Wstęp do matematyki olimpijskiej

Teoria i zadania

Indukcja matematyczna

Przykład 1

Wykazać, że dla każdej liczby dodatniej całkowitej n zachodzi nierówność

$$2^n \geqslant n+1.$$

Rozwiązanie

Dla $n = 1$ mamy $2^n = 2 = n+1$, a więc postulowana nierówność istotnie zachodzi. Załóżmy, że dla pewnej liczby dodatniej całkowitej k zachodzi nierówność $2^k \geqslant k+1$. Zauważmy, że wówczas

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \geqslant 2 \cdot (k+1) = 2k+2 \geqslant k+2.$$

Wykazaliśmy, że jeśli postulowana nierówność zachodzi dla pewnej dodatniej liczby całkowitej k, to zachodzi również dla liczby $k+1$. Skoro zachodzi ona dla $n = 1$, to zachodzi również dla $1+1 = 2,\ 2+1 = 3,\ 3+1 = 4, \ldots$ – wszystkich liczb naturalnych.

Alternatywnym, ale równoważnym, sposobem zakończenia rozwiązania powyższego przykładu jest rozpatrzenie najmniejszego naturalnego n, dla którego teza nie zachodzi. A więc dla $n-1$ nierówność musi zachodzić, chyba że $n = 1$. Ale w tym przypadku sprawdzamy, że teza zachodzi. Skoro dla $n-1$ teza jest prawdziwa, a dla n już nie, to otrzymujemy sprzeczność z wcześniej poczynioną obserwacją.

Zasada indukcji matematycznej

Metodę dowodzenia zastosowaną w ostatnim akapicie powyższego rozwiązania nazywamy *zasadą indukcji matematycznej.*

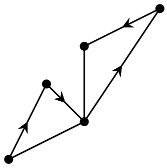
Formalizując, dowód indukcyjny zdania logicznego $Z(n)$ dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n składa się z dwóch części:

1. Baza indukcji – sprawdzenie prawdziwości zdania $Z(1)$.
2. Krok indukcyjny – udowodnienie, że jeśli zachodzi zdanie $Z(k)$ to zachodzi $Z(k+1)$.

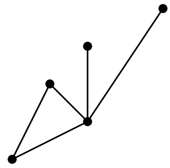
Indukcję matematyczną da się wykorzystać poza algebrą. Pokażemy jedno jego zastosowanie kombinatoryczne. Ale najpierw musimy zdefiniować kilka pojęć z teorii grafów.

Grafy i ścieżki Hamiltona

Grafem nazywamy pewien zbiór *wierzchołków* na płaszczyźnie, które są połączone *krawędziami.* *Ścieżką* nazywamy ciąg parami różnych krawędzi pewnego grafu, z których dwie kolejne mają wspólny wierzchołek. *Ścieżką Hamiltona* nazwamy ścieżkę, która przechodzi przez każdy wierzchołek dokładnie raz.



Graf posiada ścieżkę Hamiltona – zaznaczono ją strzałkami



Graf nie posiada ścieżki Hamiltona

Przykład 2

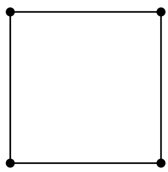
Zdefinujmy ciąg grafów $(G_n)_{n\geqslant 1}$ w następujący sposób.

- Graf G_1 jest grafem złożonym z dwóch połączonych ze sobą wierzchołków,
- Graf G_{i+1} dla $i \geqslant 2$ otrzymujemy poprzez połączenie dwóch grafów G_i, aby każdy wierzchołek z jednego z tych grafów był połączony z dokładnie jednym wierzchołkiem z drugiego z tych grafów.

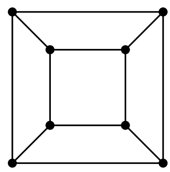
Wykazać, że graf G_{2020} ma ścieżkę Hamiltona.

Uwaga
Można zauważyć, że G_n to w istocie n-wymiarowy hipersześcian.

G_1



G_2



G_3

Rozwiązanie

Wykażemy, że teza jest prawdziwa dla każdego $n \geqslant 1$. Co więcej wykażemy, że ścieżka Hamiltona może zaczynać się w każdym z wierzchołków G_n.

Zauważmy, że dla $n = 1$ teza jest oczywista – ścieżka złożona z jednej krawędzi spełnia warunki zadania.

Załóżmy, że dla G_n istnieje ścieżka Hamiltona. Wykażemy, że istnieje ona dla G_{n+1}. Graf G_{n+1} składa się z dwóch połączonych ze sobą cześci izomorficznych z grafem G_n – nazwijmy je A oraz B. Oznaczmy wierzchołki G_{n+1} kolejno jako $a_1, a_2, ..., a_{2^n}$ – cześć A oraz $b_1, b_2, ..., b_{2^n}$ – część B, przy czym a_i jest połączone właśnie z b_i.

Ścieżka Hamiltonowska w grafie G_{n+1} będzie się składać z 3 cześći:

- Na mocy założenia istnieje ścieżka zaczynająca się w a_1 przechodząca przez wszystkie wierzchołki A. Możemy ją przejść od tyłu. Wówczas przejdziemy wszystkie wierzchołki częsci A kończąc w a_1.
- Następnie przedziemy krawędzią między a_1 i b_1 do części B.
- Na mocy założenia z punktu b_1 da się poprowadzić ścieżkę, która przejdzie przez każdy z wierzchołków części B dokładnie raz.

Łatwo zauważyć, że podany sposób przejścia grafu G_{n+1} tworzy ścieżkę Hamiltonowską.

Zadanie 1

Wykazać, że suma miar kątów w n-kącie wypukłym wynosi $(n-2)\cdot 180°$.

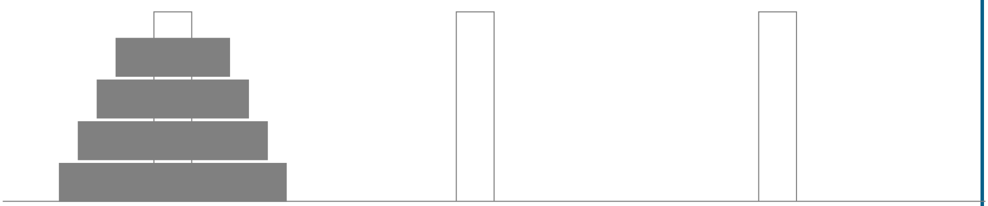
Zadanie 2

Wykazać, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi tożsamość

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Zadanie 3

Dana jest nastepująca gra, zwana *wieżami Hanoi*. Na początku ułożono n dysków na jednej igle tak jak na rysunku. W każdym ruchu gracz może przemieścić dysk, wraz z wszystkimi dyskami nań leżącymy, na inną igłę, przy czym dysk ten nie może zostać położony na dysk o innej średnicy. Wykazać, że gracz jest w stanie przenieść wszystkie dyski na trzecią igłę.



Zadanie 4

W przestrzeni danych jest $n \geqslant 3$ punktów, że żadne trzy z nich nie leżą na jednej prostej. Każde dwa z tych punktów połączono odcinkiem o kolorze zielonym lub czerwonym. Wykazać, że można wybrać tak jeden z tych kolorów, aby każde dwa z danych punktów były połączone odcinkiem lub łamaną tego koloru.

Zadanie 5

Dany jest ciąg liczb rzeczywistych

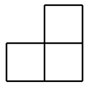
$$a_0 \neq 0,1, \quad a_1 = 1-a_0, \quad a_{n+1} = 1-a_n(1-a_n).$$

Wykazać, że dla wszystkich n

$$a_1a_2\ldots a_n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)=1.$$

Zadanie 6

Wykazać, że planszę o wymiarach $2^n \times 2^n$ dla pewnego $n \geqslant 1$ z usuniętym jednym z rogów da się przykryć pewną liczbą L klocków(takich jak na rysunku). Klocki można obracać.



Zadanie 7

Niech n będzie nieparzystą liczbą naturalną, a liczby x_1, x_2, ..., x_n będa parami różne. Dla każdych dwóch liczb x_i oraz x_j zapisano na tablicy wartość bezwzględną ich różnicy. Wykazać, że można podzielić zapisane liczby na dwa zbiory o równej sumie.

Równania funkcyjne

Przykład 1

Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$, równanie

$$f(x+y) = f(x) - f(y).$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że skoro dane równanie jest spełnione dla wszystkich liczb rzeczywistych x i y to jest spełnione w szczególności dla $x = y = 0$. Wówczas

$$f(0) = f(0) - f(0) = 0.$$

Podstawiając do wyjściowej równości $x = 0$ otrzymujemy

$$f(y) = f(0) - f(y).$$

Na mocy wyżej wykazanej zależności $f(y) = 0$ mamy

$$\begin{gathered} f(y) = -f(y) \\ f(y) = 0. \end{gathered}$$

Wykazaliśmy, że $f(x) = 0$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x. Pozostaje sprawdzić, że istotnie taka funkcja spełnia warunki zadania. Zauważmy, że wówczas

$$f(x+y) = 0 = f(x) - f(y).$$

Metodę, polegająca na podstawianiu szczególnych wartości do danego równania, jest najważniejszym narzędziem w walce z równaniami funkcyjnymi. Często, aby zadania rozwiązać, należy użyć jej kilka lub nawet kilkanaście razy.

Należy zaznaczyć, że bardzo często rozwiązując równanie funkcyjne, wyznacza się zbiór funkcji, które mogą spełniać dane równanie. Jednak często nie oznacza to, że muszą one go spełniać, gdyż podstawianie zazwyczaj nie jest przejściem równoważnym. Dlatego należy zawsze w swoim rozwiązaniu zawrzeć sprawdzenie tego, czy otrzymane funkcje istotnie działają. Brak takiego sprawdzenie w większości przypadków skutkuje obniżeniem oceny za dane zadanie.

Przykład 2

Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równanie

$$f(2f(x) + f(y)) = 2x + f(y).$$

Rozwiązanie

Rozwiązanie rozpoczniemy od wykazania następującego lematu.

Lemat 1. Dla każdego $a \in \mathbb{R}$ istnieje $x \in \mathbb{R}$, że $f(x) = a$.

Podstawmy $\dfrac{a - f(y)}{2}$ w miejsce zmiennej x

$$f\left(f\left(\frac{a - f(y)}{2}\right) + f(y)\right) = 2(\frac{a - f(y)}{2}) + f(y) = a.$$

Zauważmy, że z otrzymanej równości wynika teza lematu – liczbę a można wybrać dowolnie, zaś po prawej stronie otrzymamy argument, dla którego funkcja przyjmie tę wartość.

Korzystając z lematu, podstawmy w miejsce y taką liczbę a, aby $f(a) = -2f(a)$. Wówczas

$$f(0) = 2x - 2f(x)$$
$$f(x) = x + \frac{1}{2}f(0).$$

Podstawiając do powyższej równowści $x = 0$ otrzymujemy, że $f(0) = 0$. Stąd

$$f(x) = x + \frac{1}{2}f(0) = x.$$

Sprawdzamy, że funkcja $f(x) = x$ istotnie spełnia warunki zadania.

W powyższym rozumowaniu kluczowe było wykazanie, że dana funkcja przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste – inaczej mówiąc jest surjekcją. Mogliśmy także wykazać więcej, mianowicie, że dana funkcja jest różnowartościowa. Zakładając, że $f(a) = f(b)$ dla pewnych liczb a, b podstawiamy w miejsce (x, y) kolejno $(a, 0)$ i $(b, 0)$ otrzymując

$$f(2f(a) + f(y)) = 2a + f(y) \quad \text{oraz} \quad f(2f(b) + f(y)) = 2b + f(y).$$

Na mocy wyżej założonej równości lewe strony obu zależności są sobie równe. Stąd prawe również, skąd $a = b$. Implikacja $f(a) = f(b) \implies a = b$ jest równoważna temu, że funkcja f jest różnowartościowa.

W większości rozwiązań funkcyjnych konieczne będzie wykonanie wielu „sztampowych" podstawień i spróbować wykazać własności funkcji – chociażby te wspomniane wyżej. Niekiedy do rozwiązania zadania potrzebny będzie błyskotliwy pomysł czy niesztampowe połączenie faktów. W innych zaś przypadkach samo rzetelne i uważne próbowanie znanych trików może okazać się wystarczające.

Zadanie 1

Znajdź wszystkie funkcje $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równanie

$$f(x) + f(y) = f(xy).$$

Zadanie 2

Znajdź wszystkie funkcje $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równanie

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y.$$

Zadanie 3

Znajdź wszystkie funkcje $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równanie

$$f(x^2 y) = f(xy) + yf(f(x) + y).$$

Zadanie 4

Znajdź wszystkie funkcje $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równanie

$$2f(x) + f(1 - x) = x^2.$$

Zadanie 5

Znajdź wszystkie funkcje $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równanie

$$f(x + y) = f(f(x)) + y + 1.$$

Zadanie 6

Znajdź wszystkie funkcje różnowartościowe $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równość

$$f(f(x) + y) = f(x + y) + 1.$$

Zadanie 7

Znajdź wszystkie funkcje $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ nierówność

$$f(x^2 + y) + f(y) \geqslant f(x^2) + f(x).$$

Zadanie 8

Znajdź wszystkie funkcje $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ spełniające dla wszystkich $x \in \mathbb{Z}$ równanie

$$f(f(x)) = x + 1.$$

Zadanie 9

Znajdź wszystkie funkcje $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równanie

$$f(x)f(y) = f(x - y).$$

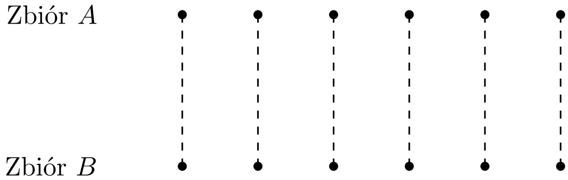
Zadanie 10

Udowodnij, że nie istnieje taka funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość:

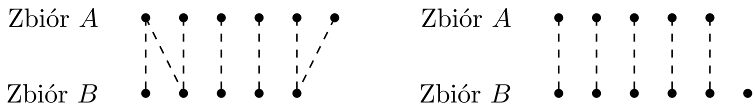
$$f(f(x) + 2f(y)) = x + y.$$

Bijekcje i bajki kombinatoryczne

W tym rozdziale będziemy analizować różne zbiory i relacje między nimi. W części zadań trzeba będzie pokazać, że pewne dwa zbiory mają tyle samo elementów. Jedną z metod dowodzenia tego typu stwierdzeń jest połączenie elementów danych zbiorów w pary. Takie przyporządkowanie nazywamy *bijekcją*.



Aby stwierdzić czy przyporządkowanie jest bijekcją wystarczy sprawdzić, czy każdy element jednego zbioru jest przyporządkowany do *dokładnie* jednego elementu drugiego zbioru. Poniżej dwa przykłady przyporządkowania, które nie jest bijekcją.



Przykład 1

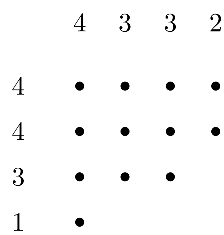
Dla pewnej liczby całkowitej n jej *podziałem* nazwiemy takie liczby $(a_1, ..., a_t)$, że

$$n = a_1 + a_2 + ... + a_t$$
$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant ... \geqslant a_t \geqslant 0.$$

Niech n, k będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Wykazać, że liczba podziałów n, które składają się dokładnie z k liczb jest równa liczbie podziałów n, takich, że największy składnik każdego z nich jest równy dokładnie k.

Rozwiązanie

Weźmy dowolny podział liczby n. Niech $n = a_1 + a_2 + ... + a_t$. Rozpatrzmy jego reprezentację graficzną zwaną diagramem Ferrera. Poniżej narysowano diagram Ferrera dla podziału $12 = 4 + 4 + 3 + 1$. W każdym kolejnym wierszu znajduje się tyle kropek, ile wynosi kolejny składnik z podziału.



Zastanówmy się co znaczą założenia zadania w języku rozpatrywanych diagramów. Jeśli w podziale jest dokładnie k liczb, to diagram Ferrera będzie składał się dokładnie z k wierszy. Jeśli największy składnik podziału jest równy k, to kolumn będzie dokładnie k.

Zauważmy, że patrząc na dowolny diagram Ferrera „od góry" – traktujemy kolumny jako wiersze i vice versa – otrzymamy inny diagram Ferrera. W podanym przykładzie z podziału $12 = 4 + 4 + 3 + 1$ otrzymamy w ten sposób podział $12 = 4 + 3 + 3 + 2$.

Jeśli diagram Ferrera przedstawiał podział n, który składa się dokładnie z k liczb, to podział otrzymany w powyższy sposób ma największy składnik każdego z nich jest równy dokładnie k. Obie z tych własności są równoważne temu, że diagram na k wierszy.

Powyższe przyporządkowanie łączy elementy danych w zadaniu zbiorów w pary – dokładnie jeden podział pierwszego rodzaju z dokładnie jednym podziałem drugiego rodzaju. Rysując diagram dla pewnego podziału otrzymamy dokładnie jeden podział z drugiego zbioru, więc to parowanie jest dobre. Stąd wynika, że rozpatrywane zbiory mają tyle samo elementów.

Pokazaliśmy, że pewne dwa zbiory mają tę samą liczbę elementów. Teraz spróbujemy za pomocą kombinatoryki udowodnić równość algebraiczną.

Przykład 2

Wykazać, że dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych n, k zachodzi równość

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n.$$

Rozwiązanie

Na imprezę przyszło n matematyczek. Każda z nich wzięła kapelusz, czapkę lub przyszła bez okrycia głowy. Obliczmy ile różnych wariantów nakryć głowy mogło się zdarzyć na dwa sposoby.

1. Każda z dziewczyn mogła wybrać jedną z trzech opcji ubioru, było ich n, więc liczba możliwości wynosi 3^n.
2. Przyjmijmy, że $n - k$ dziewczyn nie przyniosło żadnego nakrycia głowy. Wówczas możemy wybrać te dziewczyny na $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ sposobów. Następnie każda z pozostałych k dziewczyn wybrała jedno z dwóch dostępnych nakryć głowy. Więc mogą to zrobić na 2^k sposobów. Z reguły mnożenia wynika, że dla ustalonej liczby k jest dokładnie $\binom{n}{k}2^k$ wariantów. Sumując po wszystkich k otrzymujemy $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$.

Obliczając jedną rzecz na dwa sposoby otrzymaliśmy liczby, które muszą być równe.

Rozumowania podobne do powyższego nazywane są bajkami kombinatorycznymi.

Zadanie 1

Dane są liczby całkowite n i k. Wykaż, że

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Zadanie 2

Wyznacz liczbę podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3, ..., 10\}$, których suma wynosi co najmniej 27.

Zadanie 3

Udowodnić, że dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych n, k zachodzi równość

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Zadanie 4

Dana jest liczba pierwsza $p \geqslant 3$. Niech A_k oznacza zbiór permutacji $(a_1, a_2, ..., a_p)$ zbioru $\{1, 2, 3, ..., p\}$, dla których liczba

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + ... + pa_p - k$$

jest podzielna przez p. Wykazać, że zbiory A_1, A_2 mają tyle samo elementów.

Zadanie 5

Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych n, k liczba (kn)! jest podzielna przez liczbę $(n!)^k \cdot k!$.

Zadanie 6

Dana jest liczba całkowita n. Niech T_n oznacza liczbę takich podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3, ..., n\}$, że ich średnia arytmetyczna jest liczbą całkowitą. Wykazać, że liczba $T_n - n$ jest parzysta.

Zadanie 7

Niech n, k, r będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Wykaż, że

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{n+k}{k} = \binom{n+r+1}{r}.$$

Liczby pierwsze i reszty z dzielenia

Ten rozdział będzie nieco bardziej teoretyczny niż poprzednie. Zadania także będą trudniejsze – zachęcamy do skorzystania ze wskazówek i głębokiego przestudiowania rozwiązań. Chcemy wyrobić u czytelnika intuicję dotyczącą działań na resztach z dzielenia przez pewną liczbę pierwszą. Od czytelniczki/czytelnika wymaga się, aby znał własności kongruencji – opisano je chociażby w Gazetce OMJ „Kwadrat” nr 7.

We wszystkich poniższych zadaniach przez a, b będziemy oznaczać liczby całkowite, zaś przez p dowolną liczbę pierwszą. Przez $x|y$ będziemy oznaczać fakt, że liczba x jest dzielnikiem liczby y.

Twierdzenie 1

Jeśli liczba ab jest podzielna przez p, to wówczas co najmniej jedna z liczb a, b jest podzielna przez p.

Zauważmy, że założenie o pierwszości liczby p jest konieczne. Chociażby liczba $4 \cdot 9 = 36$ dzieli się przez 6, ale żadna z liczb 4, 9 nie jest podzielna przez 6.

Zachęcamy do samodzielnej próby wykazania poniższych lematów. Poniżej, czcionką odwróconą, zapisano wskazówki.

Lemat 1

Udowodnić, że jeśli $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$ dla pewnej liczby pierwszej p, to

$$x \equiv 1 \pmod{p} \quad \text{lub} \quad x \equiv -1 \pmod{p}.$$

Podpowiedź: Zapisz założenia i tezę zadania bez użycia modulo.

Dowód

Zauważamy, że zapis $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$ jest równoważny zapisowi

$$p \mid x^2 - 1 = (x-1)(x+1).$$

Skoro p jest liczbą pierwszą, to na mocy Twierdzenia 1 $p \mid x - 1$ lub $p \mid x + 1$, a to jest równoważne temu, co było do wykazania.

Lemat 2

Liczba a nie jest podzielna przez p. Udowodnić, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita k, że

$$a^k \equiv 1 \pmod{p}.$$

Podpowiedź: Udowodnij, że istnieją takie r i s, że $a^r \equiv a^s \pmod{p}$.

Dowód

Rozpatrzmy ciąg $(1,\ a^1,\ a^2,\ a^3,\ \ldots)$. Zauważamy, że ma on nieskończenie wiele elementów, a reszt z dzielenia przez p jest skończenie wiele. Z Zasady Szufladkowej Dirichleta mamy więc, że istnieją takie liczby r oraz s – załóżmy, że $r \geqslant s$ – że

$$a^r \equiv a^s \pmod{p}.$$

Jest to równoważne temu, że
$$p \mid a^s(a^{r-s} - 1).$$
Skoro a nie jest podzielna przez p, to $p \mid a^{r-s} - 1$, to zachodzi $a^{r-s} \equiv 1 \pmod p$.

Odwrotności modulo p

Z Lematu 2 można wywnioskować, że dla każdej liczby a, która nie jest podzielna przez p istnieje pewna liczba $b \in \{1, 2, ..., p-1\}$, że

$$ab \equiv 1 \pmod p.$$

Wystarczy wziąć $b = a^{k-1} \bmod p$.

Wykażemy teraz, że w zbiorze $\{1, 2, ..., p-1\}$ jest dokładnie jedna taka liczba b. Załóżmy, że dla pewnych $b, c \in \{1, 2, ..., p-1\}$

$$ab \equiv ac \equiv 1 \pmod p.$$

Wówczas
$$p \Big| ab - ac = a(b-c) \implies p \Big| b - c,$$
gdyż liczba a nie jest podzielna przez p. Skoro $b, c \in \{1, 2, ..., p-1\}$, to

$$-p < b - c < p.$$

Skoro $p \Big| b - c$, to $b - c = 0$, czyli $b = c$.

Przyjmiemy, że liczba b jest *odwrotnością* liczby a modulo p. Zapiszemy $b = a^{-1} \pmod p$.

Lemat 3

Dla dowolnej liczby a, która nie jest podzielna przez p ciąg

$$(a \pmod p),\ \ 2a \pmod p),\ \ 3a \pmod p), ...,\ \ (p-1) \cdot a \pmod p))$$

jest permutacją ciągu
$$(1,\ 2,\ 3,\ ...,\ p-1).$$

Podpowiedź: Wykaż, że $ai \not\equiv aj \pmod p$, jeśli $i \not\equiv j \pmod p$.

Dowód

Pokażmy, że jeśli $i \not\equiv j \pmod p$, to $ai \not\equiv aj \pmod p$. Załóżmy, że

$$ai \equiv aj \pmod p$$

dla pewnych $i,\ j$. Skoro p nie dzieli a, to istnieje odwrotność a modulo p. Mnożąc obie strony przez a^{-1} – lub równoważnie dzieląc przez a otrzymujemy

$$i \equiv j \pmod p,$$

co dowodzi postulowanej implikacji.

Rozpatrzmy liczby $a,\ 2a,\ (p-1)a$. Oczywiście żadna z nich nie jest podzielna przez p. Z tego, że tych liczb jest $p-1$, niezerowych reszt z dzielenia przez p również jest $p-1$, oraz te liczby dają parami różne reszty niezerowe z dzielenia przez p, wynika teza.

Małe twierdzenie Fermata

Dana jest liczba a, która nie jest podzielna przez p. Wykazać, że

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Dowód

Korzystając z poprzedniego lematu mamy, że ciąg

$$(a \pmod{p}, \ \ 2a \pmod{p}, \ \ 3a \pmod{p}, ..., \ \ (p-1) \cdot a \pmod{p})$$

jest permutacją ciągu

$$(1, \ 2, \ 3, \ ..., \ p-1).$$

Skoro te ciągi zawierają te same elementy modulo p, tylko, że w innej kolejności, to iloczyny tych elementów będą dawały taką samą resztę z dzielenie przez p. Więc

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (p-1) = a \cdot 2a \cdot 3a \cdot ... \cdot (p-1)a \pmod{p},$$

$$(p-1)! \equiv a^{p-1}(p-1)! \pmod{p}.$$

Zauważmy, że $(p-1)! \not\equiv 0 \pmod{p}$. Mnożąc przystawanie stronami przez odwrotność liczby $(p-1)!$ otrzymujemy tezę.

Zadanie 1

Dana jest liczba pierwsza p. Udowodnić, że istnieje taka liczba całkowita n, że

$$2^n \equiv n \pmod{p}.$$

Zadanie 2

Dana jest liczba pierwsza $p \geqslant 3$. Niech

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{p-1} = \frac{a}{b}$$

dla pewnych dodatnich liczb całkowitych a, b. Udowodnić, że $p \big| a$.

Zadanie 3

Udowodnij, że istnieje n, dla którego $2^n + 3^n + 6^n \equiv 1 \pmod{p}$.

Zadanie 4

Wykazać, że zachodzi przystawanie

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

Nierówności między średnimi

Zakładamy, że czytelniczka/czytelnik zna metodę dowodzenia nierówności poprzez zwinięcie do kwadratu. Zaprezentujemy jedno twierdzenie – nierówność między średnimi – oraz kilka metod pracy z nierównościami.

Nierówności między średnimi

Dane są dodatnie liczby rzeczywiste $a_1,\ a_2,\ a_3,\ ...,\ a_n$.
Średnią kwadratową nazywamy wartość

$$QM = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}}.$$

Średnią arytmentyczną nazywamy wartość

$$AM = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}.$$

Średnią geometryczną nazywamy wartość

$$GM = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}.$$

Średnią harmoniczną nazywamy wartość

$$HM = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}.$$

Wówczas zachodzą nierówności

$$QM \geqslant AM \geqslant GM \geqslant HM,$$

przy czym równość w którymkolwiek przypadku zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_1 = a_2 = ... = a_n.$$

Skróty QM, AM, GM, HM pochodzą z języka angielskiego i oznaczają odpowiednio *quadratic mean*, *arithmetic mean*, *geometric mean*, *harmonic mean*. Zaprezentujemy dowód jednej z podanych nierówności. Pozostałe są nieco bardziej złożone, więc nie będziemy ich przytaczać.

Dowód nierówności między średnimi arytmetyczną a geometryczną

Cześć 1. Dowód $n = 2$.

Chcemy wykazać, że zachodzi nierówność

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1 a_2}.$$

Jest ona równoważna prawdziwej nierówności

$$a_1 - 2\sqrt{a_1 a_2} + a_2 = (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geqslant 0.$$

Cześć 2. Dowód dla n postaci $n = 2^k$, $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Będziemy indukować się po k. Dla $k = 0$ nierówność jest oczywista. Załóżmy, że zachodzi dla k, wykażemy, że zachodzi dla $k + 1$.
Zauważmy, że

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^k}}{2^k} + \frac{a_{2^k+1} + a_{2^k+2} + \ldots + a_{2^{k+1}}}{2^k}\right)$$

Korzystając z założenia indukcyjnego – to jest nierówności dla $n = 2^k$ mamy

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^k}}{2^k} &\geqslant \sqrt[2^k]{a_1 a_2 \ldots a_{2^k}} \\ \frac{a_{2^k+1} + a_{2^k+2} + \ldots + a_{2^{k+1}}}{2^k} &\geqslant \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} a_{2^k+2} \ldots a_{2^{k+1}}} \end{aligned}$$

Zauważmy teraz, że na mocy znanej nierówności $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$ mamy

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt[2^k]{a_1 a_2 \ldots a_{2^k}} + \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} a_{2^k+2} \ldots a_{2^{k+1}}}\right) \geqslant \sqrt[2^{k+1}]{a_1 a_2 \ldots a_{2^{k+1}}}$$

Łącząc powyższe nierówności dowód nierówności dla n będącej potęgą liczby 2.

Cześć 3. Z faktu, że nierówność zachodzi dla $n \geqslant 2$ wynika, że zachodzi dla $n - 1$.

Oznaczmy

$$AM = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1} \quad \text{oraz} \quad GM = \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}.$$

Skoro nierówność zachodzi dla liczby n to mamy

$$AM = \frac{(n-1)AM + AM}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + AM}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1} \cdot AM}.$$

Podnosząc powyższą równość do n potęgi stronami otrzymujemy

$$\begin{aligned} &(AM)^n \geqslant a_1 a_2 \ldots a_{n-1} AM, \\ &(AM)^{n-1} \geqslant a_1 a_2 \ldots a_{n-1}, \\ &AM \geqslant \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}} = GM, \end{aligned}$$

co należało wykazać.

Pozostaje zauważyć, że z części 3 i 4 wynika nierówność dla dowolnego n. Możemy bowiem rozpatrzyć takie k, że $2^k > n$ i zastosować $2^k - n$ razy implikację z części czwartej.

■

Przykład 1

Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b i c, dla których $a + b + c = 1$ zachodzi nierówność

$$\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1} \leqslant \sqrt{15}.$$

Rozwiązanie

Stosując nierówność miedzy średnimi: arytmetyczną i kwadratową otrzymujemy

$$\sqrt{\frac{\left(\sqrt{2a+1}\right)^2+\left(\sqrt{2b+1}\right)^2+\left(\sqrt{2c+1}\right)^2}{3}} \geqslant \frac{\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1}}{3}.$$

Lewa strona powyższej równości jest równa

$$\sqrt{\frac{\left(\sqrt{2a+1}\right)^2+\left(\sqrt{2b+1}\right)^2+\left(\sqrt{2c+1}\right)^2}{3}} = \sqrt{\frac{2a+1+2b+1+2c+1}{3}} = \sqrt{\frac{5}{3}}.$$

Łącząc powyższe nierówności otrzymujemy

$$\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1} \leqslant \sqrt{\frac{5}{3}}\cdot 3 = \sqrt{15}.$$

■

Przykład 2

Wykazać, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c i d, dla których zachodzi równość $a+b+c+d=4$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a}{a^3+4}+\frac{b}{b^3+4}+\frac{c}{c^3+4}+\frac{d}{d^3+4} \leqslant \frac{4}{5}.$$

Rozwiązanie

Wykażemy, że dla dowolnej liczby x zachodzi nierówność

$$\frac{x}{x^3+4} \leqslant \frac{2x+3}{25}.$$

Istotnie mamy bowiem

$$\begin{aligned}
25x \leqslant (2x+3)(x^3+4) = 2x^4+3x^3+8x+12,\\
17x \leqslant 2x^4+3x^3+12,\\
x = \sqrt[17]{\left(x^4\right)^2\cdot\left(x^3\right)^3\cdot 1^{12}} \leqslant \frac{2x^4+3x^3+12}{17}.
\end{aligned}$$

Ostatnia zależność jest prawdziwa na mocy nierówności miedzy średnią arytmetyczną i geometryczną.
Korzystając z powyższej nierówności otrzymujemy

$$\frac{a}{a^3+4}+\frac{b}{b^3+4}+\frac{c}{c^3+4}+\frac{d}{d^3+4} \leqslant \frac{2a+3}{25}+\frac{2b+3}{25}+\frac{2c+3}{25}+\frac{2d+3}{25} = \frac{4}{5}.$$

■

Przykład 3

Dane są dodatnie liczby rzeczywiste $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, że ich suma wynosi 1. Wyznaczyć największą możliwą wartość wyrażenia

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+...+a_n^2.$$

Rozwiązanie

W powyższym zadaniu narzuca się skorzystanie z nierówności miedzy średnimi. Jednak jeśli czytelniczka/czytelnik próbował je rozwiązać, to może zobaczyć, że takie próby kończą się niepowodzeniem.

Niezwykle pomocne w ocenieniu, czy metoda szacowania przez średnie pozwoli rozwiązać zadanie jest zobaczenie na przypadek, w którym zachodzi równość lub osiągane jest ekstremum. W tym zadaniu narzucają się dwie kandydatury, które są warte sprawdzenia:

$$a_1 = 1,\ a_2 = \ldots = a_n = 0 \quad \text{oraz} \quad a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = \frac{1}{n}.$$

Spróbujemy wykazać, że

$$1 \geqslant a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2.$$

We wszystkich nierównościach między średnimi równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie a_i są sobie równe. W innym przypadku nierówność jest ostra. Zaś w powyższej nierówności równość zachodzi wtedy, kiedy wszystkie liczby nie są równe. Wykonując szacowanie za pomocą średnich na tych liczbach otrzymamy, że dla $a_1 = 1$, $a_2 = \ldots = a_n = 0$ zachodzi ostra nierówność. A tak być nie może, bo wówczas zachodzi równość. Dlatego musimy spróbować innych metod.
Istotnie, wystarczy zauważyć, że zachodzi nierówność

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \leqslant (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 = 1.$$

■

Podobne rozumowanie mogło być pomocne przy rozwiązywaniu Przykładu 2. Wówczas równość zachodzi dla $a = b = c = d = 1$. Załóżmy, że wpadliśmy na pomysł użycia nierówności AM-GM w mianowniku. Wówczas

$$\frac{a}{a^3+4} + \frac{b}{b^3+4} + \frac{c}{c^3+4} + \frac{d}{d^3+4} \leqslant \frac{a}{4a^{\frac{3}{2}}} + \frac{b}{4b^{\frac{3}{2}}} + \frac{c}{4c^{\frac{3}{2}}} + \frac{d}{4d^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{8\sqrt{a}} + \frac{1}{8\sqrt{b}} + \frac{1}{8\sqrt{c}} + \frac{1}{8\sqrt{d}},$$

co dla $a = b = c = d = 1$ jest większe od $\frac{5}{4}$. Więc to szacowanie nie doprowadzi nas do rozwiązania zadania, gdyż nierówność

$$\frac{1}{8\sqrt{a}} + \frac{1}{8\sqrt{b}} + \frac{1}{8\sqrt{c}} + \frac{1}{8\sqrt{d}} \leqslant \frac{5}{4}$$

nie jest prawdziwa.

Zadanie 1

Wykazać, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi

$$x^2 + \frac{1}{x} \geqslant \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}.$$

Zadanie 2

Dane są takie dodatnie liczby rzeczywiste $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n$, że $a_1a_2a_3\ldots a_n = 1$. Wykazać, że

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdot \ldots \cdot (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) \geqslant 2^n.$$

Zadanie 3

Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych zachodzi nierówność

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Zadanie 4

Dane są takie dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c, że $abc = 1$. Wykazać, że

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant a + b + c.$$

Zadanie 5

Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} \geqslant \frac{3a + 2b - c}{4}.$$

Konstrukcje

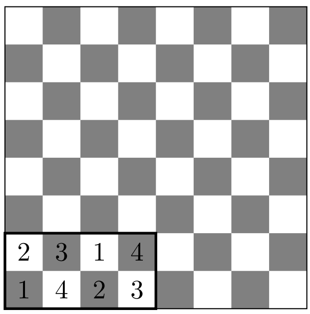
W tym rozdziale będziemy obracać się wokół zadań, które polegają na konstruowaniu pewnych obiektów, spełniających pewne warunki. Najpierw przyjrzymy się zadaniu, w którym mamy wyznaczyć pewne maksimum. W takiej sytuacji musimy zarówno pokazać przykład, że maksimum jest osiągane, jak i udowodnić, że nie da się osiągnąć większej wartości.

Przykład 1

Wyznaczyć maksymalną liczbę skoczków, które można umieścić na szachownicy 8×8, aby żadne dwa z nich się nie biły.

Rozwiązanie

Wykażemy, że szukaną liczbą jest 32.
Najpierw pokażemy, że istotnie można postawić tyle skoczków na szachownicy. Zauważmy, że rozpatrując standardowe kolorowanie szachownicy i stawiając skoczki na każdym z 32 pól jednego koloru, żadne dwa z nich nie będą się biły.



Podzielmy szachownice na 8 prostokątów o wymiarach 4×2 – takich jak na rysunku. Wykażemy, że wewnątrz każdego prostokąta mogą stanąć co najwyżej cztery skoczki. Istotnie – numerując pola tak jak na rysunku, nie jest możliwe aby na obu polach z tym samym numerem stały skoczki. Więc na całej szachownicy mogą stanąć co najwyżej $8 \cdot 4 = 32$ skoczki.

■

W powyższym zadaniu konieczne było zarówno udowodnienie, że nie da się postawić więcej niż 32 skoczków, jak i wykazanie, że istnieje szukane ustawienie 32 skoczków. W tego typu problemach warto uważnie poszukać maksymalnego ustawienia, gdyż w przypadku jego przeoczenia, nasze próby dowodzenia, że znaleziona konfiguracja jest maksymalna będą bezsensowne.

Przykład 2

Niech $S(k)$ oznacza sume cyfr liczby k w zapisie dziesiętnym. Dodatnią liczbę całkowitą n nazwiemy *piękną* jeśli zachodzi równość $S(n) = S(n^2)$. Wyznaczyć wszystkie wartości jakie przyjmuje $S(n)$ dla liczb pięknych n.

Rozwiązanie

W rozwiązaniu poniższego zadania potrzebna będzie obserwacja, że suma cyfr liczby k daje taką samą resztę z dzielenia przez 9 jak liczba k. Mamy

$$n^2 \equiv S(n^2) = S(n) \equiv n \pmod 9.$$

Zauważam, że jest to możliwe jedynie dla $n \equiv 0, 1 \pmod 9$ – wystarczy sprawdzić wszystkie możliwe n. Stąd $S(n) \equiv 0, 1 \pmod 9$.

Po otrzymaniu powyższej obserwacji można postawić hipotezę, że dla wszystkich liczb dodatnich postaci $k \equiv 0, 1 \pmod 9$ istnieje liczba piękna n, że $S(n) = k$. Aby zweryfikować, czy hipoteza ma sens warto sprawdzić, czy jest ona prawdziwa dla kilku małych wartości k. Łatwo sprawdzić, że liczby 9 i 10 są piękne oraz $S(9) = 9$ i $S(10) = 1$. Poszukując większych wartości $S(n)$ dla liczb pięknych otrzymujmey $S(99) = 18$ i $S(199) = 19$. Łatwo też sprawdzić, że 99 i 199 są piękne. Te obserwacje, poczynione na kilku najmniejszych wartościach, naprowadzają nas na dalszą część rozwiązania.

Rozpatrzmy liczbę $a = 10^{k+1} - 1$. Wówczas

$$S(a) = S(\underbrace{99...9}_{k+1}) = 9(k+1) = S(\underbrace{99...9}_{k}8\underbrace{00...0}_{k}1) = S(10^{2k+2} - 2 \cdot 10^{k+1} + 1) = S(a^2).$$

Następnie weźmy liczbę $b = 2 \cdot 10^{k+1} - 1$. Wówczas

$$S(b) = S(1\underbrace{99...9}_{k}) = 9k + 1 = S(3\underbrace{99...9}_{k-1}6\underbrace{00...0}_{k-1}1) = S(4 \cdot 10^{2k+2} - 4 \cdot 10^{k+1} + 1) = S(b^2).$$

Zauważamy, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowiej k liczby a, b są piękne oraz $S(a) = 9(k+1)$ i $S(b) = 9k + 1$.
Łącząc powyższe wnioski otrzymujemy, że szukanymi liczbami są wszystkie dodatnie liczby całkowite dające resztę 0 lub 1 z dzielenia przez 9.

■

Konstruowanie małych przykładów często, choć nie zawsze, pomaga postawić hipotezy co do przypadków ogólnych. Dlatego, gdy nie umiemy rozwiązać zadania, warto spróbować zobaczyć na szczególne, niewielkie przypadki.

