Wstęp do matematyki olimpijskiej

Indukcja matematyczna

Przykład 1

Wykazać, że dla każdej liczby dodatniej całkowitej n zachodzi nierówność

$$2^n \geqslant n + 1.$$

Rozwiązanie

Dla $n = 1$ mamy $2^n = 2 = n + 1$, a więc postulowana nierówność istotnie zachodzi. Załóżmy, że dla pewnej liczby dodatniej całkowitej k zachodzi nierówność $2^k \geqslant k + 1$. Zauważmy, że wówczas

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \geqslant 2 \cdot (k + 1) = 2k + 2 \geqslant k + 2.$$

Wykazaliśmy, że jeśli postulowana nierówność zachodzi dla pewnej dodatniej liczby całkowitej k, to zachodzi również dla liczby $k + 1$. Skoro zachodzi ona dla $n = 1$, to zachodzi również dla $1 + 1 = 2,\ 2 + 1 = 3,\ 3 + 1 = 4, \ldots$ – wszystkich liczb naturalnych.

Alternatywnym, ale równoważnym, sposobem zakończenia rozwiązania powyższego przykładu jest rozpatrzenie najmniejszego naturalnego n, dla którego teza nie zachodzi. A więc dla $n - 1$ nierówność musi zachodzić, chyba że $n = 1$. Ale w tym przypadku sprawdzamy, że teza zachodzi. Skoro dla $n - 1$ teza jest prawdziwa, a dla n już nie, to otrzymujemy sprzeczność z wcześniej poczynioną obserwacją.

Zasada indukcji matematycznej

Metodę dowodzenia zastosowaną w ostatnim akapicie powyższego rozwiązania nazywamy *zasadą indukcji matematycznej*.

Formalizując, dowód indukcyjny zdania logicznego $Z(n)$ dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n składa się z dwóch części:

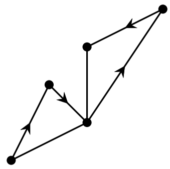
1. Baza indukcji – sprawdzenie prawdziwości zdania $Z(1)$.

2. Krok indukcyjny – udowodnienie, że jeśli zachodzi zdanie $Z(k)$ to zachodzi $Z(k+1)$.

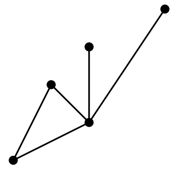
Indukcję matematyczną da się wykorzystać poza algebrą. Pokażemy jedno jego zastosowanie kombinatoryczne. Ale najpierw musimy zdefiniować kilka pojęć z teorii grafów.

Grafy i ścieżki Hamiltona

Grafem nazywamy pewien zbiór *wierzchołków* na płaszczyźnie, które są połączone *krawędziami*. *Ścieżką* nazywamy ciąg parami różnych krawędzi pewnego grafu, z których dwie kolejne mają wspólny wierzchołek. *Ścieżką Hamiltona* nazwamy ścieżkę, która przechodzi przez każdy wierzchołek dokładnie raz.



Graf posiada ścieżkę Hamiltona – zaznaczono ją strzałkami



Graf nie posiada ścieżki Hamiltona

Przykład 2

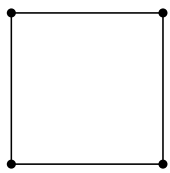
Zdefinujmy ciąg grafów $(G_n)_{n \geqslant 1}$ w następujący sposób.

- Graf G_1 jest grafem złożonym z dwóch połączonych ze sobą wierzchołków,
- Graf G_{i+1} dla $i \geqslant 2$ otrzymujemy poprzez połączenie dwóch grafów G_i, aby każdy wierzchołek z jednego z tych grafów był połączony z dokładnie jednym wierzchołkiem z drugiego z tych grafów.

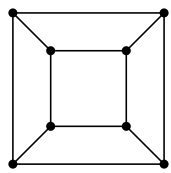
Wykazać, że graf G_{2020} ma ścieżkę Hamiltona.

Uwaga
Można zauważyć, że G_n to w istocie n-wymiarowy hipersześcian.

G_1



G_2



G_3

Rozwiązanie

Wykażemy, że teza jest prawdziwa dla każdego $n \geqslant 1$. Co więcej wykażemy, że ścieżka Hamiltona może zaczynać się w każdym z wierzchołków G_n.

Zauważmy, że dla $n = 1$ teza jest oczywista – ścieżka złożona z jednej krawędzi spełnia warunki zadania.

Załóżmy, że dla G_n istnieje ścieżka Hamiltona. Wykażemy, że istnieje ona dla G_{n+1}. Graf G_{n+1} składa się z dwóch połączonych ze sobą cześci izomorficznych z grafem G_n – nazwijmy je A oraz B. Oznaczmy wierzchołki G_{n+1} kolejno jako $a_1, a_2, ..., a_{2^n}$ – cześć A oraz $b_1, b_2, ..., b_{2^n}$ – część B, przy czym a_i jest połączone właśnie z b_i.

