



# PHYSICS

第78回 電子文化祭

## ■はじめに

こんにちは、78回生の上田です。

まずは、第78回灘校文化祭「odyssey」、並びに物理研究部にお越しくださりありがとうございます。物理研究部で行っている液体窒素を使った実験ショーや、ブースでの展示は楽しんでいただけたでしょうか。

物理研究部では、物理チャレンジ、文化祭などのアウトプットの場や、普段の活動のゼミなどを通して、部員それぞれが物理学という問に対して様々な方法で挑戦しています。この部誌では、そんな部員たちの熱意を感じることができるので、時間がある方もない方でも是非読んで頂きたいです。

さて、今回の文化祭は、僕たちにとって4回目の文化祭となります。4回目の文化祭というだけでも驚きが隠せませんが、中学1年生の時の文化祭がコロナ禍によって中止になっているので、本来ならば文化祭は5回目であって、僕たちはもう高校2年生になります。時の流れというのあまりにも早いものですね。

中学1年生の時の中止の後にも制限開催が続いたため、前回の第77回灘校文化祭「splash！」が僕たちにとっての初めての制限なしの文化祭となりました。先にも書いてある通り、文化祭というのは僕たちにとって大いなるアウトプットの場として存在しています。文化祭時の盛り上がりとワクワク感はたまらないものがあり、自分で作った展示のことを話したり、来てくださったお客様と話すことは、文化祭のアウトプットの場としてのすばらしさを痛感させてくれます。今回は、僕自身が部長になって今回が初めての文化祭というのもあり、楽しみな気持ちと同じくらいに不安な気持ちもあるのですが、是非今回を通して、物理にあまり興味がなかったという方も興味を持っていただけたら幸いです。

(78回生 部長)

# 目次

第 1 章 展示説明	3
1.1 真空鉈	3
1.2 エコーマイク	5
1.3 レールガン	7
1.4 樟腦船	9
1.5 シュリーレン法	12
第 2 章 活動紹介	16
2.1 中 1 講義	16
2.2 課題ゼミ	18
2.3 電磁気学ゼミ	24
第 3 章 寄稿記事	32
3.1 電磁波	32
3.2 ふりこの軌道	37
3.3 2 種類の方法による London 方程式の導出	41

# 第1章

## 展示説明

本章では、物理教室で行っている展示の一部の解説を行います。（なお、この記事を執筆しているのは3月ですので、準備の関係上本章の内容と実際の展示の内容が異なることがあります。）

### 1.1 真空鈴

#### 概要

私たちは日々、数々の音を聞いたり鳴らしたり過ごしています。普段鈴を鳴らすとチリンチリンと音がするのは当たり前のことです。では、空気のない真空の状態ではどうでしょうか。実は真空中では音が伝わりにくいのです。ここではそれを確認する実験である真空鈴の実験を解説します。

#### 1.1.1 実験

では、実験の方法を説明します。まず、丸底フラスコに水を入れます。その後、ガラス管を通じ、針金の先に鈴をつけたものをガラス管に触れないよう取り付けたゴム栓をつけます（図1）。この時、鈴の音が小さく聞こえづらければ、代わりに音源として、エナメル線を振動片につけたブザーなどを使うといった工夫もできます。

次にピンチコックを開いた状態でこれを加熱して、フラスコ内の水を沸騰させます。これでフラスコ内の空気は水蒸気で押し出され、フラスコ内は水蒸気で埋め尽くされます。その後、加熱をやめ、ピンチコックを閉じると水蒸気が冷え、水に戻り、フラスコ内は空気が非常に薄いほぼ真空の状態になります。真空ポンプなどの廃棄の方法も考えられますね。

最後に、フラスコを振り鈴の音を確かめると、非常に小さな音が鳴る、もしくは音が鳴らないようになります。どうしても完全な真空状態を作ることが難しいため、弱く鈴の音がすることが多いです。その後、ピンチコックをあけ、フラスコに空気を充満させると、音が鮮明になるようになります。

### 1.1.2 考察

この実験より、完全な真空状態を作り出せないとはいえ、空気に満ちた場合と比べ、大きく音が小さくなっこことより、音を鳴らすには空気がよくかかわっていることがわかります。また、完全な真空状態であれば、まったく音が鳴らないのではないかといった予想をすることもできます。

