2^k} &\geq \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} a_{2^k+2} \dots a_{2^{k+1}}} \end{aligned}$$

Zauważmy teraz, że na mocy znanej nierówności  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$  mamy

$$\frac{1}{2} \left( \sqrt[2^k]{a_1 a_2 \dots a_{2^k}} + \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} a_{2^k+2} \dots a_{2^{k+1}}} \right) \geq \sqrt[2^{k+1}]{a_1 a_2 \dots a_{2^{k+1}}}$$

Łącząc powyższe nierówności dowód nierówności dla  $n$  będącej potęgą liczby 2.

Cześć 3. Z faktu, że nierówność zachodzi dla  $n \geq 2$  wynika, że zachodzi dla  $n - 1$ .

Oznaczmy

$$AM = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}{n-1} \quad \text{oraz} \quad GM = \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \dots a_{n-1}}.$$

Skoro nierówność zachodzi dla liczby  $n$  to mamy

$$AM = \frac{(n-1)AM + AM}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + AM}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_{n-1} \cdot AM}.$$

Podnosząc powyższą równość do  $n$  potęgi stronami otrzymujemy

$$\begin{aligned} (AM)^n &\geq a_1 a_2 \dots a_{n-1} AM, \\ (AM)^{n-1} &\geq a_1 a_2 \dots a_{n-1}, \\ AM &\geq \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} = GM, \end{aligned}$$

co należało wykazać.

Pozostaje zauważyć, że z części 3 i 4 wynika nierówność dla dowolnego  $n$ . Możemy bowiem rozpatrywać takie  $k$ , że  $2^k > n$  i zastosować  $2^k - n$  razy implikację z części czwartej. ■

## Przykład 1

Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich  $a$ ,  $b$  i  $c$ , dla których  $a + b + c = 1$  zachodzi nierówność

$$\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1} \leq \sqrt{15}.$$

## Rozwiązanie

Stosując nierówność między średnimi: arytmetyczną i kwadratową otrzymujemy

$$\sqrt{\frac{(\sqrt{2a+1})^2 + (\sqrt{2b+1})^2 + (\sqrt{2c+1})^2}{3}} \geq \frac{\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1}}{3}.$$

Lewa strona powyższej równości jest równa

$$\sqrt{\frac{(\sqrt{2a+1})^2 + (\sqrt{2b+1})^2 + (\sqrt{2c+1})^2}{3}} = \sqrt{\frac{2a+1 + 2b+1 + 2c+1}{3}} = \sqrt{\frac{5}{3}}.$$

Łącząc powyższe nierówności otrzymujemy

$$\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1} \leq \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot 3 = \sqrt{15}.$$

■

## Przykład 2

Wykazać, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych  $a, b, c$  i  $d$ , dla których zachodzi równość  $a + b + c + d = 4$  prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a}{a^3+4} + \frac{b}{b^3+4} + \frac{c}{c^3+4} + \frac{d}{d^3+4} \leq \frac{4}{5}.$$

## Rozwiązanie

Wykażemy, że dla dowolnej liczby  $x$  zachodzi nierówność

$$\frac{x}{x^3+4} \leq \frac{2x+3}{25}.$$

Istotnie mamy bowiem

$$\begin{aligned} 25x &\leq (2x+3)(x^3+4) = 2x^4 + 3x^3 + 8x + 12, \\ 17x &\leq 2x^4 + 3x^3 + 12, \\ x &= \sqrt[17]{(x^4)^2 \cdot (x^3)^3 \cdot 1^{12}} \leq \frac{2x^4 + 3x^3 + 12}{17}. \end{aligned}$$

Ostatnia zależność jest prawdziwa na mocy nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną.

Korzystając z powyższej nierówności otrzymujemy

$$\frac{a}{a^3+4} + \frac{b}{b^3+4} + \frac{c}{c^3+4} + \frac{d}{d^3+4} \leq \frac{2a+3}{25} + \frac{2b+3}{25} + \frac{2c+3}{25} + \frac{2d+3}{25} = \frac{4}{5}.$$

■

## Przykład 3

Dane są dodatnie liczby rzeczywiste  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ , że ich suma wynosi 1. Wyznaczyć największą możliwą wartość wyrażenia

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2.$$



## Rozwiązanie

W powyższym zadaniu narzuca się skorzystanie z nierówności między średnimi. Jednak jeśli czytelnik/czytelniczka próbował je rozwiązać, to może zobaczyć, że takie próby kończą się niepowodzeniem.

Niezwykle pomocne w ocenieniu, czy metoda szacowania przez średnie pozwoli rozwiązać zadanie jest zobaczenie na przykład, w którym zachodzi równość lub osiągnięte jest ekstremum. W tym zadaniu narzucają się dwie kandydatury, które są warte sprawdzenia:

$$a_1 = 1, a_2 = \dots = a_n = 0 \quad \text{oraz} \quad a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = \frac{1}{n}.$$

Spróbujemy wykazać, że

$$1 \geq a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2.$$

We wszystkich nierównościach między średnimi równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie  $a_i$  są sobie równe. W innym przypadku nierówność jest ostra. Zaś w powyższej nierówności równość zachodzi wtedy, kiedy wszystkie liczby nie są równe. Wykonując szacowanie za pomocą średnich na tych liczbach otrzymamy, że dla  $a_1 = 1, a_2 = \dots = a_n = 0$  zachodzi ostra nierówność. A tak być nie może, bo wówczas zachodzi równość. Dlatego musimy spróbować innych metod.

Istotnie, wystarczy zauważyć, że zachodzi nierówność

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = 1.$$

■

Podobne rozumowanie mogło być pomocne przy rozwiązywaniu Przykładu 2. Wówczas równość zachodzi dla  $a = b = c = d = 1$ . Załóżmy, że wpadliśmy na pomysł użycia nierówności AM-GM w mianowniku. Wówczas

$$\frac{a}{a^3 + 4} + \frac{b}{b^3 + 4} + \frac{c}{c^3 + 4} + \frac{d}{d^3 + 4} \leq \frac{a}{4a^{\frac{3}{2}}} + \frac{b}{4b^{\frac{3}{2}}} + \frac{c}{4c^{\frac{3}{2}}} + \frac{d}{4d^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{8\sqrt{a}} + \frac{1}{8\sqrt{b}} + \frac{1}{8\sqrt{c}} + \frac{1}{8\sqrt{d}},$$

co dla  $a = b = c = d = 1$  jest większe od  $\frac{5}{4}$ . Więc to szacowanie nie doprowadzi nas do rozwiązania zadania, gdyż nierówność

$$\frac{1}{8\sqrt{a}} + \frac{1}{8\sqrt{b}} + \frac{1}{8\sqrt{c}} + \frac{1}{8\sqrt{d}} \leq \frac{5}{4}$$

nie jest prawdziwa.

### Zadanie 1

Wykazać, że dla dowolnej liczby rzeczywistej  $x$  zachodzi

$$x^2 + \frac{1}{x} \geq \frac{3}{2} \sqrt[3]{2}.$$

### Zadanie 2

Dane są takie dodatnie liczby rzeczywiste  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ , że  $a_1 a_2 a_3 \dots a_n = 1$ . Wykazać, że

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdot \dots \cdot (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) \geq 2^n.$$

### Zadanie 3

Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych zachodzi nierówność

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

### Zadanie 4

Dane są takie dodatnie liczby rzeczywiste  $a, b, c$ , że  $abc = 1$ . Wykazać, że

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c.$$

### Zadanie 5

Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $a, b, c$  zachodzi nierówność

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} \geq \frac{3a+2b-c}{4}.$$

# Konstrukcje

W tym rozdziale będziemy obracać się wokół zadań, które polegają na konstruowaniu pewnych obiektów, spełniających pewne warunki. Najpierw przyjrzymy się zadaniu, w którym mamy wyznaczyć pewne maksimum. W takiej sytuacji musimy zarówno pokazać przykład, że maksimum jest osiągalne, jak i udowodnić, że nie da się osiągnąć większej wartości.

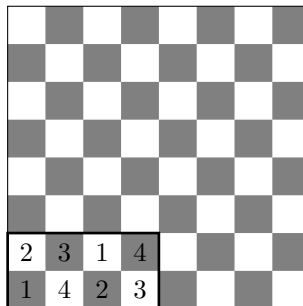
## Przykład 1

Wyznaczyć maksymalną liczbę skoczków, które można umieścić na szachownicy  $8 \times 8$ , aby żadne dwa z nich się nie biły.

### Rozwiązanie

Wykażemy, że szukaną liczbą jest 32.

Najpierw pokażemy, że istotnie można postawić tyle skoczków na szachownicy. Zauważmy, że rozpatrując standardowe kolorowanie szachownicy i stawiając skoczki na każdym z 32 pól jednego koloru, żadne dwa z nich nie będą się biły.



Podzielmy szachownice na 8 prostokątów o wymiarach  $4 \times 2$  – takich jak na rysunku. Wykażemy, że wewnątrz każdego prostokąta mogą stanąć co najwyżej cztery skoczki. Istotnie – numerując pola tak jak na rysunku, nie jest możliwe aby na obu polach z tym samym numerem stały skoczki. Więc na całej szachownicy mogą stanąć co najwyżej  $8 \cdot 4 = 32$  skoczki. ■

W powyższym zadaniu konieczne było zarówno udowodnienie, że nie da się postawić więcej niż 32 skoczków, jak i wykazanie, że istnieje szukane ustawienie 32 skoczków. W tego typu problemach warto uważnie poszukać maksymalnego ustawienia, gdyż w przypadku jego przeoczenia, nasze próby dowodzenia, że znaleziona konfiguracja jest maksymalna będą bezsensowne.

## Przykład 2

Niech  $S(k)$  oznacza sumę cyfr liczby  $k$  w zapisie dziesiętnym. Dodatnią liczbę całkowitą  $n$  nazwiemy *piękną* jeśli zachodzi równość  $S(n) = S(n^2)$ . Wyznaczyć wszystkie wartości jakie przyjmuje  $S(n)$  dla liczb pięknych  $n$ .

## Rozwiązanie

W rozwiązaniu poniższego zadania potrzebna będzie obserwacja, że suma cyfr liczby  $k$  daje taką samą resztę z dzielenia przez 9 jak liczba  $k$ . Mamy

$$n^2 \equiv S(n^2) = S(n) \equiv n \pmod{9}.$$

Zauważam, że jest to możliwe jedynie dla  $n \equiv 0, 1 \pmod{9}$  – wystarczy sprawdzić wszystkie możliwe  $n$ . Stąd  $S(n) \equiv 0, 1 \pmod{9}$ .

Po otrzymaniu powyższej obserwacji można postawić hipotezę, że dla wszystkich liczb dodatnich postaci  $k \equiv 0, 1 \pmod{9}$  istnieje liczba piękna  $n$ , że  $S(n) = k$ . Aby zweryfikować, czy hipoteza ma sens warto sprawdzić, czy jest ona prawdziwa dla kilku małych wartości  $k$ . Łatwo sprawdzić, że liczby 9 i 10 są piękne oraz  $S(9) = 9$  i  $S(10) = 1$ . Poszukując większych wartości  $S(n)$  dla liczb pięknych otrzymujemy  $S(99) = 18$  i  $S(199) = 19$ . Łatwo też sprawdzić, że 99 i 199 są piękne. Te obserwacje, poczynione na kilku najmniejszych wartościach, naprowadzają nas na dalszą część rozwiązania.

Rozpatrzmy liczbę  $a = 10^{k+1} - 1$ . Wówczas

$$S(a) = S(\underbrace{99\dots9}_{k+1}) = 9(k+1) = S(\underbrace{99\dots9}_k \underbrace{800\dots0}_k 1) = S(10^{2k+2} - 2 \cdot 10^{k+1} + 1) = S(a^2).$$

Następnie weźmy liczbę  $b = 2 \cdot 10^{k+1} - 1$ . Wówczas

$$S(b) = S(1 \underbrace{99\dots9}_k) = 9k + 1 = S(3 \underbrace{99\dots9}_{k-1} \underbrace{600\dots0}_{k-1} 1) = S(4 \cdot 10^{2k+2} - 4 \cdot 10^{k+1} + 1) = S(b^2).$$

Zauważamy, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej  $k$  liczby  $a, b$  są piękne oraz  $S(a) = 9(k+1)$  i  $S(b) = 9k + 1$ .

Łącząc powyższe wnioski otrzymujemy, że szukanymi liczbami są wszystkie dodatnie liczby całkowite dające resztę 0 lub 1 z dzielenia przez 9. ■

Konstruowanie małych przykładów często, choć nie zawsze, pomaga postawić hipotezy co do przypadków ogólnych. Dlatego, gdy nie umiemy rozwiązać zadania, warto spróbować zobaczyć na szczególne, niewielkie przypadki.

## Przykład 3

Wykazać, że istnieje nieskończony ciąg liczb naturalnych taki, że żaden wyraz tego ciągu i żadna suma dowolnej liczby wyrazów tego ciągu nie jest potęgą liczby naturalnej o wykładniku całkowitym większym od 1.

## Rozwiązanie

Kluczową obserwacją, która pozwoli nam rozwiązać to zadanie jest fakt, że jeśli pewna liczba naturalna  $n$  jest podzielna przez pewną liczbę pierwszą  $p$ , ale nie jest podzielna przez  $p^2$ , to nie może być ona potęgą liczby całkowitej. Istotnie, bowiem jeśli  $n = a^k$  dla pewnych liczb naturalnych  $a, k \geq 2$  to jeśli  $p \mid a^k$ , to  $p \mid a$ , czyli  $p^k \mid a^k = n$ .

Niech  $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$  będzie ciągiem kolejnych liczb pierwszych. Rozpatrzmy ciąg  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  dany jako

$$a_i = (p_1 p_2 \dots p_i)^2 \cdot p_{i+1}.$$

Wówczas jeśli  $i_1 < i_2 < \dots < i_s$ , to każda z liczb  $a_{i_2}, a_{i_3}, \dots, a_{i_s}$  jest podzielna przez  $p_{i_1+1}^2$ . Zaś liczba  $a_{i_1}$  jest podzielna przez  $p_{i_1+1}$ , ale nie jest podzielna przez  $p_{i_1+1}^2$ . Stąd suma

$$a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i_3} + \dots + a_{i_s}$$

również ma tę własność, więc nie może być potęgą liczby całkowitej. ■

#### Zadanie 1

Wykazać, że można pokolorować 40 pól na nieskończonej szachownicy, tak, aby nie istniał prostokąt utworzony z pól tej szachownicy zawierający dokładnie 20 pokolorowanych pól.

#### Zadanie 2

Udowodnij, że punkty płaszczyzny można tak pokolorować dziewięcioma kolorami, aby żadne dwa punkty odległe o 1 nie były tego samego koloru.

#### Zadanie 3

Wykazać, że każdy trójkąt można podzielić na 3000 czworokątów wypukłych, tak, aby każdy z nich dało się wpisać w okrąg oraz opisać na okręgu.

#### Zadanie 4

Wykazać, że można pokolorować każdą dodatnią liczbę całkowitą na jeden z 1000 kolorów, tak aby

- każdy z kolorów był użyty nieskończenie wiele razy;
- dla dowolnych takich liczb całkowitych  $a, b, c$ , że  $ab = c$ , pewne dwie spośród nich są jednakowego koloru.

#### Zadanie 5

Łódka może zabrać w rejs po jeziorze dokładnie 7 osób. Udowodnij, że można tak zaplanować rejsy 49-osobowej wycieczki, aby każdych dwóch uczestników płynęło ze sobą dokładnie raz.

#### Zadanie 6

Jaś zapisał pewną skończoną liczbę liczb rzeczywistych na tablicy. Następnie zaczął wykonywać ruchy. W każdym ruchu wybiera dwie równe liczby  $a, a$ , zmazuje je i zapisuje liczby  $a + 100, a + 2020$ . Rozstrzygnąć, czy Jaś może zapisać na początku takie liczby, że będzie mógł wykonywać ruchy w nieskończoność.

# Wielomiany

## Definicje

Wyrażenie algebraiczne postaci

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

dla pewnych liczb rzeczywistych  $a_n \neq 0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ .

- Liczbę  $n$  nazywamy stopniem tego wielomianu i oznaczamy jako  $\deg W = n$ .
- *Współczynnikami* nazywamy liczby  $a_0, a_1, \dots, a_n$ .
- Współczynnik przy najwyższej potędze  $x$  – w tym przypadku  $a_n$  nazywamy *współczynnikiem wiodącym*.
- Gdy współczynnik wiodący jest równy 1 to powiemy, że wielomian jest *unormowany*.
- Liczbę  $\alpha$ , dla której zachodzi równość  $W(\alpha) = 0$  nazywamy *pierwiastkiem* wielomianu  $W$ .

Na początku zachęcamy do samodzielnego zmierzenia się z poniższym zadaniem. Jego rozwiązanie wyrobi intuicję co do działania dzielenia wielomianów.

## Przykład 1

Znaleźć wszystkie nieujemne liczby całkowite  $n$ , dla których liczba  $n^5 + 3n^2 + 1$  jest podzielna przez liczbę  $n^2 + 2$ .

## Rozwiązanie

Zauważmy, że zachodzą równości

$$\begin{aligned} \frac{n^5 + 3n^2 + 1}{n^2 + 1} &= \frac{n^3(n^2 + 1) - n^3 + 3n^2 + 1}{n^2 + 1} = n^3 + \frac{-n^3 + 3n^2 + 1}{n^2 + 1} = \\ &= n^3 + \frac{-n(n^2 + 1) + 3n^2 + n + 1}{n^2 + 1} = n^3 - n + \frac{3n^2 + n + 1}{n^2 + 1} = \\ &= n^3 - n + \frac{3(n^2 + 1) + n - 2}{n^2 + 1} = n^3 - n + 3 + \frac{n - 2}{n^2 + 1}, \end{aligned}$$

z czego wynika, że liczba  $\frac{n^5 + 3n^2 + 1}{n^2 + 1}$  będzie całkowita wtedy i tylko wtedy, gdy liczba  $\frac{n-2}{n^2+1}$  będzie całkowita. Gdy  $n = 0$  to rozpatrywana liczba jest całkowita. Łatwo wykazać, że dla  $n \neq 0$  zachodzi nierówność  $n^2 + 1 > |n - 2|$ . Stąd moduł liczby  $\frac{n-2}{n^2+1}$  jest mniejszy od 1. Jeśli więc ma on być całkowity, to musi być on równy zeru. Jest to prawdą jedynie dla  $n = 2$ .

Otrzymaliśmy więc, że szukana podzielność zachodzi jedynie dla  $n = 0$  i  $n = 2$ . ■

To co w istocie dokonało się w powyższym rozwiązaniu to jest podzielenie wielomianu  $n^5 + 3n^2 + 1$  przez wielomian  $n^2 + 1$ . Ideą było wyciąganie takich liczb przed ułamek, aby stopień wielomianu w mianowniku spadał. Istotnie – najpierw w mianowniku był

wielomian  $n^5 + 3n^2 + 1$ , następnie  $3n^2 + n + 1$ , aż w końcu  $n - 2$ . Zauważmy, że nie jesteśmy w stanie otrzymać w podobny sposób wielomianu o niższym stopniu.

Otrzymaliśmy zależność

$$n^5 + 3n^2 + 1 = (n^3 - n + 3)(n^2 + 1) + (n - 2).$$

Wielomian  $n - 2$  nazwiemy resztą z dzielenia wielomianu  $n^5 + 3n^2 + 1$  przez  $n^2 + 1$ . Teraz sformalizujemy nasze intuicje.

### Twierdzenie 1

Dane są wielomiany o współczynnikach rzeczywistych  $W(x)$  i  $P(x)$ . Wówczas istnieją takie wielomiany o współczynnikach rzeczywistych  $G(x)$  i  $R(x)$ , że

$$W(x) = G(x) \cdot P(x) + R(x),$$

oraz  $\deg R < \deg P$ .

### Dowód

Rozpatrzmy takie przedstawienie  $W(x)$  w postaci

$$W(x) = G(x) \cdot P(x) + R(x),$$

gdzie  $\deg R$  jest najmniejsze możliwe. Jeżeli  $\deg R < \deg P$  to zachodzi teza. Rozpatrzmy przypadek, gdy  $\deg R \geq \deg P$ . Niech  $\deg P = n$  oraz  $\deg R = n + k$ . Przyjmijmy

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

$$R(x) = b_{n+k} x^{n+k} + b_{n+k-1} x^{n+k-1} + \dots + b_1 x + b_0.$$

Zauważmy, że wielomiany  $R(x)$  oraz  $\frac{b_{n+k}}{a_n} x^k P(x)$  mają równe stopień i współczynnik wiodący. Odejmując je od siebie skróci się on, stąd wielomian  $R(x) - \frac{b_{n+k}}{a_n} x^k P(x)$  ma mniejszy stopień niż wielomian  $R(x)$ . Możemy zapisać

$$W(x) = \left( G(x) + \frac{b_{n+k}}{a_n} x^k \right) \cdot P(x) + \left( R(x) - \frac{b_{n+k}}{a_n} x^k \right),$$

co przeczy temu, że stopień  $R$  był minimalny. ■

Wielomian  $R$  nazywamy resztą z dzielenia wielomianu  $W$  przez  $P$ .

Powiemy, że wielomian  $W$  jest *podzielny* przez wielomian  $P$ , jeśli reszta z rozpatrywanego dzielenia wynosi 0. Równoważnie istnieje wielomian  $G$ , że

$$W(x) = P(x) \cdot G(x).$$

### Twierdzenie 2 (Bézout)

Dany jest wielomian  $W(x)$  oraz taka liczba rzeczywista  $\alpha$ , dla której zachodzi równość  $W(\alpha) = 0$ . Wówczas  $W(x)$  jest podzielny przez  $x - \alpha$ .

## Dowód

Rozpatrzmy dzielenie wielomianu  $W(x)$  przez wielomian  $x - a$ . Możemy zapisać

$$W(x) = G(x) \cdot (x - \alpha) + R(x).$$

Wiemy, że  $\deg R < 1$ , czyli  $R$  jest stałą. Przyjmijmy  $R(x) = c$ . Mamy wówczas

$$W(x) = G(x) \cdot (x - \alpha) + c.$$

Podstawmy  $x = \alpha$

$$0 = W(\alpha) = G(\alpha) \cdot (\alpha - \alpha) + c = c.$$

Stąd  $c = 0$ , czyli możemy zapisać  $W$  w postaci

$$W(x) = (x - \alpha) \cdot G(x),$$

co było do wykazania. ■

Niech  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  będą parami różnymi pierwiastkami pewnego wielomianu  $W(x)$ . Wówczas

$$W(x) = (x - \alpha_1)W_1(x)$$

dla pewnego wielomianu  $W_1(x)$ . Zauważmy, że  $\alpha_2, \dots, \alpha_n$  będą pierwiastkami  $W_1(x)$ , gdyż

$$0 = W(\alpha_i) = (\alpha_i - \alpha_1)W_1(\alpha_i),$$

a pierwiastki są parami różne. Możemy więc kontynuować wyciąganie pierwiastków i otrzymać w ten sposób poniższe twierdzenie.

## Twierdzenie 3

Jeśli wielomian  $W(x)$  ma  $n$  pierwiastków rzeczywistych  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  to wówczas można go zapisać w postaci

$$W(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n)Q(x),$$

dla pewnego wielomianu  $Q(x)$ , takiego, że  $\deg Q + n = \deg W$ . W szczególności jeśli  $W$  jest stopnia  $n$  to  $Q(x)$  jest stałą.

## Wniosek

Wielomian stopnia  $n$  o współczynnikach rzeczywistych, który nie jest stale równy zero, może mieć co najwyżej  $n$  różnych pierwiastków rzeczywistych.

## Twierdzenie 4

Dane są wielomiany o współczynnikach rzeczywistych  $P(x)$  i  $Q(x)$  stopnia co najwyżej  $n$ . Istnieje  $n + 1$  liczb rzeczywistych  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ , takich, że dla każdego  $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$  zachodzi równość

$$P(\alpha_i) = Q(\alpha_i).$$

Wówczas  $P(x) = Q(x)$  dla dowolnej liczby rzeczywistej  $x$ .

## Dowód

Rozpatrzmy wielomian

$$W(x) = P(x) - Q(x).$$



Liczby  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$  są jego pierwiastkami. Ma więc on co najmniej  $n+1$  pierwiastków i stopień  $n$ . Z wyżej przedstawionego wniosku wynika więc, że jest to wielomian zerowy. Stąd  $P(x) - Q(x) = 0$  dla każdego  $x$ , a to trzeba było wykazać. ■

### Krotność pierwiastków

Jeśli wielomian  $W$  da się zapisać w formie

$$W(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n)^{k_n},$$

gdzie  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  są parami różne to powiemy, że pierwiastek  $\alpha_i$  ma *krotność* równą  $k_i$ .

Mówienie o zbiorze pierwiastków nie ma większego sensu, gdyż struktura zbioru nie przewiduje czegoś takiego jak element występujący kilkukrotnie. Stąd zdefiniujemy *multizbiór* analogicznie do zbioru, z tym, że jeden element może należeć do niego kilka razy. Będziemy mówić o multizbiorach pierwiastków.

### Równość wielomianów

Następujące warunki równości wielomianów są sobie równoważne, tj. gdy zachodzi jeden, to zachodzą wszystkie:

- wielomiany przyjmują równe wartości dla każdej liczby rzeczywistej,
- współczynniki obu wielomianów przy tych samych potęgach są równe,
- multizbiory pierwiastków rzeczywistych są sobie równe.

Wykazanie, że powyższe warunki są równoważne pozostawiamy czytelnikowi, jeśli ma ochotę. Po zapoznaniu się z powyższą teorią powinno być to dość łatwe. Przejdźmy teraz do pierwszego nietrywialnego zastosowania wielomianów.

### Przykład 2

Dla liczb rzeczywistych  $a, b$  zachodzi  $ab = cd$  i  $a + b = c + d$ . Wykazać, że  $\{a, b\} = \{c, d\}$ .

### Rozwiązanie

Rozpatrzmy wielomiany

$$P_1(x) = (x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab,$$

$$P_2(x) = (x - c)(x - d) = x^2 - (c + d)x + cd.$$

Zauważmy, że na mocy założeń mają one równe współczynniki. Stąd te wielomiany są sobie równe, toteż mają równe multizbiory pierwiastków. ■

Dla unormowanego wielomianu drugiego stopnia o pierwiastkach  $a$  i  $b$  współczynniki wyniosą kolejno 1,  $-(a + b)$  oraz  $ab$ . Tę obserwację można uogólnić do Wzorów Viete'a. Poniżej wyprowadzamy je dla wielomianów trzeciego stopnia. Dla większych stopni wyprowadzenie jest analogiczne.

## Wzory Viete'a dla wielomianu stopnia trzeciego

Dany jest wielomian

$$W(x) = a_3(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Wówczas

$$\begin{aligned} -a_3(x_1 + x_2 + x_3) &= a_2, \\ a_3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) &= a_1, \\ -a_3x_1x_2x_3 &= a_0, \end{aligned}$$

lub równoważnie

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -\frac{a_2}{a_3}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= \frac{a_1}{a_3}, \\ x_1x_2x_3 &= -\frac{a_0}{a_3}. \end{aligned}$$

### Zadanie 1

Dany jest niezerowy wielomian  $W(x)$  o współczynnikach rzeczywistych, dla którego zachodzi równość

$$(x+1)W(x) = (x-2)W(x+1).$$

Wykazać, że każdy pierwiastek rzeczywisty  $W(x)$  jest liczbą całkowitą.

### Zadanie 2

Wykazać, że jeśli liczby rzeczywiste  $a, b, c$  spełniają

$$\begin{cases} abc = 1 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a + b + c. \end{cases}$$

to co najmniej jedna liczba spośród  $a, b, c$  jest równa 1.

### Zadanie 3

Niech  $n \geq 1$  będzie pewną liczbą całkowitą. Wykazać, że wielomian  $x^{1001} + x + 1$  jest podzielny przez  $x^2 + x + 1$ .

### Zadanie 4

Dany jest pewien wielomian  $P(x)$ . Wykazać, że istnieje wielomian  $Q(x)$ , że zachodzi równość

$$Q(x+1) - Q(x) = P(x).$$

#### Zadanie 5

Dany jest wielomian  $W(x)$  o współczynnikach całkowitych. Wykazać, że jeśli przyjmuje on dla czterech różnych liczb całkowitych wartość 5, to dla żadnego całkowitego argumentu nie przyjmuje wartości 8

#### Zadanie 6

Paweł i Tomek grają w grę. Paweł ma pewien wielomian  $W(x)$  o współczynnikach dodatnich całkowitych stopnia  $n$ . Tomek go nie zna, a chce poznać. Może w tym celu wykonywać ruchy. W każdym ruchu może wybrać pewną dodatnią liczbę całkowitą  $k$ , być może biorąc pod uwagę co się stało we wcześniejszych ruchach, a następnie Tomek podaje mu wartość  $W(k)$ . Wyznaczyć, w zależności od  $n$ , najmniejszą liczbę ruchów, w której Tomek, niezależnie od wybranego wielomianu, jest w stanie poznać wszystkie jego współczynniki.

#### Zadanie 7

Rozstrzygnąć, czy istnieje wielomian 1000 stopnia, którego współczynniki należą do zbioru  $\{-1, 1\}$  oraz ma on 1000 pierwiastków rzeczywistych.

# Grafy

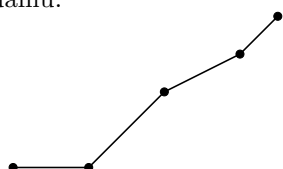
W rozdziale o indukcji matematycznej wprowadziliśmy pojęcie grafu. Przypominając, jest to zbiór wierzchołków, z których niektóre są połączone krawędzią. Najpierw zdefiniujemy garść pojęć, których będziemy używać.

## Definicje

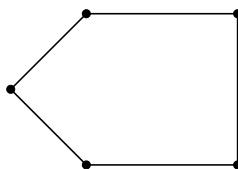
- *Ścieżka* to ciąg, niekoniecznie parami różnych, wierzchołków  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_t$ , że każde dwa kolejne są połączone krawędzią.
- *Cykl* to ciąg, niekoniecznie parami różnych, wierzchołków  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_t$ , że zarówno każde dwa kolejne wierzchołki, jak i  $v_1$  oraz  $v_t$  są połączone krawędzią.
- *Stopniem* wierzchołka nazywamy liczbę krawędzi z niego wychodzących.
- Graf nazywamy *spójnym*, jeśli dla dowolnych dwóch wierzchołków istnieje ścieżka, która zaczyna się w pierwszym i kończy w drugim. Kolokwialnie mówiąc, graf jest jedną całością, a nie składa się z kilku rozłącznych części.
- Zbiór  $n$  wierzchołków, spośród których każde dwa wierzchołki są połączone krawędzią nazywamy *kliką* i oznaczamy go jako  $K_n$ .
- Graf składający się z dwóch grup zawierających kolejno  $a$  i  $b$  wierzchołków, tak, że dwa wierzchołki są ze sobą połączone wtedy i tylko wtedy, gdy są w innych grupach, nazywamy *grafem dwudzielnym* i oznaczamy jako  $K_{a,b}$ .

## Uwaga

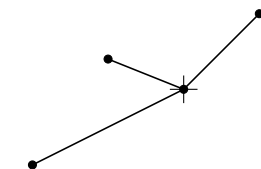
Często można spotkać się z innymi definicjami cyklu i ścieżki – niekiedy przyjmuje się, że zawierają każdy z wierzchołków dokładnie raz. Niemniej jednak będzie to doprecyzowane w zadaniu.



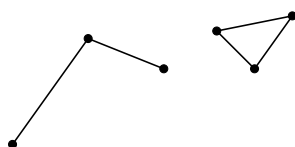
ścieżka



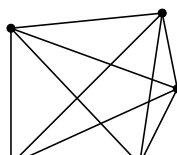
cykl



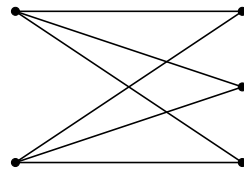
wierzchołek o stopniu 3



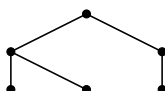
graf niespójny



klika  $K_5$



graf dwudzielny  $K_{2,3}$



drzewo

Grafy, które są spójne i nie zawierają żadnego cyklu nazywamy *drzewami*. Mają one kilka równoważnych definicji, o czym mówi poniższe twierdzenie.

### Twierdzenie 1

Dany jest graf spójny  $G$ , który ma  $n$  wierzchołków. Następujące warunki są sobie równoważne

- $G$  nie zawiera żadnego cyklu,
- w grafie jest dokładnie  $n - 1$  krawędzi,
- pomiędzy dowolnymi dwoma wierzchołkami istnieje dokładnie jedna ścieżka, która nie przechodzi przez żaden wierzchołek więcej niż raz.

### Dowód

Zauważmy, że dla  $n = 1$  teza jest oczywista. Załóżmy, że  $n \geq 1$ . Najpierw wykazemy, że każdego z tych warunków wynika istnienie wierzchołka o stopniu 1.

Założmy nie wprost, że każdy wierzchołek ma stopień co najmniej 2. Wówczas można łatwo obliczyć, że krawędzi jest co najmniej  $\frac{2 \cdot n}{2} = n$ , czyli pierwszy warunek nie może zajść.

Wybermy pewien wierzchołek i rozpocznijmy w nim spacer po grafie. Z wierzchołka, w którym będziemy, wybierzemy krawędź, którą jeszcze nie szliśmy. Algorytm zakończymy, gdy trafimy w ten sposób do wierzchołka, w którym jeszcze nie byliśmy. Skoro stopień każdego grafu wynosi 2, to nigdy nie utkniemy w żadnym z wierzchołków. Jeśli tak się stanie, to znaczy, że weszliśmy do tego wierzchołka co najmniej raz, a wtedy kończymy spacer. W taki sposób otrzymujemy cykl. Łatwo zauważyć, że z istnienia cyklu wynika istnienie dwóch ścieżek między dowolnymi jego dwoma wierzchołkami.

Rozpatrzmy więc wierzchołek o stopniu 1. Usuając go wraz z krawędzią otrzymam graf o  $n - 1$  wierzchołkach. W ten sposób nie zmienia się prawdziwość żadnego z warunków – wierzchołek o stopniu 1 nie może być częścią ani cyklu, ani dwóch ścieżek. Relacja liczby krawędzi do liczby cykli zostanie zachowana. Możemy więc skorzystać z zasady indukcji matematycznej i otrzymujemy tezę.

### Przykład 1

Dany jest prostokąt  $m \times n$ . Pokolorowano w nim  $m + n$  pól. Wykazać, że da się wybrać pewne z pokolorowanych pól, tak, aby w każdej kolumnie i w każdym wierszu liczba wybranych pól była parzysta.

### Rozwiązanie

Rozpatrzmy graf, w którym wierzchołkami będą wiersze i kolumny. Jeśli pole zostało pokolorowane, to połączymy przyporządkowane mu wiersz i kolumnę. Otrzymany graf ma  $m + n$  wierzchołków i  $m + n$  krawędzi, czyli musi zawierać cykl. Wybierając przyporządkowane jego krawędziom pola otrzymujemy zbiór spełniający warunki zadania.

Ścieżkę, która przechodzi każdą z krawędzi dokładnie raz nazywamy *ścieżką Eulera* na cześć szwajcarskiego matematyka Leonharda Eulera. Okazuje się, że stwierdzenie, czy w danym grafie istnieje ścieżka Eulera jest dość łatwe dzięki poniższemu twierdzeniu.

### Twierdzenie 2

Dany jest graf spójny o  $n \geq 2$  wierzchołkach. Wówczas cykl Eulera istnieje, wtedy i tylko wtedy, gdy stopień każdego z wierzchołków jest liczbą parzystą.

## Dowód

Najpierw wykazemy, że cykl może istnieć tylko w takim wypadku. Przechodząc tą ścieżką, do każdego wierzchołka wejdziemy tyle samo razy, ile z niego wyjdziemy. Stąd więc każdy wierzchołek ma parzysty stopień, gdyż krawędzi „wejściowych” i „wyjściowych” jest tyle samo.

Dowód, że gdy każdy ze stopni jest parzysty, to takowy cykl musi istnieć, jest nieco trudniejszy. Będziemy rozumować indukcyjnie po sumie liczby wierzchołków i krawędzi.

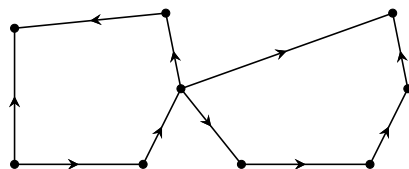
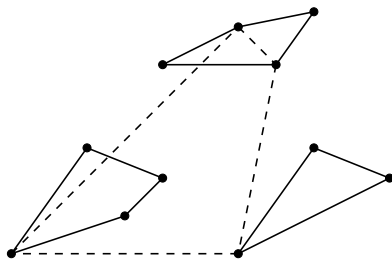
Zauważmy, że skoro graf jest spójny, to stopień żadnego z wierzchołków nie wynosi 0 – jest to co najmniej 2. Rozumując podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 1 wykazujemy, że w rozpatrywanym grafie istnieje cykl – nazwijmy go  $\mathcal{C}$ .

Usuńmy ten cykl z grafu. Nie musi pozostać spójny – podzieli się on na pewne spójne składowe. Niemniej jednak każda ze składowych zawiera pewien wierzchołek  $\mathcal{C}$ . Na mocy założenia indukcyjnego w każdej z nich istnieje cykl Eulera.

Możemy połączyć te cykle w jeden duży cykl. Wykażemy, że dwa rozłączne krawędziowo cykle o wspólnym wierzchołku możemy połączyć w jeden większy cykl. Korzystając z tego faktu posklejamy cykle po kolei ze sobą.

Załóżmy, że wspólnym wierzchołkiem cykli  $\mathcal{A}$  i  $\mathcal{B}$  jest pewien wierzchołek  $c$ . Wówczas startując z wierzchołka  $c$ , najpierw przechodzimy cykl  $\mathcal{A}$ . Wrócimy wtedy do wierzchołka  $c$ . Wówczas przejdziemy cykl  $\mathcal{B}$ . W taki sposób otrzymamy jeden cykl.

Poniżej przedstawiono rysunki poglądowe. Aby były czytelne, cykle przechodzą przez każdy wierzchołek dokładnie raz. Niemniej jednak w dowodzie takiego założenia nie poczyniliśmy.



### Zadanie 1

W pewnym grafie każdy wierzchołek ma stopień co najmniej 100. Wykazać, że w tym grafie istnieje ścieżka o długości co najmniej 101.

### Zadanie 2

W pewnym kraju jest  $n$  miast, przy czym każde dwa są połączone drogą albo torami kolejowymi. Pewien turysta planuje wyruszyć z pewnego miasta, odwiedzić każde miasto dokładnie raz, a następnie powrócić do wyjściowego miasta. Wykazać, że może tak wybrać wyjściowe miasto i tak zaplanować swoją trasę, aby zmienić środek transportu co najwyżej raz.

### Zadanie 3

W pewnym turnieju bierze udział 40 drużyn. Pierwszego dnia każda z drużyn rozegrała jeden mecz. Drugiego dnia również. Wykazać, że istnieje pewne 20 drużyn, takich, że każde dwie spośród nich jeszcze nie grały ze sobą meczu.

### Zadanie 4

Dany jest graf spójny zawierający parzystą liczbę wierzchołków. Wykazać, że możemy pokolorować niektóre z jego krawędzi, aby z każdego wierzchołka wychodziła nieparzysta liczba pokolorowanych krawędzi.

### Zadanie 5

W pewnym grafie o  $n$  wierzchołkach ich stopnie wynoszą odpowiednio  $d_1, d_2, \dots, d_n$ . Udowodnić, że istnieje taki podzbiór co najmniej  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+d_i}$  jego wierzchołków, że żadne dwa z nich nie są połączone krawędzią.

### Zadanie 6

Hydra składa się z pewnej liczby głów, z której niektóre są połączone szyjami. Herkules może odciąć wszystkie szyje wychodzące z pewnej głowy, jednak wówczas z tamtej głowy wyrastają szyje, którą łączą ją z głowami, z którymi nie była ona wcześniej połączona. Hydra jest pokonana, gdy rozpada się na dwie rozłączne części. Wyznaczyć najmniejsze  $N$ , że Herkules jest w stanie pokonać dowolną hydrę składającą się ze 100 szyi.

# Indukcja matematyczna 2

Indukcja, o której pisaliśmy wcześniej, korzystała z faktu, że jeśli teza zachodzi dla pewnej liczby  $k$ , to zachodzi również dla liczby  $k + 1$ . W następującym przykładzie pokażemy nieco ogólniejszą metodę, zwaną indukcją zupełną.

## Przykład 1

Niech  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$ ,  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$  dla  $n \geq 1$  będą kolejnymi liczbami Fibonacciego. Wykazać, że każda dodatnia liczba całkowita może być przedstawiona w postaci sumy parami różnych liczb Fibonacciego.

## Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że liczba 0 może być przedstawiona we wspomnianej postaci. Załóżmy, że dla pewnej liczby  $k$ , każdą z liczb 1, 2, ...,  $k$  da się przedstawić w postaci sumy parami różnych liczb Fibonacciego. Wykażemy, że wówczas liczbę  $k + 1$  również.

Niech  $F_i$  będzie największą liczbą Fibonacciego mniejszą lub równą  $k + 1$ , równoważnie

$$F_i \leq k + 1 < F_{i+1}.$$

Wówczas

$$k + 1 - F_i < F_{i+1} - F_i = F_{i-1} \leq F_i.$$

Korzystając z założenia liczbę  $k + 1 - F_i \leq k$  da się przedstawić w postaci sumy parami różnych liczb Fibonacciego. Żadna z tych liczb nie może być równa  $F_i$ , gdyż ich suma – liczba  $k + 1$  jest mniejsza niż  $F_i$ . Stąd dorzucając do danego przedstawienia liczby  $k + 1 - F_i$  liczbę  $F_i$  otrzymamy szukane przedstawienie liczby  $k + 1$ . ■

## Indukcja zupełna

W powyższym rozumowaniu skorzystaliśmy z założenia nie tylko dla liczby  $k$ , ale także dla wszystkich liczb od niej mniejszych. Tę metodę dowodzenia nazywamy *indukcją zupełną*.

Formalizując, analogicznie do standardowego dowodu indukcyjnego, dowód indukcyjny zupełny zdania logicznego  $Z(n)$  dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej  $n$  składa się z dwóch części:

1. Baza indukcji – sprawdzenie prawdziwości zdania  $Z(1)$ .
2. Krok indukcyjny – udowodnienie, że jeśli zachodzą zdania  $Z(1)$ ,  $Z(2)$ ,  $Z(3)$ , ...,  $Z(k)$  to zachodzi zdanie  $Z(k + 1)$ .

## Przykład 2

Wykaż, że

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n}}.$$



## Rozwiązanie

Jeśli czytelniczka/czytelnik próbował samodzielnie zmierzyć się z tym zadaniem, mógł przekonać się, że nie da się danej nierówności wykazać wprost, korzystając z indukcji matematycznej. Okazuje się jednak, że gdy nieco umocnimy tezę do postaci

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}},$$

to jest to już jak najbardziej możliwe.

Zauważmy, że

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 1 + 1}}.$$

Załóżmy, że dla pewnej liczby naturalnej  $n$  zachodzi

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

Jeśli wykazemy, że

$$\frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{3n+4}} \quad (1)$$

to mnożąc dwie powyższe równości otrzymamy tezę dla  $n+1$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+4}}.$$

Przekształcając nierówność (1) równoważnie otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} \frac{2n+1}{2n+2} &\leq \frac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{3n+4}}, \\ \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2} &\leq \frac{3n+1}{3n+4}, \\ (2n+1)^2(3n+4) &\leq (2n+2)^2(3n+1), \\ 12n^3 + 28n^2 + 19n + 4 &\leq 12n^3 + 28n^2 + 20n + 4, \\ 0 &\leq n. \end{aligned}$$

Ostatnia równość jest oczywiście prawdziwa, co kończy dowód indukcyjny. Pozostaje zauważyć, że

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}} < \frac{1}{\sqrt{3n}}.$$

■

Umocnienie tezy paradoksalnie może pomóc w rozwiązaniu zadania. Owszem, teza staje się mocniejsza, ale mocniejsze staje się też założenie indukcyjne. Warto zawsze zobaczyć, czy ten trik jest możliwy. W powyższym zadaniu w przypadku dla  $n=1$  mieliśmy do wykazania nierówność

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Pozostawia ona pewne pole do działania, pomyśl, że po prawej stronie liczbę  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  można zastąpić przez  $\frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$ . Postawienie hipotezy, że zachodzi mocniejsza nierówność, nasuwa się samo.

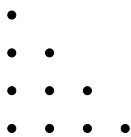
Indukcja matematyczna jest tak ogólną metodą, że zawsze trzeba spróbować z niej skorzystać. Niemniej jednak są zadania, w których nie jest to możliwe. Przesłankami, które na to mogą wskazywać są chociażby występowanie w zadaniu zbiorów, po których ciężko się indukuje, jak chociażby liczby pierwsze.

#### Zadanie 1

Udowodnić, że za pomocą monet trzyzłotowych i pięcizłotowych można zapłacić każdą kwotę większą niż 8 złotych, bez konieczności wydawania reszty.

#### Zadanie 2

Dana jest liczba naturalna  $n$ . Niech  $\mathcal{S}$  będzie zbiorem wszystkich punktów postaci  $(a, b)$ , gdzie  $a$  i  $b$  są liczbami ze zbioru  $\{0, 1, 2, \dots, n\}$  oraz  $a + b \leq n$ .



Przykład dla  $n = 3$ .

Wykazać, że jeśli pewien zbiór prostych zawiera każdy z tych punktów, to zawiera on co najmniej  $n + 1$  prostych.

#### Zadanie 3

Wykazać, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita, że jest ona podzielna przez  $2^{1000}$ , oraz ma w zapisie dziesiętnym jedynie cyfry 1 i 2.

#### Zadanie 4

Niech  $k$  będzie dodatnią liczbą całkowitą. Na przyjęciu spotkało się  $n \geq 2$  gości, spośród których niektórzy znają się. Okazało się, że dla każdego niepustego podzbioru gości  $A$  istnieje osoba, która zna co najwyżej  $k$  osób z  $A$ . Podzbiór gości, spośród których każde dwie się znają, nazywamy *kilką*. Wykazać, że istnieje co najwyżej  $2^k \cdot n$  klik.

#### Zadanie 5

Znajdź wszystkie funkcje  $f$  z dodatnich liczb całkowitych w dodatnie liczby całkowite, które dla każdej liczby dodatniej całkowitej  $n$  spełniają nierówność

$$(n - 1)^2 < f(n)f(f(n)) < n^2 + n.$$

### Zadanie 6

Niech  $\mathcal{R}$  będzie rodziną zbiorów 1000-elementowych. Moc  $\mathcal{R}$  jest większa niż  $1000 \cdot 999^{1000}$ . Wykazać, że istnieje 1000-elementowa rodzina  $\mathcal{G}$ , będąca podrodziną  $\mathcal{R}$ , oraz taki zbiór  $X$ , że dla dowolnych zbiorów  $A, B \in \mathcal{R}$  zachodzi  $A \cap B = X$ .

# Podzielności

## Wykładniki p-adyczne

Niech  $p$  będzie liczbę pierwszą, a  $n$  pewną niezerową liczbą całkowitą. Wówczas przyjmujemy, że  $v_p(n)$  oznacza potęgę, w której występuje liczba  $p$  w rozkładzie liczby  $n$  na czynniki pierwsze. Na przykład liczba 360 może zostać zapisana jako

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1,$$

więc

$$v_2(360) = 3, \quad v_3(360) = 2, \quad v_5(360) = 1, \quad v_7(360) = 0.$$

Inaczej,  $v_p(n)$  jest taką nieujemną liczbą całkowitą, że

$$p^{v_p(n)} \mid n, \quad \text{ale} \quad p^{v_p(n)+1} \nmid n.$$

Innymi słowy jest to największy wykładnik liczby  $p$ , przez który jest podzielna liczba  $n$ .

Wartość  $v_p(n)$  nazywamy wykładnikiem  $p$ -adycznym liczby  $n$ . Ma ona bardzo wiele właściwości, które są niezwykle przydatne w badaniu podzielności liczb.

## Lemat 1

Niech  $a, b$  będą niezerowymi liczbami całkowitymi. Wówczas

$$v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b).$$

## Dowód

Zauważmy, że jeśli  $a = p^{v_p(a)} \cdot x$  oraz  $b = p^{v_p(b)} \cdot y$ , dla pewnych liczb całkowitych  $x, y$ , które nie są podzielne przez  $p$ , to mamy

$$ab = p^{v_p(a)} \cdot x \cdot p^{v_p(b)} \cdot y = p^{v_p(a)+v_p(b)} \cdot xy.$$

Liczby  $x$  oraz  $y$  nie dzielą się przez  $p$ , więc  $xy$  również. Z powyższej równości wynika teza. ■

## Lemat 2

Niech  $a, b$  będą niezerowymi liczbami całkowitymi. Wówczas

$$b \mid a \iff v_p(a) \geq v_p(b) \text{ dla każdej liczby pierwszej } p.$$

## Dowód

Załóżmy, że jeśli  $v_p(b) > v_p(a)$  dla pewnej liczby pierwszej  $p$ . Przyjmijmy  $a = p^{v_p(a)} \cdot x$  oraz  $b = p^{v_p(b)} \cdot y$ , dla pewnych liczb całkowitych  $x, y$ . Wówczas

$$\frac{a}{b} = \frac{p^{v_p(a)} \cdot x}{p^{v_p(b)} \cdot y} = \frac{x}{p^{v_p(b)-v_p(a)} \cdot y}.$$

Mianownik powyższego ułamka jest podzielny przez  $p$ , a licznik nie. Stąd też nie może być on liczbą całkowitą.

Jeśli zaś  $a = bk$  dla pewnej liczby całkowitej  $k$ , to wówczas dla dowolnej liczby pierwszej  $p$

$$v_p(a) = v_p(bk) = v_p(b) + v_p(k) \geq v_p(b).$$

■

### Lemat 3

Liczba  $n$  jest  $k$ -tą potęgą liczby całkowitej wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby pierwszej  $p$  liczba  $v_p(n)$  jest podzielna przez  $k$ .

### Dowód

Przyjmijmy  $n = p_1^{v_{p_1}(n)} \cdot p_2^{v_{p_2}(n)} \cdot \dots \cdot p_s^{v_{p_s}(n)}$ . Wówczas

$$n = p_1^{v_{p_1}(n)} \cdot p_2^{v_{p_2}(n)} \cdot \dots \cdot p_s^{v_{p_s}(n)} = \left( p_1^{\frac{v_{p_1}(n)}{k}} \cdot p_2^{\frac{v_{p_2}(n)}{k}} \cdot \dots \cdot p_s^{\frac{v_{p_s}(n)}{k}} \right)^k,$$

więc jeśli każdy z wykładników jest podzielny przez  $k$ , to liczba w nawiasie będzie liczbą całkowitą.

Dowodząc w drugą stronę, przyjmijmy  $n = a^k$  dla pewnej liczby całkowitej  $a$ . Dla dowolnej liczby pierwszej  $p$  mamy wtedy

$$v_p(n) = v_p(a^k) = v_p(a) + v_p(a^{k-1}) = 2v_p(a) + v_p(a^{k-2}) = \dots = k \cdot v_p(a),$$

co dowodzi postulowanej podzielności.

■

Z powyższego rozumowania warto zrozumieć i zapamiętać zależność

$$v_p(a^k) = k \cdot v_p(a).$$

Warto zwrócić uwagę na fakt, że Lemat 2 i Lemat 3 działają w dwie strony. Możemy ich użyć, aby uzyskać pewną własność  $v_p$  z założenia o podzielności lub byciu potęgą. Jednak także są przydatne, gdy mamy wykazać, że jakaś podzielność zachodzi lub jakaś liczba jest kwadratem, sześcianem, ... liczby całkowitej.

### Przykład 1

Niech  $a$ ,  $b$  będą nieparzystymi liczbami całkowitymi, dla których  $a^b b^a$  jest kwadratem liczby całkowitej. Wykazać, że liczba  $ab$  również jest kwadratem liczby całkowitej.

### Rozwiązanie

Rozpatrzmy dowolną liczbę pierwszą  $p$ . Wówczas na mocy Lematu 3 mamy

$$2 \mid v_p(a^b b^a) = v_p(a^b) + v_p(b^a) = av_p(b) + bv_p(a).$$

Skoro liczby  $a$  i  $b$  są nieparzyste, to

$$0 \equiv av_p(b) + bv_p(a) \equiv v_p(a) + v_p(b) \pmod{2},$$

czyli

$$v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b) \equiv 0 \pmod{2}.$$

Skoro  $v_p(ab)$  dla każdej liczby pierwszej  $p$  jest liczbą parzystą, to liczba  $ab$  jest kwadratem liczby całkowitej.

#### Lemat 4

Dane są niezerowe liczby całkowite  $a_1, a_2, \dots, a_k$ . Niech  $m$  będzie najmniejszą z liczb postaci  $v_p(a_i)$ . Wówczas, jeśli dokładnie jedna spośród  $a_1, a_2, \dots, a_n$  spełnia zależność  $m = v_p(a_i)$ , to

$$v_p(a_1 + a_2 + \dots + a_k) = m.$$

#### Dowód

Przyjmijmy  $a_i = p^{v_p(a_i)} \cdot b_i$ . Wówczas

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_n &= p^{v_p(a_1)} b_1 + p^{v_p(a_2)} a_2 + \dots + p^{v_p(a_n)} a_n = \\ &= p^{v_p(m)} \left( p^{v_p(a_1) - v_p(m)} b_1 + p^{v_p(a_2) - v_p(m)} a_2 + \dots + p^{v_p(a_n) - v_p(m)} a_n \right). \end{aligned}$$

Każda z liczb w nawiasie poza jedną jest podzielna przez  $p$ , toteż ich suma nie jest podzielna przez  $p$ , skąd wynika teza. ■

#### Przykład 2

Dane są takie niezerowe liczby całkowite, że liczba

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

jest całkowita. Wykazać, że iloczyn  $abc$  jest sześcianem liczby całkowitej.

#### Rozwiązanie

Niech  $p$  będzie dowolną liczbą pierwszą. Wówczas, skoro liczba

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{a^2c + b^2a + c^2b}{abc}$$

jest całkowita, to

$$v_p(a^2c + b^2a + c^2b) \geq v_p(abc).$$

Zauważmy, że

$$v_p(a^2c) = 2v_p(a) + v_p(c), \quad v_p(b^2a) = 2v_p(b) + v_p(a), \quad v_p(c^2b) = 2v_p(c) + v_p(b).$$

Lemat. Rozpatrzmy liczby

$$2v_p(a) + v_p(c), \quad 2v_p(b) + v_p(a), \quad 2v_p(c) + v_p(b).$$

Niech  $m$  to będzie najmniejsza z nich. Wówczas co najmniej dwie z nich są równe  $m$ .

Dowód.

Żałómy nie wprost, że dokładnie jedna z nich jest równa  $m$ , a dwie pozostałe są nie mniejsze niż  $m + 1$ . Wyrażenie

$$a^2c + b^2a + c^2b$$

jest sumą dwóch składników podzielnych przez  $p^{m+1}$  i jednego składnika podzielnego przez  $p^m$ . Toteż dzieli wykładnik p-adyczny tej sumy wynosi dokładnie  $m$ .

$$m = v_p(a^2c + b^2a + c^2b) \geq v_p(abc) = v_p(a) + v_p(b) + v_p(c),$$

$$3m \geq (v_p(a) + v_p(b)) + (v_p(b) + v_p(c)) + (v_p(a) + v_p(c)).$$

co przeczy temu, że  $m$  jest najmniejszą z tych trzech liczb, różną od pozostałych dwóch.

Przyjmijmy bez straty ogólności, że

$$v_p(a) + 2v_p(c) = v_p(b) + 2v_p(a),$$

wówczas

$$2v_p(c) = v_p(b) + v_p(a),$$

$$v_p(a) + v_p(b) + v_p(c) = 3v_p(c),$$

co dowodzi tego, że liczba

$$v_p(abc) = v_p(a) + v_p(b) + v_p(c) = 3v_p(c)$$

jest podzielna przez 3. Z Lematu 3 wynika więc teza. ■

### Przykład 3

Wykazać, że dla żadnej dodatniej liczby całkowitej  $n$  większej od 1 liczba

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

nie jest liczbą całkowitą.

### Rozwiązanie

Zauważmy, że

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{n! + \frac{n!}{2} + \frac{n!}{3} + \dots + \frac{n!}{n}}{n!}.$$

Niech  $k$  będzie największą liczbą całkowitą, że

$$2^{k+1} > n \geq 2^k.$$

Wówczas wśród liczb 1, 2, 3, ...,  $n$  jest dokładnie jedna podzielna przez  $2^k$  – mianowicie  $2^k$ . Stąd dla każdej liczby  $i$  spośród nich, która nie jest równa  $2^k$  zachodzi

$$v_2\left(\frac{n!}{i}\right) = v_2(n!) - v_2(i) > v_2(n!) - k.$$

Zaś mamy

$$v_2\left(\frac{n!}{2^k}\right) = v_2(n!) - v_2(2^k) = v_2(n!) - k.$$

Stąd w sumie  $n! + \frac{n!}{2} + \frac{n!}{3} + \dots + \frac{n!}{n}$  wszystkie liczby dzielą się przez  $2^{v_2(n!) - k + 1}$ , poza jedną, której  $v_2$  wynosi  $v_2(n!) - k$  stąd

$$v_2\left(n! + \frac{n!}{2} + \frac{n!}{3} + \dots + \frac{n!}{n}\right) = v_2(n!) - k < v_2(n!).$$

Czyli liczba

$$\frac{n! + \frac{n!}{2} + \frac{n!}{3} + \dots + \frac{n!}{n}}{n!}$$

na mocy Lematu 2 nie może być całkowita, co dowodzi tezy. ■

### Wzór Legendre’a

Jeśli  $n$  jest dodatnią liczbą całkowitą, a  $p$  jest liczbą pierwszą, to

$$v_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \dots$$

Mimo że powyższa suma ma nieskończenie wiele składników, będą one od pewnego momentu – a dokładniej, gdy  $p^k > n$  – równe zero. Powyższa tożsamość zwana jest *wzorem Legendre’a*.

Powyższa równość ma bardzo intuicyjne uzasadnienie. Rozpatrzmy liczby  $1, 2, n$ . Spośród nich dokładnie  $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$  jest podzielnych przez  $p$ , dokładnie  $\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor$  jest podzielnych przez  $p^2$  itd. Każda z liczb, dla których wykładnik potęgowy wynosi  $k$  zostanie policzona dokładnie  $k$  razy, gdyż dzieli się przez każdą z liczb  $1, p, \dots, p^k$ , ale nie przez żadną wyższą potęgę.

### Przykład 4

Udowodnić, że dla wszystkich liczb całkowitych  $n$  liczba

$$\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

jest całkowita.

### Rozwiązanie

Chcemy pokazać, że dla dowolnej liczby pierwszej  $p$  zachodzi nierówność

$$v_p \left( \binom{2n}{n} \right) \geq v_p(n+1).$$

Niech  $n+1 = p^\alpha m$ , gdzie  $p \nmid m$ . Ze wzoru Legendre’a mamy

$$v_p \left( \binom{2n}{n} \right) = v_p \left( \frac{2n!}{n! \cdot n!} \right) = v_p(2n!) - 2v_p(n!) = \sum_{i=1}^{\infty} \left( \left\lfloor \frac{2n}{p^i} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor \right).$$

Wystarczy więc pokazać, że

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left( \left\lfloor \frac{2(p^\alpha m - 1)}{p^i} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{p^\alpha m - 1}{p^i} \right\rfloor \right) \geq \alpha,$$

Dla  $i \leq \alpha$  mamy

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{2(p^\alpha m - 1)}{p^i} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{p^\alpha m - 1}{p^i} \right\rfloor &= 2p^{\alpha-1}m + \left\lfloor \frac{-2}{p^i} \right\rfloor - 2(p^{\alpha-1}m) - 2 \left\lfloor \frac{-1}{p^i} \right\rfloor = \\ &= \left\lfloor \frac{-2}{p^i} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{-1}{p^i} \right\rfloor = -1 + 2 = 1. \end{aligned}$$

Stąd pierwsze  $\alpha$  czynników jest równe 1. Wykazując, że kolejne są nieujemne, udowodnimy tezę. Jeśli  $n = p^i \cdot a + r$ ,  $r < p^i$ , to zachodzi nierówność

$$\left\lfloor \frac{2n}{p^i} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor = 2a + \left\lfloor \frac{2r}{p^i} \right\rfloor - 2a - 2 \left\lfloor \frac{r}{p^i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2r}{p^i} \right\rfloor \geq 0,$$

co kończy dowód.



### Zadanie 1

Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite  $n$ , które są podzielne przez liczbę  $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ .

### Zadanie 2

Dane są dodatnie liczby całkowite  $a, b, c$ , że liczba  $a^b$  dzieli  $b^c$  oraz  $a^c$  dzieli  $c^b$ . Wykazać, że  $a^2$  dzieli  $bc$ .

### Zadanie 3

Niech  $1 = d_0 < d_1 < d_2 < \dots < d_k = 4n$  będą kolejnymi dzielnikami liczby  $4n$ . Wykazać, że istnieje taka liczba  $i$ , dla której zachodzi równość  $d_{i+1} - d_i = 2$ .

### Zadanie 4

Znajdź wszystkie pary  $(a, b)$  liczb całkowitych dodatnich, dla których obie liczby

$$\frac{a^3b - 1}{a + 1} \quad \text{oraz} \quad \frac{b^3a - 1}{b - 1}$$

są całkowite

### Zadanie 5

Dane są parami różne dodatnie liczby całkowite  $a, b, c$  oraz liczba pierwsza  $p$ , że liczby

$$ab + 1, bc + 1, ca + 1$$

są podzielne przez  $p$ . Wykazać, że

$$\frac{a + b + c}{3} \geq p + 2.$$

### Zadanie 6

Niech  $a$  i  $k$  będą pewnymi dodatnimi liczbami całkowitymi o tej własności, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej  $n$  istnieje liczba całkowita  $b$ , że

$$n \mid a - b^k.$$

Wykazać, że  $a = c^k$  dla pewnej liczby całkowitej  $c$ .

# Gry

Zajmiemy się teraz analizą gier. Większość gier, które będziemy rozważać, ma pewne cechy wspólne:

- dwóch graczy wykonują ruchy na przemian,
- obaj gracze mają wszystkie informacje na temat stanu gry – nie ma żadnych elementów tajnych,
- gra musi się skończyć – nie można grać w nieskończoność.