Ścieżka Hamiltonowska w grafie G_{n+1} będzie się składać z 3 cześći:

- Na mocy założenia istnieje ścieżka zaczynająca się w a_1 przechodząca przez wszystkie wierzchołki A. Możemy ją przejść od tyłu. Wówczas przejdziemy wszystkie wierzchołki częsci A kończąc w a_1.
- Następnie przedziemy krawędzią między a_1 i b_1 do części B.
- Na mocy założenia z punktu b_1 da się poprowadzić ścieżkę, która przejdzie przez każdy z wierzchołków części B dokładnie raz.

Łatwo zauważyć, że podany sposób przejścia grafu G_{n+1} tworzy ścieżkę Hamiltonowską.

Zadanie 1

Wykazać, że suma miar kątów w n-kącie wypukłym wynosi $(n-2)\cdot 180°$.

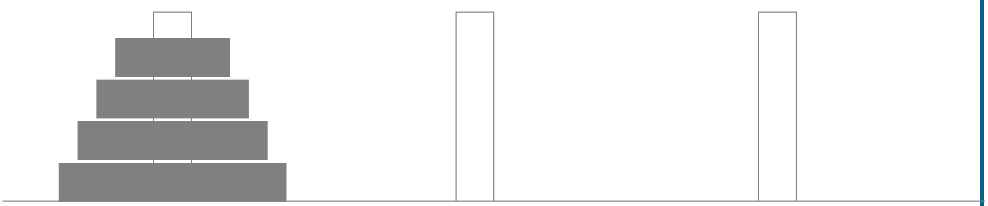
Zadanie 2

Wykazać, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi tożsamość

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Zadanie 3

Dana jest nastepująca gra, zwana *wieżami Hanoi*. Na początku ułożono n dysków na jednej igle tak jak na rysunku. W każdym ruchu gracz może przemieścić dysk, wraz z wszystkimi dyskami nań leżącymy, na inną igłę, przy czym dysk ten nie może zostać położony na dysk o innej średnicy. Wykazać, że gracz jest w stanie przenieść wszystkie dyski na trzecią igłę.



Zadanie 4

W przestrzeni danych jest $n \geqslant 3$ punktów, że żadne trzy z nich nie leżą na jednej prostej. Każde dwa z tych punktów połączono odcinkiem o kolorze zielonym lub czerwonym. Wykazać, że można wybrać tak jeden z tych kolorów, aby każde dwa z danych punktów były połączone odcinkiem lub łamaną tego koloru.

Zadanie 5

Dany jest ciąg liczb rzeczywistych

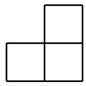
$$a_0 \neq 0,1, \quad a_1=1-a_0, \quad a_{n+1}=1-a_n(1-a_n).$$

Wykazać, że dla wszystkich n

$$a_1a_2\ldots a_n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)=1.$$

Zadanie 6

Wykazać, że planszę o wymiarach $2^n \times 2^n$ dla pewnego $n \geqslant 1$ z usuniętym jednym z rogów da się przykryć pewną liczbą L klocków(takich jak na rysunku). Klocki można obracać.



Zadanie 7

Niech n będzie nieparzystą liczbą naturalną, a liczby x_1, x_2, ..., x_n będa parami różne. Dla każdych dwóch liczb x_i oraz x_j zapisano na tablicy wartość bezwzględną ich różnicy. Wykazać, że można podzielić zapisane liczby na dwa zbiory o równej sumie.

Równania funkcyjne

Przykład 1

Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$, równanie

$$f(x + y) = f(x) - f(y).$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że skoro dane równanie jest spełnione dla wszystkich liczb rzeczywistych x i y to jest spełnione w szczególności dla $x = y = 0$. Wówczas

$$f(0) = f(0) - f(0) = 0.$$

Podstawiając do wyjściowej równości $x = 0$ otrzymujemy

$$f(y) = f(0) - f(y).$$

Na mocy wyżej wykazanej zależności $f(y) = 0$ mamy

$$f(y) = -f(y)$$
$$f(y) = 0.$$

Wykazaliśmy, że $f(x) = 0$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x. Pozostaje sprawdzić, że istotnie taka funkcja spełnia warunki zadania. Zauważmy, że wówczas

$$f(x + y) = 0 = f(x) - f(y).$$

Metodę, polegająca na podstawianiu szczególnych wartości do danego równania, jest najważniejszym narzędziem w walce z równaniami funkcyjnymi. Często, aby zadania rozwiązać, należy użyć jej kilka lub nawet kilkanaście razy.

Należy zaznaczyć, że bardzo często rozwiązując równanie funkcyjne, wyznacza się zbiór funkcji, które mogą spełniać dane równanie. Jednak często nie oznacza to, że muszą one go spełniać, gdyż podstawianie zazwyczaj nie jest przejściem równoważnym. Dlatego należy zawsze w swoim rozwiązaniu zawrzeć sprawdzenie tego, czy otrzymane funkcje istotnie działają. Brak takiego sprawdzenie w większości przypadków skutkuje obniżeniem oceny za dane zadanie.