このような結果となった理由としては、音は粒子のようなものではあらず、干渉（複数の波を重ね合わせると新たな波が生まれること）、回折といった性質を持つ波動性のものだからです。音が波のような性質を持つということは、音を伝える媒質が必要であります。よって、真空状態や空気の薄い状態で音が小さくなるのは、媒質の欠陥が原因であるわけです。

(81回生 KW)



図 1([5] より)

### 参考文献

- [1] <https://yukaina16.web.fc2.com/zui/zui003.htm>
- [2] <http://www.ricen.hokkaido-c.ed.jp/ht/411kenkyuukiyou/vol03/sinku.pdf>
- [3] [https://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%B9%B2%E6%B8%89\\_\(%E7%89%A9%E7%90%86%E5%AD%A6\)](https://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%B9%B2%E6%B8%89_(%E7%89%A9%E7%90%86%E5%AD%A6))
- [4] <https://kakinotane-blog.com/photon-wave-particle>
- [5] <https://jp.images-monotaro.com/Monotaro3/pi/full/mono28564918-180912-02.jpg>

## 1.2 エコーマイク

### 概要

皆さんは「エコーマイク」と聞いて、何を思い浮かべたでしょうか？おそらく図 1、図 2 のようなマイクを思い浮かべた方が多いのではないでしょうか。ここでは、図 2 の電気を使わないエコーマイクの解説をします。

### 1.2.1 エコーマイクとは

“エコーマイク”という言葉を聞いて、図 1 の、ダイナミックマイクと呼ばれる電気によって動くマイクを想像される方もいると思いますが、今回は図 2 の電気の力を使わないマイクについて紹介します。まずは、そもそもエコーマイクというのは、いったい何なのでしょうか？ ジーニアス英和辞典によると、エコーには「反響する」、「こだまする」といった意味があります。つまり、自分の声を反響して音量を増幅する時に使われる機器のことです。このエコーマイクの最大の特徴は上でも述べた通り電気を使わないマイクだということです。



図 1([4] より)



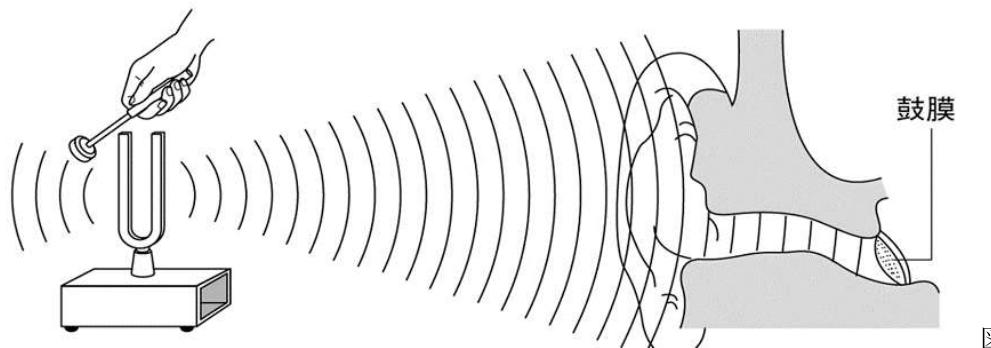
図 2([1] の画像より)

### 1.2.2 音の性質

エコーマイクの仕組みについて理解する前に少し音について紹介します。図 3 は音叉からでた音を人が聞く過程を表した図です。ここで紹介したいことは、音は空气中で振動しながら進む波だということです。上図の音の伝わりからを順に追うと、

- 1, 音叉が叩いたことによって振動する
- 2, 振動によって空気が押されることで空気中にわずかに密度の濃い場所ができる
- 3, 密度の濃い空気は元の状態に戻るために近くの空気を押す
- 4, 3 が繰り返され、空気の振動が耳に伝わり、耳の中に振動が伝わり鼓膜が振動する

耳の内部での音の伝わり方に興味のある方は NHK の耳の仕組みの動画を見てみると面白いかもしれません。[3]



図

3([[5]] より)