Oczywiście niektóre zadania wyłamują się z tych zasad.

Powiemy, że jeden z graczy ma *strategię wygrywającą*, gdy może tak wykonywać ruchy, aby wygrać, niezależnie od tego jak gra przeciwnik. . Przykład takiej strategii ilustruje następujące zadanie.

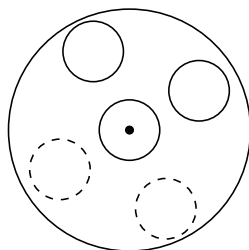
## Przykład 1

Ania i Bartek grają w następującą grę. Mają do dyspozycji stół w kształcie koła oraz dowolnie wiele monet o jednakowej średnicy, mniejszej od średnicy stołu. W każdym ruchu gracz kładzie monetę na stole tak, aby nie przykrywała żadnej innej monety. Gdy wykonanie ruchu nie jest możliwe, gracz którego jest kolej przegrywa. Rozstrzygnąć który z graczy ma strategię wygrywającą, jeśli Ania wykonuje pierwszy ruch.

## Rozwiązanie

Wykażemy, że Ania – która rozpoczyna grę, ma strategię wygrywającą. Składa się ona z dwóch kroków.

- W pierwszym ruchu Ania kładzie monetę tak, aby środek stołu pokrywał się ze środkiem monety. Może tak zrobić, gdyż średnica stołu jest większa niż średnica monety.
- W kolejnych ruchach Ania kładzie monetę tak, aby była ona symetryczna do monety położonej poprzednio przez Bartka względem środka stołu.



Przykład gry. Okręgi z linii ciągłej zostały położone przez Anię, a te z linii przerywanej przez Bartka.

Pozostaje tylko zauważyć, że po ruchu Ani sytuacja na stole jest symetryczna względem środka. Jeśli więc Bartek jest w stanie w pewnym miejscu ułożyć monetę, to oznacza, że jest to możliwe również w miejscu do niego symetrycznym. Łatwo zauważyć, że skoro

moneta Bartka nie może zostać położona na środku stołu – bo już tam leży moneta Ani – to ruch Bartka nie wpłynie na możliwość położenia monety w miejscu symetrycznym. Stąd też jeśli Bartek jest w stanie wykonać ruch, to jest go w stanie później wykonać Ania. Dowodzi to faktu, że strategia Ani jest wygrywająca. ■

Warto zauważyć, że Bartek w drugim ruchu nie jest w stanie położyć monety symetrycznej do monety Ani, gdyż te monety się pokrywają. Pomysłowe ułożenie jej na środku pozwala jednak zastosować Ani pomysł z symetrią. Zapobiega ona w ten sposób sytuacji, w której dwie symetryczne do siebie monety będą na siebie nachodziły.

Motyw gry symetrycznej jest bardzo częsty w grach, stąd też zawsze należy go rozważyć. Warto także spróbować gry w szczególnych przypadkach, gdyż one często pozwalają nam zgadnąć kto ma strategię wygrywającą i nasuwają pomysł na nią. Przykładowo, jeśli dla powyższego zadania rozważymy stół o bardzo niewiele większy niż jedna moneta, to po pierwszym ruchu Ani Bartek nie będzie w stanie położyć kolejnej monety. Nasuwa to pomysł, że Ania ma strategię wygrywającą.

## Przykład 2

Na stole leży 10000 kamieni. Ruch polega na zabraniu ze stołu 2 lub 5 kamieni. Dwaj gracze wykonują ruch na przemian, gdy gracz nie może wykonać ruchu przegrywa. Rozstrzygnąć, który z graczy – pierwszy czy drugi – ma strategię wygrywającą.

## Rozwiązanie

Wprowadźmy dwa pojęcia. Jeśli na stole leży  $k$  kamieni i gracz wykonujący ruch może grać w taki sposób, aby wygrać niezależnie od ruchów przeciwnika, to powiemy, że  $k$  kamieni na stole jest *stanem wygrywającym*. Gdy zaś to gracz, który aktualnie nie wykonuje ruchu ma strategię wygrywającą, to ten stan nazwiemy *stanem przegrywającym*.

Zauważmy, że  $k = 2$  i  $k = 5$  są stanami wygrywającymi, gdyż gracz może wziąć wszystkie kamienie, co spowoduje brak możliwości ruchu następnego gracza. Zaś  $k = 1$  jest stanem przegrywającym, gdyż gracz, który ma wykonać ruch, nie jest w stanie tego zrobić.

Zauważmy, że  $k = 2$  i  $k = 5$  są stanami wygrywającymi, gdyż gracz może wziąć wszystkie kamienie, co spowoduje brak możliwości ruchu następnego gracza. Zaś  $k = 1$  jest stanem przegrywającym, gdyż gracz, który ma wykonać ruch, nie jest w stanie tego zrobić.

Do rozwiązania zadania przydadzą się dwie ważne obserwacje:

- stan jest wygrywający wtedy i tylko wtedy, gdy skutek ruchu, można przejść do pewnego stanu przegrywającego;
- stan jest przegrywający wtedy i tylko wtedy, gdy skutek dowolnego ruchu gracz go wykonujący przechodzi do stanu wygrywającego.

Formalne uzasadnienie powyższych zdań pozostawiamy czytelniczce/czytelnikowi jako ćwiczenie. Jednak są to fakty dość intuicyjne.

Zauważmy, że ze stanu  $k = 3$  można przejść do stanu  $k = 1$ , który jest przegrywający. Toteż  $k = 3$  jest stanem wygrywającym. Dla  $k = 4$  jedynym możliwym ruchem jest zabranie dwóch kamieni – doprowadza nas to do stanu wygrywającego  $k = 2$  – stąd  $k = 4$  jest przegrywający. Dla  $k = 6$  zabranie pięciu kamieni doprowadza do stanu

przegrywającego, toteż  $k = 6$  jest wygrywający. Ciekawa sytuacja ma miejsce dla  $k = 7$ . Wówczas oba ruchy doprowadzają do stanów wygrywających –  $k = 5$  i  $k = 2$ , więc  $k = 7$  jest stanem przegrywającym.

Rozumując analogicznie możemy stworzyć tabelkę.

k	Stan	k	Stan
1	P	9	W
2	W	10	W
3	W	11	P
4	P	12	W
5	W	13	W
6	W	14	P
7	P	15	P
8	P	16	W

Można więc postawić hipotezę, że jeśli  $k \equiv 0, 1, 4 \pmod{7}$  to stan jest przegrywający, zaś w przeciwnym wypadku jest on wygrywający. Wykażemy, że jest to prawda za pomocą indukcji matematycznej. Za bazę indukcji posłużą nam rozumowanie przeprowadzone powyżej.

Rozpatrzmy pewne  $k \geq 8$ .

- Jeśli  $k \equiv 0, 1, 4 \pmod{7}$ , to łatwo sprawdzić, że z założenia indukcyjnego stany  $k - 2$  i  $k - 5$  w każdym z tych przypadków są wygrywające. Toteż rozpatrywane stany będą przegrywające.
- Dla  $k \equiv 2, 3, 6 \pmod{7}$  zabranie dwóch kamieni doprowadza do stanu przegrywającego, toteż stan  $k$  jest wygrywający.
- Dla  $k \equiv 5 \pmod{7}$  zabranie 5 kamieni doprowadza do stanu przegrywającego, więc stan  $k$  jest wygrywający.

Powyższe rozpatrzenie przypadków kończy dowód indukcyjny. Wystarczy teraz zauważyć, że  $10000 \equiv 4 \pmod{7}$ , więc to drugi gracz ma strategię wygrywającą. ■

Analiza stanów jest znaną metodą analizy gier. Jest ona bardziej żmudna niż pomysłowa, toteż rzadko można ją spotkać na konkursach czy olimpiadach. Jednak pokazuje ona, jak wiele da się uzyskać z analizy „małych” przypadków – dzięki nim zarówno postawiliśmy słuszną hipotezę, jak i rozumowanie indukcyjne wypłynęło niejako naturalnie z bawienia się  $k \in 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ .

Niestety nie w każdym zadaniu analiza „małych” przypadków coś daje. Czasem potrzebny jest pomysł, na który trzeba po prostu wpaść, często korzystając z metody prób i błędów. Jest ona tym skuteczniejsza, im więcej jest prób.

### Zadanie 1

Na tablicy napisano liczbę całkowitą dodatnią. W każdym ruchu zmazujemy napisaną liczbę  $n$  na tablicy i piszemy nową liczbę. Jeśli  $n$  była parzysta to piszemy na tablicy liczbę  $\frac{1}{2}n$ . Jeśli zaś liczba  $n$  była nieparzysta, to zapisujemy jedną z liczb  $3n - 1$  lub  $3n + 1$ . Czy – niezależnie od tego, jaką liczbę zapisano na początku – możemy, po skończeniu wielu krokach, uzyskać na tablicy jedynkę?

### Zadanie 2

W lewym dolnym rogu planszy  $m \times n$  stoi pionek. W każdym ruchu może zostać on przesunięty o dowolną liczbę pól w górę lub o dowolną liczbę pól w prawo. Wygrywa gracz, który postawi figurę w prawym górnym rogu. Rozstrzygnąć dla jakich wartości  $(m, n)$  pierwszy gracz ma strategię wygrywającą.

### Zadanie 3

Na tablicy zapisano liczbę 10000000. W każdym ruchu, o ile przed nim była zapisana liczba  $n$ , gracz zastępuje ją liczbą  $n - 1$  lub  $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ . Gracz, który zapisze liczbę 1 wygrywa. Który z graczy – pierwszy czy drugi – ma strategię wygrywającą?

### Zadanie 4

Dwaj gracze na przemian stawiają kółko i krzyżyk w polach nieskończonej planszy. Gracz wygrywa, gdy istnieje kwadrat  $2 \times 2$  ułożony z jego symboli. Wykazać, że drugi gracz może grać tak, aby pierwszy gracz nie był w stanie wygrać.

### Zadanie 5

Nauczyciel wraz z 30 uczniami gra w grę na nieskończonej kartce w kratkę. Zaczyna on, po czym ruch wykonuje każdy z 30 uczniów, po czym znów nauczyciel, po czym uczniowie i tak dalej. W każdym ruchu należy pokolorować jeden z boków kratki, który nie został wcześniej pokolorowany. Nauczyciel wygrywa, gdy na planszy znajduje się prostokąt  $2 \times 1$  lub  $1 \times 2$ , że wszystkie jego boki są pokolorowane, ale odcinek wewnątrz niego nie jest.

### Zadanie 6

20 dziewczyn usiadło w kółku. Na początku jedna z nich trzyma  $N < 19$  kamieni. W każdym ruchu jedna z dziewczyn, która posiada co najmniej dwa kamienie daje po jednym każdej ze swoich sąsiadek. Gra kończy się, gdy każda z dziewczyn trzyma co najwyżej jeden kamień. Wykazać, że gra musi się skończyć po skończonej liczbie ruchów.

# Bardziej zaawansowane nierówności

Na początku udowodnimy dwie bardzo znane nierówności.

## Nierówność Cauchego–Schwarza

Dla liczb rzeczywistych  $a_1, a_2, \dots, a_n$  oraz  $b_1, b_2, \dots, b_n$  zachodzi nierówność

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n).$$

## Dowód

Przyjmijmy, że funkcja  $f$  jest dana wzorem

$$f(x) = \sum_{i=1}^n (a_i x - b_i)^2 = \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) x^2 - 2 \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right) x + \sum_{i=1}^n b_i^2.$$

Zauważmy, że jest to suma funkcji przyjmujących wartości nieujemne, a więc sama przyjmuje tylko wartości nieujemne. Stąd też jej wyróżnik  $\Delta$  będzie niedodatni

$$\Delta = 4 \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - 4 \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \leq 0,$$

co jest równoważnie tezie. ■

## Nierówność Cauchego–Schwarza w formie Engela

Dla liczb rzeczywistych  $a_1, a_2, \dots, a_n$  oraz  $b_1, b_2, \dots, b_n$  zachodzi nierówność

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n}.$$

## Dowód

Zauważmy, że na mocy nierówności Cauchego–Schwarza prawdą jest, że

$$\left( \sum_{i=1}^n \left( \sqrt{\frac{a_i}{b_i}} \right)^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n (\sqrt{a_i b_i})^2 \right) \geq \left( \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i b_i} \cdot \sqrt{\frac{a_i}{b_i}} \right).$$

Jest to równoważnie nierówności

$$\left( \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i} \right) \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right) \geq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right),$$

z której w oczywisty sposób wynika teza. ■

Przejdziemy teraz do nierówności między ciągami jednomonotonicznymi. Ma ona bardzo ciekawy dowód, do którego będzie potrzebny nam następujący lemat.

### Lemat 1

Dane są liczby rzeczywiste  $a_1 \geq a_2$  oraz  $b_1 \geq b_2$ . Wówczas zachodzi nierówność

$$a_1b_1 + a_2b_2 \geq a_1b_2 + a_2b_1.$$

Jeśli zaś  $a_1 \geq a_2$  oraz  $b_1 \leq b_2$ , to zachodzi

$$a_1b_1 + a_2b_2 \leq a_1b_2 + a_2b_1.$$

### Dowód

Zauważmy, że

$$a_1b_1 + a_2b_2 \geq a_1b_2 + a_2b_1 \iff (a_1 - a_2)(b_1 - b_2) \geq 0,$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 \leq a_1b_2 + a_2b_1 \iff (a_1 - a_2)(b_1 - b_2) \leq 0,$$

Teza lematu wynika wprost z założeń. ■

### Twierdzenie o ciągach jednomonotonicznych

Liczby  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$  oraz  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$  są rzeczywiste. Niech  $b'_1, b'_2, \dots, b'_n$  będzie permutacją liczb  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . Wówczas zachodzą nierówności

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \geq a_1b'_1 + a_2b'_2 + \dots + a_nb'_n \geq a_1b_n + a_2b_{n-1} + \dots + a_nb_1.$$

### Dowód

Rozpatrzmy pewną permutację  $b'_1, b'_2, \dots, b'_n$  liczb  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . Zamieńmy liczby  $b'_i$  oraz  $b'_{i+1}$  miejscami i zobaczmy co stanie się z wartością wyrażenia, nazwijmy go  $W$ :

$$a_1b'_1 + a_2b'_2 + \dots + a_nb'_n.$$

Składnik  $a_ib'_i$  zostanie zastąpiony przez  $a_ib'_{i+1}$ , zaś  $a_{i+1}b'_{i+1}$  zostanie zastąpiony przez  $a_{i+1}b'_i$ . Inne składniki pozostaną bez zmian. Skoro  $a_i \geq a_{i+1}$ , to z Lematu 1 wynika, że

$$a_ib'_{i+1} + a_{i+1}b'_i \leq a_ib'_i + a_{i+1}b'_{i+1}, \quad \text{gdy } b_i \geq b_{i+1},$$

$$a_ib'_{i+1} + a_{i+1}b'_i \geq a_ib'_i + a_{i+1}b'_{i+1}, \quad \text{gdy } b_i \leq b_{i+1}.$$

Jeśli więc liczby  $b'_i$  oraz  $b'_{i+1}$  są posortowane odwrotnie do ciągu  $\{a_i\}$ , to zmieniając ich kolejności możemy zwiększyć wartość wyrażenia  $W$ . Wykonując wiele takich zamian, za każdym razem wartość  $W$  wzrośnie. Również liczba par postaci  $(b'_i, b'_j)$ , gdzie  $i > j$  oraz  $b'_i < b'_j$  maleje o 1 przy każdym przestawieniu. Stąd w pewnym momencie otrzymamy permutację, w którym nie możemy wykonać rozpatrywanej operacji. Znaczy to tyle, że  $b'_i \geq b'_{i+1}$  dla wszystkich możliwych wartości liczby  $i$ , czyli po prostu  $b'_i = b_i$ . Finalnie, wartość rozpatrywanego wyrażenia  $W$  jest równa

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n.$$

Skoro przy każdym ruchu wartość tego wyrażenia rosła, to jego finalna wartość jest większa od wartości początkowej.

Dowodzi to jednej z dwóch postulowanych nierówności. Dowód drugiej z nich jest analogiczny, tylko zamieniamy miejscami  $b'_i$  posortowane jednakowo jak ciąg  $\{a_i\}$ . ■

Przyjmijmy, że ciągi  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  oraz  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  są *jednakowo monotoniczne*, gdy dla dowolnych indeksów  $i$  oraz  $j$  zachodzi

$$a_i > a_j \iff b_i > b_j,$$

zaś *odwrotnie monotoniczne*, gdy

$$a_i > a_j \iff b_i < b_j.$$

Przykładowo ciągi  $(2, 1, 3)$  oraz  $(101, 100, 102)$  są jednakowo monotoniczne, zaś ciągi  $(1, 2, 3)$  oraz  $(10, 9, 8)$  są odwrotnie monotoniczne. Możemy teraz inaczej sformułować wykazaną wcześniej nierówność.

Jeśli mamy dwa ciągi  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  oraz  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  i rozpatrzmy wszystkie ich możliwe permutacje, to wartość wyrażenia

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

będzie największa, gdy ciągi  $\{a_i\}$  oraz  $\{b_i\}$  są jednakowo monotoniczne, zaś najmniejsza, gdy  $\{a_i\}$  oraz  $\{b_i\}$  są odwrotnie monotoniczne.

## Przykład 2

Liczby  $a_1, a_2, \dots, a_n$  są dodatnie. Wykazać, że zachodzi nierówność

$$a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 \geq a_1^2 a_2 + a_2^2 a_3 + \dots + a_{n-1}^2 a_n + a_n^2 a_1.$$

## Rozwiązanie

Rozpatrzmy ciągi:

$$(a_1^2, a_2^2, \dots, a_n^2) \quad \text{oraz} \quad (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Zauważmy, że są one jednakowo monotoniczne, gdyż

$$a_i^2 > a_j^2 \iff a_i > a_j.$$

Na mocy nierówności o ciągach jednomonotonicznych prawdą jest, że

$$a_1^2 \cdot a_1 + a_2^2 \cdot a_2 + \dots + a_n^2 \cdot a_n \geq a_1^2 \cdot a_2 + a_2^2 \cdot a_3 + \dots + a_n^2 \cdot a_1,$$

co jest równoważne tezie.



## Cykliczność a symetryczność

Bardzo często przy rozwiązywaniu nierówności zdarzają się stwierdzenia typu „bez straty ogólności założmy, że”. Zazwyczaj chodzi o to, że rozpatrywany jest jeden przypadek, a inne są do niego analogiczne. Nie zawsze jednak są one analogiczne. Chociażby w Przykładzie 2 nie można założyć bez straty ogólności, że

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n,$$

gdyż przypadek, gdy  $n = 4$  i  $a_1 \geq a_3 \geq a_2 \geq a_4$  nie daje się łatwo sprowadzić do przypadku powyższego.

Zdefiniujmy wyrażenie algebraiczne jako *symetryczne*, gdy wyrażenie dla liczb  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  nie zmienia się, gdy rozpatrzymy dowolną ich permutację. Chociażby wyrażenie

$$abc + a + b + c$$

jest symetryczne. Chociażby rozpatrując permutację  $(b, a, c)$  krotki  $(a, b, c)$  otrzymamy

$$bac + b + a + c = abc + a + b + c.$$

Wyrażenie algebraiczne nazwiemy *cyklicznym*, gdy wyrażenie dla liczb  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  nie zmienia się, gdy rozpatrzymy dowolne ich przestawienie cykliczne –  $(a_k, a_{k+1}, \dots, a_n, a_1, a_{k-1})$ . Wyrażenie

$$ab^2 + bc^2 + ca^2$$

jest cykliczne. Dla przykładu rozpatrując przestawienie cykliczne  $(c, a, b)$  krotki  $(a, b, c)$  otrzymamy

$$ca^2 + ab^2 + bc^2 = ab^2 + bc^2 + ca^2.$$

Nie jest ono symetryczne, gdyż dla permutacji  $(b, a, c)$  krotki  $(a, b, c)$  mamy

$$ba^2 + ac^2 + cb^2 \neq ab^2 + bc^2 + ca^2$$

Nierówność nazwiemy *symetryczną* albo *cykliczną*, gdy rozpatrując odpowiednio permutację lub przestawienie cykliczne zmiennych, w oczywisty sposób otrzymana nierówność jest równoważna nierówności wyjściowej.

- Gdy nierówność jest symetryczna, to można założyć ustalony porządek liczb.
- Jeśli zaś nierówność jest jedynie cykliczna, to można chociażby założyć, że pewna zmienna jest największa lub najmniejsza spośród wszystkich. Nie można jednak ustalać sobie ich porządku!

#### Zadanie 1

Dane są liczby dodatnie  $a, b, c$ . Wykaż, że zachodzi nierówność

$$\frac{a}{2b+c} + \frac{b}{2c+a} + \frac{c}{2a+b} \geq 1.$$

#### Zadanie 2

Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich  $a, b, c$  zachodzi nierówność

$$a^3b + b^3c + c^3a \geq a^2bc + ab^2c + abc^2.$$

#### Zadanie 3

Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , gdzie  $n \geq 2$  zachodzi nierówność

$$\sin \alpha_1 \cdot \dots \cdot \sin \alpha_n + \cos \alpha_1 \cdot \dots \cdot \cos \alpha_n \leq 1.$$

#### Zadanie 4

Dane są liczby rzeczywiste  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$  oraz  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ . Wykazać, że zachodzi nierówność

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n).$$

#### Zadanie 5

Rozstrzygnąć, czy dla dowolnych liczb dodatnich  $a, b, c$  zachodzi nierówność

$$a^2b^3 + b^2c^3 + c^2a^3 \leq ab^4 + bc^4 + ca^4.$$

# Równania funkcyjne 2

W niniejszym rozdziale poszerzymy naszą wiedzę na temat równań funkcyjnych. Nie będą to już jedynie sztamkowe zadania na podstawienia i wykazywanie różnowartościowości/surjektywności funkcji. Na początku zastanówmy się nad funkcjami, które spełniają równanie

$$f(x) + f(y) = f(x + y).$$

Powyższa zależność jest zwana *równaniem Cauchego*.

## Przykład 1

Wyznaczyć wszystkie funkcje  $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ , które dla dowolnych  $x, y \in \mathbb{Q}$  spełniają warunek

$$f(x) + f(y) = f(x + y).$$

## Rozwiązanie

Na początku zauważmy, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej zachodzą równości

$$\begin{aligned} f(nx) &= f((n-1)x) + f(x) = f((n-2)x) + f(x) + f(x) = \dots = \\ &= \underbrace{f(x) + \dots + f(x)}_n = nf(x). \end{aligned}$$

Wykonując podstawienie  $x = y = 0$  otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} f(0) + f(0) &= f(0), \\ f(0) &= 0. \end{aligned}$$

Postawmy  $y = -x$ . Wówczas

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= f(0) = 0, \\ f(-x) &= -f(x). \end{aligned}$$

Łącząc powyższą równość z pierwszą z otrzymanych zależności otrzymujemy, że

$$f(-nx) = -f(nx) = nf(x).$$

Możemy więc wywnioskować, że  $f(nx) = nf(x)$  dla dowolnej liczby całkowitej  $n$  oraz dowolnej liczby rzeczywistej  $x$ . Wstawiając  $x = \frac{p}{q}$  oraz  $n = q$  otrzymamy

$$qf\left(\frac{p}{q}\right) = f(p).$$

Zaś dla  $x = 1$  i  $n = p$  mamy

$$f(p) = pf(1).$$

Stąd

$$\begin{aligned} qf\left(\frac{p}{q}\right) &= pf(1), \\ f\left(\frac{p}{q}\right) &= \frac{p}{q} \cdot f(1). \end{aligned}$$

Skoro  $f(1)$  jest stałe, to funkcja  $f$  jest funkcją postaci  $f(x) = ax$  dla pewnej liczby wymiernej  $a$ . Łatwo sprawdzić, że takie funkcje spełniają warunki zadania. ■

Rozsądną więc wydaje się hipoteza, że jeśli funkcja  $f$  jest zdefiniowana na liczbach rzeczywistych i przyjmuje wartości rzeczywiste oraz spełnia równanie Cauchego, to musi być funkcją postaci  $f(x) = ax$  dla pewnej liczby rzeczywistej  $a$ . Nie jest to jednak prawda! Taka implikacja nie zachodzi.

Jaka więc jest funkcja rzeczywista, która spełnia równanie Cauchego, a nie jest funkcją liniową? Skonstruowanie takiej funkcji jest możliwe, gdy założymy *pewnik wyboru*. To ten sam aksjomat, z którego założenia wynika paradoks Banacha-Tarskiego. Nie będziemy tutaj zgłębiać tego tematu, ważny jest fakt, że z samego równania Cauchego dla funkcji rzeczywistych nie wynika ich liniowość.

Jaka więc jest funkcja rzeczywista, która spełnia równanie Cauchego, a nie jest funkcją liniową? Skonstruowanie takiej funkcji jest możliwe, gdy założymy *pewnik wyboru*. To ten sam aksjomat, z którego założenia wynika paradoks Banacha-Tarskiego. Nie będziemy tutaj zgłębiać tego tematu, ważny jest fakt, że z samego równania Cauchego dla funkcji rzeczywistych nie wynika ich liniowość.

Można jednak dołożyć pewne założenie do równania Cauchego, aby uzyskać liniowość rozpatrywanej funkcji. Mówi o tym następujące twierdzenie.

### Twierdzenie 1

Jeśli pewna funkcja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x, y$  spełnia warunek

$$f(x) + f(y) = f(x + y).$$

oraz jest funkcja niemalejącą, to wówczas  $f(x) = ax$ .

### Dowód

Przyjmijmy  $a = f(1)$ . Na mocy Przykładu 1 mamy, że

$$f(q) = aq \quad \text{dla dowolnej liczby wymiernej } q.$$

Założmy nie wprost, że dla pewnej liczby rzeczywistej  $t$  zachodzi równość

$$f(t) = a(t + t_0), \quad t_0 \neq 0.$$

Przyjmijmy, że  $t_0 > 0$ . Drugi przypadek będzie analogiczny. Znanym faktem jest, że w przedziale  $(t, t + t_0)$  jest pewna liczba wymierna  $q_0$ . Mamy wówczas

$$f(q_0) = aq_0 < a(t + t_0) = f(t).$$

Wiedząc, że  $q_0 > t$  otrzymujemy sprzeczność z tym, że  $f$  jest niemalejąca. ■

Analogiczne twierdzenia można udowodnić, gdy fakt, że  $f$  jest malejąca, zastąpić tym, że

- $f(x) > 0$ , dla dowolnego  $x > 0$ ,
- $f(x) < 0$ , dla dowolnego  $x < 0$ ,
- $f$  jest ograniczona na przedziale  $-f(x) < M$ , dla dowolnego  $a < x < b$ , dla pewnych liczb rzeczywistych  $a < b$  oraz  $M$ ,
- $f$  jest ciągła.

Warto zaznaczyć, że różnowartościowość funkcji  $f$  nie wystarcza, aby była ona liniowa.

### Przykład 2

Znajdź wszystkie funkcje  $f$  ze zbioru liczb rzeczywistych w zbiór liczb rzeczywistych, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x, y$  zachodzą równości

$$f(x) + f(y) = f(x + y) \quad \text{oraz} \quad f(x)f(y) = f(xy).$$

### Rozwiązanie

Wstawiając do drugiego równania  $x = y$  otrzymujemy

$$f(x^2) = f(x)f(x) = f(x)^2 \geq 0.$$

Niech  $t$  będzie liczbą nieujemną. Wstawiając  $x = \sqrt{t}$  do powyższego równania otrzymujemy  $f(t) \geq 0$ . Czyli  $f$  przyjmuje wartości nieujemne dla argumentów nieujemnych.

Wykażemy, że  $f$  jest niemalejąca. W tym celu rozpatrzmy dwie liczby rzeczywiste  $a > b$ . Mamy

$$f(a) = f(a - b) + f(b) \geq f(b),$$

co dowodzi postulowanej własności.

Na mocy Twierdzenia 1 mamy, że  $f(x) = ax$  dla pewnej liczby rzeczywistej  $a$ . Podstawiając to do drugiego równania otrzymamy

$$\begin{aligned} ax \cdot ay &= axy, \\ a^2 &= a. \end{aligned}$$

Stąd  $a = 0$  lub  $a = 1$ . Łatwo sprawdzić, że obie funkcje  $f(x) = 0$  i  $f(x) = x$  spełniają warunki zadania. ■

Warto zwrócić uwagę na sposób, w jaki wykazano, że funkcja  $f$  jest niemalejąca. Da się go spotkać w wielu zadaniach tego rodzaju.

### Przykład 3

Znajdź wszystkie funkcje  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dla których

$$f(f(x)^2 + f(y)) = xf(x) + y,$$

dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x, y$ .

## Rozwiązanie

Zacznijmy od najprostszego podstawienia. Weźmy  $x = y = 0$ . Wówczas otrzymamy

$$f(f(0)^2 + f(0)) = 0.$$

Oznacza to, że istnieje liczba rzeczywista  $a = f(0)^2 + f(0)$ , że  $f(a) = 0$ . Wstawmy  $x = a$

$$\begin{aligned}f(f(a)^2 + f(y)) &= af(a) + y, \\f(f(y)) &= y.\end{aligned}$$

Następnie zastąpmy  $x$  przez  $f(x)$  w wyjściowym równaniu

$$\begin{aligned}f(f(f(x))^2 + f(y)) &= f(x)f(f(x)) + y, \\f(x^2 + f(y)) &= xf(x) + y.\end{aligned}$$

W wyjściowym równaniu mieliśmy

$$f(f(x)^2 + f(y)) = xf(x) + y.$$

Łącząc oba powyższe równania otrzymujemy

$$f(f(x)^2 + f(y)) = f(x^2 + f(y)).$$

Wykażemy, że funkcja  $f$  jest różnowartościowa. Zakładamy w tym celu, że dla pewnych liczb rzeczywistych  $a, b$  zachodzi  $f(a) = f(b)$ . Wtedy

$$a = f(f(a)) = f(f(b)) = b.$$

Stąd

$$\begin{aligned}f(f(x)^2 + f(y)) &= f(x^2 + f(y)) \\f(x)^2 + f(y) &= x^2 + f(y) \\f(x)^2 &= x^2.\end{aligned}$$

Mamy więc, że dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  zachodzi  $f(x) = x$  lub  $f(x) = -x$ . Załóżmy więc, że dla pewnych niezerowych liczb rzeczywistych zachodzi  $f(a) = -a$  i  $f(b) = b$ . Biorąc  $x = a$  i  $y = b$  otrzymujemy

$$f(a^2 - b) = -a^2 + b.$$

W zależności od tego, czy  $f(a^2 - b)$  jest równe  $a^2 - b$  czy  $-a^2 + b$  otrzymujemy sprzeczność z niezerowością obu liczb  $a, b$ . Stąd albo  $f(x) = x$  dla wszystkich liczb rzeczywistych  $x$  albo  $f(x) = -x$  dla wszystkich liczb rzeczywistych. Sprawdzając otrzymujemy, że obie te funkcje spełniają warunki zadania. ■

Należy zauważyć, że z faktu  $f(x)^2 = x^2$  nie wynika jeszcze to, że  $f(x) = x$  dla wszystkich  $x$  lub  $f(x) = -x$  dla wszystkich  $x$ . Może się bowiem zdarzyć na przykład, że  $f(1) = 1$  i  $f(2) = -2$ . Jest to dość znana pułapka i warto zwrócić na nią uwagę.

### Zadanie 1

Dana jest funkcja spełniająca dla dowolnej liczby rzeczywistej  $x$  równość

$$f(f(x)) - f(x) = x.$$

Znaleźć liczbę liczb rzeczywistych  $a$ , takich, że  $f(f(a)) = 0$ .

### Zadanie 2

Znajdź wszystkie funkcje  $f : \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$  takie, że  $f(f(n)) + (f(n))^2 = n^2 + 3n + 3$ .

### Zadanie 3

Znajdź wszystkie funkcje  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x, y$  zachodzi równość:

$$f(x^2 + y) = f(x^{27} + 2y) + f(x^4).$$

### Zadanie 4

Niech  $f(n)$  będzie funkcją z dodatnich liczb całkowitych w dodatnie liczby całkowite. Wiadomo, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej  $n$  liczba  $f(f(n))$  jest liczbą dodatnich dzielników  $n$ . Wykazać, że jeśli  $p$  jest liczbą pierwszą, wówczas  $f(p)$  również jest liczbą pierwszą.

### Zadanie 5

Znajdź wszystkie funkcje  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x, y$  zachodzi równość:

$$f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2.$$

### Zadanie 6

Wykazać, że istnieje taka funkcja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , że nie istnieje taka funkcja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , że zachodzi równość  $f(x) = g(g(x))$ .

# Twierdzenia z teorii liczb

Na potrzeby następujących: lematu i twierdzenia, dla liczby całkowitej  $n$  oraz parami względnie pierwszych liczb  $m_1, \dots, m_k$  przyjmujemy

$$G(n) = (n \pmod{m_1}, n \pmod{m_2}, \dots, n \pmod{m_k}).$$

Chociażby dla  $n = 25$  i  $m_1 = 2, m_2 = 3$  i  $m_3 = 7$  mamy

$$G(25) = (25 \pmod{2}, 25 \pmod{3}, 25 \pmod{7}) = (1, 1, 4).$$

Zauważmy, że  $G(n)$  na  $i$ -tej pozycji może przyjąć  $m_i$  wartości. A więc łącznie  $G(n)$  może przyjąć  $m_1 m_2 \cdot \dots \cdot m_k$  wartości.

## Lemat 1

Dane są parami względnie pierwsze liczby  $m_1, \dots, m_k$  oraz dodatnie liczby całkowite  $x, y$  spełniające  $m_1 m_2 \cdot \dots \cdot m_k > x > y \geq 0$ . Wykazać, że wówczas

$$G(x) \neq G(y).$$

## Dowód

Założmy nie wprost, że  $G(x) = G(y)$ . Znaczy to tyle, że dla każdej liczby  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  zachodzi przystawanie

$$x \equiv y \pmod{m_i},$$

czyli równoważnie liczba  $x - y$  jest podzielna przez  $m_i$ . Skoro  $m_i$  są parami względnie pierwsze, to liczba  $x - y$  jest podzielna przez  $m_1 m_2 \cdot \dots \cdot m_k$ . Z założeń zadania mamy zaś, że

$$m_1 m_2 \cdot \dots \cdot m_k > x - y > 0,$$

co daje sprzeczność z wyżej otrzymaną podzielnością. ■

## Chińskie twierdzenie o resztach

Dane są parami względnie pierwsze liczby  $m_1, \dots, m_k$  oraz liczby całkowite  $a_1, \dots, a_k$ . Wówczas istnieje taka liczba całkowita  $x$ , że zachodzą przystawania

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1},$$

$$x \equiv a_2 \pmod{m_2},$$

...

$$x \equiv a_k \pmod{m_k}.$$

## Dowód

Dla liczb  $m_1, \dots, m_k$  rozpatrzmy krotki

$$G(0), G(1), G(2), \dots, G(m_1 \cdot \dots \cdot m_k - 1).$$

Powyższych liczb jest  $m_1 \cdot \dots \cdot m_k$ . Wiemy, że  $G(n)$  może przyjmować  $m_1 \cdot \dots \cdot m_k$  parami różnych wartości. Skoro na mocy Lematu 1 powyższe krotki są parami różne, to występuje



tam po jednej krotce każdego z dostępnych rodzajów. Stąd też w szczególności istnieje krotka, która spełnia warunki narzucone przez liczby  $a_1, \dots, a_k$ . ■

Powyższe twierdzenie innymi słowami znaczy to, że jeśli narzucimy na pewną liczbę warunki przystawania modulo, które nie są ze sobą sprzeczne, to istnieje liczba, która je spełnia. Dla przykładu warunki

$$\begin{aligned}x &\equiv 2 \pmod{3}, \\x &\equiv 1 \pmod{5}, \\x &\equiv 5 \pmod{14}.\end{aligned}$$

są spełniane przez liczbę 131.

Względna pierwszość liczb  $m_1, m_2, \dots, m_k$  zapewnia nas o tym, że nie zajdzie żadna sprzeczność w przystawaniach. Aby się przekonać, że bez powyższego założenia teza twierdzenia nie zajdzie, zauważmy, że nie istnieje liczba, która spełnia warunki

$$\begin{aligned}x &\equiv 1 \pmod{2}, \\x &\equiv 4 \pmod{6}.\end{aligned}$$

Z pierwszego przystawania wynika jej parzystość, a z drugiego jej nieparzystość.

## Twierdzenie 2

Dana jest liczba pierwsza  $p$ . Wówczas istnieje taka liczba  $g \in \{1, 2, 3, \dots, p-1\}$ , że liczby

$$g, g^2, g^3, \dots, g^{p-1}$$

dają parami różne reszty modulo  $p$ .

Innymi słowy reszty z dzielenia powyższych liczb są pewną permutacją reszt

$$1, 2, 3, \dots, p-1.$$

Czyli dla dowolnej niezerowej reszty  $a$ , istnieje taka liczba naturalna  $k$ , że

$$a \equiv g^k \pmod{p}.$$

Liczbę  $g$  nazwiemy *generatorem* lub *pierwiastkiem pierwotnym* modulo  $p$ . Dowód powyższego twierdzenia pominiemy.

Przykładem generatora dla  $p = 11$  jest  $g = 6$ . Istotnie

$$\begin{aligned}6^1 &\equiv 6, & 6^2 &\equiv 3, & 6^3 &\equiv 7, & 6^4 &\equiv 9, & 6^5 &\equiv 10, & \pmod{11} \\6^6 &\equiv 5, & 6^7 &\equiv 8, & 6^8 &\equiv 4, & 6^9 &\equiv 2, & 6^{10} &\equiv 1 & \pmod{11},\end{aligned}$$

liczba 6 wygenerowała wszystkie niezerowe reszty modulo 11.

## Symbol Legendre’a

Dla pewnej liczby pierwszej  $p$  oraz liczby całkowitej  $n$  przyjmujemy

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{gdy istnieje taka liczba całkowita } a \not\equiv 0, \text{ że } n \equiv a^2 \pmod{p} \\ -1, & \text{gdy nie istnieje taka liczba całkowita } a \not\equiv 0, \text{ że } n \equiv a^2 \pmod{p} \\ 0, & \text{gdy } n \equiv 0 \pmod{p} \end{cases}$$

W pierwszym przypadku powiemy, że  $n$  jest *resztą kwadratową*, a w drugim, że  $n$  jest *nieresztą kwadratową*.

Znanym faktem jest, że  $\left(\frac{1}{3}\right) = 1$  oraz  $\left(\frac{2}{3}\right) = -1$ .

## Lemat 2

Niech  $g$  będzie generatorem dla pewnej nieparzystej liczby pierwszej  $p$  oraz dla pewnych liczb naturalnych  $n, k$  zachodzi przystawanie

$$n \equiv g^k \pmod{p}$$

Wówczas  $n$  jest resztą kwadratową modulo  $p$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $2 \mid k$ .

## Dowód

Założmy, że zachodzą przystawania

$$n \equiv a^2 \pmod{p} \quad a \equiv g^l \pmod{p}.$$

Wówczas

$$n \equiv g^{2l} \pmod{p},$$

czyli  $k \equiv 2l \pmod{p-1}$ . Skoro zarówno  $2l$ , jak i  $p-1$  są parzyste, to  $k$  również jest liczbą parzystą.

W drugą stronę, jeśli

$$n \equiv g^{2l} \pmod{p},$$

to biorąc  $a \equiv g^l \pmod{p}$  otrzymamy tezę. ■

## Twierdzenie 3

Dana jest liczba pierwsza  $p$  oraz liczby całkowite  $a, b$ . Wówczas zachodzi równość

$$\left(\frac{a}{p}\right) \left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{ab}{p}\right).$$

## Dowód

Jeśli  $\left(\frac{a}{p}\right) = 0$ , to liczba  $a$  jest podzielna przez  $p$ . Wówczas liczba  $ab$  też będzie podzielna przez  $p$ , czyli  $\left(\frac{ab}{p}\right) = 0$ . W dalszej części rozwiązania zakładam, że żadna z liczb  $a, b$ , nie jest podzielna przez  $p$ .

Zapiszmy

$$a \equiv g^k \pmod{p} \quad b \equiv g^l \pmod{p} \quad ab \equiv g^k \cdot g^l = g^{k+l} \pmod{p}$$

dla pewnego generatora  $g$ . Wówczas, na mocy Lematu 1, teza sprowadza się do tego, że liczba  $k+l$  będzie nieparzysta wtedy i tylko wtedy, gdy dokładnie jedna spośród liczb  $k, l$  będzie nieparzysta. A to jest oczywiście prawda. ■

### Przykład 1

Wykazać, że dla dodatniej liczby całkowitej  $k$ , która nie jest podzielna przez  $p-1$  zachodzi przystawanie

$$1^k + 2^k + 3^k + \dots + p^k \equiv 0 \pmod{p}.$$

### Rozwiązanie

Rozpatrzmy generator  $g$  modulo  $p$ . Wówczas reszty z dzielenia przez  $p$  liczb

$$g, g^2, g^3, \dots, g^{p-1}$$

są pewną permutacją reszt

$$1, 2, 3, \dots, p-1.$$

Stąd reszty z dzielenia przez  $p$  liczb

$$g^k, g^{2k}, g^{3k}, \dots, g^{k(p-1)}$$

to pewna permutacja liczb

$$1^k, 2^k, 3^k, \dots, (p-1)^k.$$

Skoro to są te same reszty, tylko w innej kolejności, to ich sumy muszą być sobie równe

$$1^k + 2^k + 3^k + \dots + p^k \equiv g^k + g^{2k} + g^{3k} + \dots + g^{k(p-1)} \equiv g^k \cdot \frac{g^{k(p-1)} - 1}{g^k - 1} \pmod{p}.$$

Z Małego Twierdzenia Fermata mamy

$$g^{k(p-1)} - 1 \equiv (g^k)^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Skoro  $p-1 \nmid k$ , to  $g^k \not\equiv 1 \pmod{p}$ . Mamy więc, że

$$g^k \cdot \frac{g^{k(p-1)} - 1}{g^k - 1} \equiv 0 \pmod{p}.$$

■

#### Zadanie 1

Wykazać, że dodatnia liczba całkowita  $n$  ma co najwyżej  $2\sqrt{n}$  dzielników.

#### Zadanie 2

Liczbę nazwiemy *wielodzielną*, jeśli ma co najmniej 1000 dzielników. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba całkowita  $n$ , że liczby

$$n, n+1, n+2, \dots, n+1000$$

są wielodzielne.

### Zadanie 3

Niech  $d(n)$  oznacza liczbę dodatnich dzielników liczby  $n$  – włączając liczby 1 i  $n$ . Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitych  $n$ , dla których liczba  $\frac{n}{d(n)}$  również jest całkowita.

### Zadanie 4

Dana jest nieparzysta liczba pierwsza  $p$ . Obliczyć wartość wyrażenia

$$\left(\frac{0}{p}\right) + \left(\frac{1}{p}\right) + \dots + \left(\frac{p-1}{p}\right).$$

### Zadanie 5

Niech  $p$  będzie liczbą pierwszą dającą resztę 2 z dzielenia przez 3. Dla pewnych liczb całkowitych  $a, b$  liczba  $a^3 - b^3$  jest podzielna przez  $p$ . Wykazać, że liczba  $a - b$  również jest podzielna przez  $p$ .

### Zadanie 6

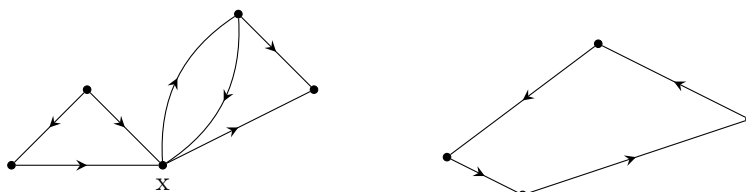
Niech  $a_1, \dots, a_n$  oraz  $b_1, \dots, b_n$  będą dodatnimi liczbami całkowitymi, że dla każdej liczby całkowitej  $n-1 \geq i \geq 0$  zachodzi nierówność  $b_{i+1} \geq 2b_i$ . Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych  $k$ , że nie zachodzi żadne z przystawań

$$\begin{aligned} k &\equiv a_1 \pmod{b_1}, \\ k &\equiv a_2 \pmod{b_2}, \\ &\dots \\ k &\equiv a_n \pmod{b_n}. \end{aligned}$$

# Grafy skierowane

## Definicje

*Grafem skierowanym* nazywamy taki graf, w którym każda z krawędzi jest skierowana jedną ze stron. Może zdarzyć się, że pomiędzy wierzchołkami są dwie krawędzie, każda skierowana w inną stronę. Przykład takiego grafu znajduje się na poniższym rysunku.



*Cyklem* w grafie skierowanym nazywamy taki ciąg krawędzi  $e_1, \dots, e_k$ , że wierzchołek końcowy krawędzi  $e_i$  jest wierzchołkiem początkowym krawędzi  $e_{i+1}$  dla każdego  $1 \leq i \leq n$  – przyjmujemy  $e_{k+1} = e_1$ . Przykład cyklu znajduje się na drugim rysunku powyżej.

Dla każdego wierzchołka definiujemy stopień wejściowy jako liczbę krawędzi, które „wchodzą” do danego wierzchołka i oznaczamy go symbolem  $\text{indeg}(v)$ . Analogicznie definiujemy stopień wyjściowy jako liczbę krawędzi, które „wychodzą” z danego wierzchołka – oznaczamy go jako  $\text{outdeg}(v)$ . Dla przykładowego grafu na rysunku powyżej i jego wierzchołka  $X$  mamy

$$\text{indeg}(x) = 3, \quad \text{outdeg}(x) = 2.$$

## Lemat 1

W grafie skierowanym, w którym dla każdego wierzchołka  $v$  zachodzi

$$\text{out}(v) \geq 1$$

istnieje cykl.

## Dowód

Rozpatrzmy dowolny wierzchołek  $v_1$ . Z warunków zadania istnieje krawędź wychodząca z niego. Przejdźmy nią do pewnego wierzchołka  $v_2$ . Kontynuujmy takie przechodzenie – oznaczmy jako  $v_i$  wierzchołek, który odwiedzimy jako  $i$ -ty. Jako, że wierzchołków jest skończenie wiele, to w pewnym momencie trafimy do wierzchołka, w którym już byliśmy. Załóżmy, że wierzchołek  $v_{b+1}$  jest tym samym wierzchołkiem co wierzchołek  $v_a$ . Wówczas wierzchołki

$$v_a, v_{a+1}, v_{a+2}, \dots, v_{b-1}, v_b$$

tworzą cykl. ■

## Przykład 1

Pewne  $n \geq 2$  osób zostało przydzielonych do  $n$  pokoi, przy czym w każdym pokoju znajduje się dokładnie jedna osoba. Każda z osób ustaliła listę preferencji posortowała pokoje w pewnej kolejności. Wiadomo, że jeśli przyporządkowano by pokoje w inny sposób, to znalazła by się osoba, dla której nowy pokój był niżej na jej liście niż pierwotnie przyporządkowany jej pokój. Wykazać, że istnieje osoba, która ma na najwyższym miejscu swojej listy pokój, który został jej przyporządkowany.

## Rozwiązanie

Zadanie w treści nie zawiera słowa „graf”. Jednak czasami warto sobie taki graf stworzyć. Rozpatrzmy więc graf skierowany, który ma  $n$  wierzchołków – ponumerujmy je liczbami od 1 do  $n$ . Jeśli osoba, której przyporządkowano pokój  $i$  ma na najwyższym miejscu swojej listy preferencji pokój  $j$ , to graf będzie zawierał krawędź z  $i$  do  $j$ .

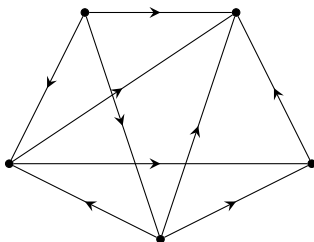
Żałujemy nie wprost, że szukana osoba nie istnieje – tj. z każdego wierzchołka wychodzi dokładnie jedna krawędź. Wówczas na mocy Lematu 1 w rozpatrywanym grafie istnieje cykl – powiedzmy, że przechodzi przez wierzchołki

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_k.$$

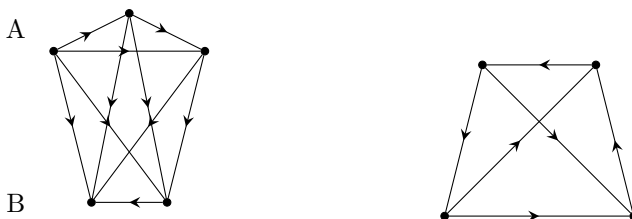
Wówczas przydzielając osobie z pokoju  $a_i$  pokój  $a_{i+1}$  dla każdego  $1 \leq i \leq k$ , gdzie  $a_{k+1} = a_1$ , otrzymamy przyporządkowanie, w którym każda osoba otrzyma subiektywnie lepszy pokój niż wcześniej. Jest to jednak sprzeczne z założeniami. ■

## Turnieje

Zdarza się, że w zadaniu są rozpatrywane pewne zawody, w których wzięła udział pewna liczba graczy, każda para rozegrała mecz, który zakończył się zwycięstwem jednej ze stron. Możemy wówczas rozpatrzeć graf skierowany, w którym wierzchołki będą odpowiadały graczom. Pomiedzy każdą dwójką graczy będzie występowała dokładnie jedna krawędź i będzie ona skierowana w stronę zwycięzcy. Taki graf nazywamy *turniejem* – przykład znajduje się na rysunku.



Turniej nazwiemy *redukowalnym*, gdy możemy podzielić jego uczestników na dwa niepuste zbiory  $A$  oraz  $B$ , takie, że każdy uczestnik z  $A$  wygrał z każdym uczestnikiem z  $B$ . Przykład takiego turnieju narysowano poniżej po lewej stronie.



Turniej nazwiemy *cyklicznym*, gdy istnieje w nim cykl, który przechodzi przez każdy wierzchołek dokładnie raz. Przykład takiego turnieju znajduje się po prawej stronie powyższego rysunku.

Zachęcamy do samodzielnego zmierzenia się z poniższymi Lematami.

## Lemat 2

Turniej jest redukowalny wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest cykliczny.

## Dowód

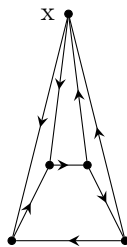
Zauważmy, że jeśli turniej jest redukowalny, to nie może on zawierać żadnego cyklu. Graf ten wówczas da się podzielić na dwie części  $A$  oraz  $B$ , takie, że każdy uczestnik z  $A$  wygrał z każdym uczestnikiem z  $B$ . Załóżmy, że istnieje pewien cykl  $v_1, v_2, \dots, v_k$ . Wówczas część jego wierzchołków należy do  $A$ , a reszta do  $B$ . Stąd istnieje takie  $i$ , że  $v_i$  należy do  $B$ , a  $v_{i+1}$  należy do  $A$ . Jednak wówczas  $v_{i+1}$  wygrałby z  $v_i$ , co daje sprzeczność.

Przejdźmy teraz do trudniejszej części – tj. wykazania, że jeśli graf nie jest cykliczny, to jest redukowalny. Rozpatrzmy największy cykl

$$v_1, v_2, v_3, \dots, v_k$$

w danym grafie. Skoro graf ten nie jest cykliczny, to istnieje pewien wierzchołek  $x$  spoza cyklu.

Obserwacja 1. Jeśli  $x$  jest wierzchołkiem spoza cyklu, to albo  $x$  przegrał z wszystkimi wierzchołkami z cyklu, albo  $x$  wygrał z wszystkimi wierzchołkami z cyklu.



Założmy, że  $x$  przegrał z niektórymi wierzchołkami z cyklu, a z niektórymi wygrał. Wówczas istnieje takie  $i$ , że  $x$  wygrał z  $v_{i+1}$ , a przegrał z  $v_i$  – oczywiście przyjmujemy  $v_{k+1} = v_1$ . Wówczas wierzchołki

$$v_1, v_2, \dots, v_i, x, v_{i+1}, \dots, v_k$$

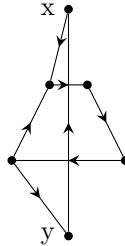
tworzyłyby cykl, co przeczy założonej maksymalności cyklu wyjściowego.

Możemy więc podzielić wierzchołki na trzy grupy:

- grupę  $A$  – wierzchołków spoza rozpatrywanego cyklu, które wygrały z każdym z wierzchołków z cyklu,
- grupę  $B$  – wierzchołków spoza rozpatrywanego cyklu, które przegrały z każdym z wierzchołków z cyklu,

- grupę  $C$  – wierzchołki z rozpatrywanego cyklu.

Obserwacja 2. Jeśli  $x$  należy do grupy  $A$ , a  $y$  do grupy  $B$ , to  $x$  wygrał z  $y$ .



Założmy nie wprost, że  $y$  wygrał z  $x$ . Wówczas wierzchołki

$$v_1, y, x, v_2, \dots, v_k,$$

tworzyłyby większy cykl – sprzeczność.

Skoro nie wszystkie wierzchołki należą do do grupy  $C$ , to istnieje inna grupa, która jest niepusta – przyjmijmy bez straty ogólności, że jest to grupa  $A$ . Wówczas podział na zbiory  $A \cup C$  oraz  $B$  dowodzi redukowalności grafu. ■

### Lemat 3

Jeśli turniej o  $n \geq 4$  wierzchołkach jest cykliczny, to zawiera cykl o długości równiej  $n - 1$ .

### Dowód

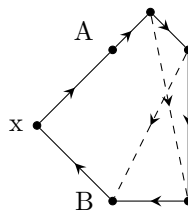
Usuńmy pewien wierzchołek  $x$ . Otrzymany graf zawiera  $n - 1$  wierzchołków, więc jeśli jest cykliczny, to wynika z tego teza. Założmy więc, że tak nie jest – na mocy Lematu 2 jest on redukowalny. Niech więc rozpatrywany graf składa się z wierzchołka  $x$  oraz niepustych zbiorów wierzchołków  $A$  oraz  $B$ , przy czym każdy wierzchołek z  $A$  wygrał z każdym wierzchołkiem z  $B$ .

Skoro rozpatrywany graf jest cykliczny, to istnieje cykl

$$x, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}.$$

Zauważmy, że jeśli  $v_{i+1}$  należy do  $A$ , to jako, że  $v_i$  wygrało z  $v_{i+1}$ , to nie może należeć ono do  $B$ . Stąd również należy do  $A$ . Stąd też istnieje takie  $t$ , że

$$v_1, v_2, \dots, v_t \in A, \quad v_t, v_{t+1}, \dots, v_{n-1} \in B.$$





Jeśli  $t \geq 2$ , to oznacza, że istnieje  $v_{t-1}$ . Skoro  $v_{t-1} \in A$  oraz  $v_{t+1} \in B$ , to  $v_{t-1}$  wygrał z  $v_{t+1}$ . Czyli

$$x, v_1, v_2, \dots, v_{t-1}, v_{t+1}, \dots, v_{n-1}$$

jest cyklem o długości  $n - 1$ . Jeśli zaś  $t = 1$ , to  $t + 2 = 3 \leq n - 1$ . Analogicznie jak powyżej wykazujemy, że  $v_t$  wygrał z  $v_{t+2}$ , czyli

$$x, v_1, v_2, \dots, v_t, v_{t+2}, \dots, v_{n-1}$$

jest cyklem o długości  $n - 1$ . ■

#### Zadanie 1

Dany jest graf skierowany zawierający  $2m$  krawędzi. Wykazać, że możemy usunąć pewne  $m$  z nich, aby graf ten nie zawierał cyklu.

#### Zadanie 2

Wykazać, że w dla każdego turnieju da się ustawić graczy w rzędzie w pewnej kolejności, tak, aby każdy wygrał z graczem po swojej prawej stronie.

#### Zadanie 3

Niech  $G$  będzie grafem skierowanym, w którym stopnie: wejściowy i wyjściowy każdego z wierzchołków są równe 2. Wykazać, że możemy podzielić wierzchołki na trzy, być może puste, zbiory, aby żaden wierzchołek  $v$  wraz z dwoma wierzchołkami, będącymi końcami wychodzącymi z  $v$  krawędzi, nie znajdowały się wszystkie w jednym ze zbiorów.

#### Zadanie 4

W pewnym turnieju brało udział 1000 osób – nazwijmy ich  $A_1, A_2, \dots, A_{1000}$ . Parę uczestników tego turnieju  $(A_i, A_j)$  nazwiemy *zwycięską*, gdy nie istnieje inny uczestnik tego turnieju  $A_k$ , który pokonał obu uczestników z tej pary. Rozstrzygnąć, czy może się tak zdarzyć, aby każda z par  $(A_1, A_2), (A_2, A_3), \dots, (A_{999}, A_{1000}), (A_{1000}, A_1)$  była zwycięska.

#### Zadanie 5

Dany jest turniej o  $n$  uczestnikach oraz pewna dodatnia liczba całkowita  $k$ . Każdy z uczestników uzyskał jednakową liczbę zwycięstw oraz dla dowolnych dwóch różnych uczestników tego turnieju  $a, b$ , liczba uczestników, którzy przegrali zarówno z  $a$ , jak i z  $b$  wynosi  $k$ . Wykazać, że liczba  $n + 1$  jest podzielna przez 4.

### Zadanie 6

Wykazać, że wierzchołki grafu można pokolorować na jeden z  $k$  kolorów, tak, by żadne dwa wierzchołki tego samego koloru nie były połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy krawędzie tego grafu da się tak skierować, by nie istniała ścieżka składająca się z  $k + 1$  różnych wierzchołków.

# Ciągi

Ciągiem  $(a_n)_{n \geq 0}$  nazywamy funkcję ze zbioru liczb nieujemnych całkowitych w zbiór liczb rzeczywistych. Innymi słowy każdemu indeksowi  $i$  jest przyporządkowana pewna liczba rzeczywista  $a_i$ . Najbardziej znanym przykładem ciągu jest *ciąg Fibonacciego*. Jest on dany wzorem

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ dla } n \geq 0.$$

Można obliczyć, że

$$F_2 = 1, \quad F_3 = 2, \quad F_4 = 3, \quad F_5 = 5, \quad F_6 = 8, \quad F_7 = 13, \quad F_8 = 21, \quad F_9 = 34, \quad \dots$$

Zauważmy, że każdy kolejny wyraz tego ciągu jest zależny od poprzedzających go elementów. Ciągi tak zdefiniowane nazywamy *ciągami rekurencyjnymi*. Można jednak wyznaczyć wzór na każdy element ciągu Fibonacciego, który nie jest rekurencyjny – zależy tylko od indeksu danego elementu ciągu. Wyprowadzenie tego wzoru jest bardzo pomysłowe i zastosowanie podobnego postępowania pozwala na wyprowadzenie wzoru ogólnego wielu innych ciągów rekurencyjnych.

## Wzór ogólny na wyrazy ciągu Fibonacciego

Zapomnijmy na chwilę o warunkach  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  i spróbujmy znaleźć jakieś ciągi, dla których również zachodzi równanie rekurencyjne  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ , ale mają one prosty do wyprowadzenia wzór ogólny. Zobaczmy na ciągi dane wzorem  $a_n = x^n$  dla pewnej liczby rzeczywistej  $x$  – być może dla pewnej liczby rzeczywistej  $x$  będą one spełniały postulowane równanie rekurencyjne. Przyjmuje ono postać

$$\begin{aligned} x^{n+2} &= x^{n+1} + x^n, \\ x^2 &= x + 1. \end{aligned}$$

Rozwiązując powyższe równanie kwadratowe możemy dojść do wniosku, że ciągi

$$a_n = \alpha^n, \text{ gdzie } \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{ i } \quad a_n = \beta^n, \text{ gdzie } \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

spełniają daną rekurencję.

Zauważmy, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $A$  oraz  $B$  ciąg

$$c_n = Aa_n + Bb_n$$

również będzie spełniał rekurencję  $c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$ . Istotnie

$$\begin{aligned} c_{n+2} &= Aa_{n+2} + Bb_{n+2} = A(a_{n+1} + a_n) + B(b_{n+1} + b_n) = \\ &= (Aa_{n+1} + Bb_{n+1}) + (Aa_n + Bb_n) = c_{n+1} + c_n. \end{aligned}$$

Postaramy się poruszać liczbami  $A$  oraz  $B$ , tak, by ciąg  $c_n$  spełniał równości

$$c_0 = F_0 = 0, \quad c_1 = F_1 = 1.$$

Wówczas, co nietrudno zauważyć, ciągi  $F$  i  $c$  będą sobie równe. W tym celu wystarczy rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} Aa_0 + Bb_0 = A + B = 0 \\ Aa_1 + Bb_1 = \alpha \cdot A + \beta \cdot B = 1. \end{cases}$$

Powyższe równości zachodzą dla  $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$  i  $B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ . Toteż otrzymujemy zależność

$$F_n = c_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot a_n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot b_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}.$$

### Przykład 1

Wykazać, że dla każdej liczby całkowitej  $M > 1$  istnieje taka dodatnia liczba całkowita  $n$ , że  $F_n$  jest podzielne przez  $M$ .

### Rozwiązanie

Najpierw wykażemy, że ciąg reszt z dzielenia liczb  $F_n$  przez  $M$  jest okresowy. Reszt z dzielenia przez  $M$  jest skończenie wiele. Również liczba wartości jakie może przyjąć para  $(F_i \pmod{M}, F_{i+1} \pmod{M})$  jest skończona. Toteż istnieją takie liczby  $i < j$ , dla których

$$F_i \equiv F_j \pmod{M} \quad \text{oraz} \quad F_{i+1} \equiv F_{j+1} \pmod{M}.$$

Możemy zauważyć, że

$$F_{j+2} \equiv F_{j+1} + F_j \equiv F_{i+1} + F_i \equiv F_{i+2} \pmod{M}.$$

Kontynuując to rozumowanie można wykazać, że  $F_{i+k} \equiv F_{j+k} \pmod{M}$  dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej  $k$ . Możemy się również „cofać”, to jest

$$F_{j-1} \equiv F_{j+1} - F_j \equiv F_{i+1} - F_i \equiv F_{i-1} \pmod{M}.$$

i w ten sposób wykazać, że  $F_{i+k} \equiv F_{j+k} \pmod{M}$  również zachodzi dla dowolnej liczby całkowitej ujemnej  $k$ . Otrzymaliśmy więc, że

$$\begin{aligned} F_{i+k} &\equiv F_{j+k} \pmod{M} \\ F_k &\equiv F_{k+(j-i)} \pmod{M} \\ F_k &\equiv F_{k+t} \pmod{M}, \end{aligned}$$

dla pewnej dodatniej liczby całkowitej  $t$ .