Przykład 3

Wykazać, że istnieje nieskończony ciąg liczb naturalnych taki, że żaden wyraz tego ciągu i żadna suma dowolnej liczby wyrazów tego ciągu nie jest potęgą liczby naturalnej o wykładniku całkowitym większym od 1.

Rozwiązanie

Kluczową obserwacją, która pozwoli nam rozwiązać to zadanie jest fakt, że jeśli pewna liczba naturalna n jest podzielna przez pewną liczbę pierwszą p, ale nie jest podzielna przez p^2, to nie może być ona potęgą liczby całkowitej. Istotnie, bowiem jeśli $n = a^k$ dla pewnych liczb naturalnch a, $k \geqslant 2$ to jeśli $p \mid a^k$, to $p \mid a$, czyli $p^k \mid a^k = n$.

Niech $p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5,\ ...$ będzie ciągiem kolejnych liczb pierwszych. Rozpatrzmy ciąg $\{a_n\}_{n \geqslant 1}$ dany jako

$$a_i = (p_1 p_2 ... p_i)^2 \cdot p_{i+1}.$$

Wówczas jeśli $i_1 < i_2 < \ldots < i_s$, to każda z liczb a_{i_2}, a_{i_3}, ..., a_{i_s} jest podzielna przez $p_{i_1+1}^2$. Zaś liczba a_{i_1} jest podzielna przez p_{i_1+1}, ale nie jest podzielna przez $p_{i_1+1}^2$. Stąd suma

$$a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i_3} + \ldots + a_{i_s}$$

równiez ma tę własność, więc nie może być potęga liczby całkowitej.

■

Zadanie 1

Wykazać, że można pokolorować 40 pól na nieskończonej szachownicy, tak, aby nie istniał prostokąt utworzony z pól tej szachownicy zawierający dokładnie 20 pokolorowanych pól.

Zadanie 2

Udowodnij, że punkty płaszczyzny można tak pokolorować dziewięcioma kolorami, aby żadne dwa punkty odległe o 1 nie były tego samego koloru.

Zadanie 3

Wykazać, że każdy trójkąt można podzielić na 3000 czworokątów wypukłych, tak, aby każdy z nich dało się wpisać w okrąg oraz opisać na okręgu.

Zadanie 4

Wykazać, że można pokolorować każdą dodatnią liczbę całkowitą na jeden z 1000 kolorów, tak aby

- każdy z kolorów był użyty nieskończenie wiele razy;
- dla dowolnych takich liczb całkowitych a, b, c, że $ab = c$, pewne dwie spośród nich sa jednakowego koloru.

Zadanie 5

Łódka może zabrać w rejs po jeziorze dokładnie 7 osób. Udowodnij. że można tak zaplanować rejsy 49-osobowej wycieczki, aby każdych dwóch uczestników płynęło ze sobą dokładnie raz.

Zadanie 6

Jaś zapisał pewną skończoną liczbę liczb rzeczywistych na tablicy. Następnie zaczął wykonywać ruchy. W każdym ruchu wybiera dwie równe liczby a, a, zmazuje je i zapisuje liczby $a + 100$, $a + 2020$. Rozstrzygnąć, czy Jaś może zapisać na początku takie liczby, że będzie mógł wykonywać ruchy w nieskończoność.

Wielomiany

Definicje

Wyrażenie algebraiczne postaci

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

dla pewnych liczb rzeczywistych $a_n \neq 0$, a_1, a_2, ..., a_{n-1}.

- Liczbę n nazywamy stopniem tego wielomianu i oznaczamy jako $deg\ W = n$.
- *Współczynnikami* nazywamy liczby a_0, a_1, ..., a_n.
- Współczynnik przy najwyższej potędze x – w tym przypadku a_n nazywamy *współczynnikiem wiodącym.*
- Gdy współczynnik wiodący jest równy 1 to powiemy, że wielomian jest *unormowany.*
- Liczbę α, dla której zachodzi równość $W(\alpha) = 0$ nazywamy *pierwiastkiem* wielomianu W.

Na początku zachęcamy do samodzielnego zmierzenia się z poniższym zadaniem. Jego rozwiązanie wyrobi intuicję co do działania dzielenia wielomianów.

Przykład 1

Znaleźć wszystkie nieujemne liczby całkowite n, dla których liczba $n^5 + 3n^2 + 1$ jest podzielna przez liczbę $n^2 + 2$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że zachodzą równości

$$\begin{aligned}\frac{n^5+3n^2+1}{n^2+1} &= \frac{n^3(n^2+1)-n^3+3n^2+1}{n^2+1} = n^3 + \frac{-n^3+3n^2+1}{n^2+1} = \\ &= n^3 + \frac{-n(n^2+1)+3n^2+n+1}{n^2+1} = n^3 - n + \frac{3n^2+n+1}{n^2+1} = \\ &= n^3 - n + \frac{3(n^2+1)+n-2}{n^2+1} = n^3 - n + 3 + \frac{n-2}{n^2+1},\end{aligned}$$

z czego wynika, że liczba $\frac{n^5+3n^2+1}{n^2+1}$ będzie całkowita wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $\frac{n-2}{n^2+1}$ będzie całkowita. Gdy $n = 0$ to rozpatrywana liczba jest całkowita. Łatwo wykazać, że dla $n \neq 0$ zaachodzi nierówność $n^2 + 1 > |n - 2|$. Stąd moduł liczby $\frac{n-2}{n^2+1}$ jest mniejszy od 1. Jeśli więc ma on być całkowity, to musi być on równy zeru. Jest to prawdą jedynie dla $n = 2$.

Otrzymaliśmy więc, że szukana podzielność zachodzi jedynie dla $n = 0$ i $n = 2$.

■

To co w istocie dokonało się w powyższym rozwiązaniu to jest podzielenie wielomianu $n^5 + 3n^2 + 1$ przez wielomian $n^2 + 1$. Ideą było wyciąganie takich liczb przed ułamek, aby stopień wielomianu w mianowniku spadał. Istotnie – najpierw w mianowniku był wielomian $n^5 + 3n^2 + 1$, następnie $3n^2 + n + 1$, aż w końcu $n - 2$. Zauważmy, że nie jesteśmy w stanie otrzymać w podobny sposób wielomianu o niższym stopniu.

Otrzymaliśmy zależność

$$n^5 + 3n^2 + 1 = (n^3 - n + 3)(n^2 + 1) + (n - 2).$$

Wielomian $n-2$ nazwiemy resztą z dzielenia wielomianu n^5+3n^2+1 przez n^2+1. Teraz sformalizujemy nasze intuicje.

Twierdzenie 1

Dane są wielomiany o współczynnikach rzeczywistych $W(x)$ i $P(x)$. Wówczas istnieją takie wielomiany o współczynnikach rzeczywistych $G(x)$ i $R(x)$, że

$$W(x) = G(x) \cdot P(x) + R(x),$$

oraz $deg\ R < deg\ P$.

Dowód

Rozpatrzmy takie przedstawienie $W(x)$ w postaci

$$W(x) = G(x) \cdot P(x) + R(x),$$

gdzie $deg\ R$ jest najmniejsze możliwe. Jeżeli $deg\ R < deg\ P$ to zachodzi teza. Rozpatrzmy przypadek, gdy $deg\ R \geqslant deg\ P$. Niech $deg\ P = n$ oraz $deg\ R = n + k$. Przyjmijmy

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

$$R(x) = b_{n+k}x^{n+k} + b_{n+k-1}x^{n+k-1} + ... + b_1 x + b_0.$$

Zauważmy, że wielomiany $R(x)$ oraz $\frac{b_{n+k}}{a_n}x^k P(x)$ mają równe stopień i współczynnik wiodący. Odejmując je od siebie skróci się on, stąd wielomian $R(x) - \frac{b_{n+k}}{a_n}x^k P(x)$ ma mniejszy stopień niż wielomian $R(x)$. Możemy zapisać

$$W(x) = \left(G(x) + \frac{b_{n+k}}{a_n}x^k\right) \cdot P(x) + \left(R(x) - \frac{b_{n+k}}{a_n}x^k\right),$$

co przeczy temu, że stopień R był minimalny.

$\blacksquare$

Wielomian R nazywamy resztą z dzielenia wielomianu W przez P.

Powiemy, że wielomian W jest *podzielny* przez wielomian P, jeśli reszta z rozpatrywanego dzielenia wynosi 0. Równoważnie istnieje wielomian G, że

$$W(x) = P(x) \cdot G(x).$$

Twierdzenie 2 (Bézout)

Dany jest wielomian $W(x)$ oraz taka liczba rzeczywista α, dla której zachodzi równość $W(\alpha) = 0$. Wówczas $W(x)$ jest podzielny przez $x - \alpha$.

Dowód

Rozpatrzmy dzielenie wielomianu $W(x)$ przez wielomian $x - a$. Możemy zapisać

$$W(x) = G(x) \cdot (x - \alpha) + R(x).$$

Wiemy, że $deg\ R < 1$, czyli R jest stałą. Przymijmy $R(x) = c$. Mamy wówczas

$$W(x) = G(x) \cdot (x - \alpha) + c.$$

Podstawmy $x = \alpha$

$$0 = W(\alpha) = G(x) \cdot (\alpha - \alpha) + c = c.$$

Stąd $c = 0$, czyli możemy zapisać W w postaci

$$W(x) = (x - \alpha) \cdot G(x),$$

co było do wykazania.

■

Niech $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ będą parami różnymi pierwiastkami pewnego wielomianu $W(x)$. Wówczas

$$W(x) = (x - \alpha_1)W_1(x)$$

dla pewnego wielomianu $W_1(x)$. Zauważmy, że $\alpha_2, ..., \alpha_n$ będa pierwiastkami $W_1(x)$, gdyż

$$0 = W(\alpha_i) = (\alpha_i - \alpha_1)W_1(\alpha_i),$$

a pierwiastki są parami różne. Możemy więc kontynuować wyciąganie pierwiastków i otrzymać w ten sposób poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 3

Jeśli wielomian $W(x)$ ma n pierwiastków rzeczywistych $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ to wówczas można go zapisać w postaci

$$W(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot ... \cdot (x - \alpha_n)Q(x),$$

dla pewnego wielomianu $Q(x)$, takiego, że $deg\ Q + n = deg\ W$. W szczególności jeśli W jest stopnia n to $Q(x)$ jest stałą.

Wniosek

Wielomian stopnia n o współczynnikach rzeczywistych, który nie jest stale równy zero, może mieć co najwyżej n różnych pierwiastków rzeczywistych.

Twierdzenie 4

Dane są wielomiany o współczynnikach rzeczywistych $P(x)$ i $Q(x)$ stopnia co najwyżej n. Istnieje $n+1$ liczb rzeczwysitych $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n+1}$, takich, że dla każdego $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ zachodzi równość

$$P(\alpha_i) = Q(\alpha_i).$$

Wówczas $P(x) = Q(x)$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x.

Dowód

Rozpatrzmy wielomian

$$W(x) = P(x) - Q(x).$$

Liczby $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n+1}$ sa jego pierwiastkami. Ma więc on co najmniej $n+1$ pierwiastków i stopień n. Z wyżej przestawionego wniosku wynika więc, że jest to wielomian zerowy. Stąd $P(x) - Q(x) = 0$ dla każdego x, a to trzeba było wykazać.

■

Krotność pierwiastków

Jeśli wielomian W da się zapisać w formie

$$W(x) = (x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \cdot ... \cdot (a - \alpha_n)^{k_n},$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ są parami różne to powiemy, że pierwiastek α_i ma *krotnośc* równą k_i.

Mówienie o zbiorze pierwiastków nie ma większego sensu, gdyż struktura zbióru nie przewiduje czegoś takiego jak element występujący kilkukrotnie. Stąd zdefiniujmy *multizbiór* analogicznie do zbioru, z tym, że jeden element może należeć do niego kilka razy. Będziemy mówić o multizbiorach pierwiastków.

Równość wielomianów

Następujące warunki równości wielomianów są sobie równoważne, tj. gdy zachodzi jeden, to zachodzą wszystkie:

- wielomiany przyjmują równe wartości dla każdej liczby rzeczywistej,
- współczynniki obu wielomianów przy tych samych potęgach są równe,
- multizbiory pierwiastków rzeczywistych są sobie równe.

Wykazanie, że powyższe warunki są równoważne pozostawiamy czytelnikowi, jeśli ma chęć. Po zapoznaniu się z powyższą teorią powinno być to dość łatwe. Przejdźmy teraz do pierwszego nietrywialnego zastosowania wielomianów.

Przykład 2

Dla liczb rzeczywistych a, b zachodzi $ab = cd$ i $a + b = c + d$. Wykazać, że $\{a, b\} = \{c, d\}$.

Rozwiązanie

Rozpatrzmy wielomiany

$$P_1(x) = (x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab,$$

$$P_2(x) = (x - c)(x - d) = x^2 - (c + d)x + cd.$$

Zauważmy, że na mocy założeń mają one równe współczynniki. Stąd te wielomiany są sobie równe, toteż mają równe multizbiory pierwiastków.

■

Dla unormowanego wielomianu drugiego stopnia o pierwiastkach a i b współczynniki wyniosą kolejno 1, $-(a + b)$ oraz ab. Tę obserwacje można uogólnić do Wzorów Viete'a. Poniżej wyprowadzamy je dla wielomianów trzeciego stopnia. Dla większych stopnie wyprowadzenie jest analogiczne.

Wzory Viete'a dla wielomianu stopnia trzeciego

Dany jest wielomian

$$W(x) = a_3(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Wówczas

$$\begin{aligned} -a_3(x_1+x_2+x_3) &= a_2, \\ a_3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3) &= a_1, \\ -a_3x_1x_2x_3 &= a_0, \end{aligned}$$

lub równoważnie

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= -\frac{a_2}{a_3}, \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 &= \frac{a_1}{a_3}, \\ x_1x_2x_3 &= -\frac{a_0}{a_3}. \end{aligned}$$

Zadanie 1

Dany jest niezerowy wielomian $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, dla którego zachodzi równość

$$(x+1)W(x) = (x-2)W(x+1).$$

Wykazać, że każdy pierwiastek rzeczywisty $W(x)$ jest liczbą całkowitą.

Zadanie 2

Wykazać, że jeśli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają

$$\begin{cases} abc = 1 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a + b + c. \end{cases}$$

to co najmniej jedna liczba spośród a, b, c jest równa 1.

Zadanie 3

Niech $n \geqslant 1$ będzie pewną liczbą całkowitą. Wykazać, że wielomian $x^{1001} + x + 1$ jest podzielny przez $x^2 + x + 1$.

Zadanie 4

Dany jest pewien wielomian $P(x)$. Wykazać, że istnieje wielomian $Q(x)$, że zachodzi równość

$$Q(x+1) - Q(x) = P(x).$$

Zadanie 5

Dany jest wielomian $W(x)$ o współczynnikach całkowitych. Wykazać, że jeśli przyjmuje on dla czterech różnych liczb całkowitych wartość 5, to dla żadnego całkowitego argumentu nie przyjmuje wartości 8

Zadanie 6

Paweł i Tomek grają w grę. Paweł ma pewien wielomian $W(x)$ o współczynnikach dodatnich całkowitych stopnia n. Tomek go nie zna, a chce poznać. Może w tym celu wykonywać ruchy. W każdym ruchu może wybrać pewną dodatnią liczbę całkowitą k, być może biorąc pod uwagę co się stało we wcześniejszych ruchach, a nastepnie Tomek podaje mu wartość $W(k)$. Wyznaczyć, w zależności od n, najmniejszą liczbę ruchów, w której Tomek, niezależnie od wybranego wielomianu, jest w stanie poznać wszystkie jego współczynniki.

Zadanie 7

Rozstrzygnąć, czy istnieje wielomian 1000 stopnia, którego współczynniki należą do zbioru $\{-1, 1\}$ oraz ma on 1000 pierwiastków rzeczywistych.

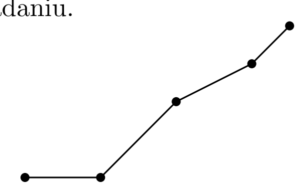
Grafy

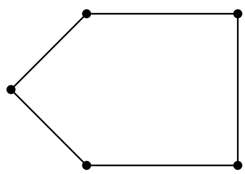
W rozdziale o indukcji matematycznej wprowadziliśmy pojęcie grafu. Przypominając, jest to zbiór wierzchołków, z których niektóre są połączone krawędzią. Najpierw zdefiniujmy garść pojęć, których będziemy używać.

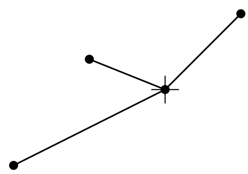
Definicje

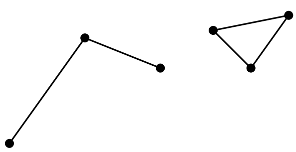
- *Ścieżka* to ciąg, niekoniecznie parami różnych, wierzchołków v_1, v_2, v_3, ..., v_t, że każde dwa kolejne są połączone krawędzią.
- *Cykl* to ciąg, niekoniecznie parami różnych, wierzchołków v_1, v_2, v_3, ..., v_t, że zarówno każde dwa kolejne wierzchołki, jak i v_1 oraz v_t są połączone krawędzią.
- *Stopniem* wierzchołka nazywamy liczbę krawędzi z niego wychodzących.
- Graf nazywamy *spójnym*, jeśli dla dowolnych dwóch wierzchołków istnieje ścieżka, która zaczyna się w pierwszym i kończy w drugim. Kolokwialnie mówiąc, graf jest jedną całością, a nie składa się z kilku rozłącznych części.
- Zbiór n wierzchołków, spośród których każde dwa wierzchołki są połączone krawędzią nazywamy *kliką* i oznaczamy go jako K_n.
- Graf składający się z dwóch grup zawierających kolejno a i b wierzchołków, tak, że dwa wierzchołki są ze sobą połączone wtedy i tylko wtedy, gdy są w innych grupach, nazywamy *grafem dwudzielnym* i oznaczamy jako $K_{a,b}$.

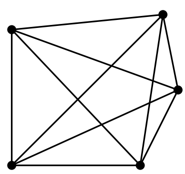
Uwaga
Często można spotkać się z innymi definicjami cyklu i ścieżki – niekiedy przyjmuje się, że zawierają każdy z wierzchołków dokładnie raz. Niemniej jednak będzie to doprecyzowane w zadaniu.

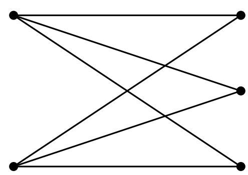

ścieżka

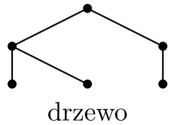

cykl


wierzchołek o stopniu 3


graf niespójny


klika K_5


graf dwudzielny $K_{2,3}$


drzewo

Grafy, które są spójne i nie zawierają żadnego cyklu nazywamy *drzewami*. Mają one kilka równoważnych definicji, o czym mówi poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 1

Dany jest graf spójny G, który ma n wierzchołków. Następujące warunki są sobie równoważnie

- G nie zawiera żadnego cyklu,
- w grafie jest dokładnie $n-1$ krawędzi,
- pomiędzy dowolnymi dwoma wierzchołkami istnieje dokładnie jedna ścieżka, która nie przechodzi przez żaden wierzchołek więcej niż raz.

Dowód

Zauważmy, że dla $n=1$ teza jest oczywista. Załóżmy, że $n \geqslant 1$. Najpierw wykażemy, że każdego z tych warunków wynika istnienie wierzchołka o stopniu 1.

Załóżmy nie wprost, że każdy wierzchołek ma stopień co najmniej 2. Wówczas można łatwo obliczyć, że krawędzi jest co najmniej $\frac{2 \cdot n}{2} = n$, czyli pierwszy warunek nie może zajść.

Wybierzmy pewien wierzchołek i rozpocznijmy w nim spacer po grafie. Z wierzchołka, w którym będziemy, wybierzemy krawędź, którą jeszcze nie szliśmy. Algorytm zakończymy, gdy trafimy w ten sposób do wierzchołka, w którym jeszcze nie byliśmy. Skoro stopień każdego grafu wynosi 2, to nigdy nie utkniemy w żadnym z wierzchołków. Jeśli tak się stanie, to znaczy, że weszliśmy do tego wierzchołka co najmniej raz, a wtedy kończymy spacer. W taki sposób otrzymujemy cykl. Łatwo zauważyć, że z istnienia cyklu wynika istnienie dwóch ścieżek między dowolnymi jego dwoma wierzchołkami.

Rozpatrzmy więc wierzchołek o stopniu 1. Usuwając go wraz z krawędzią otrzymam graf o $n-1$ wierzchołkach. W ten sposób nie zmieni się prawdziwość żadnego z warunków – wierzchołek o stopniu 1 nie może być częścią ani cyklu, ani dwóch ścieżek. Relacja liczby krawędzi do liczby cykli zostanie zachowana. Możemy więc skorzystać z zasady indukcji matematycznej i otrzymujemy tezę.

Przykład 1

Dany jest prostokąt $m \times n$. Pokolorowano w nim $m+n$ pól. Wykazać, że da się wybrać pewne z pokolorowanych pól, tak, aby w każdej kolumnie i w każdym wierszu liczba wybranych pól była parzysta.

Rozwiązanie

Rozpatrzmy graf, w którym wierzchołkami będą wiersze i kolumny. Jeśli pole zostało pokolorowane, to połaczymy przyporządkowane mu wiersz i kolumnę. Otrzymany graf ma $m+n$ wierzchołków i $m+n$ krawędzi, czyli musi zawierać cykl. Wybierając przyporządkowane jego krawędziom pola otrzymujemy zbiór spełniający warunki zadania.

Ścieżkę, która przechodzi każdą z krawędzi dokładnie raz nazywamy *ścieżką Eulera* na cześć szwajcarskiego matematyka Leonharda Eulera. Okazuje się, że stwierdzenie, czy w danym grafie istnieje ścieżka Eulera jest dość łatwe dzięki poniższemu twierdzeniu.

Twierdzenie 2

Dany jest graf spójny o $n \geqslant 2$ wierzchołkach. Wówczas cykl Eulera istnieje, wtedy i tylko wtedy, gdy stopień każdego z wierzchołków jest liczbą parzystą.

Dowód

Najpierw wykażemy, że cykl może istnieć tylko w takim wypadku. Przechodząc tą ścieżką, do każdego wierzchołka wejdziemy tyle samo razy, ile z niego wyjdziemy. Stąd więc każdy wierzchołek ma parzysty stopień, gdyż krawędzi „wejściowych” i „wyjściowych” jest tyle samo.

Dowód, że gdy każdy ze stopni jest parzysty, to takowy cykl musi istnieć, jest nieco trudniejszy. Będziemy rozumować indukcyjnie po sumie liczby wierzchołków i krawędzi.

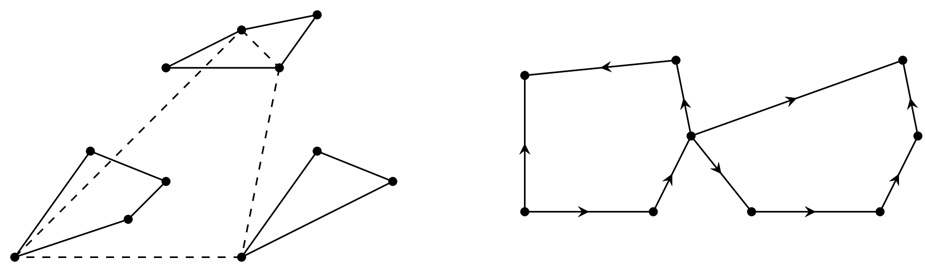
Zauważmy, że skoro graf jest spójny, to stopień żadnego z wierzchołków nie wynosi 0 – jest to co najmniej 2. Rozumując podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 1 wykazujemy, że w rozpatrywanym grafie istnieje cykl – nazwijmy go $\mathcal{C}$.

Usuńmy ten cykl z grafu. Nie musi pozostać spójny – podzieli się on na pewne spójne składowe. Niemniej jednak każda ze składowych zawiera pewien wierzchołek $\mathcal{C}$. Na mocy założenia indukcyjnego w każdej z nich istnieje cykl Eulera.

Możemy połączyć te cykle w jeden duży cykl. Wykażemy, że dwa rozłączne krawędziowo cykle o wspólnym wierzchołku możemy połaczyć w jeden większy cykl. Korzystając z tego faktu posklejamy cykle po kolei ze sobą.

Załóżmy, że wspólnym wierzchołkiem cykli $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ jest pewien wierzchołek c. Wówczas startując z wierzchołka c, najpierw przechodzimy cykl $\mathcal{A}$. Wrócimy wtedy do wierzchołka c. Wówczas przejdziemy cykl $\mathcal{B}$. W taki sposób otrzymamy jeden cykl.

Poniżej przestawiono rysunki poglądowe. Aby były czytelne, cykle przechodzą przez każdy wierzchołek dokładnie raz. Niemniej jednak w dowodzie takiego założenia nie poczyniliśmy.



Zadanie 1

W pewnym grafie każdy wierzchołek ma stopień co najmniej 100. Wykazać, że w tym grafie istnieje ścieżka o długości co najmniej 101.

Zadanie 2

W pewnym kraju jest n miast, przy czym każde dwa są połączone drogą albo torami kolejowymi. Pewien turysta planuje wyruszyć z pewnego miasta, odwiedzić każde miasto dokładnie raz, a następnie powrócić do wyjściowego miasta. Wykazać, że może tak wybrać wyjściowe miasto i tak zaplanować swoją trasę, aby zmienić środek transportu co najwyżej raz.

Zadanie 3

W pewnym turnieju bierze udział 40 drużyn. Pierwszego dnia każda z drużyn rozegrała jeden mecz. Drugiego dnia również. Wykazać, że istnieje pewne 20 drużyn, takich, że każde dwie spośród nich jeszcze nie grały ze sobą meczu.

Zadanie 4

W pewnym turnieju bierze udział 40 drużyn. Pierwszego dnia każda z drużyn rozegrała jeden mecz. Drugiego dnia również. Wykazać, że istnieje pewne 20 drużyn, takich, że każde dwie spośród nich jeszcze nie grały ze sobą meczu.

Zadanie 5

W pewnym grafie o n wierzchołkach ich stopnie wynoszą odpowiednio d_1, d_2, ..., d_n. Udowodnić, że istnieje taki podzbiór co najmniej $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+d_i}$ jego wierzchołków, że żadne dwa z nich nie są połączone krawędzią.

Zadanie 6

Hydra składa się z pewnej liczby głów, z której niektóre są połączone szyjami. Herkulers może odciąć wszystkie szyje wychodzące z pewnej głowy, jednak wówczas z tamtej głowy wyrastają szyję, którą łączą ją z głowami, z którymi nie była ona wcześnie połączona. Hydra jest pokonana, gdy rozpada się na dwie rozłączne części. Wyznaczyć najmniejsze N, że Herkules jest w stanie pokonać dowolną hydrę składającą się ze 100 szyi.

Indukcja matematyczna 2

Indukcja, o której pisaliśmy wcześniej, korzystała z faktu, że jeśli teza zachodzi dla pewnej liczby k, to zachodzi również dla liczby $k + 1$. W nastepującym przykładzie pokażemy nieco ogólniejszą metodę, zwaną indukcją zupełną.

Przykład 1

Niech $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ dla $n \geqslant 1$ będą kolejnymi liczbami Fibonacciego. Wykazać, że każda dodatnia liczba całkowita może być przedstawiona w postaci sumy parami różnych liczb Fibonacciego.

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że liczba 0 może być przedstawiona we wspomnianej postaci. Załóżmy, że dla pewnej liczby k, każdą z liczb 1, 2, ..., k da się przedstawić w postaci sumy parami różnych liczb Fibonacciego. Wykażemy, że wówczas liczbę $k + 1$ również.

Niech F_i będzie największą liczbą Fibonacciego mniejszą lub równą $k + 1$, równoważnie

$$F_i \leqslant k + 1 < F_{i+1}.$$

Wówczas

$$k + 1 - F_i < F_{i+1} - F_i = F_{i-1} \leqslant F_i.$$

Korzystając z założenia liczbę $k + 1 - F_i \leqslant k$ da się przedstawić w postaci sumy parami różnych liczb Fibonacciego. Żadna z tych liczb nie może być równa F_i, gdyż ich suma – liczba $k+1$ jest mniejsza niż F_i. Stąd dorzucając do danego przedstawienia liczby $k+1-F_i$ liczbę F_i otrzymamy szukane przedstawienie liczby $k + 1$.

■

Indukcja zupełna

W powyższym rozumowaniu skorzystaliśmy z założenia nie tylko dla liczby k, ale także dla wszystkich liczb od niej mniejszych. Tę metodę dowodzenia nazywamy *indukcją zupełną*.

Formalizując, analogicznie do standardowego dowodu indukcyjnego, dowód indukcyjny zupełny zdania logicznego $Z(n)$ dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n składa się z dwóch części:

1. Baza indukcji – sprawdzenie prawdziwości zdania $Z(1)$.

2. Krok indukcyjny – udowodnienie, że jeśli zachodzą zdania $Z(1)$, $Z(2)$, $Z(3)$, ..., $Z(k)$ to zachodzi zdanie $Z(k + 1)$.

Przykład 2

Wykaż, że

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n}}.$$

Rozwiązanie

Jeśli czytelniczka/czytelnik próbował samodzielnie zmierzyć się z tym zadaniem, mógł przekonać się, że nie da się danej nierówności wykazać wprost, korzystając z indukcji matematycznej. Okazuje się jednak, że gdy nieco umocnimy tezę do postaci

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3n+1}},$$

to jest to już jak najbardziej możliwe.

Zauważmy, że

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{3\cdot 1+1}}.$$

Załóżmy, że dla pewnej liczby naturalnej n zachodzi

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

Jeśli wykażemy, że

$$\frac{2n+1}{2n+2}\leqslant\frac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{3n+4}} \tag{1}$$

to mnożąc dwie powyższe równości otrzymamy tezę dla $n+1$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n+1}{2n+2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3n+4}}.$$

Przekształcając nierówność (1) równoważnie otrzymujemy kolejno

$$\begin{gathered}
\frac{2n+1}{2n+2}\leqslant\frac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{3n+4}},\\
\frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2}\leqslant\frac{3n+1}{3n+4},\\
(2n+1)^2(3n+4)\leqslant(2n+2)^2(3n+1),\\
12n^3+28n^2+19n+4\leqslant 12n^3+28n^2+20n+4,\\
0\leqslant n.
\end{gathered}$$

Ostatnia równość jest oczywiście prawdziwa, co kończy dowód indukcyjny. Pozostaje zauważyć, że

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3n+1}}<\frac{1}{\sqrt{3n}}.$$

■

Umocnienie tezy paradoksalnie może pomóc w rozwiązaniu zadania. Owszem, teza staje się mocniejsza, ale mocniejsze staje się też założenie indukcyjne. Warto zawsze zobaczyć, czy ten trik jest możliwy. W powyższym zadaniu w przypadku dla $n=1$ mieliśmy do wykazania nierówność

$$\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Pozostawia ona pewne pole do działania, pomysł, że po prawej stronie liczbę $\frac{1}{\sqrt{3}}$ można zastąpić przez $\frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$. Postawienie hipotezy, że zachodzi mocniejsza nierówność, nasuwa się samo.

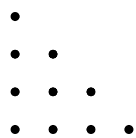
Indukcja matematyczna jest tak ogólną metodą, że zawsze trzeba spróbować z niej skorzystać. Niemniej jednak są zadania, w których nie jest to możliwe. Przesłankami, które na to mogą wskazywać są chociażby występowanie w zadaniu zbiorów, po których ciężko się indukuje, jak chociażby liczby pierwsze.

Zadanie 1

Udowodnić, że za pomocą monet trzyzłotowych i pięciozłotowych można zapłacić każdą kwotę większą niż 8 złotych, bez konieczności wydawania reszty.

Zadanie 2

Dana jest liczba naturalna n. Niech $\mathcal{S}$ będzie zbiorem wszystkich punktów postaci (a, b), gdzie a i b są liczbami ze zbioru $\{0, 1, 2, ..., n\}$ oraz $a + b \leqslant n$.



Przykład dla $n = 3$.

Wykazać, że jeśli pewien zbiór prostych zawiera każdy z tych punktów, to zawiera on co najmniej $n + 1$ prostych.

Zadanie 3

Wykazać, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita, że jest ona podzielna przez 2^{1000}, oraz ma w zapisie dziesiętnym jedynie cyfry 1 i 2.

Zadanie 4

Niech k będzie dodatnią liczbą całkowitą. Na przyjęciu spotkało sie $n \geqslant 2$ gości, spośród których niektórzy znają się. Okazało się, że dla każdego niepustego podzbioru gości A istnieje osoba, która zna co najwyżej k osób z A. Podzbiór gości, spośród których każde dwie się znają, nazywamy *kilką*. Wykazać, że istnieje co najwyżej $2^k \cdot n$ klik.

Zadanie 5

Znajdź wszystkie funkcje f z dodatnich liczb całkowitych w dodatnie liczby całkowite, które dla każdej liczby dodatniej całkowitej n spełniają nierówności

$$(n-1)^2 < f(n)f(f(n)) < n^2 + n.$$

Zadanie 6

Niech $\mathcal{R}$ będzie rodziną zbiorów 1000-elementowych. Moc $\mathcal{R}$ jest większa niż $1000 \cdot 999^{1000}$ Wykazać, że istnieje 1000-elementowa rodzina $\mathcal{G}$, będąca podrodziną $\mathcal{R}$, oraz taki zbiór X, że dla dowolnych zbiorów $A, B \in \mathcal{R}$ zachodzi $A \cap B = X$.

Podzielności

Wykładniki peadyczne

Niech p będzie liczbę pierwszą, a n pewną niezerową liczbą całkowitą. Wówczas przyjmiemy, że $v_p(n)$ oznacza potęgę, w której występuje liczba p w rozkładzie liczby n na czynniki pierwsze. Na przykład liczba 360 może zostać zapisana jako

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1,$$

więc

$$v_2(360) = 3, \quad v_3(360) = 2, \quad v_3(360) = 1, \quad v_7(360) = 0.$$

Inaczej, $v_p(n)$ jest taką nieujemną liczbą całkowita, że

$$p^{v_p(n)} \mid n, \quad \text{ale} \quad p^{v_p(n)+1} \nmid n.$$

Innymi słowy jest to największy wykładnik liczy p, przez który jest podzielna liczba n.

Wartość $v_p(n)$ nazywamy wykładnikiem p-adycznym liczby n. Ma ona bardzo wiele własności, które są niezwykle przydatne w badaniu podzielności liczb.

Lemat 1

Niech a, b będą niezerowymi liczbami całkowitymi. Wówczas

$$v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b).$$

Dowód

Zauważmy, że jeśli $a = p^{v_p(a)} \cdot x$ oraz $b = p^{v_p(b)} \cdot y$, dla pewnych liczb całkowitych x, y, które nie są podzielne przez p, to mamy

$$ab = p^{v_p(a)} \cdot x \cdot p^{v_p(b)} \cdot y = p^{v_p(a)+v_p(b)} \cdot xy.$$

Liczby x oraz y nie dzielą się przez p, więc xy również. Z powyższej równości wynika teza. ■

Lemat 2

Niech a, b będą niezerowymi liczbami całkowitymi. Wówczas

$$b \mid a \iff v_p(a) \geqslant v_p(b) \text{ dla każdej liczby pierwszej } p.$$

Dowód

Załóżmy, że jeśli $v_p(b) > v_p(a)$ dla pewnej liczby pierwszej p. Przyjmijmy $a = p^{v_p(a)} \cdot x$ oraz $b = p^{v_p(b)} \cdot y$, dla pewnych liczb całkowitych x, y. Wówczas

$$\frac{a}{b} = \frac{p^{v_p(a)} \cdot x}{p^{v_p(b)} \cdot y} = \frac{x}{p^{v_p(b)-v_p(a)} \cdot y}.$$

Mianownik powyższego ułamka jest podzielny przez p, a licznik nie. Stąd też nie może być on liczbą całkowitą.

Jeśli zaś $a = bk$ dla pewnej liczby całkowitej k, to wówczas dla dowolnej liczby pierwszej p

$$v_p(a) = v_p(bk) = v_p(b) + v_p(k) \geqslant v_p(b).$$

■

Lemat 3

Liczba n jest k-tą potęgą liczby całkowitej wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby pierwszej liczba $v_p(n)$ jest podzielna przez k.

Dowód

Przyjmijmy $n = p_1^{v_{p_1}(n)} \cdot p_2^{v_{p_2}(n)} \cdot \ldots \cdot p_s^{v_{p_1}(n)}$. Wówczas

$$n = p_1^{v_{p_1}(n)} \cdot p_2^{v_{p_1}(n)} \cdot \ldots \cdot p_s^{v_{p_1}(n)} = \left(p_1^{\frac{v_{p_1}(n)}{k}} \cdot p_2^{\frac{v_{p_2}(n)}{k}} \cdot \ldots \cdot p_s^{\frac{v_{p_s}(n)}{k}}\right)^k,$$

więc jeśli każdy z wykładników jest podzielny przez k, to liczba w nawiasie będzie liczbą całkowitą.

Dowodząc w drugą stronę, przyjmijmy $n = a^k$ dla pewnej liczby całkowitej a. Dla dowolnej liczby pierwszej p mamy wtedy

$$v_p(n) = v_p(a^k) = v_p(a) + v_p(a^{k-1}) = 2v_p(a) + v_p(a^{k-2}) = \ldots = k \cdot v_p(a),$$

co dowodzi postulowanej podzielności.

■

Z powyższego rozumowania warto zrozumieć i zapamiętać zależność

$$v_p(a^k) = k \cdot v_p(a).$$

Warto zwrócić uwagę na fakt, że Lemat 2 i Lemat 3 działają w dwie strony. Możemy ich użyć, aby uzyskać pewną własność v_p z założenia o podzielności lub byciu potęgą. Jednak także są przydatne, gdy mamy wykazać, że jakaś podzielność zachodzi lub jakaś liczba jest kwadratem, sześcianem, ... liczby całkowitej.

Przykład 1

Niech a, b będą nieparzystymi liczbami całkowitymi, dla których $a^b b^a$ jest kwadratem liczby całkowitej. Wykazać, że liczba ab również jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Rozpatrzmy dowolną liczbę pierwszą p. Wówczas na mocy Lematu 3 mamy

$$2 \mid v_p(a^b b^a) = v_p(a^b) + v_p(b^a) = av_p(b) + bv_p(a).$$

Skoro liczby a i b są nieparzyste, to

$$0 \equiv av_p(b) + bv_p(a) \equiv v_p(a) + v_p(b) \pmod 2,$$

czyli

$$v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b) \equiv 0 \pmod 2.$$

Skoro $v_p(ab)$ dla każdej liczby pierwszej ab jest liczbą parzystą, to liczba ab jest kwadratem liczby całkowitej.

Lemat 4

Dane są niezerowe liczby całkowite $a_1, a_2, ..., a_k$. Niech m będzie najmniejszą z liczb postaci $v_p(a_i)$. Wówczas, jeśli dokładnie jedna spośród a_1, a_2, ..., a_n spełnia zależność $m = v_p(a_i)$, to

$$v_p(a_1 + a_2 + ... + a_k) = m.$$

Dowód

Przyjimy $a_i = p^{v_p(a_i)} \cdot b_i$. Wówczas

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + ... + a_n = p^{v_p(a_1)}b_1 + p^{v_p(a_2)}a_2 + ... + p^{v_p(a_n)}a_n = \\ = p^{v_p(m)}\left(p^{v_p(a_1)-v_p(m)}b_1 + p^{v_p(a_2)-v_p(m)}a_2 + ... + p^{v_p(a_n)-v_p(m)}a_n\right). \end{aligned}$$

Każda z liczb w nawiasie poza jedną jest podzielna przez p, toteż ich suma nie jest podzielna przez p, skąd wynika teza.

■

Przykład 2

Dane są takie niezerowe liczby całkowite, że liczba

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

jest całkowita. Wykazać, że iloczyn abc jest sześcianem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Niech p będzie dowolną liczbą pierwszą. Wówczas, skoro liczba

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{a^2c + b^2a + c^2b}{abc}$$

jest całkowita, to

$$v_p(a^2c + b^2a + c^2b) \geqslant v_p(abc).$$

Zauważmy, że

$$v_p(a^2c) = 2v_p(a) + v_p(c), \quad v_p(b^2a) = 2v_p(b) + v_p(a), \quad v_p(c^2b) = 2v_p(c) + v_p(b).$$

<u>Lemat.</u> Rozpatrzmy liczby

$$2v_p(a) + v_p(c),\ 2v_p(b) + v_p(a),\ 2v_p(c) + v_p(b).$$

Niech m to będzie najmniejsza z nich. Wówczas co najmniej dwie z nich są równe m.