### 1.2.3 エコーマイクの仕組み

ではエコーマイクを使うと何故声にエコーがかかるのでしょうか。これはやまびこの仕組みと似ています。やまびこは、遠い山に向かって言葉を叫ぶとしばらくしてから同じ言葉が返ってくる現象のことです。(図 4) この現象は、人が出した音が波として空気中を振動しながら伝わり、遠くの山の硬い面にあたることで反射して、自分のところに帰ってくることによって時間差があって声が返ってくることで起こります。上記の通り、エコーマイクもやまびこと似て、内部で音が反射して帰ってくる仕組みになっています。そしてエコーマイクでは、反射するところとの距離がとても短いため、自分が音を発するのとほぼ同時に反射した音が返ってきます。そのため、人の耳では二つの音がほぼ重なることで、音の大きさが増幅して、響いて聞こえます。これがエコーマイクを使うと声が響いて聞こえる仕組みです。

(78回生 E.T)

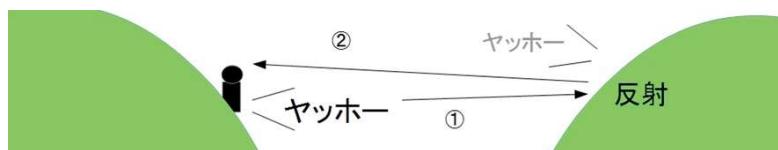


図 4([2] の画像より)

### 1.2.4 参考文献

- [1] <https://daipresents.com/2017/08/22/echo-microphone/>
- [2] <https://chinobouken.com/yahooopoint/>
- [3] [https://www2.nhk.or.jp/school/watch/clip/?das\\_id=D0005401176\\_00000](https://www2.nhk.or.jp/school/watch/clip/?das_id=D0005401176_00000)
- [4] <https://www.pakutaso.com/20131048276post-3340.html>
- [5] [https://www.art-kobo.co.jp/web\\_zuhan\\_kobo/html/index.php/products/list?category\\_id=4418](https://www.art-kobo.co.jp/web_zuhan_kobo/html/index.php/products/list?category_id=4418)

## 1.3 レールガン

### 概要

みなさんは「レールガン」というものはご存じでしょうか。一言で表すならば、物体をローレンツ力というものを利用し加速させて撃ち出す装置です。ここでは、実際にどのような仕組み、原理で動いているのか、ローレンツ力とはいいったい何なのかということについて解説します。

### 1.3.1 ローレンツ力

レールガンについての説明に入る前に、先にローレンツ力についての説明をしておきます。

ローレンツ力とは、電気を帯びた粒子（荷電粒子）が磁場中を運動するときに受ける力のことです。

図 1 で、磁束密度（簡単に言えばその磁場内の磁力の大きさのことです） $B$  [T] の磁場の中を電気量  $q$  [C] の荷電粒子が速度  $v$  [m/s] で進んでいて、磁場の方向と速度の方向のなす角が  $\theta$  であるとします。このとき、この荷電粒子には  $f$  [N] の力が働くとすると、

$$f = qvB \sin \theta$$

という式が成り立ちます。

さらに、このローレンツ力の向きは、磁場の方向にも速度の方向にも垂直な向きと定義されており、これは中学で習った方もいらっしゃるであろう「フレミング左手の法則」と同様に考えることができます（図 2）。図 2 は正の電荷をもっている場合（すなわち、 $q > 0$  の場合）であることに注意してください。もし負の電荷をもっている場合であればローレンツ力の向きは逆になります（ $v$  の向きを逆にしてから図 2 を適用すればよいでしょう）。ここでの速度の向きというのとは正電荷の移動する向きに等しく、正電荷の移動する向きは電流の向きと同じであるため、フレミングの左手の法則と同じようなことを言っているわけですね。

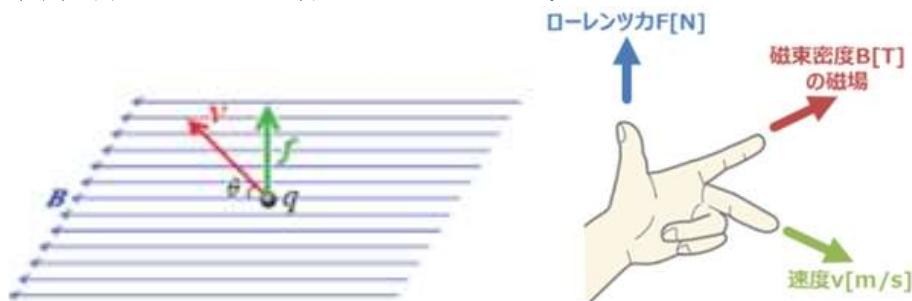


図 1([1] の画像より)