Zauważmy, że  $F_0 \equiv 0 \pmod{M}$ . Wówczas

$$0 \equiv F_0 \equiv F_t \equiv F_{2t} \equiv F_{3t} \equiv \dots \pmod{M},$$

co kończy dowód. ■

Przykładowo dla  $M = 4$  ciąg reszt  $F_n$  z dzielenia przez  $M$  wygląda następująco

$$0, 1, 1, 2, 3, 1, 0, 1, 1, 2, \dots$$

### Przykład 2

Znajdź wszystkie liczby całkowite  $n \geq 3$ , dla których istnieją liczby rzeczywiste  $a_1, a_2, \dots, a_{n+2}$  spełniające  $a_{n+1} = a_1$ ,  $a_{n+2} = a_2$  oraz

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2},$$

dla  $i = 1, 2, \dots, n$ .

## Rozwiązanie

W tego typu zadaniach zawsze warto sprawdzić co się dzieje dla niewielkich liczb  $n$ . Czytelniczka/czytelnikowi pozostawiamy jako ćwiczenie zobaczenie, że w przypadkach  $n = 1$  i  $n = 2$  szukany ciąg nie istnieje. Dla  $n = 3$  otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} a_1 a_2 + 1 = a_3, \\ a_2 a_3 + 1 = a_1, \\ a_3 a_1 + 1 = a_2. \end{cases}$$

Metodą zgadywania można sprawdzić, że  $a_1 = a_2 = -1, a_3 = 2$  spełnia warunki zadania. Czytelniczka/czytelnik może zadać pytanie, jak zgadywać takie rzeczy. Warto podstawić sobie kolejno  $a_1 = 1, 0, -1$  i zobaczyć co z tego wynika. Jeśli każde z tego typu prostych podstawień doprowadza do sprzeczności, to można postawić hipotezę, że układ nie ma rozwiązań. Niemniej jednak w tym przypadku takie rozwiązania istnieją.

Można łatwo zauważyć, że skoro dla  $n = 3$  szukany ciąg istnieje, to takowy będzie istniał również dla  $n = 3k$  dla dowolnej liczby dodatniej całkowitej  $k$ . Wystarczy bowiem rozpatrzyć ciąg postaci

$$(a_1, a_2, a_3, a_1, a_2, a_3, \dots, a_1, a_2, a_3).$$

Rozpatrzmy ciąg  $(a_n)$  spełniający warunki zadania. Mamy

$$\begin{aligned} a_i a_{i+1} + 1 &= a_{i+2}, \\ a_i a_{i+1} a_{i+2} + a_{i+2} &= a_{i+2}^2, \\ \sum_{i=1}^n a_i a_{i+1} a_{i+2} + \sum_{i=1}^n a_{i+2} &= \sum_{i=1}^n a_{i+2}^2. \end{aligned}$$

W podobny sposób otrzymujemy

$$\begin{aligned} a_i a_{i+1} + 1 &= a_{i+2}, \\ a_{i-1} a_i a_{i+1} + a_{i-1} &= a_{i+2} a_{i-1}, \\ \sum_{i=1}^n a_{i-1} a_i a_{i+1} + \sum_{i=1}^n a_{i-1} &= \sum_{i=1}^n a_{i+2} a_{i-1}. \end{aligned}$$

Pozostaje zauważyć, że

$$\sum_{i=1}^n a_{i-1} = \sum_{i=1}^n a_{i+2} \quad \text{ i } \quad \sum_{i=1}^n a_{i-1} a_i a_{i+1} = \sum_{i=1}^n a_i a_{i+1} a_{i+2},$$

gdyż jest to sumowanie tych samych liczb, tylko w innej kolejności. Mamy więc równość

$$\sum_{i=1}^n a_{i+2}^2 = \sum_{i=1}^n a_{i+2} a_{i-1}.$$

Zauważmy, że  $\sum_{i=1}^n a_{i+2}^2 = \sum_{i=1}^n a_{i-1}^2$ , skąd

$$\sum_{i=1}^n (a_{i+2}^2 + a_{i-1}^2 - 2a_{i+2}a_{i-1}) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n (a_{i+2} - a_{i-1})^2 = 0.$$

Otrzymujemy stąd, że  $a_{i-1} = a_{i+2}$ , czyli  $a_i = a_{i+3}$ . Jeśli  $n$  jest niepodzielne przez 3, to w ciągu równości

$$a_1 = a_4 = a_7 = \dots$$

pojawiają się wszystkie elementy ciągu, toteż wszystkie muszą być równe. Ale jeśli  $a_1 = a_2 = a_3$ , to

$$a_1^2 + 1 = a_1,$$

co nie ma rozwiązań. ■

Powyższe zadanie ma dwa pouczające przesłania. Po pierwsze pokazuje, jak często rozważanie małych przypadków naprowadza na postawienie poprawnych hipotez. Po drugie, warto czasami po prostu nieco pobawić się tożsamościami algebraicznymi, gdyż można dojść w ten sposób do ciekawych wniosków. Może wydawać się, że to rozwiązania wynika znikąd, no ale czasem tak po prostu jest – trzeba takich rzeczy też poszukać.

#### Zadanie 1

Dana jest liczba pierwsza  $p > 3$ . Wykazać, że istnieje taki ciąg arytmetyczny dodatnich liczb całkowitych  $\{x_i\}$ , że  $x_1 x_2 \dots x_p$  jest kwadratem liczby całkowitej.

#### Zadanie 2

Dany jest ciąg  $a_1, a_2, \dots, a_n$  liczb rzeczywistych, że dla dowolnych liczb całkowitych  $n \geq i, j \geq 1$  zachodzi równość

$$a_i + a_j \geq |i - j|.$$

Wyznaczyć najmniejszą możliwą sumę elementów tego ciągu.

#### Zadanie 3

Ciąg  $u_n$  dany jest wzorem  $u_0 = 1, u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 3}$ . Wykaż, że  $u_1 + u_2 + \dots + u_{2021} < 1$

#### Zadanie 4

Znajdź wszystkie liczby rzeczywiste  $x$ , że ciąg dany wzorem

$$a_0 = x, \quad a_n = 2^n - 3a_n,$$

dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  spełnia zależność

$$a_n > a_{n-1}.$$

#### Zadanie 5

Dany jest ciąg

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}.$$

Rozstrzygnąć, czy  $a_{5000} > 100$ .

#### Zadanie 6

Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby rzeczywiste  $\alpha$ , dla których istnieje ciąg dodatnich liczb rzeczywistych  $x_1, x_2, x_3, \dots$  o tej własności, że dla wszystkich  $n \geq 1$ :

$$x_{n+2} = \sqrt{\alpha x_{n+1} - x_n}.$$

#### Zadanie 7

Dany jest ciąg

$$a_0 = 6, \quad a_n = a_{n-1} + NWD(n, a_{n-1}).$$

Wykazać, że  $NWD(n, a_{n-1})$  jest liczbą pierwszą lub jest równe 1.

# Rozstrzygnij, czy

Pochylimy się nad zadaniami, w którym nie wiemy, czy mamy dowodzić tezy, czy też szukać do niej kontrprzykładu. Czasami, mimo że w zadaniu napisano „rozstrzygnij”, tak właściwie jest jasne, że tezę trzeba udowodnić. Nie będziemy w tym rozdziale zajmować się tego typu rzeczami – w poniższych zadaniach rozpoznanie w którym kierunku należy prowadzić rozumowanie, jest co najmniej nietrywialne.

Poniższy przykład to nieco uproszczone zadanie 5 z Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej z 2010 roku. Sprawilo ono kłopot wielu bardzo dobrym zawodnikom – rozwiązał je jeden z sześciu reprezentantów Polski.

## Przykład 1

Każde z sześciu pudeł  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$  na początku zawiera po jednej monecie. Następujące operacje są dozwolone

1. Wybrać niepuste pudełko  $B_j$ ,  $1 \leq j \leq 5$ , usunąć jedną monetę z  $B_j$  i dołożyć dwie monety do  $B_{j+1}$ ;
2. Wybrać niepuste pudełko  $B_k$ ,  $1 \leq k \leq 4$ , usunąć jedną monetę z  $B_k$  i zamienić kolejność pudełek  $B_{k+1}$  i  $B_{k+2}$ .

Rozstrzygnąć, czy istnieje taki ciąg operacji, że każde z pudełek  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$  stanie się puste, zaś pudełko  $B_6$  będzie zawierało  $2000^{2000}$  monet.

## Rozwiązanie

Wykażemy, że istnieje ciąg ruchów spełniający warunki zadania. Przyjmijmy, że

$$(a_1, a_2, \dots) \rightarrow (b_1, b_2, \dots)$$

jeśli można wykonać pewną liczbę ruchów, że z ciągu kolejnych pudełek w których jest  $a_1, a_2, \dots$  monet otrzymamy ciąg  $b_1, b_2, \dots$  monet.

Obserwacja.  $(a, 0, 0) \rightarrow (0, 2^a, 0)$  dla każdego  $a \geq 1$ .

Zauważmy, że

$$(a, 0, 0) \rightarrow (a-1, 2, 0)$$

oraz

$$(x, 2^y, 0) \rightarrow (x, 2^y - 1, 2) \rightarrow \dots \rightarrow (x, 0, 2^{y+1}) \rightarrow (x-1, 2^y, 0).$$

Wykonując najpierw pierwsze z powyższych przekształceń, a następnie wykonując  $a-1$  razy drugie z nich otrzymamy tezę.

Najpierw wykonany takie ruchy, aby otrzymać w ostatnim pudełku bardzo dużą liczbę, a następnie cofniemy ją prawie na początek.

$$\begin{aligned} (1, 1, 1, 1, 1, 1) &\rightarrow (0, 3, 1, 1, 1, 1) \rightarrow (0, 1, 5, 1, 1, 1) \rightarrow \\ &\rightarrow (0, 1, 1, 9, 1, 1) \rightarrow (0, 1, 1, 1, 17, 1) \rightarrow (0, 1, 1, 1, 0, 35) \rightarrow \\ &\rightarrow (0, 1, 1, 0, 35, 0) \rightarrow (0, 1, 0, 35, 0, 0) \rightarrow (0, 0, 35, 0, 0, 0). \end{aligned}$$



Na mocy obserwacji wykonujemy ruchy

$$(0, 0, 35, 0, 0, 0) \rightarrow (0, 0, 1, 2^{34}, 0, 0) \rightarrow (0, 0, 1, 0, 2^{2^{34}}, 0) \rightarrow (0, 0, 0, 2^{2^{34}}, 0, 0).$$

Zauważmy, że

$$2^{2^{34}} > 2^{1000^3} > (2^{2000})^{11} > 2000^{2000}.$$

Przyjmijmy  $A = 2000^{2000}$ . Wykonując drugi ruch dla  $k = 4$  tak właściwie jedynie zabieramy monetę z czwartego pudełka, gdyż pudełka: piąte i szóste są puste. Możemy więc zabrać ich tyle, by w czwartym pudełku zostało  $\frac{1}{4}A$  monet. Wówczas wykonując ruchy pierwszego rodzaju otrzymujemy

$$(0, 0, 0, \frac{1}{4}A, 0, 0) \rightarrow (0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}A, 0) \rightarrow (0, 0, 0, 0, 0, A).$$

■

Kluczowym elementem rozwiązywania tego typu zadań jest pobawienie się danymi operacjami i zobaczenie jakie liczby da się uzyskać. Jeśli zrobimy to dobrze, to unikniemy sytuacji, w której przez dłuższy czas bezskutecznie próbujemy dowodzić, że odpowiedzią na postawione pytanie jest „Nie”.

## Przykład 2

Dane są takie liczby całkowite  $a, b, c, d$ , że nie istnieją takie niezerowe liczby całkowite  $x, y, z, t$ , że

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0.$$

Rozstrzygnąć, czy wynika z tego, że liczby  $a, b, c, d$  mają ten sam znak.

## Rozwiązanie

Wykażemy, że postulowana implikacja nie zachodzi. Rozpatrzmy liczby

$$a = b = 3, \quad c = d = -1.$$

Udowodnimy, że jeśli zachodzi równość

$$3x^2 + 3y^2 = z^2 + t^2,$$

to wówczas  $x = y = z = t = 0$ . Rozumując nie wprost, założmy, że istnieje niezerowe rozwiązanie powyższego równania. Rozpatrzmy takie rozwiązanie, dla którego suma  $|x| + |y| + |z| + |t|$  jest najmniejsza możliwa. Wiemy, że

$$z^2 + t^2 = 3x^2 + 3y^2 \equiv 0 \pmod{3}$$

Znanym faktem jest, że dla dowolnej liczby całkowitej  $n$  mamy

$$n^2 \equiv 0 \pmod{3}, \text{ gdy } n \equiv 0 \pmod{3} \quad \text{oraz} \quad n^2 \equiv 1 \pmod{3}, \text{ gdy } n \equiv 1, 2 \pmod{3}.$$

Rozpatrując wszystkie możliwe przypadki, w zależności od reszt z dzielenia przez 3 jakie dają liczby  $z$  i  $t$ , łatwo otrzymać, że

$$z^2 + t^2 \equiv 0 \pmod{3} \iff z \equiv t \equiv 0 \pmod{3}.$$

Mamy więc  $z = 3z_0$  oraz  $t = 3t_0$  dla pewnych liczb całkowitych  $z_0, t_0$ . Wówczas

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3y^2 &= z^2 + t^2 = 9z_0^2 + 9t_0^2, \\ 3z_0^2 + 3t_0^2 &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Stąd czwórka  $(z_0, t_0, x, y)$  również jest niezerowym rozwiązaniem danego równania. Jeśli obie z liczb  $z_0, t_0$  są równe zero, to łatwo zauważyć, że pozostałe dwie również, co przeczy niezerowości danego rozwiązania. W przeciwnym wypadku

$$|z_0| + |t_0| + |x| + |y| < |x| + |y| + |z| + |t|$$

co przeczy minimalności  $|x| + |y| + |z| + |t|$ . ■

Metodę zastosowaną powyżej nazywa się *nieskończonym schodzeniem*. Z pewnego rozwiązania równania uzyskujemy rozwiązanie mniejsze. Nie można jednak schodzić w nieskończoność. Skoro działamy w liczbach całkowitych, to wartość wyrażenia  $|x| + |y| + |z| + |t|$  nie może przyjmować dowolnie małych wartości.

Ciężko w powyższym zadaniu wpaść na rozwiązanie obserwując jak teza zachowuje się dla małych liczb  $a, b, c, d$ . Nie w każdym zadaniu analiza szczególnych przypadków jest pomocna. Ważna była obserwacja, że na mocy założeń liczby  $x, y, z$  i  $t$  są całkowite. Trzeba jakoś skorzystać z tej własności – tutaj nasuwa się modulo.

#### Zadanie 1

Rozstrzygnąć, czy istnieją liczby całkowite  $x, y$ , spełniające równanie

$$x^2 - 999y^2 = 1001.$$

#### Zadanie 2

Niech  $S(\mathcal{X})$  oznacza sumę elementów zbioru  $\mathcal{X}$ , zaś  $S_2(\mathcal{X})$  sumę kwadratów elementów zbioru  $\mathcal{X}$ . Rozstrzygnąć, czy istnieją takie rozłączne zbiory liczb całkowitych  $A$  oraz  $B$ , które zawierają po 2020 elementów, że

$$S(A) = S(B) \quad \text{oraz} \quad S_2(A) = S_2(B).$$

#### Zadanie 3

Rozstrzygnąć, czy istnieje taka różnowartościowa funkcja  $f$  określona na zbiorze liczb całkowitych dodatnich i przyjmująca wartości całkowite nieujemne, że

$$f(mn) = f(m) + f(n)$$

dla dowolnych liczb całkowitych  $m, n$ .

#### Zadanie 4

$P_1, P_2, \dots, P_{100}$  są 100 punktami na płaszczyźnie, z których żadne 3 nie leżą na jednej prostej. Dla każdego trzech punktów, nazwijmy trójkąt przez nie tworzony *zegarowym*, jeśli numery wierzchołków są uporządkowane rosnąco zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Czy liczba trójkątów zegarowych może wynosić dokładnie 1111?

#### Zadanie 5

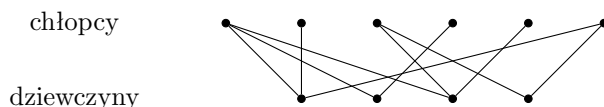
Nieśmiertelny konik polny skacze po osi liczbowej, zaczynając od 0. Długość  $k$ -tego skoku wynosi  $2^k + 1$ . Konik sam decyduje, czy skoczy w prawo czy w lewo. Czy jest możliwe, aby każda liczba całkowita została w pewnym momencie odwiedzona przez konika polnego? Konik polny może odwiedzić pewną liczbę więcej niż raz.

#### Zadanie 6

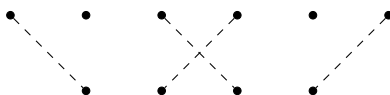
Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończony zbiór prostych na płaszczyźnie, taki, że dowolne dwie proste do niego należące przecinają się w pewnym punkcie o współrzędnych  $(x, y)$ , gdzie  $x$  i  $y$  są liczbami całkowitymi.

# Grafy 2

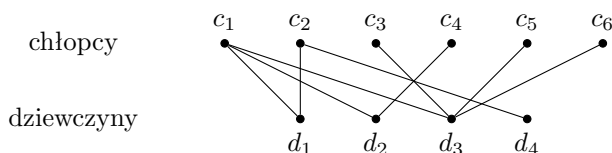
Rozpatrzmy graf, w którym wierzchołki są podzielone na dwie grupy. Można sobie wyobrazić, że jedna z tych grup to są „chłopcy”, a druga „dziewczyny”. Przykład takiego grafu z dwoma grupami wierzchołków znajduje się na poniższym rysunku.



Zastanówmy się, czy w powyższej sytuacji, da się przyporządkować każdej z dziewczyn pewnego chłopaka, tak, aby jeden chłopak był z co najwyżej jedną dziewczyną. Jest to możliwe, co zademonstrowano na poniższym rysunku.



Takie przyporządkowanie nazwiemy *skojarzeniem*. Warto zwrócić uwagę, że nie zawsze szukane skojarzenie musi istnieć. W sytuacji zilustrowanej na poniższym rysunku nie da się przyporządkować każdej z dziewczyn innego chłopca.



Zauważmy, że dziewczyny  $d_1$ ,  $d_3$  i  $d_4$  znają jedynie chłopaków  $c_1$  i  $c_2$ . Łatwo wynika stąd, że nie da się każdej z dziewczyn przyporządkować innego chłopaka. Uogólniając tę obserwację mamy

jeśli skojarzenie istnieje, to każdy zbiór  $k$  dziewczyn zna co najmniej  $k$  różnych chłopaków.

Czy istnieje taka konfiguracja znajomości, w której dla każdego zbioru dziewczyn zachodzi powyższy warunek, ale skojarzenie nie istnieje? Odpowiedź na powyższe pytanie jest przecząca, o czym mówi twierdzenie Halla o kojarzeniu małżeństw.

### Twierdzenie 1 (Halla)

Dana są dwa zbiory – chłopców i dziewcząt. Niektórzy chłopcy znają się z niektórymi dziewczynami. Wówczas następujące dwa warunki są równoważne:

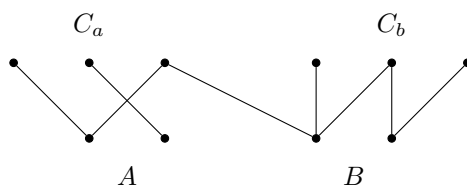
1. istnieje skojarzenie, które każdej dziewczynie przyporządkowuje chłopca;
2. każdy podzbiór dziewczyn liczący  $k$  osób zna co najmniej  $k$  dziewczyn.

### Dowód

Wynikanie drugiego warunku z pierwszego jest oczywiste. Wykażemy, że jeśli zachodzi warunek drugi, to musi istnieć postulowane skojarzenie.

Skorzystamy z indukcji matematycznej po liczbie dziewczyn. Jeśli jest tylko jedna dziewczyna, to teza jest trywialna. Załóżmy, że teza zachodzi dla każdej liczby  $d \leq n$  dziewczyn – wykażemy, że jest prawdziwa również dla  $n + 1$  dziewczyn.

Rozpatrzmy dwa przypadki w zależności od tego, czy istnieje taki podzbiór  $k \leq n$  dziewczyn, który zna *dokładnie*  $k$  chłopców. Załóżmy najpierw, że on istnieje – nazwijmy go  $ZA$ . Zbiór pozostałych dziewczyn nazwijmy  $B$ . Zbiór chłopaków, którzy są znani przez co najmniej jedną z dziewczyn z  $A$  nazwiemy  $C_a$ , a zbiór pozostałych nazwiemy  $C_b$ .



Podzielmy wszystkie osoby na dwa zbiory:  $A \cup C_a$  oraz  $B \cup C_b$ . Wykażemy, że dla każdego z tych zbiorów można zaaplikować założenie indukcyjne. Kojarząc dziewczyny z  $A$  z chłopcami z  $C_a$ , a dziewczyny z  $B$  z chłopcami z  $C_b$  otrzymamy tezę.

Żadna dziewczyna z  $A$  nie zna nikogo ze zbioru  $C_b$ . Stąd też warunek 2 dla zbioru  $A \cup C_a$  jest spełniony. Rozpatrzmy dowolny podzbiór  $B_1$  zbioru  $B$ . Wówczas zbiór dziewczyn  $A \cup B_1$  zna co najmniej  $|A| + |B_1|$  chłopców. Skoro łącznie dziewczyny z  $A$  znają dokładnie  $|A|$  chłopców, to dziewczyny z  $B_1$  muszą łącznie znać ich co najmniej  $|B_1|$ , czyli warunek 2 jest spełniony.

Rozpatrzmy teraz przypadek, w którym każdy zbiór  $k \leq n$  dziewczyn zna co najmniej  $k + 1$  chłopców. Wówczas wybierzmy dowolną dziewczynę. Na mocy założenia zna ona co najmniej jednego chłopaka – przypiszmy ich sobie. „Usuńmy” ich – zauważmy, że wówczas warunek 2 będzie spełniony. Istotnie, każdy zbiór  $k$  dziewczyn znał  $k + 1$  chłopców, więc po usunięciu jednego z nich, znają one ich co najmniej  $k + 1 - 1 = k$ . Możemy więc na mocy założenia indukcyjnego skojarzyć resztę dziewczyn. ■

## Przykład 1

W pewnym turnieju gra  $2m$  drużyn. W ciągu każdego z  $2m - 1$  dni każda z drużyn rozgrywała po jednej partii. Każda drużyna zagrała z każdą drużyną dokładnie raz. W żadnym meczu nie było remisów. Wykazać, że można dla każdego dnia wybrać jedną drużynę, która w danym dniu wygrała swój mecz, tak, aby żadna drużyna nie została wybrana więcej niż raz.

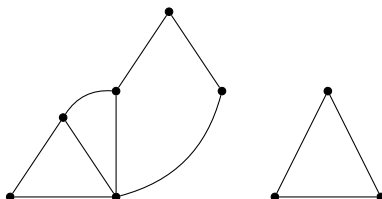
## Rozwiązanie

Rozpatrzmy graf, w którym mamy  $2m - 1$  wierzchołków, z których każdy odpowiada jednemu z dni, oraz  $2m$  wierzchołków, z których każdy odpowiada pewnej drużynie. Wierzchołek odpowiadający drużynie połączymy z wierzchołkiem odpowiadającym dniowi wtedy i tylko wtedy, gdy dana drużyna wygrała w danym dniu.

Chcemy znaleźć skojarzenie przyporządkowujące każdemu dniowi jedną drużynę. Na mocy twierdzenia Halla wystarczy pokazać, że dla dowolnych  $k$  dni istnieje co najmniej  $k$  drużyn, że każda z nich wygrała podczas jednego z nich. Jeśli każda drużyna wygrała pewien mecz podczas tych  $k$  dni, to oczywiście ten warunek jest spełniony. Jeśli istnieje drużyna, która podczas każdego z tych  $k$  dni przegrała, to codziennie przegrała z inną drużyną. Toteż jest co najmniej  $k$  drużyn, które ją pokonały, czyli w szczególności wygrały co najmniej jeden mecz w rozpatrywanych dniach. ■

## Grafy planarne

Grafy, które można narysować na płaszczyźnie tak, aby żadne dwie krawędzie się nie przecinały, nazywamy *grafami planarnymi*. Przykład takiego grafu znajduje się na poniższym rysunku.



Powyższy graf ma 5 ścian, 9 wierzchołków, 11 krawędzi i 2 spójne składowe. Pojęcia ścian i spójnych składowych są nowe – ściany oznaczają liczbę obszarów wyznaczanych przez krawędzie, a spójne składowe liczbę „części” z których składa się graf. Warto zwrócić uwagę, że jedna ściana jest ścianą nieograniczoną – chodzi o obszar, który jest na zewnątrz każdej ze spójnych składowych.

## Twierdzenie 2 (Eulera)

Dany jest graf planarny, w którym jest  $e$  krawędzi,  $v$  wierzchołków,  $f$  ścian oraz  $c$  spójnych składowych. Wówczas zachodzi równość

$$v - e + f - c = 1.$$

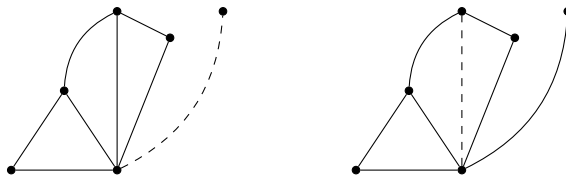
## Dowód

Tezę wykażemy indukując się po liczbie krawędzi. Jeśli krawędzi jest 0, to jest jedna ściana będąca całą płaszczyzną, a liczba spójnych składowych jest równa liczbie wierzchołków.

Toteż

$$v - e + f - c = v - 0 + 1 - v = 1.$$

Założmy teraz, że rozpatrywany graf ma niezerową liczbę krawędzi. Usuńmy jedną z nich i zobaczmy co się stanie. Liczba krawędzi zmniejszy się o 1, liczba wierzchołków nie ulegnie zmianie. Rozpatrzmy dwa przypadki



- Jeśli po każdej ze stron rozpatrywanej krawędzi była inna ściana, to po usunięciu krawędzi dwie ściany scala się w jedną.
- Gdy zaś po każdej ze stron tej krawędzi była ta sama ściana, to oznacza, że jej usunięcie rozspójni składową, do której ona należy, na dwie części.

W pierwszym przypadku  $f$  maleje o 1, a w drugim  $c$  rośnie o 1. W obu przypadkach założenia indukcyjnego wyniknie teza.

W powyższym rozumowaniu pominięto szczegóły formalne, zachęcamy uważną czytelniczkę/czytelnika, aby spróbował zrozumieć dokładnie, dlaczego powyższe rozumowanie jest poprawne.

## Przykład 2

Dany jest graf o  $n$  wierzchołkach posiadający  $k$  krawędzi o numerach będących różnymi liczbami całkowitymi od 1 do  $k$ . Udowodnić, że istnieje w nim ścieżka składająca się z co najmniej  $\frac{2k}{n}$  krawędzi, których numery tworzą ciąg rosnący.

## Rozwiązanie

Na każdym wierzchołku połóżmy kamień. Najpierw zamieńmy miejscami kamienie, które leżą na wierzchołkach krawędzi o numerze 1, następnie te, które leżą na wierzchołkach krawędzi o numerze 2, ..., aż zamienimy te, które leżą na wierzchołkach krawędzi o numerze  $k$ .

W każdym ruchu przesuwamy dwa kamienie. Więc łącznie wykonamy  $2k$  przesunięć kamieni. Skoro kamieni jest  $n$ , to istnieje kamień przesunięty co najmniej  $\frac{2k}{n}$  razy. Numery kolejnych rozpatrywanych krawędzi były coraz większe. Toteż ciąg krawędzi, przez które był on przekładany, jest poszukiwaną ścieżką.

Powyższe zadanie pokazuje, jak ważne jest próbowanie nietypowych pomysłów w matematyce. Nawet jeśli nie doprowadzą one bezpośrednio do rozwiązania zadania, tak jak w powyższym przypadku, to bardzo często wynikają z nich przydatne obserwacje.

### Zadanie 1

W pewnej grupie  $2n$  osób, gdzie  $n$  jest liczbą całkowitą nie mniejszą od 2, każda osoba zna co najmniej  $n$  innych osób. Wykazać, że możemy usadzić pewne cztery osoby przy okrągłym stole, aby każda z nich знаła swoich sąsiadów.

### Zadanie 2

Dana jest pewna dodatnia liczba całkowita  $k$  oraz pewna liczba chłopców i dziewczyn. Każda z osób zna dokładnie  $k$  osób płci przeciwnej. Wykazać, że można zaaranżować pary między chłopcami i dziewczynami, tak, aby każda osoba była w dokładnie jednej parze.

### Zadanie 3

Dany jest graf, w którym każdy wierzchołek ma stopień co najwyżej 100. Zbiór krawędzi nazwiemy *idealnym*, jeśli żadne dwie krawędzie należące do niego nie mają wspólnego końca oraz nie da się dołożyć żadnej krawędzi, aby ta własność była zachowana. W każdym ruchu można usunąć dowolny zbiór idealny. Wykazać, że po wykonaniu dowolnych 199 ruchów, graf nie będzie zawierał żadnej krawędzi.

### Zadanie 4

Dany jest graf planarny, w którym  $e$  to liczba krawędzi, a  $v \geq 3$  to liczba wierzchołków. Wykazać, że zachodzi nierówność

$$e \leq 3v - 6.$$

### Zadanie 5

Na pewnym przyjęciu okazało się, że każdy zna co najmniej  $k$  innych gości, gdzie  $k \geq 2$  jest pewną liczbą naturalną. Wykazać, że istnieje taka liczba naturalna  $n \geq k + 1$ , że można usadzić pewnych  $n$  uczestników przyjęcia przy okrągłym stole tak, aby każdy znał obu swoich sąsiadów.

### Zadanie 6

Krawędzi grafu pełnego o  $n \geq 3$  wierzchołkach zostały pokolorowane w taki sposób, że każdy kolor został użyty do pokolorowania co najwyżej  $n - 2$  krawędzi. Wykazać, że istnieje podgraf tego grafu, będący trójkątem, o krawędziach parami różnych kolorów.



# Nierówności z pomysłem

Wiele nierówności da się rozwiązać za pomocą sztampowych technik – omówiono niektóre z nich w poprzednich rozdziałach. Teraz zajmiemy się nierównościami, do których rozwiązania potrzebna jest nie tyle wiedza, co wpadnięcie na ciekawy pomysł.

## Długości boków w trójkącie

W zadaniach z nierównościami czasami pojawia się założenie, że liczby  $a$ ,  $b$  i  $c$  są bokami trójkąta. Innymi słowy

$$a + b \geq c, \quad b + c \geq a, \quad c + a \geq b.$$

Jest to bardzo niewygodne założenie, niemniej jednak istnieje pewien trik, który pozwala na znaczne jego uproszczenie. Rozpatrzmy liczby

$$x = \frac{a + b - c}{2}, \quad y = \frac{a + c - b}{2}, \quad z = \frac{b + c - a}{2}.$$

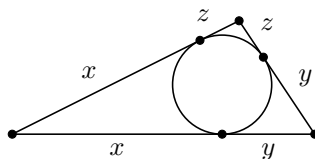
Za mocy założeń wiemy, że są one dodatnie. Mamy też, że

$$a = x + y, \quad b = y + z, \quad c = z + x.$$

Można także wykazać, że jeśli istnieją liczby dodatnie  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , dla których zachodzą powyższe równości, to  $a$ ,  $b$  i  $c$  są długościami boków trójkąta. Istotnie

$$\begin{aligned} a + b &= (x + y) + (y + z) \geq (z + x) = c, \\ b + c &= (y + z) + (z + x) \geq (x + y) = a, \\ c + a &= (z + x) + (x + y) \geq (y + z) = b. \end{aligned}$$

Można także wykazać, że odcinki o długości  $x$ ,  $y$ ,  $z$  to są długości odcinków stycznych do okręgu wpisanego w trójkącie o bokach długości  $a$ ,  $b$  i  $c$ .



## Przykład 1

Dany jest trójkąt o bokach długości  $a$ ,  $b$  i  $c$ . Wykazać, że zachodzi nierówność

$$\frac{1}{-a + b + c} + \frac{1}{a - b + c} + \frac{1}{a + b - c} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

## Rozwiązanie

Wykazaliśmy, że warunek zadania jest równoważny temu, że istnieją takie dodatnie liczby  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , dla których

$$a = x + y, \quad b = y + z, \quad c = z + x.$$

Przepisując postulowaną nierówność za pomocą powyższych podstawień otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{1}{-(x+y) + (y+z) + (z+x)} &= \frac{1}{2y}, \\ \frac{1}{(x+y) - (y+z) + (z+x)} &= \frac{1}{2x}, \\ \frac{1}{(x+y) + (y+z) - (z+x)} &= \frac{1}{2z}.\end{aligned}$$

Trzeba więc wykazać, że

$$\begin{aligned}\frac{1}{2y} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2z} &\geq \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \\ \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right) &\geq \frac{4}{x+y} + \frac{4}{y+z} + \frac{4}{z+x}.\end{aligned}$$

Zauważmy, że nierówność

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$$

wynika wprost z nierówności między średnią arytmetyczną i harmoniczną. Dodając analogicznie nierówności stronami otrzymujemy tezę. ■

## Przykład 2

Liczby  $a, b, c$  i  $d$  spełniają równość  $abcd = 1$ . Wykazać, że

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geq 1.$$

## Rozwiązanie

Pomysłem, który należy rozważyć przy tego typu zadaniach są szacowania pomocnicze. Wykażemy, że

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} \geq \frac{1}{1+ab},$$

dla dowolnych liczb rzeczywistych  $a, b$ . Mamy

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} &\geq \frac{1}{1+ab}, \\ (ab+1)((1+a)^2 + (1+b)^2) &\geq (a+1)^2(b+1)^2,\end{aligned}$$

co po wymnożeniu i redukcji wyrazów podobnych skróci się do postaci

$$\begin{aligned}1 + a^3b + ab^3 &\geq 2ab + a^2b^2 \\ ab(a-b)^2 + (ab-1)^2 &\geq 0.\end{aligned}$$

Korzystając z wykazanego szacowania mamy

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geq \frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+cd} = \frac{1}{1+ab} + \frac{ab}{ab+abcd} = 1. \quad \blacksquare$$

### Zadanie 1

Niech  $a, b$  będą liczbami rzeczywistymi. Załóżmy, że dla wszystkich liczb rzeczywistych  $x, y$  zachodzi nierówność

$$|(ax + by)(ay + bx)| \leq x^2 + y^2.$$

Udowodnić, że  $a^2 + b^2 \leq 2$ .

### Zadanie 2

Wykazać, że dla dowolnych liczb  $x, y, z, t$  z przedziału  $(0, 1)$  zachodzi nierówność

$$xyzt + (1 - x)(1 - y)(1 - z)(1 - t) < 1.$$

### Zadanie 3

Dany jest trójkąt o bokach długości  $a, b$  i  $c$ . Wykazać, że zachodzi nierówność

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

### Zadanie 4

Wykazać, że dla parami różnych liczb nieujemnych  $a, b, c$  zachodzi nierówność

$$\frac{a^2}{(b-c)^2} + \frac{b^2}{(c-a)^2} + \frac{c^2}{(b-a)^2} > 2.$$

### Zadanie 5

Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste  $k$ , takie, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $a, b, c, d \geq -1$  zachodzi nierówność

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + 1 \geq k(a + b + c + d).$$

### Zadanie 6

Niech  $a_1, \dots, a_{25}$  będą nieujemnymi liczbami całkowitymi oraz niech  $k$  będzie najmniejszą z nich. Wykazać, że

$$\lfloor \sqrt{a_1} \rfloor + \lfloor \sqrt{a_2} \rfloor + \dots + \lfloor \sqrt{a_{25}} \rfloor \geq \left\lfloor \sqrt{a_1 + a_2 + \dots + a_{25} + 200k} \right\rfloor.$$

# Klasyczne zadania z teorii liczb

W niniejszym rozdziale pochylimy się nad kilkoma motywami, które można nazwać „klasycznymi”. Najpierw przyjrzyjmy się znanemu trikowi, który często jest używany w zadaniach, w których mowa o sumie cyfr.

## Przykład 1

Niech  $S(n)$  oznacza sumę cyfr liczby  $n$  w zapisie dziesiętnym. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba naturalna  $n$ , że

$$S(2^n) = S(2^{n+1}).$$

## Rozwiązanie

Wykażemy, że dla każdej liczby całkowitej  $n$  zachodzi przystawanie

$$S(n) \equiv n \pmod{9}.$$

Niech

$$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + 10 \cdot a_1 + a_0,$$

gdzie liczby  $a_i$  są cyframi liczby  $n$ . Zauważmy, że

$$\begin{aligned} 10^t &\equiv 1^t \equiv 1 \pmod{9} \\ n &= a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + 10 \cdot a_1 + a_0 \equiv \\ &\equiv a_k + a_{k-1} + \dots + a_1 + a_0 = S(n) \pmod{9}. \end{aligned}$$

Mamy więc

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &\equiv S(2^{n+1}) = S(2^n) \equiv 2^n \pmod{9} \\ 2^{n+1} - 2^n &\equiv 0 \pmod{9}. \end{aligned}$$

Stąd liczba  $2^n$  musiałaby być podzielna przez 9, co daje sprzeczność. ■

## Przykład 2

Dodatknie liczby całkowite  $a$  i  $b$  spełniają równość

$$3a^2 + a = 2b^2 + b.$$

Wykazać, że liczba  $b - a$  jest kwadratem liczby całkowitej.

## Rozwiązanie

Daną równość można przekształcić do postaci

$$a^2 = 2b^2 - 2a^2 + (b - a) = (b - a)(2a + 2b + 1).$$

Wykażemy, że

$$\text{NWD}(b-a, 2a+2b+1) = 1.$$

Założmy, że pewna liczba pierwsza  $p$  dzieli zarówno  $b-a$ , jak i  $2a+2b+1$ . Wówczas w szczególności dzieli ich iloczyn, czyli liczbę  $a^2$ . Stąd, skoro  $p$  jest liczbą pierwszą, to  $p \mid a$ . Rozumując dalej mamy

$$p \mid b-a \text{ i } p \mid a \implies p \mid b \implies p \mid 2a+2b$$

Stąd  $p$  nie może dzielić liczby  $2a+2b+1$ , co daje sprzeczność.

Zauważmy, że skoro  $b-a$  i  $2a+2b+1$  są dodatnie i względnie pierwsze oraz ich iloczyn jest kwadratem liczby całkowitej, to obie muszą być kwadratami liczb całkowitych. Istotnie, rozpatrzmy dowolną liczbę pierwszą  $p$  – może on dzielić co najwyżej jedną z liczb  $b-a$  i  $2a+2b+1$ . Skoro wykładnik  $p$  w rozkładzie  $a^2$  na czynniki pierwsze jest parzysty, to mamy że dla jednej z liczb  $b-a$  i  $2a+2b+1$  jest on parzysty, a dla drugiej równy zeru, czyli także parzysty. Dowodzi to postulowanej własności. ■

W powyższym zadaniu kluczowa była obserwacja, że pewne dwie liczby są względnie pierwsze. Warto zwracać na takie rzeczy uwagę przy podobnych zadaniach z teorii liczb. Teraz przejdziemy do zadania z bardzo ciekawym motywem.

### Przykład 3

Ułamek  $\frac{a}{b}$  nazwiemy *zbilansowanym*, jeśli liczby  $a$  oraz  $b$  są iloczynem tej samej liczby liczb pierwszych – niekoniecznie różnych. Dla przykładu ułamki  $\frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 7}$  oraz  $\frac{3 \cdot 11}{5^2}$  są zbilansowane, a ułamek  $\frac{3}{2 \cdot 5}$  nie. Wykazać, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej  $k$ , istnieją takie dodatnie liczby całkowite  $x, y$ , że każda z liczb

$$\frac{x}{y}, \frac{x+1}{y+1}, \frac{x+2}{y+2}, \dots, \frac{x+k}{y+k}$$

jest zbilansowana.

### Rozwiązanie

Niech  $\Omega(n)$  oznacza liczbę niekoniecznie różnych dzielników pierwszych liczby  $n$ . Zdefiniujmy dla każdej liczby  $n$  jako  $f(n)$  ciąg

$$f(n) = (\Omega(n), \Omega(n+1), \dots, \Omega(n+k)).$$

Zauważmy, że jeśli  $f(x) = f(y)$ , to ułamki

$$\frac{x}{y}, \frac{x+1}{y+1}, \frac{x+2}{y+2}, \dots, \frac{x+k}{y+k}$$

spełniają warunki zadania, bo dla każdego z rozpatrywanych  $i$  mamy

$$\Omega(x+i) = \Omega(y+i) \implies \frac{x+i}{y+i} \text{ jest zbilansowany.}$$

Wykażemy, że takie  $x$  i  $y$  istnieją za pomocą argumentu ilościowego. Rozpatrzmy liczby od 1 do  $2^n$  dla pewnego  $n$ . Jeśli  $a$  jest jedną z nich, to może mieć ona co najwyżej  $n$  dzielników pierwszych. W przeciwnym przypadku byłaby równa co najmniej  $2^{n+1}$ .

Rozpatrzmy teraz liczby z przedziału od 1 do  $2^n - k$  dla pewnego  $n$ . Jak wykazaliśmy wyżej, jeśli  $1 \leq a \leq 2^n - k$ , to  $f(a)$  zawiera  $k$  liczb z przedziału od 0 do  $n$ , stąd  $f$  może przyjąć jedną z  $k(n+1)$  wartości. Jeśli wszystkie

$$f(1), f(2), \dots, f(2^n - k)$$

miałyby być parami różne, to ich liczba musiałaby być nie większa niż liczba możliwych wartości  $f$  na tym przedziale, skąd

$$\begin{aligned} 2^n - k &\leq k(n+1), \\ 2^n &\leq k(n+2). \end{aligned}$$

Lewa strona tej równości rośnie wykładniczo, a prawa liniowo, stąd dla odpowiednio dużej liczby  $n$  taka równość nie będzie zachodzić. Ta sprzeczność dowodzi, że istnieją pewne  $x$  i  $y$ , że  $f(x) = f(y)$ , z czego jak już pokazaliśmy wynika teza. ■

Powyższy motyw jest dość ciekawy. Nie konstruujemy  $x$  i  $y$  bezpośrednio – w tym przypadku tego raczej nie da się zrobić. Zamiast tego używamy argumentu, który opiera się na tym, że możliwości wyboru  $x$  i  $y$  jest dużo w porównaniu do możliwości wyboru konfiguracji liczb dzielników pierwszych liczb  $x+i$  oraz  $y+i$ . Jeśli chcemy wykazać istnienie czegoś, to czasami przydaje się podobne myślenie – argumenty tego typu rozwiązywały już zadania na finale OM.

#### Zadanie 1

Wykazać, że dla dowolnych liczb całkowitych  $a, b$ , równanie

$$(x^2 - y^2 - a)(x^2 - y^2 - b)(x^2 - y^2 - ab) = 0$$

ma przynajmniej jedno rozwiązanie w liczbach całkowitych  $x, y$ .

#### Zadanie 2

Dana jest liczba całkowita  $n > 1$ , dla której liczba  $2^{2^n-1} - 1$  jest liczbą pierwszą. Wykazać, że  $n$  również jest liczbą pierwszą.

#### Zadanie 3

Dane są dodatnie liczby całkowite  $a, b$  i  $c$ , takie że

$$b \mid a^3, \quad c \mid b^3, \quad a \mid c^3.$$

Wykazać, że

$$abc \mid (a+b+c)^{13}.$$

#### Zadanie 4

Niech  $x, y, z, t$  będą dodatnimi liczbami całkowitymi, takimi, że zachodzi równość

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2000!.$$

Wykazać, że każda z liczb  $x, y, z, t$  jest większa niż  $10^{200}$ .

#### Zadanie 5

Niech  $n$  będzie liczbą całkowitą, a  $p$  liczbą pierwszą. Wiadomo, że liczba  $np + 1$  jest kwadratem liczby całkowitej. Wykazać, że  $n + 1$  można zapisać za pomocą sumy  $p$  kwadratów liczb całkowitych.

#### Zadanie 6

(a) Wykazać, że dla dowolnej liczby całkowitej  $m$  istnieje taka liczba całkowita  $n \geq m$ , że

$$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdots \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor = \binom{n}{m} (*)$$

(b) Niech  $p(m)$  będzie najmniejszą liczbą  $n \geq m$ , że zachodzi równanie (\*). Udowodnić, że  $p(2018) = p(2019)$ .

# Maksima, niezmienniki i procesy

## Przykład 1

Na stole leży 999 monet w jednym stosie. W każdym ruchu można wziąć jedną monetę z pewnego stosu, który zawiera co najmniej dwie monety, a następnie dowolnie podzielić pozostałe monety na dwa niepuste stosy. Rozstrzygnąć, czy można tak wykonywać ruchy, aby na końcu zostały jedynie stosy, w których jest 5 monet.

## Rozwiązanie

Wykażemy, że nie jest to możliwe. Zauważmy, że w każdym ruchu liczba monet na stole zmniejsza się o 1, a liczba stosów zwiększa się o 1. Toteż suma tych dwóch liczb się nie zmienia. Skoro początku wynosi ona  $999 + 1 = 1000$ , to zawsze będzie tyle wynosić.

Jeśli po wykonaniu pewnej liczby ruchów na stole będzie  $n$  stosów po 5 monet w każdym z nich, to suma liczby monet na stole i liczby stosów wyniesie  $5n + n = 6n$ . Z tego co wykazaliśmy musiałaby zająć równość

$$1000 = 6n,$$

co daje sprzeczność, bo liczba 1000 nie jest podzielna przez 6. ■

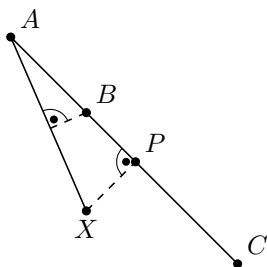
Sumę liczby monet na stole i liczby stosów nazwiemy *niezmiennikiem*. Jest to taka własność, która nie zmienia się wskutek wykonywanych ruchów. W zadaniach, w których mowa o pewnych procesach, warto zawsze takowych poszukać. Teraz pokażemy, jak bardzo przydatne może być analizowanie pewnego elementu maksymalnego.

## Przykład 2

Danych jest  $n \geq 3$  punktów na płaszczyźnie, przy czym nie istnieje prosta, która zawiera je wszystkie. Wykazać, że istnieje prosta, która zawiera dokładnie dwa spośród tych  $n$  punktów.

## Rozwiązanie

Rozpatrzmy parę: prostą  $l$ , która przechodzi przez co najmniej dwa z rozpatrywanych punktów, i punkt  $X$ , który do niej nie należy, przy czym odległość punktu  $X$  od prostej  $l$  jest najmniejsza możliwa spośród wszystkich par tego typu. Zauważmy, że istnieje co najmniej jedna taka para, gdyż w przeciwnym wypadku wszystkie punkty leżały by na jednej prostej.





Załóżmy nie wprost, że na prostej  $l$  leżą co najmniej trzy punkty – oznaczmy dowolne trzy z nich jako  $A$ ,  $B$  i  $C$  – przy czym leżą one w tej kolejności na prostej  $l$ . Niech  $P$  będzie rzutem prostokątnym punktu  $X$  na prostą  $l$ . Załóżmy, bez straty ogólności, że punkty  $A$  i  $B$  leżą po tej samej stronie lub pokrywają się z punktem  $P$ , oraz kolejność punktów na prostej to  $A$ ,  $B$  i  $P$ . Wówczas punkt  $B$  leży bliżej prostej  $AX$  niż wynosi odległość punktu  $X$  do prostej  $l$ . Przeczy to jednak założonej wcześniej minimalności tej odległości. ■

Trzeba zwrócić uwagę, na pewną pułapkę, w którą bardzo często liczni olimpijczycy dają się złapać. Mianowicie na początku tego zadania stwierdziliśmy, że bierzemy najmniejszy element z pewnego zbioru. Aby to jednak było możliwe, to ten zbiór musi być niepusty! Co więcej musi on być ograniczony od dołu. Chociażby nie istnieje najmniejsza liczba całkowita.

W sytuacji, gdy w rozwiązaniu „rozpatrzamy pewien element  $X$ ”, to trzeba zadać sobie pytanie, czy on w ogóle istnieje. Jeśli może zdarzyć się, że nie, to popełniamy błąd. Chociażby pisząc „niech punkt  $P$  będzie przecięciem prostych  $AB$  i  $CD$ ” zakładamy po cichu, że taki punkt istnieje tj. wspomniane proste nie są do siebie równoległe. Jednak co w przypadku, gdy tak nie jest? Trzeba być czujnym na takie pułapki.

#### Zadanie 1

Danych jest  $n$  punktów i  $n$  prostych, przy czym żadne trzy punkty nie są współliniowe oraz żadne dwie proste nie są równoległe. Wykazać, że można tak pogrupować punkty i proste w pary, aby odcinki łączące punkt z jego rzutem prostokątnym na przyporządkowaną do niego prostą, nie przecinały się.

#### Zadanie 2

Niech  $n \geq 2$  będzie dodatnią liczbą całkowitą i niech  $S$  będzie zbiorem zawierającym dokładnie  $n$  różnych liczb rzeczywistych. Niech  $T$  będzie zbiorem wszystkich liczb postaci  $x_i + x_j$ , gdzie  $x_i$  oraz  $x_j$  są różnymi elementami  $S$ . Wykazać, że zbiór  $T$  zawiera co najmniej  $2n - 3$  elementów.

#### Zadanie 3

Niech  $p_1, p_2, p_3, \dots$  będą kolejnymi liczbami pierwszymi, zaś  $x_0$  niech będzie liczbą rzeczywistą pomiędzy 0 i 1. Dla każdej dodatniej liczby całkowitej  $k$ , przyjmijmy

$$x_k = \begin{cases} 0 & \text{if } x_{k-1} = 0, \\ \left\{ \frac{p_k}{x_{k-1}} \right\} & \text{if } x_{k-1} \neq 0, \end{cases}$$

gdzie  $\{x\}$  oznacza część ułamkową  $x$ . (Część ułamkowa  $x$  jest równa  $x - \lfloor x \rfloor$ ) Znajdź wszystkie liczby  $x_0$  spełniające  $0 < x_0 < 1$ , dla których ciąg  $x_0, x_1, x_2, \dots$  od pewnego momentu jest równy 0.

#### Zadanie 4

Dana jest kratka  $1000 \times 1000$ . W każdą kratkę wpisano strzałkę, która wskazuje jeden z boków kratki. W jednej z tych kratek stoi mrówka. Co sekundę wykonuje ona ruch – rusza się na pole wskazane przez strzałkę w polu, na którym stoi, a następnie obraca tę strzałkę o  $90^\circ$  zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Wykazać, że mrówka wyjdzie kiedyś z wyjściowego kwadratu.

#### Zadanie 5

Na tablicy zapisano pewną liczbę naturalną. W każdym ruchu możemy zastąpić aktualnie zapisaną liczbę  $x$  jedną z liczb

$$2x + 1 \quad \text{lub} \quad \frac{x}{x + 2}.$$

Wykazać, że jeśli na tablicy pojawiła się liczba 2000, to była tam ona od samego początku.

#### Zadanie 6

Niech  $n$  będzie dodatnią liczbą całkowitą. Syzyf wykonuje ruchu na planszy, która zawiera  $n + 1$  pól, ponumerowanych 0 do  $n$  od lewej do prawej. Początkowo  $n$  kamieni znajduje się nie polu o numerze 0, zaś inne pola są puste. W każdym ruchu, Syzyf wybiera niepuste pole, niech ono zawiera  $k$  kamieni, bierze jeden kamień i przesuwa go w prawo o co najwyżej  $k$  pól (kamień musi pozostać na planszy). Celem Syzyfa jest przeniesienie wszystkich kamieni z pola o numerze 0 na pole o numerze  $n$ . Wykazać, że Syzyf nie może osiągnąć swojego celu w mniej niż

$$\left\lceil \frac{n}{1} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + \cdots + \left\lceil \frac{n}{n} \right\rceil$$

ruchach.

# Wielomiany 2

W tym rozdziale przedstawione zostaną trzy twierdzenia na temat wielomianów. Są to dwa twierdzenia teorioliczne i jedno z analizy matematycznej. Pokazuje to, że wielomiany są strukturą, która znajduje zastosowanie w wielu działach matematyki.

## Twierdzenie 1

Dany jest wielomian  $P(x)$  o współczynnikach całkowitych oraz dwie różne liczby całkowite  $a, b$ . Wówczas zachodzi podzielność

$$a - b \mid P(a) - P(b).$$

## Dowód

Zauważmy, że dla dowolnej liczby naturalnej  $k$  prawdziwa jest podzielność

$$a - b \mid a^k - b^k.$$

Powyższe twierdzenie wprost z niej wynika, gdyż jeśli przyjmiemy, że  $P(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i$ , to

$$P(a) - P(b) = \sum_{i=0}^n c_i a^i - \sum_{i=0}^n c_i b^i = \sum_{i=0}^n c_i (a^i - b^i).$$

Skoro każdy ze składników jest podzielny przez  $a - b$ , to w szczególności cała suma jest podzielna. ■

Powyższe twierdzenie można przedstawić w następującej formie. Jeśli mamy pewien wielomian  $P$  o współczynnikach całkowitych oraz liczby całkowite  $a, b$  i  $n > 0$ , przy czym

$$a \equiv b \pmod{n},$$

to wówczas

$$P(a) \equiv P(b) \pmod{n}.$$

## Twierdzenie 2

Dane są liczby całkowite  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , liczba wymierna  $\frac{p}{q}$ ,  $\text{NWD}(p, q) = 1$ , oraz wielomian

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad \text{przy czym } W\left(\frac{p}{q}\right) = 0.$$

Wtedy

$$p \mid a_0 \quad \text{oraz} \quad q \mid a_n.$$

## Dowód

Rozpiszmy równość  $W\left(\frac{p}{q}\right) = 0$  i pomnóżmy ją przez  $q^n$  stronami

$$\begin{aligned} a_n \cdot \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \cdot \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots + a_1 \cdot \frac{p}{q} + a_0 &= 0, \\ a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} q + \dots + a_1 \cdot p^1 q^{n-1} + a_0 \cdot q^n &= 0. \end{aligned}$$

Zauważmy, że po lewej stronie wszystkie jednomiany poza  $a_n \cdot p^n$  dzielą się przez  $q$ . Skoro sumują się do zera, czyli do liczby podzielnej przez  $q$ , to liczba  $a_n \cdot p^n$  musi się dzielić przez  $q$ . Skoro  $p$  i  $q$  są względnie pierwsze, to  $p^n$  i  $q$  będą względnie pierwsze, czyli  $q$  musi dzielić  $a_n$ . Dowód, że  $p$  dzieli  $a_0$  jest analogiczny i wynika z faktu, że wszystkie wielomiany poza  $a_0 \cdot q^n$  dzielą się przez  $p$ . ■

### Przykład 1

Dany jest niestały wielomian  $W(x)$  o współczynnikach całkowitych. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych  $p_i$ , dla których istnieje taka liczba całkowita  $n$ , że  $p_i \mid W(n)$ .

### Dowód

Założmy, że zbiór liczb pierwszych, dla których istnieje element  $W$  przez nią podzielny, jest skończony. Oznaczmy te liczby jako  $p_1, p_2, \dots, p_k$ . Niech

$$a = \max(v_{p_1}(P(0)), v_{p_2}(P(0)), \dots, v_{p_k}(P(0))) \quad \text{oraz} \quad M = (p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k)^{a+1}.$$

Wykażemy, że dla dowolnej liczby całkowitej  $t$  oraz liczby całkowitej  $1 \leq i \leq k$  zachodzi nierówność

$$v_p(W(t \cdot M)) < v_p(M).$$

Zauważmy, że dla dowolnej liczby całkowitej  $t$  na mocy Twierdzenia 1 mamy

$$M \mid t \cdot M \mid W(t \cdot M) - W(0).$$

Jeśli liczba  $W(t \cdot M)$  byłaby podzielna przez  $p_i^{a+1}$ , to skoro liczba  $W(0)$  nie jest podzielna przez  $p_i^{a+1}$ , to ich suma również by nie była. Zaś ich dzielnik – liczba  $M$  – jest podzielna przez  $p_i^{a+1}$ . Stąd liczba  $W(t \cdot M)$  nie może być podzielna przez  $p_i^{a+1}$ . Stąd

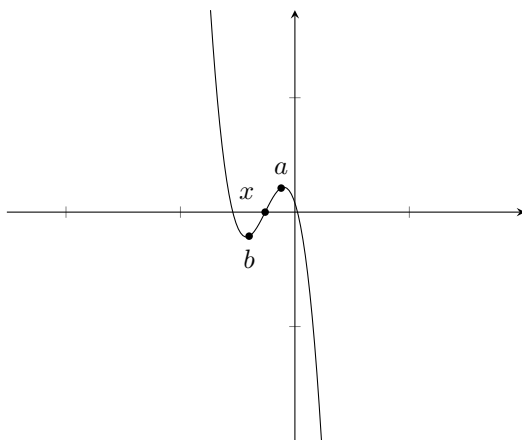
$$v_{p_i}(W(t \cdot M)) < a + 1 = v_{p_i}(M).$$

Skoro  $W(t \cdot M)$  na mocy założeń nie ma innych dzielników pierwszych niż liczby  $p_i$ , to  $W(t \cdot M)$  jest dzielnikiem liczby  $M$ . Liczba dzielników liczby  $M$  jest skończona, a liczb postaci  $t \cdot M$  jest nieskończenie wiele. Toteż pewien dzielnik  $M$  jest przyjmowany nieskończenie wiele razy przez wielomian  $W$ . Nie jest to możliwe, gdy wielomian  $W$  nie jest stały. ■

Następnego twierdzenia nie będziemy dowodzić, gdyż jest ono bardzo intuicyjne, a dowód jest trudny i bardzo formalny.

### Twierdzenie 3

Niech  $W(x)$  będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Jeśli  $a < b$  są liczbami rzeczywistymi, przy czym  $W(a) < 0$  i  $W(b) > 0$ , to istnieje takie  $x \in (a, b)$ , że  $W(x) = 0$



Powyższe twierdzenie nazywane jest *własnością Darboux*. Mówi ono tyle, że jeśli w pewnym momencie wartość wielomianu jest poniżej zera, a w innym powyżej, to wielomian musi przeciąć oś OX. Powyższe twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich funkcji ciągłych.

Teraz pokażemy zadanie, w którym trzeba udowodnić, że pewien wielomian jest nierozkładalny na wielomiany o współczynnikach całkowitych. Ten motyw powtarza się w zadaniach olimpijskich.

### Przykład 2

Dane są parami różne liczby całkowite  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , gdzie  $n \geq 1$ . Wykazać, że wielomian

$$P(x) = ((x - a_1)(x - a_2) \cdot \dots \cdot (x - a_n))^2 + 1$$

nie jest iloczynem dwóch wielomianów dodatnich stopni o współczynnikach całkowitych.

### Dowód

Założmy nie wprost, że istnieją takie niestale wielomiany o współczynnikach całkowitych  $A$  i  $B$ , że

$$P(x) = A(x)B(x).$$

Wówczas dla każdego  $1 \leq i \leq n$  zachodzi

$$A(a_i)B(a_i) = P(a_i) = 1.$$

Więc  $A(a_i) = B(a_i) = \pm 1$ .

Jeśli  $A$  byłoby równe 1 dla pewnego  $a_i$ , zaś równe  $-1$  dla pewnego  $a_j$ , to wówczas na mocy własności Darboux ma pierwiastek. Jeśli istnieje takie  $\alpha$ , że  $A(\alpha) = 0$ , to

$$P(\alpha) = A(\alpha)B(\alpha) = 0.$$

Łatwo zauważyć, że

$$P(\alpha) = ((\alpha - a_1)(\alpha - a_2) \cdot \dots \cdot (\alpha - a_n))^2 + 1 \geq 1 > 0,$$

co daje sprzeczność.

Stąd albo

$$A(a_i) = B(b_i) = 1$$

dla wszystkich  $i$ , albo

$$A(a_i) = B(b_i) = -1$$

dla wszystkich  $i$ . Rozpatrzmy pierwszy przypadek, drugi będzie analogiczny. Jeśli  $A$  dla  $n$  liczb przyjmuje wartość 1 oraz jest niestały, to jego stopień wynosi co najmniej  $n$ . Suma ich stopnie wynosi tyle, ile wynosi stopień ich iloczynu  $A(x)B(x) = P(x)$ , czyli  $2n$ . Stąd też oba te wielomiany mają stopień  $n$ . Zauważmy również, że skoro wielomian  $P(x) = A(x)B(x)$  jest unormowany, to współczynniki wiodące  $A$  i  $B$  są albo oba równe 1, albo oba równe  $-1$ .

Rozpatrzmy wielomian  $A(x) - B(x)$ . Dla każdego  $x = a_i$ , których jest łącznie  $n$ , przyjmuje wartość 0. Skoro wielomiany  $A$  i  $B$  mają stopień  $n$  i równy współczynnik wiodący, to ich różnica będzie miała współczynnik wiodący nie większy niż  $n - 1$ . Łącząc powyższe wnioski, na mocy jednego z twierdzeń wykazanych w rozdziale Wielomiany, mamy

$$A(x) = B(x).$$

Stąd

$$A(x)^2 = A(x)B(x) = P(x) = ((x - a_1)(x - a_2) \cdot \dots \cdot (x - a_n))^2 + 1$$

$$A(x)^2 = ((x - a_1)(x - a_2) \cdot \dots \cdot (x - a_n))^2 + 1,$$

$$(A(x) - (x - a_1)(x - a_2) \cdot \dots \cdot (x - a_n))(A(x) + (x - a_1)(x - a_2) \cdot \dots \cdot (x - a_n)) = 1.$$

Po lewej stronie mamy iloczyn dwóch niezerowych wielomianów, z których co najmniej jeden ma stopień  $n$ . Toteż ich iloczyn ma stopień co najmniej  $n$ , co oczywiście jest sprzeczne z powyższą równością. ■

Z powyższego rozwiązania warto zapamiętać użycie własności Darboux do wykazania, że wielomian ma pierwiastek. Warto też patrzeć na współczynniki wiodące wielomianów – w powyższym rozwiązaniu odegrało to ważną rolę.

### Zadanie 1

Niech  $a, b, c$  będą trzema parami różnymi liczbami całkowitymi. Wykazać, że nie istnieje taki wielomian  $P(x)$  o współczynnikach całkowitych, że zachodzą równości

$$P(a) = b, \quad P(b) = c, \quad P(c) = a.$$

### Zadanie 2

Udowodnić, że istnieje taki wielomian  $W$  stopnia 100 o współczynnikach całkowitych, że dla każdej liczby całkowitej  $n$  liczby

$$n, \quad W(n), \quad W(W(n)), \quad W(W(W(n))), \dots$$

są parami względnie pierwsze.