<u>Dowód.</u>
Załóżmy nie wprost, że dokładnie jedna z nich jest równa m, a dwie pozostałe są nie mniejsze niż $m + 1$. Wyrażenie

$$a^2c + b^2a + c^2b$$

jest sumą dwóch składników podzielnych przez p^{m+1} i jednego składnika podzielnego przez p^m. Toteż dzieli wykładnik peadyczny tej sumy wynosi dokładnie m.

$$m = v_p(a^2c + b^2a + c^2b) \geqslant v_p(abc) = v_p(a) + v_p(b) + v_p(c),$$

$$3m \geqslant (v_p(a) + v_p(b)) + (v_p(b) + v_p(c)) + (v_p(a) + v_p(c)).$$

co przeczy temu, że m jest najmniejszą z tych trzech liczb, różną od pozostałych dwóch.

Przyjmijmy bez straty ogólności, że

$$v_p(a) + 2v_p(c) = v_p(b) + 2v_p(a),$$

wówczas

$$2v_p(c) = v_p(b) + v_p(a),$$

$$v_p(a) + v_p(b) + v_p(c) = 3v_p(c),$$

co dowodzi tego, że liczba

$$v_p(abc) = v_p(a) + v_p(b) + v_p(c) = 3v_p(c)$$

jest podzielna przez 3. Z Lematu 3 wynika więc teza.

■

Przykład 3

Wykazać, że dla żadnej dodatniej liczby całkowitej n większej od 1 liczba

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$

nie jest liczbą całkowitą.

Rozwiązanie

Zauważmy, że

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} = \frac{n! + \frac{n!}{2} + \frac{n!}{3} + ... + \frac{n!}{n}}{n!}.$$

Niech k będzie największą liczbą całkowitą, że

$$2^{k+1} > n \geqslant 2^k.$$

Wówczas wśród liczb $1,\ 2,\ 3,\ ...,\ n$ jest dokładnie jedna podzielna przez 2^k – mianowicie 2^k. Stąd dla każdej liczby i spośród nich, która nie jest równa 2^k zachodzi

$$v_2\left(\frac{n!}{i}\right) = v_2(n!) - v_2(i) > v_2(n!) - k.$$

Zaś mamy

$$v_2\left(\frac{n!}{2^k}\right) = v_2(n!) - v_2(2^k) = v_2(n!) - k.$$

Stąd w sumie $n! + \frac{n!}{2} + \frac{n!}{3} + ... + \frac{n!}{n}$ wszystkie liczby dzielą się przez $2^{v_2(n!)-k+1}$, poza jedną, której v_2 wynosi $v_2(n!) - k$ stąd

$$v_2\left(n! + \frac{n!}{2} + \frac{n!}{3} + ... + \frac{n!}{n}\right) = v_2(n!) - k < v_2(n!).$$

Czyli liczba

$$\frac{n! + \frac{n!}{2} + \frac{n!}{3} + ... + \frac{n!}{n}}{n!}$$

na mocy Lematu 2 nie może być całkowita, co dowodzi tezy.

■

Wzór Legendre'a

Jeśli n jest dodatnią liczbą całkowitą, a p jest liczbą pierwszą, to

$$v_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \ldots$$

Mimo że powyższa suma ma nieskończenie wiele składników, będą one od pewnego momentu – a dokładniej, gdy $p^k > n$ – równe zero. Powyższa tożsamość zwana jest *wzorem Legendre'a*.

Powyższa równość ma bardzo intuicyjne uzasadnienie. Rozpatrzmy liczby $1,\ 2,\ n$. Spośród nich dokładnie $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ jest podzielnych przez p, dokładnie $\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor$ jest podzielnych przez p^2 itd. Każda z liczb, dla których wykładnik peadyczny wynosi k zostanie policzona dokładnie k razy, gdyż dzieli się przez każdą z liczb 1, p, ..., p^k, ale nie przez żadną wyższą potęgę.

Przykład 4

Udowodnić, że dla wszystkich liczb całkowitych n liczba

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

jest całkowita.

Rozwiązanie

Chcemy pokazać, że dla dowolnej liczby pierwszej p zachodzi nierówność

$$v_p\left(\binom{2n}{n}\right) \geqslant v_p(n+1).$$

Niech $n+1 = p^\alpha m$, gdzie $p \nmid m$. Ze wzoru Legendre'a mamy

$$v_p\left(\binom{2n}{n}\right) = v_p\left(\frac{2n!}{n!\cdot n!}\right) = v_p\left(2n!\right) - 2v_p\left(n!\right) = \sum_{i=1}\left(\left\lfloor \frac{2n}{p^i} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor\right).$$

Wystarczy więc pokazać, że

$$\sum_{i=1}\left(\left\lfloor \frac{2(p^\alpha m-1)}{p^i} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{p^\alpha m-1}{p^i} \right\rfloor\right) \geqslant \alpha,$$

Dla $i \leqslant \alpha$ mamy

$$\begin{aligned}\left\lfloor \frac{2(p^\alpha m-1)}{p^i} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{p^\alpha m-1}{p^i} \right\rfloor &= 2p^{\alpha-1}m + \left\lfloor \frac{-2}{p^i} \right\rfloor - 2\left(p^{\alpha-1}m\right) - 2\left\lfloor \frac{-1}{p^i} \right\rfloor = \\ &= \left\lfloor \frac{-2}{p^i} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{-1}{p^i} \right\rfloor = -1+2 = 1.\end{aligned}$$

Stąd pierwsze α czynników jest równe 1. Wykazując, że kolejne są nieujemne, udowodnimy tezę. Jeśli $n = p^i \cdot a + r$, $r < p^i$, to zachodzi nierówność

$$\left\lfloor \frac{2n}{p^i} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor = 2a + \left\lfloor \frac{2r}{p^i} \right\rfloor - 2a - 2\left\lfloor \frac{r}{p^i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2r}{p^i} \right\rfloor \geqslant 0,$$

co kończy dowód.

Zadanie 1

Wyznaczy wszystkie dodatnie liczby całkowite n, które są podzielne przez liczbę $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$.

Zadanie 2

Dane są dodatnie liczby całkowite a, b, c, że liczba a^b dzieli b^c oraz a^c dzieli c^b. Wykazać, że a^2 dzieli bc.

Zadanie 3

Niech $1 = d_0 < d_1 < d_2 < \ldots < d_k = 4n$ będą kolejnymi dzielnikami liczby $4n$. Wykazać, że istnieje taka liczba i, dla której zachodzi równość $d_{i+1} - d_i = 2$.

Zadanie 4

Znajdź wszystkie pary (a, b) liczb całkowitych dodatnich, dla których obie liczby

$$\frac{a^3b-1}{a+1} \quad \text{oraz} \quad \frac{b^3a-1}{b-1}$$

są całkowite

Zadanie 5

Dane są parami różne dodatnie liczby całkowite a, b, c oraz liczba pierwsza p, że liczby

$$ab+1,\ bc+1,\ ca+1$$

są podzielne przez p. Wykazać, że

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant p+2.$$

Zadanie 6

Niech a i k będą pewnymi dodatnimi liczbami całkowitymi o tej własności, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n istnieje liczba całkowita b, że

$$n \mid a - b^k.$$

Wykazać, że $a = c^k$ dla pewnej liczby całkowitej c.

Gry

Zajmiemy się teraz analizą gier. Większość gier, które będziemy rozważać, ma pewne cechy wspólne:

- dwóch graczy wykonują ruchy na przemian,
- obaj gracze mają wszystkie informacje na temat stanu gry – nie ma żadnych elementów tajnych,
- gra musi się skończyć – nie można grać w nieskończoność.

Oczywiście niektóre zadania wyłamią się z tych zasad.

Powiemy, że jeden z graczy ma *strategię wygrywającą*, gdy może tak wykonywać ruchy, aby wygrać, niezależnie od tego jak gra przeciwnik. . Przykład takiej strategii ilustruje następujące zadanie.

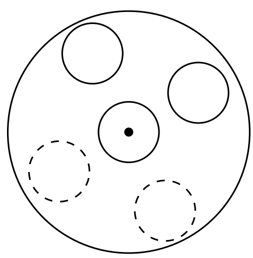
Przykład 1

Ania i Bartek grają w następującą grę. Mają do dyspozycji stół w kształcie koła oraz dowolnie wiele monet o jednakowej średnicy, mniejszej od średnicy stołu. W każdym ruchu gracz kładzie monetę na stole tak, aby nie przykrywała żadnej innej monety. Gdy wykonanie ruchu nie jest możliwe, gracz którego jest kolej przegrywa. Rozstrzygnąć który z graczy ma strategię wygrywającą, jeśli Ania wykonuje pierwszy ruch.

Rozwiązanie

Wykażemy, że Ania – która rozpoczyna grę, ma strategię wygrywającą. Składa się ona z dwóch kroków.

- W pierwszym ruchu Ania kładzie monetę tak, aby środek stołu pokrywał się ze środkiem monety. Może tak zrobić, gdyż średnica stołu jest większa niż średnica monety.
- W kolejnych ruchach Ania kładzie monetę tak, aby była ona symetryczna do monety położonej poprzednio przez Bartka względem środka stołu.



Przykład gry. Okręgi z linii ciągłej zostały położone przez Anię, a te z linii przerywanej przez Bartka.

Pozostaje tylko zauważyć, że po ruchu Ani sytuacja na stole jest symetryczna względem środka. Jeśli więc Bartek jest w stanie w pewnym miejscu ułożyć monetę, to oznacza, że jest to możliwe również w miejscu do niego symetrycznym. Łatwo zauważyć, że skoro moneta Bartka nie może zostać położona na środku stołu – bo już tam leży moneta Ani – to ruch Bartka nie wpłynie na możliwość położenia monety w miejscu symetrycznym. Stąd też jeśli Bartek jest w stanie wykonać ruch, to jest go w stanie później wykonać Ania. Dowodzi to faktu, że strategia Ani jest wygrywająca.

■

Warto zauważyć, że Bartek w drugim ruchu nie jest w stanie położyć monety symetrycznej do monety Ani, gdyż te monety się pokrywają. Pomysłowe ułożenie jej na środku pozwala jednak zastosować Ani pomysł z symetrią. Zapobiega ona w ten sposób sytuacji, w której dwie symetryczne do siebie monety będą na siebie nachodziły.

Motyw gry symetrycznej jest bardzo częsty w grach, stąd też zawsze należy go rozważyć. Warto także spróbować gry w szczególnych przypadkach, gdyż one często pozwalają nam zgadnąć kto ma strategię wygrywającą i nasuwają pomysł na nią. Przykładowo, jeśli dla powyższego zadania rozważymy stół o bardzo niewiele większy niż jedna moneta, to po pierwszym ruchu Ani Bartek nie będzie w stanie położyć kolejnej monety. Nasuwa to pomysł, że Ania ma strategię wygrywającą.

Przykład 2

Na stole leży 10000 kamieni. Ruch polega na zabraniu ze stołu 2 lub 5 kamieni. Dwaj gracze wykonują ruch na przemian, gdy gracz nie może wykonać ruchu przegrywa. Rozstrzygnąć, który z graczy – pierwszy czy drugi – ma strategię wygrywającą.

Rozwiązanie

Wprowadźmy dwa pojęcia. Jeśli na stole leży k kamieni i gracz wykonujący ruch może grać w taki sposób, aby wygrać niezależnie od ruchów przeciwnika, to powiemy, że k kamieni na stole jest *stanem wygrywającym*. Gdy zaś to gracz, który aktualnie nie wykonuje ruchu ma strategię wygrywającą, to ten stan nazwiemy *stanem przegrywającym*.

Zauważmy, że $k = 2$ i $k = 5$ są stanami wygrywającymi, gdyż gracz może wziąć wszystkie kamienie, co spowoduje brak możliwości ruchu następnego gracza. Zaś $k = 1$ jest stanem przegrywającym, gdyż gracz, który ma wykonać ruch, nie jest w stanie tego zrobić.

Zauważmy, że $k = 2$ i $k = 5$ są stanami wygrywającymi, gdyż gracz może wziąć wszystkie kamienie, co spowoduje brak możliwości ruchu następnego gracza. Zaś $k = 1$ jest stanem przegrywającym, gdyż gracz, który ma wykonać ruch, nie jest w stanie tego zrobić.

Do rozwiązania zadania przydadzą się dwie ważne obserwacje:

- stan jest wygrywający wtedy i tylko wtedy, gdy wskutek ruchu, można przejść do pewnego stanu przegrywającego;
- stan jest przegrywający wtedy i tylko wtedy, gdy wskutek dowolnego ruchu gracz go wykonujący przechodzi do stanu wygrywającego.

Formalne uzasadnienie powyższych zdań pozostawiamy czytelniczce/czytelnikowi jako ćwiczenie. Jednak są to fakty dość intuicyjne.

Zauważmy, że ze stanu $k = 3$ można przejść do stanu $k = 1$, który jest przegrywający. Toteż $k = 3$ jest stanem wygrywającym. Dla $k = 4$ jedynym możliwym ruchem jest zabranie dwóch kamieni – doprowadza nas to do stanu wygrywającego $k = 2$ – stąd $k = 4$ jest przegrywający. Dla $k = 6$ zabranie pięciu kamieni doprowadza do stanu przegrywającego, toteż $k = 6$ jest wygrywający. Ciekawa sytuacja ma miejsce dla $k = 7$. Wówczas oba ruchy doprowadzają do stanów wygrywających – $k = 5$ i $k = 2$, więc $k = 7$ jest stanem przegrywającym.

Rozumując analogicznie możemy stworzyć tabelkę.

k	Stan
1	P
2	W
3	W
4	P
5	W
6	W
7	P
8	P

k	Stan
9	W
10	W
11	P
12	W
13	W
14	P
15	P
16	W

Można więc postawić hipotezę, że jeśli $k \equiv 0, 1, 4 \pmod 7$ to stan jest przegrywający, zaś w przeciwnym wypadku jest on wygrywający. Wykażemy, że jest to prawda za pomocą indukcji matematycznej. Za bazę indukcji posłuży nam rozumowanie przeprowadzone powyżej.

Rozpatrzmy pewne $k \geqslant 8$.

- Jeśli $k \equiv 0, 1, 4 \pmod 7$, to łatwo sprawdzić, że z założenia indukcyjnego stany $k - 2$ i $k - 5$ w każdym z tych przypadków są wygrywające. Toteż rozpatrywane stany będą przegrywające.
- Dla $k \equiv 2, 3, 6 \pmod 7$ zabranie dwóch kamieni doprowadza do stanu przegrywającego, toteż stan k jest wygrywający.
- Dla $k \equiv 5 \pmod 7$ zabranie 5 kamieni doprowadza do stanu przegywającego, więc stan k jest wygrywający.

Powyższe rozpatrzenie przypadków kończy dowód indukcyjny. Wystarczy teraz zauważyć, że $10000 \equiv 4 \pmod 7$, więc to drugi gracz ma strategię wygrywającą.

■

Analiza stanów jest znaną metodą analizy gier. Jest ona bardziej żmudna niż pomysłowa, toteż rzadko można ją spotkać na konkursach czy olimpiadach. Jednak pokazuje ona, jak wiele da się uzyskać z analizy „małych” przypadków – dzięki nim zarówno postawiliśmy słuszną hipotezę, jak i rozumowanie indukcyjne wypłynęło niejako naturalnie z bawienia się $k \in 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Niestety nie w każdym zadaniu analiza „małych” przypadków coś daje. Czasem potrzebny jest pomysł, na który trzeba po prostu wpaść, często korzystając z metody prób i błędów. Jest ona tym skuteczniejsza, im więcej jest prób.

Zadanie 1

Na tablicy napisano liczbę całkowitą dodatnią. W każdym ruchu zmazujemy napisaną liczbę n na tablicy i piszemy nową liczbę. Jeśli n była parzysta to piszemy na tablicy liczbę $\frac{1}{2}n$. Jesli zaś liczba n była nieparzysta, to zapisujemy jedną z liczb $3n-1$ lub $3n+1$. Czy – niezależnie od tego, jaką liczbę zapisano na początku – możemy, po skończenie wielu krokach, uzyskać na tablicy jedynkę?

Zadanie 2

W lewym dolnym rogu planszy $m \times n$ stoi pionek. W każdym ruchu może zostać on przesunięty o dowolną liczbę pól w górę lub o dowolną liczbę pól w prawo. Wygrywa gracz, który postawi figurę w prawym górnym rogu. Rozstrzygnąć dla jakich wartości (m, n) pierwszy gracz ma strategię wygrywającą.

Zadanie 3

Na tablicy zapisano liczbę 10000000. W każdym ruchu, o ile przed nim była zapisana liczba n, gracz zastępuje ją liczbą $n-1$ lub $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$. Gracz, który zapisze liczbę 1 wygrywa. Który z graczy – pierwszy czy drugi – ma strategię wygrywającą?

Zadanie 4

Dwaj gracze na przemian stawiają kółko i krzyżyk w polach nieskończonej planszy. Gracz wygrywa, gdy istnieje kwadrat 2×2 ułożony z jego symboli. Wykazać, że drugi gracz może grać tak, aby pierwszy gracz nie był w stanie wygrać.

Zadanie 5

Nauczyciel wraz z 30 uczniami gra w grę na nieskończonej kartce w kratkę. Zaczyna on, po czym ruch wykonuje każdy z 30 uczniów, po czym znów nauczyciel, po czym uczniowie i tak dalej. W każdym ruchu należy pokolorować jeden z boków kratki, który nie został wcześniej pokolorowany. Nauczyciel wygrywa, gdy na planszy znajduje się prostokąt 2×1 lub 1×2, że wszystkie jego boki są pokolorowane, ale odcinek wewnątrz niego nie jest.

Zadanie 6

20 dziewczyn usiadło w kółku. Na początku jedna z nich trzyma $N < 19$ kamieni. W każdym ruchu jedna z dziewczyn, która posiada co najmniej dwa kamienie daje po jednym każdej ze swoich sąsiadek. Gra kończy się, gdy każda z dziewczyn trzyma co najwyżej jeden kamień. Wykazać, że gra musi się skończyć po skończonej liczbie ruchów.

Bardziej zaawansowane nierówności

Na początku udowodnimy dwie bardzo znane nierówności.

Nierówność Cauchego–Schwarza

Dla liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ oraz $b_1, b_2, \ldots, b_n$ zachodzi nierówność

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right) \geqslant \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n\right).$$

Dowód

Przyjmijmy, że funkcja f jest dana wzorem

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i x - b_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) x^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) x + \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Zauważmy, że jest to suma funkcji przyjmujących wartości nieujemne, a więc sama przyjmuje tylko wartości nieujemne. Stąd też jej wyróżnik Δ będzie niedodatni

$$\Delta = 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leqslant 0,$$

co jest równoważnie tezie.

■

Nierówność Cauchego–Schwarza w formie Engela

Dla liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ oraz $b_1, b_2, \ldots, b_n$ zachodzi nierówność

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n}{b_n} \geqslant \frac{\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)^2}{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}.$$

Dowód

Zauważmy, że na mocy nierówności Cauchego-Schwarza prawdą jest, że

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{\frac{a_i}{b_i}}\right)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{a_i b_i}\right)^2\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i b_i} \cdot \sqrt{\frac{a_i}{b_i}}\right).$$

Jest to równoważnie nierówności

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right),$$

z której w oczywisty sposób wynika teza.

■

Przejdziemy teraz do nierówności między ciągami jednomonotonicznymi. Ma ona bardzo ciekawy dowód, do którego będzie potrzebny nam następujący lemat.

Lemat 1

Dane są liczby rzeczywiste $a_1 \geqslant a_2$ oraz $b_1 \geqslant b_2$. Wówczas zachodzi nierówność

$$a_1b_1 + a_2b_2 \geqslant a_1b_2 + a_2b_1.$$

Jeśli zaś $a_1 \geqslant a_2$ oraz $b_1 \leqslant b_2$, to zachodzi

$$a_1b_1 + a_2b_2 \leqslant a_1b_2 + a_2b_1.$$

Dowód

Zauważmy, że

$$a_1b_1 + a_2b_2 \geqslant a_1b_2 + a_2b_1 \iff (a_1 - a_2)(b_1 - b_2) \geqslant 0,$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 \leqslant a_1b_2 + a_2b_1 \iff (a_1 - a_2)(b_1 - b_2) \leqslant 0,$$

Teza lematu wynika wprost z założeń.

■

Twierdzenie o ciągach jednomonotonicznych

Liczby $a_1 \geqslant a_2 \geqslant ... \geqslant a_n$ oraz $b_1 \geqslant b_2 \geqslant ... \geqslant b_n$ są rzeczywiste. Niech $b'_1, b'_2, ..., b'_n$ będzie permutacją liczb $b_1, b_2, ..., b_n$. Wówczas zachodzą nierówności

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \geqslant a_1b'_1 + a_2b'_2 + ... + a_nb'_n \geqslant a_1b_n + a_2b_{n-1} + ... + a_nb_1.$$

Dowód

Rozpatrzmy pewną permutację $b'_1, b'_2, ..., b'_n$ liczb $b_1, b_2, ..., b_n$. Zamieńmy liczby b'_i oraz b'_{i+1} miejscami i zobaczmy co stanie się z wartością wyrażenia, nazwijmy go W:

$$a_1b'_1 + a_2b'_2 + ... + a_nb'_n.$$

Składnik $a_ib'_i$ zostanie zastąpiony przez $a_ib'_{i+1}$, zaś $a_{i+1}b'_{i+1}$ zostanie zastąpiony przez $a_{i+1}b'_i$. Inne składniki pozostaną bez zmian. Skoro $a_i \geqslant a_{i+1}$, to z Lematu 1 wynika, że

$$a_ib'_{i+1} + a_{i+1}b'_i \leqslant a_ib'_i + a_{i+1}b'_{i+1}, \quad \text{gdy } b_i \geqslant b_{i+1},$$

$$a_ib'_{i+1} + a_{i+1}b'_i \geqslant a_ib'_i + a_{i+1}b'_{i+1}, \quad \text{gdy } b_i \leqslant b_{i+1}.$$

Jeśli więc liczby b'_i oraz b'_{i+1} są posortowane odwrotnie do ciągu $\{a_i\}$, to zmieniając ich kolejności możemy zwiększyć wartość wyrażenia W. Wykonując wiele takich zamian, za każdym razem wartość W wzrośnie. Również liczba par postaci (b'_i, b'_j), gdzie $i > j$ oraz $b'_i < b'_j$ maleje o 1 przy każdym przestawieniu. Stąd w pewnym momencie otrzymamy permutację, w którym nie możemy wykonać rozpatrywanej operacji. Znaczy to tyle, że $b'_i \geqslant b'_{i+1}$ dla wszystkich możliwych wartości liczby i, czyli po prostu $b'_i = b_i$. Finalnie, wartość rozpatrywanego wyrażenia W jest równa

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n.$$

Skoro przy każdym ruchu wartość tego wyrażenia rosła, to jego finalna wartość jest większa od wartości początkowej.

Dowodzi to jednej z dwóch postulowanych nierówności. Dowód drugiej z nich jest analogiczny, tylko zamieniamy miejscami b_i' posortowane jednakowo jak ciąg $\{a_i\}$.

■

Przyjmijmy, że ciągi $(a_1, a_2, ..., a_n)$ oraz $(b_1, b_2, ..., b_n)$ są *jednakowo monotoniczne*, gdy dla dowolnych indeksów i oraz j zachodzi

$$a_i > a_j \quad \iff \quad b_i > b_j,$$

zaś *odwrotnie monotoniczne*, gdy

$$a_i > a_j \quad \iff \quad b_i < b_j.$$

Przykładowo ciągi $(2, 1, 3)$ oraz $(101, 100, 102)$ są jednakowo monotoniczne, zaś ciągi $(1, 2, 3)$ oraz $(10, 9, 8)$ są odwrotnie monotoniczne. Możemy teraz inaczej sformułować wykazaną wcześniej nierówność.

Jeśli mamy dwa ciągi $(a_1, a_2, ..., a_n)$ oraz $(b_1, b_2, ..., b_n)$ i rozpatrzymy wszystkie ich możliwe permutacje, to wartość wyrażenia

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... a_n b_n$$

będzie największa, gdy ciągi $\{a_i\}$ oraz $\{b_i\}$ są jednakowo monotoniczne, zaś najmniejsza, gdy $\{a_i\}$ oraz $\{b_i\}$ są odwrotnie monotoniczne.

Przykład 2

Liczby a_1, a_2, ..., a_n są dodatnie. Wykazać, że zachodzi nierówność

$$a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3 \geqslant a_1^2 a_2 + a_2^2 a_3 + ... + a_{n-1}^2 a_n + a_n^2 a_1.$$

Rozwiązanie

Rozpatrzmy ciągi:

$$(a_1^2, a_2^2, ..., a_n^2) \quad \text{oraz} \quad (a_1, a_2, ..., a_n).$$

Zauważmy, że są one jednakowo monotoniczne, gdyż

$$a_i^2 > a_j^2 \iff a_i > a_j.$$

Na mocy nierówności o ciągach jednomonotonicznych prawdą jest, że

$$a_1^2 \cdot a_1 + a_2^2 \cdot a_2 + ... + a_n^2 \cdot a_n \geqslant a_1^2 \cdot a_2 + a_2^2 \cdot a_3 + ... + a_n^2 \cdot a_1,$$

co jest równoważne tezie.

Cykliczność a symetryczność

Bardzo często przy rozwiązywaniu nierówności zdarzają się stwierdzenia typu „bez straty ogólności załóżmy, że". Zazwyczaj chodzi o to, że rozpatrywany jest jeden przypadek, a inne są do niego analogiczne. Nie zawsze jednak są one analogiczne. Chociażby w Przykładzie 2 nie można założyć bez straty ogólności, że

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant ... \geqslant a_n,$$

gdyż przypadek, gdy $n = 4$ i $a_1 \geqslant a_3 \geqslant a_2 \geqslant a_4$ nie daje się łatwo sprowadzić do przypadku powyższego.

Zdefiniujmy wyrażenie algebraiczne jako *symetryczne*, gdy wyrażenie dla liczb $(a_1, a_2, ..., a_n)$ nie zmieni się, gdy rozpatrzymy dowolną ich permutację. Chociażby wyrażenie

$$abc + a + b + c$$

jest symetryczne. Chociażby rozpatrując permutację (b, a, c) krotki (a, b, c) otrzymamy

$$bac + b + a + c = abc + a + b + c.$$

Wyrażenie algebraiczne nazwiemy *cyklicznym*, gdy wyrażenie dla liczb $(a_1, a_2, ..., a_n)$ nie zmieni się, gdy rozpatrzymy dowolne ich przestawienie cykliczne – $(a_k, a_{k+1}, ..., a_n, a_1, a_{k-1})$. Wyrażenie

$$ab^2 + bc^2 + ca^2$$

jest cykliczne. Dla przykładu rozpatrując przestawienie cykliczne (c, a, b) krotki (a, b, c) otrzymamy

$$ca^2 + ab^2 + bc^2 = ab^2 + bc^2 + ca^2.$$

Nie jest ono symetryczne, gdyż dla permutacji (b, a, c) krotki (a, b, c) mamy

$$ba^2 + ac^2 + cb^2 \neq ab^2 + bc^2 + ca^2$$

Nierówność nazwiemy symetryczną albo cykliczną, gdy rozpatrując odpowiednio permutację lub przestawienie cykliczne zmiennych, w oczywisty sposób otrzymana nierówność jest równoważna nierówności wyjściowej.

- Gdy nierówność jest symetryczna, to można założyć ustalony porządek liczb.
- Jeśli zaś nierówność jest jedynie cykliczna, to można chociażby założyć, że pewna zmienna jest największa lub najmniejsza spośród wszystkich. Nie można jednak ustalać sobie ich porządku!

Zadanie 1

Dane są liczby dodatnie a, b, c. Wykaż, że zachodzi nierównośc

$$\frac{a}{2b+c}+\frac{b}{2c+a}+\frac{c}{2a+b}\geqslant 1.$$

Zadanie 2

Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$a^3b+b^3c+c^3a\geqslant a^2bc+ab^2c+abc^2.$$

Zadanie 3

Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_n$, gdzie $n\geqslant 2$ zachodzi nierówność

$$\sin\alpha_1\cdot\ldots\cdot\sin\alpha_n+\cos\alpha_1\cdot\ldots\cdot\cos\alpha_n\leqslant 1.$$

Zadanie 4

Dane są liczby rzeczywiste $a_1\geqslant a_2\geqslant\ldots\geqslant a_n$ oraz $b_1\geqslant b_2\geqslant\ldots\geqslant b_n$. Wykazać, że zachodzi nierówność

$$n(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)\geqslant(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n).$$

Zadanie 5

Rozstrzygnąć, czy dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierównośc

$$a^2b^3+b^2c^3+c^2a^3\leqslant ab^4+bc^4+ca^4.$$

Równania funkcyjne 2

W niniejszym rozdziale poszerzymy naszą wiedzę na temat równań funkcyjnych. Nie będą to już jedynie sztampowe zadania na podstawienia i wykazywanie różnowartościowości/surjektywności funkcji. Na początku zastanówmy się nad funkcjami, które spełniają równanie

$$f(x) + f(y) = f(x + y).$$

Powyższa zależność jest zwana *równaniem Cauchego*.

Przykład 1

Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, które dla dowolnych $x, y \in \mathbb{Q}$ spełniają warunek

$$f(x) + f(y) = f(x + y).$$

Rozwiązanie

Na początku zauważmy, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej zachodzą równości

$$\begin{aligned} f(nx) &= f((n-1)x) + f(x) = f((n-2)x) + f(x) + f(x) = \ldots = \\ &= \underbrace{f(x) + \ldots + f(x)}_{n} = nf(x). \end{aligned}$$

Wykonując podstawienie $x = y = 0$ otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} f(0) + f(0) &= f(0), \\ f(0) &= 0. \end{aligned}$$

Postawmy $y = -x$. Wówczas

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= f(0) = 0, \\ f(-x) &= -f(x). \end{aligned}$$

Łącząc powyższą równość z pierwszą z otrzymanych zależności otrzymujemy, że

$$f(-nx) = -f(nx) = nf(x).$$

Możemy więc wywnioskować, że $f(nx) = nf(x)$ dla dowolnej liczby całkowitej n oraz dowolnej liczby rzeczywistej x. Wstawiając $x = \frac{p}{q}$ oraz $n = q$ otrzymamy

$$qf\left(\frac{p}{q}\right) = f(p).$$

Zaś dla $x = 1$ i $n = p$ mamy

$$f(p) = pf(1).$$

Stąd

$$\begin{aligned} qf\left(\frac{p}{q}\right) &= pf(1), \\ f\left(\frac{p}{q}\right) &= \frac{p}{q} \cdot f(1). \end{aligned}$$

Skoro $f(1)$ jest stałe, to funkcja f jest funkcją postaci $f(x) = ax$ dla pewnej liczby wymiernej a. Łatwo sprawdzić, że takie funkcje spełniają warunki zadania.

$\blacksquare$

Rozsądną więc wydaje się hipoteza, że jeśli funkcja f jest zdefiniowana na liczbach rzeczywistych i przyjmuje wartości rzeczywiste oraz spełnia równanie Cauchego, to musi być funkcją postaci $f(x) = ax$ dla pewnej liczby rzeczywistej a. Nie jest to jednak prawda! Taka implikacja nie zachodzi.

Jaka więc jest funkcja rzeczywista, która spełnia równanie Cauchego, a nie jest funkcją liniową? Skonstruowanie takiej funkcji jest możliwe, gdy założymy *pewnik wyboru*. To ten sam aksjomat, z którego założenia wynika paradoks Banacha-Tarskiego. Nie będziemy tutaj zgłębiać tego tematu, ważny jest fakt, że z samego równania Cauchego dla funkcji rzeczywistych nie wynika ich liniowość.

Jaka więc jest funkcja rzeczywista, która spełnia równanie Cauchego, a nie jest funkcją liniową? Skonstruowanie takiej funkcji jest możliwe, gdy założymy *pewnik wyboru*. To ten sam aksjomat, z którego założenia wynika paradoks Banacha-Tarskiego. Nie będziemy tutaj zgłębiać tego tematu, ważny jest fakt, że z samego równania Cauchego dla funkcji rzeczywistych nie wynika ich liniowość.

Można jednak dołożyć pewne założenie do równania Cauchego, aby uzyskać liniowość rozpatrywanej funkcji. Mówi o tym następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1

Jeśli pewna funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełnia warunek

$$f(x) + f(y) = f(x + y).$$

oraz jest funkcja niemalejącą, to wówczas $f(x) = ax$.

Dowód

Przyjmijmy $a = f(1)$. Na mocy Przykładu 1 mamy, że

$$f(q) = aq \qquad \text{dla dowolnej liczby wymiernej } q.$$

Załóżmy nie wprost, że dla pewnej liczby rzeczywistej t zachodzi równość

$$f(t) = a(t + t_0),\ t_0 \neq 0.$$

Przyjmijmy, że $t_0 > 0$. Drugi przypadek będzie analogiczny. Znanym faktem jest, że w przedziale $(t,\ t + t_0)$ jest pewna liczba wymierna q_0. Mamy wówczas

$$f(q_0) = aq_0 < a(t + t_0) = f(t).$$

Wiedząc, że $q_0 > t$ otrzymujemy sprzeczność z tym, że f jest niemalejąca.

$\blacksquare$

Analogiczne twierdzenia można udowodnić, gdy fakt, że f jest malejąca, zastąpić tym, że

- $f(x) > 0$, dla dowolnego $x > 0$,
- $f(x) < 0$, dla dowolnego $x < 0$,
- f jest ograniczona na przedziale – $f(x) < M$, dla dowolnego $a < x < b$, dla pewnych liczb rzeczywistych $a < b$ oraz M,
- f jest ciągła.

Warto zaznaczyć, że różnowartościowość funkcji f nie wystarcza, aby była ona liniowa.

Przykład 2

Znajdź wszystkie funkcje f ze zbioru liczb rzeczywistych w zbiór liczb rzeczywistych, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzą równości

$$f(x) + f(y) = f(x + y) \quad \text{oraz} \quad f(x)f(y) = f(xy).$$

Rozwiązanie

Wstawiając do drugiego równania $x = y$ otrzymujemy

$$f(x^2) = f(x)f(x) = f(x)^2 \geqslant 0.$$

Niech t będzie liczbą nieujemną. Wstawiając $x = \sqrt{t}$ do powyższego równania otrzymujemy $f(t) \geqslant 0$. Czyli f przyjmuje wartości nieujemne dla argumentów nieujemnych.

Wykażemy, że f jest niemalejąca. W tym celu rozpatrzmy dwie liczby rzeczywiste $a > b$. Mamy

$$f(a) = f(a - b) + f(b) \geqslant f(b),$$

co dowodzi postulowanej własności.

Na mocy Twierdzenia 1 mamy, że $f(x) = ax$ dla pewnej liczby rzeczywistej a. Podstawiając to do drugiego równania otrzymamy

$$ax \cdot ay = axy,$$
$$a^2 = a.$$

Stąd $a = 0$ lub $a = 1$. Łatwo sprawdzić, że obie funkcje $f(x) = 0$ i $f(x) = x$ spełniają warunki zadania.

■

Warto zwrócić uwagę na sposób, w jaki wykazano, że funkcja f jest niemalejąca. Da się go spotkać w wielu zadaniach tego rodzaju.

Przykład 3

Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dla których

$$f(f(x)^2 + f(y)) = xf(x) + y,$$

dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y.

Rozwiązanie

Zacznijmy od najprostszego podstawienia. Weźmy $x = y = 0$. Wówczas otrzymamy

$$f(f(0)^2 + f(0)) = 0.$$

Oznacza to, że istnieje liczba rzeczywista $a = f(0)^2 + f(0)$, że $f(a) = 0$. Wstawmy $x = a$

$$\begin{gathered} f(f(a)^2 + f(y)) = af(a) + y, \\ f(f(y)) = y. \end{gathered}$$

Następnie zastąpmy x przez $f(x)$ w wyjściowym równaniu

$$\begin{gathered} f(f(f(x))^2 + f(y)) = f(x)f(f(x)) + y, \\ f(x^2 + f(y)) = xf(x) + y. \end{gathered}$$

W wyjściowym równaniu mieliśmy

$$f(f(x)^2 + f(y)) = xf(x) + y.$$

Łącząc oba powyższe równania otrzymujemy

$$f(f(x)^2 + f(y)) = f(x^2 + f(y)).$$

Wykażemy, że funkcja f jest różnowartościowa. Zakładamy w tym celu, że dla pewnych liczb rzeczywistych a, b zachodzi $f(a) = f(b)$. Wtedy

$$a = f(f(a)) = f(f(b)) = b.$$

Stąd

$$\begin{gathered} f(f(x)^2 + f(y)) = f(x^2 + f(y)) \\ f(x)^2 + f(y) = x^2 + f(y) \\ f(x)^2 = x^2. \end{gathered}$$

Mamy więc, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi $f(x) = x$ lub $f(x) = -x$. Załóżmy więc, że dla pewnych niezerowych liczb rzeczywistych zachodzi $f(a) = -a$ i $f(b) = b$. Biorąc $x = a$ i $y = b$ otrzymujemy

$$f(a^2 - b) = -a^2 + b.$$

W zależności od tego, czy $f(a^2-b)$ jest równe a^2-b czy $-a^2+b$ otrzymujemy sprzeczność z niezerowością obu liczb a, b. Stąd albo $f(x) = x$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x albo $f(x) = -x$ dla wszystkich liczb rzeczywistych. Sprawdzając otrzymujemy, że obie te funkcje spełniają warunki zadania.

■

Należy zauważyć, że z faktu $f(x)^2 = x^2$ nie wynika jeszcze to, że $f(x) = x$ dla wszystkich x lub $f(x) = -x$ dla wszystkich x. Może się bowiem zdarzyć na przykład, że $f(1) = 1$ i $f(2) = -2$. Jest to dość znana pułapka i warto zwrócić na nią uwagę.

Zadanie 1

Dana jest funkcja spełniająca dla dowolnej liczby rzeczywistej x równość

$$f(f(x)) - f(x) = x.$$

Znaleźć liczbę liczb rzeczywistych a, takich, że $f(f(a)) = 0$.

Zadanie 2

Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ takie, że $f(f(n)) + (f(n))^2 = n^2 + 3n + 3$.

Zadanie 3

Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość:

$$f(x^2 + y) = f(x^{27} + 2y) + f(x^4).$$

Zadanie 4

Niech $f(n)$ będzie funkcją z dodatnich liczb całkowitych w dodatnie liczby całkowite. Wiadomo, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba $f(f(n))$ jest liczbą dodatnich dzielników n. Wykazać, że jeśli p jest liczbą pierwszą, wówczas $f(p)$ również jest liczbą pierwszą.

Zadanie 5

Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość:

$$f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2.$$

Zadanie 6

Wykazać, że istnieje taka funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że nie istnieje taka funkcja $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że zachodzi równość $f(x) = g(g(x))$.

Twierdzenia z teorii liczb

Na potrzeby następujących: lematu i twierdzenia, dla liczby całkowitej n oraz parami względnie pierwszych liczb m_1, ..., m_k przyjmiemy

$$G(n) = (n \pmod{m_1},\ n \pmod{m_2},\ \ldots,\ n \pmod{m_k}).$$

Chociażby dla $n = 25$ i $m_1 = 2$, $m_2 = 3$ i $m_3 = 7$ mamy

$$G(25) = (25 \pmod 2,\ 25 \pmod 3,\ 25 \pmod 7) = (1, 1, 4).$$

Zauważmy, że $G(n)$ na i-tej pozycji może przyjąć m_i wartości. A więc łącznie $G(n)$ może przyjąć $m_1 m_2 \cdot \ldots \cdot m_k$ wartości.

Lemat 1

Dane są parami względnie pierwsze liczby m_1, ..., m_k oraz dodatnie liczby całkowite x, y spełniające $m_1 m_2 \cdot \ldots \cdot m_k > x > y \geqslant 0$. Wykazać, że wówczas

$$G(x) \neq G(y).$$

Dowód

Załóżmy nie wprost, że $G(x) = G(y)$. Znaczy do tyle, że dla każdej liczby $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ zachodzi przystawanie

$$x \equiv y \pmod{m_i},$$

czyli równoważnie liczba $x - y$ jest podzielna przez m_i. Skoro m_i są parami względnie pierwsze, to liczba $x - y$ jest podzielna przez $m_1 m_2 \cdot \ldots \cdot m_k$. Z założeń zadania mamy zaś, że

$$m_1 m_2 \cdot \ldots \cdot m_k > x - y > 0,$$

co daje sprzeczność z wyżej otrzymaną podzielnością.