図 2([2] の画像より)

### 1.3.2 レールガンの構造としくみ

レールガンの構造は図3のようになっており、意外と単純です。

電源から電流が流れだし、導線やレールを通って金属棒の中を流れます。このとき、例えば図3の場合では電流による下向き（右ねじの法則で考えられますね）の磁界が発生しているところを金属棒が移動していくため、先ほどのローレンツ力がはたらくのです。（図3のように永久磁石を配置すればよりローレンツ力が大きくなるため、金属棒の移動する速さも大きくなります。）これによって、金属棒は加速されながら移動していきます。

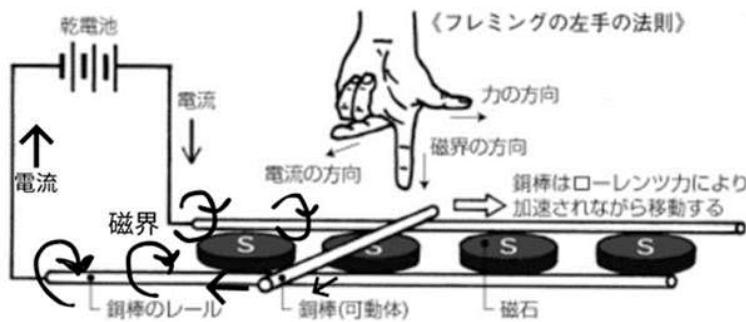


図3([3] の画像より)

### 1.3.3 最後に

ここまでレールガンの原理についてそれを理解するうえで必要な知識に触れながら説明してきましたが、いかがだったでしょうか。

レールガンは武器としても注目されており、日本でも開発が進められていますので、ぜひこの機会に展示や部誌を通してその原理を理解していただければ幸いです！

(78回生 あめちゃん)

### 1.3.4 参考文献

- [1] <https://wakariyasui.sakura.ne.jp/p/elec/ro-renn/ro-renn.html>
- [2] [https://detail-infomation.com/lorentz-force/#google\\_vignette](https://detail-infomation.com/lorentz-force/#google_vignette)
- [3] <https://www.tdk.com/ja/tech-mag/ninja/083>

## 1.4 樟腦船

### 概要

みなさんは樟脳船というものをご存知でしょうか。これは動力もなしに水に浮かべるだけでと勝手にすいすいと進んでゆきます。ここでは、樟脳舟がなぜ進むのかを説明をします。

### 1.4.1 樟脳船とは

まずは樟脳船がどのようなものかです。これは日本の昔ながらのおもちゃで水に浮かぶ板の後ろに樟脳（クスノキを蒸留したもの）を乗せただけの非常に単純なものです。この船は不思議なことに動力もなしに水に浮かべるだけでと勝手にすいすいと進んでゆきます。理由は後で説明しますが樟脳は界面活性剤の入った洗剤でも代用できるのでご自宅でも気軽に作ることができます。

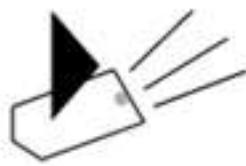


図 1

### 1.4.2 なぜ樟脳船は進むのか

#### 表面張力

不思議な樟脳船を進める力、それが表面張力です。そもそも表面張力とは何かという話ですが、液体の場合「表面の面積を大きくするのに必要なエネルギー」です。なぜこのようなものがあるのか水の場合で説明します。水分子は1つの酸素原子Oと2つの水素原子で構成されています。(図2) 酸素原子は酸素原子核の周りを8つの電子が回っており、一番外の軌道には6つの電子が回っています。この軌道は8つの電子が回っているとき安定します。また水素原子は水素原子核の周りを1つの電子が回っており、一番外の軌道(1つしかないが)を一つの電子が回っています。この軌道は2つ電子が回ると安定します。このとき酸素原子と2つの水素原子の間で電子を共有し結合することで3つの原子すべてが安定した状態となります。共有結合で互いに出した電子の組を共有電子対と呼びます。右のように酸素と水素の間で共有電子対が1つずつできますが、酸素は水素に比べて共有電子対を引き付ける性質を持っています。共有電子対は負の電荷を持っているのでそれを引き付けた酸素原子はわずかに負に帯電し、逆に離れた水素原子は正に帯電します。(図3) このように水素、酸素原子は水分子中でそれぞれ帯電しており、水分子のたくさん集まつた液体の水中では正に帯電した水素原子が負に帯電した隣の分子の酸素原子と弱く結合し安定します。この結合を水素結合と呼びます。酸素原子も同様に隣の分子の水素原子と弱く結合します(ただし共有結合2つ分負に帯電しているので2つの水分子の水素原子と1つずつ結合できる)。従って水分子は周囲の4分子と結合することができ、水分子が集まっていると