### Zadanie 3

Dany jest wielomian  $W(x)$  o współczynnikach rzeczywistych, który ma niezerowy współczynnik przy  $x^1$ . Wykazać, że istnieje taka liczba rzeczywista  $a$ , że

$$W(a) \neq W(-a).$$

### Zadanie 4

Niech  $P, Q$  będą wielomianami o współczynnikach rzeczywistych, dla których zachodzi równość

$$P(Q(x)) = Q(P(x)).$$

Wykazać, że jeśli nie istnieje taka liczba rzeczywista  $x$  dla której  $P(x) = Q(x)$ , wówczas również nie istnieje taka liczba rzeczywista  $x$ , dla której prawdą jest, że  $P(P(x)) = Q(Q(x))$ .

### Zadanie 5

Znaleźć wszystkie wielomiany  $W$  o współczynnikach rzeczywistych, mających następującą własność: jeśli  $x + y$  jest liczbą wymierną, to  $W(x) + W(y)$  jest liczbą wymierną.

### Zadanie 6

Jaś i Małgosia grają w grę. Jaś ma pewną funkcję

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0,$$

gdzie  $a_0, \dots, a_n$  to są liczby dodatnie całkowite i  $n \geq 3$ . W każdym ruchu Małgosia podaje pewną liczbę rzeczywistą  $x$ , po czym Jaś musi podać Małgosi wartość  $f(x)$ . Taki ruch powtarzają kilkakrotnie. Małgosia wygrywa, jak wie, ile wynoszą wszystkie liczby  $a_0, a_1, \dots, a_n$ . Znajdź, w zależności od  $n$ , taką liczbę ruchów, że Małgosia na pewno w tych ruchach wygra.

# Kombinatoryka z elementami geometrii

Zajmiemy się teraz zadaniami z kombinatoryki, które dzieją się na płaszczyźnie. Niektóre z nich wymagają pewnej wiedzy geometrycznej, niektóre nie. Pokażemy jeden przykład, ale główną częścią tego rozdziału są zadania. Wymagają one niejednokrotnie połączenia metod opisanych w poprzednich rozdziałach.

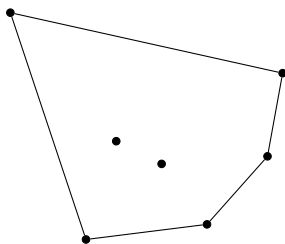
## Przykład 1

Na płaszczyźnie danych jest zbiór  $Z$  10002 punktów  $A_1, A_2, \dots, A_{10002}$ . Niech zbiór  $S$  będzie zbiorem wszystkich długości odcinków  $A_i A_j$  dla dowolnych parami różnych  $i$  oraz  $j$ . Wykazać, że

$$|S| \geq 100.$$

## Rozwiązanie

Rozpatrzmy *otoczkę wypukłą* tych 10002 punktów. Jest to taki zbiór punktów, że tworzy on wielokąt wypukły oraz wszystkie pozostałe punkty należą do wnętrza tego wielokąta. Intuicyjnie można powiedzieć, że jeśli rozciągniemy gumkę wokół wszystkich punktów, a następnie ją puścimy, to stworzy ona otoczkę wypukłą.



Weźmy dwa punkty  $A, B$  będące wierzchołkami otoczki wypukłej  $Z$ . Wykażemy, że dla dowolnych liczb dodatnich  $k, l \in S$ , istnieje dokładnie jeden taki punkt  $X \in Z$ , że

$$AX_i = k, \quad BX_i = l.$$

Rozpatrzmy okrąg o środku w  $A$  i promieniu  $k$  oraz okrąg o środku w  $B$  i promieniu  $l$ . Przecinają się one w co najwyżej dwóch punktach. Jeśli są to dwa różne punkty, to są symetryczne względem prostej  $AB$ . Cały zbiór  $Z$  leży po tej samej stronie prostej  $AB$ , toteż co najwyżej jeden z punktów przecięcia tych okręgów należy do  $Z$ .

Zauważmy, że dla każdego  $X \in Z - \{A, B\}$  liczby  $AX$  i  $BX$  należą do zbioru  $S$ . Łącząc powyższe obserwacje otrzymujemy, że liczba elementów  $Z$  poza  $A$  i  $B$  jest nie większa niż liczba par  $(k, l)$ , gdzie  $k, l \in S$ . Stąd

$$10000 = |Z - \{A, B\}| \leq |S|^2,$$

czyli

$$|S| \geq \sqrt{10000} = 100.$$

■



Warto zapamiętać pojęcie otoczki wypukłej, jest ono bardzo przydatne i pozwala uniknąć dużych trudności w ścisłym opisanu swojego rozwiązania. Niech się tylko czytelnik zastanowi, jak bez pojęcia otoczki wypukłej znaleźć takie dwa punkty  $A$  i  $B$ , że wszystkie inne punkty zbioru  $Z$  są po tej samej stronie prostej  $AB$ .

W powyższym zadaniu narzuca się analogia grafowa – niech punkty będą wierzchołkami, a odcinki krawędziami. Jednak wtedy tracimy bardzo poważne założenie – mianowicie, że te punkty leżą na płaszczyźnie. Jeśli widzimy, że bez tego założenia nie dałoby się rozwiązać zadania, to warto próbować je maksymalnie wykorzystać. W powyższym rozwiązaniu używamy go, aby pokazać, że odległości od  $A$  i  $B$  wyznaczają dokładnie jeden punkt.

W zadaniach z geometrii kombinatorycznej warto próbować korzystać z tego, że zadanie jest geometryczne. Może warto skorzystać z własności pól, nierówności trójkąta czy też pokolorować obszary.

#### Zadanie 1

Każdemu punktowi  $A$  na płaszczyźnie przyporządkowano pewną liczbę rzeczywistą  $f(A)$ . Wiadomo, że  $f(M) = f(A) + f(B) + f(C)$ , gdy  $M$  jest środkiem masy trójkąta  $ABC$ . Wykazać, że  $f(A) = 0$  dla wszystkich punktów  $A$ .

#### Zadanie 2

Dana jest liczba  $n \geq 3$  oraz pewne  $n$  par liczb rzeczywistych  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ , że dla każdej liczby całkowitej  $1 \leq i \leq n$  zachodzi

$$x_i^2 + y_i^2 = 1.$$

Wykazać, że istnieje taka liczba  $i$ , że zachodzi nierówność

$$(x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2 \leq \frac{4\pi^2}{n^2},$$

przy czym  $x_{n+1} = x_1$  oraz  $y_{n+1} = y_1$ .

#### Zadanie 3

Rozstrzygnąć, czy istnieje taki wielokąt wypukły, że dla każdego jego boku i każdego jego wierzchołka, przy czym rozpatrywany wierzchołek nie należy do rozpatrywanego boku, rzut prostokątny tego wierzchołka na prostą zawierającą ten bok leży poza rozpatrywanym bokiem.

#### Zadanie 4

Danych jest 100 czerwonych punktów na płaszczyźnie, przy czym żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Prostą *dzielącą* będziemy nazywać każdą prostą, która przechodzi przez dwa czerwone punkty oraz po obu jej stronach jest po 49 czerwonych punktów. Wykaż, że istnieje przynajmniej 50 prostych *dzielących*.

#### Zadanie 5

W pewnym  $n$ -kącie foremnym poprowadzono  $n - 3$  przekątne, tak, że żadne dwie z nich się nie przecinają w punkcie innym niż wierzchołek danego wielokąta oraz z każdego wierzchołka wychodzi nieparzysta liczba przekątnych. Wykazać, że liczba  $n$  jest podzielna przez 3.

#### Zadanie 6

Znaleźć wszystkie skończone zbiory  $\mathcal{S}$  punktów na płaszczyźnie, że dla dowolnych trzech punktów  $A, B, C \in \mathcal{S}$  istnieje taki punkt  $D \in \mathcal{S}$ , że czworokąt  $ABCD$  jest równoległobokiem.

# Szachownice, klocki i kolorowanie

Zajmiemy się teraz zadaniami związanymi z planszami, wypełnianiem ich klockami oraz dowodzeniem, że to nie jest możliwe. Bardzo często wykonuje się to za pomocą pokolorowania lub wpisania odpowiednich liczb w pola planszy.

## Przykład 1

Szachownicę o wymiarach  $2018 \times 2018$  przykryto przy pomocy jednej kwadratowej płytki o wymiarach  $2 \times 2$  oraz  $\frac{2018^2 - 4}{5}$  prostokątnych płytek o wymiarach  $1 \times 5$  w taki sposób, że każde pole szachownicy jest przykryte przez dokładnie jedną płytkę (płytki można obracać). Wykazać, że płytka  $2 \times 2$  nie przykrywa żadnego pola o krawędzi zawartej w brzegu szachownicy.

## Rozwiązanie

Wpiszmy w pola planszy liczby, tak jak to zrobiono na rysunku. W pierwszym wierszu są liczby 1, w drugim liczby 2, ..., w piątym liczby 5, w szóstym znowu 1, w siódmym dwa itd. Innymi słowy w każde pole wpisujemy resztę z dzielenia numeru wiersza przez 5.

1	1	1	1	1	...	1	1	1	1
2	2	2	2	2	...	2	2	2	2
3	3	3	3	3	...	3	3	3	3
4	4	4	4	4	...	4	4	4	4
5	5	5	5	5	...	5	5	5	5
1	1	1	1	1	...	1	1	1	1
2	2	2	2	2	...	2	2	2	2
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
2	2	2	2	2	...	2	2	2	2
3	3	3	3	3	...	3	3	3	3

Zauważmy, że suma liczb pokrytych klockiem  $1 \times 5$  zawsze będzie podzielna przez 5. W tablicy jest po 403 rzędów zawierających same czwórki lub same piątki oraz 404 rzędów zawierających same jedynki, same dwójki lub same trójki. Suma wszystkich liczb zapisanych w tablicy wynosi więc

$$2018(1 \cdot 404 + 2 \cdot 404 + 3 \cdot 404 + 4 \cdot 403 + 5 \cdot 403) \equiv 3 \pmod{5}.$$

Stąd płytka  $2 \times 2$  musi pokrywać liczby o sumie dającej resztę 3 z dzielenia przez 5. Jeśli leżałaby przy górnej krawędzi planszy, to dawałaby resztę

$$1 + 1 + 2 + 2 \equiv 1 \pmod{5},$$

czyli nie może tam się znajdować. Analogicznie pokazujemy, że płytką  $2 \times 2$  nie leży przy żadnej z pozostałych krawędzi. ■

Rozwiązując zadania podobne do powyższego zawsze warto rozważyć jak najwięcej możliwych kolorowań/wpisać liczb i zobaczyć, czy z któregoś z nich coś wynika. Nie ma tutaj przepisu, który zawsze działa – trzeba robić to metodą prób i błędów. Warto zwrócić szczególną uwagę na takie kolorowania, że rozpatrywana płytką zawsze pokrywa tę samą liczbę pokolorowanych pól lub suma liczb pokrytych przez klocek zawsze ma pewną właściwość.

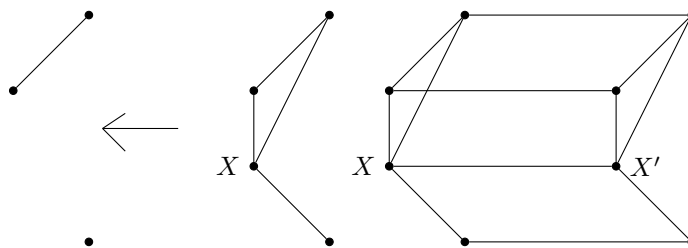
Teraz kolej na przykład pięknego, choć trudnego, zadania z teorii grafów z bardzo ciekawym zastosowaniem kolorowań.

## Przykład 2

Dany jest graf. W każdym ruchu na aktualnym grafie  $G$  można wykonać jedną z dwóch operacji

- Jeśli pewien wierzchołek ma nieparzysty stopień, to usunąć wszystkie krawędzie, które z niego wychodzą.
- Można dodać do grafu  $G$  graf  $G'$  będący kopią grafu  $G$ . Następnie łączymy odpowiadające sobie wierzchołki z  $G$  oraz  $G'$ .

Wykazać, że niezależnie od grafu początkowego, można wykonać pewną liczbę operacji, aby otrzymać graf bez żadnej krawędzi.



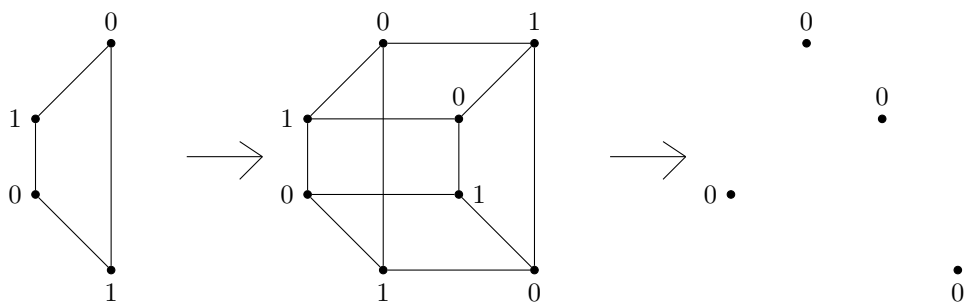
W powyższym przykładzie możemy chociażby usunąć wierzchołek  $X$ , albo wykonać dodać do grafu jego kopię.

## Rozwiązanie

Pokolorujemy każdy z wierzchołków grafu  $G$ , tak, aby żadne dwa wierzchołki połączone krawędzią nie były tego samego koloru. Niech  $\chi(G)$  oznacza minimalną liczbę kolorów, dla których takie kolorowanie istnieje. Liczbę  $\chi(G)$  będziemy nazywać *liczbą chromatyczną* grafu  $G$ .

Wykażemy, że jeśli graf  $G$  zawiera pewną krawędź, to zawsze istnieje ciąg ruchów, który zmniejszy liczbę chromatyczną danego grafu  $G$ . Jeśli ta liczba wyniesie 1, to będzie oznaczało, że nie  $G$  nie zawiera już żadnej krawędzi. Stąd też wyniknie teza.

Najpierw usuniemy wszystkie wierzchołki, które możemy usunąć. Oczywiście ta operacja nie zwiększy liczby chromatycznej. Otrzymamy w ten sposób graf  $G$ , w którym nie da się usunąć żadnego wierzchołka – wszystkie one mają parzysty stopień.



Następnie użyjemy operacji drugiego typu – połączmy graf  $G$  z jego kopią. Najpierw wykazemy, że liczba chromatyczna otrzymanego grafu jest nie większa niż liczba chromatyczna grafu  $G$ . Załóżmy, że wierzchołki grafu  $G$  da się pokolorować kolorami o numerach od 0 do  $\chi(G) - 1$ , gdzie  $\chi(G) \geq 2$  (w przeciwnym wypadku łatwo uzyskujemy tezę). Pokolorujmy  $G'$  w następujący sposób: Jeśli wierzchołek  $X \in G$  ma kolor  $k$ , to odpowiadający mu wierzchołek  $X' \in G'$  ma pokolorujemy na kolor o numerze  $k + 1 \bmod \chi(G)$ . Łatwo sprawdzić, że takie kolorowanie spełnia warunki zadania.

Przed poprzednią operacją każdy wierzchołek miał stopień parzysty, a więc po jej wykonaniu każdy z wierzchołków będzie miał stopień nieparzysty. Wybierzmy jeden z kolorów – możemy za pomocą pierwszej operacji usunąć wszystkie wierzchołki tego koloru. Istotnie, żadne dwa nie sąsiadują ze sobą, więc usunięcie jednego z nich nie wywrze wpływu na stopień innego wierzchołka tego samego koloru. Po usunięciu wszystkich wierzchołków jednego koloru otrzymamy graf, który jest pokolorowany co najwyżej  $\chi(G) - 1$  kolorami. Ma więc on mniejszą liczbę chromatyczną niż graf  $G$ , czego należało dowieść. ■

Powyższe rozwiązanie jest bardzo pomysłowe. Czytelniczkę/czytelnika może zastanawiać jak na nie wpaść. Nie ma tutaj sposobu ze 100% skutecznością, ale pewne rzeczy mogą pomóc. Przede wszystkim warto próbować jak największej liczby pomysłów. Nawet tych, które na pierwszy rzut oka nie mają wielkiego sensu. Równie ważna jest umiejętność szybkiego rozpoznania, że dany pomysł nie może doprowadzić do rozwiązania. Poza tym niektóre pomysły po prostu trzeba znać, a taka znajomość może zostać wyrobiona jedynie przez rozwiązywanie zadań.

### Uwaga

W każdym z poniższych zadań zakładamy, że klocki, którymi wypełniamy szachownice można obracać.

#### Zadanie 1

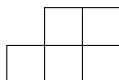
Szachownicę o wymiarach  $15 \times 15$  przykryto przy pomocy płytek o wymiarach  $2 \times 2$  i  $3 \times 3$  w taki sposób, że każde pole jest przykryte przez dokładnie jedną płytkę oraz płytki nie wystają poza szachownicę. Wyznaczyć najmniejszą liczbę użytych płytek  $3 \times 3$ , dla której jest to możliwe.

### Zadanie 2

Płaszczyznę pokolorowano trzema kolorami. Wykazać, że istnieje odcinek o długości 1, który ma końce tego samego koloru.

### Zadanie 3

Czy można wypełnić szachownicę o wymiarach  $8 \times 8$  przy pomocy jednego Z-klocka oraz dowolnej liczby prostokątów  $1 \times 4$ .



### Zadanie 4

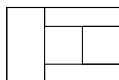
Sad podzielony jest na 100 przystających kwadratów, tworzących szachownicę  $10 \times 10$ . Na dziewięciu kwadratach znajduje się roślina. Co roku roślina rozrasta się na pola, które już sąsiadują – mają wspólny bok – z co najmniej dwoma polami, na których już rośnie roślina. Udowodnić, że roślina nigdy nie rozrośnie się tak, aby zajmować cały sad.

### Zadanie 5

Każdy punkt płaszczyzny pokolorowano jednym z dwóch kolorów. Wykazać, że istnieje taki trójkąt o kątach  $80^\circ$ ,  $80^\circ$  i  $20^\circ$ , że wszystkie jego wierzchołki są jednego koloru.

### Zadanie 6

Prostokąt  $\mathcal{P}$  o wymiarach  $1001 \times 1001$ , podzielono na pewną liczbę prostokątów, z których każdy ma boki długości całkowitej (przykład na rysunku). Wykazać, że z tych prostokątów można wybrać taki jeden, że odległości jego czterech boków od odpowiadających mu boków  $\mathcal{P}$  albo są wszystkie liczbami parzystymi, albo są wszystkie liczbami nieparzystymi.



# Podpowiedzi 1

# Indukcja matematyczna

1. Przeprowadź rozumowanie indukcyjne po liczbie wierzchołków  $n$ .
2. Sprawdź, że równość zachodzi dla  $n = 1$ . Załóż, że równość zachodzi dla  $n$  i spróbuj wykazać ją dla  $n + 1$ .
3. Przeprowadź indukcję po liczbie  $n$ . Skorzystaj dla wszystkich początkowych dysków poza najniższym położonym.
4. Rozpatrz  $n + 1$  punktów i zobacz co się stanie jeśli usuniemy jeden z nich.
5. Spróbuj wykazać tezę indukcyjną po  $n$ . Aby to zrobić, trzeba będzie wykazać indukcyjnie inną równość pomocniczą.
6. Spróbuj podzielić planszę  $2^{n+1} \cdot 2^{n+1}$  na kilka części.
7. Zastosuj indukcję co 2.

# Równania funkcyjne

1. Podstaw  $y = 0$ .
2. Przyjmij  $x = f(y)$ .
3. Wykaż, że  $f(0) = 0$ .
4. Podstaw  $1 - x$  pod  $x$ .
5. Skorzystaj z danego równania dla  $x = 0$ .
6. Podstaw  $y = -x$ .
7. Przyjmij  $x = 0$ .
8. Podstaw  $f(x)$  w miejsce  $x$ .
9. Podstaw:  $x = y = 0$  oraz  $x = y$ .
10. Wykaż, że  $f$  jest różnowartościowa.

# Bijekcje i bajki kombinatoryczne

1. Na ile sposobów spośród  $n$  osób możesz wybrać drużynę i mianować jednego z jej członków kapitanem?
2. Suma liczb rozpatrywanego zbioru wynosi 55.
3. Podzielmy  $2n$  osób na dwie grupy po  $n$  osób. Załóżmy, że z pierwszej grupy wybieramy  $k$  osób. Na ile sposobów możesz to zrobić?



4. „Jeśli pewna permutacja należy do  $A_1$ , to jeśli pomnożymy wszystkie jej elementy przez 2, to będzie należała do  $A_2$ .” To stwierdzenie nie jest poprawne, ale wyraża pomysł na to zadanie.
5. Rozpatrz liczbę podziałów  $kn$  osób na  $k$  grup po  $n$  osób. Nie bierz pod uwagę żadnej kolejności grup, ani kolejności osób w grupie.
6. Zbiory, których średnia arytmetyczna jest liczbą całkowitą, zawierające więcej niż 1 element podziel na pary.
7. Wykaż, że obie strony równości to liczba słów, które składają się z  $n + 1$  liter  $A$  oraz  $r$  liter  $B$ .

## Liczby pierwsze i reszty z dzielenia

1. Weź  $n$  podzielne przez  $p - 1$ .
2. Przemnóż obie strony przez  $b(p - 1)!$ .
3. Podstaw  $n = p - k$  dla pewnej konkretnej liczby całkowitej  $k$ .
4. Podziel zbiór  $\{1, 2, 3, \dots, p - 1\}$  na pary liczb  $(a, b)$ , dla których  $ab \equiv 1 \pmod{p}$ .

## Nierówności między średnimi

1. Skorzystaj z AM-GM dla trzech liczb.
2. Przeszacuj każdy z nawiasów z osobna.
3. Przekształć nierówność zanim skorzystasz ze średnich.
4. Zauważ, że  $a^2 \geq 2a - 1$ .
5. Dodaj coś do obu stron, aby prawa strona równości była ładna.

## Konstrukcje

1. Niech pokolorowane pola tworzą kwadrat.
2. Podziel płaszczyznę na kratki.
3. Podziel trójkąt na mniej takich czworokątów.
4. Rozpatrz rozkłady na czynniki pierwsze.
5. Rozpatrz planszę  $7 \times 7$ , na której każde pole reprezentuje pewną osobę.
6. Spróbuj rozwiązać zadania dla  $a + 1$  i  $a + 2$ .

# Wielomiany

1. Załóż nie wprost, że istnieje pewne niecałkowite  $\alpha$ , że  $W(\alpha) = 0$ .
2. Rozpatrz wielomian o pierwiastkach  $a$ ,  $b$  i  $c$ .
3. Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej  $n$  wielomian  $x^{3n-1} + x + 1$  jest podzielny przez wielomian  $x^2 + x + 1$ .
4. Przeprowadź indukcję po stopniu  $P$ .
5. Rozpatrz wielomian  $Q(x) = W(x) - 5$ .
6. Wykaż, że Tomek jest w stanie, niezależnie od  $n$  wygrać w 2 ruchach.
7. Taki wielomian nie istnieje. Skorzystaj z podobnego pomysłu co we wzorach Viete'a w części teoretycznej.

# Wielomiany

1. Rozpatrz najdłuższą ścieżkę w grafie i spróbuj ją wydłużyć.
2. Skorzystaj z indukcji matematycznej.
3. Rozpatrz graf, w którym wierzchołkami będą drużyny. Połączymy je czerwoną krawędzią, gdy grały mecz pierwszego dnia, zieloną, gdy drugiego.
4. Wykaż, że mając pewien graf z pewnym kolorowaniem, to wybierając dwa dowolne wierzchołki  $u$  oraz  $v$  jesteśmy w stanie zmienić parzystość liczby kolorowych krawędzi wychodzących z nich, nie naruszając tej liczby dla innych wierzchołków.
5. Wybierz jeden wierzchołek, następnie usuń wszystkich jego sąsiadów. Powtarzaj taki krok z otrzymanym grafem, aż wszystkie wierzchołki zostaną usunięte. Wybierając mądrze wierzchołki możemy zrobić to tak, że wybierzemy ich odpowiednio dużo.
6. Odpowiedzią jest  $N = 10$ .

## Indukcja matematyczna 2

1. Zauważ, że jeśli kwotę  $k$  złotych da się opłacić w szukany sposób, to kwotę  $k + 3$  również.
2. Rozpatrz punkty  $(a, b)$ , dla których zachodzi równość  $a + b = n + 1$ .
3. Spróbuj rozwiązać zadanie dla liczb podzielnych przez 2, 4, i 8.
4. Usuń pewien specyficzny wierzchołek i zastosuj założenie indukcyjne.
5. Wstaw  $n = 1$ . Wykaż, że  $f(n) = n$  korzystając z indukcji zupełnej po  $n$ .

6. Wykaż ogólniejszą tezę: Niech  $\mathcal{R}$  będzie rodziną zbiorów  $n$ -elementowych. Moc  $\mathcal{R}$  jest większa niż  $n! \cdot k^n$ . Wówczas istnieje  $k+1$ -elementowa rodzina  $\mathcal{G}$ , będąca podrodziną  $\mathcal{R}$ , oraz taki zbiór  $X$ , że dla dowolnych zbiorów  $A, B \in \mathcal{R}$  zachodzi  $A \cap B = X$ .

## Podzielności

1. Rozpatrz największą liczbę całkowitą  $k$ , że  $n \geq k^2$ .
2. Zamień wszystkie założenia i tezę na wyrażenia związane z  $v_p$ .
3. Załóż nie wprost, że jeśli  $d$  i  $d+2$  są dzielnikami  $4n$ , to liczba  $d+1$  również.
4. Wykaż, że  $a+1 \mid b+1$ .
5. Wykaż, że  $a$  i  $b$  dają tę samą resztę z dzielenia przez  $p$ .
6. Załóż, że  $v_p(a)$  nie jest podzielne przez  $k$ . Weź odpowiednie  $n$ , aby uzyskać sprzeczność.

## Gry

1. Zawsze da się uzyskać 1. Wykazać, że da się, być może w kilku ruchach, zmniejszyć zapisaną na tablicy liczbę.
2. Analizuj pola tabeli  $m \times n$  jako stany wygrywające i przegrywające.
3. Wykaż, że liczby parzyste są wygrywające.
4. Podziel planszę na pewne figury. Rozważ strategię, która każde drugiemu graczowi stawiać swój znak w tej samej figurze, w której postawił go gracz pierwszy.
5. Niech dla pewnej liczby  $n$  w pierwszych  $4n$  ruchach nauczyciel narysuje kwadrat o boku  $n$ .
6. Przyjmijmy, że na każdym kamieniu są miejsca na zapisanie dwóch liczb. Jeśli pewna dziewczyna  $a$  przekaże dziewczynie  $b$  kamień po raz pierwszy, to o ile na kamieniu nie jest nic zapisane, to zapisuje się tam numery  $a$  i  $b$ . Jeśli pewna dziewczyna musi przekazać kamień swojej sąsiadce, to jeśli dysponuje kamieniem z zapisanymi numerami swoimi i sąsiadki, to przekaże jej właśnie go. Zobacz, co z tego wynika.

## Bardziej zaawansowane nierówności

1. Skorzystaj z nierówności Schwarza w formie Engela.
2. Rozpatrzmy ciągi  $(a^2, b^2, c^2)$  oraz  $bc, ac, ab$ .
3. Przyda się jedynka trygonometryczna, jak i fakt, że sinus i cosinus przyjmują wartości o module mniejszym od 1.

4. Skorzystaj z nierówności o ciągach jednomonotonicznych.
5. Zobacz co się stanie, gdy podstawisz  $a = 0$ .

## Równania funkcyjne i wielomianowe

1. Wykaż, że  $f(f(0)) = 0$  oraz, że jeśli  $f(f(a)) = 0$ , to  $a = 0$ .
2. Udowodnij, że  $f(1) = 2$ .
3. Zauważ, że da się podstawić takie  $y$ , aby  $f(x^2 + y) = f(x^{2^7} + 2y)$ .
4. Niech  $d(n)$  oznacza liczbę dzielników. Wykaż, że  $d(f(n)) = f(d(n))$ .
5. Podstaw  $x = 0$ . Wykaż, że  $f$  jest różnowartościowa i że przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste.
6. Niech  $f$  będzie różnowartościową funkcją, która przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste poza zerem.

## Twierdzenia z teorii liczb

1. Zauważ, że jeśli  $d$  dzieli  $n$ , to  $\frac{n}{d}$  również dzieli  $n$ .
2. Taka liczba istnieje.
3. Rozpatrz liczby postaci  $a^k$ .
4. Sprawdź dla małych  $p$  ile ta suma wynosi.
5. Użyj generatorów modulo  $p$ .
6. Wykaż, że jedna spośród liczb od 1 do  $b_1 b_2 \cdot \dots \cdot b_n$  spełnia warunki zadania.

## Grafy skierowane

1. Ponumeruj wierzchołki od 1 do  $n$ . Usuń wszystkie krawędzie, dla których wierzchołek początkowy ma mniejszy numer niż końcowy. Co się wówczas stanie?
2. Zauważ, że teza dla grafu cyklicznego jest trywialna.
3. Rozpatrz taki podział, w którym liczba krawędzi, mających dwa końce w jednym zbiorze jest minimalna.
4. Zauważ, że  $A_k$  oraz  $A_{k+1}$  zdobyli razem co najmniej 999 punktów. Wykaż, że jeśli zdobyli ich co najmniej 1000, to łączna liczba punktów zdobyta przez wszystkich graczy nie będzie się zgadzać.
5. Każda z osób musiała zdobyć  $\frac{n-1}{2}$  punktów.

6. Usuń z grafu tyle krawędzi, aby nie było żadnego cyklu i liczba usuniętych krawędzi była najmniejsza możliwa.

## Ciągi

1. Jeśli przemnożymy wszystkie wyrazy ciągu arytmetycznego przez  $k$ , to co się stanie?
2. Odpowiedź wynosi  $n(n+1)$ .
3. Znajdź wzór na  $u_n$ . Spróbuj policzyć  $u_n$  dla małych  $n$ .
4. Znajdź wzór ogólny na  $a_n$ .
5. Podnieś równanie rekurencyjne do kwadratu stronami.
6. Zauważ, że liczba pod pierwiastkiem musi być dodatnia.
7. Wykaż również, że jeśli dla pewnej liczby całkowitej  $n$  zachodzi nierówność  $\text{NWD}(n, a_{n-1}) > 1$ , to  $a_n = 3n$ .

## Rozstrzygnij, czy

1. Użyj modulo.
2. Szukane zbiory istnieją.
3. Nie ma funkcji, które spełniają warunki zadania.
4. Szukana konfiguracja istnieje.
5. Konik może tak skakać.
6. Szukany zbiór istnieje.

## Grafy 2

1. Rozpatrz dwie osoby, które się nie znają, o ile takowe istnieją.
2. Wykaż, że zachodzi warunek z tw. Halla.
3. Rozpatrz jedną krawędź. Wykaż, że zostanie ona usunięta.
4. Wykaż, że  $2e \geq 3f$ .
5. Rozpatrz najdłuższą ścieżkę w grafie.
6. Zauważ, że graf o  $n$  wierzchołkach i  $n-2$  krawędziach nie jest spójny.

## Nierówności z pomysłem

1. Rozpatrz  $x = y = -1$ .
2. Zauważ, że  $0 < 1 - y < 1$ .
3. Wykonaj takie podstawienie jak w Przykładzie 1.
4. Niech  $a$  będzie najmniejszą z tych liczb. Podstaw  $b = a + x$  i  $c = a + y$ .
5. Jedynym działającym  $k$  jest  $\frac{3}{4}$ .
6. Podstaw  $x_i = \lfloor a_i \rfloor$ . Zauważ, że  $a_i \leq x_i^2 + 2x_i$ .

## Klasyczne zadania z teorii liczb

1. Zauważ, że każdą liczbę nieparzystą da się przestawić w postaci  $x^2 - y^2$ .
2. Niech  $a, b$  będą liczbami całkowitymi większymi od 1. Wykaż, że  $2^{ab} - 1$  jest złożona.
3. Wyrażenie  $(a + b + c)^{13}$  po wymnożeniu składa się z wyrażen postaci  $a^k b^l c^{13-k-l}$  pomnożonych przez pewne całkowite współczynniki.
4. Rozpatrz reszty z dzielenia przez 8.
5. Przyjmij, że  $np + 1 = a^2$ .
6. Wykaż, że

$$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdots \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor \geq \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdots \frac{n-m+1}{m} = \binom{n}{m}.$$

## Maksima, niezmienniki i procesy

1. Rozpatrz takie przyporządkowanie, że suma rozpatrywanych odcinków jest minimalna.
2. Załóżm, że zbiór  $S$  zawiera liczby

$$x_n > x_{n-1} > \dots > x_2 > x_1.$$

Skorzystaj z tego posortowania.

3. Wykaż, że dla  $x_0$  wymiernego kiedyś pojawi się 0, a dla  $x_0$  niewymiernego nie.
4. Zauważ, że jeśli na pewnym polu mrówka stanie co najmniej  $4n$  razy, to  $n$  razy strzałka będzie skierowana w górę.
5. Poszukaj niezmiennika.
6. Wyróżnij jeden kamień, który Syzyf będzie ruszał tylko wtedy, gdy na polu nie ma żadnego innego kamienia.

## Wielomiany 2

1. Skorzystaj z Twierdzenia 1.
2. Weź taki wielomian, aby  $W(n)$ ,  $W(W(n))$ , ..., dawały reszty 1 z dzielenia przez  $n$ .
3. Rozpatrz wielomian  $W(x) - W(-x)$ .
4. Wykaż, że  $P(x) > Q(x)$  dla wszystkich liczb rzeczywistych  $x$  lub  $P(x) < Q(x)$  dla wszystkich liczb rzeczywistych  $x$ .
5. Niech  $q$  będzie liczbą wymierną. Zauważ, że wielomian  $W(x) + W(2q - x)$  przyjmuje tylko wartości wymierne.
6. Małgosia jest w stanie wygrać w 2 ruchach.

## Kombinatoryka z elementami geometrii

1. Rozpatrz trójkąt równoboczny i jego środek ciężkości.
2. Rozpatrz punkty o współrzędnych  $(x_i, y_i)$ .
3. Szukany wielokąt nie istnieje.
4. Udowodnij, że przez każdy punkt przechodzi co najmniej jedna prosta dzieląca.
5. Pokoloruj trójkąty, na które podzielony jest dany wielokąt, na białe i czarne, tak, by żadne dwa sąsiadujące trójkąty nie były jednokolorowe.
6. Rozpatrz trójkąt  $ABC$  o największym polu.

## Szachownice, klocki i kolorowanie

1. Oblicz liczbę pól jaką zajmują klocki każdego typu.
2. Zauważ, że trójkąt równoboczny ma różnokolorowe wierzchołki.
3. Pokoloruj planszę w pewien sposób.
4. Rozpatrz obwód figury, która zawiera pola z roślinami.
5. Rozpatrz trójkąt ze środkami jego boków.
6. Pokoloruj prostokąt w szachownicę.

## Podpowiedzi 2



# Indukcja matematyczna

1. Rozpatrz trójkąt tworzony przez trzy kolejne wierzchołki  $n$ -kąta.
2. Odejmij stronami tezę zadania dla  $n + 1$  i  $n$ .
3. Z założenia indukcyjnego możemy przenieść wszystkie dyski, poza najniżej położonym, na drugą igłę. Należy zauważyć, że dysk, którego nie używamy nie przeszkodzi w wykonaniu takiego przełożenia.
4. Co mówi założenie indukcyjne? Rozpatrz przypadek, gdy z wyróżnionego punktu wychodzą krawędzie różnych kolorów.
5. Wykaż, że dla każdej liczby  $n$  zachodzi równość  $a_{n+1} = 1 - a_1 a_2 a_3 \cdot \dots \cdot a_n$ .
6. Podziel planszę na cztery części na pomocą dwóch prostych.
7. Usuń dwie liczby i podziel na dwa zbiory o równej sumie elementów.

# Równania funkcyjne

1. \*
2. Zauważ, że  $f$  jest funkcją liniową.
3. Podstaw  $x = 0$  i  $y = -f(0)$ .
4. Otrzymane równanie tworzy z równaniem wyjściowym układ równań.
5. Wykaż, że  $f(x) = x + a$  dla pewnej liczby  $a$ .
6. Zauważ, że wartość wyrażenia  $f(x) - x$  musi być stała. Skorzystaj z różnowartościowości  $f$ .
7. Przyjmij  $y = 0$ .
8. Zauważ, że  $f(x + 1) = f(f(f(x))) = f(x) + 1$ .
9. Wykonaj podstawienie  $x = 0$ . Wykaż, że  $f(x + y) = f(x - y)$ .
10. Załóż, że  $f(a) = f(b)$  i wykaż, że  $a = b$ .

# Bijekcje i bajki kombinatoryczne

1. Na ile sposobów możesz to zrobić, jeśli założysz, że drużyna składa się z  $k$  osób?
2. Połącz zbiory w pary, tak, aby zbiór spełniający warunki zadania był połączony ze zbiorem, który ich nie spełnia.
3. \*

4. Znajdź taką funkcję  $f$  ze zbioru  $\{1, 2, 3, \dots, p\}$  w zbiór  $\{1, 2, 3, \dots, p\}$ , że dla każdego  $x$  zachodzi równość  $f(x) \equiv 2x \pmod{p}$ .
5. Wykaż, że takich podziałów jest  $\frac{(kn)!}{(n!)^k \cdot k!}$ .
6. Zauważ, że zbiór może zawierać i nie zawierać swojej średniej arytmetycznej.
7. Przyjmij, że na miejscu  $n + k + 1$  znajduje się ostatnia litera  $A$ .

## Liczby pierwsze i reszty z dzielenia

1. Wykaż, że jeśli  $n$  dzieli się przez  $p - 1$ , to  $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .
2. Zauważ, że dzielenie przez  $i$  to jest mnożenie przez  $i^{-1}$ .
3. Podstaw  $n = p - 2$ .
4. Zauważ, że każda liczba poza  $-1$  i  $1$  będzie w parze z dokładnie jedną inną liczbą. Dlaczego  $1$  i  $-1$  nie mają tej własności.

## Nierówności między średnimi

1. Skorzystaj z tej nierówności dla liczb, których iloczyn wyniesie  $1$ .
2. Udowodnij tezę dla  $n = 2$ .
3. Zauważ, że  $\frac{a}{b+c} + 1 = \frac{a+b+c}{b+c}$ .
4. Wykaż, że  $a + b + c \geq 3$ .
5. Skorzystaj z najprostszej postaci nierówności AM-GM dla  $2$  liczb.

## Konstrukcje

1. \*
2. Podziel płaszczyznę na kratki o przekątnej długości  $1$ .
3. Podziel trójkąt na  $3$  takie czworokąty.
4. Zauważ, że jeśli  $p$  jest liczbą pierwszą i  $p \mid c$ , to  $p \mid a$  lub  $p \mid b$ .
5. Rozpatrz wszystkie kolorowania powstające w następujący sposób. Kolorujemy dowolna pola w najniższym i drugim najniższym wierszu. Załóżmy, że są to pola  $a$ -te i  $a + k$ -te (być może  $k < 0$ ). Wówczas w trzeciej kolumnie pokolorujemy pole  $a + 2k \pmod{7}$ , w czwartej  $a + 3k \pmod{7}$  itd.
6. Zauważ, że w zadaniu z  $a + 1$  i  $a + 2$  działają liczby  $1, 2, 1$ .

# Wielomiany

1. Podstaw  $x = \alpha$ .
2. Wykaż, że 1 jest pierwiastkiem rozpatrywanego wielomianu.
3. Rozpatrz różnicę wielomianów  $x^{3n-1} + x + 1$  dla  $n + 1$  i  $n$ .
4. Weź wielomian  $a((x + 1)^{n+1} - x^{n+1})$  dla pewnej stałej  $a$ . Zobacz na jego stopień i współczynnik wiodący.
5. Skorzystaj z twierdzenia Bezouta.
6. Rozpatrz  $W(10^k)$  dla bardzo dużego  $k$ . Spróbuj zrobić to dla jakichś konkretnych wielomianów.
7. Wykaż, że  $a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_{1000}$ ,  $\sum_{1 \leq i \leq 1000} a_i$  oraz  $\sum_{1 \leq i < j \leq 1000} a_i a_j$  są równe  $-1$  lub  $1$ .

# Wielomiany

1. Rozpatrz pierwszy wierzchołek tej ścieżki.
2. Z założenia indukcyjnego istnieje cykl o długości  $n - 1$ , który spełnia warunki zadania. Wykaż, że można do niego dołożyć usunięty w celu indukcji wierzchołek, aby cykl dalej spełniał warunki zadania.
3. Wykaż, że ten graf to pewna liczba rozłącznych cykli.
4. Dla danych wierzchołków  $u, v$ , zmień stan wszystkich krawędzi na ścieżce między  $u$  i  $v$ .
5. Wybieraj wierzchołek o największym stopniu.
6. Mając dany wierzchołek, ucinając wszystkich jego sąsiadów, Herkules rozspójni graf.

## Indukcja matematyczna 2

1. Wykaż, że kwoty 8, 9 i 10 złotych da się opłacić bez wydawania reszty.
2. Gdy wyróżnione punkty są przykryte prostą, to można zaaplikować założenie indukcyjne.
3. Szukana liczba będzie miała 1000 cyfr.
4. Usuń wierzchołek, który ma co najwyżej  $k$  znajomych. Najpierw jednak wykaż, że takowy istnieje.
5. Zauważ, że jeśli  $f(n) \leq n - 1$ , to z założenia indukcyjnego można stwierdzić, że  $f(f(n)) = f(n)$ .

6. Rozpatrz taką podrodzinę rodziny  $\mathcal{R}$ , że żadne dwa jej elementy nie mają niepustego przecięcia oraz jest to największa możliwa taka podrodzina.

## Podzielności

1. Zauważ, że  $(k+1)^2 > n \geq k^2$ .
2. Skorzystaj z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną dla dwóch liczb.
3. Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele trójek liczb  $(k, k+1, k+2)$ , że każda liczba z tej trójki jest dzielnikiem liczby  $4n$ .
4. Wykaż, że  $b-1 \mid a+1$ . Połącz dwie otrzymane podzielności.
5. Załóżmy, że  $a > b$ . Jeśli  $a$  i  $b$  dają tę samą resztę z dzielenia przez  $p$ , to  $a \geq b+p$ .
6. Zauważ, że  $a$  i  $b^k$  mają inne  $v_p$ . Nasuwa to skojarzenie z Lematem 4.

## Gry

1. Zauważ, że jeśli  $n$  jest nieparzyste, to jedna z liczb  $3n-1$  i  $3n+1$  jest podzielna przez 4.
2. Wykaż, że jedynie dla  $m \neq n$  pierwszy gracz ma strategię wygrywającą.
3. Załóż, że na tablicy zapisano liczbę  $2a+2$ . Rozpatrz dwa przypadki w zależności od stanu  $a+1$ .
4. Podziel planszę na prostokąty  $1 \times 2$  w specyficzny sposób.
5. Spraw, że wewnątrz kwadratu będą niepokolorowane odcinki.
6. Zauważ, że podpisany kamień będzie krążył między dwiema dziewczynami.

## Bardziej zaawansowane nierówności

1. Wykaż, że  $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$  poprzez zwinięcie do sumy kwadratów.
2. Wykaż, że te ciągi są odwrotnie monotoniczne.
3. Skorzystaj z nierówności Cauchego-Schwarza.
4. Rozpatrz sumę wielu nierówności, które zachodzą na podstawie nierówności o ciągach jednonotonicznych.
5. Nierówność nie jest prawdziwa.

# Równania funkcyjne i wielomianowe

1. Wstaw  $x = 0$  i  $x = f(0)$ .
2. Zobacz, co się stanie jeśli  $f(1) \geq 3$  oraz  $f(1) = 1$ .
3. Kiedy  $x^2 + y = x^{27} + 2y$ ?
4. Wykaż, że  $f(2) \leq 2$ .
5. Wykaż, że  $f(0) = 0$ . Oznacz  $f(b) = 0$  – takie  $b$  z pewnego powodu musi istnieć – i  $f(0) = c$ .
6. Wykaż, że  $g$  musi przyjmować wszystkie wartości rzeczywiste poza jedną.

## Twierdzenia z teorii liczb

1. Zauważ, że jeśli  $n = ab$ , to jedna z liczb  $a, b$  jest nie większa niż  $\sqrt{n}$ .
2. Skorzystaj z Chińskiego Twierdzenia o resztach.
3. Rozpatrz liczby postaci  $p^k$ , gdzie  $p$  jest liczbą pierwszą.
4. Rozpatrz generator modulo  $p$ .
5. Zauważ, że  $g^x \equiv 1 \pmod{p}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $p - 1 \mid x$ .
6. Wykreśl spośród rozpatrywanych liczb te, które spełniają jedno z danych przystań. Wykaż, że wykreślimy mniej liczb niż  $b_1 b_2 \cdot \dots \cdot b_n$ .

## Grafy skierowane

1. Rozpatrz również krawędzie dla których wierzchołek początkowy ma większy numer niż końcowy.
2. Co jeśli graf jest redukowalny? Skorzystaj z Lematu 2.
3. Wykaż, że jeśli teza dla rozpatrywanego podziału nie zachodzi, to można przełożyć jeden z problematycznych wierzchołków do innego zbioru, tak, aby uzyskać podział o jeszcze mniejszej liczbie „jednozbiorowych” krawędzi.
4. Wykaż, że jeśli  $A_k$  wygrał z  $A_{k+1}$ , to  $A_{k+1}$  wygrał z  $A_{k+2}$ .
5. Rozpatrz osobę  $x$  i podziel resztę osób na te, z którymi  $x$  wygrał i na tych, z którymi przegrał.
6. Pokoloruj każdy z wierzchołków kolorem o numerze równym długości najdłuższej ścieżki zaczynającej się w danym wierzchołku.

# Ciągi

1. \*
2. Rozpatrz  $a_k = |n + 1 - k|$ .
3. Wykaż, że  $u_n = \frac{2}{3^{n+1}-1}$ .
4. Wykaż, że  $a_n = \frac{2^{n+1}}{5} + \left(a_0 - \frac{1}{5}\right)(-3)^{n+1}$ .
5. Zauważ, że  $a_{n+1}^2 > a_n^2 + 2$ .
6. Wykaż, że od pewnego momentu ciąg przyjmuje tylko wartości mniejsze niż 1.
7. Wykaż tezę indukcyjnie. Weź największą liczbę  $t$ , mniejszą niż  $n$ , że  $\text{NWD}(t, a_t - 1) > 1$ . Wykaż, że

$$a_n - 1 = a_t + (n - t) - 1 = 3t + (n - t) - 1 = 2t + n - 1.$$

# Rozstrzygnij, czy

1. Skorzystaj z przystawania modulo 3.
2. Zauważ, że  $(-x)^2 = x^2$ .
3. Wykaż, że  $f(a^k) = kf(a)$ .
4. Rozpatrz konfigurację, w której jest dużo trójkątów zegarowych oraz taką, w której jest ich mało. Płynnie przesuwaj punkty tak, aby z jednej otrzymać drugą. W pewnym momencie musisz otrzymać szukaną konfigurację.
5. Wykaż, że zawsze da się, w pewnej liczbie ruchów przeskoczyć z liczby  $n$  na liczbę  $n + 1$ .
6. Zdefiniuj proste jako  $y = a_i \cdot x + b_i$  dla pewnych liczb  $a_i$  oraz  $b_i$ .

# Grafy 2

1. Wykaż, że rozpatrywane osoby mają co najmniej 2 wspólnych znajomych.
2. Załóż nie wprost, że istnieje podzbiór dziewczyn, który zna mniej chłopców niż wymaga tego tw. Halla.
3. Wykaż, że w każdym ruchu, jeśli nie usuwamy rozpatrywanej krawędzi, to usuwamy krawędź mającą z nią wspólny wierzchołek.
4. Zauważ, że każda ściana ma co najmniej 3 boki.
5. Rozpatrz skrajny wierzchołek tej ścieżki.
6. Weź największy spójny jednokolorowy podgraf danego grafu.

## Nierówności z pomysłem

1. Rozpatrz  $x = 1$  i  $y = -1$ .
2. Zauważ, że  $xyzt < x$ .
3. Oszacuj mianowniki tych ułamków.
4. Wykaż, że  $\frac{b^2}{(c-a)^2} + \frac{c^2}{(b-a)^2}$ .
5. Zauważ, że  $x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(x+1)(2x-1)^2$ .
6. Wykaż, że

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{25} + 1 > \sqrt{a_1 + \dots + a_{25} + 200a_1},$$

## Klasyczne zadania z teorii liczb

1. Zauważ, że  $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ .
2. Wykaż, że  $2^{ab} - 1$  jest podzielna przez  $2^a - 1$ .
3. Udowodnij, że każde z tych wyrażeń jest podzielne przez  $abc$ .
4. Wykaż, że każda z liczb  $x, y, z, t$  jest parzysta.
5. Pokaż, że  $a = kp \pm 1$ .
6. Udowodnij, że  $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor \geq \frac{n-k+1}{k}$ . Kiedy w tej nierówności zachodzi równość?

## Maksima, niezmienniki i procesy

1. Załóż, że pewne dwa rozpatrywane odcinki się przecinają.
2. Zauważ, że  $x_1 + x_3 > x_1 + x_2$ .
3. Jeśli  $x_i$  jest niewymierne, to  $x_{i+1}$  również.
4. Załóż, że na pewnym polu mrówka stanęła co najmniej  $4^{1000}$  razy. Ile razy musiała stanąć na polu powyżej niego? A ile razy na polu, które jest dwa pola powyżej?
5. Jeśli na tablicy jest liczba  $\frac{p}{q}$ , to rozpatrz sumę  $p+q$ .
6. Rozpatrywany kamień musi zostać użyty co najmniej  $n$  razy.

## Wielomiany 2

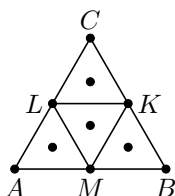
1. Zauważ, że

$$a - c \mid P(a) - P(c) = b - a.$$

2. Rozpatrz wielomian  $W(x) = x^{100} - x + 1$ .
3. Zauważ, że ten wielomian jest wielomianem zerowym.
4. Aby udowodnić tę własność użyj Twierdzenia 3.
5. Zauważ, że każdy niestały wielomian przyjmuje wartości niewymierne.
6. Zapisz  $f(n)$  jako liczbę w systemie o podstawie  $n$ .

## Kombinatoryka z elementami geometrii

1. Rozpatrz następujące punkty

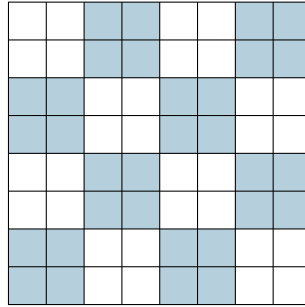


2. Zauważ, że te punkty leżą na jednym okręgu oraz trzeba pokazać, że odległość między pewnymi dwoma kolejnymi jest ograniczona.
3. Rozpatrz najdłuższy bok danego wielokąta.
4. Weź dowolny punkt i dowolną prostą. Zaczynij ją obracać, aż obróci się o  $180^\circ$ . Wykaż, że w pewnym momencie była ona prostą dzielącą.
5. Zauważ, że wszystkie trójkąty przybrzeżne są tego samego koloru – przyjmijmy bez straty ogólności, że są czarne.
6. Niech  $ABCD$  będzie równoległobokiem. Wykazać, że jeśli pewien punkt leży poza  $ABCD$  to istnieje trójkąt o większym polu niż pole  $ABCD$ .

## Szachownice, klocki i kolorowanie

1. Zauważ, że każdy wiersz składa się z 15 klocków, a każda płytki  $2 \times 2$  pokrywa ich parzystą liczbę.
2. Rozpatrz punkty  $X$ ,  $X'$ ,  $A$  i  $B$ , takie, że trójkąty  $ABX$  i  $ABX'$  są równoboczne.
3. Pokoloruj planszę w kwadraty  $2 \times 2$  jak na rysunku.





4. Wykaż, że ten obwód w każdym ruchu maleje.
5. Udowodnij, że istnieje odcinek, że jego wierzchołki i środek są jednakowego koloru.
6. Zauważ, że wyjściowy prostokąt ma cztery czarne pola narożne. Wykaż, że pewien z prostokątów z podziału również spełnia tę własność.

## Podpowiedzi 3

# Indukcja matematyczna

1. Skorzystaj z faktu, że suma kątów w trójkącie wynosi  $180^\circ$  oraz z założenia indukcyjnego.
2. \*
3. \*
4. Zauważ, że jeśli z wyróżnionego punktu wychodzą np. tylko czerwone odcinki, to pomiędzy dowolnymi dwoma punktami da się przejść odcinkami czerwonymi.
5. Wykaż tezę indukcyjnie za pomocą założenia i udowodnionej równości. Zauważ, że

$$\begin{aligned} & a_1 a_2 a_3 \dots a_n a_{n+1} \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}} \right) = \\ & = a_1 a_2 a_3 \dots a_n a_{n+1} \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) + a_1 a_2 a_3 \dots a_n. \end{aligned}$$

6. Podziel plansze na 1 L-klocek i cztery części, które można pokryć na mocy założenia indukcyjnego.
7. Zauważ, że suma liczb

$$(x_{2k+3} - x_{2k+1}, x_{2k+3} - x_{2k}, \dots, x_{2k+3} - x_{k+2}) \cup (x_{2k+2} - x_{k+1}, \dots, x_{2k+2} - x_1),$$

jest równa sumie liczb

$$\begin{aligned} & (x_{2k+3} - x_{2k+2}) \cup (x_{2k+2} - x_{2k+1}, x_{2k+2} - x_{2k}, \dots, x_{2k+3} - x_{k+2}) \cup \\ & \cup (x_{2k+3} - x_{k+1}, \dots, x_{2k+3} - x_1). \end{aligned}$$

## Równania funkcyjne

1. \*
2. Oblicz wartość  $f(0)$ .
3. Podstaw  $x = 0$ .
4. \*
5. Wstaw  $f(x) = x + a$  do wyjściowego równania w celu obliczenia  $a$ .
6. Rozumuj podobnie jak w poprzednim zadaniu.
7. Wywnioskuj z obu nierówności, że  $f$  jest funkcją stałą.
8. Wykaż, że  $f(x) = x + f(0)$ . W tym celu korzystaj z całkowitości  $x$ .
9. Z tego, że  $f(x + y) = f(x - y)$  wywnioskuj, że  $f$  jest funkcją stałą.
10. Zamień  $x$  i  $y$  miejscami w danym równaniu.

## Bijekcje i bajki kombinatoryczne

1. Przesumuj wartość z poprzedniej wskazówki po wszystkich możliwych  $k$ , aby otrzymać całkowitą liczbę możliwości.
2. Zauważ, że jeśli zbiór  $A$  spełnia warunki zadania, to zbiór  $\{1, 2, 3, \dots, 10\} - A$  ich nie spełnia.
3. \*
4. Połącz w pary permutacje  $(a_i)$  i  $(f(a_i))$ . Wykaż, że to parowanie jest poprawne.
5. Ustaw  $kn$  osób w kolejce na  $(kn)!$  sposobów, a następnie pierwsze  $n$  osób dać do jednej grupy, drugie  $n$  osób do drugiej, itd. Z ilu kolejek można uzyskać ten sam podział?
6. Ile jest rozpatrywanych zbiorów, których nie podzieliliśmy w pary.
7. \*

## Liczby pierwsze i reszty z dzielenia

1. Podstaw  $n = k(p-1)$ . Zauważ, że  $2^n \equiv 1 \pmod{p}$ .
2. Zauważ, że zbiory  $\{1, 2, 3, \dots, p-1\}$  i  $\{1^{-1}, 2^{-1}, 3^{-1}, \dots, (p-1)^{-1}\}$  są sobie równe. Stąd suma ich elementów jest równa.
3. Zauważ, że  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ .
4. Skoro wspomniane parowanie istnieje, to  $2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-2) \equiv 1 \pmod{p}$ , bo możemy podzielić te liczby na pary, z których każda zredukuje się do liczby 1.

## Nierówności między średnimi

1. Skorzystaj z niej dla liczb  $x^2, \frac{x}{2}, \frac{x}{2}$ .
2. Zauważ, że  $a_i + a_{i+1} \geq 2\sqrt{a_i a_{i+1}}$ .
3. Skorzystaj z nierówności AM-HM.
4. \*
5. Zauważ, że  $\frac{a^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} \geq a$ .

## Konstrukcje

1. \*

2. Pokoloruj wnętrze każdej z kratek, jej dolną krawędź bez prawego wierzchołka i lewą krawędź bez górnego wierzchołka na jeden kolor przypisany do danej kratki.
3. Rozpatrz środek okręgu wpisanego i jego rzuty na boki trójkąta.
4. Pokoloruj liczbę na kolor odpowiadający jej najmniejszemu dzielnikowi pierwszemu. Zadbaj o to, żeby użyć 1000 kolorów.
5. Wykaż, że mając dwa pola będące w jednym kolorowaniu jesteśmy w stanie jednoznacznie odtworzyć całe kolorowanie.
6. Rozpatrz liczby  $a, a + 1, a + 2, \dots, a + 2019$  oraz  $a, a + 1, a + 2, \dots, a + 100$ .

## Wielomiany

1. Wykaż, że  $W(x)$  musiałby mieć nieskończenie wiele pierwiastków.
2. Oblicz  $P(1)$ .
3. Zauważ, że z wspomnianej wcześniej różnicy możesz wyciągnąć  $x^3 - 1$  przed nawias.
4. Skorzystaj z założenia indukcyjnego dla  $P(x) - a((x + 1)^{n+1} - x^{n+1})$ . Rozpatrz takie  $a$ , by było to możliwe.
5. Zauważ, że  $3 = Q(5)$  ma co najmniej 4 parami różne dzielniki.
6. \*
7. Wykaż, że  $\sum_{1 \leq i \leq 1000} a_i^2 = 3$ .

## Wielomiany

1. Zauważ, że pierwszy wierzchołek tej ścieżki jest połączony z pewnym wierzchołkiem spoza niej.
2. Rozpatrz przypadki: gdy cykl jest jednokolorowy, gdy jest kolor, który występuje raz, oraz gdy każdy z kolorów występuje dwukrotnie.
3. Wykaż, że każdy cykl ma parzystą długość.
4. Skorzystaj z tego, że liczba wierzchołków w grafie jest parzysta
5. Wykaż, że przy każdym kroku rozpatrywana suma spada co najwyżej o 1.
6. Trzeba jeszcze pokazać, że istnieje graf, którego nie da się rozspójnić w 9 ruchach. Rozpatrz graf  $K_{a,b}$ .

## Indukcja matematyczna 2

1. \*
2. Jeśli wyróżnione punkty nie są przykryte przez jedną prostą, to do ich przykrycia trzeba co najmniej  $n + 1$  prostych.
3. Powiemy, że liczba naturalna  $x$  jest *dobra*, jeśli ma dokładnie  $n$  cyfr, z których każda jest jedynką lub dwójką, oraz  $x$  jest podzielna przez liczbę  $2^n$ . Wykaż, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej istnieje liczba dobra, która ma  $n$  cyfr.
4. Zauważ, że klika zawierająca wierzchołek  $X$  składa się z wierzchołka  $X$  oraz pewnego podzbioru zbioru jego znajomych.
5. Gdy  $f(n) \geq n + 1$ , to  $f(f(n)) \leq n - 1$ . Wstaw  $f(n)$  zamiast  $n$  do wyjściowej nierówności.
6. Wykaż, że pewien element należy do co najmniej  $(n - 1)! \cdot k^{n-1}$  zbiorów.

## Podzielności

1. Jakie liczby podzielne przez  $k$  są w przedziale  $[k^2, (k + 1)^2)$ ?
2. \*
3. Zauważ, że jeśli pewien dzielnik liczby  $4n$  – nazwijmy go  $k$  nie jest podzielne przez 4, to  $2k$  również jest dzielnikiem liczby  $4n$ .
4. Uzasadnij, że  $b - 1 \mid b + 1$ . Taka podzielność nie może zajść, gdy  $b \geq 4$ .
5. Uzasadnij, że  $a \geq 2$ .
6. Jeśli  $v_p(a) = x \cdot k + r$ , gdzie  $r$  jest resztą z dzielenia przez  $k$ , to weź  $n = p^{xk+k}$ .

## Gry

1. Zauważ, że  $\frac{3n+1}{4} < n$ .
2. Przyjmij, że pole w prawym górnym rogu ma współrzędne  $(1, 1)$ . Celem gracza ze strategią wygrywająca będzie taka gra, aby przeciwnik przed swoim ruchem zawsze znajdował się w polu o postaci  $(a, a)$ .
3. W przypadku, gdy  $a + 1$  jest wygrywający, należy zapisać liczbę  $2a + 1$ . Przeanalizuj możliwe ruchy przeciwnika.
4. Podziel plansze na prostokąty  $1 \times 2$ , aby każdy kwadrat  $2 \times 2$  zawierał jeden z tych prostokątów.
5. Niech potem nauczyciel koloruje wnętrze kwadratu. W pewnym momencie pojawi się szukany wzór.
6. Zauważ, że istnieje para bez podpisanego kamienia.

## Bardziej zaawansowane nierówności

1. \*

2. \*

3. Wykaż, że

$$\begin{aligned} & (\sin \alpha_1 \cdot \dots \cdot \sin \alpha_n + \cos \alpha_1 \cdot \dots \cdot \cos \alpha_n)^2 \leqslant \\ & \leqslant ((\sin \alpha_1 \cdot \dots \cdot \sin \alpha_{n-1})^2 + (\cos \alpha_1 \cdot \dots \cdot \cos \alpha_{n-1})^2) (\sin \alpha_n^2 + \cos \alpha_n^2) \end{aligned}$$

4. Zauważ, że

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \geqslant a_1 b_{1+k} + a_2 b_{2+k} + \dots + a_n b_{n+k}.$$

5. Znajdź liczby, dla których nierówność nie zachodzi. Jedna z liczb niech będzie bardzo bliska zeru.

## Równania funkcyjne i wielomianowe

1. Wstaw  $x = a$ .

2. Wykaż, że  $f(n) = n + 1$  indukcyjnie.

3. Zauważ, że  $f(x) > 0$ , gdy  $x > 0$ . Podstaw  $y - x^2$  w miejsce  $y$ . Rozpatrz takie  $x$ , aby wszystkie wartości  $f$  poza jedną w danym równaniu były równe 0.