Przykład 2

Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równanie

$$f(2f(x) + f(y)) = 2x + f(y).$$

Rozwiązanie

Rozwiązanie rozpoczniemy od wykazania następującego lematu.

Lemat 1. Dla każdego $a \in \mathbb{R}$ istnieje $x \in \mathbb{R}$, że $f(x) = a$.

Podstawmy $\frac{a - f(y)}{2}$ w miejsce zmiennej x

$$f\left(f\left(\frac{a - f(y)}{2}\right) + f(y)\right) = 2(\frac{a - f(y)}{2}) + f(y) = a.$$

Zauważmy, że z otrzymanej równości wynika teza lematu – liczbę a można wybrać dowolnie, zaś po prawej stronie otrzymamy argument, dla którego funkcja przyjmie tę wartość.

Korzystając z lematu, podstawmy w miejsce y taką liczbę a, aby $f(a) = -2f(a)$. Wówczas

$$f(0) = 2x - 2f(x)$$
$$f(x) = x + \frac{1}{2}f(0).$$

Podstawiając do powyższej równowści $x = 0$ otrzymujemy, że $f(0) = 0$. Stąd

$$f(x) = x + \frac{1}{2}f(0) = x.$$

Sprawdzamy, że funkcja $f(x) = x$ istotnie spełnia warunki zadania.

W powyższym rozumowaniu kluczowe było wykazanie, że dana funkcja przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste – inaczej mówiąc jest surjekcją. Mogliśmy także wykazać więcej, mianowicie, że dana funkcja jest różnowartościowa. Zakładając, że $f(a) = f(b)$ dla pewnych liczb a, b podstawiamy w miejsce (x, y) kolejno $(a, 0)$ i $(b, 0)$ otrzymując

$$f(2f(a) + f(y)) = 2a + f(y) \quad \text{oraz} \quad f(2f(b) + f(y)) = 2b + f(y).$$

Na mocy wyżej założonej równości lewe strony obu zależności są sobie równe. Stąd prawe również, skąd $a = b$. Implikacja $f(a) = f(b) \implies a = b$ jest równoważna temu, że funkcja f jest różnowartościowa.

W większości rozwiązań funkcyjnych konieczne będzie wykonanie wielu „sztampowych” podstawień i spróbować wykazać własności funkcji – chociażby te wspomniane wyżej. Niekiedy do rozwiązania zadania potrzebny będzie błyskotliwy pomysł czy niesztampowe połączenie faktów. W innych zaś przypadkach samo rzetelne i uważne próbowanie znanych trików może okazać się wystarczające.

Zadanie 1

Znajdź wszystkie funkcje $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równanie $f(x) + f(y) = f(xy)$.

Zadanie 2

Znajdź wszystkie funkcje $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równanie $f(x - f(y)) = 1 - x - y$.

Zadanie 3

Znajdź wszystkie funkcje $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równanie $f(x^2y) = f(xy) + yf(f(x) + y)$.

Zadanie 4

Znajdź wszystkie funkcje $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równanie $2f(x) + f(1 - x) = x^2$.

Zadanie 5

Znajdź wszystkie funkcje $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równanie $f(x + y) = f(f(x)) + y + 1$.

Zadanie 6

Znajdź wszystkie funkcje różnowartościowe $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równość $f(f(x) + y) = f(x + y) + 1$.

Zadanie 7

Znajdź wszystkie funkcje $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ nierówność $f(x^2 + y) + f(y) \geqslant f(x^2) + f(x)$.

Zadanie 8

Znajdź wszystkie funkcje $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ spełniające dla wszystkich $x \in \mathbb{Z}$ równanie $f(f(x)) = x + 1$.

Zadanie 9

Znajdź wszystkie funkcje $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równanie $f(x)f(y) = f(x - y)$.

Zadanie 10

Udowodnij, że nie istnieje taka funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość:

$$f(f(x) + 2f(y)) = x + y.$$

Indukcja matematyczna

1. Przeprowadź rozumowanie indukcyjne po liczbie wierzchołków n.
2. Sprawdź, że równość zachodzi dla $n = 1$. Załóż, że równość zachodzi dla n i spróbuj wykazać ją dla $n + 1$.
3. Przeprowadź indukcję po liczbie n. Skorzystaj dla wszystkich początkowych dysków poza najniżej położonym.
4. Rozpatrz $n + 1$ punktów i zobacz co się stanie jeśli usuniemy jeden z nich.
5. Spróbuj wykazać tezę inducją po n. Aby to zrobić, trzeba będzie wykazać indukcyjnie inną równość pomocniczą.
6. Spróbuj podzielić planszę $2^{n+1} \cdot 2^{n+1}$ na kilka części.
7. Zastosuj indukcję co 2.