き内側の分子は4分子と結合していますが、表面の分子は接する分子が内側に比べて少なく3分子としか結合ができず、帶電したままの箇所が発生し不安定な状態となります。水分子たちは極力不安定な表面の分子を少なくしようとします。そのため水の表面積を増やすには不安定な分子を増やさなければならず、エネルギーを加える必要があります。

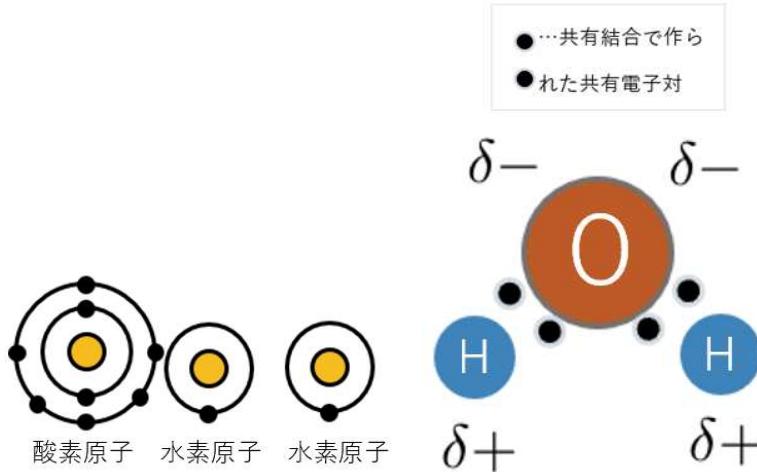


図 2

図 3

### 表面張力の差

さて、なぜここからは表面張力によって樟脳船が進むのかですが、樟脳や界面活性剤（洗剤等にはいってるやつ）の分子はどちらも水と引っ付きにくい疎水基、引っ付きやすい親水基という部分を持っています。ここからは大まかに図4のように表します。

水の表面に樟脳や界面活性剤が溶け出ると親水基側は水と引っ付き、疎水基側は水から離れようとするので水面では図5のようになり薄い膜を作ります。すると膜の下の表面であり、1つ結合が少なかった水分子と親水基が結合してゆきます。

すると、不安定であった表面の水分子たちが安定した状態となり、この薄い膜ができた場所は表面張力が低下します。実はシャボン玉の表面でも同じようなことが起こっており、表面張力が下がることでシャボン膜が広がりやすくなり、水に空気を吹き込むより大きな泡を作ることができます。

上に樟脳や界面活性剤の膜が張った部分と張っていない部分は互いに表面積を小さくしようとしますが張った部分はそうでない部分に比べて表面張力が弱く、水面が広がりやすくなります。そのため幕の張った部分の水面が広がってゆきます。（図6）水を張ったたらいに粉を撒き洗剤を静かにたらすとパッと洗剤が表面を広がる様子が観察できます。

樟脳船の船尾につけた樟脳が溶けると樟脳の膜が広がる勢いで船が押し出されます。これが連続的に起こるので水面全体に樟脳が広がり表面張力差が無くなるまでは、樟脳船は動力なしにすいすいと進んでいきます。

(79回生 そば湯)