■

Chińskie twierdzenie o resztach

Dane są parami względnie pierwsze liczby m_1, ..., m_k oraz liczby całkowite a_1, ..., a_k. Wówczas istnieje taka liczba całkowita x, że zachodzą przystawania

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{m_1}, \\ x &\equiv a_2 \pmod{m_2}, \\ &\ldots, \\ x &\equiv a_k \pmod{m_k}. \end{aligned}$$

Dowód

Dla liczb m_1, ..., m_k rozpatrzmy krotki

$$G(0), G(1), G(2), \ldots, G(m_1 \cdot \ldots \cdot m_k - 1).$$

Powyższych liczb jest $m_1 \cdot \ldots \cdot m_k$. Wiemy, że $G(n)$ może przyjmować $m_1 \cdot \ldots \cdot m_k$ parami różnych wartości. Skoro na mocy Lematu 1 powyższe krotki są parami różne, to występuje tam po jednej krotce każdego z dostępnych rodzajów. Stąd też w szczególności istnieje krotka, która spełnia warunki narzucone przez liczby a_1, ..., a_k.

■

Powyższe twierdzenie innymi słowami znaczy to, że jeśli narzucimy na pewną liczbę warunki przystawania modulo, które nie są ze sobą sprzeczne, to istnieje liczba, która je spełnia. Dla przykładu warunki

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod{3}, \\ x &\equiv 1 \pmod{5}, \\ x &\equiv 5 \pmod{14}. \end{aligned}$$

są spełniane przez liczbę 131.

Względna pierwszość liczb m_1, m_2, ..., m_k zapewnia nas o tym, że nie zajdzie żadna sprzeczność w przystawaniach. Aby się przekonać, że bez powyższego założenia teza twierdzenia nie zajdzie, zauważmy, że nie istnieje liczba, która spełnia warunki

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{2}, \\ x &\equiv 4 \pmod{6}. \end{aligned}$$

Z pierwszego przystawania wynika jej parzystość, a z drugiego jej nieparzystość.

Twierdzenie 2

Dana jest liczba pierwsza p. Wówczas istnieje taka liczba $g \in \{1, 2, 3, ..., p-1\}$, że liczby

$$g,\ g^2,\ g^3,\ ...,\ g^{p-1}$$

dają parami różne reszty modulo p.

Innymi słowy reszty z dzielenia powyższych liczb są pewną permutacją reszt

$$1,\ 2,\ 3,\ ...,\ p-1.$$

Czyli dla dowolnej niezerowej reszty a, istnieje taka liczba naturalna k, że

$$a \equiv g^k \pmod{p}.$$

Liczbę g nazwiemy *generatorem* lub *pierwiastkiem pierwotnym* modulo p. Dowód powyższego twierdzenia pominiemy.

Przykładem generatora dla $p = 11$ jest $g = 6$. Istotnie

$$\begin{gathered} 6^1 \equiv 6,\ \ 6^2 \equiv 3,\ \ 6^3 \equiv 7,\ \ 6^4 \equiv 9,\ \ 6^5 \equiv 10, \pmod{11} \\ 6^6 \equiv 5,\ \ 6^7 \equiv 8,\ \ 6^8 \equiv 4,\ \ 6^9 \equiv 2,\ \ 6^{10} \equiv 1 \pmod{11}, \end{gathered}$$

liczba 6 wygenerowała wszystkie niezerowe reszty modulo 11.

Symbol Legendre'a

Dla pewnej liczby pierwszej p oraz liczby całkowitej n przyjmiemy

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \begin{cases} 1, \text{ gdy istnieje taka liczba całkowita } a \not\equiv 0, \text{ że } n \equiv a^2 \pmod p \\ -1, \text{ gdy nie istnieje taka liczba całkowita } a \not\equiv 0, \text{ że } n \equiv a^2 \pmod p \\ 0, \text{ gdy } n \equiv 0 \pmod p \end{cases}$$

W pierwszym przypadku powiemy, że n jest *resztą kwadratową*, a w drugim, że n jest *nieresztą kwadratową*.

Znanym faktem jest, że $\left(\frac{1}{3}\right) = 1$ oraz $\left(\frac{2}{3}\right) = -1$.

Lemat 2

Niech g będzie generatorem dla pewnej nieparzystej liczby pierwszej p oraz dla pewnych liczb naturalnych n, k zachodzi przystawanie

$$n \equiv g^k \pmod p$$

Wówczas n jest resztą kwadratową modulo p wtedy i tylko wtedy, gdy $2 \mid k$.

Dowód

Załóżmy, że zachodzą przystawania

$$n \equiv a^2 \pmod p \quad a \equiv g^l \pmod p.$$

Wówczas

$$n \equiv g^{2l} \pmod p,$$

czyli $k \equiv 2l \pmod{p-1}$. Skoro zarówno $2l$, jak i $p-1$ są parzyste, to k również jest liczbą parzystą.

W drugą stronę, jeśli

$$n \equiv g^{2l} \pmod p,$$

to biorąc $a \equiv g^k \pmod p$ otrzymamy tezę.

■

Twierdzenie 3

Dana jest liczba pierwsza p oraz liczby całkowite a, b. Wówczas zachodzi równość

$$\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{ab}{p}\right).$$

Dowód

Jeśli $\left(\frac{a}{p}\right) = 0$, to liczba a jest podzielna przez p. Wówczas liczba ab też będzie podzielna przez p, czyli $\left(\frac{ab}{p}\right) = 0$. W dalszej części rozwiązania zakładam, że żadna z liczb a, b, nie jest podzielna przez p.
Zapiszmy

$$a \equiv g^k \pmod p \quad b \equiv g^l \pmod p \quad ab \equiv g^k \cdot g^l = g^{k+l} \pmod p$$

dla pewnego generatora g. Wówczas, na mocy Lematu 1, teza sprowadza się do tego, że liczba $k+l$ będzie nieparzysta wtedy i tylko wtedy, gdy dokładnie jedna spośród liczb k, l będzie nieparzysta. A to jest oczywiście prawda.

■

Przykład 1

Wykazać, że dla dodatniej liczby całkowitej k, która nie jest podzielna przez $p-1$ zachodzi przystawanie

$$1^k + 2^k + 3^k + \dots + p^k \equiv 0 \pmod p.$$

Rozwiązanie

Rozpatrzmy generator g modulo p. Wówczas reszty z dzielenia przez p liczb

$$g,\ g^2,\ g^3,\ \dots,\ g^{p-1}$$

są pewną permutacją reszt

$$1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ p-1.$$

Stąd reszty z dzielenia przez p liczb

$$g^k,\ g^{2k},\ g^{3k},\ \dots,\ g^{k(p-1)}$$

to pewna permutacja liczb

$$1^k,\ 2^k,\ 3^k,\ \dots,\ (p-1)^k.$$

Skoro to są te same reszty, tylko w innej kolejności, to ich sumy muszą być sobie równe

$$1^k + 2^k + 3^k + \dots + p^k \equiv g^k + g^{2k} + g^{3k} + \dots + g^{k(p-1)} \equiv g^k \cdot \frac{g^{k(p-1)} - 1}{g^k - 1} \pmod p.$$

Z Małego Twierdzenie Fermata mamy

$$g^{k(p-1)} - 1 \equiv \left(g^k\right)^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod p.$$

Skoro $p-1 \nmid k$, to $g^k \not\equiv 1 \pmod p$. Mamy więc, że

$$g^k \cdot \frac{g^{k(p-1)} - 1}{g^k - 1} \equiv 0 \pmod p.$$

■

Zadanie 1

Wykazać, że dodatnia liczba całkowita n ma co najwyżej $2\sqrt{n}$ dzielników.

Zadanie 2

Liczbę nazwiemy *wielodzielną*, jeśli ma co najmniej 1000 dzielników. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba całkowita n, że liczby

$$n, n+1, n+2, \dots, n+1000$$

są wielodzielne.

Zadanie 3

Niech $d(n)$ oznacza liczbę dodatnich dzielników liczby n – włączając liczby 1 i n. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitch n, dla których liczba $\frac{n}{d(n)}$ również jest całkowita.

Zadanie 4

Dana jest nieparzysta liczba pierwsza p. Obliczyć wartość wyrażenia

$$\left(\frac{0}{p}\right) + \left(\frac{1}{p}\right) + \ldots + \left(\frac{p-1}{p}\right).$$

Zadanie 5

Niech p będzie liczbą pierwszą dającą resztę 2 z dzielenia przez 3. Dla pewnych liczb całkowitych a, b liczba $a^3 - b^3$ jest podzielna przez p. Wykazać, że liczba $a - b$ również jest podzielna przez p.

Zadanie 6

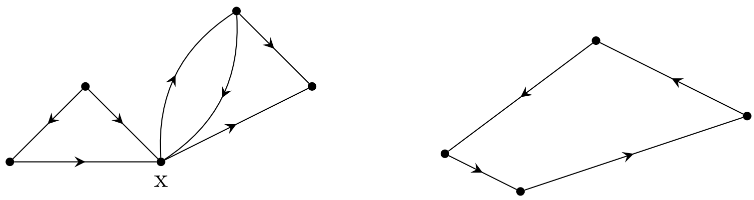
Niech $a_1, \ldots, a_n$ oraz $b_1, \ldots, b_n$ będą dodatnimi liczbami całkowitymi, że dla każdej liczby całkowitej $n-1 \geqslant i \geqslant 0$ zachodzi nierówność $b_{i+1} \geqslant 2b_i$. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych k, że nie zachodzi żadne z przystawań

$$\begin{aligned} k &\equiv a_1 \pmod{b_1}, \\ k &\equiv a_2 \pmod{b_2}, \\ &\ldots, \\ k &\equiv a_n \pmod{b_n}. \end{aligned}$$

Grafy skierowane

Definicje

Grafem skierowanym nazywamy taki graf, w którym każda z krawędzi jest skierowana jedną ze stron. Może zdarzyć się, że pomiędzy wierzchołkami są dwie krawędzie, każda skierowana w inną stronę. Przykład takiego grafu znajduje się na poniższym rysunku.



Cyklem w grafie skierowanym nazywamy taki ciąg krawędzi e_1, ..., e_k, że wierzchołek końcowy krawędzi e_i jest wierzchołkiem początkowym krawędzi e_{i+1} dla każdego $1 \leqslant i \leqslant n$ – przyjmujemy $e_{k+1} = e_1$. Przykład cyklu znajduje się na drugim rysunku powyżej.

Dla każdego wierzchołka definiujemy stopień wejściowy jako liczbę krawędzi, które „wchodzą” do danego wierzchołka i oznaczamy go symbolem $indeg(v)$. Analogicznie definiujemy stopień wyjściowy jako liczbę krawędzi, które „wychodzą” z danego wierzchołka – oznaczamy go jako $outdeg(v)$. Dla przykładowego grafu na rysunku powyżej i jego wierzchołka X mamy

$$indeg(x) = 3, \quad outdeg(x) = 2.$$

Lemat 1

W grafie skierowanym, w którym dla każdego wierzchołka v zachodzi

$$out(v) \geqslant 1$$

istnieje cykl.

Dowód

Rozpatrzmy dowolny wierzchołek v_1. Z warunków zadania istnieje krawędź wychodząca z niego. Przejdźmy nią do pewnego wierzchołka v_2. Kontynuujmy takie przechodzenie – oznaczmy jako v_i wierzchołek, który odwiedzimy jako i-ty. Jako, że wierzchołków jest skończenie wiele, to w pewnym momencie trafimy do wierzchołka, w którym już byliśmy. Załóżmy, że wierzchołek v_{b+1} jest tym samym wierzchołkiem co wierzchołek v_a. Wówczas wierzchołki

$$v_a, \; v_{a+1}, \; v_{a+2}, \; ..., \; v_{b-1}, \; v_b$$

tworzą cykl.

■

Przykład 1

Pewne $n \geqslant 2$ osób zostało przydzielonych do n pokoi, przy czym w każdym pokoju znajduje się dokładnie jedna osoba. Każda z osób ustaliła listę preferencji posortowała pokoje w pewnej kolejności. Wiadomo, że jeśli przyporządkowano by pokoje w inny sposób, to znalazła by się osoba, dla której nowy pokój był niżej na jej liście niż pierwotnie przyporządkowany jej pokój. Wykazać, że istnieje osoba, która ma na najwyższym miejscu swojej listy pokój, który został jej przyporządkowany.

Rozwiązanie

Zadanie w treści nie zawiera słowa „graf". Jednak czasami warto sobie taki graf stworzyć. Rozpatrzmy więc graf skierowany, który ma n wierzchołków – ponumerujmy je liczbami od 1 do n. Jeśli osoba, której przyporządkowano pokój i ma na najwyższym miejscy swojej listy preferencji pokój j, to graf będzie zawierał krawędź z i do j.

Załóżmy nie wprost, że szukana osoba nie istnieje – tj. z każdego wierzchołka wychodzi dokładnie jedna krawędź. Wówczas na mocy Lematu 1 w rozpatrywanym grafie istnieje cykl – powiedzmy, że przechodzi przez wierzchołki

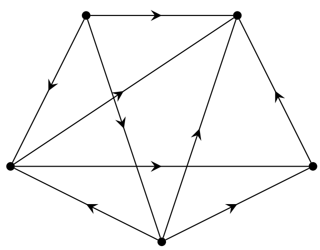
$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_k.$$

Wówczas przydzielając osobie z pokoju a_i pokój a_{i+1} dla każdego $1 \leqslant i \leqslant k$, gdzie $a_{k+1} = a_1$, otrzymamy przyporządkowanie, w którym każda osoba otrzyma subiektywnie lepszy pokój niż wcześniej. Jest to jednak sprzeczne z założeniami.

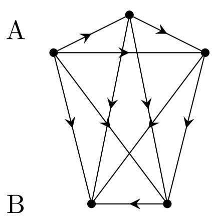
■

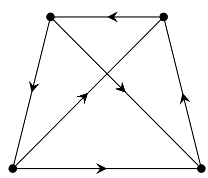
Turnieje

Zdarza się, że w zadaniu są rozpatrywane pewne zawody, w których wzięła udział pewna liczba graczy, każda para rozegrała mecz, który zakończył się zwycięstwem jednej ze stron. Możemy wówczas rozpatrzyć graf skierowany, w którym wierzchołki będą odpowiadały graczom. Pomiędzy każdą dwójką graczy będzie występowałą dokładnie jedna krawędź i będzie ona skierowana w stronę zwycięzcy. Taki graf nazywamy *turniejem* – przykład znajduje się na rysunku.



Turniej nazwiemy *redukowalnym*, gdy możemy podzielić jego uczestników na dwa niepuste zbiory A oraz B, takie, że każdy uczestnik z A wygrał z każdym uczestnikiem z B. Przykład takiego turnieju narysowano poniżej po lewej stronie.





Turniej nazwiemy *cyklicznym*, gdy istnieje w nim cykl, który przechodzi przez każdy wierzchołek dokładnie raz. Przykład takiego turnieju znajduje się po prawej stronie powyższego rysunku.

Zachęcamy do samodzielnego zmierzenia się z poniższymi Lematami.

Lemat 2

Turniej jest redukowalny wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest cykliczny.

Dowód

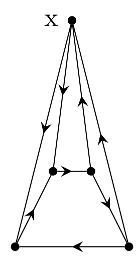
Zauważmy, że jeśli turniej jest redukowalny, to nie może on zawierać żadnego cyklu. Graf ten wówczas da się podzielić na dwie części A oraz B, takie, że każdy uczestnik z A wygrał z każdym uczestnikiem z B. Załóżmy, że istnieje pewien cykl $v_1,\ v_2,\ ,...,\ v_k$. Wówczas część jego wierzchołków należy do A, a reszta do B. Stąd istnieje takie i, że v_i należy do B, a v_{i+1} należy do A. Jednak wówczas v_{i+1} wygrałby z v_i, co daje sprzeczność.

Przejdźmy teraz do trudniejszej części – tj. wykazania, że jeśli graf nie jest cykliczny, to jest redukowalny. Rozpatrzmy największy cykl

$$v_1,\ v_2,\ v_3,\ ...,\ v_k$$

w danym grafie. Skoro graf ten nie jest cykliczny, to istnieje pewien wierzchołek x spoza cyklu.

<u>Obserwacja 1.</u> Jeśli x jest wierzchołkiem spoza cyklu, to albo x przegrał z wszystkimi wierzchołkami z cyklu, albo x wygrał z wszystkimi wierzchołkami z cyklu.



Załóżmy, że x przegrał z niektórymi wierzchołkami z cyklu, a z niektórymi wygrał. Wówczas istnieje takie i, że x wygrał z v_{i+1}, a przegrał z v_i – oczywiście przyjmujemy $v_{k+1} = v_1$. Wówczas wierzchołki

$$v_1,\ v_2,\ ...,\ v_i,\ x,\ ,v_{i+1},\ ...,\ v_k$$

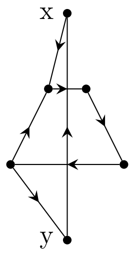
tworzyłyby cykl, co przeczy założonej maksymalności cyklu wyjściowego.

Możemy więc podzielić wierzchołki na trzy grupy:

- grupę A – wierzchołków spoza rozpatrywanego cyklu, które wygrały z każdym z wierzchołków z cyklu,
- grupę B – wierzchołków spoza rozpatrywanego cyklu, które przegrały z każdym z wierzchołków z cyklu,

- grupę C – wierzchołki z rozpatrywanego cyklu.

Obserwacja 2. Jeśli x należy do grupy A, a y do grupy B, to x wygrał z y.



Załóżmy nie wprost, że y wygrał z x. Wówczas wierzchołki

$$v_1,\ y,\ x,\ v_2,\ \ldots,\ v_k,$$

tworzyłyby większy cykl – sprzeczność.

Skoro nie wszystkie wierzchołki należą do do grupy C, to istnieje inna grupa, która jest niepusta – przyjmijmy bez straty ogólności, że jest to grupa A. Wówczas podział na zbiory $A \cup C$ oraz B dowodzi redukowalności grafu.

■

Lemat 3

Jeśli turniej o $n \geqslant 4$ wierzchołkach jest cykliczny, to zawiera cykl o długości równiej $n-1$.

Dowód

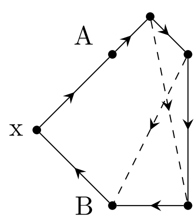
Usuńmy pewien wierzchołek x. Otrzymany graf zawiera $n-1$ wierzchołków, więc jeśli jest cykliczny, to wynika z tego teza. Załóżmy więc, że tak nie jest – na mocy Lematu 2 jest on redukowalny. Niech więc rozpatrywany graf składa się z wierzchołka x oraz niepustych zbiorów wierzchołków A oraz B, przy czym każdy wierzchołek z A wygrał z każdym wierzchołkiem z B.

Skoro rozpatrywany graf jest cykliczny, to istnieje cykl

$$x,\ v_1,\ ,v_2,\ \ldots,\ v_{n-1}.$$

Zauważmy, że jeśli v_{i+1} należy do A, to jako, że v_i wygrało z v_{i+1}, to nie może należeć ono do B. Stąd również należy do A. Stąd też istnieje takie t, że

$$v_1,\ ,v_2,\ \ldots,\ v_t \in A, \quad v_t,\ ,v_{t+1},\ \ldots,\ v_{n-1} \in B.$$



Jeśli $t \geqslant 2$, to oznacza, że istnieje v_{t-1}. Skoro $v_{t-1} \in A$ oraz $v_{t+1} \in B$, to v_{t-1} wygrał z v_{t+1}. Czyli

$$x,\ v_1,\ ,v_2,\ \ldots,\ ,v_{t-1},\ v_{t+1},\ \ldots,\ v_{n-1}$$

jest cyklem o długości $n-1$. Jeśli zaś $t = 1$, to $t+2 = 3 \leqslant n-1$. Analogicznie jak powyżej wykazujemy, że v_t wygrał z v_{t+2}, czyli

$$x,\ v_1,\ ,v_2,\ \ldots,\ ,v_t,\ v_{t+2},\ \ldots,\ v_{n-1}$$

jest cyklem o długości $n-1$.

■

Zadanie 1

Dany jest graf skierowany zawierający $2m$ krawędzi. Wykazać, że możemy usunąć pewne m z nich, aby graf ten nie zawierał cyklu.

Zadanie 2

Wykazać, że w dla każdego turnieju da się ustawić graczy w rzędzie w pewnej kolejności, tak, aby każdy wygrał z graczem po swojej prawej stronie.

Zadanie 3

Niech G będzie grafem skierowanym, w którym stopnie: wejściowy i wyjściowy każdego z wierzchołków są równe 2. Wykazać, że możemy podzielić wierzchołki na trzy, być może puste, zbiory, aby żaden wierzchołek v wraz z dwoma wierzchołkami, będącymi końcami wychodzącymi z v krawędzi, nie znajdowały się wszystkie w jednym ze zbiorów.

Zadanie 4

W pewnym turnieju brało udział 1000 osób – nazwijmy ich A_1, A_2, ..., A_{1000}. Parę uczestników tego turnieju (A_i, A_j) nazwiemy *zwycięską*, gdy nie istnieje inny uczestnik tego turnieju A_k, który pokonał obu uczestników z tej pary. Rozstrzygnąć, czy może się tak zdarzyć, aby każda z par (A_1, A_2), (A_2, A_3), ..., (A_{999}, A_{1000}), (A_{1000}, A_1) była zwycięska.

Zadanie 5

Dany jest turniej o n uczestnikach oraz pewna dodatnia liczba całkowita k. Każdy z uczestników uzyskał jednakową liczbę zwycięstw oraz dla dowolnych dwóch różnych uczestników tego turnieju a, b, liczba uczestników, którzy przegrali zarówno z a, jak i z b wynosi k. Wykazać, że liczba $n+1$ jest podzielna przez 4.

Zadanie 6

Wykazać, że wierzchołki grafu można pokolorować na jeden z k kolorów, tak, by żadne dwa wierzchołki tego samego koloru nie były połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy krawędzie tego grafu da się tak skierować, by nie istniała ścieżka składająca się z $k+1$ różnych wierzchołków.

Ciągi

Ciągiem $(a_n)_{n\geqslant 0}$ nazywamy funkcję ze zbioru liczb nieujemnych całkowitych w zbiór liczb rzeczywistych. Innymi słowy każdemu indeksowi i jest przyporządkowana pewna liczba rzeczywista a_i. Najbardziej znanym przykładem ciągu jest *ciąg Fibonacciego*. Jest on dany wzorem

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ dla } n \geqslant 0.$$

Można obliczyć, że

$$F_2 = 1,\ F_3 = 2,\ F_4 = 3,\ F_5 = 5,\ F_6 = 8,\ F_7 = 13,\ F_8 = 21,\ F_9 = 34,\ \ldots$$

Zauważmy, że każdy kolejny wyraz tego ciągu jest zależny od poprzedzających go elementów. Ciągi tak zdefiniowane nazywamy *ciągami rekurencyjnymi*. Można jednak wyznaczyć wzór na każdy element ciągu Fibonacciego, który nie jest rekurencyjny – zależy tylko od indeksu danego elementu ciągu. Wyprowadzenie tego wzoru jest bardzo pomysłowe i zastosowanie podobnego postępowania pozwala na wyprowadzenie wzoru ogólnego wielu innych ciągów rekurencyjnych.

Wzór ogólny na wyrazy ciągu Fibonacciego

Zapomnijmy na chwilę o warunkach $F_0 = 0, \quad F_1 = 1$ i spróbujmy znaleźć jakieś ciągi, dla których również zachodzi równanie rekurencyjne $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, ale mają one prosty do wyprowadzenie wzór ogólny. Zobaczmy na ciągi dane wzorem $a_n = x^n$ dla pewnej liczby rzeczywistej x – być może dla pewnej liczby rzeczywistej x będą one spełniały postulowane równanie rekurencyjne. Przyjmuje ono postać

$$x^{n+2} = x^{n+1} + x^n,$$
$$x^2 = x + 1.$$

Rozwiązując powyższe równanie kwadratowe możemy dojść do wniosku, że ciągi

$$a_n = \alpha^n,\ \text{gdzie } \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{i} \quad a_n = \beta^n,\ \text{gdzie } \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

spełniają daną rekurencję.

Zauważmy, że dla dowolnych liczb rzeczywistych A oraz B ciąg

$$c_n = Aa_n + Bb_n$$

również będzie spełniał rekurencję $c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$. Istotnie

$$c_{n+2} = Aa_{n+2} + Bb_{n+2} = A(a_{n+1} + a_n) + B(b_{n+1} + b_n) =$$
$$= (Aa_{n+1} + Bb_{n+1}) + (Aa_n + Bb_n) = c_{n+1} + c_n.$$

Postaramy się poruszać liczbami A oraz B, tak, by ciąg c_n spełniał równości

$$c_0 = F_0 = 0,\ c_1 = F_1 = 1.$$

Wówczas, co nietrudno zauważyć, ciągi F i c będą sobie równe. W tym celu wystarczy rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} Aa_0 + Bb_0 = A + B = 0 \\ Aa_1 + Bb_1 = \alpha \cdot A + \beta \cdot B = 1. \end{cases}$$

Powyższe równości zachodzą dla $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$ i $B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Toteż otrzymujemy zależność

$$F_n = c_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot a_n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot b_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}.$$

Przykład 1

Wykazać, że dla każdej liczby całkowitej $M > 1$ istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że F_n jest podzielne przez M.

Rozwiązanie

Najpierw wykażemy, że ciąg reszt z dzielenia liczb F_n przez M jest okresowy. Reszt z dzielenia przez M jest skończenie wiele. Również liczba wartości jakie może przyjąć para $(F_i \pmod M,\ F_{i+1} \pmod M)$ jest skończona. Toteż istnieją takie liczby $i < j$, dla których

$$F_i \equiv F_j \pmod M \quad \text{oraz} \quad F_{i+1} = F_{j+1} \pmod M.$$

Możemy zauważyć, że

$$F_{j+2} \equiv F_{j+1} + F_j \equiv F_{i+1} + F_i \equiv F_{i+2} \pmod M.$$

Kontynuując to rozumowanie można wykazać, że $F_{i+k} \equiv F_{j+k} \pmod M$ dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej k. Możemy się również „cofać”, to jest

$$F_{j-1} \equiv F_{j+1} - F_j \equiv F_{i+1} - F_i \equiv F_{i-1} \pmod M.$$

i w ten sposób wykazać, że $F_{i+k} \equiv F_{j+k} \pmod M$ również zachodzi dla dowolnej liczby całkowitej ujemnej k. Otrzymaliśmy więc, że

$$\begin{aligned} F_{i+k} &\equiv F_{j+k} \pmod M \\ F_k &\equiv F_{k+(j-i)} \pmod M \\ F_k &\equiv F_{k+t} \pmod M, \end{aligned}$$

dla pewnej dodatniej liczby całkowitej t.

Zauważmy, że $F_0 \equiv 0 \pmod M$. Wówczas

$$0 \equiv F_0 \equiv F_t \equiv F_{2t} \equiv F_{3t} \equiv \ldots \pmod M,$$

co kończy dowód.

■

Przykładowo dla $M = 4$ ciąg reszt F_n z dzielenia przez M wygląda następująco

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Przykład 2

Znajdź wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 3$, dla których istnieją liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots a_{n+2}$ spełniające $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ oraz

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2},$$

dla $i = 1, 2, \ldots, n$.

Rozwiązanie

W tego typu zadaniach zawsze warto sprawdzić co się dzieje dla niewielkich liczb n. Czytleniczce/czytelnikowi pozostawiamy jako ćwiczenie zobaczenie, że w przypadkach $n = 1$ i $n = 2$ szukany ciąg nie istnieje. Dla $n = 3$ otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} a_1a_2 + 1 = a_3, \\ a_2a_3 + 1 = a_1, \\ a_3a_1 + 1 = a_2. \end{cases}$$

Metodą zgadywania można sprawdzić, że $a_1 = a_2 = -1, a_3 = 2$ spełnia warunki zadania. Czytelniczka/czytelnik może zadać pytanie, jak zgadywać takie rzeczy. Warto podstawić sobie kolejno $a_1 = 1, 0, -1$ i zobaczyć co z tego wynika. Jeśli każde z tego typu prostych podstawień doprowadza do sprzeczności, to można postawić hipotezę, że układ nie ma rozwiązań. Niemniej jednak w tym przypadku takie rozwiązania istnieją.

Można łatwo zauważyć, że skoro dla $n = 3$ szukany ciąg istnieje, to takowy będzie istniał również dla $n = 3k$ dla dowolnej liczby dodatniej całkowitej k. Wystarczy bowiem rozpatrzyć ciąg postaci

$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ ...,\ a_1,\ a_2,\ a_3).$$

Rozpatrzmy ciąg (a_n) spełniający warunki zadania. Mamy

$$a_ia_{i+1} + 1 = a_{i+2},$$

$$a_ia_{i+1}a_{i+2} + a_{i+2} = a_{i+2}^2,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_ia_{i+1}a_{i+2} + \sum_{i=1}^{n} a_{i+2} = \sum_{i=1}^{n} a_{i+2}^2.$$

W podobny sposób otrzymujemy

$$a_ia_{i+1} + 1 = a_{i+2},$$

$$a_{i-1}a_ia_{i+1} + a_{i-1} = a_{i+2}a_{i-1},$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i-1}a_ia_{i+1} + \sum_{i=1}^{n} a_{i-1} = \sum_{i=1}^{n} a_{i+2}a_{i-1}.$$

Pozostaje zauważyć, że

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i-1} = \sum_{i=1}^{n} a_{i+2} \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^{n} a_{i-1}a_ia_{i+1} = \sum_{i=1}^{n} a_ia_{i+1}a_{i+2},$$

gdyż jest to sumowanie tych samych liczb, tylko w innej kolejności. Mamy więc równość

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i+2}^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{i+2}a_{i-1}.$$

Zauważmy, że $\sum_{i=1}^{n} a_{i+2}^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{i-1}^2$, skąd

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a_{i+2}^2 + a_{i-1}^2 - 2a_{i+2}a_{i-1}\right) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a_{i+2} - a_{i-1}^2\right)^2 = 0.$$

Otrzymujemy stąd, że $a_{i-1} = a_{i+2}$, czyli $a_i = a_{i+3}$. Jeśli n jest niepodzielne przez 3, to w ciągu równości

$$a_1 = a_4 = a_7 = \ldots$$

pojawią się wszystkie elementy ciągu, toteż wszystkie muszą być równe. Ale jeśli $a_1 = a_2 = a_3$, to

$$a_1^2 + 1 = a_1,$$

co nie ma rozwiązań.

■

Powyższe zadanie ma dwa pouczające przesłania. Po pierwsze pokazuje, jak często rozważanie małych przypadków naprowadza na postawienie poprawnych hipotez. Po drugie, warto czasami po prostu nieco pobawić się tożsamościami algebraicznymi, gdyż można dojść w ten sposób do ciekawych wniosków. Może wydawać się, że to rozwiązania wynika znikąd, no ale czasem tak po prostu jest – trzeba takich rzeczy też poszukać.

Zadanie 1

Dana jest liczba pierwsza $p > 3$. Wykazać, że istnieje taki ciąg arytmetyczny dodatnich liczb całkowitych $\{x_i\}$, że $x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_p$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 2

Dany jest ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_n$ liczb rzeczywistych, że dla dowolnych liczb całkowitych $n \geqslant i, j \geqslant 1$ zachodzi równość

$$a_i + a_j \geqslant |i - j|.$$

Wyznaczyć najmniejszą możliwą sumę elementów tego ciągu.

Zadanie 3

Ciąg u_n dany jest wzorem $u_0 = 1, u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+3}$. Wykaż, że $u_1 + u_2 + \ldots + u_{2021} < 1$

Zadanie 4

Znajdź wszystkie liczby rzeczywiste x, że ciąg dany wzorem

$$a_0 = x, \quad a_n = 2^n - 3a_n,$$

dla dowolnej liczby naturalnej n spełnia zależność

$$a_n > a_{n-1}.$$

Zadanie 5

Dany jest ciąg

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}.$$

Rozstrzygnąć, czy $a_{5000} > 100$.

Zadanie 6

Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby rzeczywiste α, dla których istnieje ciąg dodatnich liczb rzeczywistych $x_1, x_2, x_3, \ldots$ o tej własności, że dla wszystkich $n \geqslant 1$:

$$x_{n+2} = \sqrt{\alpha x_{n+1} - x_n}.$$

Zadanie 7

Dany jest ciąg

$$a_0 = 6, \quad a_n = a_{n-1} + NWD(n, a_{n-1}).$$

Wykazać, że $NWD(n, a_{n-1})$ jest liczbą pierwszą lub jest równe 1.

Podpowiedzi 1

Indukcja matematyczna

1. Przeprowadź rozumowanie indukcyjne po liczbie wierzchołków n.
2. Sprawdź, że równość zachodzi dla $n = 1$. Załóż, że równość zachodzi dla n i spróbuj wykazać ją dla $n + 1$.
3. Przeprowadź indukcję po liczbie n. Skorzystaj dla wszystkich początkowych dysków poza najniżej położonym.
4. Rozpatrz $n + 1$ punktów i zobacz co się stanie jeśli usuniemy jeden z nich.
5. Spróbuj wykazać tezę inducją po n. Aby to zrobić, trzeba będzie wykazać indukcyjnie inną równość pomocniczą.
6. Spróbuj podzielić planszę $2^{n+1} \cdot 2^{n+1}$ na kilka części.
7. Zastosuj indukcję co 2.

Równania funkcyjne

1. Podstaw $y = 0$.
2. Przyjmij $x = f(y)$.
3. Wykaż, że $f(0) = 0$.
4. Podstaw $1 - x$ pod x.
5. Skorzystaj z danego równania dla $x = 0$.
6. Podstaw $y = -x$.
7. Przymij $x = 0$.
8. Podstaw $f(x)$ w miejsce x.
9. Podstaw: $x = y = 0$ oraz $x = y$.
10. Wykaż, że f jest różnowartościowa.

Bijekcje i bajki kombinatoryczne

1. Na ile sposobów spośród n osób możesz wybrać drużynę i mianować jedego z jej członków kapitanem?
2. Suma liczb rozpatrywanego zbioru wynosi 55.
3. Podzielmy $2n$ osób na dwie grupy po n osób. Załóżmy, że z pierwszej grupy wybieramy k osób. Na ile sposobów możesz to zrobić?

4. „Jeśli pewna permutacja należy do A_1, to jeśli pomnożymy wszystkie jej elementy przez 2, to będzie należała do A_2." To stwierdzenie nie jest poprawne, ale wyraża pomysł na to zadanie.

5. Rozpatrz liczbę podziałów kn osób na k grup po n osób. Nie bierz pod uwagę żadnej kolejności grup, ani kolejności osób w grupie.

6. Zbiory, których średnia arytmetyczna jest liczbą całkowitą, zawierające więcej niż 1 element podziel na pary.

7. Wykaż, że obie strony równości to liczba słów, które składają się z $n+1$ liter A oraz r liter B.

Liczby pierwsze i reszty z dzielenia

1. Weź n podzielne przez $p-1$.

2. Przemnóż obie strony przez $b(p-1)!$.

3. Podstaw $n = p - k$ dla pewnej konkretnej liczby całkowitej k.

4. Podziel zbiór $\{1,\ 2,\ 3,\ ...,\ p-1\}$ na pary liczb $(a,\ b)$, dla których $ab \equiv 1 \pmod{p}$.

Nierówności między średnimi

1. Skorzystaj z AM-GM dla trzech liczb.

2. Przeszacuj każdy z nawiasów z osobna.

3. Przekształć nierówność zanim skorzystasz ze średnich.

4. Zauważ, że $a^2 \geqslant 2a - 1$.

5. Dodaj coś do obu stron, aby prawa stona równości była ładna.

Konstrukcje

1. Niech pokolorowane pola tworzą kwadrat.

2. Podziel płaszczyznę na kratki.

3. Podziel trójkąt na mniej takich czworokątów.

4. Rozpatrz rozkłady na czynniki pierwsze.

5. Rozpatrz planszę 7×7, na której każde pole reprezentuje pewną osobę.

6. Spróbuj rozwiązać zadania dla $a+1$ i $a+2$.

Wielomiany

1. Załóż nie wprost, że istnieje pewne niecałkowite α, że $W(\alpha) = 0$.
2. Rozpatrz wielomian o pierwiastkach a, b i c.
3. Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n wielomian $x^{3n-1} + x + 1$ jest podzielny przez wielomian $x^2 + x + 1$.
4. Przeprowadź indukcję po stopniu P.
5. Rozpatrz wielomian $Q(x) = W(x) - 5$.
6. Wykaż, że Tomek jest w stanie, niezależnie od n wygrać w 2 ruchach.
7. Taki wielomian nie istnieje. Skorzystaj z podobnego pomysłu co we wzorach Viete'a we wstepie teoretycznym.

Wielomiany

1. Rozpatrz najdłuższą ścieżkę w grafie i spróbuj ją wydłużyć.
2. Skorzystaj z indukcji matematycznej.
3. Rozpatrz graf, w którym wierzchołkami będa drużyny. Połączymy je czerwoną krawędzią, gdy grały mecz pierwszego dnia, zieloną, gdy drugiego.
4. Wykaż, że mając pewien graf z pewnym kolorowaniem, to wybierając dwa dowolne wierzchołki u oraz v jesteśmy w stanie zmienić parzystość liczby kolorowych krawędzi wychodzących z nich, nie naruszając tej liczby dla innych wierzchołków.
5. Wybierz jeden wierzchołek, następnie usuń wszystkich jego sąsiadów. Powtarzaj taki krok z otrzymanym grafem, aż wszystkie wierzchołki zostaną usunięte. Wybierając mądrze wierzchołki możemy zrobić to tak, że wybierzemy ich odpowiednio dużo.
6. Odpowiedzią jest $N = 10$.

Indukcja matematyczna 2

1. Zauważ, że jeśli kwotę k złotych da się opłacić w szukany sposób, to kwotę $k + 3$ również.
2. Rozpatrz punkty (a, b), dla których zachodzi równość $a + b = n + 1$.
3. Spróbuj rozwiązać zadanie dla liczb podzielnych przez 2, 4, i 8.
4. Usuń pewien specyficzny wierzchołek i zastosuj założenie indukcyjne.
5. Wstaw $n = 1$. Wykaż, że $f(n) = n$ korzystając z indukcji zupełnej po n.

6. Wykaż ogólniejszą tezę: Niech $\mathcal{R}$ będzie rodziną zbiorów n-elementowych. Moc $\mathcal{R}$ jest większa niż $n! \cdot k^n$ Wówczas istnieje $k+1$-elementowa rodzina $\mathcal{G}$, będąca podrodziną $\mathcal{R}$, oraz taki zbiór X, że dla dowolnych zbiorów $A, B \in \mathcal{R}$ zachodzi $A \cap B = X$.

Podzielności

1. Rozpatrz największą liczbę całkowitą k, że $n \geqslant k^2$.
2. Zamień wszystkie założenia i tezę na wyrażenia związane z v_p.
3. Załóż nie wprost, że jeśli d i $d+2$ są dzielnikami $4n$, to liczba $d+1$ również.
4. Wykaż, że $a+1 \mid b+1$.
5. Wykaż, że a i b dają tę samą resztę z dzielenia przez p.
6. Załóż, że $v_p(a)$ nie jest podzielne przez k. Weź odpowiednie n, aby uzyskać sprzeczność.

Gry

1. Zawsze da się uzyskać 1. Wykazać, że da się, być może w kilku ruchach, zmniejszyć zapisaną na tablicy liczbę.
2. Analizuj pola tabeli $m \times n$ jako stany wygrywające i przegrywające.
3. Wykaż, że liczby parzyste są wygrywające.
4. Podziel planszę na pewne figury. Rozważ strategię, która każde drugiemu graczowi stawiać swój znak w tej samej figurze, w której postawił go gracz pierwszy.
5. Niech dla pewnej liczby n w pierwszych $4n$ ruchach nauczyciel narysuje kwadrat o boku n.
6. Przyjmijmy, że na każdym kamieniu są miejsca na zapisanie dwóch liczb. Jeśli pewna dziewczyna a przekaże dziewczynie b kamień po raz pierwszy, to o ile na kamieniu nie jest nic zapisane, to zapisuje się tam numery a i b. Jeśli pewna dziewczyna musi przekazać kamień swojej sąsiadce, to jeśli dysponuje kamieniem z zapisanymi numerami swoimi i sąsiadki, to przekaże jej właśnie go. Zobacz, co z tego wynika.

Bardziej zaawansowane nierówności

1. Skorzystaj z nierówności Schwarza w formie Engela.
2. Rozpatrzmy ciągi (a^2, b^2, c^2) oraz bc, ac, ab.
3. Przyda się jedynka trygonometryczna, jak i fakt, że sinus i cosinus przyjmują wartości o module mniejszym od 1.

4. Skorzystaj z nierówności o ciągach jednomonotonicznych.

5. Zobacz co się stanie, gdy podstawisz $a = 0$.

Równania funkcyjne i wielomianowe

1. Wykaż, że $f(f(0)) = 0$ oraz, że jeśli $f(f(a)) = 0$, to $a = 0$.

2. Udowodnij, że $f(1) = 2$.

3. Zauważ, że da się podstawić takie y, aby $f(x^2 + y) = f(x^{27} + 2y)$.

4. Niech $d(n)$ oznacza liczbę dzielników. Wykaż, że $d(f(n)) = f(d(n))$.

5. Podstaw $x = 0$. Wykaż, że f jest różnowartościowa i że przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste.

6. Niech f będzie różnowartościową funkcją, która przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste poza zerem.