Równania funkcyjne

1. Podstaw $y = 0$.
2. Przyjmij $x = f(y)$.
3. Wykaż, że $f(0) = 0$.
4. Podstaw $1 - x$ pod x.
5. Skorzystaj z danego równania dla $x = 0$.
6. Podstaw $y = -x$.
7. Przymij $x = 0$.
8. Podstaw $f(x)$ w miejsce x.
9. Podstaw: $x = y = 0$ oraz $x = y$.
10. Wykaż, że f jest różnowartościowa.

Indukcja matematyczna

1. Rozpatrz trójkąt tworzony przez trzy kolejne wierzchołki n-kąta.
2. Odejmij stronami tezę zadania dla $n+1$ i n.
3. Z założenia indukcyjnego możemy przenieść wszystkie dyski, poza najniżej położonym, na drugą igłę. Należy zauważyć, że dysk, którego nie używamy nie przeszkodzi w wykonaniu takiego przełożenia.
4. Co mówi założenie indukcyjne? Rozpatrz przypadek, gdy z wyróżnionego punktu wychodza krawędzie różnych kolorów.
5. Wykaż, że dla każdej liczby n zachodzi równość $a_{n+1} = 1 - a_1 a_2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$..
6. Podziel planszę na cztery części na pomocą dwóch prostych.
7. Usuń dwie liczby i podziel na dwa zbiory o równej sumie elementów.

Równania funkcyjne

1. *
2. Zauważ, że f jest funkcją liniową.
3. Podstaw $x = 0$ i $y = -f(0)$.
4. Otrzymane równanie tworzy z równaniem wyjściowym układ równań.
5. Wykaż, że $f(x) = x + a$ dla pewnej liczy a.
6. Zauważ, że wartość wyrażania $f(x) - x$ musi być stała. Skorzystaj z różnowartościowości f.
7. Przyjmij $y = 0$.
8. Zauważ, że $f(x+1) = f(f(f(x))) = f(x) + 1$.
9. Wykonaj podstawienie $x = 0$. Wykaż, że $f(x+y) = f(x-y)$.
10. Załóż, że $f(a) = f(b)$ i wykaż, że $a = b$.

Indukcja matematyczna

1. Skorzystaj z faktu, że suma kątów w trójkącie wynosi $180°$ oraz z założenia indukcyjnego.
2. *
3. *
4. Zauważ, że jeśli z wyróżnionego punktu wychodza np. tylko czerwone odcinki, to pomiędzy dowolnymi dwoma punktami da się przejść odcinkami czerwonymi.
5. Wykaż tezę indukcyjnie za pomocą założenia i udowodnionej równości. Zauważ, że

$$a_1a_2a_3...a_na_{n+1}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}\right)=$$
$$=\cdot a_1a_2a_3...a_na_{n+1}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_n}\right)+a_1a_2a_3...a_n.$$

6. Podziel plansze na 1 L-klocek i cztery części, które można pokryć na mocy założenia indukcyjnego.
7. Zauważ, że suma liczb

$$(x_{2k+3}-x_{2k+1},x_{2k+3}-x_{2k},\cdots,x_{2k+3}-x_{k+2})\cup(x_{2k+2}-x_{k+1},\cdots,x_{2k+2}-x_1),$$

jest równa sumie liczb

$$(x_{2k+3}-x_{2k+2})\cup(x_{2k+2}-x_{2k+1},x_{2k+2}-x_{2k},\cdots,x_{2k+3}-x_{k+2})\cup$$
$$\cup\,(x_{2k+3}-x_{k+1},\cdots,x_{2k+3}-x_1).$$

Równania funkcyjne

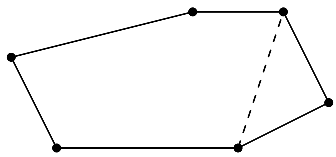
1. *
2. Oblicz wartość $f(0)$.
3. Podstaw $x=0$.
4. *
5. Wstaw $f(x)=x+a$ do wyjściowego równania w celu obliczenia a.
6. Rozumuj podobnie jak w poprzednim zadaniu.
7. Wywnioskuj z obu nierówności, że f jest funkcją stałą.
8. Wykaż, że $f(x)=x+f(0)$. W tym celu korzystaj z całkowitości x.
9. Z tego, że $f(x+y)=f(x-y)$ wywnioskuj, że f jest funkcją stałą.
10. Zamień x i y miejscami w danym równaniu.

Indukcja matematyczna

Zadanie 1

Wykazać, że suma miar kątów w n-kącie wypukłym wynosi $(n-2)\cdot 180^\circ$.

Zauważmy, że dla $n = 3$ teza jest znanym faktem – mianowicie suma kątów w trójkącie wynosi 180°.