図 4

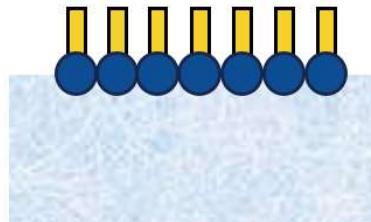


図 5

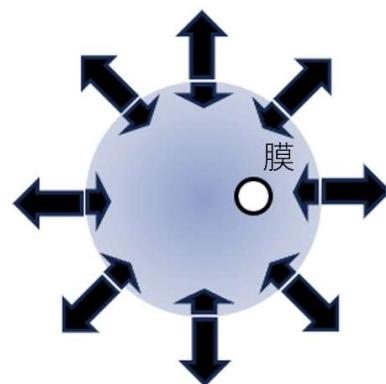


図 6

### 1.4.3 参考文献

- [1] [https://www.face-kyowa.co.jp/science/familiar/4-3-6\\_no\\_Show.html](https://www.face-kyowa.co.jp/science/familiar/4-3-6_no_Show.html)
- [2] [http://www.spring8.or.jp/ja/news\\_publications/research\\_highlights/no\\_54/](http://www.spring8.or.jp/ja/news_publications/research_highlights/no_54/)

## 1.5 シュリーレン法

### 概要

シュリーレン現象を物理的な観測に応用できないかということで誕生した、シュリーレン法。ここでは、そのシュリーレン法の解説をします。

### 1.5.1 シュリーレン現象とは

暑い日に、アスファルトの道路や車の上の景色が、もやもやして見えることがあると思います。暑い日のテレビのニュース番組で、よく地面に近い高さで、地面に水平な角度から撮影された映像が流れることがあります、あの動画はかなり揺れて見えますよね。これこそがシュリーレン現象です。

簡単に説明すると、透明な物質の中で部分的に屈折率が違うときに、もやもやが見えるといった感じです。屈折率が大きいほど、このもやもやは、はっきりと見えるようになります。先ほど書いたこの暑い日の話は、道路や車で暖められた空気の温度が高くなっている、密度が低くなるため、この空気が軽くなっているとともに、屈折率も低くなっている、光の進む方向が変化するというからくりです。ちなみに、シュリーレンとは、ドイツ語で脈理(ガラス内部の屈折率が異なる不均質な部分)やムラを意味するようです。

この現象を用いた簡単な実験はいくつかあるので、興味を持った方はぜひやってみてください。「シュリーレン現象 実験」のように調べたらすぐ出てくると思います。

### 1.5.2 シュリーレン法とは

このシュリーレン現象を物理的な観測に応用できないかということで誕生したのが、シュリーレン法です。

シュリーレン法とは、この現象を用いて、肉眼では見ることのできない気体の微細な密度変化を特殊な光学系を利用して光の屈折により可視化する方法です。媒質中を伝播する衝撃波や超音波の進行状況、炎による気流の上昇、ガラス内の均質性、光学レンズの欠陥などが観察できます。19世紀中期からある、比較的歴史の長い手法です

1887年に撮影された、弾丸の衝撃波を可視化した写真(図1)はとても有名です。高機能なカメラがなかった時代に音速を超える現象を撮影したということはとても困難だったことが推測できます…

密度構造を評価するには最適な可視化手法ですが、流れを定量的に評価・計測するという点では、マーカーにトレーサー粒子を用いるPIV計測が適しています。PIV計測についての説明はここでは省略しますが、興味があったらぜひ調べてみてください。シュリーレン法が有効なのは、トレーサー粒子が対応可能な速度を超えるような高速現象を可視化したい場合です。シュリーレン法では透明な気体・液体・固体の不均質な状態が、密度勾配として映し出されます。密度勾配によるわずかな屈折率の変化を観測する手法です。

シュリーレン法は、流体の可視化で広く活用される、「流れの可視化」手法の一つでもあります。PIV 計測のようにマーカーとなるトレーサー粒子が必要ないので、粒子の性能を考慮する必要がありません。また、トレーサー粒子を実験系に散布できない環境でも可視化実験を行えます。これらが、シュリーレン法のメリットとして挙げられるでしょう。

ここからは、シュリーレン法の具体的なシステムについて解説します。

点光源から発振した光は、シュリーレンレンズ（または凹面鏡）で平行な光（平行光束）になります。平行な光は、被写体を透過して再びシュリーレンレンズで焦点を結び像を作ります。シュリーレンレンズによって作られた平行な光の領域が、シュリーレン法の観測エリアになります。光学系には凹面鏡や凸レンズを使用し、点光源にはレーザーやフラッシュなどを使用することがあります。観察対象を平行光の中に置くことで、様々な現象を、ハイスピードカメラで可視化することができるというわけです。