Twierdzenia z teorii liczb

1. Zauważ, że jeśli d dzieli n, to $\frac{n}{d}$ również dzieli n.

2. Taka liczba istnieje.

3. Rozpatrz liczby postaci a^k.

4. Sprawdź dla małych p ile ta suma wynosi.

5. Użyj generatorów modulo p.

6. Wykaż, że jedna spośród liczb od 1 do $b_1 b_2 \cdot \ldots \cdot b_n$ spełnia warunki zadania.

Grafy skierowane

1. Ponumeruj wierzchołki od 1 do n. Usuń wszystkie krawędzie, dla których wierzchołek początkowy ma mniejszy numer niż końcowy. Co się wówczas stanie?

2. Zauważ, że teza dla grafu cyklicznego jest trywialna.

3. Rozpatrz taki podział, w którym liczba krawędzi, mających dwa końce w jednym zbiorze jest minimalna.

4. Zauważ, że A_k oraz A_{k+1} zdobyli razem co najmniej 999 punktów. Wykaż, że jeśli zdobyli ich co najmniej 1000, to łączna liczba punktów zdobyta przez wszystkich graczy nie będzie się zgadzać.

5. Każda z osób musiała zdobyć $\frac{n-1}{2}$ punktów.

6. Usuń z grafu tyle krawędzi, aby nie było żadnego cyklu i liczba usuniętych krawędzi była najmniejsza możliwa.

Ciągi

1. Jeśli przemnożymy wszystkie wyrazy ciągu arytemtycznego przez k, to co się stanie?

2. Odpowiedź wynosi $n(n+1)$.

3. Znajdź wzór na u_n. Spróbuj policzyć u_n dla małych n.

4. Znajdź wzór ogólny na a_n.

5. Podnieś równanie rekurencyjne do kwadratu stronami.

6. Zauważ, że liczba pod piewiastkiem musi być dodatnia.

7. Wykaż również, że jeśli dla pewnej liczby całkowitej n zachodzi nierówność $\mathrm{NWD}(n, a_{n-1}) > 1$, to $a_n = 3n$.

Podpowiedzi 2

Indukcja matematyczna

1. Rozpatrz trójkąt tworzony przez trzy kolejne wierzchołki n-kąta.
2. Odejmij stronami tezę zadania dla $n+1$ i n.
3. Z założenia indukcyjnego możemy przenieść wszystkie dyski, poza najniżej położonym, na drugą igłę. Należy zauważyć, że dysk, którego nie używamy nie przeszkodzi w wykonaniu takiego przełożenia.
4. Co mówi założenie indukcyjne? Rozpatrz przypadek, gdy z wyróżnionego punktu wychodza krawędzie różnych kolorów.
5. Wykaż, że dla każdej liczby n zachodzi równość $a_{n+1} = 1 - a_1 a_2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$..
6. Podziel planszę na cztery części na pomocą dwóch prostych.
7. Usuń dwie liczby i podziel na dwa zbiory o równej sumie elementów.

Równania funkcyjne

1. *
2. Zauważ, że f jest funkcją liniową.
3. Podstaw $x = 0$ i $y = -f(0)$.
4. Otrzymane równanie tworzy z równaniem wyjściowym układ równań.
5. Wykaż, że $f(x) = x + a$ dla pewnej liczy a.
6. Zauważ, że wartość wyrażania $f(x) - x$ musi być stała. Skorzystaj z różnowartościowości f.
7. Przyjmij $y = 0$.
8. Zauważ, że $f(x+1) = f(f(f(x))) = f(x) + 1$.
9. Wykonaj podstawienie $x = 0$. Wykaż, że $f(x+y) = f(x-y)$.
10. Załóż, że $f(a) = f(b)$ i wykaż, że $a = b$.

Bijekcje i bajki kombinatoryczne

1. Na ile sposobów możesz to zrobić, jeśli założysz, że drużyna składa się z k osób?
2. Połącz zbiory w pary, tak, aby zbiór spełniający warunki zadania był połączony ze zbiorem, który ich nie spełnia.
3. *

4. Znajdź taką funkcję f ze zbioru $\{1, 2, 3, ..., p\}$ w zbiór $\{1, 2, 3, ..., p\}$, że dla każdego x zachodzi równość $f(x) \equiv 2x \pmod p$.

5. Wykaż, że takich podziałów jest $\dfrac{(kn)!}{(n!)^k \cdot k!}$.

6. Zauważ, że zbiór może zawierać i nie zawierać swojej średniej arytmentycznej.

7. Przyjmij, że na miejscu $n + k + 1$ znajduje się ostatnia litera A.

Liczby pierwsze i reszty z dzielenia

1. Wykaż, że jeśli n dzieli się przez $p - 1$, to $2^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

2. Zauważ, że dzielenie przez i to jest mnożenie przez i^{-1}.

3. Podstaw $n = p - 2$.

4. Zauważ, że każda liczba poza -1 i 1 będzie w parze z dokładnie jedną inną liczbą. Dlaczego 1 i -1 nie mają tej własności.

Nierówności między średnimi

1. Skorzystaj z tej nierówności dla liczb, których iloczyn wyniesie 1.

2. Udowodnij tezę dla $n = 2$.

3. Zauważ, że $\frac{a}{b+c} + 1 = \frac{a+b+c}{b+c}$.

4. Wykaż, że $a + b + c \geqslant 3$.

5. Skorzystaj z najprosztej postaci nierówności AM-GM dla 2 liczb.

Konstrukcje

1. *

2. Podziel płaszczyznę na kratki o przekątnej długości 1.

3. Podziel trójkąt na 3 takie czworokąty.

4. Zauważ, że jeśli p jest liczbą pierwszą i $p \mid c$, to $p \mid a$ lub $p \mid b$.

5. Rozpatrz wszystkie kolorowania powstające w następujący sposób. Kolorujemy dowolna pola w najniższym i drugim najniższym wierszu. Załóżmy, że są to pola a-te i $a + k$-te(być może $k < 0$). Wówczas w trzeciej kolumnie pokolorujemy pole $a + 2k \pmod 7$, w czwartej $a + 3k \pmod 7$ itd.

6. Zauważ, że w zadaniu z $a + 1$ i $a + 2$ działają liczby 1, 2, 1.

Wielomiany

1. Podstaw $x = \alpha$.
2. Wykaż, że 1 jest pierwiastkiem rozpatrywanego wielomianu.
3. Rozpatrz różnicę wielomianów $x^{3n-1} + x + 1$ dla $n+1$ i n.
4. Weź wielomian $a\left((x+1)^{n+1} - x^{n+1}\right)$ dla pewnej stałej a. Zobacz na jego stopień i współczynnik wiodący.
5. Skorzystaj z twierdzenia Bezouta.
6. Rozpatrz $W(10^k)$ dla bardzo dużego k. Spróbuj zrobić to dla jakichś konkretnych wielomianów.
7. Wykaż, że $a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_{1000}$, $\sum_{1 \leqslant i \leqslant 1000} a_i$ oraz $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 1000} a_i a_j$ są równe -1 lub 1.

Wielomiany

1. Rozpatrz pierwszy wierzchołek tej ścieżki.
2. Z założenia indukcyjnego istnieje cykl o długości $n-1$, który spełnia warunki zadania. Wykaż, że można do niego dołożyć usunięty w celu indukcji wierzchołek, aby cykl dalej spełniał warunki zadania.
3. Wykaż, że ten graf to pewna liczba rozłącznych cykli.
4. Dla danych wierzchołków u, v, zmień stan wszystkich krawędzi na ścieżce miedzy u i v.
5. Wybieraj wierzchołek o największym stopniu.
6. Mając dany wierzchołek, ucinając wszystkich jego sąsiadów, Herkules rozspójni graf.

Indukcja matematyczna 2

1. Wykaż, że kwoty 8, 9 i 10 złotych da się opłacić bez wydawania reszty.
2. Gdy wyróżnione punkty są przykryte prostą, to można zaaplikować założenie indukcyjne.
3. Szukana liczba będzie miała 1000 cyfr.
4. Usuń wierzchołek, który ma co najwyżej k znajomych. Najpierw jednak wykaż, że takowy istnieje.
5. Zauważ, że jeśli $f(n) \leqslant n-1$, to z założenia indukcyjnego można stwierdzić, że $f(f(n)) = f(n)$.

6. Rozpatrz taką podrodzinę rodziny $\mathcal{R}$, że żadne dwa jej elementy nie mają niepustego przecięcia oraz jest to największa możliwa taka podrodzina.

Podzielności

1. Zauważ, że $(k+1)^2 > n \geqslant k^2$.
2. Skorzystaj z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną dla dwóch liczb.
3. Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele trójek liczb $(k, k+1, k+2)$, że każda liczba z tej trójki jest dzielnikiem liczby $4n$.
4. Wykaż, że $b-1 \mid a+1$. Połącz dwie otrzymane podzielności.
5. Załóżmy, że $a > b$. Jeśli a i b dają tę samą resztę z dzielenia przez p, to $a \geqslant b+p$.
6. Zauważ, że a i b^k mają inne v_p. Nasuwa to skojarzenie z Lematem 4.

Gry

1. Zauważ, że jeśli n jest nieparzyste, to jedna z liczb $3n-1$ i $3n+1$ jest podzielna przez 4.
2. Wykaż, że jedynie dla $m \neq n$ pierwszy gracz ma strategię wygrywającą.
3. Załóż, że na tablicy zapisano liczbę $2a+2$. Rozpatrz dwa przypadki w zależności od stanu $a+1$.
4. Podziel planszę na prostokąty 1×2 w specyficzny sposób.
5. Spraw, że wewnątrz kwadratu będą niepokolorowane odcinki.
6. Zauważ, że podpisany kamień będzie krążył między dwiema dziewczynami.

Bardziej zaawansowane nierówności

1. Wykaż, że $(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+bc+ca)$ poprzez zwinięcie do sumy kwadratów.
2. Wykaż, że te ciągi są odwrotnie monotoniczne.
3. Skorzystaj z nierówności Cauchego-Schwarza.
4. Rozpatrz sumę wielu nierówności, które zachodzą na podstawie nierówności o ciągach jednomonotonicznych.
5. Nierówność nie jest prawdziwa.

Równania funkcyjne i wielomianowe

1. Wstaw $x = 0$ i $x = f(0)$.
2. Zobacz, co się stanie jeśli $f(1) \geqslant 3$ oraz $f(1) = 1$.
3. Kiedy $x^2 + y = x^{27} + 2y$?
4. Wykaż, że $f(2) \leqslant 2$.
5. Wykaż, że $f(0) = 0$. Oznacz $f(b) = 0$ – takie b z pewnego powodu musi istnieć – i $f(0) = c$.
6. Wykaż, że g musi przyjmować wszystkie wartości rzeczywiste poza jedną.

Twierdzenia z teorii liczb

1. Zauważ, że jeśli $n = ab$, to jedna z liczb a, b jest nie większa niż $\sqrt{n}$.
2. Skorzystaj z Chińskiego Twierdzenia o resztach.
3. Rozpatrz liczby postaci p^k, gdzie p jest liczbą pierwszą.
4. Rozpatrz generator modulo p.
5. Zauważ, że $g^x \equiv 1 \pmod{p}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p - 1 \mid x$.
6. Wykreśl spośród rozpatrywanych liczb te, które spełniają jedno z danych przystawań. Wykaż, że wykreślimy mniej liczb niż $b_1 b_2 \cdot \ldots \cdot b_n$.

Grafy skierowane

1. Rozpatrz również krawędzie dla których wierzchołek początkowy ma większy numer niż końcowy.
2. Co jeśli graf jest redukowalny? Skorzystaj z Lematu 2.
3. Wykaż, że jeśli teza dla rozpatrywanego podziału nie zachodzi, to można przełożyć jeden z probelmatycznych wierzchołków do innego zbioru, tak, aby uzyskać podział o jeszcze mniejszej liczbie „jednozbiorowych” krawędzi.
4. Wykaż, że jeśli A_k wygrał z A_{k+1}, to A_{k+1} wygrał z A_{k+2}.
5. Rozpatrz osobę x i podziel resztę osób na te, z którymi x wygrał i na tych, z którymi przegrał.
6. Pokoloruj każdy z wierzchołków kolorem o numerze równym długości najdłuższej ścieżki zaczynającej się w danym wierzchołku.

Ciągi

1. *

2. Rozpatrz $a_k = |n+1-k|$.

3. Wykaż, że $u_n = \frac{2}{3^{n+1}-1}$.

4. Wykaż, że $a_n = \frac{2^{n+1}}{5} + \left(a_0 - \frac{1}{5}\right)(-3)^{n+1}$.

5. Zauważ, że $a_{n+1}^2 > a_n^2 + 2$.

6. Wykaż, że od pewnego momentu ciąg przyjmuje tylko wartości mniejsze niż 1.

7. Wykaż tezę indukcyjnie. Weź największą liczbę t, mniejszą niż n, że $\mathrm{NWD}(t, a_t - 1) > 1$. Wykaż, że

$$a_n - 1 = a_t + (n-t) - 1 = 3t + (n-t) - 1 = 2t + n - 1.$$

Podpowiedzi 3

Indukcja matematyczna

1. Skorzystaj z faktu, że suma kątów w trójkącie wynosi $180°$ oraz z założenia indukcyjnego.

2. *

3. *

4. Zauważ, że jeśli z wyróżnionego punktu wychodzą np. tylko czerwone odcinki, to pomiędzy dowolnymi dwoma punktami da się przejść odcinkami czerwonymi.

5. Wykaż tezę indukcyjnie za pomocą założenia i udowodnionej równości. Zauważ, że

$$a_1a_2a_3...a_na_{n+1}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}\right)=$$
$$=\cdot a_1a_2a_3...a_na_{n+1}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_n}\right)+a_1a_2a_3...a_n.$$

6. Podziel plansze na 1 L-klocek i cztery części, które można pokryć na mocy założenia indukcyjnego.

7. Zauważ, że suma liczb

$$(x_{2k+3}-x_{2k+1},x_{2k+3}-x_{2k},\cdots,x_{2k+3}-x_{k+2})\cup(x_{2k+2}-x_{k+1},\cdots,x_{2k+2}-x_1),$$

jest równa sumie liczb

$$(x_{2k+3}-x_{2k+2})\cup(x_{2k+2}-x_{2k+1},x_{2k+2}-x_{2k},\cdots,x_{2k+3}-x_{k+2})\cup$$
$$\cup(x_{2k+3}-x_{k+1},\cdots,x_{2k+3}-x_1).$$

Równania funkcyjne

1. *

2. Oblicz wartość $f(0)$.

3. Podstaw $x=0$.

4. *

5. Wstaw $f(x)=x+a$ do wyjściowego równania w celu obliczenia a.

6. Rozumuj podobnie jak w poprzednim zadaniu.

7. Wywnioskuj z obu nierówności, że f jest funkcją stałą.

8. Wykaż, że $f(x)=x+f(0)$. W tym celu korzystaj z całkowitości x.

9. Z tego, że $f(x+y)=f(x-y)$ wywnioskuj, że f jest funkcją stałą.

10. Zamień x i y miejscami w danym równaniu.

Bijekcje i bajki kombinatoryczne

1. Przesumuj wartość z poprzedniej wskazówki po wszystkich możliwych k, aby otrzymać całkowitą liczbę możliwości.
2. Zauważ, że jeśli zbiór A spełnia warunki zadania, to zbiór $\{1, 2, 3, ..., 10\} - A$ ich nie spełnia.
3. *
4. Połącz w pary permutacje (a_i) i $(f(a_i))$. Wykaż, że to parowanie jest poprawne.
5. Ustaw kn osób w kolejce na $(kn)!$ sposobów, a następnie pierwsze n osób dać do jednej grupy, drugie n osób do drugiej, itd. Z ilu kolejek można uzyskać ten sam podział?
6. Ile jest rozpatrywanych zbiorów, których nie podzieliliśmy w pary.
7. *

Liczby pierwsze i reszty z dzielenia

1. Podstaw $n = k(p-1)$. Zauważ, że $2^n \equiv 1 \pmod{p}$.
2. Zauważ, że zbiory $\{1,\ 2,\ 3,\ ...,\ p-1\}$ i $\{1^{-1},\ 2^{-1},\ 3^{-1},\ ...,\ (p-1)^{-1}\}$ są sobie równe. Stąd suma ich elementów jest równa.
3. Zauważ, że $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$.
4. Skoro wspomniane parowanie istnieje, to $2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (p-2) \equiv 1 \pmod{p}$., bo możemy podzielić te liczby na pary, z których każda zredukuje się do liczby 1.

Nierówności między średnimi

1. Skorzystaj z niej dla liczb $x^2, \frac{x}{2}, \frac{x}{2}$.
2. Zauważ, że $a_i + a_{i+1} \geqslant 2\sqrt{a_i a_{i+1}}$.
3. Skorzystaj z nierówności AM-HM.
4. *
5. Zauważ, że $\frac{a^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} \geqslant a$.

Konstrukcje

1. *

2. Pokoloruj wnętrze każdej z kratek, jej dolną krawędź bez prawego wierzchołka i lewą krawędź bez górnego wierzchołka na jeden kolor przypisany do danej kratki.

3. Rozpatrz środek okręgu wpisanego i jego rzuty na boki trójkąta.

4. Pokoloruj liczbę na kolor odpowiadający jej najmniejszemu dzielnikowi pierwszemu. Zadbaj o to, żeby użyć 1000 kolorów.

5. Wykaż, że mając dwa pola będące w jednym kolorowaniu jesteśmy w stanie jednoznacznie odtworzyć całe kolorowanie.

6. Rozpatrz liczby $a,\ a+1,\ a+2,\ ...,\ a+2019$ oraz $a,\ a+1,\ a+2,\ ...,\ a+100$.

Wielomiany

1. Wykaż, że $W(x)$ musiałby mieć nieskończenie wiele pierwiastków.

2. Oblicz $P(1)$.

3. Zauważ, że z wspomnianej wcześniej różnicy możesz wyciągnąć x^3-1 przed nawias.

4. Skorzystaj z założenia indukcyjnego dla $P(x) - a\left((x+1)^{n+1} - x^{n+1}\right)$. Rozpatrz takie a, by było to możliwe.

5. Zauważ, że $3 = Q(5)$ ma co najmniej 4 parami różne dzielniki.

6. *

7. Wykaż, że $\sum_{1\leqslant i\leqslant 1000} a_i^2 = 3$.

Wielomiany

1. Zauważ, że pierwszy wierzchołek tej ścieżki jest połączony z pewnym wierzchołkiem spoza niej.

2. Rozpatrz przypadki: gdy cykl jest jednokolorowy, gdy jest kolor, który występuje raz, oraz gdy każdy z kolorów występuje dwukrotnie.

3. Wykaż, że każdy cykl ma parzystą długość.

4. Skorzystaj z tego, że liczba wierzchołków w grafie jest parzysta

5. Wykaż, że przy każdym kroku rozpatrywana suma spada co najwyżej o 1.

6. Trzeba jeszcze pokazać, że istnieje graf, którego nie da się rozspójnić w 9 ruchach. Rozpatrz graf $K_{a,b}$.

Indukcja matematyczna 2

1. *

2. Jeśli wyróżnione punkty nie są przykryte przez jedną prostą, to do ich przykrycia trzeba co najmniej $n+1$ prostych.

3. Powiemy, że liczba naturalna x jest *dobra*, jeśli ma dokładnie n cyfr, z których każda jest jedynką lub dwójką, oraz x jest podzielna przez liczbę 2^n. Wykaż, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej istnieje liczba dobra, która ma n cyfr.

4. Zauważ, że klika zawierająca wierzchołek X składa się z wierzchołka X oraz pewnego podzbioru zbioru jego znajomych.

5. Gdy $f(n) \geqslant n+1$, to $f(f(n)) \leqslant n-1$. Wstaw $f(n)$ zamiast n do wyjściowej nierówności.

6. Wykaż, że pewien element należy do co najmniej $(n-1)! \cdot k^{n-1}$ zbiorów.

Podzielności

1. Jakie liczby podzielne przez k są w przedziale $[k^2, (k+1)^2)$?

2. *

3. Zauważ, że jeśli pewien dzielnik liczby $4n$ – nazwijmy go k nie jest podzielne przez 4, to $2k$ również jest dzielnikiem liczby $4n$.

4. Uzasadnij, że $b-1 \mid b+1$. Taka podzielność nie może zajść, gdy $b \geqslant 4$.

5. Uzasadnij, że $a \geqslant 2$.

6. Jeśli $v_p(a) = x \cdot k + r$, gdzie r jest resztą z dzielenia przez k, to weź $n = p^{xk+k}$.

Gry

1. Zauważ, że $\frac{3n+1}{4} < n$.

2. Przyjmij, że pole w prawym górnym rogu ma współrzędne $(1,1)$. Celem gracza ze strategią wygrywająca będzie taka gra, aby przeciwnik przed swoim ruchem zawsze zajdował się w polu o postaci (a,a).

3. W przypadku, gdy $a+1$ jest wygrywający, należy zapisać liczbę $2a+1$. Przeanalizuj możliwe ruchy przeciwnika.

4. Podziel plansze na prostokąty 1×2, aby każdy kwadrat 2×2 zawierał jeden z tych prostokątów.

5. Niech potem nauczyciel koloruje wnętrze kwadratu. W pewnym momencie pojawi się szukany wzór.

6. Zauważ, że istnieje para bez podpisanego kamienia.

Bardziej zaawansowane nierówności

1. *

2. *

3. Wykaż, że

$$(\sin \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \sin \alpha_n + \cos \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \cos \alpha_n)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \left((\sin \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \sin \alpha_{n-1})^2 + (\cos \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \cos \alpha_{n-1})^2\right) \left(\sin {\alpha_n}^2 + \cos {\alpha_n}^2\right)$$

4. Zauważ, że

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \geqslant a_1 b_{1+k} + a_2 b_{2+k} + \ldots + a_n b_{n+k}.$$

5. Znajdź liczby, dla których nierówność nie zachodzi. Jedna z liczb niech będzie bardzo bliska zeru.

Równania funkcyjne i wielomianowe

1. Wstaw $x = a$.

2. Wykaż, że $f(n) = n + 1$ indukcyjnie.

3. Zauważ, że $f(x) > 0$, gdy $x > 0$. Podstaw $y - x^2$ w miejsce y. Rozpatrz takie x, aby wszystkie wartości f poza jedną w danym równaniu były równe 0.

4. Gdy $f(2) = 1$, to można wykazać $f(p) = 1$ i $f(p^2) = 1$ dla pewnej liczby pierwszej p.

5. Wykaż, że $f(f(y)) = y$. Wykaż, że f jest ściśle rosnąca.

6. Udowodnij, że $g(0) = 0$.

Twierdzenia z teorii liczb

1. *

2. Rozpatrz warunki typu $n \equiv -k \pmod{p}$ dla różnych liczb k i p.

3. Rozpatrz liczby postaci p^{p-1}.

4. Zauważ, że

$$\left(\frac{1}{p}\right) + \left(\frac{2}{p}\right) + \ldots + \left(\frac{p-1}{p}\right) = \left(\frac{g}{p}\right) + \left(\frac{g^2}{p}\right) + \ldots + \left(\frac{g^{p-1}}{p}\right)$$

5. Skorzystaj z faktu, że liczba $p - 1$ nie dzieli się przez 3.

6. Zauważ, że jeśli liczba k spełnia warunki zadania, to liczba $k + b_1 b_2 \cdot \ldots \cdot b_n$ również.

Grafy skierowane

1. *

2. Rozwiąż zadanie korzystając z indukcji zupełnej.

3. Wyka, że dla dowolnego wierzchoła v jeden z rozpatrywanych zbiorów ma te własność, że wchodzi do niego co najwyżej jedna krawędź z v.

4. Wykaż, że A_k wygrał z A_{k+i} wtedy i tylko wtedy, gdy i jest liczbą parzystą. Wyniknie stąd, że A_1 wygrał z A_3, jak i przegrał z A_3.

5. Wykaż, że w zbiorze osób, z którymi x przegrał, każda osoba pokonała tyle samo osób wewnątrz tego zbioru.

6. W drugą stronę, ponumeruj kolory i skieruj krawędzie w stronę wierzchołka o kolorze o wyższym numerze.

Ciągi

1. *

2. Skorzystaj z założenia dla liczb a_{2n+1-i} oraz a_{i+1}.

3. Zauważ, że $u_n < \frac{2}{3^{n+1}}$.

4. Wykaż, że gdy $a_0 \neq \frac{1}{5}$, to ciąg przyjmuje dowolnie małe wartości.

5. Skorzystaj wielokrotnie z wykazanej nierówności.

6. Zauważ, że $x_1 < x_{n+2} = \sqrt{\alpha x_{n+1} - x_n}$.

7. Zauważ, że

$$\mathrm{NWD}(a_n - 1,\ n) = \mathrm{NWD}(2t + n - 1,\ n) = \mathrm{NWD}(2t - 1,\ n) = \mathrm{NWD}(2t - 1,\ 2n - (2t - 1)).$$

Jaka jest najmniejsza liczba n, większa niż t, że powyższe wyrażenie jest większe od 1?

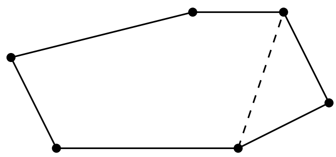
Rozwiązania

Indukcja matematyczna

Zadanie 1

Wykazać, że suma miar kątów w n-kącie wypukłym wynosi $(n-2) \cdot 180°$.

Zauważmy, że dla $n = 3$ teza jest znanym faktem – mianowicie suma kątów w trójkącie wynosi $180°$.



Załóżmy, że dla każdego n-kąta wypukłego suma jego kątów wynosi $(n-2) \cdot 180°$. Rozpatrzmy dowolny $n+1$-kąt wypukły. Zauważmy, że ma on więcej niż trzy wierzchołki, więc możemy „odciąć" trójkąt złożony z trzech kolejnych wierzchołków. Podzielimy w ten sposób $n+1$ kąt na n-kąt i trójkąt. Korzystając z wypukłości rozpatrywanego wielokąta możemy zauważyć, że suma miar jego kątów wewnętrznych jest sumą miar kątów obu tych wielokątów. Wynosi więc ona

$$(n-2) \cdot 180° + 180° = (n-1) \cdot 180°,$$

czego należało dowieść.

Zadanie 2

Wykazać, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi tożsamość

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Sprawdzamy, że dla $n = 1$ postulowana równość zachodzi.

Załóżmy, że równość

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

zachodzi dla pewnej liczby n. Chcemy wykazać tezę dla $n+1$, czyli

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Zauważmy, że sprowadza się ona do wykazania tożsamości

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

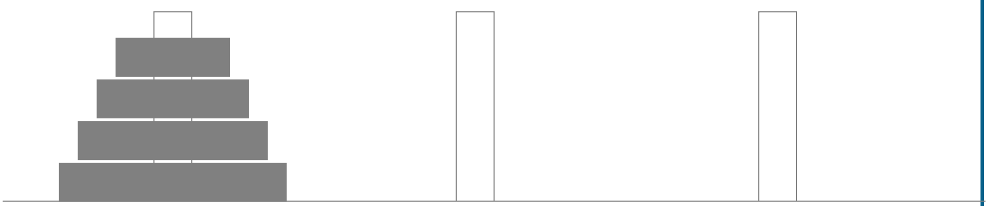
Przekształcając powyższą równość równoważnie otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2 &= (n+1)(n+2)(2n+3), \\ 2n^3+3n^2+n+6(n+1)^2 &= 2n^3+9n^2+13n+6, \\ 6(n+1)^2 &= 6n^2+12n+6, \\ (n+1)^2 &= n^2+2n+1. \end{aligned}$$

Prawdziwość ostatniej równości dowodzi tezy.

Zadanie 3

Dana jest nastepująca gra, zwana *wieżami Hanoi*. Na początku ułożono n dysków na jednej igle tak jak na rysunku. W każdym ruchu gracz może przemieścić dysk, wraz z wszystkimi dyskami nań leżącymy, na inną igłę, przy czym dysk ten nie może zostać położony na dysk o innej średnicy. Wykazać, że gracz jest w stanie przenieść wszystkie dyski na trzecią igłę.



Tezę wykażemy indukcją po n. Zauważmy, że dla $n = 1$ teza jest oczywista – wystarczy po prostu przełożyć dysk na trzecią igłę.

Załóżmy, że jesteśmy w stanie przełożyć $n-1$ dysków z pierwszej igły na trzecią. Możemy oczywiście zauważyć, że jest to równoważne chociażby możliwości przełożenia ich z igły pierwszej na drugą.

Przełożenia n dysków dokonujemy w następujący sposób:

1. Przekładamy $n-1$ dysków z góry pierwszej igły na drugą igłę. Zauważmy, że dysk o największym rozmiarze nie przeszkadza nam skorzystać z założenia indukcyjnego, gdyż nie uniemożliwi on wykonania żadnego ruchu.

2. Dysk pozostawiony na pierwszej igle przekładamy na igłę ostatnią.

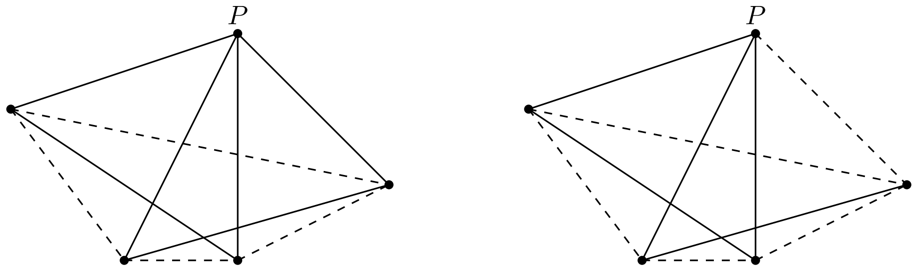
3. Przekładamy $n-1$ dysków z drugiej igły na trzecią. Analogicznie zauważamy, że obecność jednego dysku na trzeciej igle nie jest problemem.

Zadanie 4

W przestrzeni danych jest $n \geqslant 3$ punktów, że żadne trzy z nich nie leżą na jednej prostej. Każde dwa z tych punktów połączono odcinkiem o kolorze zielonym lub czerwonym. Wykazać, że można wybrać tak jeden z tych kolorów, aby każde dwa z danych punktów były połączone odcinkiem lub łamaną tego koloru.

Dla $n = 3$ mamy trójkąt. Wybierając kolor, na który pomalowano co najmniej dwa odcinki odcinki, postulowana własność będzie spełniona.

Załóżmy, że dla teza zachodzi dla n punktów. Rozpatrzmy zbiór $n+1$ punktów. Wyróżnijmy pewien punkt P. Punktów poza P jest dokładnie n, więc na mocy założenia istnieje kolor – bez straty ogólności czerwony – że pomiędzy kądymi dwoma punktami poza P istnieje łamana tego koloru.



Na rysunku zamiast kolorów użyto podziału na linię ciągła i przerywaną.

Rozpatrzmy dwa przypadki:

1. Punkt P jest połączony czerwoną krawędzią z pewnym innym punktem Q. Wówczas wybierając dowolny punkt X, na mocy założenia wiemy, że istnieje czerwona ścieżka między X i Q. Dokładając do niej odcinek między P i Q otrzymujemy ścieżkę między P oraz X. Wykazaliśmy, że istnieje ścieżka między punktem P i każdym innym punktem. Łącząc to z faktem, że na mocy założenia indukcyjnego taka ścieżka istnieje między każdą inną parą punktów, otrzymujemy, że dla koloru czerwonego teza jest spełniona.
2. Punkt P jest połączony z każdym innym punktem niebieskim odcinkiem. Wówczas łatwo zauważyć, że pomiędzy każda parą punktów możemy przejść jednym albo dwoma niebieskimi odcinkami przechodzącymi przez punkt P.

Zadanie 5

Dany jest ciąg liczb rzeczywistych

$$a_0 \neq 0, 1, \quad a_1 = 1 - a_0, \quad a_{n+1} = 1 - a_n(1 - a_n).$$

Wykazać, że dla wszystkich n

$$a_1 a_2 ... a_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} \right) = 1.$$

Na początku wykażemy indukcyjnie, że dla każdego n zachodzi równość

$$a_{n+1} = 1 - a_1 a_2 a_3 \cdot ... \cdot a_n.$$

Równośc dla $n = 0$ zachodzi na mocy założeń.
Załóżmy, że

$$a_n = 1 - a_1 a_2 a_3 \cdot ... \cdot a_{n-1}.$$

Skoro $a_{n+1} = 1 - a_n(1 - a_n)$, to otrzymujemy

$$a_{n+1} = 1 - a_n(1 - a_n) = 1 - a_n \cdot a_1 a_2 a_3 \cdot ... \cdot a_{n-1} = 1 - a_1 a_2 a_3 \cdot ... \cdot a_n.$$

Więc na mocy zasady indukcji matematycznej postulowana równość zachodzi.

Teraz przejdziemy do udowodnienia tezy.
Dla $n = 1$ jest ona oczywista.
Załóżmy, że zachodzi równość

$$a_1 a_2 a_3 ... a_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n} \right) = 1.$$

Chcemy wykazać, że

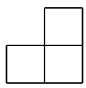
$$a_1 a_2 a_3 ... a_n a_{n+1} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}} \right) = 1.$$

Przekształcamy powyższą równość korzystając z założenia

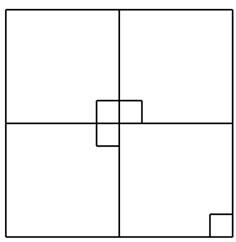
$$a_1 a_2 a_3 ... a_n a_{n+1} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}} \right) =$$
$$= a_{n+1} \cdot a_1 a_2 a_3 ... a_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n} \right) + a_1 a_2 a_3 ... a_n =$$
$$= a_{n+1} + a_1 a_2 a_3 ... a_n = 1 - a_1 a_2 a_3 ... a_n + a_1 a_2 a_3 ... a_n = 1.$$

Zadanie 6

Wykazać, że planszę o wymiarach $2^n \times 2^n$ dla pewnego $n \geqslant 1$ z usuniętym jednym z rogów da się przykryć pewną liczbą L klocków(takich jak na rysunku). Klocki można obracać.



Zauważmy, że plansza 2×2 z usuniętym rogiem jest w istocie L-klockiem, więc da się ją pokryć.



Załóżmy, że dla planszy $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ istnieje szukane pokrycie. Pokrycie dla planszy $2^n \times 2^n$ kontruujemy następująco. Dzielimi plansze dwiema prostymi na trzy jednakowe części i czwartą taką samą, tylko bez rok. Kładziemy jeden klocek na środku tak jak na rysunku. Wówczas plansza jest podzielona na cztery jednakowe puste części, które na mocy założenia indukcyjnego można pokryć.

Zadanie 7

Niech n będzie nieparzystą liczbą naturalną, a liczby x_1, x_2, ..., x_n będa parami różne. Dla każdych dwóch liczb x_i oraz x_j zapisano na tablicy wartość bezwzględną ich różnicy. Wykazać, że można podzielić zapisane liczby na dwa zbiory o równej sumie.

Przez multizbiór rozumiemy zbiór w którym jeden element może występować kilka razy.

Załóżmy, że $x_1 \geqslant x_2 \geqslant ... \geqslant x_n$.

Wykażemy tezę dla $n = 3$. Podział na zbiory $\{x_1 - x_2, x_2 - x_3\}$ oraz $\{x_1 - x_3\}$ spełnia warunki zadania.

Załóżmy, że teza zachodzi dla $2n + 1$, wykażemy ją dla $2n + 3$. Rozpatrzmy szukany podział multizbioru różnic zbioru $\{x_1, x_2, ..., x_{2n+1}\}$ na multizbiory A i B o równej sumie elementów.

Dorzucamy do multizbioru A liczby

$$(x_{2k+3} - x_{2k+1}, x_{2k+3} - x_{2k}, \cdots, x_{2k+3} - x_{k+2}) \cup (x_{2k+2} - x_{k+1}, \cdots, x_{2k+2} - x_1),$$

a do multizbioru B liczby

$$(x_{2k+3} - x_{2k+2}) \cup (x_{2k+2} - x_{2k+1}, x_{2k+2} - x_{2k}, \cdots, x_{2k+3} - x_{k+2}) \cup \\ \cup (x_{2k+3} - x_{k+1}, \cdots, x_{2k+3} - x_1).$$

Łatwo sprawdzić, że suma dorzuconych elementów jest równa.

Równania funkcyjne

Zadanie 1

Znajdź wszystkie funkcje $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równanie

$$f(x) + f(y) = f(xy).$$

Odpowiedź. Jedyną funkcją spełniającą warunki zadania jest $f(x) = 0$.

Podstawmy $y = 0$:

$$f(x) + f(0) = f(0),$$

czyli $f(x) = 0$ dla każdego x. Łatwo sprawdzić, że ta funkcja spełnia warunki zadania.

Zadanie 2

Znajdź wszystkie funkcje $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równanie

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y.$$

Podstawmy $x = f(y)$. Otrzymamy

$$f(0) = 1 - f(y) - y,$$
$$f(y) = -y + (1 - f(0)).$$

Podstawmy $y = 0$ do powyższej zależności. Wówczas łatwo obliczyć, że $f(0) = \frac{1}{2}$. Czyli $f(x) = -x + \frac{1}{2}$. Ta funkcja istotnie spełnia warunki zadania, gdyż

$$f(x - f(y)) = f(y) - x + \frac{1}{2} = 1 - y - x.$$

Zadanie 3

Znajdź wszystkie funkcje $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równanie

$$f(x^2y) = f(xy) + yf(f(x) + y).$$

Odpowiedź. Funkcja $f(x) = x$ jest jedynym rozwiązaniem.

Podstawmy $x = 0$ i $y = -f(0)$. Otrzymamy $f(0)^2 = 0$, czyli $f(0) = 0$. Podstawmy $x = 0$:

$$0 = yf(f(0) + y) = yf(y)$$

Dla niezerowego y mamy $f(y) = 0$. Sprawdzamy, że funkcja $f(x) = 0$ spełnia warunki zadania. Łącząc powyższe wnioski otrzymujemy, że jedyni funkcja $f(x) = 0$ spełnia warunki zadania.

Zadanie 4

Znajdź wszystkie funkcje $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równanie

$$2f(x) + f(1-x) = x^2.$$

Odpowiedź. Jedyną funkcją spełniającą warunki zadania jest $f(x) = \frac{2x^2-(1-x)^2}{3}$.

Podstawmy $1-x$ za x. Otrzymamy

$$2f(1-x) + f(x) = 2(1-x)^2.$$

Z równaniem z zadania tworzy to układ równań ze zmiennymi $f(x)$ i $f(1-x)$. Wyliczamy $f(x) = \frac{2x^2-(1-x)^2}{3}$. Wystarczy teraz tylko sprawdzić, że ta funkcja spełnia warunki zadania.

Zadanie 5

Znajdź wszystkie funkcje $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równanie

$$f(x+y) = f(f(x)) + y + 1.$$

Odpowiedź. $f(x) = x - 1$ jest jedynym rozwiązaniem danego równania.

Podstawmy $x = 0$:

$$f(y) = f(f(0)) + 1 + y,$$

czyli $f(x) = x + a$ dla pewnego stałego a. Podstawmy tę funkcję do wyjściowego równania

$$x + y + a = x + 2a + y + 1.$$

Mamy $a = -1$. Łatwo sprawdzić, że funkcja $f(x) = x - 1$ spełnia warunki zadania.

Zadanie 6

Znajdź wszystkie funkcje różnowartościowe $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równość

$$f(f(x) + y) = f(x+y) + 1.$$

Odpowiedź. Jedyną funkcją spełniającą warunki zadania jest $f(x) = x + 1$.

Podstawmy $y = -x$. Otrzymamy

$$f(f(x) - x) = f(0) + 1.$$

Zauważmy, że prawa strona równości jest stała. Z różnowartościowości f wynika, że wartość $f(x) - x$ jest stała. Czyli $f(x) - x = a$ dla pewnego a. Wstawiamy $f(x) = x + a$ do wyjściowego równania

$$x + y + 2a = x + y + a + 1,$$

więc $a = 1$. Skąd $f(x) = x+1$ – możemy sprawdzić, że ta funkcja spełnia warunki zadania.

Zadanie 7

Znajdź wszystkie funkcje $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ nierówność

$$f(x^2 + y) + f(y) \geqslant f(x^2) + f(x).$$

Podstawmy $x = 0$

$$f(y) \geqslant f(0).$$

Podstawmy $y = 0$

$$f(x^2) + f(0) \geqslant f(x^2) + f(x),$$

czyli $f(0) \geqslant f(x)$. Łącząc oba wnioski otrzymuję

$$f(0) \geqslant f(x) \geqslant f(0),$$

czyli $f(x) = f(0)$. Innymi słowy f jest funkcją stałą. Łatwo zauważyć, że taka funkcja spełnia warunki zadania.