Załóżmy, że dla każdego n-kąta wypukłego suma jego kątów wynosi $(n-2)\cdot 180^\circ$. Rozpatrzmy dowolny $n+1$-kąt wypukły. Zauważmy, że ma on więcej niż trzy wierzchołki, więc możemy „odciąć” trójkąt złożony z trzech kolejnych wierzchołków. Podzielimy w ten sposób $n+1$ kąt na n-kąt i trójkąt. Korzystając z wypukłości rozpatrywanego wielokąta możemy zauważyć, że suma miar jego kątów wewnętrznych jest sumą miar kątów obu tych wielokątów. Wynosi więc ona

$$(n-2)\cdot 180^\circ + 180^\circ = (n-1)\cdot 180^\circ,$$

czego należało dowieść.

Zadanie 2

Wykazać, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi tożsamość

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Sprawdzamy, że dla $n = 1$ postulowana równość zachodzi.

Załóżmy, że równość

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

zachodzi dla pewnej liczby n. Chcemy wykazać tezę dla $n+1$, czyli

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Zauważmy, że sprowadza się ona do wykazania tożsamości

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

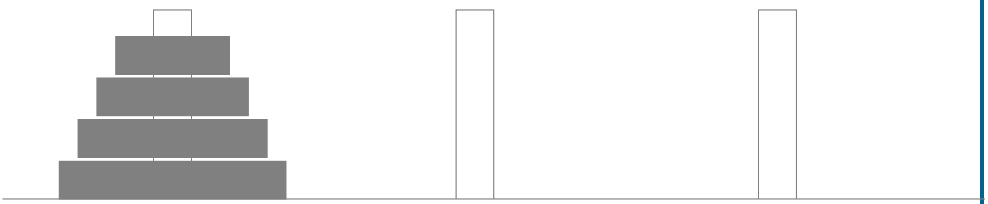
Przekształcając powyższą równość równoważnie otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2 &= (n+1)(n+2)(2n+3), \\ 2n^3+3n^2+n+6(n+1)^2 &= 2n^3+9n^2+13n+6, \\ 6(n+1)^2 &= 6n^2+12n+6, \\ (n+1)^2 &= n^2+2n+1. \end{aligned}$$

Prawdziwość ostatniej równości dowodzi tezy.

Zadanie 3

Dana jest nastepująca gra, zwana *wieżami Hanoi*. Na początku ułożono n dysków na jednej igle tak jak na rysunku. W każdym ruchu gracz może przemieścić dysk, wraz z wszystkimi dyskami nań leżącymy, na inną igłę, przy czym dysk ten nie może zostać położony na dysk o innej średnicy. Wykazać, że gracz jest w stanie przenieść wszystkie dyski na trzecią igłę.



Tezę wykażemy indukcją po n. Zauważmy, że dla $n = 1$ teza jest oczywista – wystarczy po prostu przełożyć dysk na trzecią igłę.

Załóżmy, że jesteśmy w stanie przełożyć $n-1$ dysków z pierwszej igły na trzecią. Możemy oczywiście zauważyć, że jest to równoważne chociażby możliwości przełożenia ich z igły pierwszej na drugą.

Przełożenia n dysków dokonujemy w następujący sposób:

1. Przekładamy $n-1$ dysków z góry pierwszej igły na drugą igłę. Zauważmy, że dysk o największym rozmiarze nie przeszkadza nam skorzystać z założenia indukcyjnego, gdyż nie uniemożliwi on wykonania żadnego ruchu.

2. Dysk pozostawiony na pierwszej igle przekładamy na igłę ostatnią.

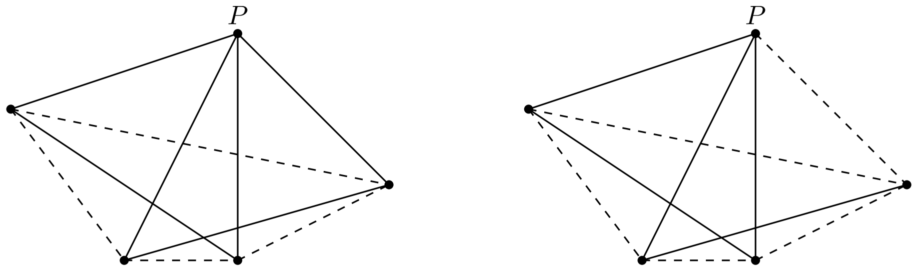
3. Przekładamy $n-1$ dysków z drugiej igły na trzecią. Analogicznie zauważamy, że obecność jednego dysku na trzeciej igle nie jest problemem.

Zadanie 4

W przestrzeni danych jest $n \geqslant 3$ punktów, że żadne trzy z nich nie leżą na jednej prostej. Każde dwa z tych punktów połączono odcinkiem o kolorze zielonym lub czerwonym. Wykazać, że można wybrać tak jeden z tych kolorów, aby każde dwa z danych punktów były połączone odcinkiem lub łamaną tego koloru.