被写体を観測エリアに設置して、平行な光を透過させることで現象を観測します。平行な光は、被写体の密度の違いによって屈折して再び集光して結像します。屈折した光が結像する位置に置かれたナイフエッジで、主光束がカットされシュリーレン像としてカメラに映し出されます。

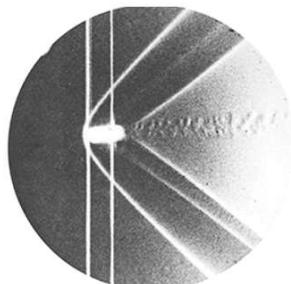


図 1([1] の画像より)

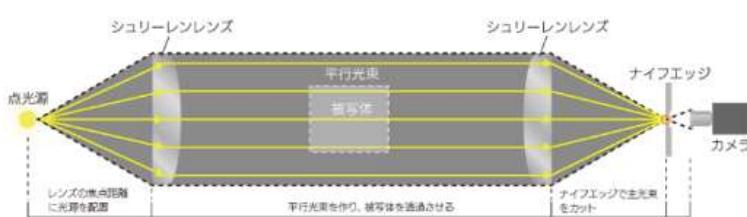


図 2([1] の画像より)

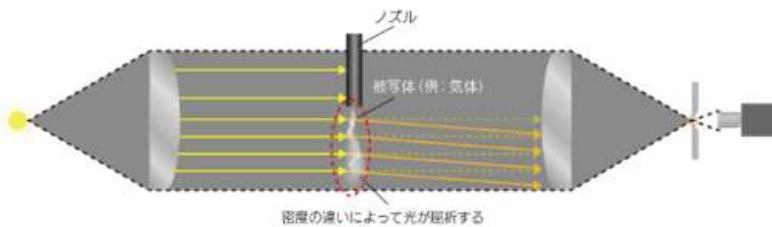


図 3([1] の画像より)

### 1.5.3 シュリーレン法で実験を行うための装置

シュリーレン法を行う代表的な構成として、「凹面鏡 2 面対向式 (図 4)」と「レンズ式 (図 5)」があります。どちらも点光源からの光を平行な光（平行光束）にして観測を行います。

光学アライメント調整が不要で、卓上でシュリーレン現象を観測することができるシステムが提案されているなど、現在でも改良が進んでいます。100 年経っても進化しているってすごいですね。



図 4([1] の画像より)

図 5([1] の画像より)

#### 1.5.4 シュリーレン法におけるナイフェッジの役割

シュリーレン法において、ナイフェッジ(図 6)は微小な密度の変化を可視化するために、重要な役割を担っています。光源から発せられた光が対象物を通過したのち、レンズや凹面鏡を経由してナイフェッジに到達するという流れです。

ナイフェッジは光束の一部を遮断し、対象物によって屈折させられた光のみを透過します。結果として生じる光の干渉パターンを利用して、対象物の周りの空気の流れや温度変化など目に見えない現象を可視化します。

ナイフェッジの役割は光束を遮ることによって、密度変化による光の屈折を強調し、それを像の明暗の差として捉えることです。ろうそくの周りの空気の流れや、アルゴンガスやヘリウムガスなど目に見えない気流のパターンを可視化することが可能になります。かなり重要なポジションですね。

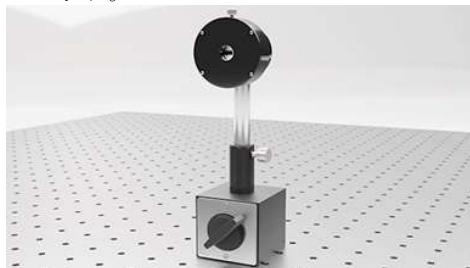


図 6([1] の画像より)

#### 1.5.5 シュリーレン法とシャドウグラフ法の違い

シュリーレン法による密度勾配の可視化では、先ほど説明したナイフェッジの有り無しで、見え方に違いが起こります。ナイフェッジが無い構成をシャドウグラフ法、ナイフェッジが有る構成をシュリーレン法といいます。シャドウグラフ法は、主に粒界を分離し、しきい値を元に画像内の粒子の個数や平均直径、形状などを分析する手法で、粒子の個数、側長、面積、角度、ポリゴン、輝度、形状、円相当径、周囲長等を算出します。