4. Gdy  $f(2) = 1$ , to można wykazać  $f(p) = 1$  i  $f(p^2) = 1$  dla pewnej liczby pierwszej  $p$ .

5. Wykaż, że  $f(f(y)) = y$ . Wykaż, że  $f$  jest ściśle rosnąca.

6. Udowodnij, że  $g(0) = 0$ .

## Twierdzenia z teorii liczb

1. \*

2. Rozpatrz warunki typu  $n \equiv -k \pmod{p}$  dla różnych liczb  $k$  i  $p$ .

3. Rozpatrz liczby postaci  $p^{p-1}$ .

4. Zauważ, że

$$\left(\frac{1}{p}\right) + \left(\frac{2}{p}\right) + \dots + \left(\frac{p-1}{p}\right) = \left(\frac{g}{p}\right) + \left(\frac{g^2}{p}\right) + \dots + \left(\frac{g^{p-1}}{p}\right)$$

5. Skorzystaj z faktu, że liczba  $p - 1$  nie dzieli się przez 3.

6. Zauważ, że jeśli liczba  $k$  spełnia warunki zadania, to liczba  $k + b_1 b_2 \cdot \dots \cdot b_n$  również.

# Grafy skierowane

1. \*
2. Rozwiąż zadanie korzystając z indukcji zupełnej.
3. Wykaż, że dla dowolnego wierzchołka  $v$  jeden z rozpatrywanych zbiorów ma tę własność, że wchodzi do niego co najwyżej jedna krawędź z  $v$ .
4. Wykaż, że  $A_k$  wygrał z  $A_{k+i}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $i$  jest liczbą parzystą. Wyniknie stąd, że  $A_1$  wygrał z  $A_3$ , jak i przegrał z  $A_3$ .
5. Wykaż, że w zbiorze osób, z którymi  $x$  przegrał, każda osoba pokonała tyle samo osób wewnątrz tego zbioru.
6. W drugą stronę, ponumeruj kolory i skieruj krawędzie w stronę wierzchołka o kolorze o wyższym numerze.

# Ciągi

1. \*
2. Skorzystaj z założenia dla liczb  $a_{2n+1-i}$  oraz  $a_{i+1}$ .
3. Zauważ, że  $u_n < \frac{2}{3^{n+1}}$ .
4. Wykaż, że gdy  $a_0 \neq \frac{1}{5}$ , to ciąg przyjmuje dowolnie małe wartości.
5. Skorzystaj wielokrotnie z wykazanej nierówności.
6. Zauważ, że  $x_1 < x_{n+2} = \sqrt{\alpha x_{n+1} - x_n}$ .
7. Zauważ, że

$$\text{NWD}(a_n-1, n) = \text{NWD}(2t+n-1, n) = \text{NWD}(2t-1, n) = \text{NWD}(2t-1, 2n-(2t-1)).$$

Jaka jest najmniejsza liczba  $n$ , większa niż  $t$ , że powyższe wyrażenie jest większe od 1?

# Rozstrzygnij, czy

1. Jakie reszty z dzielenia przez 3 może dawać kwadrat liczby całkowitej?
2. Rozpatrz takie zbiory, aby suma ich elementów była równa zeru.
3. Zauważ, że  $f(2^{f(3)}) = f(2)f(3)$ .
4. Zadbaj o to, aby w jednej chwili co najwyżej jeden trójkąt zmienił swoją zegarowość.
5. Rozpatrz długi ciąg skoków w prawo i jeden skok w lewo.
6. Zdefiniuj proste jako  $y = i \cdot x + i^2$ .



## Grafy 2

1. \*
2. Oblicz ile jest znajomości damsko-męskich między rozpatrywanymi zbiorami dziewczyn i chłopców.
3. Niech  $u$  i  $v$  będą dowolnymi wierzchołkami połączonymi krawędzią. Zauważ, że liczba pozostałych krawędzi, które wychodzą z  $u$  lub z  $v$ , jest nie większa niż 198.
4. Skorzystaj z twierdzenie Eulera.
5. Wykaż, że najdłuższa ścieżka w grafie ma długość co najmniej  $k + 1$ .
6. Jeśli istnieje wierzchołek poza tym podgrafem, to wszystkie krawędzie między nim a wierzchołkiem tego podgrafu są tego samego koloru.

## Nierówności z pomysłem

1. Dodaj otrzymane nierówności stronami.
2. Zauważ, że  $(1 - x)(1 - y)(1 - z)(1 - t) < (1 - x)$ .
3. Zauważ, że  $x + y + 2z > x + y + z$ .
4. Zauważ, że  $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \geq 2$ .
5. Podstaw  $a = b = c = d = -1$  i  $a = b = c = d = \frac{1}{2}$ .
6. Niech  $k = a_1$ . Zauważ, że każdy z 300 składników

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 25} x_i x_j.$$

jest nie większy niż  $x_1^2$  oraz nie większy niż  $x_1$ .

## Klasyczne zadania z teorii liczb

1. Zauważ, że  $(k + 2)^2 - k^2 = 4(k + 1)$ .
2. Jeśli  $2^k - 1$  jest pierwsza, to  $k$  jest pierwsza.
3. Wykaż podzielność  $abc \mid a^13$ .
4. Udowodnij, że każda z liczb  $x, y, z$  i  $t$  jest podzielna przez  $2^{800}$ .
5. Wywnioskuj tezę z równości  $(p - 1) \cdot k^2 + (k \pm 1)^2$ .
6. Wykaż, że

$$p(m) = \text{NWW}(1, 2, 3, \dots, m).$$

## Maksima, niezmienniki i procesy

1. Wykaż, że wówczas możemy zmienić przyporządkowanie, aby rozpatrywana suma się zmniejszyła.
2. Zauważ, że  $x_n + x_{n-1} > \dots > x_n + x_2 > x_n + x_1$ .
3. Wykaż, że o ile  $x_i \neq 0$ , to licznik  $x_{i+1}$  w nieskracalnej formie jest mniejszy od licznika  $x_i$ .
4. \*
5. Wykaż, że ta suma się w każdym ruchu nie zmienia lub podwaja.
6. Przeprowadź podobne rozumowanie, tylko ponumeruj kamienie od 1 do  $n$ . Zawsze z rozpatrywanego pola ruszany będzie kamień o największym numerze.

## Wielomiany 2

1. Pokaż, że każda z liczb

$$|a - b|, |b - c|, |c - a|, |a - b|$$

dzieli kolejną z nich. Wykaż, że wówczas muszą być wszystkie sobie równe.

2. Zauważ, że jeśli  $p \mid n$ , to  $W(n) \equiv 1 \pmod{p}$ . Jeśli zaś  $n \equiv 1 \pmod{p}$ , to również  $W(n) \equiv 1 \pmod{p}$ .
3. Jaki współczynnik ma  $W(x) - W(-x)$  przy  $x^1$ ?
4. Wykaż, że jeśli  $P(x) > Q(x)$ , to  $P(P(x)) > Q(Q(x))$ .
5. Podstaw  $q = n$  i  $x = n - 1$  dla naturalnego  $n$ . Udowodnij, że  $W$  jest wielomianem stopnia co najwyżej 1.
6. W pierwszym ruchu sprawdź wartość  $f(1)$ . W drugim sprawdź wartość  $f(10^k)$  dla dużego  $k$ .

## Kombinatoryka z elementami geometrii

1. Zauważ, że cztery punkty, które nie są podpisane na poprzednim rysunku, tworzą trójkąt równoboczny z jego środkiem ciężkości.
2. Zauważ, że cięciwa jest krótsza od łuku.
3. \*
4. Liczba punktów po „prawej” stronie prostej zmienia się o co najwyżej 1. Zauważ, że w pewnym momencie ta liczba była nie większa niż 49, a w innym nie mniejsza niż 49.

5. Jeśli jest  $b$  białych trójkątów, to narysowano  $3b$  przekątnych.
6. Jeśli  $X$  leży wewnątrz  $ABCD$  oraz  $ABXX'$  jest równoległobokiem, to  $X'$  leży poza  $ABCD$ .

## Szachownice, klocki i kolorowanie

1. Zauważ, że jeśli pewien klocek  $3 \times 3$  leży w wierszach 4, 5 i 6, to w każdym z tych wierszy musi istnieć jeszcze jedno pole zajmowane przez klocek  $3 \times 3$ .
2. Wykaż, że punkty  $X$  i  $X'$  są tego samego koloru. Przeprowadź podobne rozumowanie dla tego samego  $X$ , ale innego  $X'$ .
3. \*
4. Na początku ten obwód wynosi co najwyżej  $4 \cdot 9$ , a docelowo ma wynosić 40.
5. Rozpatrz punkty takie jak na rysunku, przy czym załóż, że  $X_1$  i  $X_2$  są tego samego koloru.



6. Zauważ, że prostokąty o czterech czarnych polach narożnych zawierają o jedno pole czarne więcej. Co jeśli prostokąt ma czterech białe pola narożne? Albo dwa białe i dwa czarne pola narożne?

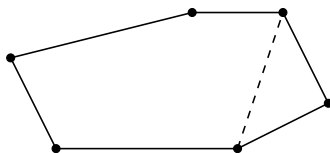
# Rozwiązania

# Indukcja matematyczna

## Zadanie 1

Wykazać, że suma miar kątów w  $n$ -kącie wypukłym wynosi  $(n - 2) \cdot 180^\circ$ .

Zauważmy, że dla  $n = 3$  teza jest znanym faktem – mianowicie suma kątów w trójkącie wynosi  $180^\circ$ .



Założmy, że dla każdego  $n$ -kąta wypukłego suma jego kątów wynosi  $(n - 2) \cdot 180^\circ$ . Rozpatrzmy dowolny  $n + 1$ -kąć wypukły. Zauważmy, że ma on więcej niż trzy wierzchołki, więc możemy „odciąć” trójkąt złożony z trzech kolejnych wierzchołków. Podzielimy w ten sposób  $n + 1$  kąt na  $n$ -kąć i trójkąt. Korzystając z wypukłości rozpatrywanego wielokąta możemy zauważyć, że suma miar jego kątów wewnętrznych jest sumą miar kątów obu tych wielokątów. Wynosi więc ona

$$(n - 2) \cdot 180^\circ + 180^\circ = (n - 1) \cdot 180^\circ,$$

czego należało dowieść.

## Zadanie 2

Wykazać, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej  $n$  zachodzi tożsamość

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}.$$

Sprawdzamy, że dla  $n = 1$  postulowana równość zachodzi. Założmy, że równość

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

zachodzi dla pewnej liczby  $n$ . Chcemy wykazać tezę dla  $n + 1$ , czyli

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n + 1)^2 = \frac{(n + 1)(n + 2)(2n + 3)}{6}.$$

Zauważmy, że sprowadza się ona do wykazania tożsamości

$$\frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} + (n + 1)^2 = \frac{(n + 1)(n + 2)(2n + 3)}{6}.$$

Przekształcając powyższą równość równoważnie otrzymujemy kolejno

$$n(n + 1)(2n + 1) + 6(n + 1)^2 = (n + 1)(n + 2)(2n + 3),$$

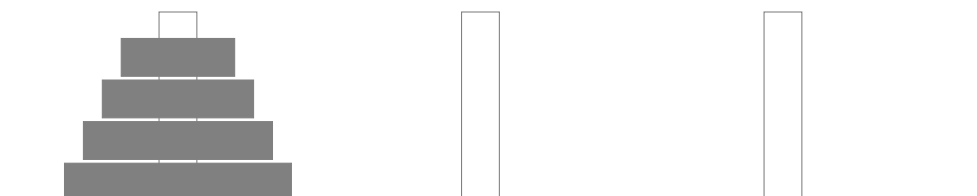
$$2n^3 + 3n^2 + n + 6(n + 1)^2 = 2n^3 + 9n^2 + 13n + 6,$$

$$6(n + 1)^2 = 6n^2 + 12n + 6,$$

$$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1.$$

### Zadanie 3

Dana jest następująca gra, zwana *wieżami Hanoi*. Na początku ułożono  $n$  dysków na jednej igle tak jak na rysunku. W każdym ruchu gracz może przemieścić dysk, wraz z wszystkimi dyskami nań leżącymi, na inną igłę, przy czym dysk ten nie może zostać położony na dysk o innej średnicy. Wykazać, że gracz jest w stanie przenieść wszystkie dyski na trzecią igłę.



Tezę wykażemy indukcją po  $n$ . Zauważmy, że dla  $n = 1$  teza jest oczywista – wystarczy po prostu przełożyć dysk na trzecią igłę.

Załóżmy, że jesteśmy w stanie przełożyć  $n - 1$  dysków z pierwszej igły na trzecią. Możemy oczywiście zauważyć, że jest to równoważne chociażby możliwości przełożenia ich z igły pierwszej na drugą. Przełożenia  $n$  dysków dokonujemy w następujący sposób:

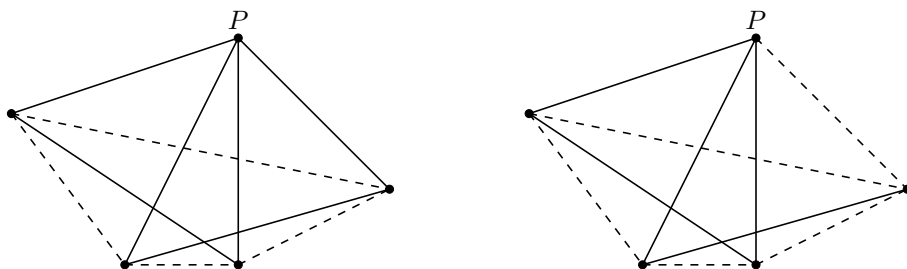
1. Przekładamy  $n - 1$  dysków z góry pierwszej igły na drugą igłę. Zauważmy, że dysk o największym rozmiarze nie przeszkadza nam skorzystać z założenia indukcyjnego, gdyż nie uniemożliwi on wykonania żadnego ruchu.
2. Dysk pozostawiony na pierwszej igle przekładamy na igłę ostatnią.
3. Przekładamy  $n - 1$  dysków z drugiej igły na trzecią. Analogicznie zauważamy, że obecność jednego dysku na trzeciej igle nie jest problemem.

### Zadanie 4

W przestrzeni danych jest  $n \geq 3$  punktów, że żadne trzy z nich nie leżą na jednej prostej. Każde dwa z tych punktów połączono odcinkiem o kolorze zielonym lub czerwonym. Wykazać, że można wybrać tak jeden z tych kolorów, aby każde dwa z danych punktów były połączone odcinkiem lub łamaną tego koloru.

Dla  $n = 3$  mamy trójkąt. Wybierając kolor, na który pomalowano co najmniej dwa odcinki, postulowana własność będzie spełniona.

Załóżmy, że dla teza zachodzi dla  $n$  punktów. Rozpatrzmy zbiór  $n + 1$  punktów. Wy różnijmy pewien punkt  $P$ . Punktów poza  $P$  jest dokładnie  $n$ , więc na mocy założenia istnieje kolor – bez straty ogólności czerwony – że pomiędzy każdymi dwoma punktami poza  $P$  istnieje łamana tego koloru.



Na rysunku zamiast kolorów użyto podziału na linię ciągłą i przerywaną.

Rozpatrzmy dwa przypadki:

1. Punkt  $P$  jest połączony czerwoną krawędzią z pewnym innym punktem  $Q$ . Wówczas wybierając dowolny punkt  $X$ , na mocy założenia wiemy, że istnieje czerwona ścieżka między  $X$  i  $Q$ . Dokładając do niej odcinek między  $P$  i  $Q$  otrzymujemy ścieżkę między  $P$  oraz  $X$ . Wykazaliśmy, że istnieje ścieżka między punktem  $P$  i każdym innym punktem. Łącząc to z faktem, że na mocy założenia indukcyjnego taka ścieżka istnieje między każdą inną parą punktów, otrzymujemy, że dla koloru czerwonego teza jest spełniona.
2. Punkt  $P$  jest połączony z każdym innym punktem niebieskim odcinkiem. Wówczas łatwo zauważyć, że pomiędzy każdą parą punktów możemy przejść jednym albo dwoma niebieskimi odcinkami przechodzącymi przez punkt  $P$ .

#### Zadanie 5

Dany jest ciąg liczb rzeczywistych

$$a_0 \neq 0, 1, \quad a_1 = 1 - a_0, \quad a_{n+1} = 1 - a_n(1 - a_n).$$

Wykazać, że dla wszystkich  $n$

$$a_1 a_2 \dots a_n \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) = 1.$$

Na początku wykażemy indukcyjnie, że dla każdego  $n$  zachodzi równość

$$a_{n+1} = 1 - a_1 a_2 a_3 \dots a_n.$$

Równość dla  $n = 0$  zachodzi na mocy założeń. Załóżmy, że

$$a_n = 1 - a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1}.$$

Skoro  $a_{n+1} = 1 - a_n(1 - a_n)$ , to otrzymujemy

$$a_{n+1} = 1 - a_n(1 - a_n) = 1 - a_n \cdot a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1} = 1 - a_1 a_2 a_3 \dots a_n.$$

Więc na mocy zasady indukcji matematycznej postulowana równość zachodzi.

Teraz przejdziemy do udowodnienia tezy. Dla  $n = 1$  jest ona oczywista. Załóżmy, że zachodzi równość

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_n \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) = 1.$$

Chcemy wykazać, że

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_n a_{n+1} \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}} \right) = 1.$$

Przekształcamy powyższą równość korzystając z założenia

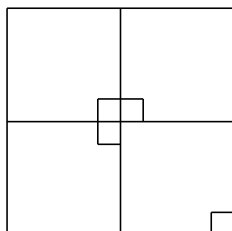
$$\begin{aligned} a_1 a_2 a_3 \dots a_n a_{n+1} \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}} \right) &= \\ &= a_{n+1} \cdot a_1 a_2 a_3 \dots a_n \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) + a_1 a_2 a_3 \dots a_n = \\ &= a_{n+1} + a_1 a_2 a_3 \dots a_n = 1 - a_1 a_2 a_3 \dots a_n + a_1 a_2 a_3 \dots a_n = 1. \end{aligned}$$

#### Zadanie 6

Wykazać, że planszę o wymiarach  $2^n \times 2^n$  dla pewnego  $n \geq 1$  z usuniętym jednym z rogów da się przykryć pewną liczbą  $L$  klocków (takich jak na rysunku). Klocki można obracać.



Zauważmy, że plansza  $2 \times 2$  z usuniętym rogiem jest w istocie L-klockiem, więc da się ją pokryć.



Założmy, że dla planszy  $2^{n-1} \times 2^{n-1}$  istnieje szukane pokrycie. Pokrycie dla planszy  $2^n \times 2^n$  konstruujemy następująco. Dzielimy planszę dwiema prostymi na trzy jednakowe części i czwartą taką samą, tylko bez rogu. Kładziemy jeden klocek na środku tak jak na rysunku. Wówczas plansza jest podzielona na cztery jednakowe puste części, które na mocy założenia indukcyjnego można pokryć.

#### Zadanie 7

Niech  $n$  będzie nieparzystą liczbą naturalną, a liczby  $x_1, x_2, \dots, x_n$  będą parami różne. Dla każdych dwóch liczb  $x_i$  oraz  $x_j$  zapisano na tablicy wartość bezwzględnej ich różnicy. Wykazać, że można podzielić zapisane liczby na dwa zbiory o równej sumie.

Przez multyzbiór rozumiemy zbiór w którym jeden element może występować kilka razy. Założmy, że  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ .



Wykażemy tezę dla  $n = 3$ . Podział na zbiory  $\{x_1 - x_2, x_2 - x_3\}$  oraz  $\{x_1 - x_3\}$  spełnia warunki zadania.

Założmy, że teza zachodzi dla  $2n + 1$ , wykażemy ją dla  $2n + 3$ . Rozpatrzmy szukany podział multizbioru różnic zbioru  $\{x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}\}$  na multizbiory  $A$  i  $B$  o równej sumie elementów. Dorzucamy do multizbioru  $A$  liczby

$$(x_{2k+3} - x_{2k+1}, x_{2k+3} - x_{2k}, \dots, x_{2k+3} - x_{k+2}) \cup (x_{2k+2} - x_{k+1}, \dots, x_{2k+2} - x_1),$$

a do multizbioru  $B$  liczby

$$(x_{2k+3} - x_{2k+2}) \cup (x_{2k+2} - x_{2k+1}, x_{2k+2} - x_{2k}, \dots, x_{2k+3} - x_{k+2}) \cup \\ \cup (x_{2k+3} - x_{k+1}, \dots, x_{2k+3} - x_1).$$

Łatwo sprawdzić, że suma dorzuconych elementów jest równa.

# Równania funkcyjne

## Zadanie 1

Znajdź wszystkie funkcje  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniające dla wszystkich  $x, y \in \mathbb{R}$  równanie

$$f(x) + f(y) = f(xy).$$

*Odpowiedź.* Jedyną funkcją spełniającą warunki zadania jest  $f(x) = 0$ .

Podstawmy  $y = 0$ :

$$f(x) + f(0) = f(0),$$

czyli  $f(x) = 0$  dla każdego  $x$ . Łatwo sprawdzić, że ta funkcja spełnia warunki zadania.

## Zadanie 2

Znajdź wszystkie funkcje  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniające dla wszystkich  $x, y \in \mathbb{R}$  równanie

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y.$$

Podstawmy  $x = f(y)$ . Otrzymamy

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 - f(y) - y, \\ f(y) &= -y + (1 - f(0)). \end{aligned}$$

Podstawmy  $y = 0$  do powyższej zależności. Wówczas łatwo obliczyć, że  $f(0) = \frac{1}{2}$ . Czyli  $f(x) = -x + \frac{1}{2}$ . Ta funkcja istotnie spełnia warunki zadania, gdyż

$$f(x - f(y)) = f(y) - x + \frac{1}{2} = 1 - y - x.$$

## Zadanie 3

Znajdź wszystkie funkcje  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniające dla wszystkich  $x, y \in \mathbb{R}$  równanie

$$f(x^2y) = f(xy) + yf(f(x) + y).$$

*Odpowiedź.* Funkcja  $f(x) = x$  jest jedynym rozwiązaniem.

Podstawmy  $x = 0$  i  $y = -f(0)$ . Otrzymamy  $f(0)^2 = 0$ , czyli  $f(0) = 0$ . Podstawmy  $x = 0$ :

$$0 = yf(f(0) + y) = yf(y)$$

Dla niezerowego  $y$  mamy  $f(y) = 0$ . Sprawdzamy, że funkcja  $f(x) = 0$  spełnia warunki zadania. Łącząc powyższe wnioski otrzymujemy, że jedyną funkcją  $f(x) = 0$  spełnia warunki zadania.

#### Zadanie 4

Znajdź wszystkie funkcje  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniające dla wszystkich  $x, y \in \mathbb{R}$  równanie

$$2f(x) + f(1-x) = x^2.$$

*Odpowiedź.* Jedyną funkcją spełniającą warunki zadania jest  $f(x) = \frac{2x^2 - (1-x)^2}{3}$ .

Podstawmy  $1-x$  za  $x$ . Otrzymamy

$$2f(1-x) + f(x) = 2(1-x)^2.$$

Z równaniem z zadania tworzy to układ równań ze zmiennymi  $f(x)$  i  $f(1-x)$ . Wyliczamy  $f(x) = \frac{2x^2 - (1-x)^2}{3}$ . Wystarczy teraz tylko sprawdzić, że ta funkcja spełnia warunki zadania.

#### Zadanie 5

Znajdź wszystkie funkcje  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniające dla wszystkich  $x, y \in \mathbb{R}$  równanie

$$f(x+y) = f(f(x)) + y + 1.$$

*Odpowiedź.*  $f(x) = x - 1$  jest jedynym rozwiązaniem danego równania.

Podstawmy  $x = 0$ :

$$f(y) = f(f(0)) + 1 + y,$$

czyli  $f(x) = x + a$  dla pewnego stałego  $a$ . Podstawmy tę funkcję do wyjściowego równania

$$x + y + a = x + 2a + y + 1.$$

Mamy  $a = -1$ . Łatwo sprawdzić, że funkcja  $f(x) = x - 1$  spełnia warunki zadania.

#### Zadanie 6

Znajdź wszystkie funkcje różnowartościowe  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniające dla wszystkich  $x, y \in \mathbb{R}$  równość

$$f(f(x) + y) = f(x + y) + 1.$$

*Odpowiedź.* Jedyną funkcją spełniającą warunki zadania jest  $f(x) = x + 1$ .

Podstawmy  $y = -x$ . Otrzymamy

$$f(f(x) - x) = f(0) + 1.$$

Zauważmy, że prawa strona równości jest stała. Z różnowartościowości  $f$  wynika, że wartość  $f(x) - x$  jest stała. Czyli  $f(x) - x = a$  dla pewnego  $a$ . Wstawiamy  $f(x) = x + a$  do wyjściowego równania

$$x + y + 2a = x + y + a + 1,$$

więc  $a = 1$ . Skąd  $f(x) = x + 1$  – możemy sprawdzić, że ta funkcja spełnia warunki zadania.

### Zadanie 7

Znajdź wszystkie funkcje  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniające dla wszystkich  $x, y \in \mathbb{R}$  nierówność

$$f(x^2 + y) + f(y) \geq f(x^2) + f(x).$$

Podstawmy  $x = 0$

$$f(y) \geq f(0).$$

Podstawmy  $y = 0$

$$f(x^2) + f(0) \geq f(x^2) + f(x),$$

czyli  $f(0) \geq f(x)$ . Łącząc oba wnioski otrzymujemy

$$f(0) \geq f(x) \geq f(0),$$

czyli  $f(x) = f(0)$ . Innymi słowy  $f$  jest funkcją stałą. Łatwo zauważyć, że taka funkcja spełnia warunki zadania.

### Zadanie 8

Znajdź wszystkie funkcje  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  spełniające dla wszystkich  $x \in \mathbb{Z}$  równanie

$$f(f(x)) = x + 1.$$

*Odpowiedź.* Szukane funkcje nie istnieją.

Zauważmy, że zachodzą równości

$$f(f(f(x))) = f(x + 1)$$

$$f(f(f(x))) = f(x) + 1$$

Z tego otrzymujemy równość:

$$f(x) = f(x - 1) + 1$$

Skoro działamy w liczbach całkowitych to możemy wywnioskować, że

$$f(x) = f(x - 1) + 1 = f(x - 2) + 2 = \dots = x + f(0).$$

Podstawmy równość  $f(x) = x + f(0)$  do  $f(f(x)) = x + 1$ :

$$x + 1 = f(f(x)) = x + 2f(0),$$

czyli  $f(0) = \frac{1}{2}$ . Sprzeczność. Takie funkcje nie istnieją.

### Zadanie 9

Znajdź wszystkie funkcje  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniające dla wszystkich  $x, y \in \mathbb{R}$  równanie

$$f(x)f(y) = f(x - y).$$

*Odpowiedź.* Daną zależność spełniają funkcje  $f(x) = 1$  i  $f(x) = 0$ .

Podstawmy  $x = y = 0$ . Wtedy otrzymujemy

$$f(0)^2 = f(0) \implies f(0) \in \{0, 1\}.$$

Podstawmy  $x = y$

$$f(x)^2 = f(0).$$

Jeśli  $f(0) = 0$ , to  $f(x) = 0$ . Łatwo sprawdzić, że funkcja zerowa spełnia warunki zadania. Zobaczmy, co jeśli  $x = y$  oraz  $f(0) = 1$ :

$$f(x)^2 = f(0) = 1$$

Czyli  $f(x)$  jest równe  $-1$  lub  $1$  dla każdego  $x$ . Podstawmy  $x = 0$

$$f(y) = f(-y).$$

Zauważmy, że

$$f(x - y) = f(x)f(y) = f(x)f(-y) = f(x + y).$$

Weźmy 2 dowolne liczby  $a$  i  $b$ . Biorąc  $x = \frac{a+b}{2}$  oraz  $y = \frac{a-b}{2}$  otrzymamy

$$f(x + y) = f(x - y) \implies f(a) = f(b).$$

Skoro  $a$  i  $b$  były dowolne to  $f$  jest funkcją stałą, czyli  $f(x) = 1$ . Łatwo sprawdzić, że ta funkcja również spełnia warunki zadania. Czyli tę zależność spełniają funkcje  $f(x) = 1$  i  $f(x) = 0$ . Sprawdzamy, że istotnie one działają.

#### Zadanie 10

Udowodnij, że nie istnieje taka funkcja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x, y$  zachodzi równość:

$$f(f(x) + 2f(y)) = x + y.$$

Lemat 1 Funkcja  $f$  jest różnowartościowa

Załóżmy, że  $f(a) = f(b)$ . Podstawmy,  $x = a$  oraz  $x = b$

$$f(f(a) + 2f(y)) = a + y \quad \text{oraz} \quad f(f(b) + 2f(y)) = b + y.$$

Skoro  $f(a) = f(b)$ , to

$$f(f(a) + 2f(y)) = f(f(b) + 2f(y)),$$

a więc  $a + y = b + y$ , czyli  $a = b$ . A więc  $f$  istotnie jest różnowartościowa.

Zauważamy, że zachodzą równości

$$f(f(x) + 2f(y)) = x + y \quad \text{oraz} \quad f(f(y) + 2f(x)) = x + y.$$

Czyli

$$f(f(x) + 2f(y)) = f(f(y) + 2f(x)).$$

Skoro  $f$  jest różnowartościowa, to

$$f(x) + 2f(y) = f(y) + 2f(x),$$

więc  $f(x) = f(y)$  dla wszystkich liczb  $x, y$ . Czyli  $f$  musiałaby być funkcją stałą, a to jest oczywista sprzeczność z danym równaniem.

# Bijekcje i bajki kombinatoryczne

## Zadanie 1

Dane są liczby całkowite  $n$  i  $k$ . Wykaż, że

$$\sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Spośród  $n$  osób będziemy chcieli wybrać drużynę i mianować jednego jej członka kapitanem. Wykażemy, że wyrażenia po obu stronach równości są liczbą możliwości takiego wyboru.

Wybierając najpierw kapitana – możemy go wybrać na  $n$  sposobów – a następnie dobierając mu zawodników – których można wybrać na  $2^{n-1}$  sposobów, gdyż wybieramy dowolny podzbiór  $n - 1$  osób – otrzymamy  $n \cdot 2^{n-1}$  osób.

Przyjmijmy, że w drużynie wraz z kapitanem jest  $k$  osób. Możliwości wyboru  $k$  osób spośród  $n$  jest  $\binom{n}{k}$ , a opcji wyboru kapitana spośród tych  $k$  osób jest dokładnie  $k$ . Stąd też dla dowolnego  $k$  liczba wariantów wynosi  $k \cdot \binom{n}{k}$ . Sumując po wszystkich możliwych  $k$  otrzymujemy, że łączna liczba możliwości wynosi  $\sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k}$ .

## Zadanie 2

Wyznacz liczbę podzbiorów zbioru  $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ , których suma wynosi co najmniej 28.

*Odpowiedź.* Szukana liczba podzbiorów wynosi  $2^9 = 512$ .

Zauważmy, że suma wszystkich elementów tego zbioru wynosi 55. Dla każdego podzbioru  $A$  zdefiniujemy jego dopełnienie jako podzbiór  $\{1, 2, 3, \dots, 10\} - A$ . Składa się on z wszystkich elementów nie występujących w  $A$ . Dla przykładu dopełnieniem zbioru  $\{1, 2, 4, 7, 8, 9\}$  będzie zbiór  $\{3, 5, 6, 10\}$ .

Zauważmy, że suma elementów dowolnego podzbioru i jego dopełnienia wynosi 55. Więc dokładnie jeden z tych zbiorów ma sumę elementów większą lub równą 28. Podzielmy wszystkie rozpatrywane podzbiory na pary zawierające dwa zbiory będące swoim dopełnieniem. Z powyższej obserwacji wynika, że dokładnie połowa podzbiorów – po jednym z każdej pary – będzie spełniać warunki zadania. Jest więc ich  $\frac{1}{2} \cdot 2^{10} = 2^9 = 512$ .

### Zadanie 3

Udowodnić, że dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych  $n, k$  zachodzi równość

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Prawa strona równości jest równa liczbie sposobów wyboru  $n$  spośród  $2n$  osób.

Podzielmy te  $2n$  osób na dwie grupy po  $n$  osób. Załóżmy, że z pierwszej grupy wybieramy  $k$  osób. Możemy tego dokonać na  $\binom{n}{k}$  sposobów. Z drugiej grupy wybieramy  $n - k$  osób – mamy  $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$  możliwości. Dla ustalonego  $k$  możemy dokonać wyboru na  $\binom{n}{k}^2$  sposobów. Sumując po wszystkich  $k$  otrzymujemy lewą stronę równości.

### Zadanie 4

Dana jest liczba pierwsza  $p \geq 3$ . Niech  $A_k$  oznacza zbiór permutacji  $(a_1, a_2, \dots, a_p)$  zbioru  $\{1, 2, 3, \dots, p\}$ , dla których liczba

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + pa_p - k$$

jest podzielna przez  $p$ . Wykazać, że zbiory  $A_1, A_2$  mają tyle samo elementów.

Ideą poniższego rozwiązania jest fakt, że jak mamy pewną permutację z  $A_1$ , pomnożymy każdy jej z elementów przez 2, to otrzymamy permutację z  $A_2$ . Jako, że mnożąc liczbę większą od  $\frac{1}{2}p$  przez 2 wylecimy ze zbioru  $\{1, 2, 3, \dots, p\}$  to zamiast mnożenia przez 2 użyjemy funkcji danej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla } x < \frac{1}{2}p \\ 2x - p & \text{dla } x > \frac{1}{2}p. \end{cases}$$

Zauważmy, że  $f(x) \equiv 2x \pmod{p}$ .

W ten sposób przyporządkujemy każdemu elementowi ze zbioru  $A_1$  dokładnie 1 element ze zbioru  $A_2$ . Czy może się jednak tak zdarzyć, że pewien element z  $A_2$  zostanie w ten sposób przyporządkowany nie do jednego, a do innej liczby elementów z  $A_1$ ? Wykażemy, że nie.

Mianowicie pokażemy, że z dowolnego elementu  $A_2$  możemy odzyskać dokładnie jedną przyporządkowaną mu permutację z  $A_1$ . Zdefiniujmy „dzielenie przez 2 modulo  $p$ ” wzorem

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{dla } x \text{ parzystych} \\ \frac{1}{2}(x - p) & \text{dla } x \text{ nieparzystych.} \end{cases}$$

Mamy  $2g(x) \equiv x \pmod{p}$ . Zauważmy, że jest to funkcja odwrotna do  $f$  – tj.  $f(g(x)) = x$ .

Zauważmy, że

$$(a_1, a_2, \dots, a_p) \in A_2 \iff (g(a_1), g(a_2), \dots, g(a_p)) \in A_1.$$

Pozostaje zauważyć, że to permutacja  $(a_i)$  była przyporządkowana do permutacji  $(g(a_i))$ . Jest tak, bo  $f(g(a_i)) = a_i$ . Stąd podane parowanie było poprawne, czyli istotnie zbiory  $A_1$  i  $A_2$  są równoliczne.

*Uwaga*

Kluczowym faktem w powyższym rozumowaniu było istnienie funkcji odwrotnej do funkcji  $f$  zdefiniowanej dla każdego elementu zbioru  $\{1, 2, \dots, p\}$ .

#### Zadanie 5

Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych  $n, k$  liczba  $(kn)!$  jest podzielna przez liczbę  $(n!)^k \cdot k!$ .

Rozpatrzmy liczbę podziałów  $kn$  osób na  $k$  grup po  $n$  osób. Nie bierzemy pod uwagę żadnej kolejności grup, ani kolejności osób w grupie.

Możemy ustawić  $kn$  osób w kolejce na  $(kn)!$  sposobów, a następnie pierwsze  $n$  osób dać do jednej grupy, drugie  $n$  osób do drugiej, itd.

Każdą z  $k$  grup możemy ustawić w kolejności na  $n!$  sposobów. Te grupy możemy ustawić w kolejności na  $k!$  sposobów. W ten sposób z jednego podziału na grupy możemy uzyskać dokładnie  $(n!)^k \cdot k!$  kolejek.

Więc liczba podziałów na grupy wynosi  $\frac{(kn)!}{(n!)^k \cdot k!}$ . Skoro jest ona całkowita, to musi zachodzić rozpatrywana podzielność.

#### Zadanie 6

Dana jest liczba całkowita  $n$ . Niech  $T_n$  oznacza liczbę takich podzbiorów zbioru  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ , że ich średnia arytmetyczna jest liczbą całkowitą. Wykazać, że liczba  $T_n - n$  jest parzysta.

Zauważmy, że zbiory, których średnia arytmetyczna jest liczbą całkowitą, zawierające więcej niż 1 element da się podzielić na pary. Mianowicie zbiory  $S$  i  $S'$  o średniej arytmetycznej elementów równej  $a$  będą w jednej parze jeśli jeden z tych zbiorów zawiera  $a$ , drugi nie zawiera, a poza tym mają te same elementy.

$T_n$  będzie takiej parzystości jak liczba niesparowanych zbiorów. Są to wszystkie zbiory jednoelementowe – jest ich  $n$ . Stąd  $T_n - n$  jest liczbą parzystą.

#### Zadanie 7

Niech  $n, k, r$  będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Wykaż, że

$$\sum_{k=0}^r \binom{n+k}{k} = \binom{n+r+1}{r}.$$

Wykażemy, że obie strony równości to liczba słów, które składają się z  $n+1$  liter  $A$  oraz  $r$  liter  $B$ . Z jednej strony możemy wybrać na  $r$  sposobów pozycje liter  $B$ , a na pozostałych miejscach ustawić litery  $A$ . Stąd tych słów jest  $\binom{n+r+1}{r}$ .

Przyjmijmy, że na miejscu  $n+k+1$  znajduje się ostatnia litera  $A$ . Na  $n+k$  poprzednich miejsc znajdzie się  $n$  liter  $A$  i  $k$  liter  $B$ . Możemy je więc ustawić na  $\binom{n+k}{k}$  sposobów. Po



ostatniej literze  $A$  będą same litery  $B$ , więc nie mamy wyboru. Stąd dla ustalonego  $k$  jest  $\binom{n+k}{k}$  sposobów. Sumując po wszystkich możliwych  $k$  otrzymujemy lewą stronę równości.

# Liczby pierwsze i reszty z dzielenia

## Zadanie 1

Dana jest liczba pierwsza  $p$ . Udowodnić, że istnieje taka liczba całkowita  $n$ , że

$$2^n \equiv n \pmod{p}.$$

Weźmy  $n = k(p-1)$ . Wówczas

$$2^{k(p-1)} \equiv (2^{p-1})^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod{p},$$

zaś

$$n \equiv k(p-1) \equiv -k \pmod{p}.$$

Wystarczy wziąć  $k = p-1$ , aby teza zachodziła.

## Zadanie 2

Dana jest liczba pierwsza  $p \geq 3$ . Niech

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-1} = \frac{a}{b}$$

dla pewnych dodatnich liczb całkowitych  $a, b$ . Udowodnić, że  $p \mid a$ .

Przemnożmy obie strony przez  $b \cdot (p-1)!$ . Mamy wtedy

$$b(p-1)! + \frac{b(p-1)!}{2} + \frac{b(p-1)!}{3} + \dots + \frac{b(p-1)!}{p-1} = a(p-1)!.$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} a(p-1)! &\equiv b(p-1)! + \frac{b(p-1)!}{2} + \frac{b(p-1)!}{3} + \dots + \frac{b(p-1)!}{p-1} \equiv \\ &\equiv b(p-1)! + b(p-1)! \cdot 2^{-1} + b(p-1)! \cdot 3^{-1} + \dots + b(p-1)! \cdot (p-1)^{-1} \equiv \\ &\equiv b(p-1)!(1^{-1} + 2^{-1} + \dots + (p-1)^{-1}) \pmod{p}. \end{aligned}$$

Funkcja, która przyporządkowuje każdej niezerowej reszcie jej odwrotność modulo  $p$  jest bijekcją (przyjmuje wszystkie wartości przeciwdziedziny i jest różnowartościowa). Czyli cały zbiór  $\{1, 2, 3, \dots, p-1\}$  zostanie przekształcony na samego siebie. Zauważamy więc, że suma odwrotności wszystkich niezerowych reszt modulo  $p$  to suma wszystkich możliwych reszt modulo  $p$ , czyli

$$1^{-1} + 2^{-1} + \dots + (p-1)^{-1} = 1 + 2 + 3 + \dots + (p-1) = \frac{p(p-1)}{2}.$$

Zauważamy, że powyższa suma jest podzielna przez  $p$ . Jest ona równa  $a(p-1)!$ . Skoro  $(p-1)!$  nie jest podzielna przez  $p$ , stąd to liczba  $a$  jest podzielna przez  $p$ .

### Zadanie 3

Udowodnij, że istnieje  $n$ , dla którego  $2^n + 3^n + 6^n \equiv 1 \pmod{p}$ .

Weźmy  $n = p - 2$ . Wówczas mamy

$$2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} \equiv \frac{2^{p-1}}{2} + \frac{3^{p-1}}{3} + \frac{6^{p-1}}{6} \equiv \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \equiv 1 \pmod{p}.$$

### Zadanie 4

Wykazać, że zachodzi przystawanie

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

Zauważmy, że każda liczba w zbiorze  $\{1, 2, 3, \dots, p-1\}$  ma swoją odwrotność. Jak dowodzi Lemat 1 jedynymi liczbami, które są swoimi odwrotnościami są  $-1$  i  $1$ . Czyli reszty ze zbioru  $\{2, \dots, p-2\}$  można pogrupować w pary postaci  $(a, a^{-1})$  – liczba i jej odwrotność.

Jeśli wymnożymy wszystkie liczby ze zbioru  $\{1, 2, 3, \dots, p-1\}$ , elementy z par zredukują się do 1. Skoro każdy element jest w jakiejś parze, to cały iloczyn

$$(p-2) \cdot (p-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2$$

zredukuje się do liczby 1. Stąd

$$(p-1)! \equiv (p-1) \cdot (p-2)! \equiv (p-1) \cdot 1 \equiv -1 \pmod{p}.$$

# Nierówności między średnimi

## Zadanie 1

Wykazać, że dla dowolnej liczby rzeczywistej  $x$  zachodzi

$$x^2 + \frac{1}{x} \geq \frac{3}{2} \sqrt[3]{2}.$$

Korzystając z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną dla liczb  $x^2, \frac{x}{2}, \frac{x}{2}$  otrzymujemy

$$\frac{x^2 + \frac{1}{x}}{3} = \frac{x^2 + \frac{x}{2} + \frac{x}{2}}{3} \geq \sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}},$$

z czego wprost wynika teza.

## Zadanie 2

Dane są takie dodatnie liczby rzeczywiste  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ , że  $a_1 a_2 a_3 \dots a_n = 1$ . Wykazać, że

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdot \dots \cdot (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) \geq 2^n.$$

Korzystając z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną mamy

$$a_i + a_{i+1} \geq 2\sqrt{a_i a_{i+1}}.$$

Robiąc tak dla każdego nawiasu otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdot \dots \cdot (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) &\geq \\ &\geq 2\sqrt{a_1 a_2} \cdot 2\sqrt{a_2 a_3} \cdot \dots \cdot 2\sqrt{a_{n-1} a_n} \cdot 2\sqrt{a_n a_1} = \\ &= 2^n a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 2^n. \end{aligned}$$

## Zadanie 3

Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych zachodzi nierówność

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Przekształcamy tęzę równoważnie dodając 3 do obu stron

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{a+c} + 1 + \frac{c}{a+b} + 1 &\geq \frac{9}{2}, \\ \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{a+c} + \frac{a+b+c}{a+b} &\geq \frac{9}{2}, \\ (a+b+c) \left( \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b} \right) &\geq \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że z nierówności między średnią arytmetyczną i harmoniczną wynika

$$\frac{\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}}{3} \geq \frac{9}{(b+c) + (a+c) + (a+b)} = \frac{9}{2(a+b+c)},$$

co jest równoważne nierówności, którą chcieliśmy wykazać.

#### Zadanie 4

Dane są takie dodatnie liczby rzeczywiste  $a, b, c$ , że  $abc = 1$ . Wykazać, że

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c.$$

Zauważmy, że zachodzą nierówności

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \geq 0,$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2a + 2b + 2c.$$

Z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną mamy

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} = 1,$$

$$a+b+c \geq 3.$$

Dodając dwie otrzymane nierówności stronami udowadniamy tezę.

#### Zadanie 5

Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $a, b, c$  zachodzi nierówność

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} \geq \frac{3a+2b-c}{4}.$$

Zauważmy, że z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną dla liczb  $\frac{a^2}{a+b}$  oraz  $\frac{a+b}{4}$  otrzymujemy

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} \geq a.$$

Analogicznie mamy

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b+c}{4} \geq b.$$

Dodając te dwie równości stronami otrzymujemy

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{a^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} + \frac{b+c}{4} \geq a+b,$$

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} \geq \frac{3a+2b-c}{4},$$

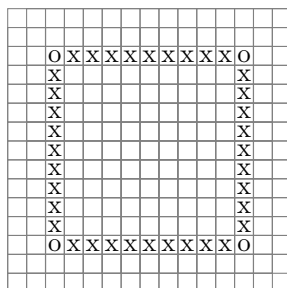
co było do wykazania.

# Konstrukcje

## Zadanie 1

Wykazać, że można pokolorować 40 pól na nieskończonej szachownicy, tak, aby nie istniał prostokąt utworzony z pól tej szachownicy zawierający dokładnie 20 pokolorowanych pól.

Rozpatrzmy kolorowanie takie jak na rysunku - pola, w które wpisano literę są pomalowane.



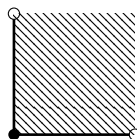
Zauważmy, że jeśli pewien prostokąt nie przykrywa żadnego pola z literą o, to może zawierać co najwyżej 18 pokolorowanych pól. Jeśli zawiera tylko jedną, to może zawierać ich co najwyżej 19. Jeśli zaś zawiera on w całości pewną „krawędź” pokolorowanego prostokąta, to albo zawiera nieparzystą liczbę pól, albo zawiera je wszystkie. Więc szukany prostokąt nie istnieje.

## Zadanie 2

Udowodnij, że punkty płaszczyzny można tak pokolorować dziewięcioma kolorami, aby żadne dwa punkty odległe o 1 nie były tego samego koloru.

Podzielmy płaszczyznę na kratkę, tak że przekątna każdej kratki ma długość 1. Kolorujemy wszystkie punkty wewnątrz kratki, jej dolną krawędź bez prawego wierzchołka i jej lewą krawędź bez górnego wierzchołka na kolor przypisany według sposobu zademonstrowanego na lewym rysunku.

7	8	9	7	8	9
4	5	6	4	5	6
1	2	3	1	2	3
7	8	9	7	8	9
4	5	6	4	5	6
1	2	3	1	2	3

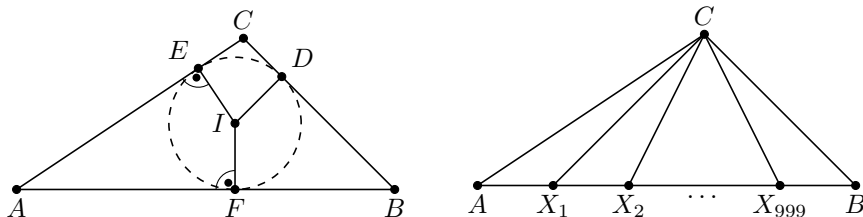


Łatwo zauważyć, że takie kolorowanie spełnia warunki zadania.

### Zadanie 3

Wykazać, że każdy trójkąt można podzielić na 3000 czworokątów wypukłych, tak, aby każdy z nich dało się wpisać w okrąg oraz opisać na okręgu.

Na początku wykazemy, że każdy trójkąt można podzielić na 3 takie czworokąty. Rozpatrzmy dowolny trójkąt  $ABC$ . Niech  $I$  to będzie środek okręgu weń wpisanego, a punkty  $D$ ,  $E$  i  $F$  to będą rzuty  $I$  odpowiednio na boki  $BC$ ,  $CA$  i  $AB$ . Zauważmy, że  $AI = IF$  (promień okręgu) oraz  $AF = AE$  (odcinki styczne). Stąd  $AF + IE = AE + IF$ , czyli czworokąt  $AFIE$  da się opisać na okręgu. Mamy też, że kąty  $\sphericalangle AFI$  i  $\sphericalangle AEI$  są proste, czyli czworokąt  $AFIE$  da się wpisać w okrąg. Analogicznie rozumiemy dla czworokątów  $BDIF$  oraz  $CEID$ .



Wystarczy więc podzielić wyjściowy trójkąt na 1000 trójkątów jak na rysunku 1, a następnie każdy z tych trójkątów podzielić na 3 szukane czworokąty.

### Zadanie 4

Wykazać, że można pokolorować każdą dodatnią liczbę całkowitą na jeden z 1000 kolorów, tak aby

- każdy z kolorów był użyty nieskończenie wiele razy;
- dla dowolnych takich liczb całkowitych  $a, b, c$ , że  $ab = c$ , pewne dwie spośród nich są jednakowego koloru.

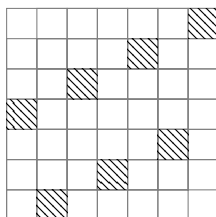
Przyjmijmy  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 3$ , ... jako kolejne liczby pierwsze. Liczbę 1 kolorujemy dowolnym kolorem. Niech  $p_i$  to będzie najmniejszy dzielnik pierwszy pewnej liczby  $n$ . Wówczas jeśli  $i \geq 1000$  kolorujemy  $n$  kolorem o numerze  $i$ . W przeciwnym wypadku kolorujemy go kolorem o numerze 1000.

Wykażemy, że podane kolorowanie spełnia warunki zadania. Łatwo zauważyć, że każdy z kolorów będzie użyty nieskończenie wiele razy. Załóżmy więc, że  $ab = c$ . Jeśli jedna z liczb  $a, b$  jest równa jeden, to pozostałe są równe, więc w szczególności są tego samego koloru. Niech  $p$  będzie najmniejszym dzielnikiem liczby  $abc$ . Wówczas, skoro  $ab = c$  liczba  $p$  musi dzielić co najmniej dwie spośród  $a, b, c$ . Z minimalności  $p$  mamy, że wyznaczy ona jednakowy kolor obu tym liczbom.

### Zadanie 5

Łódka może zabrać w rejs po jeziorze dokładnie 7 osób. Udowodnij, że można tak zaplanować rejsy 49-osobowej wycieczki, aby każdego dwóch uczestników płynęło ze sobą dokładnie raz.

Zinterpretujemy te 49 osób jako planszę 7 na 7, gdzie każdemu polu przyporządkowana jest jedna osoba. Rozpatrzmy wszystkie kolorowania powstające w następujący sposób. Kolorujemy dowolna pola w najniższym i drugim najniższym wierszu. Załóżmy, że są to pola  $a$ -te i  $a + k$ -te (być może  $k < 0$ ). Wówczas w trzeciej kolumnie pokolorujemy pole  $a + 2k \pmod{7}$ , w czwartej  $a + 3k \pmod{7}$  itd. Przykładowe kolorowanie dla  $a = 2$  i  $k = 2$  jest na rysunku.



Rozpatrzmy wszystkie takie kolorowania i dla każdego weźmy osoby przyporządkowane pokolorowanym polom na rejs. Wykażemy, że dowolne dwa pola są jednocześnie pokolorowane w dokładnie jednym kolorowaniu. Przyjmijmy, że te dwa pola są oddalone o  $y \neq 0$  wierszy w pionie i  $x$  kolumn w poziomie. Zauważmy, że wówczas musi zajść  $x \equiv yk \pmod{7}$ , co jest prawdą dla dokładnie jednego  $k$ . Skoro  $k$  jest jednoznacznie wyznaczone i znamy położenie jednego pola z kolorowania, to możemy odtworzyć położenie wszystkich. Skoro z dwóch pól możemy jednoznacznie odtworzyć kolorowanie, do którego oba należą, to teza jest prawdziwa.

### Zadanie 6

Jaś zapisał pewną skończoną liczbę liczb rzeczywistych na tablicy. Następnie zaczął wykonywać ruchy. W każdym ruchu wybiera dwie równe liczby  $a, a$ , zmazuje je i zapisuje liczby  $a + 100, a + 2000$ . Wykazać, że Jaś może zapisać na początku takie liczby, że będzie mógł wykonywać ruchy w nieskończoność.

Założmy, że dla pewnej liczby całkowitych  $a$  zapisano liczby

$$a, a + 1, a + 2, \dots, a + 2019 \quad \text{oraz} \quad a, a + 1, a + 2, \dots, a + 100.$$

Zauważmy, że wykonując ruch dla  $a$  otrzymujemy analogiczną konfigurację dla  $a + 1$ . Wypisując na starcie taką konfigurację chociażby dla  $a = 0$  Jaś będzie w stanie wykonywać ruchy w nieskończoność.



# Wielomiany

## Zadanie 1

Dany jest niezerowy wielomian  $W(x)$  o współczynnikach rzeczywistych, dla którego zachodzi równość

$$(x+1)W(x) = (x-2)W(x+1).$$

Wykazać, że każdy pierwiastek rzeczywisty  $W(x)$  jest liczbą całkowitą.

Założmy nie wprost, że istnieje pewna liczba niecałkowita  $\alpha$ , dla której zachodzi równość  $W(\alpha) = 1$ . Wstawiając  $x = \alpha$  do wyjściowego równania otrzymujemy

$$\begin{aligned}(\alpha+1)W(\alpha) &= (\alpha-2)W(\alpha+1), \\ 0 &= (\alpha-2)W(\alpha+1).\end{aligned}$$

Skoro liczba  $\alpha$  nie była całkowita, to  $\alpha - 2 \neq 0$ . Stąd  $W(\alpha+1) = 0$ .

Wykazaliśmy, że jeśli  $\alpha$  jest niecałkowitym pierwiastkiem, to również  $\alpha + 1$  jest niecałkowitym pierwiastkiem. Więc liczby

$$\alpha, \alpha + 1, \alpha + 2, \alpha + 3, \dots$$

są pierwiastkami  $W(x)$ . Zaś każdy niezerowy wielomian może mieć skończenie wiele pierwiastków – co najwyżej tyle, ile wynosi jego stopień – co daje sprzeczność.

## Zadanie 2

Wykazać, że jeśli liczby rzeczywiste  $a, b, c$  spełniają

$$\begin{cases} abc = 1 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a + b + c. \end{cases}$$

to co najmniej jedna liczba spośród  $a, b, c$  jest równa 1.

Rozpatrzmy wielomian

$$\begin{aligned}P(x) &= (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc = \\ &= x^3 - (a+b+c)x^2 + abc \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)x - 1 = \\ &= x^3 - (a+b+c)x^2 + (a+b+c)x - 1.\end{aligned}$$

Chcemy wykazać, że liczba 1 jest pierwiastkiem tego wielomianu. Zauważmy więc, że

$$P(1) = 1^3 - (a+b+c) \cdot 1^2 + (a+b+c) \cdot 1 - 1 = 0.$$

Skoro 1 jest pierwiastkiem  $P(x)$ , to należy on do multizbioru  $\{a, b, c\}$ .

### Zadanie 3

Niech  $n \geq 1$  będzie pewną liczbą całkowitą. Wykazać, że wielomian  $x^{1001} + x + 1$  jest podzielny przez  $x^2 + x + 1$ .

Wykażemy indukcyjnie, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej  $n$  wielomian  $x^{3n-1} + x + 1$  jest podzielny przez wielomian  $x^2 + x + 1$ . Dla  $n = 1$  te wielomiany są sobie równe, więc podzielność zachodzi.

Zauważmy, że

$$(x^{3(n+1)-1} + x + 1) - (x^{3n-1} + x + 1) = x^{3n-1}(x^3 - 1) = x^{3n-1}(x - 1)(x^2 + x + 1).$$

Prawa strona równości jest podzielna przez wielomian  $x^2 + x + 1$ . Stąd jeśli  $x^{3n-1} + x + 1$  jest podzielne przez  $x^2 + x + 1$  to  $x^{3(n+1)-1} + x + 1$  również. Więc z zasady indukcji matematycznej wynika postulowana własność. Wstawiając  $n = 334$  otrzymujemy tezę.

### Zadanie 4

Dany jest pewien wielomian  $P(x)$ . Wykazać, że istnieje wielomian  $Q(x)$ , że zachodzi równość

$$Q(x+1) - Q(x) = P(x).$$

Tezę wykażemy indukując się po stopniu wielomianu  $P$ . Jeśli jego stopień wynosi 0, to znaczy  $P(x) = c$  dla pewnej stałej  $c$ , to biorąc  $Q(x) = cx$  otrzymujemy

$$Q(x+1) - Q(x) = c(x+1) - cx = c.$$

Założmy, że dla wielomianów o stopniu nie większym niż  $n-1$  zachodzi teza. Wykażemy, że jeśli  $\deg P = n$  to szukane  $Q$  istnieje. Zauważmy, że wielomian

$$(x+1)^{n+1} - x^{n+1} = \sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i} x^i$$

jest wielomianem stopnia  $n$ . Taki sam stopień ma  $P$ , więc istnieje taka liczba rzeczywista  $a$ , że

$$a((x+1)^{n+1} - x^{n+1}) \quad \text{oraz} \quad P(x)$$

mają równy współczynnik wiodący. Stąd

$$P(x) - a((x+1)^{n+1} - x^{n+1})$$

ma stopień mniejszy od  $n$ , czyli na mocy założenia indukcyjnego istnieje takie  $Q_1(x)$ , że

$$Q_1(x+1) - Q_1(x) = P(x) - a((x+1)^{n+1} - x^{n+1}),$$

równoważnie

$$(Q_1(x+1) + a(x+1)^{n+1}) - (Q_1(x) + ax^{n+1}) = P(x).$$

Biorąc  $Q(x) = Q_1(x) + ax^{n+1}$  otrzymujemy tezę.

### Zadanie 5

Dany jest wielomian  $W(x)$  o współczynnikach całkowitych. Wykazać, że jeśli przyjmuje on dla czterech różnych liczb całkowitych wartość 5, to dla żadnego całkowitego argumentu nie przyjmuje wartości 8

Przyjmijmy, że

$$W(a_1) = W(a_2) = W(a_3) = W(a_4) = 5 \quad \text{oraz} \quad W(b) = 8.$$

dla pewnych liczb całkowitych  $a_1, a_2, a_3, a_4$ . Rozpatrzmy wielomian

$$Q(x) = W(x) - 5.$$

Wówczas liczby  $a_1, a_2, a_3, a_4$  są jego pierwiastkami. Na mocy twierdzenia Bézouta możemy napisać

$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4) \cdot R(x)$$

dla pewnego wielomianu  $R$ . Zauważmy, że  $R(x)$  musi mieć współczynniki całkowite. W przeciwnym wypadku, rozpatrując współczynnik niecałkowity przy najwyższej możliwej potędze, przemnożony przez  $x^4$  otrzymalibyśmy, że  $Q(x)$  też ma współczynnik niecałkowity. Zauważmy, że

$$3 = W(b) - 5 = Q(5) = (5 - a_1)(5 - a_2)(5 - a_3)(5 - a_4) \cdot R(b).$$

Liczby  $5 - a_1, 5 - a_2, 5 - a_3, 5 - a_4$  są parami różne. Stąd co najmniej dwie z nich nie są równe  $-1$  ani  $1$ . Stąd wartość bezwzględna ich iloczynu nie może być liczbą pierwszą, w szczególności być równa 3.

### Zadanie 6

Paweł i Tomek grają w grę. Paweł ma pewien wielomian  $W(x)$  o współczynnikach dodatnich całkowitych stopnia  $n \geq 1$ . Tomek go nie zna, a chce poznać. Może w tym celu wykonywać ruchy. W każdym ruchu może wybrać pewną dodatnią liczbę całkowitą  $k$ , być może biorąc pod uwagę co się stało we wcześniejszych ruchach, a następnie Tomek podaje mu wartość  $W(k)$ . Wyznaczyć, w zależności od  $n$ , najmniejszą liczbę ruchów, w której Tomek, niezależnie od wybranego wielomianu, jest w stanie poznać wszystkie jego współczynniki.

Założmy, że Tomek po wykonaniu pierwszego ruchu dowiedział się, że  $W(a) = 2a$ . Wówczas nie może rozróżnić czy  $W(x) = 2a$  czy  $W(x) = 2x$ . Stąd aby być w stanie poznać wielomian niezależnie od tego, jaki on jest, Tomek będzie potrzebował co najmniej 2 ruchów. Wykażemy, że niezależnie od  $n$ , Tomek jest w stanie tego dokonać w 2 ruchach. Strategia składa się z 2 punktów:

- Tomek pyta Pawła o wartość  $W(2)$ . Skoro współczynniki  $W$  są dodatnie, to łatwo wykazać, że  $W(2)$  jest większe od największego współczynnika wielomianu  $W$ .
- Następnie pyta go o wartość  $d = W(W(2))$ . Otrzyma liczbę

$$a_n d^n + a_{n-1} d^{n-1} + \dots + a_1 d + a_0.$$

Jest to wartość liczby o kolejnych cyfrach  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  w systemie liczbowym o podstawie  $d$ . Korzystamy tu z faktu, że  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 < d$ . Zamieniając otrzymaną liczbę na liczbę w systemie o podstawie  $d$  kolejne cyfry będą współczynnikami danego wielomianu.

*Uwaga*

W lepszym zrozumieniu idei może posłużyć przykład. Weźmy wielomian

$$W(x) = 21x^3 + 4x + 5.$$

Wiemy, że

$$W(100) = 21000405.$$

W zapisie dziesiętnym pokazały nam się kolejne współczynniki  $W(x)$ .

#### Zadanie 7

Rozstrzygnąć, czy istnieje wielomian 1000 stopnia, którego współczynniki należą do zbioru  $\{-1, 1\}$  oraz ma on 1000 pierwiastków rzeczywistych.