Zadanie 8

Znajdź wszystkie funkcje $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ spełniające dla wszystkich $x \in \mathbb{Z}$ równanie

$$f(f(x)) = x + 1.$$

Odpowiedź. Szukane funkcje nie istnieją.

Zauważmy, że zachodzą równości

$$f(f(f(x))) = f(x+1)$$
$$f(f(f(x))) = f(x) + 1$$

Z tego otrzymujemy równość:

$$f(x) = f(x-1) + 1$$

Skoro działamy w liczbach całkowitych to możemy wywnioskować, że

$$f(x) = f(x-1) + 1 = f(x-2) + 2 = ... = x + f(0).$$

Podstawmy równość $f(x) = x + f(0)$ do $f(f(x)) = x + 1$:

$$x + 1 = f(f(x)) = x + 2f(0),$$

czyli $f(0) = \frac{1}{2}$. Sprzeczność. Takie funkcje nie istnieją.

Zadanie 9

Znajdź wszystkie funkcje $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równanie

$$f(x)f(y) = f(x-y).$$

Odpowiedź. Daną zależność spełniają funkcje $f(x) = 1$ i $f(x) = 0$.

Podstawmy $x = y = 0$. Wtedy otrzymujemy

$$f(0)^2 = f(0) \implies f(0) \in \{0, 1\}.$$

Podstawmy $x = y$
$$f(x)^2 = f(0).$$
Jeśli $f(0) = 0$, to $f(x) = 0$. Łatwo sprawdzić, że funkcja zerowa spełnia warunki zadania. Zobaczmy, co jeśli $x = y$ oraz $f(0) = 1$:
$$f(x)^2 = f(0) = 1$$
Czyli $f(x)$ jest równe -1 lub 1 dla każdego x. Podstawmy $x = 0$
$$f(y) = f(-y).$$
Zauważmy, że
$$f(x - y) = f(x)f(y) = f(x)f(-y) = f(x + y).$$
Weźmy 2 dowolne liczby a i b. Biorąc $x = \frac{a+b}{2}$ oraz $y = \frac{a-b}{2}$ otrzymamy
$$f(x + y) = f(x - y) \implies f(a) = f(b).$$
Skoro a i b były dowolne to f jest funkcją stałą, czyli $f(x) = 1$. Łatwo sprawdzić, że ta funkcja również spełnia warunki zadania. Czyli tę zależność spełniają funkcje $f(x) = 1$ i $f(x) = 0$. Sprawdzamy, że istotnie one działają.

Zadanie 10

Udowodnij, że nie istnieje taka funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość:
$$f(f(x) + 2f(y)) = x + y.$$

Lemat 1 Funkcja f jest różnowartościowa
Załóżmy, że $f(a) = f(b)$. Podstawmy, $x = a$ oraz $x = b$
$$f(f(a) + 2f(y)) = a + y \quad \text{oraz} \quad f(f(b) + 2f(y)) = b + y.$$
Skoro $f(a) = f(b)$, to
$$f(f(a) + 2f(y)) = f(f(b) + 2f(y)),$$
a więc $a + y = b + y$, czyli $a = b$. A więc f istotnie jest różnowartościowa.

Zauważamy, że zachodzą równości
$$f(f(x) + 2f(y)) = x + y \quad \text{oraz} \quad f(f(y) + 2f(x)) = x + y.$$
Czyli
$$f(f(x) + 2f(y)) = f(f(y) + 2f(x)).$$
Skoro f jest różnowartościowa, to
$$f(x) + 2f(y) = f(y) + 2f(x),$$
więc $f(x) = f(y)$ dla wszystkich liczb x, y. Czyli f musiałaby być funkcją stałą, a to jest oczywista sprzeczność z danym równaniem.

Bijekcje i bajki kombinatoryczne

Zadanie 1

Dane są liczby całkowite n i k. Wykaż, że

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Spośród n osób będziemy chcieli wybrać drużynę i mianować jednego jej członka kapitanem. Wykażemy, że wyrażenia po obu stronach równości są liczbą możliwości takiego wyboru.

Wybierając najpierw kapitana – możemy go wybrać na n sposobów – a następnie dobierając mu zawodników – których można wybrać na 2^{n-1} sposobów, gdyż wybieramy dowolny podzbiór $n-1$ osób – otrzymamy $n \cdot 2^{n-1}$ osób.

Przyjmijmy, że w drużynie wraz z kapitanem jest k osób. Możliwości wyboru k osób spośród n jest $\binom{n}{k}$, a opcji wyboru kapitana spośród tych k osób jest dokładnie k. Stąd też dla dowolnego k liczba wariantów wynosi $k \cdot \binom{n}{k}$. Sumując po wszystkich możliwych k otrzymujemy, że łączna liczba możliwości wynosi $\sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k}$.

Zadanie 2

Wyznacz liczbę podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3, ..., 10\}$, których suma wynosi co najmniej 27.

Odpowiedź. Szukana liczba podzbiorów wynosi $2^9 = 512$.

Zauważmy, że suma wszystkich elementów tego zbioru wynosi 55. Dla każdego podzbioru A zdefiniujmy jego dopełnienie jako pozbiór $\{1, 2, 3, ..., 10\} - A$. Składa się on z wszystkich elementów nie występujących w A. Dla przykładu dopełnieniem zbioru $\{1, 2, 4, 7, 8, 9\}$ będzie zbiór $\{3, 5, 6, 10\}$.

Zauważmy, że suma elementów dowolnego podzbioru i jego dopełnienia wynosi 55. Więc dokładnie jeden z tych zbiorów ma sumę elementów większą lub równą 27. Podzielmy wszystkie rozpatrywane pozdbiory na pary zawierające dwa zbiory będące swoim dopełnieniem. Z powyższej obserwacji wynika, że dokładnie połowa podzbiorów – po jednym z każdej pary – będzie spełniać warunki zadania. Jest więc ich $\frac{1}{2} \cdot 2^{10} = 2^9 = 512$.

Zadanie 3

Udowodnić, że dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych n, k zachodzi równość

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Prawa strona równości jest równa liczbie sposobów wyboru n spośród $2n$ osób.

Podzielmy te $2n$ osób na dwie grupy po n osób. Załóżmy, że z pierwszej grupy wybieramy k osób. Możemy tego dokonać na $\binom{n}{k}$ sposobów. Z drugiej grupy wybieramy $n-k$ osób – mamy $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ możliwości. Dla ustalonego k możemy dokonać wyboru na $\binom{n}{k}^2$ sposobów. Sumując po wszystkich k otrzymujemy lewą stronę równości.

Zadanie 4

Dana jest liczba pierwsza $p \geqslant 3$. Niech A_k oznacza zbiór permutacji $(a_1, a_2, ..., a_p)$ zbioru $\{1, 2, 3, ..., p\}$, dla których liczba

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + ... + pa_p - k$$

jest podzielna przez p. Wykazać, że zbiory A_1, A_2 mają tyle samo elementów.

Ideą poniższego rozwiązania jest fakt, że jak mamy pewną permutację z A_1, pomnożymy każdy jej z elementów przez 2, to otrzymamy permutację z A_2. Jako, że mnożąc liczbę większą od $\frac{1}{2}p$ przez 2 wylecimi ze zbioru $\{1, 2, 3, ..., p\}$ to zamiast mnożenia przez 2 użyjemy funkcji danej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla } x < \frac{1}{2}p \\ 2x - p & \text{dla } x > \frac{1}{2}p. \end{cases}$$

Zauważmy, że $f(x) \equiv 2x \pmod{p}$.

W ten sposób przyporządkujemy każdemu elementowi ze zbioru A_1 dokładnie 1 element ze zbioru A_2. Czy może się jednak tak zdarzyć, że pewien element z A_2 zostanie w ten sposób przyporządkowany nie do jednego, a do innej liczby elementów z A_1? Wykażemy, że nie.

Mianowicie pokażemy, że z dowolnego elementu A_2 możemy odzyskać dokładnie jedną przyporządkowaną mu permutację z A_1. Zdefiniujmy „dzielenie przez 2 modulo p" wzorem

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{dla x parzystych} \\ \frac{1}{2}(x - p) & \text{dla x nieparzystych.} \end{cases}$$

Mamy $2g(x) \equiv x \pmod{p}$. Zauważmy, że jest to funkcja odwrotna do f – tj. $f(g(x)) = x$.

Zauważmy, że

$$(a_1, a_2, ..., a_p) \in A_2 \iff (g(a_1), g(a_2), ..., g(a_p)) \in A_1.$$

Pozostaje zauważyć, że to permutacja (a_i) była przyporządkowana do permutacji $(g(a_i))$. Jest tak, bo $f(g(a_i)) = a_i$. Stąd podane parowanie było poprawne, czyli istotnie zbiory A_1 i A_2 są równoliczne.

Uwaga
Kluczowym faktem w powyższym rozumowaniu było istnienie funkcji odwrotnej do funkcji f zdefiniowanej dla każdego elementu zbioru $\{1, 2, ..., p\}$.

Zadanie 5

Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych n, k liczba (kn)! jest podzielna przez liczbę $(n!)^k \cdot k!$.

Rozpatrzmy liczbę podziałów kn osób na k grup po n osób. Nie bierzemy pod uwagę żadnej kolejności grup, ani kolejności osób w grupie.

Możemy ustawić kn osób w kolejce na $(kn)!$ sposobów, a następnie pierwsze n osób dać do jednej grupy, drugie n osób do drugiej, itd.

Każdą z k grup możemy ustawić w kolejności na $n!$ sposobów. Te grupy możemy ustawić w kolejności na $k!$ sposobów. W ten sposób z jednego podziału na grupu możemy uzyskać dokładnie $(n!)^k \cdot k!$ kolejek.

Więc liczba podziałów na grupy wynosi $\frac{(kn)!}{(n!)^k \cdot k!}$. Skoro jest ona całkowita, to musi zachodzić rozpatrywana podzielność.

Zadanie 6

Dana jest liczba całkowita n. Niech T_n oznacza liczbę takich podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3, ..., n\}$, że ich średnia arytmetyczna jest liczbą całkowitą. Wykazać, że liczba $T_n - n$ jest parzysta.

Zauważmy, że zbiory, których średnia arytmetyczna jest liczbą całkowitą, zawierające więcej niż 1 element da się podzielić na pary. Mianowicie zbiory S i S' o średniej arytmetycznej elementów równej a będa w jednej parze jeśli jeden z tych zbiorów zawiera a, drugi nie zawiera, a poza tym mają te same elementy.

T_n będzie takiej parzystości jak liczba niesparowanych zbiorów. Są to wszystkie zbiory jednoelementowe – jest ich n. Stąd $T_n - n$ jest liczba parzystą.

Zadanie 7

Niech n, k, r będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Wykaż, że

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{n+k}{k} = \binom{n+r+1}{r}.$$

Wykażemy, że obie strony równości to liczba słów, które składają się z $n+1$ liter A oraz r liter B. Z jednej strony możemy wybrać na r sposobów pozycje liter B, a na pozostałych miejscach ustawić litery A. Stąd tych słów jest $\binom{n+r+1}{r}$.

Przyjmijmy, że na miejscu $n+k+1$ znajduje się ostatnia litera A. Na $n+k$ poprzednich miejsc znajdzie się n liter A i k liter B. Możemy je więc ustawić na $\binom{n+k}{k}$ sposobów. Po ostatniej literze A będą same litery B, więc nie mamy wyboru. Stąd dla ustalonego k jest $\binom{n+k}{k}$ sposobów. Sumując po wszystkich możliwych k otrzymujemy lewą stronę równości.

Liczby pierwsze i reszty z dzielenia

Zadanie 1

Dana jest liczba pierwsza p. Udowodnić, że istnieje taka liczba całkowita n, że

$$2^n \equiv n \pmod{p}.$$

Weźmy $n = k(p-1)$. Wówczas

$$2^{k(p-1)} \equiv (2^{p-1})^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod{p},$$

zaś

$$n \equiv k(p-1) \equiv -k \pmod{p}.$$

Wystarczy wziąć $k = p-1$, aby teza zachodziła.

Zadanie 2

Dana jest liczba pierwsza $p \geqslant 3$. Niech

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{p-1} = \frac{a}{b}$$

dla pewnych dodatnich liczb całkowitych a, b. Udowodnić, że $p \big| a$.

Przemnóżmy obie strony przez $b \cdot (p-1)!$. Mamy wtedy

$$b(p-1)! + \frac{b(p-1)!}{2} + \frac{b(p-1)!}{3} + ... + \frac{b(p-1)!}{p-1} = a(p-1)!.$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} a(p-1)! \equiv b(p-1)! + \frac{b(p-1)!}{2} + \frac{b(p-1)!}{3} + ... + \frac{b(p-1)!}{p-1} \equiv \\ \equiv b(p-1)! + b(p-1)! \cdot 2^{-1} + b(p-1)! \cdot 3^{-1} + ... + b(p-1)! \cdot (p-1)^{-1} \equiv \\ \equiv b(p-1)!(1^{-1} + 2^{-1} + ... + (p-1)^{-1}) \pmod{p}. \end{aligned}$$

Funkcja, która przyporządkowuje każdej niezerowej reszcie jej odwrotność modulo p jest bijekcją(przyjmuje wszystkie wartości przeciwdziedziny i jest różnowartościowa). Czyli cały zbiór $\{1, 2, 3, ..., p-1\}$ zostanie przekształcony na samego siebie. Zauważamy więc, że suma odwrotności wszystkich niezerowych reszt modulo p to suma wszystkich możliwych reszt modulo p, czyli

$$1^{-1} + 2^{-1} + ... + (p-1)^{-1} = 1 + 2 + 3 + ... + (p-1) = \frac{p(p-1)}{2}.$$

Zauważamy, że powyższa suma jest podzielna przez p. Jest ona równa $a(p-1)!$. Skoro $(p-1)!$ nie jest podzielna przez p, stąd to liczba a jest podzielna przez p.

Zadanie 3

Udowodnij, że istnieje n, dla którego $2^n + 3^n + 6^n \equiv 1 \pmod{p}$.

Weźmy $n = p - 2$. Wówczas mamy

$$2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} \equiv \frac{2^{p-1}}{2} + \frac{3^{p-1}}{3} + \frac{6^{p-1}}{6} \equiv \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Zadanie 4

Wykazać, że zachodzi przystawanie

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

Zauważmy, że każda liczba w zbiorze $\{1,\ 2,\ 3,\ ...,\ p-1\}$ ma swoją odwrotność. Jak dowodzi Lemat 1 jedynymi liczbami, które są swoimi odwrotnościami są -1 i 1. Czyli reszty ze zbioru $\{2, ..., p-2\}$ można pogrupować w pary postaci $(a,\ a^{-1})$ – liczba i jej odwrotność.

Jeśli wymnożymy wszystkie liczby ze zbioru $\{1,\ 2,\ 3,\ ...,\ p-1\}$, elementy z par zredukują się do 1. Skoro każdy element jest w jakiejś parze, to cały iloczyn

$$(p-2) \cdot (p-3) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2$$

zredukuje się do liczby 1. Stąd

$$(p-1)! \equiv (p-1) \cdot (p-2)! \equiv (p-1) \cdot 1 \equiv -1 \pmod{p}.$$

Nierówności między średnimi

Zadanie 1

Wykazać, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi

$$x^2 + \frac{1}{x} \geqslant \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}.$$

Korzystając z nierówności między średnią arytemetyczną i geometryczną dla liczb x^2, $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{2}$ otrzymujemy

$$\frac{x^2 + \frac{1}{x}}{3} = \frac{x^2 + \frac{x}{2} + \frac{x}{2}}{3} \geqslant \sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}},$$

z czego wprost wynika teza.

Zadanie 2

Dane są takie dodatnie liczby rzeczywiste a_1, a_2, a_3, ..., a_n, że $a_1a_2a_3...a_n = 1$. Wykazać, że

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdot \ldots \cdot (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) \geqslant 2^n.$$

Korzystając z nierówności miedzy średnią arytmetyczną a geometryczną mamy

$$a_i + a_{i+1} \geqslant 2\sqrt{a_ia_{i+1}}.$$

Robiąc tak dla każdego nawiasu otrzymujemy, że

$$\begin{aligned}&(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdot \ldots \cdot (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) \geqslant \\ &\qquad \geqslant 2\sqrt{a_1a_2} \cdot 2\sqrt{a_2a_3} \cdot \ldots \cdot 2\sqrt{a_{n-1}a_n} \cdot 2\sqrt{a_na_1} = \\ &\qquad\qquad = 2^n a_1a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 2^n.\end{aligned}$$

Zadanie 3

Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych zachodzi nierówność

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Przekształcamy tezę równoważnie dodając 3 do obu stron

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{a+c} + 1 + \frac{c}{a+b} + 1 &\geqslant \frac{9}{2}, \\ \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{a+c} + \frac{a+b+c}{a+b} &\geqslant \frac{9}{2}, \\ (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}\right) &\geqslant \frac{9}{2}.\end{aligned}$$

Zauważmy, że z nierówności miedzy średnią arytmetyczną i harmoniczną wynika

$$\frac{\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}}{3} \geqslant \frac{9}{(b+c)+(a+c)+(a+b)} = \frac{9}{2(a+b+c)},$$

co jest równoważne nierówności, którą chcieliśmy wykazać.

Zadanie 4

Dane są takie dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c, że $abc = 1$. Wykazać, że

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant a + b + c.$$

Zauważmy, że zachodzą nierówności

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \geqslant 0,$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geqslant 2a + 2b + 2c.$$

Z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną mamy

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc} = 1,$$

$$a + b + c \geqslant 3.$$

Dodając dwie otrzymane nierówności stronami udowadniamy tezę.

Zadanie 5

Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} \geqslant \frac{3a+2b-c}{4}.$$

Zauważmy, że z nierówności między średnią arymtetyczną i geometryczną dla liczb $\frac{a^2}{a+b}$ oraz $\frac{a+b}{4}$ otrzymujemy

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} \geqslant a.$$

Analogicznie mamy

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b+c}{4} \geqslant b.$$

Dodając te dwie równości stronami otrzymujemy

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{a^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} + \frac{b+c}{4} \geqslant a + b,$$

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} \geqslant \frac{3a+2b-c}{4},$$

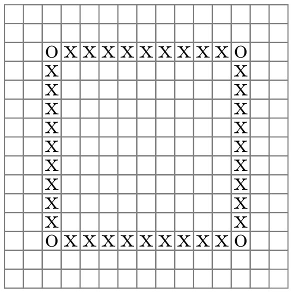
co było do wykazania.

Konstrukcje

Zadanie 1

Wykazać, że można pokolorować 40 pól na nieskończonej szachownicy, tak, aby nie istniał prostokąt utworzony z pól tej szachownicy zawierający dokładnie 20 pokolorowanych pól.

Rozpatrzmy kolorowanie takie jak na rysunku - pola, w które wpisano literę są pomalowane.



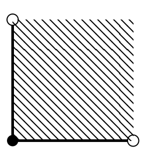
Zauważmy, że jeśli pewien prostokąt nie przykrywa żadnego pola z literą o, to może zawierać co najwyżej 18 pokolorowanych pól. Jeśli zawiera tylko jedną, to może zawierać ich co najwyżej 19. Jeśli zaś zawiera on w całości pewną „krawędź” pokolorowanego prostokąta, to albo zawiera nieparzystą liczbę pól, albo zawiera je wszystkie. Więc szukany prostokąt nie istnieje.

Zadanie 2

Udowodnij, że punkty płaszczyzny można tak pokolorować dziewięcioma kolorami, aby żadne dwa punkty odległe o 1 nie były tego samego koloru.

Podzielmy płaszczyznę na kratkę, tak że przekątna każdej kratki ma długość 1. Kolorujemy wszystkie punkty wewnątrz kratki, jej dolną krawędź bez prawego wierzchołka i jej lewą krawędź bez górnego wierzchołka na kolor przypisany według sposobu zademonstrowanego na lewym rysunku.

7	8	9	7	8	9
4	5	6	4	5	6
1	2	3	1	2	3
7	8	9	7	8	9
4	5	6	4	5	6
1	2	3	1	2	3

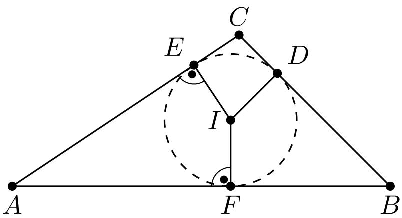


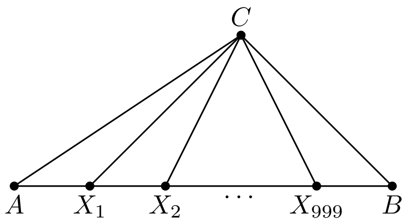
Łatwo zauważyć, że takie kolorowanie spełnia warunki zadania.

Zadanie 3

Wykazać, że każdy trójkąt można podzielić na 3000 czworokątów wypukłych, tak, aby każdy z nich dało się wpisać w okrąg oraz opisać na okręgu.

Na początku wykażemy, że każdy trójkąt można podzielić na 3 takie czworokąty. Rozpatrzmy dowolny trójkąt ABC. Niech I to będzie środek okręgu weń wpisanego, a punkty D, E i F to będą rzuty I odpowiednio na boki BC, CA i AB. Zauważmy, że $AI = IF$(promienie okręgu) oraz $AF = AE$(odcinki styczne). Stąd $AF + IE = AE + IF$, czyli czworokąt $AFIE$ da się opisać na okręgu. Mamy też, że kąty $\sphericalangle AFI$ i $\sphericalangle AEI$ są proste, czyli czworokąt $AFIE$ da się wspiać w okrąg. Analogicznie rozumujemy dla czworokątów $BDIF$ oraz $CEID$.





Wystarczy więc podzielić wyjściowy trójkąt na 1000 trójkątów jak na rysunku 1, a następnie każdy z tych trójkątów podzielić na 3 szukane czworokąty.

Zadanie 4

Wykazać, że można pokolorować każdą dodatnią liczbę całkowitą na jeden z 1000 kolorów, tak aby

- każdy z kolorów był użyty nieskończenie wiele razy;
- dla dowolnych takich liczb całkowitych a, b, c, że $ab = c$, pewne dwie spośród nich sa jednakowego koloru.

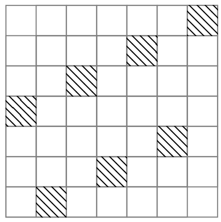
Przyjmijmy $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, ... jako kolejne liczby pierwsze. Liczbę 1 kolorujemy dowolnym kolorem. Niech p_i to będzie najmniejszy dzielnik pierwszy pewnej liczby n. Wówczas jeśli $i \geqslant 1000$ kolorujemy n kolorem o numerze i. W przeciwnym wypadku kolorujemy go kolorem o numerze 1000.

Wykażemy, że podane kolorowanie spełnia warunki zadania. Łatwo zauważyć, że każdy z kolorów będzie użyty nieskończenie wiele razy. Załóżmy więc, że $ab = c$. Jeśli jedna z liczb a, b jest równa jeden, to pozostałe są równe, więc w szczególności są tego samego koloru. Niech p będzie najmniejszym dzielnikiem liczby abc. Wówczas, skoro $ab = c$ liczba p musi dzielić co najmniej dwie spośród a, b, c. Z minimalności p mamy, że wyznaczy ona jednakowy kolor obu tym liczbom.

Zadanie 5

Łódka może zabrać w rejs po jeziorze dokładnie 7 osób. Udowodnij. że można tak zaplanować rejsy 49-osobowej wycieczki, aby każdych dwóch uczestników płynęło ze sobą dokładnie raz.

Zinterpretujmy te 49 osób jako planszę 7 na 7, gdzie każdemu polu przyporządkowana jest jedna osoba. Rozpatrzmy wszystkie kolorowania powstające w następujący sposób. Kolorujemy dowolna pola w najniższym i drugim najniższym wierszu. Załóżmy, że są to pola a-te i $a+k$-te(być może $k<0$). Wówczas w trzeciej kolumnie pokolorujemy pole $a+2k \pmod 7$, w czwartej $a+3k \pmod 7$ itd. Przykładowe kolorowanie dla $a=2$ i $k=2$ jest na rysunku.



Rozpatrzmy wszystkie takie kolorowania i dla każdego weźmy osoby przyporządkowane pokolorowanym polom na rejs. Wykażemy, że dowolne dwa pola są jednocześnie pokolorowane w dokładnie jednym kolorowaniu. Przyjmijmy, że te dwa pola są oddalone o $y \neq 0$ wierszy w pionie i x kolumn w poziomie. Zauważmy, że wówczas musi zajść $x \equiv yk \pmod 7$, co jest prawdą dla dokładnie jednego k. Skoro k jest jednoznacznie wyznaczone i znamy położenie jednego pola z kolorowania, to możemy odtworzyć położenie wszystkich. Skoro z dwóch pól możemy jednoznacznie odtworzyć kolorowanie, do którego oba należą, to teza jest prawdziwa.

Zadanie 6

Jaś zapisał pewną skończoną liczbę liczb rzeczywistych na tablicy. Następnie zaczął wykonywać ruchy. W każdym ruchu wybiera dwie równe liczby a, a, zmazuje je i zapisuje liczby $a+100$, $a+2000$. Wykazać, że Jaś może zapisać na początku takie liczby, że będzie mógł wykonywać ruchy w nieskończoność.

Załóżmy, że dla pewnej liczb całkowitych a zapisano liczby

$$a,\ a+1,\ a+2,\ ...,\ a+2019 \quad \text{oraz} \quad a,\ a+1,\ a+2,\ ...,\ a+100.$$

Zauważmy, że wykonując ruch dla a otrzymujemy analogiczną konfigurację dla $a+1$. Wypisując na starcie taką konfigurację chociażby dla $a=0$ Jaś będzie w stanie wykonywać ruchy w nieskończoność.

Wielomiany

Zadanie 1

Dany jest niezerowy wielomian $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, dla którego zachodzi równość

$$(x+1)W(x) = (x-2)W(x+1).$$

Wykazać, że każdy pierwiastek rzeczywisty $W(x)$ jest liczbą całkowitą.

Załóżmy nie wprost, że istnieje pewna liczba niecałkowita α, dla której zachodzi równość $W(\alpha) = 1$. Wstawiając $x = \alpha$ do wyjściowego równania otrzymujemy

$$\begin{aligned}(\alpha+1)W(\alpha) &= (\alpha-2)W(\alpha+1),\\ 0 &= (\alpha-2)W(\alpha+1).\end{aligned}$$

Skoro liczba α nie była całkowita, to $\alpha - 2 \neq 0$. Stąd $W(\alpha+1) = 0$.

Wykazaliśmy, że jeśli α jest niecałkowitym pierwiastkiem, to również $\alpha + 1$ jest niecałkowitym pierwiastkiem. Więc liczby

$$\alpha,\ \alpha+1,\ \alpha+2,\ \alpha+3,\ \ldots$$

są pierwiastkami $W(x)$. Zaś każdy niezerowy wielomian może mieć skończenie wiele pierwiastków – co najwyżej tyle, ile wynosi jego stopień – co daje sprzeczność.

Zadanie 2

Wykazać, że jeśli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają

$$\begin{cases} abc = 1 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a + b + c. \end{cases}$$

to co najmniej jedna liczba spośród a, b, c jest równa 1.

Rozpatrzmy wielomian

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc = \\ &= x^3 - (a+b+c)x^2 + abc \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) x - 1 = \\ &= x^3 - (a+b+c)x^2 + (a+b+c)x - 1. \end{aligned}$$

Chcemy wykazać, że liczba 1 jest pierwiastkiem tego wielomianu. Zauważmy więc, że

$$P(1) = 1^3 - (a+b+c)\cdot 1^2 + (a+b+c)\cdot 1 - 1 = 0.$$

Skoro 1 jest pierwiastkiem $P(x)$, to należy on do multizbioru $\{a, b, c\}$.

Zadanie 3

Niech $n \geqslant 1$ będzie pewną liczbą całkowitą. Wykazać, że wielomian $x^{1001}+x+1$ jest podzielny przez x^2+x+1.

Wykażemy indukcyjnie, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n wielomian $x^{3n-1}+x+1$ jest podzielny przez wielomian x^2+x+1. Dla $n=1$ te wielomiany są sobie równe, więc podzielność zachodzi.

Zauważmy, że

$$(x^{3(n+1)-1}+x+1)-(x^{3n-1}+x+1)=x^{3n-1}(x^3-1)=x^{3n-1}(x-1)(x^2+x+1).$$

Prawa strona równości jest podzielna przez wielomian x^2+x+1. Stąd jeśli $x^{3n-1}+x+1$ jest podzielne przez x^2+x+1 to $x^{3(n+1)-1}+x+1$ również. Więc z zasady indukcji matematycznej wynika postulowana własność. Wstawiając $n=334$ otrzymujemy tezę.

Zadanie 4

Dany jest pewien wielomian $P(x)$. Wykazać, że istnieje wielomian $Q(x)$, że zachodzi równość

$$Q(x+1)-Q(x)=P(x).$$

Tezę wykażemy indukując się po stopniu wielomianu P. Jeśli jego stopień wynosi 0, to znaczy $P(x)=c$ dla pewnej stałej c, to biorąc $Q(x)=cx$ otrzymujemy

$$Q(x+1)-Q(x)=c(x+1)-cx=c.$$

Załóżmy, że dla wielomianów o stopniu nie większym niż $n-1$ zachodzi teza. Wykażemy, że jeśli $deg\ P=n$ to szukane Q istnieje. Zauważmy, że wielomian

$$(x+1)^{n+1}-x^{n+1}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i}x^i$$

jest wielomianem stopnia n. Taki sam stopień ma P, więc istnieje taka liczba rzeczywista a, że

$$a\left((x+1)^{n+1}-x^{n+1}\right)\quad\text{oraz}\quad P(x)$$

mają równy współczynnik wiodący. Stąd

$$P(x)-a\left((x+1)^{n+1}-x^{n+1}\right)$$

ma stopień mniejszy od n, czyli na mocy założenia indukcyjnego istnieje takie $Q_1(x)$, że

$$Q_1(x+1)-Q_1(x)=P(x)-a\left((x+1)^{n+1}-x^{n+1}\right),$$

równoważnie

$$(Q_1(x+1)+a(x+1)^{n+1})-(Q_1(x)+ax^{n+1})=P(x).$$

Biorąc $Q(x)=Q_1(x)+ax^{n+1}$ otrzymujemy tezę.

Zadanie 5

Dany jest wielomian $W(x)$ o współczynnikach całkowitych. Wykazać, że jeśli przyjmuje on dla czterech różnych liczb całkowitych wartość 5, to dla żadnego całkowitego argumentu nie przyjmuje wartości 8

Przyjmijmy, że

$$W(a_1) = W(a_2) = W(a_3) = W(a_4) = 5 \quad \text{oraz} \quad W(b) = 8.$$

dla pewnych liczb całkowitych $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$. Rozpatrzmy wielomian

$$Q(x) = W(x) - 5.$$

Wówczas liczby $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$ są jego pierwiastkami. Na mocy twierdzenia Bézouta możemy napisać

$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4) \cdot R(x)$$

dla pewnego wielomianu R. Zauważmy, że $R(x)$ musi mieć współczynniki całkowite. W przeciwnym wypadku, rozpatrzając współczynnik niecałkowity przy najwyższej możliwej potędze, przemnożony przez x^4 otrzymalibyśmy, że $Q(x)$ też ma współczynnik niecałkowity. Zauważmy, że

$$3 = W(b) - 5 = Q(5) = (5 - a_1)(5 - a_2)(5 - a_3)(5 - a_4) \cdot R(b).$$

Liczby $5 - a_1,\ 5 - a_2,\ 5 - a_3,\ 5 - a_4$ są parami różnem. Stąd co najmniej dwie z nich nie są równe -1 ani 1. Stąd wartość bezwzględna ich iloczynu nie może być liczbą pierwszą, w szczególności być równa 3.

Zadanie 6

Paweł i Tomek grają w grę. Paweł ma pewien wielomian $W(x)$ o współczynnikach dodatnich całkowitych stopnia $n \geqslant 1$. Tomek go nie zna, a chce poznać. Może w tym celu wykonywać ruchy. W każdym ruchu może wybrać pewną dodatnią liczbę całkowitą k, być może biorąc pod uwagę co się stało we wcześniejszych ruchach, a nastepnie Tomek podaje mu wartość $W(k)$. Wyznaczyć, w zależności od n, najmniejszą liczbę ruchów, w której Tomek, niezależnie od wybranego wielomianu, jest w stanie poznać wszystkie jego współczynniki.

Załóżmy, że Tomek po wykonaniu pierwszego ruchu dowiedział się, że $W(a) = 2a$. Wówczas nie może rozróżnić czy $W(x) = 2a$ czy $W(x) = 2x$. Stąd aby być w stanie poznać wielomian niezależnie od tego, jaki on jest, Tomek będzie potrzebował co najmniej 2 ruchów. Wykażemy, że niezależnie od n, Tomek jest w stanie tego dokonać w 2 ruchach. Strategia składa się z 2 punktów:

- Tomek pyta Pawła o wartość $W(2)$. Skoro współczynniki W są dodatnie, to łatwo wykazać, że $W(2)$ jest większe od największego współczynnika wielomianu W.
- Następnie pyta go o wartość $d = W(W(2))$. Otrzyma liczbę

$$a_n d^n + a_{n-1} d^{n-1} + ... + a_1 d + a_0.$$

Jest to wartość liczby o kolejnych cyfrach a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 w systemie liczbowym o podstawie d. Korzystamy tu z faktu, że a_n, a_{n-1}, ..., a_1, $a_0 < d$. Zamieniając otrzymaną liczbę na liczbę w systemie o podstawie d kolejne cyfry będą współczynnikami danego wielomianu.

Uwaga
W lepszym zrozumieniu idei może posłużyć przykład. Weźmy wielomian

$$W(x) = 21x^3 + 4x + 5.$$

Wiemy, że

$$W(100) = 21000405.$$

W zapisie dziesiętnym pokazały nam się kolejne współczynniki $W(x)$.

Zadanie 7

Rozstrzygnąć, czy istnieje wielomian 1000 stopnia, którego współczynniki należą do zbioru $\{-1, 1\}$ oraz ma on 1000 pierwiastków rzeczywistych.

Wykażemy, że szukany wielomian nie istnieje. Przyjmijmy, że ma on pierwiastki a_1, a_2, ..., a_{1000}. Wówczas jest on postaci

$$W(x) = a(x - a_1)(x - a_2) \cdot \ldots \cdot (x - a_{1000}).$$

Wymnażając te nawiasy możemy zauważyć, że wyraz wolny wynosi $a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_{1000}$, współczynnik przy x będzie równy $\sum_{1 \leqslant i \leqslant 1000} a_i$, zaś współczynnik przy x^2 wyniesie $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 1000} a_i a_j$. Na mocy założeń są one równe ± 1. Mamy

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leqslant i \leqslant 1000} a_i &= \pm 1, \\
\left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant 1000} a_i \right)^2 &= 1, \\
\sum_{1 \leqslant i \leqslant 1000} a_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 1000} a_i a_j &= 1.
\end{aligned}$$

Jeśli $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 1000} a_i a_j = 1$, to na mocy powyższej równości mielibyśmy, że suma kwadratów jest ujemna. Stąd $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 1000} a_i a_j = -1$, czyli

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant 1000} a_i^2 = 1 - 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 1000} a_i a_j = 3.$$

Na mocy nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną mamy

$$\frac{3}{1000} = \frac{\sum_{1 \leqslant i \leqslant 1000} a_i^2}{1000} \geqslant \sqrt[1000]{|a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_{1000}|^2} = 1,$$

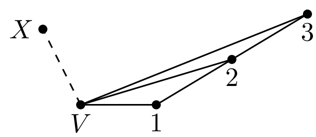
co daje nam sprzeczność.

Grafy

Zadanie 1

W pewnym grafie każdy wierzchołek ma stopień co najmniej 100. Wykazać, że w tym grafie istnieje ścieżka o długości co najmniej 101.

Rozpatrzmy najdłuższą ścieżkę w tym grafie i załóżmy nie wprost, że jest ona długości nie większej niż 100. Wierzchołek początkowy tej ścieżki V jest połączony z co najmniej 101 wierzchołkami. Co najwyżej 99 z nich leży na rozpatrywanej ścieżce – 100 wierzchołków z wyłączeniem V. Stąd V jest połączony z pewnym wierzchołkiem spoza ścieżki – możemy więc wydłużyć tę ścieżkę o tego sąsiada. Przeczy to maksymalności długości tej ścieżki.



Wydłużamy ścieżkę V-1-2-3 o X.

Zadanie 2

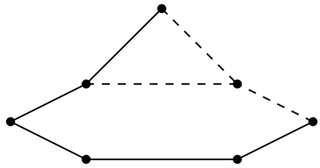
W pewnym kraju jest $n \geqslant 3$ miast, przy czym każde dwa są połączone drogą albo torami kolejowymi. Pewien turysta planuje wyruszyć z pewnego miasta, odwiedzić każde miasto dokładnie raz, a następnie powrócić do wyjściowego miasta. Wykazać, że może tak wybrać wyjściowe miasto i tak zaplanować swoją trasę, aby zmienić środek transportu co najwyżej raz.

Przekłóżmy zadanie na język teorii grafów. Miasta będa wierzchołkami, połączenie kolejowe niebieską krawędzią, a połączenie drogowe czerwoną.

Wykażemy tezę indukcyjnie. Zauważmy, że dla $n = 3$ jest ona trywialna. Gdy wszystkie krawędzie są tego samego koloru, to dowolne przejście spełnia warunki zadania. Gdy tak nie jest, to zaczynamy w wierzchołku, w którym schodzą się dwie krawędzie różnych kolorów i przechodzimy przez wszystkie krawędzie.

Wyróżnijmy pewien wierzchołek v. Wszystkie inne wierzchołki tworzą graf, który ma $n-1$ wierzchołków, a więc możemy skorzystać z założenia indukcyjnego. Załóżmy, że krawędzie d_1d_2, d_2d_3, ..., $d_{k-1}d_1$ tworzą cykl spełniający warunki zadania. Gdy cykl ten jest jednokolorowy, to jeśli wstawimy v między d_1 i d_2, to tak otrzymany cykl będzie spełniał założenia.

Rozpatrzmy przypadek, w którym istnieje kolor $\mathcal{K}$, że tylko jedna krawędź jest koloru x. Załóżmy, bez straty ogólności, że d_1d_2 jest koloru $\mathcal{K}$, a inne krawędzie są innego koloru. Wtedy cykl d_1v, vd_2, d_2d_3, ..., $d_{k-1}d_1$ spełnia warunki zadania.



Teraz przyjrzyjmy się przypadkowi, w którym każdy z kolorów wystepuje co najmniej dwukrotnie na rozpatrywanym cyklu. Załóżmy więc bez straty ogólności, że d_1d_2 i d_2d_3 są czerwone, a d_3d_4 i d_4d_5 są niebieskie. Przyjmijmy, również bez straty ogólności, że vd_3 jest czerwona. Wtedy cykl d_1d_2, d_2d_3, d_3v, vd_4, d_4d_5, ..., $d_{k-2}d_{k-1}$, $d_{k-1}d_1$ spełnia warunki zadania.

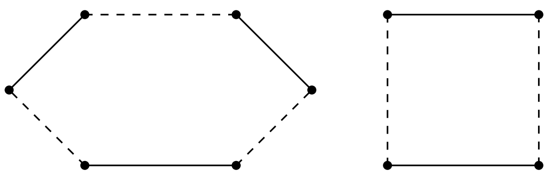
Zadanie 3

W pewnym turnieju bierze udział 40 drużyn. Pierwszego dnia każda z drużyn rozegrała jeden mecz. Drugiego dnia również. Wykazać, że istnieje pewne 20 drużyn, takich, że każde dwie spośród nich jeszcze nie grały ze sobą meczu.

Rozpatrzmy graf, w którym wierzchołkami będą drużyny. Krawedź będzie istnieć wtedy i tylko wtedy, gdy drużyny odpowiadające jej końcą rozegrały ze sobą mecz. Zauważmy, że warunek z zadania jest równoważny faktowi, że stopień każdego wierzchołka jest równy 2.

Wybierzmy pewien wierzchołek i rozpocznijmy w nim spacer po grafie. Będziemy przechodzić do następnych wierzchołków krawędziami, którymi jeszcze nie szliśmy. Łatwo zauważyć, że musimy w ten sposób otrzymać cykl, w którym każdy wierzchołek odwiedzamy co najwyżej raz. Skoro stopień każdego z wierzchołków wynosi 2, to żaden z wierzchołków tego cyklu nie ma krawędzi łączącej go z jakimkolwiek wierzchołkiem spoza tego cyklu. Wykonując analogiczne spacery startując z nieodwiedzonych jeszcze wierzchołków - o ile takowe istnieją - otrzymamy, że graf jest sumą rozłącznych cykli.