Dla $n = 3$ mamy trójkąt. Wybierając kolor, na który pomalowano co najmniej dwa odcinki odcinki, postulowana własność będzie spełniona.

Załóżmy, że dla teza zachodzi dla n punktów. Rozpatrzmy zbiór $n+1$ punktów. Wyróżnijmy pewien punkt P. Punktów poza P jest dokładnie n, więc na mocy założenia istnieje kolor – bez straty ogólności czerwony – że pomiędzy kąždymi dwoma punktami poza P istnieje łamana tego koloru.



Na rysunku zamiast kolorów użyto podziału na linię ciągła i przerywaną.

Rozpatrzmy dwa przypadki:

1. Punkt P jest połączony czerwoną krawędzią z pewnym innym punktem Q. Wówczas wybierając dowolny punkt X, na mocy założenia wiemy, że istnieje czerwona ścieżka między X i Q. Dokładając do niej odcinek między P i Q otrzymujemy ścieżkę między P oraz X. Wykazaliśmy, że istnieje ścieżka między punktem P i każdym innym punktem. Łącząc to z faktem, że na mocy założenia indukcyjnego taka ścieżka istnieje między każdą inną parą punktów, otrzymujemy, że dla koloru czerwonego teza jest spełniona.

2. Punkt P jest połączony z każdym innym punktem niebieskim odcinkiem. Wówczas łatwo zauważyć, że pomiędzy każda parą punktów możemy przejść jednym albo dwoma niebieskimi odcinkami przechodzącymi przez punkt P.

Zadanie 5

Dany jest ciąg liczb rzeczywistych

$$a_0 \neq 0, 1, \quad a_1 = 1 - a_0, \quad a_{n+1} = 1 - a_n(1 - a_n).$$

Wykazać, że dla wszystkich n

$$a_1 a_2 ... a_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} \right) = 1.$$

Na początku wykażemy indukcyjnie, że dla każdego n zachodzi równość

$$a_{n+1} = 1 - a_1 a_2 a_3 \cdot ... \cdot a_n.$$

Równośc dla $n = 0$ zachodzi na mocy założeń.
Załóżmy, że

$$a_n = 1 - a_1 a_2 a_3 \cdot ... \cdot a_{n-1}.$$

Skoro $a_{n+1} = 1 - a_n(1 - a_n)$, to otrzymujemy

$$a_{n+1} = 1 - a_n(1 - a_n) = 1 - a_n \cdot a_1 a_2 a_3 \cdot ... \cdot a_{n-1} = 1 - a_1 a_2 a_3 \cdot ... \cdot a_n.$$

Więć na mocy zasady indukcji matematycznej postulowana równość zachodzi.

Teraz przejdziemy do udowodnienia tezy.
Dla $n = 1$ jest ona oczywista.
Załóżmy, że zachodzi równość

$$a_1 a_2 a_3 ... a_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n} \right) = 1.$$

Chcemy wykazać, że

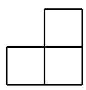
$$a_1 a_2 a_3 ... a_n a_{n+1} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}} \right) = 1.$$

Przekształcamy powyższą równość korzystając z założenia

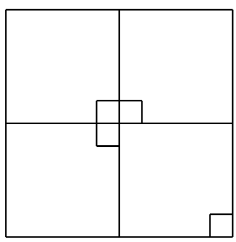
$$a_1 a_2 a_3 ... a_n a_{n+1} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}} \right) =$$
$$= a_{n+1} \cdot a_1 a_2 a_3 ... a_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n} \right) + a_1 a_2 a_3 ... a_n =$$
$$= a_{n+1} + a_1 a_2 a_3 ... a_n = 1 - a_1 a_2 a_3 ... a_n + a_1 a_2 a_3 ... a_n = 1.$$

Zadanie 6

Wykazać, że planszę o wymiarach $2^n \times 2^n$ dla pewnego $n \geqslant 1$ z usuniętym jednym z rogów da się przykryć pewną liczbą L klocków(takich jak na rysunku). Klocki można obracać.



Zauważmy, że plansza 2×2 z usuniętym rogiem jest w istocie L-klockiem, więc da się ją pokryć.



Załóżmy, że dla planszy $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ istnieje szukane pokrycie. Pokrycie dla planszy $2^n \times 2^n$ kontruujemy następująco. Dzielimi plansze dwiema prostymi na trzy jednakowe części i czwartą taką samą, tylko bez rok. Kładziemy jeden klocek na środku tak jak na rysunku. Wówczas plansza jest podzielona na cztery jednakowe puste części, które na mocy założenia indukcyjnego można pokryć.

Zadanie 7

Niech n będzie nieparzystą liczbą naturalną, a liczby x_1, x_2, ..., x_n będa parami różne. Dla każdych dwóch liczb x_i oraz x_j zapisano na tablicy wartość bezwzględną ich różnicy. Wykazać, że można podzielić zapisane liczby na dwa zbiory o równej sumie.