Wykażemy, że szukany wielomian nie istnieje. Przyjmijmy, że ma on pierwiastki  $a_1, a_2, \dots, a_{1000}$ . Wówczas jest on postaci

$$W(x) = a(x - a_1)(x - a_2) \cdot \dots \cdot (x - a_{1000}).$$

Wymnażając te nawiasy możemy zauważyć, że wyraz wolny wynosi  $a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_{1000}$ , współczynnik przy  $x$  będzie równy  $\sum_{1 \leq i \leq 1000} a_i$ , zaś współczynnik przy  $x^2$  wyniesie  $\sum_{1 \leq i < j \leq 1000} a_i a_j$ . Na mocy założeń są one równe  $\pm 1$ . Mamy

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq 1000} a_i &= \pm 1, \\ \left( \sum_{1 \leq i \leq 1000} a_i \right)^2 &= 1, \\ \sum_{1 \leq i \leq 1000} a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 1000} a_i a_j &= 1. \end{aligned}$$

Jeśli  $\sum_{1 \leq i < j \leq 1000} a_i a_j = 1$ , to na mocy powyższej równości mielibyśmy, że suma kwadratów jest ujemna. Stąd  $\sum_{1 \leq i < j \leq 1000} a_i a_j = -1$ , czyli

$$\sum_{1 \leq i \leq 1000} a_i^2 = 1 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 1000} a_i a_j = 3.$$

Na mocy nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną mamy

$$\frac{3}{1000} = \frac{\sum_{1 \leq i \leq 1000} a_i^2}{1000} \geq \sqrt[1000]{|a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_{1000}|^2} = 1,$$

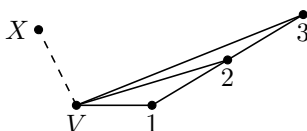
co daje nam sprzeczność.

# Grafy

## Zadanie 1

W pewnym grafie każdy wierzchołek ma stopień co najmniej 100. Wykazać, że w tym grafie istnieje ścieżka o długości co najmniej 101.

Rozpatrzmy najdłuższą ścieżkę w tym grafie i założmy nie wprost, że jest ona długości nie większej niż 100. Wierzchołek początkowy tej ścieżki  $V$  jest połączony z co najmniej 101 wierzchołkami. Co najwyżej 99 z nich leży na rozpatrywanej ścieżce – 100 wierzchołków z wyłączeniem  $V$ . Stąd  $V$  jest połączony z pewnym wierzchołkiem spoza ścieżki – możemy więc wydłużyć tę ścieżkę o tego sąsiada. Przeczy to maksymalności długości tej ścieżki.



Wydłużamy ścieżkę  $V-1-2-3$  o  $X$ .

## Zadanie 2

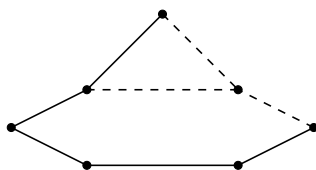
W pewnym kraju jest  $n \geq 3$  miast, przy czym każde dwa są połączone drogą albo torami kolejowymi. Pewien turysta planuje wyruszyć z pewnego miasta, odwiedzić każde miasto dokładnie raz, a następnie powrócić do wyjściowego miasta. Wykazać, że może tak wybrać wyjściowe miasto i tak zaplanować swoją trasę, aby zmienić środek transportu co najwyżej raz.

Przełożmy zadanie na język teorii grafów. Miasta będą wierzchołkami, połączenie kolejowe niebieską krawędzią, a połączenie drogowe czerwona.

Wykażemy tezę indukcyjnie. Zauważmy, że dla  $n = 3$  jest ona trywialna. Gdy wszystkie krawędzie są tego samego koloru, to dowolne przejście spełnia warunki zadania. Gdy tak nie jest, to zaczynamy w wierzchołku, w którym schodzą się dwie krawędzie różnych kolorów i przechodzimy przez wszystkie krawędzie.

Wyróżnimy pewien wierzchołek  $v$ . Wszystkie inne wierzchołki tworzą graf, który ma  $n - 1$  wierzchołków, a więc możemy skorzystać z założenia indukcyjnego. Założmy, że krawędzie  $d_1d_2, d_2d_3, \dots, d_{k-1}d_1$  tworzą cykl spełniający warunki zadania. Gdy cykl ten jest jednokolorowy, to jeśli wstawimy  $v$  między  $d_1$  i  $d_2$ , to tak otrzymany cykl będzie spełniał założenia.

Rozpatrzmy przypadek, w którym istnieje kolor  $\mathcal{K}$ , że tylko jedna krawędź jest koloru  $x$ . Założmy, bez straty ogólności, że  $d_1d_2$  jest koloru  $\mathcal{K}$ , a inne krawędzie są innego koloru. Wtedy cykl  $d_1v, vd_2, d_2d_3, \dots, d_{k-1}d_1$  spełnia warunki zadania.



Teraz przyjrzyjmy się przypadkowi, w którym każdy z kolorów występuje co najmniej dwukrotnie na rozpatrywanym cyklu. Załóżmy więc bez straty ogólności, że  $d_1d_2$  i  $d_2d_3$  są czerwone, a  $d_3d_4$  i  $d_4d_5$  są niebieskie. Przyjmijmy, również bez straty ogólności, że  $vd_3$  jest czerwona. Wtedy cykl  $d_1d_2, d_2d_3, d_3v, vd_4, d_4d_5, \dots, d_{k-2}d_{k-1}, d_{k-1}d_1$  spełnia warunki zadania.

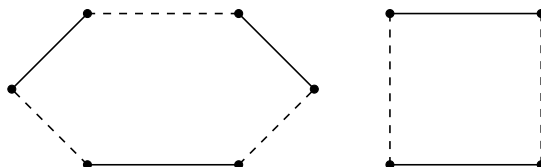
### Zadanie 3

W pewnym turnieju bierze udział 40 drużyn. Pierwszego dnia każda z drużyn rozegrała jeden mecz. Drugiego dnia również. Wykazać, że istnieje pewne 20 drużyn, takich, że każde dwie spośród nich jeszcze nie grały ze sobą meczu.

Rozpatrzmy graf, w którym wierzchołkami będą drużyny. Krawędź będzie istnieć wtedy i tylko wtedy, gdy drużyny odpowiadające jej końcowi rozegrały ze sobą mecz. Zauważmy, że warunek z zadania jest równoważny faktowi, że stopień każdego wierzchołka jest równy 2.

Wybermy pewien wierzchołek i rozpocznijmy w nim spacer po grafie. Będziemy przechodzić do następnych wierzchołków krawędziami, którymi jeszcze nie szliśmy. Łatwo zauważyć, że musimy w ten sposób otrzymać cykl, w którym każdy wierzchołek odwiedzamy co najwyżej raz. Skoro stopień każdego z wierzchołków wynosi 2, to żaden z wierzchołków tego cyklu nie ma krawędzi łączącej go z jakimkolwiek wierzchołkiem spoza tego cyklu. Wykonując analogiczne spacery startując z nieodwiedzonych jeszcze wierzchołków - o ile takowe istnieją - otrzymamy, że graf jest sumą rozłącznych cykli.

Pokolorujmy każdą z krawędzi na czerwono, jeśli mecz odbył się pierwszego dnia, lub na zielono, jeśli odbył się drugiego dnia. Zauważmy, że z każdego wierzchołka wychodzi jedna zielona i jedna czerwona krawędź. Stąd w każdym cyklu krawędzie na przemian: zielona, czerwona, zielona, czerwona, ... itd. Stąd każdy z cykli jest parzystej długości.



W każdym z cykli długości parzystej możemy wybrać połowę jego wierzchołków, aby żadne dwa z nich nie grały ze sobą meczu. Wybierając takie wierzchołki dla każdego z cykli otrzymamy połowę wierzchołków z całego grafu, które nie są połączone ze sobą. Odpowiadające im 20 drużyn spełniają warunki zadania.

#### Zadanie 4

Dany jest graf spójny zawierający parzystą liczbę wierzchołków. Wykazać, że możemy pokolorować niektóre z jego krawędzi, aby z każdego wierzchołka wychodziła nieparzysta liczba pokolorowanych krawędzi.

Rozpatrzmy dwa wierzchołki  $u$  i  $v$ . Skoro graf jest spójny, to istnieje różnowierzchołkowa ścieżka między tymi wierzchołkami. Zmienimy stan – z pokolorowanej na niepokolorowaną i na odwrót – każdej z krawędzi na tej ścieżce. Zauważmy, że parzystość liczby kolorowych krawędzi wychodzących z każdego wierzchołka wewnątrz ścieżki nie ulegnie zmianie. Natomiast parzystość liczby kolorowych krawędzi wychodzących z  $u$  i z  $v$  się zmieni. Czyli jesteśmy w stanie zmienić parzystość liczby kolorowych krawędzi wychodzących z dowolnych dwóch wierzchołków. Skoro liczba wierzchołków w grafie jest liczbą parzystą, to możemy podzielić je w dowolny sposób na pary i zastosować wskazany wyżej algorytm dla każdej z nich. W ten sposób uzyskamy szukane kolorowanie.

#### Zadanie 5

W pewnym grafie o  $n$  wierzchołkach ich stopnie wynoszą odpowiednio  $d_1, d_2, \dots, d_n$ . Udowodnić, że istnieje taki podzbiór co najmniej  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+d_i}$  jego wierzchołków, że żadne dwa z nich nie są połączone krawędzią.

Rozpatrzmy wierzchołek o największym stopniu. Wyróżnimy go i usuńmy go wraz ze wszystkimi sąsiadującymi wierzchołkami. Bez straty ogólności  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_{d_1+1}$  to będą stopnie usuniętych wierzchołków. Wówczas rozpatrywana suma ułamków zmniejszy się o sumę

$$\sum_{i=0}^{d_1+1} \frac{1}{d_i+1} \geq \sum_{i=0}^{d_1+1} \frac{1}{d_1+1} = 1.$$

Także po usunięciu tych wierzchołków inne stopnie mogą się zmniejszyć, ale to jeszcze bardziej zmniejszy naszą sumę.

Wykazaliśmy, że usuwając pewien wierzchołek i jego sąsiadów, zmniejszamy rozpatrywaną sumę o co najwyżej 1. Powtarzając ten algorytm, wykonamy co najmniej  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+d_i}$  usunąć. Biorąc pod uwagę wyróżnione wierzchołki otrzymamy zbiór spełniający warunki zadania.

#### Zadanie 6

Hydra składa się z pewnej liczby głów, z której niektóre są połączone szyjami. Herkules może odciąć wszystkie szyje wychodzące z pewnej głowy, jednak wówczas z tamtej głowy wyrastają szyje, którą łączą ją z głowami, z którymi nie była ona wcześniej połączona. Hydra jest pokonana, gdy rozpada się na dwie rozłączne części. Wyznaczyć najmniejsze  $N$ , że Herkules jest w stanie pokonać dowolną hydrę składającą się ze 100 szyi.

Wykażemy, że  $N = 10$ . Oczywiście rozpatrujemy dany problem w języku teorii grafów. Rozpatrzmy dwa przypadki.

Jeśli istnieje wierzchołek o stopnie nie większym niż 10, to Herkules może odciąć każdego z jego sąsiadów i wówczas ten wierzchołek nie będzie miał już żadnych sąsiadów. W ten sposób może osiągnąć swój cel.

Założmy teraz, że każdy wierzchołek ma stopień co najmniej 11. Oznaczmy liczbę wierzchołków jako  $K$ . Wówczas liczba krawędzi wynosi co najmniej  $\frac{11K}{2}$ . Skoro jest ona równa 100, to otrzymujemy  $K \leq 18$ . Zauważmy, że po wykonaniu odcięcia wierzchołka o stopniu co najmniej 11, będzie on miał stopień co najwyżej  $18 - 11 - 1 = 6$ . Wówczas stosując procedurę analogiczną do poprzedniego przypadku otrzymamy  $6 + 1 = 7$  łącznych cięć.

Pozostaje wskazać przykład grafu, którego nie da rozciąć się w mniej niż 10 ruchach. Zauważmy, że graf  $K_{a,b}$  może zostać przekształcony na jeden z grafów  $K_{a-1,b+1}$  lub  $K_{a+1,b-1}$ . Rozpatrując graf  $K_{10,10}$  otrzymujemy szukany przykład.



# Indukcja matematyczna 2

## Zadanie 1

Udowodnić, że za pomocą monet trzyzłotowych i pięcizłotowych można zapłacić każdą kwotę większą niż 7 złotych, bez konieczności wydawania reszty.

Najpierw zauważymy, że skoro zachodzą równości

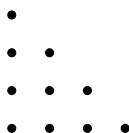
$$8 = 5 + 3, \quad 9 = 3 + 3 + 3, \quad 10 = 5 + 5,$$

skąd wynika, że kwoty 8, 9 i 10 złotych da się zapłacić bez wydawania reszty.

Założmy, że dla pewnej liczby całkowitej  $k \geq 11$ , da się we wspomniany sposób zapłacić wszystkie kwoty większe od 7 złotych, ale nie większe niż  $k$ . Wówczas w szczególności da się zapłacić kwotę  $(k + 1) - 3 \geq 8$  złotych. Dokładając jedną monetę trzyzłotową otrzymujemy szukane przedstawienie kwoty  $k + 1$  złotych. Z zasady indukcji matematycznej wynika teza.

## Zadanie 2

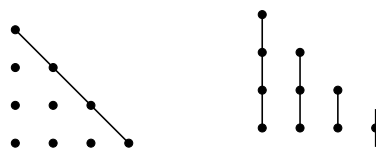
Dana jest liczba naturalna  $n$ . Niech  $\mathcal{S}$  będzie zbiorem wszystkich punktów postaci  $(a, b)$ , gdzie  $a$  i  $b$  są liczbami ze zbioru  $\{0, 1, 2, \dots, n\}$  oraz  $a + b \leq n$ .



Przykład dla  $n = 3$ .

Wykazać, że jeśli pewien zbiór prostych zawiera każdy z tych punktów, to zawiera on co najmniej  $n + 1$  prostych.

Zauważmy, że dla  $n = 0$  teza jest trywialna – zbiór  $\mathcal{S}$  zawiera jedynie punkt  $(0, 0)$  i do jego pokrycia jest potrzebna jedna prosta. Rozumując indukcyjnie, założmy, że teza zachodzi dla pewnej liczby naturalnej  $n$ . Wykażmy, że jest prawdziwa również dla  $n + 1$ .



Weźmy dowolny zbiór prostych, które przykrywają każdy z punktów zbioru  $\mathcal{S}$  dla  $n + 1$ . Wyróżnimy punkty  $(a, b)$ , dla których zachodzi równość  $a + b = n + 1$ . Zauważmy, że wszystkie te punkty leżą na jednej prostej. Rozpatrzmy dwa przypadki

1. Istnieje prosta  $l$ , która przykrywa pewne dwa wyróżnione punkty. Wówczas przykrywa ona wszystkie wyróżnione punkty i żadnego innego punktu ze zbioru  $\mathcal{S}$ .

Zauważmy, że dla zbioru  $\mathcal{S}$  z usuniętymi wyróżnionymi punktami, możemy zaaplikować założenie indukcyjne. Wynika z niego, że do pokrycia rozpatrywanych punktów potrzeba co najmniej  $n$  prostych. Dokładając prostą  $l$  otrzymujemy, że łącznie prostych jest co najmniej  $n + 1$ .

2. Żadne dwa wyróżnione punkty nie są przykryte przez jedną prostą. Skoro jest  $n + 1$  punktów, to do ich przykrycia będzie potrzebnych  $n + 1$  prostych. W szczególności do pokrycia zbioru  $\mathcal{S}$  potrzeba  $n + 1$  prostych.

### Zadanie 3

Wykazać, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita, że jest ona podzielna przez  $2^{1000}$ , oraz ma w zapisie dziesiętnym jedynie cyfry 1 i 2.

Powiemy, że liczba naturalna  $x$  jest *dobra*, jeśli ma dokładnie  $n$  cyfr, z których każda jest jedynką lub dwójką, oraz  $x$  jest podzielna przez liczbę  $2^n$ .

Wykażemy indukcyjnie, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej  $n$ , istnieje  $n$  cyfrowa liczba dobra. Zauważmy, że liczba 2 jest liczbą dobrą. Pozostaje wykazać, że jeśli dla pewnego  $n$  istnieje  $n$ -cyfrowa liczba dobra – nazwijmy ją  $2^n \cdot a_n$ , to dla  $n + 1$  również.

Rozpatrzmy dwa przypadki

1. Jeśli liczba  $a_n$  jest nieparzysta, to weźmy liczbę

$$10^{n+1} + 2^n \cdot a_n = 2^n (5^n + a_n).$$

Powstaje ona przez dołączenie do  $2^n \cdot a_n$  cyfry 1 z lewej strony. W nawiasie jest suma dwóch liczb nieparzystych, a więc jest ona parzysta. Stąd  $10^{n+1} + 2^n \cdot a_n$  jest podzielna przez  $2^{n+1}$ .

2. Gdy liczba  $a_n$  jest parzysta, to rozpatrzmy liczbę

$$2 \cdot 10^{n+1} + 2^n \cdot a_n = 2^n (2 \cdot 5^n + a_n).$$

Powstaje ona przez dołączenie do  $2^n \cdot a_n$  cyfry 2 z lewej strony. W nawiasie jest suma dwóch liczb parzystych, a więc jest ona parzysta. Więc  $2 \cdot 10^{n+1} + 2^n \cdot a_n$  jest podzielna przez  $2^{n+1}$ .

W każdym z przypadków rozpatrywana liczba jest  $n + 1$ -cyfrową liczbą dobrą. Kończy to dowód indukcyjny. Biorąc liczbę dobrą, która ma 1000 cyfr. Jest ona podzielna przez  $2^{1000}$  oraz składa się wyłącznie z cyfr 1 i 2.

*Uwaga*

Liczby dobre wygenerowane za pomocą powyższego rozumowania to

2, 12, 112, 2112, 22112, ...

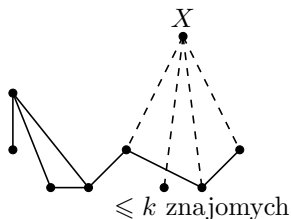
#### Zadanie 4

Niech  $k$  będzie dodatnią liczbą całkowitą. Na przyjęciu spotkało się  $n \geq 2$  gości, spośród których niektórzy znają się. Okazało się, że dla każdego niepustego podzbioru gości  $A$  istnieje osoba, która zna co najwyżej  $k$  osób z  $A$ . Podzbiór gości, spośród których każde dwie się znają, nazywamy *kilką*. Wykazać, że istnieje co najwyżej  $2^k \cdot n$  klik.

Zadanie rozwiążemy indukując się po  $n$ . Jeśli  $n = 2$ , to teza jest trywialna – trzeba wykazać, że istnieją co najwyżej 4 kliki, a są 4 możliwe podzbiory zbiorów gości. W dalszej części rozwiązania zakładamy, że  $n \geq 3$ .

Na mocy założenia zadania zastosowanego dla zbioru wszystkich  $n$  osób, istnieje pewna osoba  $X$ , która ma co najwyżej  $k$  znajomych. Usuając osobę  $X$ , założenie z zadania nadal będzie zachodzić dla pozostałych osób. Na mocy założenia indukcyjnego liczba klik, które nie zawierają  $X$  wynosi  $2^k \cdot (n - 1)$ .

Klika, która zawiera  $X$ , nie może zawierać osoby, której  $X$  nie zna. Musi więc składać się z  $X$  oraz pewnego podzbioru znajomych  $X$ . Skoro  $X$  ma co najwyżej  $k$  znajomych, to tych podzbiorów jest co najwyżej  $2^k$ .



Łącząc powyższe wnioski otrzymujemy, że klika jest co najmniej  $2^k \cdot (n - 1) + 2^k = 2^k \cdot n$ . Z zasady indukcji matematycznej wynika teza.

#### Zadanie 5

Znajdź wszystkie funkcje  $f$  z dodatnich liczb całkowitych w dodatnie liczby całkowite, które dla każdej liczby dodatniej całkowitej  $n$  spełniają nierówności

$$(n - 1)^2 < f(n)f(f(n)) < n^2 + n.$$

Podstawiając do wyjściowego równania  $n = 1$  otrzymamy

$$0 < f(1)f(f(1)) < 2,$$

skąd  $f(1) = f(f(1)) = 1$ . Wykażemy indukcyjnie, że  $f(n) = n$ . Załóżmy, że równość  $f(k) = k$  zachodzi dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych  $k$  mniejszych od  $n$ .

1. Jeśli  $f(n) \leq n - 1$ , to z założenia indukcyjnego  $f(f(n)) = f(n)$ . Wówczas

$$f(n)f(f(n)) = f(n)^2 \leq (n - 1)^2,$$

co daje sprzeczność.

2. Gdy  $f(n) \geq n + 1$ , to skoro

$$f(n)f(f(n)) < n^2 + n,$$

to  $f(f(n)) < n$ , czyli  $f(f(n)) \leq n - 1$ . Stąd na mocy założenia indukcyjnego  $f(f(f(n))) = f(f(n))$ . Wstawiając  $f(n)$  zamiast  $n$  do danej nierówności otrzymamy

$$(f(n) - 1)^2 < f(f(f(n)))f(f(n)) = f(f(n))^2 \leq (n - 1)^2,$$

co przeczy temu, że  $f(n) \geq n + 1$ .

Stąd musi zajść  $f(n) = n$ , co kończy rozumowanie indukcyjne.

#### Zadanie 6

Niech  $\mathcal{R}$  będzie rodziną zbiorów 1000-elementowych. Moc  $\mathcal{R}$  jest większa niż  $1000 \cdot 999^{1000}$ . Wykazać, że istnieje 1000-elementowa rodzina  $\mathcal{G}$ , będąca podrodziną  $\mathcal{R}$ , oraz taki zbiór  $X$ , że dla dowolnych zbiorów  $A, B \in \mathcal{R}$  zachodzi  $A \cap B = X$ .

Wykażemy nieco ogólniejszą i mocniejszą wersję tezy.

Niech  $\mathcal{R}$  będzie rodziną zbiorów  $n$ -elementowych. Moc  $\mathcal{R}$  jest większa niż  $n! \cdot k^n$ . Wówczas istnieje  $k + 1$ -elementowa rodzina  $\mathcal{G}$ , będąca podrodziną  $\mathcal{R}$ , oraz taki zbiór  $X$ , że dla dowolnych zbiorów  $A, B \in \mathcal{R}$  zachodzi  $A \cap B = X$ .

Będziemy przeprowadzać indukcję po liczbie  $n$ . Dla  $n = 1$  moc  $\mathcal{R}$  to co najmniej  $k + 1$ . Każdy ze zbiorów zawiera jeden element, więc każde dwa mają puste przecięcie. Stąd biorąc całą rodzinę  $\mathcal{R}$  oraz  $X = \emptyset$  otrzymujemy tezę.

Rozpatrzmy największą podrodzinę  $\mathcal{H}$  rodziny  $\mathcal{R}$ , że dowolne dwa jej podzbiory mają puste przecięcie. Moc  $\mathcal{H}$  jest nie większa niż  $k$ , gdyż w przeciwnym przypadku biorąc rodzinę  $\mathcal{H}$  i  $X = \emptyset$  otrzymamy tezę. Stąd każdy zbiór  $A \in \mathcal{R}$  ma niepuste przecięcie z pewnym ze zbiorów z rodziny  $\mathcal{H}$ .

Łącznie zbiory należące do rodziny  $\mathcal{H}$  zawierają co najwyżej  $k \cdot n$  elementów – jest co najwyżej  $k$  zbiorów  $n$ -elementowych. Skoro wszystkich zbiorów należących do  $\mathcal{R}$  jest więcej niż  $n! \cdot k^n$ , to istnieje element  $a$ , który należy do

$$\frac{n! \cdot k^n}{n \cdot k} = (n - 1)! \cdot k^{n-1}$$

zbiorów.

Rozpatrując zbiory zawierające element  $a$ , następnie usuwając go z każdego z nich, otrzymamy więcej niż  $(n - 1)! \cdot k^{n-1}$  zbiorów, które zawierają po  $n - 1$  elementów. Można więc skorzystać z założenia indukcyjnego. Istnieje więc pewien zbiór  $X$  oraz pewna podrodzina rozpatrywanej rodziny zbiorów, że  $X$  jest przecięciem dowolnych zbiorów należących do danej podrodziny. Dokładając ponownie do każdego z tych zbiorów element  $a$  otrzymujemy tezę.

# Podzielności

## Zadanie 1

Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite  $n$ , które są podzielne przez liczbę  $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ .

*Odpowiedź.* Jedynymi liczbami spełniającymi warunki zadania są liczby postaci  $k^2$ ,  $k^2 + k$  oraz  $k^2 + 2k$  dla pewnej liczby całkowitej  $k$ .

Rozpatrzmy taką dodatnią liczbę całkowitą  $k$ , że

$$(k+1)^2 > n \geq k^2.$$

Innymi słowy  $k$  jest największą liczbą całkowitą, taką, że  $k^2$  jest nie większe niż  $n$ . Wówczas

$$k+1 > \sqrt{n} \geq k,$$

czyli  $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = k$ . Jedynymi liczbami w przedziale  $[k^2, (k+1)^2)$ , które są podzielne przez  $k$  są  $k^2$ ,  $k^2 + k$  i  $k^2 + 2k$ .

## Zadanie 2

Dane są dodatnie liczby całkowite  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , że liczba  $a^b$  dzieli  $b^c$  oraz  $a^c$  dzieli  $c^b$ . Wykazać, że  $a^2$  dzieli  $bc$ .

Niech  $p$  będzie dowolną liczbą pierwszą. Z danych podzielności wynika, że

$$v_p(b^c) \geq v_p(a^b) \quad \text{oraz} \quad v_p(c^b) \geq v_p(a^c),$$

czyli równoważnie

$$cv_p(b) \geq bv_p(a) \quad \text{oraz} \quad bv_p(c) \geq cv_p(a),$$

$$cv_p(b) \geq bv_p(a) \quad \text{oraz} \quad bv_p(c) \geq cv_p(a).$$

Mamy więc

$$v_p(bc) = v_p(b) + v_p(c) = \frac{b}{c}v_p(a) + \frac{c}{b}v_p(a) \geq 2\sqrt{\frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b} \cdot v_p(a)^2} = 2v_p(a),$$

z czego wynika teza.

## Zadanie 3

Niech  $1 = d_0 < d_1 < d_2 < \dots < d_k = 4n$  będą kolejnymi dzielnikami liczby  $4n$ . Wykazać, że istnieje taka liczba  $i$ , dla której zachodzi równość  $d_{i+1} - d_i = 2$ .

Założmy, że teza nie zachodzi – wtedy musi zachodzić następujący fakt:

Jeśli  $d$  oraz  $d+2$  są dzielnikami liczby  $4n$ , to liczba  $d+1$  również. (\*)

Wykażemy, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych  $k$ , że  $2k$ ,  $2k + 1$  oraz  $2k + 2$  są dzielnikami liczby  $n$ . Na początku zauważmy, że 2 i 4 są dzielnikami  $4n$ . Z (\*) liczba 3 również nim będzie.

Założmy więc, że dla pewnej liczby naturalnej  $k$  liczby  $2k$ ,  $2k + 1$  oraz  $2k + 2$  są dzielnikami liczby  $4n$ . Wówczas jedna z liczb  $2k$ ,  $2k + 2$  nie jest podzielna przez 4. Bez straty ogólności przyjmijmy, że jest to  $2k$ . Skoro  $2k$  nie dzieli się przez 4 i jest dzielnikiem liczby  $4n$ , to liczba  $4k$  również będzie dzielnikiem liczby  $4n$ .

Analogicznie postępując z liczbą  $2n + 1$ , która jest nieparzysta, otrzymamy, że również liczba  $4k + 2$  jest dzielnikiem liczby  $4n$ . Z (\*) mamy, że  $4k + 1$  musi być dzielnikiem  $4n$ . Otrzymaliśmy większą trójkę  $(4k, 4k + 1, 4k + 2)$  kolejnych dzielników liczby  $4n$ .

Możemy w ten sposób uzyskać dowolnie duże trójki kolejnych dzielników  $4n$ , co jest oczywistą sprzecznością, gdyż dzielniki te są nie większe niż  $4n$ .

#### Zadanie 4

Znajdź wszystkie pary  $(a, b)$  liczb całkowitych dodatnich, większych od 1, dla których obie liczby

$$\frac{a^3b - 1}{a + 1} \quad \text{oraz} \quad \frac{b^3a - 1}{b - 1}$$

są całkowite

*Odpowiedź.* Szukanymi parami liczb są  $a = 2$  i  $b = 2$ ,  $a = 1$  i  $b = 3$ , oraz  $a = 3$  i  $b = 3$ .

Zauważmy, że

$$\frac{a^3b - 1}{a + 1} = a^2b - \frac{a^2b + 1}{a + 1} = a^2b - ab + \frac{ab - 1}{a + 1} = a^2b - ab + b - \frac{b + 1}{a + 1}.$$

Wynika stąd, że liczba  $b + 1$  jest podzielna przez liczbę  $a + 1$ . Mamy również

$$\frac{b^3a - 1}{b - 1} = b^2a + \frac{b^2a + 1}{b - 1} = b^2a + ab + \frac{ab + 1}{b - 1} = b^2a - ab + a + \frac{a + 1}{b - 1},$$

czyli  $a + 1$  jest podzielna przez liczbę  $b - 1$ .

Liczba  $a + 1$  jest dzielnikiem liczby  $b + 1$  oraz wielokrotnością liczby  $b - 1$ . Stąd liczba  $b + 1$  jest podzielna przez liczbę  $b - 1$ . Zauważmy, że jeśli  $b \geq 4$ , to

$$b + 1 > b - 1 > \frac{b + 1}{2},$$

co przeczy wspomnianej podzielności. Więc  $b = 2$  lub  $b = 3$ . Jeśli  $b = 2$ , to  $a + 1$  jest dzielnikiem 3. Skoro jest większe od 1, to musi być równe 3, skąd  $a = 2$ . Dla  $b = 3$  mamy, że  $a + 1$  musi być dzielnikiem 4 i musi być podzielne przez 2. Stąd  $a = 1$  lub  $a = 3$ .

### Zadanie 5

Dane są parami różne dodatnie liczby całkowite  $a, b, c$  oraz nieparzysta liczba pierwsza  $p$ , że liczby

$$ab + 1, bc + 1, ca + 1$$

są podzielne przez  $p$ . Wykazać, że

$$\frac{a + b + c}{3} \geq p + 2.$$

Zauważmy, że skoro  $p \mid ab + 1$  oraz  $p \mid bc + 1$ , to

$$p \mid (ab + 1) - (bc + 1) = b(a - c).$$

Skoro  $p$  jest liczbą pierwszą, to dzieli ona  $b$  lub dzieli ona  $a - c$ . Gdyby dzieliła liczbę  $b$ , to wówczas nie mogła by dzielić liczby  $bc + 1 \equiv 1 \pmod{p}$ . Stąd  $p \mid a - c$ , czyli

$$a \equiv c \pmod{p}.$$

Rozumując analogicznie dla podzielności  $p \mid bc + 1$  i  $p \mid ca + 1$ , otrzymamy  $a \equiv b \pmod{p}$ . Stąd

$$a \equiv b \equiv c \pmod{p}.$$

Pozostaje zauważyć, że  $a \not\equiv 1 \pmod{p}$ , bo w przeciwnym wypadku

$$ab + 1 \equiv a^2 + 1 \equiv 2 \pmod{p}.$$

Przyjmijmy, że  $2 \leq a < b < c$ . Skoro dają one tę samą resztę z dzielenia przez  $p$ , to różnią się o wielokrotność liczby  $p$ , czyli co najmniej o  $p$ . Stąd

$$b \geq a + p \quad \text{oraz} \quad c \geq b + p \geq a + 2p,$$

czyli

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \frac{a + a + p + a + 2p}{3} = p + a \geq p + 2.$$

### Zadanie 6

Niech  $a$  i  $k$  będą pewnymi dodatnimi liczbami całkowitymi o tej własności, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej  $n$  istnieje liczba całkowita  $b$ , że

$$n \mid a - b^k.$$

Wykazać, że  $a = c^k$  dla pewnej liczby całkowitej  $c$ .

#### Sposób 1

Rozpatrzmy dowolną liczbę pierwszą  $p$ . Wykażemy, że  $k \mid v_p(a)$ , z czego wyniknie teza. Załóżmy nie wprost, że  $v_p(a) = x \cdot k + r$ , gdzie  $x$  i  $0 < r < k$  są dodatnimi liczbami całkowitymi. Weźmy  $a = p^{xk}$ . Wówczas istnieje takie  $b$ , że

$$p^{xk+k} \mid a - b^k.$$

Zauważmy, że skoro  $v_p(b^k)$  jest podzielne przez  $k$ , to może być albo nie mniejsze niż  $xk + k$ , albo nie większe niż  $xk$ . W obu przypadkach liczby  $b^k$  i  $a$  mają różne  $v_p$ , przy czym mniejsze z nich jest ściśle mniejsze niż  $xk + k$ . Na mocy Lematu 4 otrzymujemy

$$v_p(a - b^k) = \min(v_p(a), v_p(b^k)) < xk + k.$$

Jest to sprzeczność z wyżej opisaną podzielnością.

*Sposób 2*

Weźmy  $n = a^2$ . Wówczas na mocy założenia istnieją takie liczby całkowite  $b$  oraz  $d$ , że

$$a - b^k = da^2,$$

$$a(ad + 1) = b^k.$$

Skoro  $\text{NWD}(a, ad + 1) = 1$ , a iloczyn tych liczb jest  $k$ -tą potęgą liczby całkowitej, to każda z tych liczb jest  $k$ -tą potęgą liczby całkowitej.



# Gry

## Zadanie 1

Na tablicy napisano liczbę całkowitą dodatnią. W każdym ruchu zmazujemy napisaną liczbę  $n$  na tablicy i piszemy nową liczbę. Jeśli  $n$  była parzysta to piszemy na tablicy liczbę  $\frac{1}{2}n$ . Jeśli zaś liczba  $n$  była nieparzysta, to zapisujemy jedną z liczb  $3n - 1$  lub  $3n + 1$ . Czy – niezależnie od tego, jaką liczbę zapisano na początku – możemy, po skończenie wielu krokach, uzyskać na tablicy jedynkę?

*Odpowiedź.* Jest to możliwe.

Wykażemy, że jeśli na tablicy znajduje się liczba  $n \geq 2$ , to zawsze jesteśmy w stanie sprawić, aby pojawiła się na tablicy dodatnia liczba całkowitej mniejsza od  $n$ . Rozpatrzmy dwa przypadki

- Jeśli  $n$  jest liczbą parzystą, to wystarczy zapisać liczbę  $\frac{1}{2}n < n$ .
- Gdy  $n$  jest nieparzysta, to obie z liczb  $3n+1$  i  $3n-1$  są parzyste. Skoro różnią się o 2, to jedna z nich będzie liczbą podzielną przez 4. Zapisujemy ją na tablicy, a następnie w dwóch kolejnych ruchach zapisujemy liczbę dwa razy mniejszą. Otrzymana liczba wyniesie co najwyżej

$$\frac{3n+1}{4} < \frac{4n}{4} = n.$$

Jako, że nie można ciągle zapisywać liczby mniejszej, gdyż zapisać można tylko liczby dodatnie całkowite, toteż kiedyś musimy zapisać liczbę 1.

## Zadanie 2

W lewym dolnym rogu planszy  $m \times n$  stoi pionek. W każdym ruchu może zostać on przesunięty o dowolną liczbę pól w górę lub o dowolną liczbę pól w prawo. Wygrywa gracz, który postawi figurę w prawym górnym rogu. Rozstrzygnąć dla jakich wartości  $(m, n)$  pierwszy gracz ma strategię wygrywającą.

*Odpowiedź.* Pierwszy gracz ma strategię wygrywającą wtedy i tylko wtedy, gdy  $m \neq n$ .

Analiza przykładowej planszy  $7 \times 5$  została zobrazowana na poniższej tabelce. Litera  $P$  oznacza, że jeśli pionek znajduje się na danym polu, to jest to stan przegrywający. Analogicznie  $W$  oznacza stan wygrywający. Pole w prawym górnym rogu jest oczywiście stanem przegrywającym, gdyż jeśli przed ruchem tam znajduje się pionek, to gracz, którego jest kolej przegrał. Rozumując analogicznie jak w Przykładzie 2 otrzymamy poniższą tabelkę.

W	W	W	W	W	W	P
W	W	W	W	W	P	W
W	W	W	W	P	W	W
W	W	W	P	W	W	W
W	W	P	W	W	W	W

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Przyjmijmy, że pole w prawym górnym rogu ma współrzędne  $(1, 1)$ . Wówczas twierdzimy, że pole postaci  $(a, b)$  jest przegrywające wtedy

i tylko wtedy, gdy  $a = b$ . Wykażemy to indukcyjnie. Pole  $(1, 1)$  jest przegrywające z definicji gry. Będziemy indukować się po sumie współrzędnych.

Jeśli gracz znajduje się na polu  $(a, b)$ , przy czym  $a \neq b$ , to może on przesunąć pionek na pole  $(\min(a, b), \min(a, b))$ , które jest stanem przegrywającym na mocy założenia indukcyjnego. Jeśli zaś gracz stoi na polu  $(a, a)$ , to jakiegokolwiek pole, na które zostanie przesunięty pionek, nie będzie miało równych współrzędnych. Będzie więc stanem wygrywającym. Skoro więc każdy ruch doprowadza do stanu wygrywającego, to stan  $(a, a)$  jest przegrywający.

Pozostaje tylko zauważyć, że dla  $m \neq n$  wyjściowy stan jest wygrywający, a dla  $m = n$  jest przegrywający. Toteż pierwszy gracz ma strategię wygrywającą jedynie dla  $m \neq n$ .

### Zadanie 3

Na tablicy zapisano liczbę 10000000. W każdym ruchu, o ile przed nim była zapisana liczba  $n$ , gracz zastępuje ją liczbą  $n - 1$  lub  $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ . Gracz, który zapisze liczbę 1 wygrywa. Który z graczy – pierwszy czy drugi – ma strategię wygrywającą?

Wykażemy, że liczby parzyste są stanami wygrywającymi. Zauważmy, że liczba 2 jest stanem wygrywającym, bo można ją zastąpić liczbą  $2 - 1 = 1$ . Załóżmy, że wszystkie liczby parzyste mniejsze niż  $2a$  są stanami wygrywającymi.

Wykażemy, że liczba  $2a + 2$  zapisana na tablicy również jest stanem wygrywającym. Rozpatrzmy dwa przypadki

- Jeśli liczba  $a + 1$  jest przegrywająca, to gracz wykonujący ruch może zastąpić liczbę  $2a + 2$  przez liczbę  $\lfloor \frac{2a+3}{2} \rfloor = a + 1$  i w ten sposób umieścić przeciwnika w stanie przegrywającym.
- Załóżmy teraz, że liczba  $a + 1$  jest wygrywająca. Wówczas gracz zastępuje liczbę  $2a + 2$  liczbą  $2a + 1$ . Drugi gracz może zapisać albo liczbę  $2a$  albo liczbę  $a + 1$ . Pierwsza z nich jest wygrywająca na mocy założenia indukcyjnego, a druga na mocy założenia z rozpatrywanego przypadku. W obu przypadkach gracz wykonujący ruch przy liczbie  $2a + 2$  znów znajdzie się w stanie wygrywającym.

Wykazaliśmy, że liczby parzyste odpowiadają stanowi wygrywającemu, toteż skoro liczba 10000000 jest parzysta, to pierwszy gracz ma strategię wygrywającą.

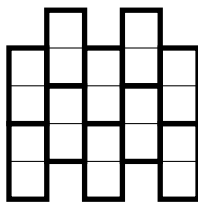
*Uwaga*

Zauważmy, że nie wykazaliśmy nic o stanach, gdy na tablicy jest liczba nieparzysta. Nie było to jednak konieczne do rozwiązania powyższego zadania.

#### Zadanie 4

Dwaj gracze na przemian stawiają kółko i krzyżyk w polach nieskończonej planszy. Gracz wygrywa, gdy istnieje kwadrat  $2 \times 2$  ułożony z jego symboli. Wykazać, że drugi gracz może grać tak, aby pierwszy gracz nie był w stanie wygrać.

Podzielmy planszę na prostokąty  $1 \times 2$  ułożone jak na rysunku – boki wszystkich prostokątów o długości dwa są do siebie równoległe, ale żadne dwa z nich, które sąsiadują dłuższym bokiem, nie mają wspólnego wierzchołka.

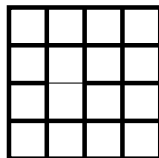
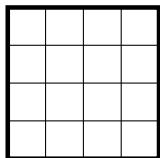


Strategia drugiego gracza będzie następująca. Jeśli pierwszy gracz postawi swój symbol w jednym polu prostokąta, drugi gracz stawia swój symbol w drugim polu tego prostokąta. Kwadrat  $2 \times 2$  zawiera pewien rozpatrywany prostokąt w całości. Jednak sytuacja, w której jeden prostokąt zawiera dwa jednakowe symbole się nie zdarzy. Stąd rozpatrywana strategia spełnia warunki zadania.

#### Zadanie 5

Nauczyciel wraz z 30 uczniami gra w grę na nieskończonej kartce w kratkę. Zaczyna on, po czym ruch wykonuje każdy z 30 uczniów, po czym znów nauczyciel, po czym uczniowie i tak dalej. W każdym ruchu należy pokolorować jeden z boków kratki, który nie został wcześniej pokolorowany. Nauczyciel wygrywa, gdy na planszy znajduje się prostokąt  $2 \times 1$  lub  $1 \times 2$ , że wszystkie jego boki są pokolorowane, ale odcinek wewnątrz niego nie jest.

Strategia nauczyciela jest następująca. Rysuje on obwód kwadratu  $n \times n$  w pierwszych  $4n$  ruchach, w międzyczasie uczniowie zamalują  $4n \cdot 30$  odcinków. Wówczas wewnątrz kwadratu znajduje się  $2n(n-1)$  odcinków. Jeśli  $2n(n-1) > 4n \cdot 30$ , do czego wystarczy wziąć odpowiednio duże  $n$ , to liczba odcinków wewnątrz kwadratu będzie większa niż liczba odcinków pomalowana przez uczniów. Toteż będzie co najmniej jeden odcinek wewnątrz tego kwadratu, który nie jest pomalowany.



Następnie nauczyciel w każdym ze swoich ruchów maluje pewien odcinek wewnątrz narysowanego kwadratu. Jako że liczba odcinków wewnątrz rozpatrywanego kwadratu jest skończona, to w końcu zarówno obwód, jak i wszystkie odcinki wewnątrz niego będą pokolorowane. Więc w pewnym momencie dokładnie jeden z odcinków wewnętrznych nie był pokolorowany – wówczas musiał istnieć szukany prostokąt bez środkowego odcinka.

### Zadanie 6

20 dziewczyn usiadło w kółku. Na początku jedna z nich trzyma  $N < 19$  kamieni. W każdym ruchu jedna z dziewczyn, która posiada co najmniej dwa kamienie daje po jednym każdej ze swoich sąsiadek. Gra kończy się, gdy każda z dziewczyn trzyma co najwyżej jeden kamień. Wykazać, że gra musi się skończyć po skończonej liczbie ruchów.

Założmy nie wprost, że gra może trwać w nieskończoność. Ponumerujmy dziewczyny liczbami od 1 do 20. Przyjmijmy, że na każdym kamieniu są miejsca na zapisanie dwóch liczb. Jeśli pewna dziewczyna  $a$  przekaże dziewczynie  $b$  kamień po raz pierwszy, to o ile na kamieniu nie jest nic zapisane, to zapisuje się tam numery  $a$  i  $b$ . Jeśli pewna dziewczyna musi przekazać kamień swojej sąsiadce, to jeśli dysponuje kamieniem z zapisanymi numerami swoimi i sąsiadki, to przekaże jej właśnie go.

Należy zauważyć, że jeśli kamień jest podpisany numerami  $a$  oraz  $b$ , to od momentu podpisania będzie posiadała go albo dziewczyna o numerze  $a$ , albo dziewczyna o numerze  $b$ . W momencie podpisania tak istotnie jest. Jeśli jedna z tych dziewczyn ma przekazać kamień sąsiadkom, to rozpatrywany kamień będzie przekazany do drugiej dziewczyny ze zbioru  $\{a, b\}$ .

Skoro jest  $N < 19$  kamieni oraz 20 kolejnych par dziewczyn, to będzie istnieć para kolejnych dziewczyn, która nie będzie miała kamienia podpisanego swoimi numerami. Założmy, że jedna z tych dziewczyn ma numer  $a$ . Wówczas ani razu nie przekaże ona swoich kamieni nikomu, bo w przeciwnym wypadku przekazałaby go drugiej z rozpatrywanych dziewczyn.

Założmy, że dziewczyna o numerze  $k$  przekazała kamienie sąsiadkom skończenie wiele razy. Wówczas jeśli dziewczyna o numerze  $k - 1$  (oczywiście rozpatrujemy numery modulo 20) robiłaby to bez końca, to w pewnym momencie dziewczyna o numerze  $k$  miałaby więcej niż 19 kamieni. Stąd jeśli  $k$  wykonała skończenie wiele ruchów, to  $k - 1$  też. Wiemy, że dziewczyna o numerze  $a$  wykonała zero, czyli skończenie wiele ruchów. Rozumując indukcyjnie dowodzimy, że każda dziewczyna mogła wykonać skończenie wiele ruchów, co kończy dowód.

# Bardziej zaawansowane nierówności

## Zadanie 1

Dane są liczby dodatnie  $a, b, c$ . Wykaż, że zachodzi nierówność

$$\frac{a}{2b+c} + \frac{b}{2c+a} + \frac{c}{2a+b} \geq 1.$$

Z nierówności Cauchego–Schwarza w formie Engela mamy

$$\frac{a}{2b+c} + \frac{b}{2c+a} + \frac{c}{2a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a(2b+c) + b(2c+a) + c(2a+b)} = \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}.$$

Wystarczy wykazać, że

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca).$$

Przekształćmy równoważnie

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 &\geq 3(ab+bc+ca), \\ a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) &\geq 3(ab+bc+ca), \\ a^2 + b^2 + c^2 &\geq ab+bc+ca, \\ 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 &\geq 2ab + 2bc + 2ca, \\ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność jest oczywiście prawdziwa, co dowodzi tezy.

## Zadanie 2

Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich  $a, b, c$  zachodzi nierówność

$$a^3b + b^3c + c^3a \geq a^2bc + ab^2c + abc^2.$$

Łatwo zauważyć, że ciągi

$$(bc, ac, ab), \quad \left(\frac{abc}{a}, \frac{abc}{b}, \frac{abc}{c}\right), \quad \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$$

są parami jednakowo monotoniczne. Zaś ciągi

$$\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right) \quad \text{oraz} \quad (a^2, b^2, c^2).$$

będą odwrotnie monotoniczne. Rozpatrzmy ciągi

$$(a^2, b^2, c^2) \quad \text{oraz} \quad (bc, ac, ab).$$

Na mocy wyżej poczynionych rozważań są one odwrotnie monotoniczne. Toteż

$$a^2 \cdot ab + b^2 \cdot bc + c^2 \cdot ca \geq a^2 \cdot bc + b^2 \cdot ca + c^2 \cdot ab.$$

### Zadanie 3

Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , gdzie  $n \geq 2$  zachodzi nierówność

$$\sin \alpha_1 \cdot \dots \cdot \sin \alpha_n + \cos \alpha_1 \cdot \dots \cdot \cos \alpha_n \leq 1.$$

Zauważmy, że na mocy nierówności Cauchego-Schwarza zachodzi

$$\begin{aligned} & (\sin \alpha_1 \cdot \dots \cdot \sin \alpha_n + \cos \alpha_1 \cdot \dots \cdot \cos \alpha_n)^2 = \\ & = ((\sin \alpha_1 \cdot \dots \cdot \sin \alpha_{n-1}) \cdot \sin \alpha_n + (\cos \alpha_1 \cdot \dots \cdot \cos \alpha_{n-1}) \cdot \cos \alpha_n)^2 \leq \\ & \leq ((\sin \alpha_1 \cdot \dots \cdot \sin \alpha_{n-1})^2 + (\cos \alpha_1 \cdot \dots \cdot \cos \alpha_{n-1})^2) (\sin^2 \alpha_n + \cos^2 \alpha_n) \end{aligned}$$

Z jedynki trygonometrycznej

$$\sin^2 \alpha_n + \cos^2 \alpha_n = 1.$$

Skoro funkcja  $\sin^2 x$  przyjmuje wartości od 0 do 1, to

$$\sin^2 \alpha_1 \cdot \dots \cdot \sin^2 \alpha_{n-1} \leq \sin^2 \alpha_1 \quad \text{oraz} \quad \cos^2 \alpha_1 \cdot \dots \cdot \cos^2 \alpha_{n-1} \leq \cos^2 \alpha_1$$

Stąd

$$((\sin \alpha_1 \cdot \dots \cdot \sin \alpha_{n-1})^2 + (\cos \alpha_1 \cdot \dots \cdot \cos \alpha_{n-1})^2) (\sin^2 \alpha_n + \cos^2 \alpha_n) \leq \sin^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_1 = 1,$$

co kończy dowód.

### Zadanie 4

Dane są liczby rzeczywiste  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$  oraz  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ . Wykazać, że zachodzi nierówność

$$n(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n).$$

Przyjmijmy, że  $a_{n+t} = a_t$  oraz  $b_{n+t} = b_t$ . Zauważmy, że dla dowolnej liczby całkowitej  $k$  z twierdzenie o ciągach jednorodnych zachodzi nierówność

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \geq a_1 b_{1+k} + a_2 b_{2+k} + \dots + a_n b_{n+k}.$$

Sumując te nierówności dla wszystkich  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} n(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) & \geq \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_i b_{i+k} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_i b_{i+k} = \\ & = \sum_{i=1}^n \left( a_i \left( \sum_{k=1}^n b_{i+k} \right) \right) = \sum_{i=1}^n \left( a_i \left( \sum_{k=1}^n b_i \right) \right) = \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i \right), \end{aligned}$$

czego należało dowieść.

### Zadanie 5

Rozstrzygnąć, czy dla dowolnych liczb dodatnich  $a, b, c$  zachodzi nierówność

$$a^2b^3 + b^2c^3 + c^2a^3 \leq ab^4 + bc^4 + ca^4.$$

Zauważmy, że dla  $a = 10^{-8}$ ,  $b = 10^2$  i  $c = 1$  lewa strona nierówności wynosi więcej niż  $b^2c^3 = 10^4$ , a każdy ze składników prawej strony jest nie większy niż 100. Łatwo zauważyć, że postulowana nierówność nie zachodzi.

*Uwaga*

Niezwykle pomocne przy rozwiązaniu tego zadania jest zobaczenie co się dzieje, gdy jedna ze zmiennych wyniesie 0. Podstawienie to nie jest to zgodne z treścią zadania, bo rozpatrujemy liczby dodatnie, ale nasuwa ono na pomysł, który pozwala wymyślić rozwiązanie poprawne. Jeśli  $a = 0$ , to nierówność przybiera postać

$$b^2c^3 \leq bc^4.$$

Jeśli  $c$  jest większe niż  $b$  to ta nierówność nie zajdzie. Stąd pomysł na wzięcie bardzo małego  $a$  i dużej liczby  $c$ .

# Równania funkcyjne i wielomianowe

## Zadanie 1

Dana jest funkcja spełniająca dla dowolnej liczby rzeczywistej  $x$  równość

$$f(f(x)) - f(x) = x.$$

Znaleźć liczbę liczb rzeczywistych  $a$ , takich, że  $f(f(a)) = 0$ .

*Odpowiedź.* Jest jedna taka liczba i jest ona równa 0.

Podstawmy  $x = 0$ , aby otrzymać

$$f(f(0)) = f(0).$$

Wstawiając  $x = f(0)$  otrzymujemy

$$f(0) = f(f(f(0))) - f(f(0)) = f(f(0)) - f(f(0)) = 0.$$

Czyli  $a = 0$  jest rozwiązaniem.

Założmy, że  $f(f(a)) = 0$ . Z wyjściowego równania wynika wówczas, że

$$0 - f(a) = a, f(a) = a.$$

Stąd

$$0 = f(f(a)) = f(a) = a.$$

Oznacza to, że żadna liczba różna od 0 nie może być rozwiązaniem danego równania.

## Zadanie 2

Znajdź wszystkie funkcje  $f : \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$  takie, że  $f(f(n)) + (f(n))^2 = n^2 + 3n + 3$ .

*Odpowiedź.* Jedyną funkcją spełniającą warunki zadania jest  $f(n) = n + 1$ .

Zauważmy, że dla  $n = 1$  mamy

$$f(f(1)) + f(1)^2 = 7.$$

Jeśli  $f(1) = 1$ , to  $f(f(1)) + f(1)^2 = 1 + 1 \neq 7$ . Jeśli zaś  $f(1) \geq 3$ , to

$$f(f(1)) + f(1)^2 > 3^2 > 7.$$

Stąd  $f(1) = 2$ . Wykażemy indukcyjnie, że  $f(n) = n + 1$ . Założmy, że ta równość zachodzi dla liczb nie większych niż  $n$ . Wówczas

$$\begin{aligned} n^2 + 3n + 3 &= f(f(n)) + f(n)^2 = f(n + 1) + (n + 1)^2, \\ f(n + 1) &= n + 2, \end{aligned}$$

co kończy dowód indukcyjny.



### Zadanie 3

Znajdź wszystkie funkcje  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x, y$  zachodzi równość:

$$f(x^2 + y) = f(x^{27} + 2y) + f(x^4).$$

*Odpowiedź.* Jedyną funkcją spełniającą warunki zadania jest  $f(x) = 0$ .

Rozpatrzmy takie  $y$ , aby

$$\begin{aligned}x^2 + y &= x^{27} + 2y \\ x^2 - x^{27} &= y.\end{aligned}$$

Więc dla  $y = x^2 - x^{27}$  mamy

$$f(x^2 + y) = f(x^{27} + 2y).$$

A więc na mocy wyjściowego równania

$$f(x^4) = 0.$$

Stąd  $f(x) = 0$  dla dowolnej liczby nieujemnej  $x$ . Mamy też

$$f(x^2 + y) = f(x^{27} + 2y) + f(x^4) = f(x^{27} + 2y)$$

dla wszystkich liczb rzeczywistych  $x, y$ . Wstawiając  $y - x^2$  w miejsce  $y$  mamy

$$f(y) = f(x^{27} - 2x^2 + 2y).$$

Niech  $y$  będzie dowolną liczbą ujemną. Biorąc odpowiednio duże  $x$  otrzymamy, że  $x^{27} - 2x^2 + 2y > 0$ . Wówczas

$$f(y) = f(x^{27} - 2x^2 + 2y) = 0.$$

Pozostaje zauważyć, że  $f(x) = 0$  spełnia warunki zadania.

### Zadanie 4

Niech  $f(n)$  będzie funkcją z dodatnich liczb całkowitych w dodatnie liczby całkowite. Wiadomo, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej  $n$  liczba  $f(f(n))$  jest liczbą dodatnich dzielników  $n$ . Wykazać, że jeśli  $p$  jest liczbą pierwszą, wówczas  $f(p)$  również jest liczbą pierwszą.

Niech  $d(n)$  oznacza liczbę dzielników  $n$ . Wówczas

$$\begin{aligned}f(f(n)) &= d(n), \\ f(f(f(n))) &= f(d(n)), \\ d(f(n)) &= f(d(n)).\end{aligned}$$

Dla  $n = 2$  mamy

$$f(2) = f(d(2)) = d(f(2)).$$

Zauważmy, że jeśli  $f(2) > 2$ , to  $f(2) - 1$  nie byłoby dzielnikiem  $f(2)$ , stąd  $f(2)$  musiało by mieć mniej niż  $f(2)$  dzielników. Rozpatrzmy dwa przypadki

- Jeśli  $f(2) = 1$ , to gdy  $p$  jest liczbą pierwszą, to

$$d(f(p)) = f(d(p)) = f(2) = 1,$$

czyli  $f(p)$  ma jeden dzielnik, czyli  $f(p) = 1$ . Mamy wówczas

$$1 = f(3) = f(d(p^2)) = f(f(f(p^2))) = d(f(p^2)).$$

Skoro  $f(p^2)$  ma jeden dzielnik, to również jest równe 1. Czyli

$$2 = d(p) = f(f(p)) = f(1) = f(f(p^2)) = d(p^2) = 3,$$

co daje nam sprzeczność.

- Gdy zaś  $f(2) = 2$ , to jeśli  $p$  jest liczbą pierwszą, to

$$d(f(p)) = f(d(p)) = f(2) = 2.$$

Skoro  $f(p)$  ma dwa dzielniki, to jest liczbą pierwszą, czego należało dowieść.

#### Zadanie 5

Znajdź wszystkie funkcje  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x, y$  zachodzi równość:

$$f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2.$$

*Odpowiedź.* Jediną funkcją spełniającą warunki zadania jest  $f(x) = x$ .

Podstawiając  $x = 0$  dostajemy

$$f(f(y)) = y + c^2,$$

gdzie  $c = f(0)$  jest stałe. Wykażemy, że  $f$  jest różnowartościowa. Jeżeli dla pewnych liczb rzeczywistych  $a, b$  zachodzi  $f(a) = f(b)$ , to

$$a + c^2 = f(f(a)) = f(f(b)) = b + c^2,$$

skąd  $a = b$ . Ponadto  $y + c^2$  może przyjąć dowolną rzeczywistą wartość, a ponieważ  $f(f(y)) = y + c^2$ , to  $f$  przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste. Wiemy zatem, że istnieje liczba rzeczywista  $b$  taka, że  $f(b) = 0$ . Podstawiając  $x = b$  i  $y = f(y)$  w początkowej równości dostajemy

$$f(b^2 + f(f(y))) = f(b^2 + y + c^2) = f(y),$$

skąd, jako że  $f$  to funkcja różnowartościowa, zachodzi

$$b^2 + y + c^2 = y,$$

$$b^2 + c^2 = 0,$$

$$b = c = 0.$$

Podstawiając w początkowym równaniu  $x = 0$  dostajemy

$$f(f(y)) = y.$$

Podstawiając  $y = f(y)$  dostajemy

$$f(x^2 + y) = f(y) + f(x)^2 \geq f(y).$$

Ponieważ  $x^2$  może przyjąć dowolną rzeczywistą nieujemną wartość, to równanie to implikuje, że  $f$  jest ściśle rosnąca. Wiemy jednak, że  $f(f(y)) = y$ . Załóżmy, że dla pewnego rzeczywistego  $y$  zachodzi  $f(y) > y$ . Wtedy, ponieważ  $f$  jest ściśle rosnąca, zachodzi

$$f(f(y)) > f(y) > y,$$

co rodzi sprzeczność. Analogicznie dowodzimy, że nie może zajść  $f(y) < y$ . Stąd  $f(y) = y$  dla dowolnego rzeczywistego  $y$ , co, jak nietrudno sprawdzić, spełnia podane w zadaniu równanie.

#### Zadanie 6

Wykazać, że istnieje taka funkcja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , że nie istnieje taka funkcja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , że zachodzi równość  $f(x) = g(g(x))$ .

Wykażemy, że taka funkcja istnieje. Rozpatrzmy funkcję  $f$  daną jako

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{jeśli } x \notin \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ x + 1 & \text{jeśli } x \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{cases}.$$

Ta funkcja ma następujące cechy

- jest różnowartościowa,
- przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste poza zerem.

Wykażemy, że  $g$  jest różnowartościowa. Jeśli  $g(a) = g(b)$ , to

$$f(a) = g(g(a)) = g(g(b)) = f(b).$$

Skoro zaś  $f$  jest różnowartościowa, to mamy  $a = b$ .

Jeśli  $g(x)$  przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste, to  $g(g(x))$  również. Zaś funkcja  $f(x)$  nie ma takiej własności – sprzeczność.

Jeśli  $g(x)$  ma co najmniej dwie „dziury” – tj. istnieją takie liczby  $a, b$ , które nie są przyjmowane przez  $g$ , to w szczególności nie są przyjmowane przez  $g(g(x))$ . Zaś funkcja  $f$  ma jedną wartość, której nie przyjmuje. Toteż również w tym przypadku równość zajść nie może.

Założmy więc, że  $g$  przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste poza pewną liczbą rzeczywistą  $a$ . Oczywiście  $g(g(x))$  również nie przyjmie  $a$ . Skoro  $f$  nie przyjmuje jedynie wartości zero, to  $a = 0$ . Zauważmy, że  $g(g(x))$  nie przyjmuje wartości  $g(0)$ . Jeśli  $g(g(t)) = g(0)$  dla pewnego  $t$ , to na mocy różnowartościowości  $g(t) = 0$ . Jest to sprzeczność. Skoro  $g(g(x))$  nie przyjmuje  $g(0)$ , a  $f(x)$  nie przyjmuje jedynie 0, to jeśli te funkcje mają być sobie równe, to  $g(0) = 0$ . Ale wówczas

$$1 = f(0) = g(g(0)) = g(0) = 0,$$

co kończy dowód.

# Twierdzenia z teorii liczb

## Zadanie 1

Wykazać, że dodatnia liczba całkowita  $n$  ma co najwyżej  $2\sqrt{n}$  dzielników.

Zauważmy, że jeśli liczba  $d$  jest dzielnikiem liczby  $n$ , to również liczba  $\frac{n}{d}$  jest dzielnikiem liczby  $n$ , bo

$$n = d \cdot \frac{n}{d}.$$

Możemy więc podzielić dzielniki  $n$  na pary  $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_k, b_k)$ , gdzie  $a_i \leq b_i$  oraz  $a_i \cdot b_i = n$  dla każdego całkowitego  $1 \leq i \leq k$ . Zauważmy, że

$$n = a_i b_i \geq a_i^2 \implies \sqrt{n} \geq a_i.$$

Jako, że żadne dwie pary nie mają tej samej pierwszej liczby, to jest ich co najwyżej  $\sqrt{n}$ . Skoro każda para zawiera dwie liczby, a każdy dzielnik będzie w co najmniej jednej parze, to liczba dzielników  $n$  nie może przekroczyć  $2\sqrt{n}$ .

Przykładowo dla  $n = 20$  rozpatrywanymi parami będą:

$$(1, 20), (2, 10), (4, 5).$$

## Zadanie 2

Liczbę nazwiemy *wielodzielna*, jeśli ma co najmniej 1000 dzielników. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba całkowita  $n$ , że liczby

$$n, n+1, n+2, \dots, n+1000$$

są wielodzielne.

Wykażemy, że taka liczba istnieje. Rozpatrzmy warunki

$$n \equiv -k \pmod{p_{k,1}},$$

$$n \equiv -k \pmod{p_{k,2}},$$

...

$$n \equiv -k \pmod{p_{k,1000}}$$

dla każdej liczby całkowitej  $0 \leq k \leq 1000$ , przy czym  $p_{i,j}$  są parami różnymi liczbami pierwszymi. Na mocy Chińskiego Twierdzenia o Resztach szukana liczba  $n$  istnieje. Łatwo zauważyć, że dla każdego  $k$  liczba  $n+k$  ma co najmniej 1000 dzielników pierwszych –  $p_{k,1}, p_{k,2}, \dots, p_{k,1000}$ .