Pokolorujmy każdą z krawędzi na czerwono, jeśli mecz odbył się pierwszego dnia, lub na zielono, jeśli odbył się drugiego dnia. Zauważmy, że z każdego wierzchołka wychodzi jedna zielona i jedna czerwona krawędź. Stąd w każdym cyklu krawędzie na przemian: zielona, czerwona, zielona, czerwona, ... itd. Stąd każdy z cykli jest parzystej długości.



W każdym z cykli długości parzystej możemy wybrać połowę jego wierzchołków, aby żadne dwa z nich nie grały ze sobą meczu. Wybierając takie wierzchołki dla każdego z cykli otrzymamy połowę wierzchołków z całego grafu, które nie są połączone ze sobą. Odpowiadające im 20 drużyn spełniają warunki zadania.

Zadanie 4

Dany jest graf spójny zawierający parzystą liczbę wierzchołków. Wykazać, że możemy pokolorować niektóre z jego krawędzi, aby z każdego wierzchołka wychodziła nieparzysta liczba pokolorowanych krawędzi.

Rozpatrzmy dwa wierzchołki u i v. Skoro graf jest spójny, to istnieje różnowierzchołkowa ścieżka między tymi wierzchołkami. Zmieńmy stan – z pokolorowanej na niepokolorowaną i na odwrót – każdej z krawędzi na tej ścieżce. Zauważmy, że parzystość liczby kolorowych krawędzi wychodzących z każdego wierzchołka wewnątrz ścieżki nie ulegnie zmianie. Natomiast parzystość liczby kolorowych krawędzi wychodzących z u i z v się zmieni. Czyli jesteśmy w stanie zmienić parzystość liczby kolorowych krawędzi wychodzących z dowolnych dwóch wierzchołków. Skoro liczba wierzchołków w grafie jest liczbą parzystą, to możemy podzielić je w dowolny sposób na pary i zastosować wskazany wyżej algorytm dla każdej z nich. W ten sposób uzyskamy szukane kolorowanie.

Zadanie 5

W pewnym grafie o n wierzchołkach ich stopnie wynoszą odpowiednio d_1, d_2, ..., d_n. Udowodnić, że istnieje taki podzbiór co najmniej $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+d_i}$ jego wierzchołków, że żadne dwa z nich nie są połączone krawędzią.

Rozpatrzmy wierzchołek o największym stopniu. Wyróżnijmy go i usuńmy go wraz ze wszystkimi sąsiadującymi wierzchołkami. Bez straty ogólności $d_1 \geqslant d_2 \geqslant ... \geqslant d_{d_1+1}$ to będą stopnie usuniętych wierzchołków. Wówczas rozpatrywana suma ułamków zmniejszy się o sumę

$$\sum_{i=0}^{d_1+1} \frac{1}{d_i+1} \geqslant \sum_{i=0}^{d_1+1} \frac{1}{d_1+1} = 1.$$

Także po usunięciu tych wierzchołków inne stopnie mogą się zmniejszyć, ale to jeszcze bardziej zmniejszy naszą sumę.

Wykazaliśmy, że usuwając pewien wierzchołek i jego sąsiadów, zmiejszamy rozpatrywaną sumę o co najwyżej 1. Powtarzając ten algorytm, wykonamy co najmniej $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+d_i}$ usunięć. Biorąc pod uwagę wyróżnione wierzchołki otrzymamy zbiór spełniający warunki zadania.

Zadanie 6

Hydra składa się z pewnej liczby głów, z której niektóre są połączone szyjami. Herkulers może odciąć wszystkie szyje wychodzące z pewnej głowy, jednak wówczas z tamtej głowy wyrastają szyję, którą łączą ją z głowami, z którymi nie była ona wcześnie połączona. Hydra jest pokonana, gdy rozpada się na dwie rozłączne części. Wyznaczyć najmniejsze N, że Herkules jest w stanie pokonać dowolną hydrę składającą się ze 100 szyi.

Wykażemy, że $N = 10$. Oczywiście rozpatrzamy dany problem w języku teorii grafów. Rozpatrzmy dwa przypadki.

Jeśli istnieje wierzchołek o stopnie nie większym niż 10, to Herkules może odciąć każdego z jego sąsiadów i wówczas ten wierzchołek nie będzie miał już żadnych sąsiadów. W ten sposób może osiągnąć swój cel.

Załóżmy teraz, że każdy wierzchołek ma stopień co najmniej 11. Oznaczmy liczbę wierzchołków jako K. Wówczas liczba krawędzi wynosi co najmniej $\frac{11K}{2}$. Skoro jest ona równa 100, to otrzymujemy $K \leqslant 18$. Zauważmy, że po wykonaniu odcięcia wierzchołka o stopniu co najmniej 11, będzie on miał stopień co najwyżej $18 - 11 - 1 = 6$. Wówczas stosując procedurę analogiczną do poprzedniego prypadku otrzymamy $6+1 = 7$ łacznych cięć.

Pozostaje wskazać przykład grafu, którego nie da rozciąć się w mniej niż 10 ruchach. Zauważmy, że graf $K_{a,b}$ może zostać przekształcony na jeden z grafów $K_{a-1,b+1}$ lub $K_{a+1,b-1}$. Rozpatrując graf $K_{10,10}$ otrzymujemy szukany przykład.

Indukcja matematyczna 2

Zadanie 1

Udowodnić, że za pomocą monet trzyzłotowych i pięciozłotowych można zapłacić każdą kwotę większą niż 7 złotych, bez konieczności wydawania reszty.

Najpierw zauważymy, że skoro zachodzą równości

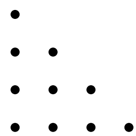
$$8 = 5 + 3, \quad 9 = 3 + 3 + 3, \quad 10 = 5 + 5,$$

skąd wynika, że kwoty 8, 9 i 10 złotych da się zapłacić bez wydawania reszty.

Załóżmy, że dla pewnej liczby całkowitej $k \geqslant 11$, da się we wspomniany sposób zapłacić wszystkie kwoty większe od 7 złotych, ale nie większe niż k. Wówczas w szczególności da się zapłacić kwotę $(k+1) - 3 \geqslant 8$ złotych. Dokładając jedną monetę trzyzłotową otrzymujemy szukane przestawienie kwoty $k+1$ złotych. Z zasady indukcji matematycznej wynika teza.

Zadanie 2

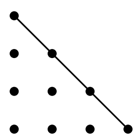
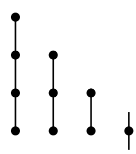
Dana jest liczba naturalna n. Niech $\mathcal{S}$ będzie zbiorem wszystkich punktów postaci (a, b), gdzie a i b są liczbami ze zbioru $\{0, 1, 2, ..., n\}$ oraz $a + b \leqslant n$.



Przykład dla $n = 3$.

Wykazać, że jeśli pewien zbiór prostych zawiera każdy z tych punktów, to zawiera on co najmniej $n + 1$ prostych.

Zauważmy, że dla $n = 0$ teza jest trywialna – zbiór $\mathcal{S}$ zawiera jedynie punkt $(0, 0)$ i do jego pokrycia jest potrzebna jedna prosta. Rozumując indukcyjnie, załóżmy, że teza zachodzi dla pewnej liczby naturalnej n. Wykażmy, że jest prawdziwa również dla $n + 1$.

Weźmy dowolny zbiór prostych, które przykrywają każdy z punktów zbioru $\mathcal{S}$ dla $n + 1$. Wyróżnijmy punkty (a, b), dla których zachodzi równość $a + b = n + 1$. Zauważmy, że wszystkie te punkty leżą na jednej prostej. Rozpatrzmy dwa przypadki

1. Istnieje prosta l, która przykrywa pewne dwa wyróżnione punkty. Wówczas przykrywa ona wszystkie wyróżnione punkty i żadnego innego punktu ze zbioru $\mathcal{S}$.

Zauważmy, że dla zbioru $\mathcal{S}$ z usuniętymi wyróżnionymi punktami, możemy zaaplikować założenie indukcyjne. Wynika z niego, że do pokrycia rozpatrzywanych punktów potrzeba co najmniej n prostych. Dokładając prostą l otrzymujemy, że łącznie prostych jest co najmniej $n + 1$.

2. Żadne dwa wyróżnione punkty nie są przykryte przez jedną prostą. Skoro jest $n+1$ punktów, to do ich przykrycia będzie potrzebnych $n + 1$ prostych. W szczególności do pokrycia zbioru $\mathcal{S}$ potrzeba $n + 1$ prostych.

Zadanie 3

Wykazać, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita, że jest ona podzielna przez 2^{1000}, oraz ma w zapisie dziesiętnym jedynie cyfry 1 i 2.

Powiemy, że liczba naturalna x jest *dobra*, jeśli ma dokładnie n cyfr, z których każda jest jedynką lub dwójką, oraz x jest podzielna przez liczbę 2^n.

Wykażemy indukcyjnie, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n, istnieje n cyfrowa liczba dobra. Zauważmy, że liczba 2 jest liczbą dobrą. Pozostaje wykazać, że jeśli dla pewnego n istnieje n-cyfrowa liczba dobra – nazwijmy ją $2^n \cdot a_n$, to dla $n + 1$ również.

Rozpatrzmy dwa przypadki

1. Jeśli liczba a_n jest nieparzysta, to weźmy liczbę

$$10^{n+1} + 2^n \cdot a_n = 2^n \left(5^n + a_n\right).$$

Powstaje ona przez doklejenie do $2^n \cdot a_n$ cyfry 1 z lewej strony. W nawiasie jest suma dwóch liczb nieparzystych, a więc jest ona parzysta. Stąd $10^{n+1} + 2^n \cdot a_n$ jest podzielna przez 2^{n+1}.

2. Gdy liczba a_n jest parzysta, to rozpatrzmy liczbę

$$2 \cdot 10^{n+1} + 2^n \cdot a_n = 2^n \left(2 \cdot 5^n + a_n\right).$$

Powstaje ona przez doklejenie do $2^n \cdot a_n$ cyfry 2 z lewej strony. W nawiasie jest suma dwóch liczb parzystych, a więc jest ona parzysta. Więc $2 \cdot 10^{n+1} + 2^n \cdot a_n$ jest podzielna przez 2^{n+1}.

W każdym z przypadków rozpatrywana liczba jest $n + 1$-cyfrową liczbą dobrą. Kończy to dowód indukcyjny. Biorąc liczbę dobrą, która ma 1000 cyfr. Jest ona podzielna przez 2^{1000} oraz składa się wyłącznie z cyfr 1 i 2.
Uwaga
Liczby dobre wygenerowane za pomocą powyższego rozumowania to

$$2,\ 12,\ 112,\ 2112,\ 22112,\ \ldots$$

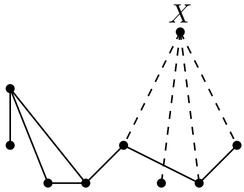
Zadanie 4

Niech k będzie dodatnią liczbą całkowitą. Na przyjęciu spotkało sie $n \geqslant 2$ gości, spośród których niektórzy znają się. Okazało się, że dla każdego niepustego podzbioru gości A istnieje osoba, która zna co najwyżej k osób z A. Podzbiór gości, spośród których każde dwie się znają, nazywamy *kilką*. Wykazać, że istnieje co najwyżej $2^k \cdot n$ klik.

Zadanie rozwiążemy indukując się po n. Jeśli $n = 2$, to teza jest trywialna – trzeba wykazać, że istnieją co najwyżej 4 kliki, a są 4 możliwe podzbiory zbiorów gości. W dalszej części rozwiązania zakładamy, że $n \geqslant 3$.

Na mocy założenia zadania zastosowanego dla zbioru wszystkich n osób, istnieje pewna osoba X, która ma co najwyżej k zajomych. Usuwając osobę X, założenie z zadania nadal będzie zachodzić dla pozostałych osób. Na mocy założenia indukcyjnego liczba klik, które nie zawierają X wynosi $2^k \cdot (n-1)$.

Klika, która zawiera X, nie może zawierać osoby, której X nie zna. Musi więc składać się z X oraz pewnego podzbioru znajomych X. Skoro X ma co najwyżej k znajomych, to tych podzbiorów jest co najwyżej 2^k.



Łącząc powyższe wnioski otrzymujemy, że klik jest co najmniej $2^k \cdot (n-1) + 2^k = 2^k \cdot n$. Z zasady indukcji matematycznej wynika teza.

Zadanie 5

Znajdź wszystkie funkcje f z dodatnich liczb całkowitych w dodatnie liczby całkowite, które dla każdej liczby dodatniej całkowitej n spełniają nierówności

$$(n-1)^2 < f(n)f(f(n)) < n^2 + n.$$

Podstawiając do wyjściowego równania $n = 1$ otrzymamy

$$0 < f(1)f(f(1)) < 2,$$

skąd $f(1) = f(f(1)) = 1$. Wykażemy indukcyjnie, że $f(n) = n$. Załóżmy, że równość $f(k) = k$ zachodzi dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych k mniejszych od n.

1. Jeśli $f(n) \leqslant n-1$, to z założenia indukcyjnego $f(f(n)) = f(n)$. Wówczas

   $$f(n)f(f(n)) = f(n)^2 \leqslant (n-1)^2,$$

   co daje sprzeczność.

2. Gdy $f(n) \geqslant n+1$, to skoro

$$f(n)f(f(n)) < n^2 + n,$$

to $f(f(n)) < n$, czyli $f(f(n)) \leqslant n-1$. Stąd na mocy założenia indukcyjnego $f(f(f(n))) = f(f(n))$. Wstawiając $f(n)$ zamiast n do danej nierówności otrzymamy

$$(f(n)-1)^2 < f(f(f(n)))f(f(n)) = f(f(n))^2 \leqslant (n-1)^2,$$

co przeczy temu, że $f(n) \geqslant n+1$.

Stąd musi zajść $f(n) = n$, co kończy rozumowanie indukcyjne.

Zadanie 6

Niech $\mathcal{R}$ będzie rodziną zbiorów 1000-elementowych. Moc $\mathcal{R}$ jest większa niż $1000 \cdot 999^{1000}$ Wykazać, że istnieje 1000-elementowa rodzina $\mathcal{G}$, będąca podrodziną $\mathcal{R}$, oraz taki zbiór X, że dla dowolnych zbiorów $A, B \in \mathcal{R}$ zachodzi $A \cap B = X$.

Wykażemy nieco ogólniejszą i mocniejszą wersję tezy.

Niech $\mathcal{R}$ będzie rodziną zbiorów n-elementowych. Moc $\mathcal{R}$ jest większa niż $n! \cdot k^n$ Wówczas istnieje $k+1$-elementowa rodzina $\mathcal{G}$, będąca podrodziną $\mathcal{R}$, oraz taki zbiór X, że dla dowolnych zbiorów $A, B \in \mathcal{R}$ zachodzi $A \cap B = X$.

Będziemy przeprowadzać indukcję po liczbie n. Dla $n = 1$ moc $\mathcal{R}$ to co najmniej $k+1$. Każdy ze zbiorów zawiera jeden element, więc każde dwa mają puste przecięcie. Stąd biorąc całą rodzinę $\mathcal{R}$ oraz $X = \emptyset$ otrzymujemy tezę.

Rozpatrzmy największą podrodzinę $\mathcal{H}$ rodziny R, że dowolne dwa jej podzbiory mają puste przecięcie. Moc $\mathcal{H}$ jest nie większa niż k, gdyż w przeciwnym przypadku biorąc rodzinę $\mathcal{H}$ i $X = \emptyset$ otrzymamy tezę. Stąd każdy zbiór $A \in \mathcal{R}$ ma niepuste przecięcie z pewnym ze zbiorów z rodziny $\mathcal{H}$.

Łącznie zbiory należące do rodziny $\mathcal{H}$ zawierają co najwyżej $k \cdot n$ elementów – jest co najwyżej k zbiorów n-elementowych. Skoro wszystkich zbiorów należących do $\mathcal{R}$ jest więcej niż $n! \cdot k^n$, to istnieje element a, który należy do

$$\frac{n! \cdot k^n}{n \cdot k} = (n-1)! \cdot k^{n-1}$$

zbiorów.

Rozpatrując zbiory zawierające element a, następnie usuwając go z każdego z nich, otrzymamy więcej niż $(n-1)! \cdot k^{n-1}$ zbiorów, które zawierają po $n-1$ elementów. Można więc skorzystać z założenia indukcyjnego. Istnieje więc pewien zbiór X oraz pewna podrodzina rozpatrywanej rodziny zbiorów, że X jest przecięciem dowolnych zbiorów należących do danej podrodziny. Dokładając ponownie do każdego z tych zbiorów element a otrzymujemy tezę.

Podzielności

Zadanie 1

Wyznaczy wszystkie dodatnie liczby całkowite n, które są podzielne przez liczbę $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

Odpowiedź. Jedynymi liczbami spełniającymi warunki zadania są liczby postaci k^2, k^2+k oraz k^2+2k dla pewnej liczby całkowitej k.

Rozpatrzmy taką dodatnią liczbę całkowitą k, że

$$(k+1)^2 > n \geqslant k^2.$$

Innymi słowy k jest największą liczbą całkowitą, taką, że k^2 jest nie większe niż n. Wówczas

$$k+1 > \sqrt{n} \geqslant k,$$

czyli $\lfloor n \rfloor = k$. Jedynymi liczbami w przedziale $[k^2, (k+1)^2)$, które są podzielne przez k są k^2, $k^k + k$ i $k^2 + 2k$.

Zadanie 2

Dane są dodatnie liczby całkowite a, b, c, że liczba a^b dzieli b^c oraz a^c dzieli c^b. Wykazać, że a^2 dzieli bc.

Niech p będzie dowolną liczbą pierwszą. Z danych podzielności wynika, że

$$v_p(b^c) \geqslant v_p(a^b) \quad \text{oraz} \quad v_p(c^b) \geqslant v_p(a^c),$$

czyli równoważnie

$$cv_p(b) \geqslant bv_p(a) \quad \text{oraz} \quad bv_p(c) \geqslant cv_p(a),$$
$$cv_p(b) \geqslant bv_p(a) \quad \text{oraz} \quad bv_p(c) \geqslant cv_p(a).$$

Mamy więc

$$v_p(bc) = v_p(b) + v_p(c) = \frac{b}{c}v_p(a) + \frac{c}{b}v_p(a) \geqslant 2\sqrt{\frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b} \cdot v_p(a)^2} = 2v_p(a),$$

z czego wynika teza.

Zadanie 3

Niech $1 = d_0 < d_1 < d_2 < \ldots < d_k = 4n$ będą kolejnymi dzielnikami liczby $4n$. Wykazać, że istnieje taka liczba i, dla której zachodzi równość $d_{i+1} - d_i = 2$.

Załóżmy, że teza nie zachodzi – wtedy musi zachodzić nastepujący fakt:

Jeśli d oraz $d+2$ są dzielnikami liczby $4n$, to liczba $d+1$ również. (*)

Wykażemy, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych k, że $2k$, $2k+1$ oraz $2k+2$ są dzielnikami liczby n. Na początku zauważmy, że 2 i 4 są dzielnikami $4n$. Z (*) liczba 3 również nim będzie.

Załóżmy więc, że dla pewnej liczby naturalnej k liczby $2k$, $2k+1$ oraz $2k+2$ są dzielnikami liczby $4n$. Wówczas jedna z liczb $2k$, $2k+2$ nie jest podzielna przez 4. Bez straty ogólności przyjimy, że jest to $2k$. Skoro $2k$ nie dzieli się przez 4 i jest dzielnikiem liczby $4n$, to liczba $4k$ również będzie dzielnikiem liczby $4n$.

Analogicznie postępując z liczbą $2n+1$, która jest nieparzysta, otrzymamy, że również liczba $4k+2$ jest dzielnikiem liczby $4n$. Z (*) mamy, że $4k+1$ musi być dzielnikiem $4n$. Otrzymaliśmy większą trójkę $(4k, 4k+1, 4k+2)$ kolejnych dzielników liczby $4n$.

Możemy w ten sposób uzyskać dowolnie duże trójki kolejnych dzielników $4n$, co jest oczywistą sprzecznością, gdyż dzielniki te są nie większe niż $4n$.

Zadanie 4

Znajdź wszystkie pary (a, b) liczb całkowitych dodatnich, większych od 1, dla których obie liczby

$$\frac{a^3b-1}{a+1} \quad \text{oraz} \quad \frac{b^3a-1}{b-1}$$

są całkowite

Odpowiedź. Szukanymi parami liczb są $a=2$ i $b=2$, $a=1$ i $b=3$, oraz $a=3$ i $b=3$.

Zauważmy, że

$$\frac{a^3b-1}{a+1} = a^2b - \frac{a^2b+1}{a+1} = a^2b - ab + \frac{ab-1}{a+1} = a^2b - ab + b - \frac{b+1}{a+1}.$$

Wynika stąd, że liczba $b+1$ jest podzielna przez liczbę $a+1$. Mamy również

$$\frac{b^3a+1}{b-1} = b^2a + \frac{b^2a+1}{b-1} = b^2a + ab + \frac{ab+1}{b-1} = b^2a - ab + a + \frac{a+1}{b-1},$$

czyli $a+1$ jest podzielna przez liczbę $b-1$.

Liczba $a+1$ jest dzielnikiem liczby $b+1$ oraz wielokrotnością liczby $b-1$. Stąd liczba $b+1$ jest podzielna przez liczbę $b-1$. Zauważmy, że jeśli $b \geqslant 4$, to

$$b+1 > b-1 > \frac{b+1}{2},$$

co przeczy wspomnianej podzielności. Więc $b=2$ lub $b=3$. Jeśli $b=2$, to $a+1$ jest dzielnikiem 3. Skoro jest większe od 1, to musi być równe 3, skąd $a=2$. Dla $b=3$ mamy, że $a+1$ musi być dzielnikiem 4 i musi być podzielne przez 2. Stąd $a=1$ lub $a=3$.

Zadanie 5

Dane są parami różne dodatnie liczby całkowite a, b, c oraz nieparzysta liczba pierwsza p, że liczby

$$ab+1,\ bc+1,\ ca+1$$

są podzielne przez p. Wykazać, że

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant p+2.$$

Zauważmy, że skoro $p \mid ab+1$ oraz $p \mid bc+1$, to

$$p \mid (ab+1)-(bc+1) = b(a-c).$$

Skoro p jest liczbą pierwszą, to dzieli ona b lub dzieli ona $a-c$. Gdyby dzieliła liczbę b, to wówczas nie mogła by dzielić liczby $bc+1 \equiv 1 \pmod{p}$. Stąd $p \mid a-c$, czyli

$$a \equiv c \pmod{p}.$$

Rozumując analogicznie dla podzielności $p \mid bc+1$ i $p \mid ca+1$, otrzymamy $a \equiv b \pmod{p}$. Stąd

$$a \equiv b \equiv c \pmod{p}.$$

Pozostaje zauważyć, że $a \not\equiv 1 \pmod{p}$, bo w przeciwnym wypadku

$$ab+1 \equiv a^2+1 \equiv 2 \pmod{p}.$$

Przyjmijmy, że $2 \leqslant a < b < c$. Skoro dają one tę samą resztę z dzielenia przez p, to różnią się o wielokrotność liczby p, czyli co najmniej o p. Stąd

$$b \geqslant a+p \quad \text{oraz} \quad c \geqslant b+p \geqslant a+2p,$$

czyli

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \frac{a+a+p+a+2p}{3} = p+a \geqslant p+2.$$

Zadanie 6

Niech a i k będą pewnymi dodatnimi liczbami całkowitymi o tej własności, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n istnieje liczba całkowita b, że

$$n \mid a-b^k.$$

Wykazać, że $a = c^k$ dla pewnej liczby całkowitej c.

Sposób 1

Rozpatrzmy dowolną liczbę pierwszą p. Wykażemy, że $k \mid v_p(a)$, z czego wyniknie teza. Załóżmy nie wprost, że $v_p(a) = x \cdot k + r$, gdzie x i $0 < r < k$ są dodatnimi liczbami całkowitymi. Weźmy $a = p^{xk}$. Wówczas istnieje takie b, że

$$p^{xk+k} \mid a - b^k.$$

Zauważmy, że skoro $v_p(b^k)$ jest podzielne przez k, to może być albo nie mniejsze niż $xk + k$, albo nie większe niż xk. W obu przypadkach liczby b^k i a mają różne v_p, przy czym mniejsze z nich jest ściśle mniejsze niż $xk + k$. Na mocy Lematu 4 otrzymujemy

$$v_p(a - b^k) = min(v_p(a), v_p(b^k)) < xk + k.$$

Jest to sprzeczność z wyżej opisaną podzielnością.

Sposób 2

Weźmy $n = a^2$. Wówczas na mocy założenia istnieją takie liczby całkowite b oraz d, że

$$a - b^k = da^2,$$

$$a(ad + 1) = b^k.$$

Skoro $\mathrm{NWD}(a, ad + 1) = 1$, a iloczyn tych liczb jest k-tą potęgą liczby całkowitej, to każda z tych liczb jest k-tą potęgą liczby całkowitej.

Gry

Zadanie 1

Na tablicy napisano liczbę całkowitą dodatnią. W każdym ruchu zmazujemy napisaną liczbę n na tablicy i piszemy nową liczbę. Jeśli n była parzysta to piszemy na tablicy liczbę $\frac{1}{2}n$. Jeśli zaś liczba n była nieparzysta, to zapisujemy jedną z liczb $3n-1$ lub $3n+1$. Czy – niezależnie od tego, jaką liczbę zapisano na początku – możemy, po skończenie wielu krokach, uzyskać na tablicy jedynkę?

Odpowiedź. Jest to możliwe.

Wykażemy, że jeśli na tablicy znajduje się liczba $n \geqslant 2$, to zawsze jesteśmy w stanie sprawić, aby pojawiła się na tablicy dodatnia liczba całkowitej mniejsza od n. Rozpatrzmy dwa przypadki

- Jeśli n jest liczbą parzystą, to wystarczy zapisać liczbę $\frac{1}{2}n < n$.
- Gdy n jest nieparzysta, to obie z liczb $3n+1$ i $3n-1$ są parzyste. Skoro różnią się o 2, to jedna z nich będzie liczbą podzielną przez 4. Zapisujemy ją na tablicy, a następnie w dwóch kolejnych ruchach zapisujemy liczbę dwa razy mniejszą. Otrzymana liczba wyniesie co najwyżej
$$\frac{3n+1}{4} < \frac{4n}{4} = n.$$

Jako, że nie można ciągle zapisywać liczby mniejszej, gdyż zapisać można tylko liczby dodatnie całkowite, toteż kiedyś musimy zapisać liczbę 1.

Zadanie 2

W lewym dolnym rogu planszy $m \times n$ stoi pionek. W każdym ruchu może zostać on przesunięty o dowolną liczbę pól w górę lub o dowolną liczbę pól w prawo. Wygrywa gracz, który postawi figurę w prawym górnym rogu. Rozstrzygnąć dla jakich wartości (m, n) pierwszy gracz ma strategię wygrywającą.

Odpowiedź. Pierwszy gracz ma strategię wygrywającą wtedy i tylko wtedy, gdy $m \neq n$.

Analiza przykładowej planszy 7×5 została zobrazowana na poniższej tabelce. Litera P oznacza, że jeśli pionek znajduje się na danym polu, to jest to stan przegrywający. Analogicznie W oznacza stan wygrywający. Pole w prawym górnym rogu jest oczywiście stanem przegrywającym, gdyż jeśli przed ruchem tam znajduje się pionek, to gracz, którego jest kolej przegrał. Rozumując analogicznie jak w Przykładzie 2 otrzymamy poniższą tabelkę.

W	W	W	W	W	W	P
W	W	W	W	W	P	W
W	W	W	W	P	W	W
W	W	W	P	W	W	W
W	W	P	W	W	W	W

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Przyjmijmy, że pole w prawym górnym rogu ma współrzędne $(1, 1)$. Wówczas twierdzimy, że pole postaci (a, b) jest przegrywające wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$. Wykażemy to indukcyjnie. Pole $(1, 1)$ jest przegrywające z definicji gry. Będziemy indukować się po sumie współrzędnych.

Jeśli gracz znajduje się na polu (a, b), przy czym $a \neq b$, to może on przesunąć pionek na pole $(min(a, b), min(a, b))$, które jest stanem przegrywającym na mocy założenia indukcyjnego. Jeśli zaś gracz stoi na polu (a, a), to jakiekolwiek pole, na które zostanie przesunięty pionek, nie będzie miało równych współrzędnych. Będzie więc stanem wygrywającym. Skoro więc każdy ruch doprowadza do stanu wygrywającego, to stan (a, a) jest przegrywający.

Pozostaje tylko zauważyć, że dla $m \neq n$ wyjściowy stan jest wygrywający, a dla $m = n$ jest przegrywający. Toteż pierwszy gracz ma strategię wygrywającą jedynie dla $m \neq n$.

Zadanie 3

Na tablicy zapisano liczbę 10000000. W każdym ruchu, o ile przed nim była zapisana liczba n, gracz zastępuje ją liczbą $n-1$ lub $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$. Gracz, który zapisze liczbę 1 wygrywa. Który z graczy – pierwszy czy drugi – ma strategię wygrywającą?

Wykażemy, że liczby parzyste są stanami wygrywającymi. Zauważmy, że liczba 2 jest stanem wygrywającym, bo można ją zastąpić liczbą $2 - 1 = 1$. Załóżmy, że wszystkie liczby parzyste mniejsze niż $2a$ są stanami wygrywającymi.

Wykażemy, że liczba $2a + 2$ zapisana na tablicy również jest stanem wygrywającym. Rozpatrzmy dwa przypadki

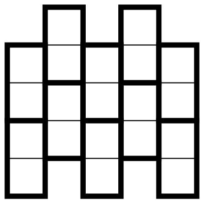
- Jeśli liczba $a+1$ jest przegrywająca, to gracz wykonujący ruch może zastąpić liczbę $2a + 2$ przez liczbę $\left\lfloor \frac{2a+3}{2} \right\rfloor = a + 1$ i w ten sposób umieścić przeciwnika w stanie przegrywającym.
- Załóżmy teraz, że liczba $a + 1$ jest wygrywająca. Wówczas gracz zastępuje liczbę $2a + 2$ liczbą $2a + 1$. Drugi gracz może zapisać albo liczbę $2a$ albo liczbę $a + 1$. Pierwsza z nich jest wygrywająca na mocy założenia indukcyjnego, a druga na mocy założenia z rozpatrywanego przypadku. W obu przypadkach gracz wykonujący ruch przy liczbie $2a + 2$ znów znajdzie się w stanie wygrywającym.

Wykazaliśmy, że liczby parzyste odpowiadają stanowi wygrywającemu, toteż skoro liczba 10000000 jest parzysta, to pierwszy gracz ma strategię wygrywającą.
Uwaga
Zauważmy, że nie wykazaliśmy nic o stanach, gdy na tablicy jest liczba nieparzysta. Nie było to jednak konieczne do rozwiązania powyższego zadania.

Zadanie 4

Dwaj gracze na przemian stawiają kółko i krzyżyk w polach nieskończonej planszy. Gracz wygrywa, gdy istnieje kwadrat 2×2 ułożony z jego symboli. Wykazać, że drugi gracz może grać tak, aby pierwszy gracz nie był w stanie wygrać.

Podzielmy planszę na prostokąty 1×2 ułożone jak na rysunku – boki wszystkich prostokątów o długości dwa są do siebie równoległe, ale żadne dwa z nich, które sąsiadują dłuższym bokiem, nie mają wspólnego wierzchołka.

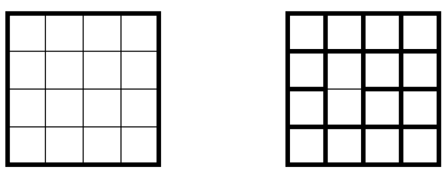


Strategia drugiego gracza będzie następująca. Jeśli pierwszy gracz postawi swój symbol w jednym polu prostokąta, drugi gracz stawia swój symbol w drugim polu tego prostokąta. Kwadrat 2×2 zawiera pewien rozpatrywany prostokąt w całości. Jednak sytuacja, w której jeden prostokąt zawiera dwa jednakowe symbole się nie zdarzy. Stąd rozpatrywana strategia spełnia warunki zadania.

Zadanie 5

Nauczyciel wraz z 30 uczniami gra w grę na nieskończonej kartce w kratkę. Zaczyna on, po czym ruch wykonuje każdy z 30 uczniów, po czym znów nauczyciel, po czym uczniowie i tak dalej. W każdym ruchu należy pokolorować jeden z boków kratki, który nie został wcześniej pokolorowany. Nauczyciel wygrywa, gdy na planszy znajduje się prostokąt 2×1 lub 1×2, że wszystkie jego boki są pokolorowane, ale odcinek wewnątrz niego nie jest.

Strategia nauczyciela jest następująca. Rysuje on obwód kwadratu $n \times n$ w pierwszych $4n$ ruchach, w międzyczasie uczniowie zamalują $4n \cdot 30$ odcinków. Wówczas wewnątrz kwadratu znajduje się $2n(n-1)$ odcinków. Jeśli $2n(n-1) > 4n \cdot 30$, do czego wystarczy wziąć odpowiednio duże n, to liczba odcinków wewnątrz kwadratu będzie większa niż liczba odcinków pomalowana przez uczniów. Toteż będzie co najmniej jeden odcinek wewnątrz tego kwadratu, który nie jest pomalowany.



Następnie nauczyciel w każdym ze swoich ruchów maluje pewien odcinek wewnątrz narysowanego kwadratu. Jako że liczba odcinków wewnątrz rozpatrywanego kwadratu jest skończona, to w końcu zarówno obwód, jak i wszystkie odcinki wewnątrz niego będą pokolorowane. Więc w pewnym momencie dokładnie jeden z odcinków wewnętrznych nie był pokolorowany – wówczas musiał istnieć szukany prostokąt bez środkowego odcinka.

Zadanie 6

20 dziewczyn usiadło w kółku. Na początku jedna z nich trzyma $N < 19$ kamieni. W każdym ruchu jedna z dziewczyn, która posiada co najmniej dwa kamienie daje po jednym każdej ze swoich sąsiadek. Gra kończy się, gdy każda z dziewczyn trzyma co najwyżej jeden kamień. Wykazać, że gra musi się skończyć po skończonej liczbie ruchów.

Załóżmy nie wprost, że gra może trwać w nieskończoność. Ponumerujmy dziewczyny liczbami od 1 do 20. Przyjmijmy, że na każdym kamieniu są miejsca na zapisanie dwóch liczb. Jeśli pewna dziewczyna a przekaże dziewczynie b kamień po raz pierwszy, to o ile na kamieniu nie jest nic zapisane, to zapisuje się tam numery a i b. Jeśli pewna dziewczyna musi przekazać kamień swojej sąsiadce, to jeśli dysponuje kamieniem z zapisanymi numerami swoimi i sąsiadki, to przekaże jej właśnie go.

Należy zauważyć, że jeśli kamień jest podpisany numerami a oraz b, to od momentu podpisania będzie posiadała go albo dziewczyna o numerze a, albo dziewczyna o numerze b. W momencie podpisania tak istotnie jest. Jeśli jedna z tych dziewczyn ma przekazać kamienie sąsiadkom, to rozpatrywany kamień będzie przekazany do drugiej dziewczyny ze zbioru $\{a, b\}$.

Skoro jest $N < 19$ kamieni oraz 20 kolejnych par dziewczyn, to będzie istnieć para kolejnych dziewczyn, która nie będzie miała kamienia podpisanego swoimi numerami. Załóżmy, że jedna z tych dziewczyn ma numer a. Wówczas ani razu nie przekaże ona swoich kamieni nikomu, bo w przeciwnym wypadku przekazałaby go drugiej z rozpatrywanych dziewczyn.

Załóżmy, że dziewczyna o numerze k przekazała kamienie sąsiadkom skończenie wiele razy. Wówczas jeśli dziewczyna o numerze $k-1$ (oczywiście rozpatrzamy numery modulo 20) robiłaby to bez końca, to w pewnym momencie dziewczyna o numerze k miałaby więcej niż 19 kamieni. Stąd jeśli k wykonała skończenie wiele ruchów, to $k-1$ też. Wiemy, że dziewczyna o numerze a wykonała zero, czyli skończenie wiele ruchów. Rozumując indukcyjnie dowodzimy, że każda dziewczyn mogła wykonać skończenie wiele ruchów, co kończy dowód.

Bardziej zaawansowane nierówności

Zadanie 1

Dane są liczby dodatnie a, b, c. Wykaż, że zachodzi nierównośc

$$\frac{a}{2b+c}+\frac{b}{2c+a}+\frac{c}{2a+b}\geqslant 1.$$

Z nierówności Cauchego–Schwarza w formie Engela mamy

$$\frac{a}{2b+c}+\frac{b}{2c+a}+\frac{c}{2a+b}\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{a(2b+c)+b(2c+a)+c(2a+b)}=\frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}.$$

Wystarczy wykazać, że

$$(a+b+c)^2\geqslant 3(ab+bc+ca).$$

Przekształćmy równoważnie

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2&\geqslant 3(ab+bc+ca),\\ a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)&\geqslant 3(ab+bc+ca),\\ a^2+b^2+c^2&\geqslant ab+bc+ca,\\ 2a^2+2b^2+2c^2&\geqslant 2ab+2bc+2ca,\\ (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2&\geqslant 0.\end{aligned}$$

Ostatnia nierówność jest oczywiście prawdziwa, co dowodzi tezy.

Zadanie 2

Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$a^3b+b^3c+c^3a\geqslant a^2bc+ab^2c+abc^2.$$

Łatwo zauważyć, że ciągi

$$(bc,ac,ab),\quad\left(\frac{abc}{a},\frac{abc}{b},\frac{abc}{c}\right),\quad\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)$$

są parami jednakowo monotoniczne. Zaś ciągi

$$\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)\quad\text{oraz}\quad(a^2,b^2,c^2).$$

będą odwrotnie monotoniczne. Rozpatrzmy ciągi

$$(a^2,b^2,c^2)\quad\text{oraz}\quad(bc,ac,ab).$$

Na mocy wyżej poczynionych rozważań są one odwrotnie monotoniczne. Toteż

$$a^2\cdot ab+b^2\cdot bc+c^2\cdot ca\geqslant a^2\cdot bc+b^2\cdot ca+c^2\cdot ab.$$

Zadanie 3

Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_n$, gdzie $n \geqslant 2$ zachodzi nierówność

$$\sin\alpha_1 \cdot ... \cdot \sin\alpha_n + \cos\alpha_1 \cdot ... \cdot \cos\alpha_n \leqslant 1.$$

Zauważmy, że na mocy nierówności Cauchego-Schwarza zachodzi

$$(\sin\alpha_1 \cdot ... \cdot \sin\alpha_n + \cos\alpha_1 \cdot ... \cdot \cos\alpha_n)^2 =$$
$$= ((\sin\alpha_1 \cdot ... \cdot \sin\alpha_{n-1}) \cdot \sin\alpha_n + (\cos\alpha_1 \cdot ... \cdot \cos\alpha_{n-1}) \cdot \cos\alpha_n)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \left((\sin\alpha_1 \cdot ... \cdot \sin\alpha_{n-1})^2 + (\cos\alpha_1 \cdot ... \cdot \cos\alpha_{n-1})^2\right) (\sin{\alpha_n}^2 + \cos{\alpha_n}^2)$$

Z jedynki trygonometrycznej

$$\sin{\alpha_n}^2 + \cos{\alpha_n}^2 = 1.$$

Skoro funkcja $\sin^2 x$ przyjmuje wartości od 0 do 1, to

$$\sin^2\alpha_1 \cdot ... \cdot \sin^2\alpha_{n-1} \leqslant \sin^2\alpha_1 \quad \text{oraz} \quad \cos^2\alpha_1 \cdot ... \cdot \cos^2\alpha_{n-1} \leqslant \cos^2\alpha_1$$

Stąd

$$\left((\sin\alpha_1 \cdot ... \cdot \sin\alpha_{n-1})^2 + (\cos\alpha_1 \cdot ... \cdot \cos\alpha_{n-1})^2\right) (\sin{\alpha_n}^2 + \cos{\alpha_n}^2) \leqslant \sin^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_1 = 1,$$

co kończy dowód.