Przez multizbiór rozumiemy zbiór w którym jeden element może występować kilka razy.

Załóżmy, że $x_1 \geqslant x_2 \geqslant ... \geqslant x_n$.

Wykażemy tezę dla $n = 3$. Podział na zbiory $\{x_1 - x_2, x_2 - x_3\}$ oraz $\{x_1 - x_3\}$ spełnia warunki zadania.

Załóżmy, że teza zachodzi dla $2n + 1$, wykażemy ją dla $2n + 3$. Rozpatrzmy szukany podział multizbioru różnic zbioru $\{x_1, x_2, ..., x_{2n+1}\}$ na multizbiory A i B o równej sumie elementów.

Dorzucamy do multizbioru A liczby

$$(x_{2k+3} - x_{2k+1}, x_{2k+3} - x_{2k}, \cdots, x_{2k+3} - x_{k+2}) \cup (x_{2k+2} - x_{k+1}, \cdots, x_{2k+2} - x_1),$$

a do multizbioru B liczby

$$(x_{2k+3} - x_{2k+2}) \cup (x_{2k+2} - x_{2k+1}, x_{2k+2} - x_{2k}, \cdots, x_{2k+3} - x_{k+2}) \cup \\ \cup (x_{2k+3} - x_{k+1}, \cdots, x_{2k+3} - x_1).$$

Łatwo sprawdzić, że suma dorzuconych elementów jest równa.

Równania funkcyjne

Zadanie 1

Znajdź wszystkie funkcje $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równanie $f(x) + f(y) = f(xy)$.

Odpowiedź. Jedyną funkcją spełniającą warunki zadania jest $f(x) = 0$.

Podstawmy $y = 0$:

$$f(x) + f(0) = f(0),$$

czyli $f(x) = 0$ dla każdego x. Łatwo sprawdzić, że ta funkcja spełnia warunki zadania.

Zadanie 2

Znajdź wszystkie funkcje $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równanie $f(x - f(y)) = 1 - x - y$.

Podstawmy $x = f(y)$. Otrzymamy

$$\begin{gathered} f(0) = 1 - f(y) - y, \\ f(y) = -y + (1 - f(0)). \end{gathered}$$

Podstawmy $y = 0$ do powyższej zależności. Wówczas łatwo obliczyć, że $f(0) = \frac{1}{2}$. Czyli $f(x) = -x + \frac{1}{2}$. Ta funkcja istotnie spełnia warunki zadania, gdyż

$$f(x - f(y)) = f(y) - x + \frac{1}{2} = 1 - y - x.$$

Zadanie 3

Znajdź wszystkie funkcje $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równanie $f(x^2 y) = f(xy) + yf(f(x) + y)$.

Odpowiedź. Funkcja $f(x) = x$ jest jedynym rozwiązaniem.

Podstawmy $x = 0$ i $y = -f(0)$. Otrzymamy $f(0)^2 = 0$, czyli $f(0) = 0$. Podstawmy $x = 0$:

$$0 = yf(f(0) + y) = yf(y)$$

Dla niezerowego y mamy $f(y) = 0$. Sprawdzamy, że funkcja $f(x) = 0$ spełnia warunki zadania. Łącząc powyższe wnioski otrzymujemy, że jedyni funkcja $f(x) = 0$ spełnia warunki zadania.

Zadanie 4

Znajdź wszystkie funkcje $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równanie $2f(x) + f(1-x) = x^2$.

Odpowiedź. Jedyną funkcją spełniającą warunki zadania jest $f(x) = \frac{2x^2-(1-x)^2}{3}$.

Podstawmy $1-x$ za x. Otrzymamy

$$2f(1-x) + f(x) = 2(1-x)^2.$$

Z równaniem z zadania tworzy to układ równań ze zmiennymi $f(x)$ i $f(1-x)$. Wyliczamy $f(x) = \frac{2x^2-(1-x)^2}{3}$. Wystarczy teraz tylko sprawdzić, że ta funkcja spełnia warunki zadania.

Zadanie 5

Znajdź wszystkie funkcje $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równanie $f(x+y) = f(f(x)) + y + 1$.

Odpowiedź. $f(x) = x - 1$ jest jedynym rozwiązaniem danego równania.

Podstawmy $x = 0$:

$$f(y) = f(f(0)) + 1 + y,$$

czyli $f(x) = x + a$ dla pewnego stałego a. Podstawmy tę funkcję do wyjściowego równania

$$x + y + a = x + 2a + y + 1.$$

Mamy $a = -1$. Łatwo sprawdzić, że funkcja $f(x) = x - 1$ spełnia warunki zadania.

Zadanie 6

Znajdź wszystkie funkcje różnowartościowe $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równość $f(f(x) + y) = f(x + y) + 1$.

Odpowiedź. Jedyną funkcją spełniającą warunki zadania jest $f(x) = x + 1$.