### Zadanie 3

Niech  $d(n)$  oznacza liczbę dodatnich dzielników liczby  $n$  – włączając liczby 1 i  $n$ . Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitych  $n$ , dla których liczba  $\frac{n}{d(n)}$  również jest całkowita.

Rozpatrzmy liczbę  $p^k$ . Ma ona  $k + 1$  dzielników. Chcemy, aby liczba  $\frac{p^k}{k+1}$  była całkowita. Wystarczy w tym celu wziąć  $k = p - 1$ . Jako że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele, toteż jesteśmy w ten sposób w stanie uzyskać nieskończenie wiele liczb spełniających warunki zadania.

### Zadanie 4

Dana jest nieparzysta liczba pierwsza  $p$ . Obliczyć wartość wyrażenia

$$\left(\frac{0}{p}\right) + \left(\frac{1}{p}\right) + \dots + \left(\frac{p-1}{p}\right).$$

*Odpowiedź.* Wartość danego wyrażenia wynosi 0, niezależnie od wartości  $p$ .

Niech  $g$  będzie generatorem modulo  $p$ . Wiemy, że multizbiory  $\{1, 2, 3, \dots, p-1\}$  oraz  $\{g, g^2, \dots, g^{p-1}\}$  są sobie równe. Czyli

$$\left(\frac{1}{p}\right) + \left(\frac{2}{p}\right) + \dots + \left(\frac{p-1}{p}\right) = \left(\frac{g}{p}\right) + \left(\frac{g^2}{p}\right) + \dots + \left(\frac{g^{p-1}}{p}\right)$$

Wiemy, na mocy Lematu 2, że  $\left(\frac{g^k}{p}\right)$  jest równe 1 jeśli  $k$  jest parzyste i  $-1$ , gdy  $k$  jest nieparzyste. Łatwo więc zauważyć, że skoro liczba  $p-1$  jest parzysta, to dana suma wyniesie 0.

### Zadanie 5

Niech  $p$  będzie liczbą pierwszą dającą resztę 2 z dzielenia przez 3. Dla pewnych liczb całkowitych  $a, b$  liczba  $a^3 - b^3$  jest podzielna przez  $p$ . Wykazać, że liczba  $a - b$  również jest podzielna przez  $p$ .

Niech  $g$  będzie generatorem modulo  $p$ . Oznaczmy

$$a \equiv g^x \pmod{p} \quad \text{oraz} \quad b \equiv g^y \pmod{p}.$$

Przekształćmy założenie

$$\begin{aligned} a^3 &\equiv b^3 \pmod{p} \\ g^{3x} &\equiv g^{3y} \pmod{p} \\ g^{3x-3y} &\equiv 1 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Generator podniesiony do potęgi  $3x - 3y$  jest równy 1 wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi podzielność  $p-1 \mid 3x - 3y$ . Na mocy założeń liczba  $p-1$  daje resztę 1 z dzielenia przez 3, toteż nie jest ona podzielna przez 3. Stąd  $p-1 \mid x - y$ , czyli

$$a \equiv g^x \equiv g^y \equiv b \pmod{p}.$$

### Zadanie 6

Niech  $a_1, \dots, a_n$  oraz  $b_1, \dots, b_n$  będą dodatnimi liczbami całkowitymi, że dla każdej liczby całkowitej  $n-1 \geq i \geq 0$  zachodzi nierówność  $b_{i+1} \geq 2b_i$ . Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych  $k$ , że nie zachodzi żadne z przystawań

$$\begin{aligned}k &\equiv a_1 \pmod{b_1}, \\k &\equiv a_2 \pmod{b_2}, \\&\dots, \\k &\equiv a_n \pmod{b_n}.\end{aligned}$$

Oznaczmy  $M = b_1 b_2 \cdot \dots \cdot b_n$ . Rozpatrzmy liczby

$$1, 2, \dots, M.$$

Dla każdej liczby  $1 \leq i \leq n$  wykreślmy te spośród nich, które dają resztę  $a_i$  z dzielenia przez  $b_i$ . Tych liczb będzie dokładnie  $\frac{M}{b_i}$ , gdyż liczba  $M$  jest podzielna przez  $b_i$ . Rozumujemy tak dla każdego  $i$  – liczba może zostać wykreślona więcej niż raz. Wykreślimy tak co najwyżej

$$\frac{M}{b_1} + \frac{M}{b_2} + \dots + \frac{M}{b_n} \leq \frac{M}{2} + \frac{M}{4} + \dots + \frac{M}{2^n} < M$$

liczb. Więc pewna liczba nie zostanie wykreślona – wówczas nie spełnia ona żadnego z danych przystawań. Wystarczy zauważyć, że jeśli liczba  $k$  spełnia warunki zadania, to liczba  $k + b_1 b_2 \cdot \dots \cdot b_n$  również – daje ona takie same reszty w każdym z przystawań.

# Grafy skierowane

## Zadanie 1

Dany jest graf skierowany zawierający  $2m$  krawędzi. Wykazać, że możemy usunąć pewne  $m$  z nich, aby graf ten nie zawierał cyklu.

Ponumerujmy wierzchołki od 1 do  $n$ . Krawędź prowadzącą z wierzchołka  $i$  do wierzchołka  $j$  nazwiemy *rosnącą*, jeśli zachodzi  $j > i$ . W przeciwnym wypadku powiemy, że ta krawędź jest *malejąca*. Jeśli krawędzi rosnących jest nie więcej niż malejących, to usuńmy wszystkie krawędzie malejące. W przeciwnym wypadku usuńmy wszystkie krawędzie rosnące. Łatwo zauważyć, że usuniemy w ten sposób nie więcej niż połowę krawędzi.

Założmy, że usunęliśmy wszystkie krawędzie malejące oraz nie usunęliśmy pewnego cyklu. Idąc po kolejnych wierzchołkach danego cyklu, numer wierzchołka na którym jesteśmy ściśle rośnie. Przeczy to temu, że wrócimy kiedyś do punktu wyjścia.

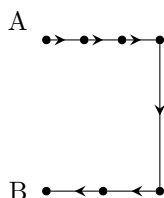
## Zadanie 2

Wykazać, że w dla każdego turnieju da się ustawić graczy w rzędzie w pewnej kolejności, tak, aby każdy wygrał z graczem po swojej prawej stronie.

Wykażemy tezę indukcyjnie. Dla  $n = 1$  teza jest trywialna. Założmy, że dla dowolnego turnieju z liczbą graczy mniejszą niż  $n$  szukane uporządkowanie istnieje. Zauważmy, że jeśli istnieje cykl

$$v_1, v_2, \dots, v_n$$

to dla każdego  $i$  gracz  $v_i$  wygrał z graczem  $v_{i+1}$ . Stąd biorąc uporządkowanie  $v_1, v_2, \dots, v_n$  otrzymujemy tezę.



Założmy, że dany turniej nie jest cykliczny, na mocy Lematu 2 jest on redukowalny. Rozpatrzmy więc dwa zbiory  $A$  i  $B$ , takie, że każdy gracz z  $A$  wygrał z dowolnym graczem z  $B$ . Wówczas oba te zbiory zawierają ściśle mniej niż  $n$  elementów, a więc na mocy założenia indukcyjnego istnieją takie uporządkowania

$$a_1, a_2, \dots, a_t \text{ graczy z } A \quad \text{oraz} \quad b_1, b_2, \dots, b_{n-t} \text{ graczy z } B,$$

że każdy gracz wygrał z kolejnym. Na mocy definicji zbiorów  $A$  i  $B$  gracz  $a_t$  wygrał z graczem  $b_1$ , czyli uporządkowanie

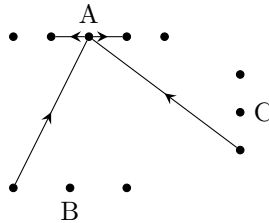
$$a_1, a_2, \dots, a_t, b_1, b_2, \dots, b_{n-t}$$

spełnia warunki zadania.

### Zadanie 3

Niech  $G$  będzie grafem skierowanym, w którym stopnie: wejściowy i wyjściowy każdego z wierzchołków są równe 2. Wykazać, że możemy podzielić wierzchołki na trzy, być może puste, zbiory, aby żaden wierzchołek  $v$  wraz z dwoma wierzchołkami, będącymi końcami wychodzącymi z  $v$  krawędzi, nie znajdowały się wszystkie w jednym ze zbiorów.

Rozpatrzmy taki podział wierzchołków tego grafu na trzy zbiory, aby liczba krawędzi, które mają dwa wierzchołki wewnątrz tego samego zbioru, była minimalna. Nazwijmy te trzy zbiory jako  $A$ ,  $B$  i  $C$ . Wykażemy, że spełnia on warunki zadania.



Założmy nie wprost, że pewien wierzchołek  $v$  oraz dwa wierzchołki  $a$ ,  $b$ , przy czym z  $v$  wychodzą krawędzie zarówno do  $a$ , jak i do  $b$ , leżą w jednym ze zbiorów. Bez straty ogólności założmy, że  $v$ ,  $a$ ,  $b$  należą do zbioru  $A$ . Skoro do  $v$  wchodzi dwie krawędzie, to w jednym ze zbiorów  $B$ ,  $C$  jest co najwyżej jeden wierzchołek początkowy takiej krawędzi. Przyjmijmy dla ustalenia uwagi, że jest to zbiór  $B$ . Jeśli przełożymy wierzchołek  $v$  do zbioru  $B$ , to liczba krawędzi o końcach w tym samym zbiorze się zmniejszy, co przeczy minimalności rozpatrywanego podziału.

### Zadanie 4

W pewnym turnieju brało udział 1000 osób – nazwijmy ich  $A_1, A_2, \dots, A_{1000}$ . Parę uczestników tego turnieju  $(A_i, A_j)$  nazwiemy *zwycięską*, gdy nie istnieje inny uczestnik tego turnieju  $A_k$ , który pokonał obu uczestników z tej pary. Rozstrzygnąć, czy może się tak zdarzyć, aby każda z par  $(A_1, A_2)$ ,  $(A_2, A_3)$ , ...,  $(A_{999}, A_{1000})$ ,  $(A_{1000}, A_1)$  była zwycięska.

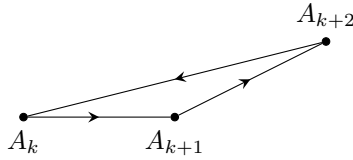
*Odpowiedź.* Taka sytuacja nie może się zdarzyć.

Założmy nie wprost, że szukany turniej istnieje. Obliczmy ile zwycięstw odnieśli łącznie gracz  $A_k$  i  $A_{k+1}$ . To, że gracz  $A_i$  wygrał z graczem  $A_j$  będziemy oznaczać jako  $A_i > A_j$ . Przyjmijmy też, że  $A_{1000+i} = A_i$ . W pojedynku  $A_k$  i  $A_{k+1}$  jedna osoba wygrała i jedna przegrała. Ponadto na mocy założeń zadania, każdy z graczy spoza tej dwójki musiał przegrać z co najmniej jedną osobą z tej pary. Skoro pozostałych osób jest 998, to łącznie  $A_k$  i  $A_{k+1}$  wygrały co najmniej  $998 + 1 = 999$  meczów. Rozumując analogicznie dla trójek  $(A_1, A_2)$ ,  $(A_3, A_4)$ , ...,  $(A_{999}, A_{1000})$  otrzymamy, że łączna liczba zwycięstw w turnieju to co najmniej

$$500 \cdot 999 = \frac{1000 \cdot 998}{2} = \binom{1000}{2}.$$

Zauważmy, że ta liczba jest równa łącznej liczbie zwycięstw wszystkich drużyn, która zawsze wynosi  $\binom{1000}{2}$ . Toteż we wszystkich powyższych szacowaniach zachodzą równości, czyli w szczególności każdy z graczy wygrał z dokładnie jednym z  $A_{2k}$  i  $A_{2k+1}$ .

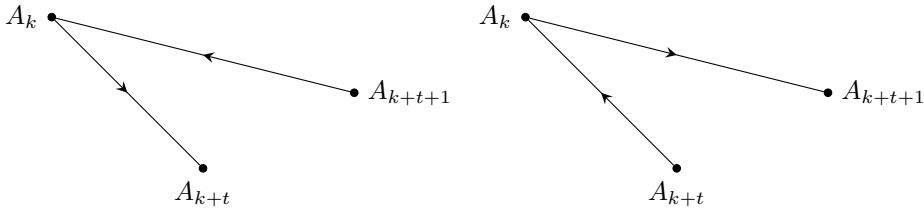




Założmy, bez straty ogólności, że gracz  $A_1$  wygrał z graczem  $A_2$ . Przyjmijmy, że dla pewnego  $k$  mamy  $A_k > A_{k+1}$ . Wówczas  $A_{k+2} > A_k$ , aby  $(A_{k+1}, A_{k+2})$  była zwycięska. Analogicznie więc  $A_{k+1} > A_{k+2}$ , bo  $(A_k, A_{k+1})$  jest zwycięską. Mamy więc implikację

$$A_k > A_{k+1} \implies A_{k+1} > A_{k+2}.$$

Skoro  $A_1 > A_2$ , to możemy wyciągnąć wniosek, że  $A_k > A_{k+1}$  dla każdego  $k$ .



Zauważmy, że jeśli  $A_k > A_{k+t}$ , to na mocy tego co wykazaliśmy w pierwszym akapicie musi zajść  $A_{k+t+1} > A_k$ . I analogicznie jeśli  $A_{k+t} > A_k$ , to  $A_k > A_{k+t+1}$ . Skoro  $A_k > A_{k+1}$ , to wynika z tego, że

$$A_k > A_{k+i}, \text{ gdy } 2 \mid i \quad \text{oraz} \quad A_k < A_{k+i}, \text{ gdy } 2 \nmid i.$$

Otrzymujemy stąd, że

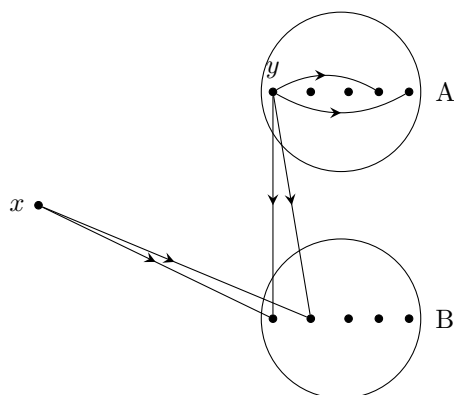
$$A_1 > A_3, \text{ bo } 3 = 1 + 2 \quad \text{oraz} \quad A_3 > A_{1001} = A_1 \text{ bo } 1001 = 3 + 998.$$

Powyższa sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

#### Zadanie 5

Dany jest turniej o  $n$  uczestnikach oraz pewna dodatnia liczba całkowita  $k$ . Każdy z uczestników uzyskał jednakową liczbę zwycięstw oraz dla dowolnych dwóch różnych uczestników tego turnieju  $a, b$ , liczba uczestników, którzy przegrali zarówno z  $a$ , jak i z  $b$  wynosi  $k$ . Wykazać, że liczba  $n + 1$  jest podzielna przez 4.

Zauważmy, że łączna liczba zwycięstw w turnieju wyniosła  $\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ . Skoro każdy gracz uzyskał taką samą liczbę zwycięstw, to ta liczba wynosi  $\frac{n-1}{2}$ . Rozpatrzmy jednego gracza  $x$ . Podzielmy pozostałych graczy na dwa zbiory – zbiór  $A$ , który zawiera  $\frac{n-1}{2}$  graczy, którzy wygrali z  $x$  oraz zbiór  $B$ , który zawiera  $\frac{n-1}{2}$  graczy, którzy przegrali z  $x$ . Jeśli gracz  $y$  należy do zbioru  $B$ , to liczba graczy pokonanych przez obu  $x$  oraz  $y$  wynosi  $k$ . Stąd też  $y$  pokonał dokładnie  $k$  osób ze zbioru  $B$ . Pokonał też  $x$ , a skoro pokonał łącznie  $\frac{n-1}{2}$  osób, to pokonał dokładnie  $\frac{n-1}{2} - 1 - k$  osób w zbiorze  $A$ .



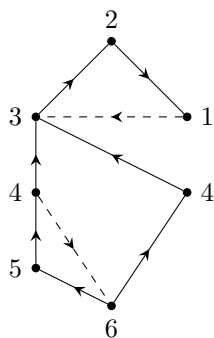
Skoro zbiór  $A$  zawiera  $\frac{n-1}{2}$  osób i każdy pokonał w nim dokładnie  $\frac{n-1}{2} - 1 - k$ , czyli stałą liczbę osób, to rozumując analogicznie jak na początku zadania mamy, że każdy pokonał ich dokładnie  $\frac{n-1}{2} - 1 = \frac{n-3}{4}$ . Skoro liczba osób jest całkowita, to wynika z tego, że liczba  $n - 3$  jest podzielna przez 4. Jest to w oczywisty sposób równoważne tezie.

#### Zadanie 6

Wykazać, że wierzchołki grafu można pokolorować na jeden z  $k$  kolorów, tak, by żadne dwa wierzchołki tego samego koloru nie były połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy krawędzie tego grafu da się tak skierować, by nie istniała ścieżka składająca się z  $k + 1$  różnych wierzchołków.

Najpierw wykażemy, że jeśli istnieje kolorowanie, to istnieje nie szukana ścieżka. Ponumerujemy kolory od 1 do  $k$ . Jeśli krawędź występuje pomiędzy wierzchołkami  $i$  oraz  $j$ , to skierujemy ją w stronę  $i$  jeśli  $i > j$ , zaś skierujemy ją w stronę przeciwną, gdy  $i < j$ . Wówczas na każdej ścieżce kolejny wierzchołek ma zapisaną większą liczbę od poprzedniego. Skoro największa liczba zapisana na wierzchołku wynosi nie więcej niż  $k$ , to ścieżka o długości  $k + 1$  nie istnieje.

Załóżmy, że graf skierowany nie zawiera ścieżki, która składa się z  $k + 1$  wierzchołków. Usuńmy niektóre z jego krawędzi, aby otrzymać spójny graf, który nie zawiera żadnego cyklu, przy czym liczba krawędzi otrzymanego grafu jest największa z możliwych. Każdemu wierzchołkowi przypiszmy kolor o numerze równym długości najdłuższej ścieżki zaczynającej się w danym wierzchołku. Łatwo zauważyć, że jeśli z pewnego wierzchołka  $x$  prowadzi krawędź do wierzchołka  $y$ , to do ścieżki zaczynającej się w wierzchołku  $y$  można dołożyć na początek wierzchołek  $x$ . Toteż w wierzchołku  $x$  jest zapisana liczba większa niż liczba w wierzchołku  $y$ .



Wykażemy, że jeśli pomiędzy wierzchołkami  $x$  i  $y$  usunięto krawędź, to również mają zapisaną inną liczbę. Z założonej wcześniej maksymalności grafu bez cyklu, po dołożeniu krawędzi między  $x$  i  $y$  ten cykl powstanie. Wynika z tego to, że po jej usunięciu istnieje ścieżka z  $x$  do  $y$ , albo z  $y$  do  $x$ . Analogicznie jak poprzednio, wierzchołek w którym ta ścieżka się zaczyna, będzie miał zapisaną większą liczbę, niż ten, w którym się ona kończy. Z powyższych wniosków wynika teza.

# Ciągi

## Zadanie 1

Dana jest liczba pierwsza  $p > 3$ . Wykazać, że istnieje taki ciąg arytmetyczny dodatnich liczb całkowitych  $\{x_i\}$ , że  $x_1 x_2 \dots x_p$  jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozpatrzmy ciąg  $x_i = ip!$ . Wówczas

$$\prod_{i=1}^p x_i = \prod_{i=1}^p ip! = (p!)^p \cdot p! = (p!)^p \cdot p! = (p!)^{p+1}.$$

co oczywiście jest kwadratem liczby całkowitej.

## Zadanie 2

Dany jest ciąg  $a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}$  liczb rzeczywistych, że dla dowolnych liczb całkowitych  $2n+1 \geq i, j \geq 1$  zachodzi równość

$$a_i + a_j \geq |i - j|.$$

Wyznaczyć najmniejszą możliwą sumę elementów tego ciągu.

*Odpowiedź.* Najmniejsza możliwa suma elementów tego ciągu wynosi  $n(n+1)$

Na mocy założenia zadania zachodzą równości

$$\begin{aligned} a_1 + a_{2n+1} &\geq 2n, \\ a_2 + a_{2n} &\geq 2n - 2, \\ &\dots, \\ a_n + a_{n+2} &\geq 2. \end{aligned}$$

Wiemy również, że  $a_{n+1} + a_{n+1} \geq 0$ , czyli liczba  $a_{n+1}$  jest nieujemna. Dodając powyższe nierówności stronami otrzymujemy

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{2n+1} \geq 2 + 4 + \dots + (2n - 2) + 2n = 2(1 + 2 + \dots + n) = n(n+1).$$

Wykażemy, że ciąg dany wzorem

$$a_k = |n + 1 - k|$$

spełnia warunki zadania. Istotnie, na mocy nierówności trójkąta

$$a_i + a_j = |n + 1 - i| + |n + 1 - j| \geq |(n + 1 - j) - (n + 1 - i)| = |i - j|.$$

Zauważmy, że

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{2n+1} = n + (n - 1) + \dots + 1 + 0 + 1 + \dots + (n - 1) + n = n(n + 1),$$

co dowodzi tego, że postulowane minimum jest osiągalne.

### Zadanie 3

Ciąg  $u_n$  dany jest wzorem  $u_0 = 1, u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+3}$ . Wykaż, że  $u_1 + u_2 + \dots + u_{2021} < 1$

Przekształcając równanie rekurencyjne równoważnie otrzymujemy

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 3},$$
$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{u_n + 3}{u_n} = 1 + \frac{3}{u_n}.$$

Podstawmy  $a_n = \frac{1}{u_n}$ . Wówczas

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n + 1.$$

Sprawdzenie wartości  $a_n$  dla małych  $n$  pozwala postawić hipotezę, że  $a_n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$ . Łatwo sprawdzić, że dla  $a_0$  postulowana równość zachodzi oraz z tożsamości

$$\frac{3^{n+2}-1}{2} = 3 \cdot \frac{3^{n+1}-1}{2} + 1$$

wynika, że jeśli postulowana równość zachodzi dla  $a_n$ , to zachodzi również dla  $a_{n+1}$ . Z zasady indukcji matematycznej możemy więc wywnioskować, że

$$a_n = \frac{3^{n+1}-1}{2},$$
$$u_n = \frac{1}{a_n} = \frac{2}{3^{n+1}-1}.$$

Mamy więc

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{2021} < \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2}{3^{i+1}-1} < \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2}{3^{i+1}} = \frac{2}{3} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3^i} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1.$$

### Zadanie 4

Znajdź wszystkie liczby rzeczywiste  $x$ , że ciąg dany wzorem

$$a_0 = x, \quad a_n = 2^n - 3a_{n-1},$$

dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  spełnia zależność

$$a_n > a_{n-1}.$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2^n - 3a_n = 2^n - 3(2^{n-1} - 3a_{n-1}) = 2^n - 3 \cdot 2^{n-1} + 9a_{n-1} = \\ &= 2^n - 3 \cdot 2^{n-1} + 9(2^{n-2} - 3a_{n-2}) = 2^n - 3 \cdot 2^{n-1} + 9 \cdot 2^{n-2} - 27a_{n-2} = \\ &= \sum_{i=0}^n (2^{n-i} \cdot (-3)^i) + (-3)^{n+1}a_0 = 2^n \sum_{i=0}^n \left(-\frac{3}{2}\right)^i + (-3)^{n+1}a_0 = \\ &= 2^n \cdot \frac{1 - \left(-\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1 + \frac{3}{2}} + (-3)^{n+1}a_0 = \frac{2^{n+1}}{5} + \left(a_0 - \frac{1}{5}\right) (-3)^{n+1}. \end{aligned}$$

Jeśli  $a_0 \neq \frac{1}{5}$ , to liczba  $(a_0 - \frac{1}{5})(-3)^{n+1}$  będzie przyjmowała dowolnie duże i dowolnie małe wartości. Toteż  $a_n$  również będzie przyjmowała dowolnie małe wartości, toteż ciąg  $a_n$  nie może być rosnący. Jeśli zaś  $a_0 = \frac{1}{5}$ , to z powyższej tożsamości wynika, że ta liczba spełnia warunki zadania.

### Zadanie 5

Dany jest ciąg

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}.$$

Rozstrzygnąć, czy  $a_{5000} > 100$ .

*Odpowiedź.* Zachodzi nierówność  $a_{5000} > 100$ .

Przekształćmy równanie rekurencyjne ciągu

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + \frac{1}{a_n}, \\ a_{n+1}^2 &= \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 = a_n^2 + 2a_n \cdot \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_n^2} > a_n^2 + 2. \end{aligned}$$

Z powyższej nierówności wynika, że

$$a_{5000}^2 > a_{4999}^2 + 2 > a_{4998}^2 + 4 > \dots > a_0^2 + 10000 > 10000,$$

z czego wynika, że  $a_{5000}^2 > 100$ .

### Zadanie 6

Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby rzeczywiste  $\alpha$ , dla których istnieje ciąg dodatnich liczb rzeczywistych  $x_1, x_2, x_3, \dots$  o tej własności, że dla wszystkich  $n \geq 1$ :

$$x_{n+2} = \sqrt{\alpha x_{n+1} - x_n}.$$

*Odpowiedź.* Szukany ciąg istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy  $\alpha > 1$ .

Jeśli  $\alpha > 1$ , to łatwo sprawdzić, że ciąg dany wzorem  $x_n = \alpha - 1$  spełnia warunki zadania. Załóżmy nie wprost, że dla pewnego  $\alpha \leq 1$  istnieje ciąg spełniający warunki zadania. Wówczas, skoro liczba pod pierwiastkiem musi być dodatnia, mamy

$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha x_{n+1} - x_n \leq x_{n+1} - x_n, \\ x_n &\leq x_{n+1}, \end{aligned}$$

z czego wynika, że ciąg ten jest rosnący. Wykażemy teraz, że od pewnego momentu ciąg ten przyjmuje wartości mniejsze niż 1. Istotnie

$$x_{n+2}^2 = \alpha x_{n+1} - x_n < \alpha x_{n+1} \leq x_{n+1} \leq x_{n+2},$$

z czego wynika postulowana własność. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} x_1 < x_{n+2} &= \sqrt{\alpha x_{n+1} - x_n} \leq \sqrt{x_{n+1} - x_n}, \\ x_1^2 &< x_{n+1} - x_n. \end{aligned}$$

Z powyższej nierówności, jak i z wykazanej wyżej własności, wynika, że

$$1 > x_{n+1} > x_n + x_1^2 > x_{n-1} + 2x_1^2 > \dots > nx_1^2,$$

co nie może być prawdą dla wszystkich liczb naturalnych  $n$ .

### Zadanie 7

Dany jest ciąg

$$a_0 = 6, \quad a_n = a_{n-1} + NWD(n, a_{n-1}).$$

Wykazać, że  $NWD(n, a_{n-1})$  jest liczbą pierwszą lub jest równe 1.

Kluczowe w rozwiązaniu zadania jest następujące umocnienie tezy.

Jeśli dla pewnej liczby całkowitej  $n$  zachodzi nierówność  $NWD(n, a_{n-1}) > 1$ , to  $a_n = 3n$  oraz  $NWD(a_{n-1}, n)$  jest liczbą pierwszą.

Wyjściowo ciąg przyjmuje wartości

$$a_1 = 7, \quad a_2 = 8, \quad a_3 = 9, \quad a_4 = 10, \quad a_5 = 15.$$

Możemy więc zauważyć, że dla  $n = 5$  mamy

$$NWD(a_{n-1}, n) = 5 \quad \text{oraz} \quad a_5 = 3 \cdot 5.$$

Wykażemy tezę indukcyjnie – zakładamy, że zachodzi ona dla wszystkich liczb mniejszych od  $n$ . Jeśli  $NWD(n, a_{n-1}) = 1$ , to nic nie trzeba wykazywać. Załóżmy więc, że  $NWD(n, a_{n-1}) > 1$ . Weźmy największą liczbę  $t$ , mniejszą niż  $n$ , że  $NWD(t, a_t - 1) > 1$ . Na mocy założenia indukcyjnego mamy  $a_t = 3t$ . Wówczas

$$NWD(i, a_i - 1) = 1 \quad \text{dla wszystkich liczb } i \in \{t+1, t+2, t+3, \dots, n-1\},$$

czyli  $a_i = a_{i-1} + 1$ . Stąd

$$a_n - 1 = a_t + (n - t) - 1 = 3t + (n - t) - 1 = 2t + n - 1.$$

Zatem

$$NWD(a_n - 1, n) = NWD(2t + n - 1, n) = NWD(2t - 1, n) = NWD(2t - 1, 2n - (2t - 1)).$$

Liczba  $n$  jest najmniejszą liczbą większą od  $t$ , dla której wartość powyższego wyrażenia jest większa od 1. Nietrudno zauważyć, że pierwszą liczbą większą od  $t$ , dla której jest to prawda, jest takie  $n$ , że liczba  $2n - (2t - 1)$  jest najmniejszym nieparzystym dzielnikiem pierwszym liczby  $2t - 1$ . Wówczas oczywiście  $2n - (2t - 1)$  jest liczbą pierwszą oraz

$$NWD(n, a_n - 1) = 2n - (2t - 1),$$

$$a_n = a_{n-1} + NWD(n, a_n - 1) = (2t + n - 1) + 2n - (2t - 1) = 3n,$$

co kończy dowód indukcyjny.

# Rozstrzygnij, czy

## Zadanie 1

Rozstrzygnąć, czy istnieją liczby całkowite  $x, y$ , spełniające równanie

$$x^2 - 999y^2 = 1001.$$

Wykażemy, że szukane liczby nie istnieją. Przeprowadźmy rozumowanie nie wprost – weźmy parę  $(x, y)$  spełniającą warunki zadania. Skoro zachodzi równość, to w szczególności musi zachodzić przystawanie modulo 3, czyli

$$\begin{aligned}x^2 - 999y^2 &\equiv 1001 \pmod{3}, \\x^2 &\equiv 1001 \equiv 2 \pmod{3}.\end{aligned}$$

Jednak kwadrat liczby całkowitej może dawać jedynie reszty 0 i 1 z dzielenia przez 3, co jest sprzeczne z otrzymanym przystawaniem.

## Zadanie 2

Niech  $S(\mathcal{X})$  oznacza sumę elementów zbioru  $\mathcal{X}$ , zaś  $S_2(\mathcal{X})$  sumę kwadratów elementów zbioru  $\mathcal{X}$ . Rozstrzygnąć, czy istnieją takie rozłączne zbiory liczb całkowitych  $A$  oraz  $B$ , które zawierają po 1000 elementów, że

$$S(A) = S(B) \quad \text{oraz} \quad S_2(A) = S_2(B).$$

Wykażemy, że szukane zbiory istnieją. Rozpatrzmy dowolny zbiór 999 dodatnich liczb całkowitych  $a_1, a_2, \dots, a_{999}$ . Dokładając do niego liczbę

$$a_{1000} = -(a_1 + a_2 + \dots + a_{999})$$

otrzymamy zbiór liczb niezerowych, których suma wynosi 0. Rozpatrując zbiór liczb danych jako  $b_i = -a_i$  dla wszystkich liczb całkowitych  $1 \leq i \leq 1000$  otrzymamy również zbiór o sumie elementów równej zeru. Wystarczy tylko zauważyć, że

$$a_i^2 = (-a_i)^2 = b_i^2,$$

aby stwierdzić, że sumy kwadratów elementów obu zbiorów są sobie równe. Łatwo też zauważyć, że zbiory te będą rozłączne.

## Zadanie 3

Rozstrzygnąć, czy istnieje taka różnowartościowa funkcja  $f$  określona na zbiorze liczb całkowitych dodatnich i przyjmująca wartości całkowite nieujemne, że

$$f(mn) = f(m) + f(n)$$

dla dowolnych liczb całkowitych  $m, n$ .



Wykażemy, że żadna funkcja nie spełnia warunków zadania. Załóżmy nie wprost, że  $f$  jest takową. Wówczas dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych  $a, k$  mamy

$$f(a^k) = f(a) + f(a^{k-1}) = 2f(a) + f(a^{k-2}) = \dots = k \cdot f(a).$$

Zauważmy, że

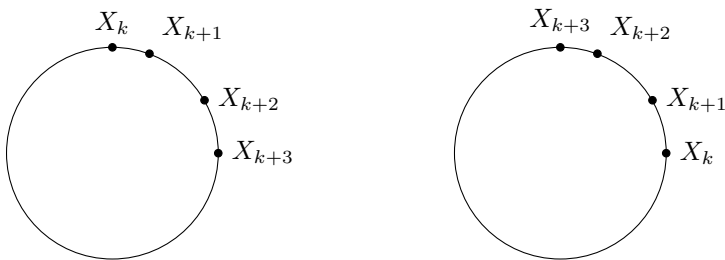
$$f(2^{f(3)}) = f(3 \cdot) f(2) = f(2) \cdot f(3) = f(3^{f(2)}).$$

Liczby  $2^{f(3)}$  oraz  $3^{f(2)}$  nie mogą być sobie równe, gdyż jedna jest parzysta, a druga nie. Stąd  $f$  przyjmują tę samą wartość dla dwóch różnych argumentów, co jest sprzeczne z założeniami zadania.

#### Zadanie 4

$P_1, P_2, \dots, P_{100}$  są 100 punktami na płaszczyźnie, z których żadne 3 nie leżą na jednej prostej. Dla każdego trzech punktów, nazwijmy trójkąt przez nie tworzony *zegarowym*, jeśli numery wierzchołków są uporządkowane rosnąco zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Czy liczba trójkątów zegarowych może wynosić dokładnie 1111?

Wykażemy, że jest to możliwe. Rozpatrzmy dwie konfiguracje. W jednej punkty są ułożone na okręgu zgodnie z ruchem wskazówek zegara, a w drugiej przeciwnie do niego.



W pierwszej konfiguracji jest  $\binom{100}{3} > 1111$  trójkątów zegarowych, a w drugiej jest ich zero. Wychodząc od pierwszej konfiguracji, zaczniemy przesuwać płynnie punkty tak, aby dojść do konfiguracji drugiej. Najpierw bardzo nieznacznie przesuniemy każdy z punktów, tak, aby zwolnić miejsca, które zajmują. To przekształcenie nie powinno wpłynąć na liczbę trójkątów zegarowych. Następnie przesuniemy punkt  $X_1$  na miejsce, które zajmuje on w drugiej konfiguracji. Róbnymy to tak, aby nie przejść przez żaden z punktów przecięcia prostych  $X_a X_b$  z  $X_c X_d$  dla dowolnych liczb naturalnych  $1 \leq a, b, c, d \leq 100$ . Analogicznie potem przesuwamy punkt  $X_2$ , potem  $X_3$ , ..., aż do  $X_{100}$ .

Zaobserwujemy, że trójkąt  $X_a X_b X_c$  zmieni status bycia zegarowym wtedy i tylko wtedy, gdy ruszamy jeden z wierzchołków i przejdziemy nim przez prostą zawierającą pozostały bok. Skoro więc nie założyliśmy, że ruszany punkt przechodzi przez co najwyżej jedną prostą w jednym momencie, to w jednej chwili co najwyżej jeden trójkąt może zmienić swoją zegarowość. Skoro w wyjściowej konfiguracji było więcej niż 1111 trójkątów zegarowych, a w końcowej jest ich mniej, to w pewnym momencie musiało ich być dokładnie 1111.

### Zadanie 5

Nieśmiertelny konik polny skacze po osi liczbowej, zaczynając od 0. Długość  $k$ -tego skoku wynosi  $2^k + 1$ . Konik sam decyduje, czy skoczy w prawo czy w lewo. Czy jest możliwe, aby każda liczba całkowita została w pewnym momencie odwiedzona przez konika polnego? Konik polny może odwiedzić pewną liczbę więcej niż raz.

Wykażemy, że jest to możliwe. Udowodnimy, że jeśli w pewnym momencie konik stoi na liczbie  $n$ , to jest w stanie stanąć po pewnej liczbie ruchów na polu o numerze  $n + 1$ . Niech  $A$  oznacza liczbę skoków, które konik już wykonał. Przyjmijmy, że zostanie wykonanych  $t$  skoków w prawo, a następnie jeden skok w lewo. Wówczas konik przesunie się w prawo o

$$\begin{aligned}(2^A + 1) + (2^{A+1} + 1) + \dots + (2^{A+t} + 1) - (2^{A+t+1} + 1) &= \\= 2^A \cdot (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^t) + t - 2^{A+t+1} - 1 &= \\= 2^A \cdot (2^{t+1} - 1) - 2^{A+t+1} + (t - 1) = (t - 1) - 2^A\end{aligned}$$

pól. Biorąc  $t = 2^A + 2$  otrzymamy przesunięcie o jedno pole w prawo.

Analogicznie można wykazać, że zawsze istnieją ciąg ruchów, który skutkuje przesunięciem o jedną liczbę w lewo. Konik może więc w skończonej liczbie ruchów przeskoczyć z dowolnej liczby  $a$  na dowolną inną. Rozpatrując ciąg liczb

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots,$$

zauważamy, że jest w nim każda liczba całkowita. Wystarczy więc, aby konik skakał po kolejnych liczbach tego ciągu, wykonując oczywiście niezbędne ruchy w międzyczasie.

### Zadanie 6

Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończony zbiór prostych na płaszczyźnie, taki, że dowolne dwie proste do niego należące przecinają się w pewnym punkcie o współrzędnych  $(x, y)$ , gdzie  $x$  i  $y$  są liczbami całkowitymi.

Wykażemy, że szukany zbiór prostych istnieje. Rozpatrzmy proste dane wzorami

$$y = i \cdot x + i^2,$$

dla wszystkich liczb całkowitych dodatnich  $i$ . Wykażemy, że proste

$$y = i \cdot x + i^2 \quad \text{oraz} \quad y = j \cdot x + j^2$$

przecinają się w punkcie o współrzędnych całkowitych. Rozwiążmy równanie

$$\begin{aligned}i \cdot x + i^2 &= j \cdot x + j^2, \\(i - j) \cdot x &= j^2 - i^2, \\x &= -i - j, \\y &= i \cdot x + i^2 = -ij.\end{aligned}$$

Stąd te proste przecinają się w punkcie  $(-i - j, -ij)$ , który spełnia warunki zadania.

# Grafy 2

## Zadanie 1

W pewnej grupie  $2n$  osób, gdzie  $n$  jest liczbą całkowitą nie mniejszą od 2, każda osoba zna co najmniej  $n$  innych osób. Wykazać, że możemy usadzić pewne cztery osoby przy okrągłym stole, aby każda z nich знаła swoich sąsiadów.

Jeśli wszystkie osoby by się знаły, to dowolna cztery z nich spełniają warunki zadania. Załóżmy, że są dwie osoby –  $A$  i  $B$ , które się nie znają. Każda z nich zna co najmniej  $n$  osób spośród pozostałych  $2n - 2$  osób. Stąd są co najmniej dwie osoby, które są znane zarówno przez  $A$ , jak i przez  $B$ . Nazwijmy je  $C$  i  $D$ . Wówczas ustawienie  $A, C, B, D$  spełnia warunki zadania.

## Zadanie 2

Dana jest pewna dodatnia liczba całkowita  $k$  oraz pewna liczba chłopców i dziewczyn. Każda z osób zna dokładnie  $k$  osób płci przeciwnej. Wykazać, że można zaaranżować pary między chłopcami i dziewczynami, tak, aby każda osoba była w dokładnie jednej parze.

Wykażemy, że spełniony jest warunek Halla. Załóżmy nie wprost, że istnieje podzbiór  $t$  dziewczyn, że znają one łącznie mniej niż  $t$  chłopców. Skoro każda dziewczyna zna dokładnie  $k$  chłopców, to znajomości damsko-męskich, dla których dziewczyna należy do rozpatrywanego podzbioru jest dokładnie  $tk$ . Skoro każdy chłopiec na dokładnie  $k$  dziewczyn, to musi znać co najwyżej  $k$  dziewczyn z rozpatrywanego zbioru. Skoro chłopców, którzy znają co najmniej jedną z nich jest co najwyżej  $t - 1$ , to łączna liczba tych znajomości jest nie większa niż  $k(t - 1)$ . Daje to sprzeczność.

## Zadanie 3

Dany jest graf, w którym każdy wierzchołek ma stopień co najwyżej 100. Zbiór krawędzi nazwiemy *idealnym*, jeśli żadne dwie krawędzie należące do niego nie mają wspólnego końca oraz nie da się dołożyć żadnej krawędzi, aby ta własność była zachowana. W każdym ruchu można usunąć dowolny zbiór idealny. Wykazać, że po wykonaniu dowolnych 199 ruchów, graf nie będzie zawierał żadnej krawędzi.

Rozpatrzmy dowolną krawędź – przyjmijmy, że jest ona między wierzchołkami  $u$  i  $v$ . Wykażemy, że po wykonaniu dowolnych 198 ruchów zostanie ona usunięta. Analogicznie rozumując dla każdej krawędzi udowodnimy tezę.

Założmy, że pewien zbiór idealny nie zawiera krawędzi pomiędzy  $u$  i  $v$ . Jeśli ten zbiór nie zawierałby żadnej krawędzi wychodzącej z  $u$  albo  $v$ , to możnaby do niego dołożyć krawędź pomiędzy  $u$  i  $v$ , co daje sprzeczność z maksymalnością tego zbioru.

Pozostałych wychodzących z jednego z wierzchołków  $u$  lub  $v$  jest co najwyżej  $2 \cdot 99 = 198$ . W takim razie w ciągu 199 ruchów istnieje taki ruch, w którym nie usuniemy jednej z nich. Z wyżej wykazanego wniosku wynika, że usuniemy wówczas krawędź pomiędzy  $u$  i  $v$ .

#### Zadanie 4

Dany jest graf planarny, w którym  $e$  to liczba krawędzi, a  $v \geq 3$  to liczba wierzchołków. Wykazać, że zachodzi nierówność

$$e \leq 3v - 6.$$

Skoro każda ściana ma co najmniej 3 boki, to dodając liczbę boków każdej ze ścian otrzymamy liczbę  $3f$ . Jest to dwukrotność liczby boków, bo każdy bok należy do dwóch ścian. Stąd ta liczba jest równa  $2e$ . Mamy więc

$$2e \geq 3f.$$

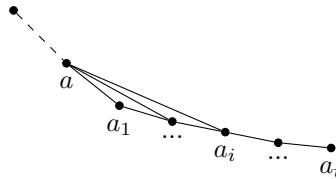
Na mocy twierdzenia Eulera mamy

$$\begin{aligned} v - e + f &= 1 + c \geq 2, \\ v - 2 &\geq e - f, \\ 3v - 6 &\geq 3e - 3f \geq e. \end{aligned}$$

#### Zadanie 5

Na pewnym przyjęciu okazało się, że każdy zna co najmniej  $k$  innych gości, gdzie  $k \geq 2$  jest pewną liczbą naturalną. Wykazać, że istnieje taka liczba naturalna  $n \geq k + 1$ , że można usadzić pewnych  $n$  uczestników przyjęcia przy okrągłym stole tak, aby każdy znał obu swoich sąsiadów.

Rozpatrzmy graf, w którym goście są wierzchołkami, a znajomości krawędziami. Weźmy ścieżkę o maksymalnej długości w rozpatrywanym grafie. Niech  $a$  będzie jednym z jej skrajnych wierzchołków, a kolejne wierzchołki oznaczmy jako  $a_1, a_2, \dots, a_t$ . Jeśli  $a$  byłby połączony z pewnym wierzchołkiem spoza analizowanej ścieżki, to można by ten wierzchołek do tej ścieżki dołożyć, wydłużając ją. Przeczyłoby to jednak jej maksymalności.



Z  $a$  wychodzi co najmniej  $k$  krawędzi, każda z nich łączy go z jednym wierzchołkiem spośród  $a_1, a_2, \dots, a_t$ . Niech  $a_i$  będzie wierzchołkiem połączonym z  $a$ , dla którego  $i$  jest maksymalne. Wiemy, że spośród  $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}$  co najmniej  $k - 1$  jest połączonych z  $a$ , stąd

$$\begin{aligned} i - 1 &\geq k - 1, \\ i + 1 &\geq k + 1. \end{aligned}$$

Usadzając przy stole osoby

$$a, a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i$$

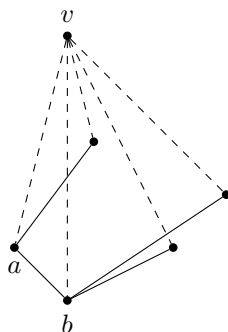
otrzymujemy tezę.

## Zadanie 6

Krawędzie grafu pełnego o  $n \geq 3$  wierzchołkach zostały pokolorowane w taki sposób, że każdy kolor został użyty do pokolorowania co najwyżej  $n - 2$  krawędzi. Wykazać, że istnieje podgraf tego grafu, będący trójkątem, o krawędziach parami różnych kolorów.

Przeprowadźmy rozumowanie nie wprost – zakładamy, że żaden trójkąt nie jest różnokolorowy. Rozpatrzmy taki kolor  $c$  i taki zbiór wierzchołków  $A$ , że pomiędzy każdymi dwoma wierzchołkami w  $A$  istnieje ścieżka złożona z krawędzi koloru  $c$ .

Załóżmy, że istnieje pewien wierzchołek  $v$  w tym grafie, który nie należy do zbioru  $A$ . Niech  $a$  oznacza pewien wierzchołek z  $A$ , zaś  $b \in A$  niech będzie sąsiadem  $a$ , o ile takowy istnieje. Zauważmy, że krawędzie  $va$  i  $vb$  nie mogą być koloru  $c$ , bo wówczas moglibyśmy dorzucić wierzchołek  $v$  do  $A$ . Tak być nie może, bo  $A$  jest maksymalnym zbiorem o postulowanej własności.



Niech krawędź  $va$  ma kolor  $c_1$ . Skoro trójkąt  $vab$  nie może być różnokolorowy, krawędź  $vb$  ma również kolor  $c_1$ . Stąd wszystkie krawędzie z  $v$  do sąsiadów  $a$  są koloru  $c_1$ . Analogicznie wszystkie krawędzie z  $v$  do sąsiadów sąsiadów wierzchołka  $a$  są koloru  $c_1$ . Przeprowadzając to rozumowanie dalej otrzymujemy, że wszystkie wierzchołki ze zbioru  $A$  są połączone z wierzchołkiem  $v$  krawędzią koloru  $c_1$ . Zbiór wierzchołków  $A \cup v$  oraz kolor  $c_1$  mają własność, co do której zakładaliśmy, że maksymalnym zbiorem ją posiadającym jest  $A$ . Ta sprzeczność dowodzi tego, że nie może istnieć wierzchołek  $v$ , czyli zbiór  $A$  jest pełnym zbiorem wierzchołków.

Rozpatrzmy graf składający się tylko z krawędzi koloru  $c$ . Jest to graf spójny o  $n$  wierzchołkach. Musi mieć on więc co najmniej  $n - 1$  krawędzi. Przeczy to założeniu zadania, że jest ich co najmniej  $n - 2$ .

### *Uwaga*

Dowód faktu, że graf spójny o  $n$  wierzchołkach musi mieć co najmniej  $n - 1$  krawędzi pozostawiamy czytelniczce/czytelnikowi jako ćwiczenie.

# Nierówności z pomysłem

## Zadanie 1

Niech  $a, b$  będą liczbami rzeczywistymi. Załóżmy, że dla wszystkich liczb rzeczywistych  $x, y$  zachodzi nierówność

$$|(ax + by)(ay + bx)| \leq x^2 + y^2.$$

Udowodnić, że  $a^2 + b^2 \leq 2$ .

Podstawmy  $a = b = 1$ . Otrzymamy

$$|(a + a)^2| = (a + b)^2 \leq 2.$$

Teraz weźmy  $a = 1$  i  $b = -1$ . Mamy

$$|(a - b)(b - a)| = (a - b)^2 \leq 2.$$

Dodając dwie powyższe nierówności stronami otrzymujemy

$$\begin{aligned}(a + b)^2 + (a - b)^2 &\leq 4, \\ a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 &\leq 4, \\ a^2 + b^2 &\leq 2.\end{aligned}$$

## Zadanie 2

Wykazać, że dla dowolnych liczb  $x, y, z, t$  z przedziału  $(0, 1)$  zachodzi nierówność

$$xyzt + (1 - x)(1 - y)(1 - z)(1 - t) < 1.$$

Zauważmy, że skoro liczby  $y, z, t$  należą do przedziału  $(0, 1)$ , to liczby  $1 - y, 1 - z$  i  $1 - t$  również. Mnożenie liczby dodatniej przez liczbę w tym przedziale ją zmniejsza, stąd

$$xyzt + (1 - x)(1 - y)(1 - z)(1 - t) < x + (1 - x) = 1.$$

## Zadanie 3

Dany jest trójkąt o bokach długości  $a, b$  i  $c$ . Wykazać, że zachodzi nierówność

$$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} < 2.$$

Wykonajmy identyczne podstawienie jak w Przykładzie 1. Weźmy takie dodatnie  $x, y, z$ , aby zachodziły równości

$$a = x + y, \quad b = y + z, \quad c = z + x.$$

Teza przyjmuje postać

$$\frac{x+y}{x+y+2z} + \frac{y+z}{x+2y+z} + \frac{z+x}{2x+y+z} < 2.$$

Zauważmy, że

$$\frac{x+y}{x+y+2z} + \frac{y+z}{x+2y+z} + \frac{z+x}{2x+y+z} < \frac{x+y}{x+y+z} + \frac{y+z}{x+y+z} + \frac{z+x}{x+y+z} = 2.$$

#### Zadanie 4

Wykazać, że dla parami różnych liczb nieujemnych  $a, b, c$  zachodzi nierówność

$$\frac{a^2}{(b-c)^2} + \frac{b^2}{(c-a)^2} + \frac{c^2}{(b-a)^2} > 2.$$

Założmy, bez straty ogólności, że  $a$  jest najmniejszą liczbą spośród  $a, b, c$ . Przyjmijmy

$$b = a + x, \quad c = a + y, \quad \text{dla } x, y > 0.$$

Wówczas nierówność przybiera postać

$$\frac{a^2}{(x-y)^2} + \frac{(a+x)^2}{y^2} + \frac{(a+y)^2}{x^2} > 2.$$

Zauważmy, że

$$\frac{a^2}{(x-y)^2} + \frac{(a+x)^2}{y^2} + \frac{(a+y)^2}{x^2} > \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \geq 2 \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} = 2.$$

#### Zadanie 5

Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste  $k$ , takie, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $a, b, c, d \geq -1$  zachodzi nierówność

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + 1 \geq k(a + b + c + d).$$

Przekształćmy nierówność do postaci

$$\left(a^3 - ka + \frac{1}{4}\right) + \left(b^3 - kb + \frac{1}{4}\right) + \left(c^3 - kc + \frac{1}{4}\right) + \left(d^3 - kd + \frac{1}{4}\right) \geq 0.$$

Teza jest równoważna znalezieniu takich  $k$ , aby

$$x^3 - kx + \frac{1}{4} \geq 0$$

dla dowolnej liczby  $x$  nie mniejszej od  $-1$ . Istotnie, jeśli istniałaby liczba, że ta nierówność nie jest spełniona, to biorąc ją za każdą z liczb  $a, b, c$  i  $d$  otrzymalibyśmy sprzeczność.

Zauważmy, że

$$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(x+1)(2x-1)^2 \geq 0,$$

stąd  $k = \frac{3}{4}$  spełnia warunki zadania. Wstawiając najpierw  $x = -1$ , mamy

$$-1 + k + \frac{1}{4} \geq 0 \implies k \geq \frac{3}{4}.$$

Następnie  $k = \frac{1}{2}$ , aby otrzymać

$$\frac{1}{8} - \frac{1}{2}k + \frac{1}{4} \geq 0 \implies \frac{3}{4} \leq k.$$

Stąd mamy, że  $k = \frac{3}{4}$  jest jedyną liczbą spełniającą warunki zadania.

#### Zadanie 6

Niech  $a_1, \dots, a_{25}$  będą nieujemnymi liczbami całkowitymi oraz niech  $k$  będzie najmniejszą z nich. Wykazać, że

$$\lfloor \sqrt{a_1} \rfloor + \lfloor \sqrt{a_2} \rfloor + \dots + \lfloor \sqrt{a_{25}} \rfloor \geq \left\lfloor \sqrt{a_1 + a_2 + \dots + a_{25} + 200k} \right\rfloor.$$

Przyjmijmy, że  $k = a_1$ . Niech  $x_i = \lfloor a_i \rfloor$ . Wówczas wiadomo, że  $a_i < (x_i + 1)^2$ , gdyż w przeciwnym ta podłoga byłaby równa co najmniej  $x_i + 1$ . Mamy więc, że  $a_i \leq x_i^2 + 2x_i$ . Wykażemy, że zachodzi nierówność

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{25} + 1 > \sqrt{a_1 + \dots + a_{25} + 200a_1},$$

z czego wyniknie teza. Mamy

$$a_1 + \dots + a_{25} + 200k \leq x_1^2 + \dots + x_{25}^2 + 2(x_1 + \dots + x_{25}) + 200(x_1^2 + 2x_1).$$

Chcemy pokazać, że

$$x_1^2 + \dots + x_{25}^2 + 2(x_1 + \dots + x_{25}) + 200(x_1^2 + 2x_1) < (x_1 + \dots + x_{25} + 1)^2.$$

Czyli pozostaje wykazać, że

$$\begin{aligned} 200(x_1^2 + 2x_1) &\leq 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 25} x_i x_j, \\ 100(x_1^2 + 2x_1) &\leq \sum_{1 \leq i < j \leq 25} x_i x_j. \quad (*) \end{aligned}$$

Zauważmy, że dla każdych  $i, j$  mamy

$$x_i x_j \geq x_1^2 \geq x_1.$$

Po prawej stronie nierówności (\*) jest dokładnie  $\binom{25}{2} = 300$  wyrazów, więc 100 z nich możemy przeszacować przez  $x_1^2$ , a pozostałe 200 przez  $x_i$ .



# Klasyczne zadania z teorii liczb

## Zadanie 1

Wykazać, że dla dowolnych liczb całkowitych  $a, b$ , równanie

$$(x^2 - y^2 - a)(x^2 - y^2 - b)(x^2 - y^2 - ab) = 0$$

ma przynajmniej jedno rozwiązanie w liczbach całkowitych  $x, y$ .

Zauważmy, że

$$(k+1)^2 - k^2 = 2k+1 \quad \text{oraz} \quad (k+2)^2 - k^2 = 4(k+1).$$

Stąd wynika, że każda liczba nieparzysta, jak i każda liczba podzielna przez 4, mogą być przedstawione w postaci różnicy dwóch kwadratów.

Gdy jedna z liczb  $a, b$  będzie nieparzysta, to możemy przedstawić ją w postaci różnicy dwóch kwadratów. Zauważmy, że jeśli obie liczby  $a$  i  $b$  są parzyste, to liczba  $ab$  jest podzielna przez 4, więc również szukane przedstawienie jest możliwe. W obu przypadkach da się dobrać takie  $x$  i  $y$ , aby liczba  $x^2 - y^2$  była równa jednej z liczb  $a, b, ab$ , a to chcieliśmy wykazać.

## Zadanie 2

Dana jest liczba całkowita  $n > 1$ , dla której liczba  $2^{2^n-1} - 1$  jest liczbą pierwszą. Wykazać, że  $n$  również jest liczbą pierwszą.

Zauważmy, że jeśli  $a, b$  są liczbami całkowitymi większymi od 1, to

$$2^{ab} - 1 \equiv (2^a)^b - 1 \equiv 1^b - 1 \equiv 0 \pmod{2^a - 1}.$$

Stąd  $2^{ab} - 1$  jest podzielna przez  $2^a - 1 > 1$ , czyli nie jest liczbą pierwszą. Wynika stąd, że jeśli  $2^k - 1$  jest liczbą pierwszą dla pewnej liczby naturalnej  $k$ , to  $k$  nie może być liczbą złożoną. Czyli musi być liczbą pierwszą.

Stosując tę obserwację do danej liczby pierwszej  $2^{2^n-1} - 1$  otrzymujemy, że liczba  $2^n - 1$  również musi być pierwsza. Stosując tę obserwację po raz drugi otrzymujemy, że skoro liczba  $2^n - 1$  jest pierwsza, to liczba  $n$  też musi być pierwsza.

### Zadanie 3

Dane są dodatnie liczby całkowite  $a$ ,  $b$  i  $c$ , takie że

$$b \mid a^3, \quad c \mid b^3, \quad a \mid c^3.$$

Wykazać, że

$$abc \mid (a + b + c)^{13}.$$

Zauważmy, że wyrażenie  $(a + b + c)^{13}$  po wymnożeniu składa się z wyrażen postaci  $a^k b^l c^{13-k-l}$  pomnożonych przez pewne całkowite współczynniki. Wykażemy, że każde z wyrażen postaci  $a^k b^l c^{13-k-l}$  jest podzielne przez liczbę  $abc$ .

Zauważmy, że z założeń zadania wynikają podzielności

$$abc \mid a \cdot a^3 \cdot b^3 \mid a \cdot a^3 \cdot (a^3)^3 = a^{13},$$

$$abc \mid c^3 \cdot b \cdot b^3 \mid (b^3)^3 \cdot c \cdot b^3 = b^{13},$$

$$abc \mid c^3 \cdot a^3 \cdot c \mid c^3 \cdot (c^3)^3 \cdot c = c^{13}.$$

Stąd

$$(abc)^k \mid a^{13k},$$

$$(abc)^l \mid b^{13l},$$

$$(abc)^{13(13-k-l)} \mid c^{13(13-k-l)}.$$

Mnożąc powyższe podzielności stronami otrzymamy

$$(abc)^{13} \mid a^{13k} b^{13l} c^{13(13-k-l)} = (a^k b^l c^{13-k-l})^{13},$$

czyli

$$abc \mid a^k b^l c^{13-k-l}.$$

Skoro  $abc$  dzieli każde z tych wyrażen, to w szczególności dzieli  $(a + b + c)^{13}$ .

### Zadanie 4

Niech  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$  będą dodatnimi liczbami całkowitymi, takimi, że zachodzi równość

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2000!.$$

Wykazać, że każda z liczb  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$  jest większa niż  $10^{200}$ .

Sprawdzając wszystkie możliwe reszty  $x$  z dzielenia przez 8 mamy, że  $x^2$  może dawać następujące reszty z dzielenia przez 8

$$x^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{8},$$

przy czym reszta 1 jest przyjmowana dla wszystkich liczb nieparzystych, a reszty 0 i 4 dla liczb parzystych. Jeśli jakkolwiek liczba spośród  $x^2$ ,  $y^2$ ,  $z^2$  i  $t^2$  dawałaby resztę 1 z

dzielenia przez 8, to ich suma nie byłaby podzielna przez 8. Istotnie – mamy następujące przypadki możliwości wystąpienia reszt wśród tych kwadratów

$$\begin{aligned} 1 + 1 + 1 + 1 &\equiv 4, & 0 + 1 + 1 + 1 &\equiv 3, \\ 4 + 1 + 1 + 1 &\equiv 7, & 0 + 0 + 1 + 1 &\equiv 2, \\ 4 + 0 + 1 + 1 &\equiv 6, & 4 + 4 + 1 + 1 &\equiv 2, \\ 0 + 0 + 0 + 1 &\equiv 1, & 4 + 0 + 0 + 1 &\equiv 5, \\ 4 + 4 + 0 + 1 &\equiv 1, & 4 + 4 + 4 + 1 &\equiv 5. \end{aligned}$$

Stąd też jeśli liczba  $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$  jest podzielna przez 8, to każda z liczb  $x, y, z, t$  musi być parzysta.

Niech

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2000! = 2^M \cdot t$$

dla pewnej liczby całkowitej  $M$  oraz pewnej nieparzystej liczby całkowitej  $t$ . Zauważmy, że ze wzoru Legendre'a mamy

$$M = \left\lfloor \frac{2000}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2000}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2000}{8} \right\rfloor + \dots > 1000 + 500 + 250 = 1750.$$

Niech  $2^k$  będzie największą potęgą liczby 2, która dzieli każdą z liczb  $x, y, z$  i  $t$ . Załóżmy, bez straty ogólności

$$\begin{aligned} x &= 2^k x_1, \quad y = 2^k y_1, \quad z = 2^k z_1, \quad t = 2^l t_1, \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 &= 2^{2k} (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + t_1^2) = 2^M \cdot t, \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + t_1^2 &= 2^{M-2k} \cdot t. \end{aligned}$$

Na mocy maksymalności liczby  $k$ , pewna liczba spośród  $x_1, y_1, z_1, t_1$  jest nieparzysta. Toteż suma ich kwadratów, na mocy tego co pokazaliśmy wcześniej, nie może się dzielić przez 8. Czyli

$$M - 2k < 3 \implies k > \frac{M - 3}{2} > \frac{1750 - 3}{2} > 800.$$

Każda z liczb  $x, y, z$  i  $t$  jest podzielna przez  $2^k$ , a skoro

$$2^k > 2^{800} > (2^8)^{100} > (10^2)^{100} > 10^{200},$$

to każda z nich będzie większa niż  $10^{200}$ .

#### Zadanie 5

Niech  $n$  będzie liczbą całkowitą, a  $p$  liczbą pierwszą. Wiadomo, że liczba  $np + 1$  jest kwadratem liczby całkowitej. Wykazać, że  $n + 1$  można zapisać za pomocą sumy  $p$  kwadratów liczb całkowitych.

Przyjmijmy, że  $np + 1 = a^2$ . Stąd mamy, że  $a^2 \equiv 1 \pmod{p}$ , czyli  $a \equiv \pm 1 \pmod{p}$ . Niech

$$\begin{aligned} a &= kp \pm 1, \\ np + 1 &= (kp \pm 1)^2 = k^2 p^2 \pm 2kp + 1, \\ n &= k^2 p \pm 2k, \\ n + 1 &= (p - 1) \cdot k^2 + (k \pm 1)^2. \end{aligned}$$

Stąd też liczbę  $n + 1$  da się przedstawić w postaci sumy  $p - 1$  kwadratów liczby  $k$  oraz kwadratu jednej z liczb  $k - 1, k + 1$ .

#### Zadanie 6

(a) Wykazać, że dla dowolnej liczby całkowitej  $m$  istnieje taka liczba całkowita  $n \geq m$ , że

$$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdots \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor = \binom{n}{m} (*)$$

(b) Niech  $p(m)$  będzie najmniejszą liczbą  $n \geq m$ , że zachodzi równanie (\*). Udowodnić, że  $p(2018) = p(2019)$ .