Zadanie 4

Dane są liczby rzeczywiste $a_1 \geqslant a_2 \geqslant ... \geqslant a_n$ oraz $b_1 \geqslant b_2 \geqslant ... \geqslant b_n$. Wykazać, że zachodzi nierówność

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n) \geqslant (a_1 + a_2 + ... + a_n)(b_1 + b_2 + ... + b_n).$$

Przyjmijmy, że $a_{n+t} = a_t$ oraz $b_{n+t} = b_t$. Zauważmy, że dla dowolnej liczby całkowitej k z twierdzenie o ciągach jednomonotonicznych zachodzi nierówność

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \geqslant a_1b_{1+k} + a_2b_{2+k} + ... + a_nb_{n+k}.$$

Sumując te nierówności dla wszystkich $k \in \{0, 1, ..., n\}$ otrzymujemy

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n) \geqslant \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_ib_{i+k} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_ib_{i+k} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left(a_i\left(\sum_{k=1}^{n} b_{i+k}\right)\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(a_i\left(\sum_{k=1}^{n} b_i\right)\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right),$$

czego należało dowieść.

Zadanie 5

Rozstrzygnąć, czy dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierównośc

$$a^2b^3 + b^2c^3 + c^2a^3 \leqslant ab^4 + bc^4 + ca^4.$$

Zauważmy, że dla $a = 10^{-8}$, $b = 10^2$ i $c = 1$ lewa strona nierówności wynosi więcej niż $b^2c^3 = 10^4$, a każdy ze składników prawej strony jest nie większy niż 100. Łatwo zauważyć, że postulowana nierówność nie zachodzi.

Uwaga

Niezwykle pomocne przy rozwiązaniu tego zadania jest zobaczenie co się dzieje, gdy jedna ze zmiennych wyniesie 0. Podstawienie to nie jest to zgodne z treścią zadania, bo rozpatrzamy liczby dodatnie, ale nasuwa ono na pomysł, który pozwala wymyślić rozwiązanie poprawne. Jeśli $a = 0$, to nierówność przybiera postać

$$b^2c^3 \leqslant bc^4.$$

Jeśli c jest większe niż b to ta nierówność nie zajdzie. Stąd pomysł na wzięcie bardzo małego a i dużej liczby c.

Równania funkcyjne i wielomianowe

Zadanie 1

Dana jest funkcja spełniająca dla dowolnej liczby rzeczywistej x równość

$$f(f(x)) - f(x) = x.$$

Znaleźć liczbę liczb rzeczywistych a, takich, że $f(f(a)) = 0$.

Odpowiedź. Jest jedna taka liczba i jest ona równa 0.

Podstawmy $x = 0$, aby otrzymać

$$f(f(0)) = f(0).$$

Wstawiając $x = f(0)$ otrzymujemy

$$f(0) = f(f(f(0))) - f(f(0)) = f(f(0)) - f(f(0)) = 0.$$

Czyli $a = 0$ jest rozwiązaniem.

Załóżmy, że $f(f(a)) = 0$. Z wyjściowego równania wynika wówczas, że

$$0 - f(a) = a, f(a) = a.$$

Stąd

$$0 = f(f(a)) = f(a) = a.$$

Oznacza to, że żadna liczba różna od 0 nie może być rozwiązaniem danego równania.

Zadanie 2

Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ takie, że $f(f(n)) + (f(n))^2 = n^2 + 3n + 3$.

Odpowiedź. Jedyną funkcją spełniająca warunki zadania jest $f(n) = n + 1$.

Zauważmy, że dla $n = 1$ mamy

$$f(f(1)) + f(1)^2 = 7.$$

Jeśli $f(1) = 1$, to $f(f(1)) + f(1)^2 = 1 + 1 \neq 7$. Jeśli zaś $f(1) \geqslant 3$, to

$$f(f(1)) + f(1)^2 > 3^2 > 7.$$

Stąd $f(1) = 2$. Wykażemy indukcyjnie, że $f(n) = n+1$. Załóżmy, że ta równość zachodzi dla liczb nie większych niż n. Wówczas

$$\begin{aligned} n^2 + 3n + 3 &= f(f(n)) + f(n)^2 = f(n + 1) + (n + 1)^2, \\ f(n + 1) &= n + 2, \end{aligned}$$

co kończy dowód indukcyjny.

Zadanie 3

Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość:
$$f(x^2 + y) = f(x^{27} + 2y) + f(x^4).$$

Odpowiedź. Jedyną funkcją spełniającą warunki zadania jest $f(x) = 0$.

Rozpatrzmy takie y, aby

$$\begin{aligned} x^2 + y &= x^{27} + 2y \\ x^2 - x^{27} &= y. \end{aligned}$$

Więc dla $y = x^2 - x^{27}$ mamy

$$f(x^2 + y) = f(x^{27} + 2y).$$

A więc na mocy wyjściowego równania

$$f(x^4) = 0.$$

Stąd $f(x) = 0$ dla dowolnej liczby nieujemnej x. Mamy też

$$f(x^2 + y) = f(x^{27} + 2y) + f(x^4) = f(x^{27} + 2y)$$

dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y. Wstawiając $y - x^2$ w miejsce y mamy

$$f(y) = f(x^{27} - 2x^2 + 2y).$$

Niech y będzie dowolną liczbą ujemną. Biorąc odpowiednio duże x otrzymamy, że $x^{27} - 2x^2 + 2y > 0$. Wówczas
$$f(y) = f(x^{27} - 2x^2 + 2y) = 0.$$

Pozostaje zauważyć, że $f(x) = 0$ spełnia warunki zadania.

Zadanie 4

Niech $f(n)$ będzie funckją z dodatnich liczb całkowitych w dodatnie liczby całkowite. Wiadomo, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba $f(f(n))$ jest liczbą dodatnich dzielników n. Wykazać, że jeśli p jest liczbą pierwszą, wówczas $f(p)$ również jest liczbą pierwszą.

Niech $d(n)$ oznacza liczbę dzielników n. Wówczas

$$\begin{aligned} f(f(n)) &= d(n), \\ f(f(f(n))) &= f(d(n)), \\ d(f(n)) &= f(d(n)). \end{aligned}$$

Dla $n = 2$ mamy
$$f(2) = f(d(2)) = d(f(2)).$$

Zauważmy, że jeśli $f(2) > 2$, to $f(2) - 1$ nie byłoby dzielnikiem $f(2)$, stad $f(2)$ musiało by mieć mniej niż $f(2)$ dzielników. Rozpatrzmy dwa przypadki

- Jeśli $f(2) = 1$, to gdy p jest liczbą pierwszą, to

  $$d(f(p)) = f(d(p)) = f(2) = 1,$$

  czyli $f(p)$ ma jeden dzielnik, czyli $f(p) = 1$. Mamy wówczas

  $$1 = f(3) = f(d(p^2)) = f(f(f(p^2))) = d(f(p^2)).$$

  Skoro $f(p^2)$ ma jeden dzielnik, to również jest równe 1. Czyli

  $$2 = d(p) = f(f(p)) = f(1) = f(f(p^2)) = d(p^2) = 3,$$

  co daje nam sprzeczność.

- Gdy zaś $f(2) = 2$, to jeśli p jest liczbą pierwszą, to

  $$d(f(p)) = f(d(p)) = f(2) = 2.$$

  Skoro $f(p)$ ma dwa dzielniki, to jest liczbą pierwszą, czego należało dowieść.

Zadanie 5

Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość:

$$f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2.$$

Odpowiedź. Jedyną funkcją spełniającą warunki zadania jest $f(x) = x$.

Podstawiając $x = 0$ dostajemy

$$f(f(y)) = y + c^2,$$

gdzie $c = f(0)$ jest stałe. Wykażemy, że f jest różnowartościowa. Jeżeli dla pewnych liczb rzeczywistych a, b zachodzi $f(a) = f(b)$, to

$$a + c^2 = f(f(a)) = f(f(b)) = b + c^2,$$

skąd $a = b$. Ponadto $y + c^2$ może przyjąć dowolną rzeczywistą wartość, a ponieważ $f(f(y)) = y+c^2$, to f przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste. Wiemy zatem, że istnieje liczba rzeczywista b taka, że $f(b) = 0$. Podstawiając $x = b$ i $y = f(y)$ w początkowej równości dostajemy

$$f(b^2 + f(f(y))) = f(b^2 + y + c^2) = f(y),$$

skąd, jako że f to funkcja różnowartościowa, zachodzi

$$\begin{aligned} b^2 + y + c^2 &= y, \\ b^2 + c^2 &= 0, \\ b = c &= 0. \end{aligned}$$

Podstawiając w początkowym równaniu $x = 0$ dostajemy

$$f(f(y)) = y.$$

Podstawiając $y = f(y)$ dostajemy

$$f(x^2 + y) = f(y) + f(x)^2 \geqslant f(y).$$

Ponieważ x^2 może przyjąć dowolną rzeczywistą nieujemną wartość, to równanie to implikuje, że f jest ściśle rosnąca. Wiemy jednak, że $f(f(y)) = y$. Załóżmy, że dla pewnego rzeczywistego y zachodzi $f(y) > y$. Wtedy, ponieważ f jest ściśle rosnąca, zachodzi

$$f(f(y)) > f(y) > y,$$

co rodzi sprzeczność. Analogicznie dowodzimy, że nie może zajść $f(y) < y$. Stąd $f(y) = y$ dla dowolnego rzeczywistego y, co, jak nietrudno sprawdzić, spełnia podane w zadaniu równanie.

Zadanie 6

Wykazać, że istnieje taka funckja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że nie istnieje taka funckja $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że zachodzi równość $f(x) = g(g(x))$.

Wykażemy, że taka funkcja istnieje. Rozpatrzmy funkcję f daną jako

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{jeśli } x \notin \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \\ x+1 & \text{jeśli } x \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \end{cases}.$$

Ta funkcja ma następujące cechy

- jest różnowartościowa,
- przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste poza zerem.

Wykażemy, że g jest róznowartościowa. Jeśli $g(a) = g(b)$, to

$$f(a) = g(g(a)) = g(g(b)) = f(b).$$

Skoro zaś f jest różnowartościowa, to mamy $a = b$.

Jeśli $g(x)$ przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste, to $g(g(x))$ również. Zaś funkcja $f(x)$ nie ma takiej własności – sprzeczność.

Jeśli $g(x)$ ma co najmniej dwie „dziury" – tj. istnieją takie liczby a, b, które nie są przyjmowane przez g, to w szczególności nie są przyjmowane przez $g(g(x))$. Zaś funkcja f ma jedną wartość, której nie przyjmuje. Toteż również w tym przypadku równość zajść nie może.

Załóżmy więc, że g przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste poza pewną liczbą rzeczywistą a. Oczywiście $g(g(x))$ również nie przyjmie a. Skoro f nie przyjmuje jedynie wartości zero, to $a = 0$. Zauważmy, że $g(g(x))$ nie przyjmuje wartości $g(0)$. Jeśli $g(g(t)) = g(0)$ dla pewnego t, to na mocy różnowartościowości $g(t) = 0$. Jest to sprzeczność. Skoro $g(g(x))$ nie przyjmuje $g(0)$, a $f(x)$ nie przyjmuje jedynie 0, to jeśli te funkcje mają być sobie równe, to $g(0) = 0$. Ale wówczas

$$1 = f(0) = g(g(0)) = g(0) = 0,$$

co kończy dowód.

Twierdzenia z teorii liczb

Zadanie 1

Wykazać, że dodatnia liczba całkowita n ma co najwyżej $2\sqrt{n}$ dzielników.

Zauważmy, że jeśli liczba d jest dzielnikiem liczby n, to również liczba $\frac{n}{d}$ jest dzielnikiem liczby n, bo
$$n = d \cdot \frac{n}{d}.$$
Możemy więc podzielić dzielniki n na pary (a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_k, b_k), gdzie $a_i \leqslant b_i$ oraz $a_i \cdot b_i = n$ dla każdego całkowitego $1 \leqslant i \leqslant k$. Zauważmy, że

$$n = a_i b_i \geqslant a_i^2 \implies \sqrt{n} \geqslant a_i.$$

Jako, że żadne dwie pary nie mają tej samej pierwszej liczby, to jest ich co najwyżej $\sqrt{n}$. Skoro każda para zawiera dwie liczby, a każdy dzielnik będzie w co najmniej jednej parze, to liczba dzielników n nie może przekroczyć $2\sqrt{n}$.

Przykładowo dla $n = 20$ rozpatrywanymi parami będą:

$$(1,\ 20),\quad (2,\ 10),\quad (4,\ 5).$$

Zadanie 2

Liczbę nazwiemy *wielodzielną*, jeśli ma co najmniej 1000 dzielników. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba całkowita n, że liczby

$$n, n+1, n+2, ..., n+1000$$

są wielodzielne.

Wykażemy, że taka liczba istnieje. Rozpatrzmy warunki

$$\begin{aligned}
n &\equiv -k \pmod{p_{k,1}},\\
n &\equiv -k \pmod{p_{k,2}},\\
&...\\
n &\equiv -k \pmod{p_{k,1000}}
\end{aligned}$$

dla każdej liczby całkowitej $0 \leqslant k \leqslant 1000$, przy czym $p_{i,j}$ są parami różnymi liczbami pierwszymi. Na mocy Chińskiego Twierdzenia o Resztach szukana liczba n istnieje. Łatwo zauważyć, że dla każdego k liczba $n + k$ ma co najmniej 1000 dzielników pierwszych – $p_{k,1}$, $p_{k,2}$, ..., $p_{k,1000}$.

Zadanie 3

Niech $d(n)$ oznacza liczbę dodatnich dzielników liczby n – włączając liczby 1 i n. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitch n, dla których liczba $\frac{n}{d(n)}$ również jest całkowita.

Rozpatrzmy liczbę p^k. Ma ona $k+1$ dzielników. Chcemy, aby liczba $\frac{p^k}{k+1}$ była całkowita. Wystarczy w tym celu wziąć $k = p - 1$. Jako że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele, toteż jesteśmy w ten sposób w stanie uzyskać nieskończenie wiele liczb spełniających warunki zadania.

Zadanie 4

Dana jest nieparzysta liczba pierwsza p. Obliczyć wartość wyrażenia

$$\left(\frac{0}{p}\right) + \left(\frac{1}{p}\right) + ... + \left(\frac{p-1}{p}\right).$$

Odpowiedź. Wartość danego wyrażenia wynosi 0, niezależnie od wartości p.

Niech g będzie generatorem modulo p. Wiemy, że multizbiory $\{1, 2, 3, ..., p-1\}$ oraz $\{g, g^2, ..., g^{p-1}\}$ są sobie równe. Czyli

$$\left(\frac{1}{p}\right) + \left(\frac{2}{p}\right) + ... + \left(\frac{p-1}{p}\right) = \left(\frac{g}{p}\right) + \left(\frac{g^2}{p}\right) + ... + \left(\frac{g^{p-1}}{p}\right)$$

Wiemy, na mocy Lematu 2, że $\left(\frac{g^k}{p}\right)$ jest równe 1 jeśli k jest parzyste i -1, gdy k jest nieparzyste. Łatwo więc zauważyć, że skoro liczba $p-1$ jest parzysta, to dana suma wyniesie 0.

Zadanie 5

Niech p będzie liczbą pierwszą dającą resztę 2 z dzielenia przez 3. Dla pewnych liczb całkowitych a, b liczba $a^3 - b^3$ jest podzielna przez p. Wykazać, że liczba $a - b$ również jest podzielna przez p.

Niech g będzie generatorem modulo p. Oznaczmy

$$a \equiv g^x \pmod{p} \quad \text{oraz} \quad b \equiv g^y \pmod{p}.$$

Przekształćmy założenie

$$\begin{aligned} a^3 &\equiv b^3 \pmod{p} \\ g^{3x} &\equiv g^{3y} \pmod{p} \\ g^{3x-3y} &\equiv 1 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Generator podniesiony do potęgi $3x - 3y$ jest równy 1 wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi podzielność $p - 1 \mid 3x - 3y$. Na mocy założeń liczba $p-1$ daje resztę 1 z dzielenia przez 3, toteż nie jest ona podzielna przez 3. Stąd $p - 1 \mid x - y$, czyli

$$a \equiv g^x \equiv g^y \equiv b \pmod{p}.$$

Zadanie 6

Niech $a_1, ..., a_n$ oraz $b_1, ..., b_n$ będą dodatnimi liczbami całkowitymi, że dla każdej liczby całkowitej $n-1 \geqslant i \geqslant 0$ zachodzi nierówność $b_{i+1} \geqslant 2b_i$. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych k, że nie zachodzi żadne z przystawań

$$\begin{aligned} k &\equiv a_1 \pmod{b_1}, \\ k &\equiv a_2 \pmod{b_2}, \\ &.., \\ k &\equiv a_n \pmod{b_n}. \end{aligned}$$

Oznaczmy $M = b_1 b_2 \cdot ... \cdot b_n$. Rozpatrzmy liczby

$$1,\ 2,\ ...,\ M.$$

Dla każdej liczby $1 \leqslant i \leqslant n$ wykreślmy te spośród nich, które dają resztę a_i z dzielenia przez b_i. Tych liczb będzie dokładnie $\frac{M}{b_i}$, gdyż liczba M jest podzielna przez b_i. Rozumujemy tak dla każdego i – liczba może zostać wykreślona więcej niż raz. Wykreślimy tak co najwyżej

$$\frac{M}{b_1} + \frac{M}{b_2} + ... + \frac{M}{b_n} \leqslant \frac{M}{2} + \frac{M}{4} + ... + \frac{M}{2^n} < M$$

liczb. Więc pewna liczba nie zostanie wykreślona – wówczas nie spełnia ona żadnego z danych przystawań. Wystarczy zauważyć, że jeśli liczba k spełnia warunki zadania, to liczba $k + b_1 b_2 \cdot ... \cdot b_n$ również – daje ona takie same reszty w każdym z przystawań.

Grafy skierowane

Zadanie 1

Dany jest graf skierowany zawierający $2m$ krawędzi. Wykazać, że możemy usunąć pewne m z nich, aby graf ten nie zawierał cyklu.

Ponumerujmy wierzchołki od 1 do n. Krawędź prowadzącą z wierzchołka i do wierzchołka j nazwiemy *rosnącą*, jeśli zachodzi $j > i$. W przeciwnym wypadku powiemy, że ta krawędź jest *malejąca*. Jeśli krawędzi rosnących jest nie więcej niż malejących, to usuńmy wszystkie krawędzie malejące. W przeciwnym wypadku usuńmy wszystkie krawędzie rosnące. Łatwo zauważyć, że usuniemy w ten sposób nie więcej niż połowę krawędzi.

Załóżmy, że usunęliśmy wszystkie krawędzie malejące oraz nie usunęliśmy pewnego cyklu. Idąc po kolejnych wierzchołkach danego cyklu, numer wierzchołka na którym jesteśmy ściśle rośnie. Przeczy to temu, że wrócimy kiedyś do punktu wyjścia.

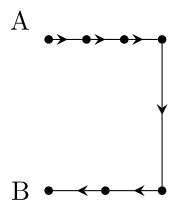
Zadanie 2

Wykazać, że w dla każdego turnieju da się ustawić graczy w rzędzie w pewnej kolejności, tak, aby każdy wygrał z graczem po swojej prawej stronie.

Wykażemy tezę indukcyjnie. Dla $n = 1$ teza jest trywialna. Załóżmy, że dla dowolnego turnieju z liczbą graczy mniejszą niż n szukane uporządkowanie istnieje. Zauważmy, że jeśli istnieje cykl

$$v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n$$

to dla każdego i gracz v_i wygrał z graczem v_{i+1}. Stąd biorąc uporządkowanie $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n$ otrzymujemy tezę.



Załóżmy, że dany turniej nie jest cykliczny, na mocy Lematu 2 jest on redukowalny. Rozpatrzmy więc dwa zbiory A i B, takie, że każdy gracz z A wygrał z dowolnym graczem z B. Wówczas oba te zbiory zawierają ściśle mniej niż n elementów, a więc na mocy założenia indukcyjnego istnieją takie uporządkowania

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_t \text{ graczy z } A \quad \text{oraz} \quad b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_{n-t} \text{ graczy z } B,$$

że każdy gracz wygrał z kolejnym. Na mocy definicji zbiorów A i B gracz a_t wygrał z graczem b_1, czyli uporządkowanie

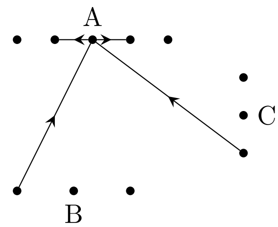
$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_t,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_{n-t}$$

spełnia warunki zadania.

Zadanie 3

Niech G będzie grafem skierowanym, w którym stopnie: wejściowy i wyjściowy każdego z wierzchołków są równe 2. Wykazać, że możemy podzielić wierzchołki na trzy, być może puste, zbiory, aby żaden wierzchołek v wraz z dwoma wierzchołkami, będącymi końcami wychodzącymi z v krawędzi, nie znajdowały się wszystkie w jednym ze zbiorów.

Rozatrzmy taki podział wierzchołków tego grafu na trzy zbiory, aby liczba krawędzi, które mają dwa wierzchołki wewnątrz tego samego zbioru, była minimalna. Nazwijmy te trzy zbiory jako A, B i C. Wykażemy, że spełnia on warunki zadania.



Załóżmy nie wprost, że pewien wierzchołek v oraz dwa wierzchołki a, b, przy czym z v wychodzą krawędzie zarówno do a, jak i do b, leżą w jednym ze zbiorów. Bez straty ogólności załóżmy, że v, a, b należą do zbioru A. Skoro do v wchodzą dwie krawędzie, to w jednym ze zbiorów B, C jest co najwyżej jeden wierzchołek początkowy takiej krawędzi. Przyjmijmy dla ustalenia uwagi, że jest to zbiór B. Jeśli przełożymy wierzchołek v do zbioru B, to liczba krawędzi o końcach w tym samym zbiorze się zmniejszy, co przeczy minimalności rozpatrywanego podziału.

Zadanie 4

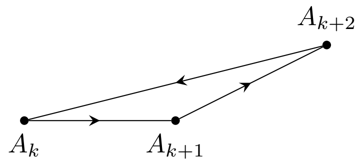
W pewnym turnieju brało udział 1000 osób – nazwijmy ich A_1, A_2, ..., A_{1000}. Parę uczestników tego turnieju (A_i, A_j) nazwiemy *zwycięską*, gdy nie istnieje inny uczestnik tego turnieju A_k, który pokonał obu uczestników z tej pary. Rozstrzygnąć, czy może się tak zdarzyć, aby każda z par (A_1, A_2), (A_2, A_3), ..., (A_{999}, A_{1000}), (A_{1000}, A_1) była zwycięska.

Odpowiedź. Taka sytuacja nie może się zdarzyć.

Załóżmy nie wprost, że szukany turniej istnieje. Obliczmy ile zwycięstw odnieśli łącznie gracz A_k i A_{k+1}. To, że gracz A_i wygrał z graczem A_j będziemy oznaczać jako $A_i > A_j$. Przyjmiemy też, że $A_{1000+i} = A_i$. W pojedynku A_k i A_{k+1} jedna osoba wygrała i jedna przegrała. Ponadto na mocy założeń zadania, każdy z graczy spoza tej dwójki musiał przegrać z co najmniej jedną osobą z tej pary. Skoro pozostałych osób jest 998, to łącznie A_k i A_{k+1} wygrały co najmniej $998+1 = 999$ meczów. Rozumując analogicznie dla trójek (A_1, A_2), (A_3, A_4), ..., (A_{999}, A_{1000}) otrzymamy, że łączna liczba zwycięstw w turnieju to co najmniej

$$500 \cdot 999 = \frac{1000 \cdot 998}{2} = \binom{1000}{2}.$$

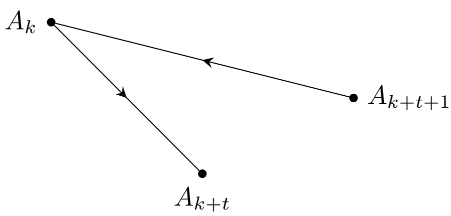
Zauważmy, że ta liczba jest równa łącznej liczbie zwycięstw wszystkich drużyn, która zawsze wynosi $\binom{1000}{2}$. Toteż we wszystkich powyższych szacowaniach zachodzą równości, czyli w szczególności każdy z graczy wygrał z dokładnie jednym z A_{2k} i A_{2k+1}.

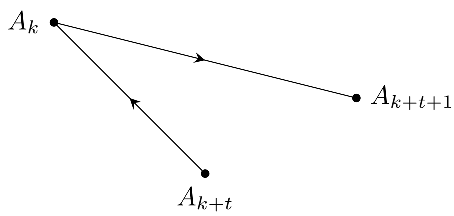


Załóżmy, bez straty ogólności, że gracz A_1 wygrał z graczem A_2. Przyjmijmy, że dla pewnego k mamy $A_k > A_{k+1}$. Wówczas $A_{k+2} > A_k$, aby (A_{k+1}, A_{k+2}) była zwycięska. Analogicznie więc $A_{k+1} > A_{k+2}$, bo (A_k, A_{k+1}) jest zwycięska. Mamy więc implikację

$$A_k > A_{k+1} \implies A_{k+1} > A_{k+2}.$$

Skoro $A_1 > A_2$, to możemy wyciągnąć wniosek, że $A_k > A_{k+1}$ dla każdego k.





Zauważmy, że jeśli $A_k > A_{k+t}$, to na mocy tego co wykazaliśmy w pierwszym akapicie musi zajść $A_{k+t+1} > A_k$. I analogicznie jeśli $A_{k+t} > A_k$, to $A_k > A_{k+t+1}$. Skoro $A_k > A_{k+1}$, to wynika z tego, że

$$A_k > A_{k+i}, \text{ gdy } 2 \mid i \quad \text{oraz} \quad A_k < A_{k+i}, \text{ gdy } 2 \nmid i.$$

Otrzymujemy stąd, że

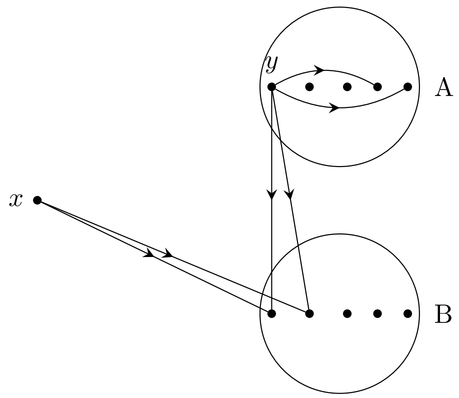
$$A_1 > A_3, \text{ bo } 3 = 1 + 2 \quad \text{ oraz } A_3 > A_{1001} = A_1 \text{ bo } 1001 = 3 + 998.$$

Powyższa sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 5

Dany jest turniej o n uczestnikach oraz pewna dodatnia liczba całkowita k. Każdy z uczestników uzyskał jednakową liczbę zwycięstw oraz dla dowolnych dwóch różnych uczestników tego turnieju a, b, liczba uczestników, którzy przegrali zarówno z a, jak i z b wynosi k. Wykazać, że liczba $n + 1$ jest podzielna przez 4.

Zauważmy, że łączna liczba zwycięstw w turnieju wyniosła $\binom{n}{2} = \frac{n}{\cdot}\frac{n-1}{2}$. Skoro każdy gracz uzyskał taką samą liczbę zwycięstw, to ta liczba wynosi $\frac{n-1}{2}$. Rozpatrzmy jednego gracza x. Podzielmy pozostałych graczy na dwa zbiory – zbiór A, który zawiera $\frac{n-1}{2}$ graczy, którzy wygrali z x oraz zbiór B, który zawiera $\frac{n-1}{2}$ graczy, którzy przegrali z x. Jeśli gracz y należy do zbioru B, to liczba graczy pokonanych przez obu x oraz y wynosi k. Stąd też y pokonał dokładnie k osób ze zbioru B. Pokonał też x, a skoro pokonał łącznie $\frac{n-1}{2}$ osób, to pokonał dokładnie $\frac{n-1}{2} - 1 - k$ osób w zbiorze A.



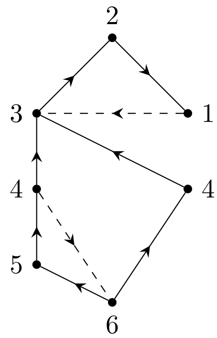
Skoro zbiór A zawiera $\frac{n-1}{2}$ osób i każdy pokonał w nim dokładnie $\frac{n-1}{2} - 1 - k$, czyli stałą liczbę osób, to rozumując analogicznie jak na początku zadania mamy, że każdy pokonał ich dokładnie $\frac{\frac{n-1}{2}}{2} - 1 = \frac{n-3}{4}$. Skoro liczba osób jest całkowita, to wynika z tego, że liczba $n-3$ jest podzielna przez 4. Jest to w oczywisty sposób równoważne tezie.

Zadanie 6

Wykazać, że wierzchołki grafu można pokolorować na jeden z k kolorów, tak, by żadne dwa wierzchołki tego samego koloru nie były połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy krawędzie tego grafu da się tak skierować, by nie istniała ścieżka składająca się z $k+1$ różnych wierzchołków.

Najpierw wykażemy, że jeśli istnieje kolorowanie, to istnieje nie szukana ścieżka. Ponumerujmy kolory od 1 do k. Jeśli krawędź występuje pomiędzy wierzchołkami i oraz j, to skierujemy ją w stronę i jeśli $i > j$, zaś skierujemy ją w stronę przeciwną, gdy $i < j$. Wówczas na każdej ścieżce kolejny wierzchołek ma zapisaną większą liczbę od poprzedniego. Skoro największa liczba zapisana na wierzchołku wynosi nie więcej niż k, to ścieżka o długości $k+1$ nie istnieje.

Załóżmy, że graf skierowany nie zawiera ścieżki, która składa się z $k+1$ wierzchołków. Usuńmy niektóre z jego krawędzi, aby otrzymać spójny graf, który nie zawiera żadnego cyklu, przy czym liczba krawędzi otrzymanego grafu jest największa z możliwych. Każdemu wierzchołkowi przypiszmy kolor o numerze równym długości najdłuższej ścieżki zaczynającej się w danym wierzchołku. Łatwo zauważyć, że jeśli z pewnego wierzchołka x prowadzi krawędź do wierzchołka y, to do ścieżki zaczynającej się w wierzchołku y można dołożyć na początek wierzchołek x. Toteż w wierzchołku x jest zapisana liczba większa niż liczba w wierzchołku y.



Wykażemy, że jeśli pomiędzy wierzchołkami x i y usunięto krawędź, to również mają zapisaną inną liczbę. Z założonej wcześniej maksymalności grafu bez cyklu, po dołożeniu krawędzi między x i y ten cykl powstanie. Wynika z tego to, że po jej usunięciu istnieje ścieżka z x do y, albo z y do x. Analogicznie jak poprzednio, wierzchołek w którym ta ścieżka się zaczyna, będzie miał zapisaną większą liczbę, niż ten, w którym się ona kończy. Z powyższych wniosków wynika teza.

Ciągi

Zadanie 1

Dana jest liczba pierwsza $p > 3$. Wykazać, że istnieje taki ciąg arytmetyczny dodatnich liczb całkowitych $\{x_i\}$, że $x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_p$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozpatrzmy ciąg $x_i = ip!$. Wówczas

$$\prod_{i=1}^{p} x_i = \prod_{i=1}^{p} ip! = (p!)^p \cdot p! = (p!)^p \cdot p! = (p!)^{p+1}.$$

co oczywiście jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 2

Dany jest ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ liczb rzeczywistych, że dla dowolnych liczb całkowitych $2n+1 \geqslant i, j \geqslant 1$ zachodzi równość

$$a_i + a_j \geqslant |i - j|.$$

Wyznaczyć najmniejszą możliwą sumę elementów tego ciągu.

Odpowiedź. Najmniejsza możliwa suma elementów tego ciągu wynosi $n(n+1)$

Na mocy założenia zadania zachodzą równości

$$\begin{aligned} a_1 + a_{2n+1} &\geqslant 2n, \\ a_2 + a_{2n} &\geqslant 2n-2, \\ &\ldots, \\ a_n + a_{n+2} &\geqslant 2. \end{aligned}$$

Wiemy również, że $a_{n+1} + a_{n+1} \geqslant 0$, czyli liczba a_{n+1} jest nieujemna. Dodając powyższe nierówności stronami otrzymujemy

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n+1} \geqslant 2 + 4 + \ldots + (2n-2) + 2n = 2(1 + 2 + \ldots + n) = n(n+1).$$

Wykażemy, że ciąg dany wzorem

$$a_k = |n + 1 - k|$$

spełnia warunki zadania. Istotnie, na mocy nierówności trójkąta

$$a_i + a_j = |n+1-i| + |n+1-j| \geqslant |(n+1-j) - (n+1-i)| = |i - j|.$$

Zauważmy, że

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n+1} = n + (n-1) + \ldots + 1 + 0 + 1 + \ldots + (n-1) + n = n(n+1),$$

co dowodzi tego, że postulowane minimum jest osiągalne.

Zadanie 3

Ciąg u_n dany jest wzorem $u_0 = 1, u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+3}$. Wykaż, że $u_1+u_2+...+u_{2021} < 1$

Przekształcając równanie rekurencyjnie równoważnie otrzymujemy

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n}{u_n+3}, \\ \frac{1}{u_{n+1}} &= \frac{u_n+3}{u_n} = 1 + \frac{3}{u_n}. \end{aligned}$$

Podstawmy $a_n = \frac{1}{u_n}$. Wówczas

$$a_0 = 1,\ a_{n+1} = 3a_n + 1.$$

Sprawdzenie wartości a_n dla małych n pozwala postawić hipotezę, że $a_n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$. Łatwo sprawdzić, że dla a_0 postulowana równość zachodzi oraz z tożsamości

$$\frac{3^{n+2}-1}{2} = 3 \cdot \frac{3^{n+1}-1}{2} + 1$$

wynika, że jeśli postulowana równość zachodzi dla a_n, to zachodzi również dla a_{n+1}. Z zasady indukcji matematycznej możemy więc wywnioskować, że

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{3^{n+1}-1}{2}, \\ u_n &= \frac{1}{a_n} = \frac{2}{3^{n+1}-1}. \end{aligned}$$

Mamy więc

$$u_1 + u_2 + ... + u_{2021} < \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2}{3^{i+1}-1} < \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2}{3^{i+1}} = \frac{2}{3} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3^i} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1.$$

Zadanie 4

Znajdź wszystkie liczby rzeczywiste x, że ciąg dany wzorem

$$a_0 = x, \quad a_n = 2^n - 3a_n,$$

dla dowolnej liczby naturalnej n spełnia zależność

$$a_n > a_{n-1}.$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2^n - 3a_n = 2^n - 3(2^{n-1} - 3a_{n-1}) = 2^n - 3 \cdot 2^{n-1} + 9a_{n-1} = \\ &= 2^n - 3 \cdot 2^{n-1} + 9(2^{n-2} - 3a_{n-2}) = 2^n - 3 \cdot 2^{n-1} + 9 \cdot 2^{n-2} - 27a_{n-2} = \\ &= \sum_{i=0}^{n} \left(2^{n-i} \cdot (-3)^i\right) + (-3)^{n+1}a_0 = 2^n \sum_{i=0}^{n} \left(-\frac{3}{2}\right)^i + (-3)^{n+1}a_0 = \\ &= 2^n \cdot \frac{1 - \left(-\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1 + \frac{3}{2}} + (-3)^{n+1}a_0 = \frac{2^{n+1}}{5} + \left(a_0 - \frac{1}{5}\right)(-3)^{n+1}. \end{aligned}$$

Jeśli $a_0 \neq \frac{1}{5}$, to liczba $\left(a_0 - \frac{1}{5}\right)(-3)^{n+1}$ będzie przyjmowała dowolnie duże i dowolnie małe wartości. Toteż a_n również będzie przyjmowała dowolnie małe wartości, toteż ciąg a_n nie może być rosnący. Jeśli zaś $a_0 = \frac{1}{5}$, to z powyższej tożsamości wynika, że ta liczba spełnia warunki zadania.

Zadanie 5

Dany jest ciąg

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}.$$

Rozstrzygnąć, czy $a_{5000} > 100$.

Odpowiedź. Zachodzi nierówność $a_{5000} > 100$.

Przekształćmy równanie rekurencyjne ciągu

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + \frac{1}{a_n}, \\ a_{n+1}^2 &= \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 = a_n^2 + 2a_n \cdot \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_n^2} > a_n^2 + 2. \end{aligned}$$

Z powyższej nierówności wynika, że

$$a_{5000}^2 > a_{4999}^2 + 2 > a_{4998}^2 + 4 > \ldots < a_0^2 + 10000 > 10000,$$

z czego wynika, że $a_{5000}^2 > 100$.

Zadanie 6

Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby rzeczywiste α, dla których istnieje ciąg dodatnich liczb rzeczywistych $x_1, x_2, x_3, \ldots$ o tej własności, że dla wszystkich $n \geqslant 1$:

$$x_{n+2} = \sqrt{\alpha x_{n+1} - x_n}.$$

Odpowiedź. Szukany ciąg istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha > 1$.

Jeśli $\alpha > 1$, to łatwo sprawdzić, że ciąg dany wzorem $x_n = \alpha - 1$ spełnia warunki zadania. Załóżmy nie wprost, że dla pewnego $\alpha \leqslant 1$ istnieje ciąg spełniający warunki zadania. Wówczas, skoro liczba pod pierwiastkiem musi być dodatnia, mamy

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \alpha x_{n+1} - x_n \leqslant x_{n+1} - x_n, \\ x_n &\leqslant x_{n+1}, \end{aligned}$$

z czego wynika, że ciąg ten jest rosnący. Wykażemy teraz, że od pewnego momentu ciąg ten przyjmuje wartości mniejsze niż 1. Istotnie

$$x_{n+2}^2 = \alpha x_{n+1} - x_n < \alpha x_{n+1} \leqslant x_{n+1} \leqslant x_{n+2},$$

z czego wynika postulowana własność. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} x_1 < x_{n+2} = \sqrt{\alpha x_{n+1} - x_n} &\leqslant \sqrt{x_{n+1} - x_n}, \\ x_1^2 &< x_{n+1} - x_n. \end{aligned}$$

Z powyższej nierówności, jak i z wykazanej wyżej własności, wynika, że

$$1 > x_{n+1} > x_n + x_1^2 > x_{n-1} + 2x_1^2 > ... > nx_1^2,$$

co nie może być prawdą dla wszystkich liczb naturalnych n.

Zadanie 7

Dany jest ciąg

$$a_0 = 6, \quad a_n = a_{n-1} + NWD(n, a_{n-1}).$$

Wykazać, że $NWD(n, a_{n-1})$ jest liczbą pierwszą lub jest równe 1.

Kluczowe w rozwiązaniu zadania jest następujące umocnienie tezy.

Jeśli dla pewnej liczby całkowitej n zachodzi nierówność $\mathrm{NWD}(n, a_{n-1}) > 1$, to $a_n = 3n$ oraz $\mathrm{NWD}(a_{n-1}, n)$ jest liczbą pierwszą.

Wyjściowo ciąg przyjmuje wartości

$$a_1 = 7,\ a_2 = 8,\ a_3 = 9,\ a_4 = 10,\ a_5 = 15.$$

Możemy więc zauważyć, że dla $n = 5$ mamy

$$\mathrm{NWD}(a_{n-1}, n) = 5 \text{ oraz } a_5 = 3 \cdot 5.$$

Wykażemy tezę indukcyjnie – zakładamy, że zachodzi ona dla wszystkich liczb mniejszych od n. Jeśli $NWD(n, a_n - 1) = 1$, to nic nie trzeba wykazywać. Załóżmy więc, że $NWD(n, a_n - 1) > 1$. Weźmy największą liczbę t, mniejszą niż n, że $\mathrm{NWD}(t, a_t - 1) > 1$. Na mocy założenia indukcyjnego mamy $a_t = 3t$. Wówczas

$$\mathrm{NWD}(i, a_i - 1) = 1 \text{ dla wszystkich liczb } i \in \{t+1, t+2, t+3, ..., n-1\},$$

czyli $a_i = a_{i-1} + 1$. Stąd

$$a_n - 1 = a_t + (n-t) - 1 = 3t + (n-t) - 1 = 2t + n - 1.$$

Zatem

$$\mathrm{NWD}(a_n - 1,\ n) = \mathrm{NWD}(2t+n-1,\ n) = \mathrm{NWD}(2t-1,\ n) = \mathrm{NWD}(2t-1,\ 2n-(2t-1)).$$

Liczba n jest najmniejszą liczbą większą od t, dla której wartość powyższego wyrażenia jest większa od 1. Nietrudno zauważyć, że pierwszą liczbą większą od t, dla której jest to prawda, jest takie n, że liczba $2n - (2t-1)$ jest najmniejszym nieparzystym dzielnikiem pierwszym liczby $2t - 1$. Wówczas oczywiście $2n - (2t-1)$ jest liczbą pierwszą oraz

$$\mathrm{NWD}(n, a_n - 1) = 2n - (2t-1),$$
$$a_n = a_{n-1} + \mathrm{NWD}(n, a_n - 1) = (2t + n - 1) + 2n - (2t-1) = 3n,$$

co kończy dowód indukcyjny.