Podstawmy $y = -x$. Otrzymamy

$$f(f(x) - x) = f(0) + 1.$$

Zauważmy, że prawa strona równości jest stała. Z różnowartościowości f wynika, że wartość $f(x) - x$ jest stała. Czyli $f(x) - x = a$ dla pewnego a. Wstawiamy $f(x) = x + a$ do wyjściowego równania

$$x + y + 2a = x + y + a + 1,$$

więc $a = 1$. Skąd $f(x) = x+1$ – możemy sprawdzić, że ta funkcja spełnia warunki zadania.

Zadanie 7

Znajdź wszystkie funkcje $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ nierówność $f(x^2 + y) + f(y) \geqslant f(x^2) + f(x)$.

Podstawmy $x = 0$

$$f(y) \geqslant f(0).$$

Podstawmy $y = 0$

$$f(x^2) + f(0) \geqslant f(x^2) + f(x),$$

czyli $f(0) \geqslant f(x)$. Łącząc oba wnioski otrzymuję

$$f(0) \geqslant f(x) \geqslant f(0),$$

czyli $f(x) = f(0)$. Innymi słowy f jest funkcją stałą. Łatwo zauważyć, że taka funkcja spełnia warunki zadania.

Zadanie 8

Znajdź wszystkie funkcje $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ spełniające dla wszystkich $x \in \mathbb{Z}$ równanie $f(f(x)) = x + 1$.

Odpowiedź. Szukane funkcje nie istnieją.

Zauważmy, że zachodzą równości

$$f(f(f(x))) = f(x + 1)$$
$$f(f(f(x))) = f(x) + 1$$

Z tego otrzymujemy równość:

$$f(x) = f(x - 1) + 1$$

Skoro działamy w liczbach całkowitych to możemy wywnioskować, że

$$f(x) = f(x - 1) + 1 = f(x - 2) + 2 = ... = x + f(0).$$

Podstawmy równość $f(x) = x + f(0)$ do $f(f(x)) = x + 1$:

$$x + 1 = f(f(x)) = x + 2f(0),$$

czyli $f(0) = \frac{1}{2}$. Sprzeczność. Takie funkcje nie istnieją.

Zadanie 9

Znajdź wszystkie funkcje $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równanie $f(x)f(y) = f(x - y)$.

Odpowiedź. Daną zależność spełniają funkcje $f(x) = 1$ i $f(x) = 0$.

Podstawmy $x = y = 0$. Wtedy otrzymujemy

$$f(0)^2 = f(0) \implies f(0) \in \{0, 1\}.$$

Podstawmy $x = y$
$$f(x)^2 = f(0).$$
Jeśli $f(0) = 0$, to $f(x) = 0$. Łatwo sprawdzić, że funkcja zerowa spełnia warunki zadania. Zobaczmy, co jeśli $x = y$ oraz $f(0) = 1$:
$$f(x)^2 = f(0) = 1$$
Czyli $f(x)$ jest równe -1 lub 1 dla każdego x. Podstawmy $x = 0$
$$f(y) = f(-y).$$
Zauważmy, że
$$f(x-y) = f(x)f(y) = f(x)f(-y) = f(x+y).$$
Weźmy 2 dowolne liczby a i b. Biorąc $x = \frac{a+b}{2}$ oraz $y = \frac{a-b}{2}$ otrzymamy
$$f(x+y) = f(x-y) \implies f(a) = f(b).$$
Skoro a i b były dowolne to f jest funkcją stałą, czyli $f(x) = 1$. Łatwo sprawdzić, że ta funkcja również spełnia warunki zadania. Czyli tę zależność spełniają funkcje $f(x) = 1$ i $f(x) = 0$. Sprawdzamy, że istotnie one działają.

Zadanie 10

Udowodnij, że nie istnieje taka funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość:
$$f(f(x) + 2f(y)) = x + y.$$

Lemat 1 Funkcja f jest różnowartościowa
Załóżmy, że $f(a) = f(b)$. Podstawmy, $x = a$ oraz $x = b$
$$f(f(a) + 2f(y)) = a + y \quad \text{oraz} \quad f(f(b) + 2f(y)) = b + y.$$
Skoro $f(a) = f(b)$, to
$$f(f(a) + 2f(y)) = f(f(b) + 2f(y)),$$
a więc $a + y = b + y$, czyli $a = b$. A więc f istotnie jest różnowartościowa.

Zauważamy, że zachodzą równości
$$f(f(x) + 2f(y)) = x + y \quad \text{oraz} \quad f(f(y) + 2f(x)) = x + y.$$
Czyli
$$f(f(x) + 2f(y)) = f(f(y) + 2f(x)).$$
Skoro f jest różnowartościowa, to
$$f(x) + 2f(y) = f(y) + 2f(x),$$
więc $f(x) = f(y)$ dla wszystkich liczb x, y. Czyli f musiałaby być funkcją stałą, a to jest oczywista sprzeczność z danym równaniem.