Wykażemy, że dla dowolnej liczby całkowitej  $1 \leq k \leq n$  zachodzi nierówność

$$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \geq \frac{n - k + 1}{k}.$$

Weźmy  $n = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \cdot k + r$ , gdzie  $r$  jest resztą z dzielenia  $n$  przez  $k$ . Wówczas  $r \leq k - 1$  oraz

$$\frac{n - k + 1}{k} = \frac{\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \cdot k + r\right) - k + 1}{k} = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + \frac{r - (k - 1)}{k} \leq \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor,$$

przy czym równość w powyższej nierówności zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $r = k - 1$ , czyli gdy liczba  $n + 1$  jest podzielna przez  $k$ . Mamy więc

$$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdots \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor \geq \frac{n}{1} \cdot \frac{n - 1}{2} \cdots \frac{n - m + 1}{m} = \binom{n}{m}.$$

Równość w powyższej równości zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $n + 1$  jest podzielna przez każdą z liczb  $1, 2, \dots, m$ . Stąd łatwo wynika (a). Najmniejszą liczbą, dla której wszystkie te równości zachodzą jest liczba

$$p(m) = \text{NWW}(1, 2, 3, \dots, m).$$

Zauważmy, że  $2019 = 3 \cdot 673$ . Skoro obie z liczb  $3$  i  $673$  dzielą liczbę  $\text{NWW}(1, 2, 3, \dots, 2018)$ , to jest ona również podzielna przez  $2019$ . Stąd

$$p(2018) = \text{NWW}(1, 2, 3, \dots, 2018) = \text{NWW}(1, 2, 3, \dots, 2019) = p(2019).$$

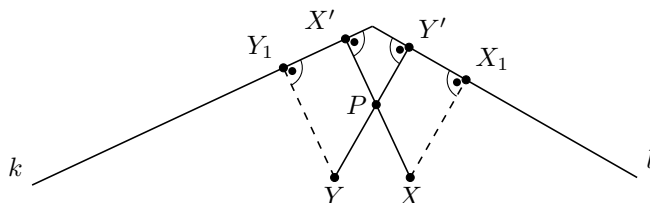
# Maksima, niezmienniki i procesy

## Zadanie 1

Danych jest  $n$  punktów i  $n$  prostych, przy czym żadne trzy punkty nie są współliniowe oraz żadne dwie proste nie są równoległe. Wykazać, że można tak pogrupować punkty i proste w pary, aby odcinki łączące punkt z jego rzutem prostokątnym na przyporządkowaną do niego prostą, nie przecinały się.

Rozpatrzmy takie przyporządkowanie w pary, dla których suma długości rozpatrywanych odcinków jest minimalna. Wykażemy, że spełnia ono warunki zadania.

Założmy nie wprost, że to przyporządkowanie nie spełnia warunków zadania. Czyli istnieją takie punkty  $X$  i  $Y$  i proste  $k$  i  $l$ , że odcinki łączące rzuty  $X$  i  $Y$  na  $k$  i  $l$  odpowiednio się przecinają w pewnym punkcie  $P$ . Oznaczmy te rzuty jako  $X'$  i  $Y'$  odpowiednio. Rzut  $X$  na  $k$  oznaczmy jako  $X_1$ , a rzut  $Y$  na  $l$  jako  $Y_1$ .



Zauważmy, że zachodzą nierówności

$$XP + PY' > XY' > XX_1 \quad \text{oraz} \quad YP + PX' > YX' > YY_1.$$

Dodając te nierówności stronami otrzymujemy, że

$$XX' + YY' = (XP + PX') + (YP + PY') = (XP + PY') + (YP + PX') > XX_1 + YY_1.$$

Przyporządkowując prostą  $k$  do punktu  $Y$  i prostą  $l$  do punktu  $X$  otrzymamy przyporządkowanie o mniejszej sumie rozpatrywanych odcinków. Przeczyłoby to jednak minimalności, którą założyliśmy na początku. Zatem żadne dwa rozpatrywane odcinki się nie przecinają.

## Zadanie 2

Niech  $n \geq 2$  będzie dodatnią liczbą całkowitą i niech  $S$  będzie zbiorem zawierającym dokładnie  $n$  różnych liczb rzeczywistych. Niech  $T$  będzie zbiorem wszystkich liczb postaci  $x_i + x_j$ , gdzie  $x_i$  oraz  $x_j$  są różnymi elementami  $S$ . Wykazać, że zbiór  $T$  zawiera co najmniej  $2n - 3$  elementów.

Założmy, że zbiór  $S$  zawiera liczby

$$x_n > x_{n-1} > \dots > x_2 > x_1.$$

Zauważmy, że

$$x_1 + x_2 < x_1 + x_3 < \dots < x_1 + x_n < x_2 + x_n < x_3 + x_n < \dots < x_{n-1} + x_n.$$

W powyższym ciągu nierówności znajdują się  $2n - 3$  liczby, z których każda należy do  $T$ . Oczywiście żadne dwie z nich nie mogą być sobie równe, czyli  $T$  zawiera co najmniej  $2n - 3$  elementów.

*Uwaga*

Jeśli  $x_i = i$  dla każdej liczby całkowitej  $n \geq i \geq 1$ , to wówczas zbiór  $T$  zawiera liczby całkowite od 3 do  $2n - 1$  – jest ich dokładnie  $2n - 3$ . Czyli oszacowania tego nie da się poprawić.

### Zadanie 3

Niech  $p_1, p_2, p_3, \dots$  będą kolejnymi liczbami pierwszymi, zaś  $x_0$  niech będzie liczbą rzeczywistą pomiędzy 0 i 1. Dla każdej dodatniej liczby całkowitej  $k$ , przyjmijmy

$$x_k = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } x_{k-1} = 0, \\ \left\{ \frac{p_k}{x_{k-1}} \right\} & \text{jeśli } x_{k-1} \neq 0, \end{cases}$$

gdzie  $\{x\}$  oznacza część ułamkową  $x$ . (Część ułamkowa  $x$  jest równa  $x - [x]$ )  
Znajdź wszystkie liczby  $x_0$  spełniające  $0 < x_0 < 1$ , dla których ciąg  $x_0, x_1, x_2, \dots$  od pewnego momentu jest równy 0.

*Odpowiedź.* Zbiorem szukanych liczb jest zbiór liczb wymiernych.

Najpierw wykażemy, że dla  $x_0$  niewymiernego w danym ciągu nigdy nie pojawi się liczba 0. Co więcej, wykażemy, że jeśli liczba  $x_i$  jest niewymierna, to liczba  $x_{i+1}$  również będzie niewymierna. Skoro  $x_i$  jest niewymierna, to liczba  $\frac{p_i}{x_i}$  również. Wiemy, że liczba

$$\left\{ \frac{p_k}{x_{k-1}} \right\} - \frac{p_k}{x_{k-1}}$$

jest całkowita, toteż skoro liczba  $\frac{p_i}{x_i}$  jest niewymierna, to liczba  $x_{i+1} = \left\{ \frac{p_i}{x_i} \right\}$  będzie niewymierna.

Wykażemy teraz, że jeśli  $x_0$  jest liczbą wymierną, to w pewnym momencie w ciągu  $x_i$  pojawi się 0. Najpierw zauważmy, że dla każdego nieujemnego całkowitego  $i$  zachodzi

$$1 \geq x_i \geq 0.$$

Wynika to z analogicznej własności części ułamkowej. Załóżmy, że  $x_i$  jest liczbą wymierną, różną od 0. Niech  $x_i = \frac{p}{q}$  – oczywiście  $p < q$ . Wówczas

$$x_{i+1} = \left\{ \frac{p_k}{x_{k-1}} \right\} = \left\{ \frac{qp_k}{p} \right\} = \frac{qp_k \bmod p}{p},$$

gdzie  $qp_k \bmod p$  oznacza resztę z dzielenia  $qp_k$  przez  $p$ . Zauważmy, że

$$0 \leq qp_k \bmod p < p,$$

czyli  $x_{i+1}$  ma mniejszy licznik niż  $x_i$ . Jako że licznik jest nieujemną liczbą całkowitą, to nie może on się zmniejszać w nieskończoność. Toteż dla pewnego  $i$  otrzymamy  $x_i = 0$ .

#### Zadanie 4

Dana jest kratka  $1000 \times 1000$ . W każdą kratkę wpisano strzałkę, która wskazuje jeden z boków kratki. W jednej z tych kratek stoi mrówka. Co sekundę wykonuje ona ruch – rusza się na pole wskazane przez strzałkę w polu, na którym stoi, a następnie obraca tę strzałkę o  $90^\circ$  zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Wykazać, że mrówka wyjdzie kiedyś z wyjściowego kwadratu.

Zauważmy, że jeśli na pewnym polu mrówka stanie co najmniej  $4n$  razy, to stanie na nim co najmniej  $n$  razy, gdy strzałka jest skierowana w górę. Toteż co najmniej  $n$  razy przejdzie w górę. Czyli na polu powyżej rozpatrywanego pola mrówka stanie co najmniej  $n$  razy.

Wykażemy, że po co najwyżej  $4^{1000} \cdot 1000^2$  ruchach mrówka opuści planszę. Załóżmy nie wprost, że tak się nie stało – mrówka po tylu ruchach wciąż stoi na planszy. Skoro jest  $1000^2$  pól, to istnieje pole, na którym mrówka stanęła co najmniej  $4^{1000}$  razy. Wówczas na polu powyżej niego stanęła co najmniej  $4^{999}$  razy, na polu dwa pola powyżej stanęła co najmniej  $4^{998}$  razy, ..., na polu  $k$  pól powyżej rozpatrywanego pola stanęła  $41000 - k$  razy. Skoro plansza ma 1000 wierszy to dojdziemy w pewnym momencie do pola brzegowego i otrzymamy, że staniemy na nim co najmniej 4 razy. Toteż co najmniej raz staniemy, gdy strzałka jest skierowana w górę i opuścimy planszę.

#### Zadanie 5

Na tablicy zapisano pewną liczbę naturalną. W każdym ruchu możemy zastąpić aktualnie zapisaną liczbę  $x$  jedną z liczb

$$2x + 1 \quad \text{lub} \quad \frac{x}{x + 2}.$$

Wykazać, że jeśli na tablicy pojawiła się liczba 2000, to była tam ona od samego początku.

Rozpatrzmy następującą wartość – jeśli na tablicy jest zapisana liczba  $\frac{a}{b}$ , przy czym ułamek  $\frac{a}{b}$  jest nieskracalny – to weźmy liczbę  $a + b$ .

Założmy, że w pewnym momencie na tablicy nieskracalny ułamek  $\frac{a}{b}$ . Wówczas możemy go zamienić na jedną z liczb

$$2 \cdot \frac{a}{b} + 1 = \frac{2a + b}{b} \quad \text{oraz} \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{b} + 2} = \frac{a}{a + 2b}.$$

Mamy

$$\text{NWD}(2a + b, b) = \text{NWD}(2a, b) \quad \text{oraz} \quad \text{NWD}(a, a + 2b) = \text{NWD}(a, 2b).$$

Skoro  $\text{NWD}(a, b) = 1$ , to mamy, że każde z tych NWD wynosi co najwyżej 2. Stąd suma licznika i mianownika w formie nieskracalnej wynosi  $2a + 2b$  lub  $\frac{2a + 2b}{2} = a + b$ .

Założmy, że na początku na tablicy zapisano liczbę naturalną  $n = \frac{n}{1}$ . Wyjściowo suma licznika i mianownika wynosi  $n + 1$ . Po wykonaniu pewnej liczby ruchów suma licznika i mianownika wynosi  $2^\alpha(n + 1)$ . Skoro otrzymano liczbę  $\frac{2000}{1}$ , to  $\alpha = 0$  oraz  $n + 1 = 2001$ . Czyli na początku istotnie zapisano liczbę  $n = 2000$ .

### Zadanie 6

Niech  $n$  będzie dodatnią liczbą całkowitą. Syzyf wykonuje ruchy na planszy, która zawiera  $n + 1$  pól, ponumerowanych 0 do  $n$  od lewej do prawej. Początkowo  $n$  kamieni znajduje się nie polu o numerze 0, zaś inne pola są puste. W każdym ruchu, Syzyf wybiera niepuste pole, niech ono zawiera  $k$  kamieni, bierze jeden kamień i przesuw go w prawo o co najwyżej  $k$  pól (kamień musi pozostać na planszy). Celem Syzyfa jest przeniesienie wszystkich kamieni z pola o numerze 0 na pole o numerze  $n$ . Wykazać, że Syzyf nie może osiągnąć swojego celu w mniej niż

$$\left\lceil \frac{n}{1} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + \cdots + \left\lceil \frac{n}{n} \right\rceil$$

ruchach.

Ponumerujmy kamienie liczbami od 1 do  $n$ . Jeśli na polu jest kilka kamieni, przyjmujemy, że Syzyf użyje kamienia o największym numerze. Zauważmy, że to ponumerowanie nie zmienia istoty tego procesu, gdyż tak właściwie liczy się jedynie liczba kamieni na każdym z pól.

Zauważmy, że kamień o numerze  $k$  może zostać użyty wtedy i tylko wtedy, gdy na rozpatrywanym polu jest nie więcej niż  $k$  kamieni. Gdyby tych kamieni było co najmniej  $k + 1$ , to musiałby na tym polu leżeć kamień o numerze nie mniejszym niż  $k + 1$ . Wówczas on miałby numer większy niż  $k$ , więc Syzyf przełożyłby właśnie go.

Z powyższego akapitu wynika, że kamień o numerze  $k$  może zostać przesunięty w jednym ruchu o nie więcej niż  $k$  pól w prawo. Aby ten kamień znalazł się na polu o numerze  $n$  potrzeba więc ruszyć go co najmniej  $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$  razy. Przeprowadzając analogiczne rozumowania dla każdego  $k$  od 1 do  $n$  otrzymujemy tezę.



# Wielomiany 2

## Zadanie 1

Niech  $a, b, c$  będą trzema parami różnymi liczbami całkowitymi. Wykazać, że nie istnieje taki wielomian  $P(x)$  o współczynnikach całkowitych, że zachodzą równości

$$P(a) = b, \quad P(b) = c, \quad P(c) = a.$$

Założmy nie wprost, że takie liczby istnieją. Na mocy Twierdzenia 1 mamy

$$a - c \mid P(a) - P(c) = b - a,$$

$$a - b \mid P(a) - P(b) = b - c,$$

$$b - c \mid P(b) - P(c) = c - a.$$

W szczególności wynika, że każda z liczb

$$|a - b|, \quad |b - c|, \quad |c - a|, \quad |a - b|$$

jest podzielna przez kolejną z nich. Skoro pierwsza jest równa ostatniej, to wszystkie one muszą być sobie równe, czyli

$$|a - b| = |b - c| = |c - a|.$$

Bez straty ogólności przyjmijmy, że  $a$  jest największą spośród liczb  $a, b, c$ . Wówczas

$$|a - b| = |c - a| \implies a - b = a - c \implies b = c.$$

Jest to sprzeczność z założeniem, że liczby te są parami różne.

## Zadanie 2

Udowodnić, że istnieje taki wielomian  $W$  stopnia 100 o współczynnikach całkowitych, że dla każdej liczby całkowitej  $n$  liczby

$$n, \quad W(n), \quad W(W(n)), \quad W(W(W(n))), \dots$$

są parami względnie pierwsze.

Wykażemy, że wielomian

$$W(x) = x^{100} - x + 1$$

spełnia warunki zadania. Wynikną one z dwóch własności

1. Jeśli pewna liczba pierwsza  $p$  dzieli pewne  $n$ , to

$$W(n) = n^{100} - n + 1 \equiv 1 \pmod{p}.$$

2. Jeśli  $n \equiv 1 \pmod{p}$ , to wówczas

$$W(n) = n^{100} - n + 1 \equiv 1 - 1 + 1 \equiv 1 \pmod{p}.$$

Stąd też jeśli pewna liczba pierwsza  $p$  dzieli jeden z wyrazów ciągu

$$n, W(n), W(W(n)), W(W(W(n))), \dots,$$

to każdy kolejny daje resztę 1 z dzielenia przez  $p$ . Stąd też nie mogą istnieć dwa elementy tego ciągu, które mają wspólny dzielnik pierwszy, z czego wynika teza.

### Zadanie 3

Dany jest wielomian  $W(x)$  o współczynnikach rzeczywistych, który ma niezerowy współczynnik przy  $x^1$ . Wykazać, że istnieje taka liczba rzeczywista  $a$ , że

$$W(a) \neq W(-a).$$

Założmy nie wprost, że taka liczba nie istnieje. Wówczas dla dowolnej liczby rzeczywistej  $x$  mamy

$$W(x) = W(-x).$$

Niech

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Z założenia wiemy, że  $a_1 \neq 0$ . Zauważmy, że  $W(-x)$  ma przy  $x^1$  współczynnik  $-a_1$ . Czyli różnica  $W(x) - W(-x)$  ma ten współczynnik równy  $2a_1 \neq 0$ . Założyliśmy, że ten wielomian dla każdej liczby rzeczywistej przyjmuje wartość 0. To oznacza, że jest to wielomian zerowy, co przeczy niezerowości współczynnika przy  $x^1$ .

### Zadanie 4

Niech  $P, Q$  będą wielomianami o współczynnikach rzeczywistych, dla których zachodzi równość

$$P(Q(x)) = Q(P(x)).$$

Wykazać, że jeśli nie istnieje taka liczba rzeczywista  $x$  dla której  $P(x) = Q(x)$ , wówczas również nie istnieje taka liczba rzeczywista  $x$ , dla której prawdą jest, że  $P(P(x)) = Q(Q(x))$ .

Jeśli istniałyby liczby  $a, b$ , dla których

$$P(a) > Q(a) \text{ i } P(b) < Q(b),$$

to rozpatrując wielomian  $W(x) = P(x) - Q(x)$  mielibyśmy  $W(a) < 0$  i  $W(b) > 0$ . Z własności Darboux ten wielomian miałby pierwiastek, czyli równanie  $P(x) = Q(x)$  miałoby rozwiązanie. Ale z założeń tak nie jest, czyli albo

$$P(x) > Q(x) \text{ dla wszystkich liczb rzeczywistych } x,$$

albo  $Q(x) > P(x)$  dla wszystkich liczb rzeczywistych  $x$ . Bez straty ogólności założymy, że prawdziwa jest pierwsza nierówność.

Mamy

$$P(P(x)) > Q(P(x)) = P(Q(x)) > Q(Q(x)),$$

z czego wprost wynika teza.

### Zadanie 5

Znaleźć wszystkie wielomiany  $W$  o współczynnikach rzeczywistych, mających następującą własność: jeśli  $x + y$  jest liczbą wymierną, to  $W(x) + W(y)$  jest liczbą wymierną.

*Odpowiedź.* Warunek zadania spełniają jedynie wielomiany postaci  $W(x) = ax + b$  dla liczb wymiernych  $a$  i  $b$ .

Podstawmy  $y = 2q - x$  dla pewnej liczby wymiernej  $q$ . Wówczas dla każdej liczby wymiernej  $x$  suma  $x + y = 2q$  jest liczbą wymierną. Toteż wielomian

$$W(x) + W(2q - x)$$

jest liczbą wymierną. Zauważmy, że jeśli ten wielomian przyjmowałby dwie różne wartości  $a < b$ , to przyjmowałby wszystkie wartości w przedziale  $[a, b]$ . Każdy taki przedział zawiera pewną liczbę niewymierną. Stąd też wielomian

$$W(x) + W(2q - x)$$

musi być wielomianem stałym. Dla  $x = q$  przyjmuje on wartość  $2W(q)$ , czyli dla dowolnego  $x$  mamy

$$W(x) + W(2q - x) = 2W(q).$$

Podstawiając  $q = n \in \mathbb{Z}$  oraz  $x = n - 1$  otrzymamy

$$W(n - 1) + W(n + 1) = 2W(n) \implies W(n + 1) - W(n) = W(n) - W(n - 1).$$

Zdefiniujmy wielomian  $P(x) = W(x + 1) - W(x)$ . Na mocy powyższego warunku mamy, że  $P(n) = P(n - 1)$  dla dowolnej liczby całkowitej  $n$ . Stąd ten wielomian przyjmuje pewną wartość nieskończenie wiele razy, czyli jest to wielomian stały. Mamy więc, że

$$W(n) - W(n - 1) = c \quad \text{dla pewnej liczby rzeczywistej } c.$$

Można wykazać za pomocą indukcji, że

$$W(n) = c \cdot n + W(0)$$

dla dowolnej liczby naturalnej  $n$ . Jeśli wielomiany  $W(x)$  i  $c \cdot x + W(0)$  są równe dla nieskończenie wielu liczb – w tym przypadku wszystkich liczb całkowitych, to te wielomiany są sobie równe.

Rozpatrzmy wszystkie wielomiany liniowe tj. te postaci

$$W(x) = ax + b.$$

Podstawiając  $x = y = 0$  do danego warunku, otrzymamy, że  $2W(0)$  jest liczbą wymierną. Wynika stąd, że  $b$  jest liczbą wymierną. Jeśli podstawimy  $x = 1$  i  $y = 0$  otrzymamy, że  $W(1) = a + b$  jest liczbą wymierną, skąd  $a$  jest wymierne. Wówczas mamy

$$W(x) + W(y) = ax + b + ay + b = a(x + y) + 2b,$$

co jest wymierne, gdy liczba  $x + y$  jest wymierna.

### Zadanie 6

Jaś i Małgosia grają w grę. Jaś ma pewną funkcję

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0,$$

gdzie  $a_0, a_1, \dots, a_n$  to są liczby dodatnie całkowite i  $n \geq 3$ . W każdym ruchu Małgosia podaje pewną liczbę rzeczywistą  $x$ , po czym Jaś musi podać Małgosi wartość  $f(x)$ . Taki ruch powtarzają kilkakrotnie. Małgosia wygrywa, jak wie, ile wynoszą wszystkie liczby  $a_0, a_1, \dots, a_n$ . Znajdź, w zależności od  $n$ , taką liczbę ruchów, że Małgosia na pewno w tyłu ruchach wygra.

*Odpowiedź.* Małgosia zawsze jest w stanie wygrać w 2 ruchach.

Zauważmy, że jeśli po pierwszym ruchu Małgosia podała liczbę  $a$ , to jeśli Jaś trzyma jeden z wielomianów

$$f(x) = a + 1 \quad \text{lub} \quad f(x) = x + 1,$$

Małgosia nie będzie w stanie stwierdzić który, bo w obu przypadkach otrzymałaby tę samą odpowiedź.

Teraz pokażemy strategię, która pozwala Małgosi wygrać w 2 ruchach. W pierwszym ruchu dowiaduje się o wartości  $f(1)$ . W drugim o pyta się o wartość  $f(A)$  dla dowolnego  $A > f(1)$ . Wówczas otrzyma liczbę

$$f(N) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0.$$

Zauważmy, że  $A > a_i$  dla dowolnego  $0 \leq i \leq n$ . Stąd też powyższe wyrażenie jest liczbą  $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$  w systemie o podstawie  $A$ . Małgosia może więc przekonwertować liczbę  $f(A)$  z systemu dziesiętnego na system o podstawie  $A$ , wówczas cyfry otrzymanej liczby będą równe  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ .

*Uwaga*

Aby lepiej zobrazować ideę rozwiązania, niech

$$f(x) = 3x^2 + 7x + 1.$$

Wówczas mamy  $f(1) = 11$ . W drugim kroku można rozpatrzeć chociażby

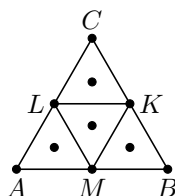
$$f(100) = 30701.$$

Łatwo z tego zapisu odczytać kolejne współczynniki danego wielomianu. W ogólności biorąc  $f(10^k)$  dla odpowiednio dużego  $k$  będzie to możliwe. W pierwszym ruchu ustalamy jak duże  $k$  wystarczy, a w drugim je bierzemy i odczytujemy współczynniki wielomianu.

# Kombinatoryka z elementami geometrii

## Zadanie 1

Każdemu punktowi  $A$  na płaszczyźnie przyporządkowano pewną liczbę rzeczywistą  $f(A)$ . Wiadomo, że  $f(M) = f(A) + f(B) + f(C)$ , gdy  $M$  jest środkiem masy trójkąta  $ABC$ . Wykazać, że  $f(A) = 0$  dla wszystkich punktów  $A$ .



Rozpatrzmy dowolny trójkąt równoboczny  $ABC$ . Niech  $K$ ,  $L$  i  $M$  to będą środki odpowiednio  $BC$ ,  $AC$  i  $AB$ . Niech  $O$  będzie środkiem ciężkości trójkąta  $ABC$ , a punkty  $O_1$ ,  $O_2$  i  $O_3$  środkami ciężkości trójkątów  $ALM$ ,  $BKM$  i  $CKL$  odpowiednio. Z założeń zadania mamy

$$\begin{aligned} f(O_1) &= f(A) + f(L) + f(M), \\ f(O_2) &= f(B) + f(M) + f(K), \\ f(O_3) &= f(C) + f(K) + f(L). \end{aligned}$$

Dodając powyższe równości stronami otrzymujemy

$$f(O_1) + f(O_2) + f(O_3) = (f(A) + f(B) + f(C)) + 2(f(K) + f(L) + f(M)). \quad (*)$$

Zauważmy, że punkt  $O$  jest środkiem ciężkości trójkątów  $ABC$  i  $O_1O_2O_3$ , stąd

$$\begin{aligned} f(O) &= f(A) + f(B) + f(C), \\ f(O) &= f(O_1) + f(O_2) + f(O_3), \end{aligned}$$

czyli

$$f(O_1) + f(O_2) + f(O_3) = f(A) + f(B) + f(C). \quad (**)$$

Łącząc równości  $(*)$  i  $(**)$  otrzymujemy, że

$$f(K) + f(L) + f(M) = 0,$$

co skoro te liczby są nieujemne oznacza, że są wszystkie równe 0. Zauważmy, że dla dowolnego punktu na płaszczyźnie można wybrać taki trójkąt równoboczny, aby ten punkt był środkiem jego boku. Toteż dla każdego punktu  $X$  mamy  $f(X) = 0$ .

### Zadanie 2

Dana jest liczba  $n \geq 3$  oraz pewne  $n$  par liczb rzeczywistych  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ , że dla każdej liczby całkowitej  $1 \leq i \leq n$  zachodzi

$$x_i^2 + y_i^2 = 1.$$

Wykazać, że istnieje taka liczba  $i$ , że zachodzi nierówność

$$(x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2 \leq \frac{4\pi^2}{n^2},$$

przy czym  $x_{n+1} = x_1$  oraz  $y_{n+1} = y_1$ .

Rozpatrzmy punkty  $A_1, A_2, \dots, A_n$  na płaszczyźnie kartezjańskiej, przy czym

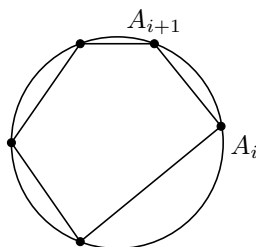
$$A_i = (x_i, y_i).$$

Zauważmy, że punkty te leżą na okręgu o środku w punkcie  $(0, 0)$  i promieniu 1. Chcemy wykazać, że dla pewnego  $i$  zachodzi nierówność

$$(A_i A_{i+1})^2 = (x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2 \leq \frac{4\pi^2}{n^2},$$

czyli równoważnie

$$A_i A_{i+1} \leq \frac{2\pi}{n}.$$



Zauważmy, że skoro każdy odcinek  $A_i A_{i+1}$  jest krótszy od odpowiadającego mu łuku, to suma

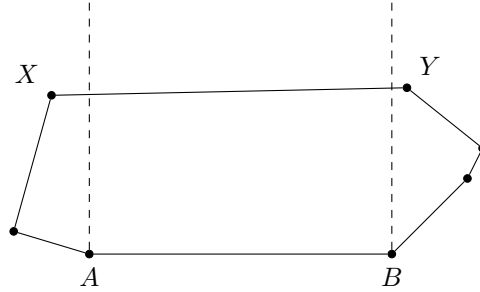
$$A_1 A_2 + A_2 A_3 + \dots + A_n A_1$$

jest nie większa niż obwód danego okręgu, który wynosi  $2\pi$ . Stąd wynika, że pewnen z  $n$  składników tej sumy jest nie większy niż  $\frac{2\pi}{n}$ .

### Zadanie 3

Rozstrzygnąć, czy istnieje taki wielokąt wypukły, że dla każdego jego boku i każdego jego wierzchołka, przy czym rozpatrywany wierzchołek nie należy do rozpatrywanego boku, rzut prostokątny tego wierzchołka na prostą zawierającą ten bok leży poza rozpatrywanym bokiem.

*Odpowiedź.* Taki wielokąt nie istnieje.



Założmy nie wprost, że szukany wielokąt istnieje. Niech  $AB$  będzie jego najdłuższym bokiem. Skoro rzut żadnego z wierzchołków nie leży na odcinku  $AB$ , to wierzchołki tego wielokąta można podzielić na dwa zbiory: te, których rzut leży po stronie  $A$  (lub jest to  $A$ ), i te, których rzut leży po stronie  $B$  (lub jest to  $B$ ). Skoro  $A$  należy do pierwszej z tych grup, a  $B$  należy do drugiej, to istnieją takie dwa kolejne wierzchołki  $X, Y$ , że rzut  $X$  leży po stronie  $A$  odcinka  $AB$ , a rzut  $Y$  leży po stronie  $B$ . Ale wtedy musiałyby zajść

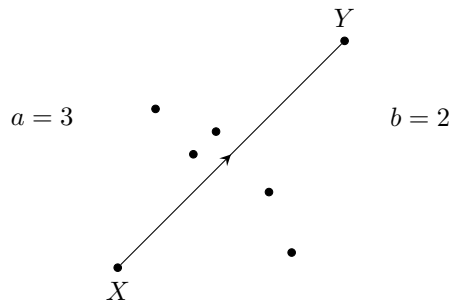
$$XY > AB,$$

co daje sprzeczność.

#### Zadanie 4

Danych jest 100 czerwonych punktów na płaszczyźnie, przy czym żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Prostą *dzielącą* będziemy nazywać każdą prostą, która przechodzi przez dwa czerwone punkty oraz po obu jej stronach jest po 49 czerwonych punktów. Wykaż, że istnieje przynajmniej 50 prostych *dzielących*.

Wykażemy, że przez każdy punkt przechodzi co najmniej jedna prosta dzieląca. Wówczas prostych dzielących będzie co najmniej  $\frac{100}{2} = 50$ , ponieważ każda prosta dzieląca przechodzi przez dokładnie 2 czerwone punkty.

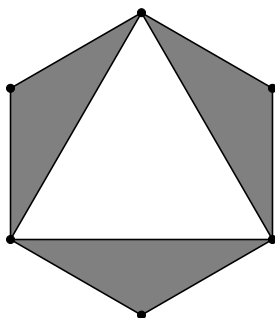


Niech  $l$  będzie prostą przechodzącą pewne dwa dowolne czerwone punkty  $X$  i  $Y$ . Nadajmy prostej  $l$  zwrot (dowolny). Niech  $a$  oznacza liczbę czerwonych punktów po lewej stronie prostej  $l$ , zaś  $b$  po prawej stronie. Obracamy prostą  $l$  wokół  $X$ , aż wykona ona obrót o  $180^\circ$ . Wówczas prosta wróci do swojego początkowego kierunku, ale ze zmienionym zwrotem. Zatem po lewej stronie jest teraz będzie  $b$  czerwonych punktów, zaś po prawej  $a$ . Wiemy, że  $a + b = 98$ , zatem jedna z liczb  $a$  lub  $b$  jest nie mniejsza niż 49, wtedy druga

jest nie większa niż 49. Początkowo po lewej stronie było  $a$  punktów, a po wykonaniu całego obrotu jest tam  $b$  punktów. Liczba punktów po lewej stronie nie zmieniała się naraz o więcej niż 1, gdyż prosta  $l$  (przechodząca przez czerwony punkt  $X$ ) może przechodzić przez co najwyżej jeden czerwony punkt różny od  $X$ . Zatem w pewnym momencie podczas obrotu był taki moment, że po lewej stronie tej prostej było 49 punktów (gdyż jedna z liczb  $a, b$  jest większa od 49, zaś druga mniejsza). Wtedy po prawej też musiało być  $98 - 49 = 49$  punktów. Czyli istnieje prosta „dzieląca” przechodząca przez  $X$ , co kończy rozwiązanie zadania.

### Zadanie 5

W pewnym  $n$ -kącie foremnym poprowadzono  $n - 3$  przekątne, tak, że żadne dwie z nich się nie przecinają w punkcie innym niż wierzchołek danego wielokąta oraz z każdego wierzchołka wychodzi nieparzysta liczba przekątnych. Wykazać, że liczba  $n$  jest podzielna przez 3.



Łatwo wykazać za pomocą indukcji, że dane przekątne dzielą dany wielokąt na trójkąty. Skierujmy każdą przekątną w pewną stronę. Jeśli pewien obszar jest po lewej stronie nieparzystej liczby prostych zawierających przekątne, to pokolorujemy go na czarno. W przeciwnym wypadku pokolorujemy go na białą. Zauważmy, że każde dwa obszary, które ze sobą sąsiadują, są innego koloru.

Zauważmy, że skoro z każdego wierzchołka wychodzi nieparzysta liczba przekątnych, to dla każdego wierzchołka dwa skrajne trójkąty, dla których jednym bokiem jest brzeg danego wielokąta, są jednakowego koloru. Stąd też wszystkie trójkąty, które mają bok wspólny z danym wielokątem są jednakowego koloru. Załóżmy bez straty ogólności, że są one czarne.

Założmy, że jest  $b$  białych trójkątów. Wówczas każda przekątna jest bokiem dokładnie jednego białego trójkąta, a każdy biały trójkąt ma dokładnie 3 boki będące przekątnymi. Stąd liczba narysowanych przekątnych wynosi  $3b$ . Jest ona na mocy założeń równa  $n - 3$ , czyli

$$3b = n - 3 \implies n = 3(b + 1),$$

z czego wynika teza.



### Zadanie 6

Znaleźć wszystkie skończone zbiory  $\mathcal{S}$  co najmniej 4 punktów na płaszczyźnie, że dla dowolnych trzech punktów  $A, B, C \in \mathcal{S}$  istnieje taki punkt  $D \in \mathcal{S}$ , że czworokąt  $ABCD$  jest równoległobokiem.

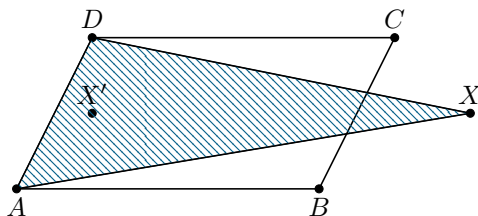
*Odpowiedź.* Wykażemy, że jedynie wierzchołki równoległoboków spełniają warunki zadania.

Zauważmy, że jeśli mamy 4 punkty, to biorąc trzy z nich otrzymujemy, że czwarty tworzy z nimi równoległobok. Załóżmy teraz, że danych punktów jest co najmniej 5. Rozpatrzmy trójkąt  $ABC$ , gdzie  $A, B, C \in \mathcal{S}$  o największym możliwym polu. Wówczas istnieje taki punkt  $D$ , że czworokąt  $ABCD$  jest równoległobokiem.

Jeśli istnieje pewien punkt  $X \in \mathcal{S}$ , który leży poza czworokątem  $ABCD$ , to wówczas jeden z trójkątów

$$XAB, ABC, XCD, XDA$$

miałby większe pole niż trójkąt  $ABC$ . Czyli zbiór  $\mathcal{S}$  nie zawiera żadnych punktów na zewnątrz równoległoboku  $ABCD$ .



Założmy, że pewien punkt  $X'$  należy do wnętrza równoległoboku  $ABCD$ . Weźmy taki punkt  $X$ , że czworokąt  $ABXX'$  jest równoległobokiem. Wówczas punkt  $X$  leży poza równoległobokiem  $ABCD$  – sprzeczność.

Punktów w  $\mathcal{S}$  jest co najmniej 5, cztery to wierzchołki równoległoboku  $ABCD$ , żaden punkt nie leży w jego wnętrzu i poza nim. Stąd istnieje pewien punkt  $E$  na obwodzie równoległoboku  $ABCD$  – założmy, że leży on na prostej  $CD$ . Ale wówczas czworokąt  $ABED$  nie może być równoległobokiem – sprzeczność.

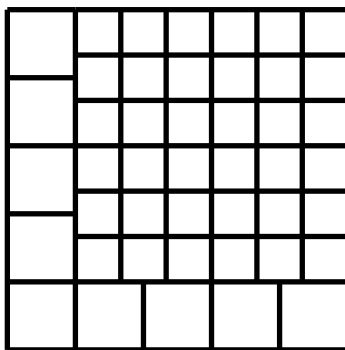
# Szachownice, klocki i kolorowanie

## Zadanie 1

Szachownicę o wymiarach  $15 \times 15$  przykryto przy pomocy płytek o wymiarach  $2 \times 2$  i  $3 \times 3$  w taki sposób, że każde pole jest przykryte przez dokładnie jedną płytkę oraz płytki nie wystają poza szachownicę. Wyznaczyć najmniejszą liczbę użytych płytek  $3 \times 3$ , dla której jest to możliwe.

*Odpowiedź.* Minimalną liczbą płytek  $3 \times 3$ , dla których istnieje szukane pokrycie planszy jest 9.

Pokrycie planszy za pomocą 9 klocków jest zobrazowane na poniższej ilustracji.



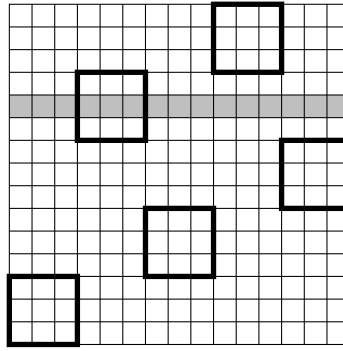
Założmy nie wprost, że istnieje szukane pokrycie, w którym użyto nie więcej niż 8 klocków  $3 \times 3$ . Zauważmy, że pól na planszy jest  $15^2 = 225$ . Oznaczmy liczbę płytek  $2 \times 2$  jako  $a$ , a liczbę płytek  $3 \times 3$  jako  $b$ . Wówczas zachodzi równość

$$4a + 9b = 225 \implies 4a = 225 - 9b.$$

Jedynymi liczbami  $0 \leq b \leq 8$ , dla których liczba  $225 - 9b$  jest podzielna przez 4 są  $b = 1$  i  $b = 5$ .

W każdym wierszu znajduje się 15 pól. Rozpatrzmy jeden z nich. Kłosek  $2 \times 2$  zajmuje 0 lub 2 pola w tym wierszu. Skoro 15 jest liczbą nieparzystą, to w tym wierszu znajduje się co najmniej 1 klocek  $3 \times 3$ .

Każdy klocek  $3 \times 3$  pokrywa pola w 3 kolejnych wierszach, których jest 15. Jak pokazaliśmy wyżej, każdy z tych wierszy zawiera pole przykryte przez jeden z tych klocków. Wiemy również, że liczba tych klocków wynosi 1 lub 5. Gdy jest jeden taki klocek, to łatwo otrzymujemy sprzeczność. Gdy jest ich 5, to leżą w wierszach 1 – 3, 4 – 6, 7 – 9, 10 – 12 i 13 – 15.



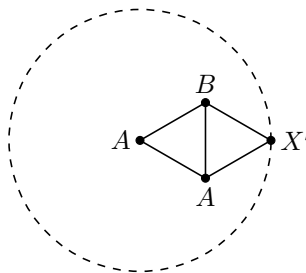
Rozpatrzmy klocek, który leży w wierszach 4-6. Dzieli on każdy z nich na część o wysokości 3 klocków i część o wysokości 9 klocków. Żadnej z tych części nie da się pokryć za pomocą klocków  $2 \times 2$ , a wiemy, że żaden inny klocek  $3 \times 3$  nie leży w tym wierszu. Otrzymujemy sprzeczność, która dowodzi, że tych klocków jest co najmniej 10.

### Zadanie 2

Płaszczyznę pokolorowano trzema kolorami. Wykazać, że istnieje odcinek o długości 1, który ma końce tego samego koloru.

Założmy nie wprost, że każdy odcinek ma końce różnych kolorów. Oznaczmy te kolory numerami 1, 2 i 3. Założmy bez straty ogólności, że istnieje pewien punkt  $X$  koloru 1.

Rozpatrzmy takie punkty  $A, B$ , że trójkąt  $XAB$  jest trójkątem równobocznym o boku długości 1. Na mocy założenia ten trójkąt ma wierzchołki różnych kolorów, czyli  $A$  i  $B$  mają odpowiednio kolory 3 i 2 lub 2 i 3. Weźmy taki punkt  $B'$ , różny od  $X$ , że trójkąt  $X'AB$  jest równoboczny. Mamy wtedy, że punkt  $X'$  musi mieć różny kolor od punktów  $A$  i  $B$ , czyli jest koloru 1.

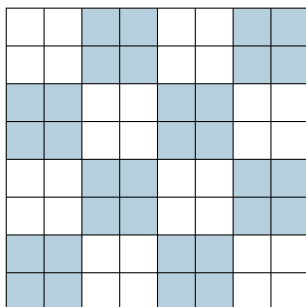


Analogicznie można wykazać, że każdy punkt oddalony od  $X$  o długość odcinka  $XX'$  jest koloru 1. Biorąc dwa punkty, oddalone o 1, leżące na okręgu o środku w  $X$  i promieniu  $XX'$ , otrzymujemy sprzeczność.

### Zadanie 3

Czy można wypełnić szachownicę o wymiarach  $8 \times 8$  przy pomocy jednego Z-klocka oraz dowolnej liczby prostokątów  $1 \times 4$ .

Wypełnijmy planszę jak na rysunku.

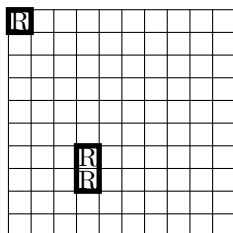


Zauważmy, że niezależnie jak położymy klocek  $1 \times 4$ , to pokryje on dokładne dwa pokolorowane pola. Zaś Z-klocek pokryje jedno lub trzy pokolorowane pola. Łącząc to z faktem, że liczba pokolorowanych pól jest parzysta, otrzymujemy sprzeczność.

#### Zadanie 4

Sad podzielony jest na 100 przystających kwadratów, tworzących szachownicę  $10 \times 10$ . Na dziewięciu kwadratach znajduje się roślina. Co roku roślina rozrasta się na pola, które już sąsiadują – mają wspólny bok – z co najmniej dwoma polami, na których już rośnie roślina. Udowodnić, że roślina nigdy nie rozrośnie się tak, aby zajmować cały sad.

Nazwijmy krawędź pewnego pola *dzielącą*, jeśli po dokładnie jednej jej stronie leży pole, na którym jest roślina. Przykłady takich krawędzi znajdują się na poniższym rysunku – *R* oznacza pole z rośliną, a krawędzie *dzielące* pogrubiono. Można policzyć, że mają one łączną długość 10.



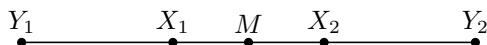
Jeśli pole nie zawiera rośliny, a co najmniej dwa sąsiednie pola ją zawierają, to co najmniej dwa boki tego pola są dzielące. Stąd też, jeśli w tym polu wyrośnie roślina, to łączna długość krawędzi dzielących się nie zwiększy.

Początkowo łączna długość krawędzi dzielących wynosi co najwyżej  $4 \cdot 9 = 36$ . Jeśli roślina porośłaby całą planszę, to dzielące byłyby wszystkie krawędzie leżące na boku dużego kwadratu. Ich długość wynosi 40. Skoro więc ta liczba nie zwiększa się, to nigdy stan, w którym wyniesie ona 40, nie zostanie uzyskany.

#### Zadanie 5

Każdy punkt płaszczyzny pokolorowano jednym z dwóch kolorów. Wykazać, że istnieje taki trójkąt o kątach  $80^\circ$ ,  $80^\circ$  i  $20^\circ$ , że wszystkie jego wierzchołki są jednego koloru.

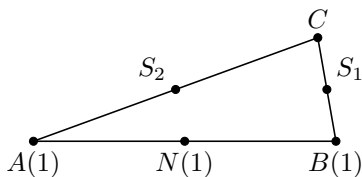
Oznaczmy kolory numerami 1 i 2. Najpierw wykażemy, że istnieją takie punkty  $A, B$ , że są one jednakowego koloru oraz środek odcinka  $AB$  jest tego samego koloru co one. Rozpatrzmy dowolne dwa punkty na płaszczyźnie, które są tego samego koloru. Nazwijmy je  $X_1$  i  $X_2$  oraz przyjmijmy, że są koloru 1. Niech punkty  $Y_1$  i  $Y_2$  leżą na prostej  $X_1X_2$ , tak, że punkty  $X_1, X_2$  są środkami odpowiednio odcinków  $Y_1X_2$  i  $Y_2X_1$ . Zauważmy, że odcinki  $X_1X_2$  oraz  $Y_1Y_2$  mają wspólny środek – nazwijmy go  $M$ .



Jeśli  $Y_1$  jest koloru 1, to trójka jednokolorowych punktów  $Y_1, X_1$  i  $X_2$  tworzy odcinek ze środkiem. Rozpatrzmy więc przypadek, gdy  $Y_1$  jest koloru 2. Analogicznie rozumując dochodzimy do wniosku, że  $Y_2$  jest koloru 2.

Jeśli  $M$  jest koloru 1, to trójka  $X_1, M$  i  $X_2$  spełnia warunki zadania. Gdy zaś  $M$  jest koloru 2, to trójka  $Y_1, M$  i  $Y_2$  spełnia warunki zadania.

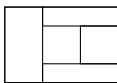
Rozpatrzmy trójkąt  $ABC$  o kątach danych w treści, w którym środki boków  $AB, BC$  i  $CA$  oznaczamy jako  $N, S_1$  i  $S_2$ . Na mocy tego, co pokazaliśmy powyżej, można wybrać taki trójkąt, że  $A, N$  oraz  $B$  będą jednego koloru – powiedzmy, że będzie to kolor 1.



Zauważmy, że jeśli jakikolwiek z punktów  $C, S_1$  i  $S_2$  byłby koloru 1, to wówczas jeden z trójkątów  $ABC, ANS_2, ABS_1$  byłby jednokolorowy. Jeśli zaś wszystkie punkty  $C, S_1$  i  $S_2$  są koloru 2, to one same tworzą trójkąt jednokolorowy.

#### Zadanie 6

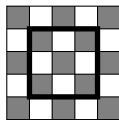
Prostokąt  $\mathcal{P}$  o wymiarach  $1001 \times 1001$ , podzielono na pewną liczbę prostokątów, z których każdy ma boki długości całkowitej (przykład na rysunku). Wykazać, że z tych prostokątów można wybrać taki jeden, że odległości jego czterech boków od odpowiadających mu boków  $\mathcal{P}$  albo są wszystkie liczbami parzystymi, albo są wszystkie liczbami nieparzystymi.



Pokolorujmy ten prostokąt w szachownicę. Załóżmy, że lewe dolne pole będzie koloru czarnego. Skoro prostokąt  $\mathcal{P}$  ma bok nieparzystej długości, to wszystkie jego narożne pola będą koloru czarnego. Również zawiera on o jedno pole czarne więcej niż zawiera pól białych.

Każdy z prostokątów, na które jest on podzielony można zaklasyfikować do jednego z trzech typów:

- Prostokąt, który ma dwa pola narożne białe i dwa pola narożne czarne. Zawiera on tyle samo pól białych, co czarnych;
- Prostokąt o czterech polach narożnych białych. Zawiera on o jedno pole białe więcej;
- Prostokąt o czterech polach narożnych czarnych. Zawiera on o jedno pole czarne więcej.



Skoro  $\mathcal{P}$  zawiera o jedno pole czarne więcej, to pewien z rozpatrywanych prostokątów, nazwijmy go  $P$  musi mieć czarne pola narożne. Zarówno  $\mathcal{P}$ , jak  $P$  mają czarne pola narożne, z czego łatwo wynika, że odległości między odpowiadającymi im bokami są tej samej parzystości.

# Źródła zadań i pomysłów na rozwiązania

# Indukcja matematyczna

**Zadanie 7.** <https://artofproblemsolving.com/community/c6h1633937p10268685>

## Bijeccje i bajki kombinatoryczne

**Przykład 1.** Problem 2 z <https://yufeizhao.com/olympiad/bijections.pdf>

**Przykład 2.** Przykład 7 z <https://smp.uph.edu.pl/msn/37/jaszu.pdf>

**Zadanie 1.** Zadanie 4 z <https://www.mimuw.edu.pl/~joasiaj/plock/materialy/bajki.pdf>

**Zadanie 2.** Example 2 z <https://www.imomath.com/index.php?options=238&lmm=1>

**Zadanie 3.** Przykład 5 z <https://smp.uph.edu.pl/msn/37/jaszu.pdf>

**Zadanie 5.** Przykład 3 z <https://smp.uph.edu.pl/msn/37/jaszu.pdf>

**Zadanie 6.** <https://artofproblemsolving.com/community/c1509h1009792>

**Zadanie 6.** Przykład 13 z <https://smp.uph.edu.pl/msn/37/jaszu.pdf>

## Nierówności między średnimi

**Przykład 1.** „Wędrówki po Krainie Nierówności” 3.3.2

**Przykład 2.** Zadanie 4 z [https://om.mimuw.edu.pl/static/app\\_main/camps/oboz2017.pdf](https://om.mimuw.edu.pl/static/app_main/camps/oboz2017.pdf)

**Zadanie 5.** Zadanie 33 z [https://om.mimuw.edu.pl/static/app\\_main/camps/oboz2015.pdf](https://om.mimuw.edu.pl/static/app_main/camps/oboz2015.pdf)

## Konstrukcje

**Przykład 2.** Zadanie 1 z [https://om.mimuw.edu.pl/static/app\\_main/camps/oboz2018.pdf](https://om.mimuw.edu.pl/static/app_main/camps/oboz2018.pdf)

**Zadanie 1.** [https://om.mimuw.edu.pl/static/app\\_main/camps/oboz2018.pdf](https://om.mimuw.edu.pl/static/app_main/camps/oboz2018.pdf)

**Zadanie 2.** Zadanie 11 z <https://omj.edu.pl/uploads/attachments/ObozOMJ2018.pdf>

**Zadanie 3.** <https://artofproblemsolving.com/community/c6h2097901p15170095>

**Zadanie 4.** <https://artofproblemsolving.com/community/c6h277245p1500076>

**Zadanie 5.** Zadanie 11 z <https://omj.edu.pl/uploads/attachments/ObozOMJ2018.pdf>

**Zadanie 6.** <https://artofproblemsolving.com/community/c6h589865p3493114>



# Grafy

**Zadanie 3.** Turniej miast 1986

**Zadanie 4.** Turniej miast Senior-O Spring 2011 Zadanie 5

**Zadanie 6.** <https://artofproblemsolving.com/community/c6h455746p2560781>

## Indukcja matematyczna 2

**Przykład 2.** <https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=ZGVmYXVsdGRvbWFpbnxpbW9jYW5hZGF8Z3g6NDA2NGM2NjkwZTJiYTg2Ng>

**Zadanie 1.** <https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=ZGVmYXVsdGRvbWFpbnxpbW9jYW5hZGF8Z3g6NDA2NGM2NjkwZTJiYTg2Ng>

**Zadanie 2.** <https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=ZGVmYXVsdGRvbWFpbnxpbW9jYW5hZGF8Z3g6NWVkbkY5ODMzZGMxNA>

**Zadanie 3.** Zadanie 9 z [https://om.mimuw.edu.pl/static/app\\_main/camps/oboz2015.pdf](https://om.mimuw.edu.pl/static/app_main/camps/oboz2015.pdf)

**Zadanie 4.** Zadanie 26 z [https://om.mimuw.edu.pl/static/app\\_main/camps/oboz2018.pdf](https://om.mimuw.edu.pl/static/app_main/camps/oboz2018.pdf)

**Zadanie 5.** Zadanie 2 z <https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=ZGVmYXVsdGRvbWFpbnxpbW9jYW5hZGF8Z3g6NDA2NGM2NjkwZTJiYTg2Ng>

**Zadanie 6.** Zadanie 14 z [https://om.mimuw.edu.pl/static/app\\_main/camps/oboz2019.pdf](https://om.mimuw.edu.pl/static/app_main/camps/oboz2019.pdf)

## Reszty kwadratowe

**Przykład 1.** Finał XIII OMJ.

**Przykład 2.** Zadanie 1 z [https://om.mimuw.edu.pl/static/app\\_main/problems/om66\\_1r.pdf](https://om.mimuw.edu.pl/static/app_main/problems/om66_1r.pdf)

**Zadanie 1.** Problem 48 z 20<sup>2</sup> Problems in Number Theory Dominika Burka

**Zadanie 2.** Problem 154 z 20<sup>2</sup> Problems in Number Theory Dominika Burka

**Zadanie 3.** Problem 168 z 20<sup>2</sup> Problems in Number Theory Dominika Burka

**Zadanie 4.** Problem 297 z 20<sup>2</sup> Problems in Number Theory Dominika Burka

**Zadanie 5.** Problem 170 z 20<sup>2</sup> Problems in Number Theory Dominika Burka

## Gry

**Zadanie 1.** Zadanie 1 z [https://om.mimuw.edu.pl/static/app\\_main/problems/om67\\_1.pdf](https://om.mimuw.edu.pl/static/app_main/problems/om67_1.pdf)

**Zadanie 2.** Excercise 9 z <http://refkol.ro/matek/mathbooks/Grupe%20de%20performanta/Chapter5%20Games%20Aug%202014.pdf>

**Zadanie 3.** Excercise 10 z <http://refkol.ro/matek/mathbooks/Grupe%20de%20performanta/Chapter5%20Games%20Aug%202014.pdf>

**Zadanie 4.** <https://artofproblemsolving.com/community/c6h2534986p21567788>

**Zadanie 5.** Excercise 94 z [https://www.math.hkust.edu.hk/excalibur/v7\\_n5.pdf](https://www.math.hkust.edu.hk/excalibur/v7_n5.pdf)

## Bardziej zaawansowane nierówności

**Zadanie 1.** Wędrowki po krainie nierówności 3.5 przykład 2

**Zadanie 2.** Wędrowki po krainie nierówności 3.5 przykład 3

**Zadanie 3.** Wędrowki po krainie nierówności 3.5.3

**Zadanie 5.** Zadanie 21 z <https://omj.edu.pl/uploads/attachments/omj2017-treści.pdf>

## Równania funkcyjne 2

**Przykład 2.** <https://artofproblemsolving.com/community/q1h1871345p12695350>

**Przykład 3.** Exercise 2.1 z <https://web.evanchen.cc/handouts/FuncEq-Intro/FuncEq-Intro.pdf#Ex2.1>

**Zadanie 1.** Zadanie 3 z <https://www.isinj.com/mt-usamo/Functional%20Equations%20-%20Marko%20Radovanovic.pdf>

**Zadanie 2.** <https://artofproblemsolving.com/community/c6h319947>

**Zadanie 3.** <https://web.evanchen.cc/handouts/FuncEq-Intro/FuncEq-Intro.pdf>

**Zadanie 4.** <https://artofproblemsolving.com/community/c6h1414672p7967490>

## Twierdzenia z teorii liczb

**Zadanie 2.** Zadanie 11 z 20<sup>2</sup> Problems in Number Theory Dominika Burka

**Zadanie 5.** Zadanie 12 z 20<sup>2</sup> Problems in Number Theory Dominika Burka

**Zadanie 6.** Zadanie 201 z 20<sup>2</sup> Problems in Number Theory Dominika Burka

# Grafy skierowane

- Przykład 1.** Zadanie 1 z <https://www.comp.nus.edu.sg/~warut/cycles.pdf>
- Zadanie 2.** <https://mathsbeyondlimits.eu/wp-content/uploads/2021/04/MBL-brochure-2019.pdf>
- Zadanie 3.** Olympiad Combinatorics chapter 8 Ex 2
- Zadanie 4.** MBL Qualifying Quiz
- Zadanie 5.** <https://math.stackexchange.com/questions/858110/strongly-regular-tournament>
- Zadanie 6.** Zadanie 5 z pierwszego meczu z [https://om.mimuw.edu.pl/static/app\\_main/camps/oboz2016.pdf](https://om.mimuw.edu.pl/static/app_main/camps/oboz2016.pdf)

## Ciągi

- Zadanie 2.** Zadanie 21 z [https://om.mimuw.edu.pl/static/app\\_main/camps/oboz2019.pdf](https://om.mimuw.edu.pl/static/app_main/camps/oboz2019.pdf)
- Zadanie 3.** <https://artofproblemsolving.com/community/q1h2494913p21023227>
- Zadanie 4.** Exercise 1 z [https://www.math.hkust.edu.hk/excalibur/v18\\_n3.pdf](https://www.math.hkust.edu.hk/excalibur/v18_n3.pdf)
- Zadanie 5.** [https://om.mimuw.edu.pl/static/app\\_main/camps/oboz2018.pdf](https://om.mimuw.edu.pl/static/app_main/camps/oboz2018.pdf)
- Zadanie 6.** Zadanie 12 z <https://dominik-burek.u.matinf.uj.edu.pl/Ko\OT4\lk\ówka2019.pdf>

## Rozstrzygnij, czy

- Przykład 1.** Zadanie 5 z IMO 2010.
- Przykład 2.**  $20^2$  Problems in Number Theory Dominika Burka
- Zadanie 1.** <https://skm.katowice.pl/pliki/szkice/rejonowe/rozw.rejon.2019.pdf>
- Zadanie 2.** <https://dominik-burek.u.matinf.uj.edu.pl/Rabka2017.pdf>
- Zadanie 3.** [https://om.mimuw.edu.pl/static/app\\_main/camps/oboz2019.pdf](https://om.mimuw.edu.pl/static/app_main/camps/oboz2019.pdf)
- Zadanie 4.** <https://artofproblemsolving.com/community/c6h1513472p8997062>
- Zadanie 5.** <https://artofproblemsolving.com/community/c6h1172747p5641811>

## Grafy 2

- Przykład 1.** <https://luckytoilet.wordpress.com/2013/12/21/halls-marriage-theorem-explained-intuitively/>

**Przykład 2.** Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej

**Zadanie 1.** Problem 2 z <https://sms.math.nus.edu.sg/simo/training2003/smograph.pdf>

**Zadanie 2.** Problem 1 z <https://www.math.cmu.edu/~ploh/docs/math/mop2009/graph-theory-more.pdf>

**Zadanie 3.** <https://artofproblemsolving.com/community/c6h1533982p9242011>

## Nierówności z pomysłem

**Przykład 1.** <http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/geometria/planimetria/2016/05/27/1606delta-deltoid.pdf>

**Przykład 2.** [https://om.mimuw.edu.pl/static/app\\_main/camps/oboz2018.pdf](https://om.mimuw.edu.pl/static/app_main/camps/oboz2018.pdf)

**Zadanie 1.** Zadanie 1 z [https://om.mimuw.edu.pl/static/app\\_main/problems/om72\\_1.pdf](https://om.mimuw.edu.pl/static/app_main/problems/om72_1.pdf)

**Zadanie 3.** Zadanie 4 z <http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/geometria/planimetria/2016/05/27/1606delta-deltoid.pdf>

**Zadanie 4.** <https://artofproblemsolving.com/community/c6h1414671p7967479>

**Zadanie 5.** Zadanie 2 z 1 meczu matematycznego z [https://om.mimuw.edu.pl/static/app\\_main/camps/oboz2018.pdf](https://om.mimuw.edu.pl/static/app_main/camps/oboz2018.pdf)

**Zadanie 6.** <https://artofproblemsolving.com/community/c6h1634940p10278481>

## Klasyczne zadania z teorii liczb

**Przykład 3.** Qualifying Quiz na obóz Math Beyonds Limits 2021

**Zadanie 1.** Zadanie 5 z [https://om.mimuw.edu.pl/static/app\\_main/problems/om67\\_1r.pdf](https://om.mimuw.edu.pl/static/app_main/problems/om67_1r.pdf)

**Zadanie 2.** [https://skm.katowice.pl/pliki/zadania/finalowe/final\\_2017.pdf](https://skm.katowice.pl/pliki/zadania/finalowe/final_2017.pdf)

**Zadania 3, 4, 5.** 20<sup>2</sup> Problems in Number Theory Dominika Burka

**Zadanie 6.** <https://artofproblemsolving.com/community/c6h1704016p10959197>

## Maksyma, niezmienniki i procesy

**Przykład 1.** Sample problem 2 z <http://web.mit.edu/yufeiz/www/wc08/invariants.pdf>

**Zadanie 1.** Problem 2 z <http://www.wfnmc.org/Journal%202010%202.pdf>

**Zadanie 3.** <https://artofproblemsolving.com/community/c6h55344p343871>

- Zadanie 5.** <https://artofproblemsolving.com/community/c6h209596p1154283>  
**Zadanie 6.** <https://artofproblemsolving.com/community/c6h1876784p12752893>

## Wielomiany 2

- Przykład 2.** [https://om.mimuw.edu.pl/static/app\\_main/camps/oboz2018.pdf](https://om.mimuw.edu.pl/static/app_main/camps/oboz2018.pdf)  
**Zadanie 2.** [https://om.mimuw.edu.pl/static/app\\_main/camps/oboz2019.pdf](https://om.mimuw.edu.pl/static/app_main/camps/oboz2019.pdf)  
**Zadanie 4.** H. Pawłowski „Zadania z olimpiad matematycznych z całego świata. Teoria liczb, algebra i elementy analizy matematycznej”

## Kombinatoryka z elementami geometrii

- Zadanie 1.** <https://artofproblemsolving.com/community/c6h1826975p12222051>  
**Zadanie 4.** <https://alexanderrem.weebly.com/uploads/7/2/5/6/72566533/miscellaneousproblemsolutions.pdf>  
**Zadanie 6.** Problem 3 z <https://alexanderrem.weebly.com/uploads/7/2/5/6/72566533/miscellaneousproblems.pdf>

## Szachownice, kloki i kolorowanie

- Przykład 1.** [https://om.mimuw.edu.pl/static/app\\_main/problems/om70\\_1r.pdf](https://om.mimuw.edu.pl/static/app_main/problems/om70_1r.pdf)  
**Przykład 2.** <https://artofproblemsolving.com/community/c6h597130p3543398>  
**Zadanie 1.** Zadanie 3 z [https://om.mimuw.edu.pl/static/app\\_main/problems/om71\\_1r.pdf](https://om.mimuw.edu.pl/static/app_main/problems/om71_1r.pdf)  
**Zadania 2, 3, 5.** Marcin Pitera „Kolorowe kwadraty”  
**Zadanie 4.** Qualifying Quiz na obóz Maths Beyond Limits 2019  
**Zadania 6.** IMO Shortlist 2017 C1