シャドウグラフ法にもさまざまな種類が存在します。高速度カメラと高輝度 LED を組み合わせて時系列的に現象を観測するシステム、短い時間間隔で発光し、高解像度カメラを同期撮影することにより、高速現象の粒径・速度解析を行うシステム、レーザー誘起蛍光を使用することにより、スペックルノイズを抑え、特に微小領域において起こる高速の現象を観測するシステム

などです。特に、最後のシステムは、かなり新しいシステムで、シャドウグラフ法についても、現在も進化が進んでいると言えるでしょう。

シャドウグラフ法は密度勾配の変化（2 次微分）を表すのに対して、シュリーレン法では密度勾配そのもの（1 次微分）を可視化します。ガラス検査などではシャドウグラフ法の可視化が適しており、一方でガス・衝撃波・超音波など連続的な密度勾配の変化にはシュリーレン法による可視化が適しています。結果の見え方にもかなり差が出てきます。

肉眼では到底見えないものを、様々な技術を駆使して可視化・観測する手法を考え、改良を重ねてきた歴史は、物理という学問について考える上での魅力の一つと言えるでしょう。

(81 回生 MH)

### 1.5.6 参考画像

- 1, 溶接時におけるシールドガスの流れ (シールドガス…溶接中に溶融金属と反応を起こさないようなガスをアーケの周辺に流し、溶融金属と空気との接触を断つという役割を持つガス)(図 7)
- 2, 不足膨張噴流の様子 (不足膨張噴流… 噴流内部に発生する膨張波と圧縮波の影響により膨張領域と圧縮領域を持つ非一様な流れ)(図 8)



図 7([5] の画像より)

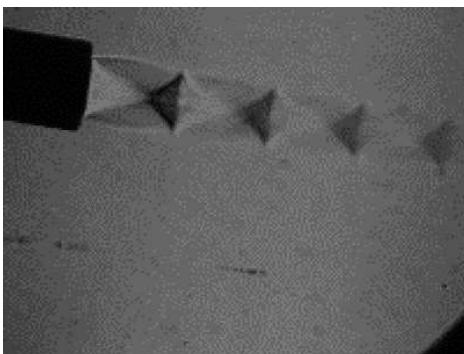


図 8([5] の画像より)

### 1.5.7 参考文献

- [1] <https://www.kk-co.jp/visible/schlieren/>
- [2] <https://site.ngk.co.jp/lab/no246/>
- [3] <https://www.nacinc.jp/analysis/shooting-method/schlieren/>
- [4] <https://www.seika-di.com/measurement/combustion/shadow.html>
- [5] <https://www.mirai-kougaku.jp/laboratory/pages/210226.php>

## 第2章

# 活動紹介

昨年度物理研究部では大きく分けて以下の3つの活動を行っていました。中学1年生を対象とした、中1講義、中学2年生以上を対象とした、課題ゼミと、電磁気学ゼミです。本章では、これらの活動について、担当者や実際に講義を受けた部員が内容も交えて軽く紹介します。

### 2.1 中1講義

#### 概要

ここでは、中1講義について具体的な活動内容と講義を実際に担当した感想を担当者に説明してもらいます。

はじめまして、今年度の中1講義を担当した78回生の伊丹翔治と申します。ここでは今年度の中1講義についての振り返りをしようと思います。

皆さんの中には中1講義って具体的に何をするんだろうと思いなさる方もいらっしゃるかもしれません。物理を勉強するうえで、どうしても数学的知識はある程度必要になってきます。そこで、物理研究部の中1講義では物理を学ぶのに必要な数学的知識を教えることになっています。今年度は、数学的知識をなるべく短期間で身につけた後、物理で使っていくことで慣れていくってもらおうと思ったので、文化祭後～10月末までは数学の講義を、11月頭からは物理の講義を行いました。今年度学習した内容は以下のようになっています。

#### 一年間の講義内容

- ・ 三角比、三角関数
- ・ 関数とはなにか、色々な座標系、ベクトル
- ・ 指数対数、ネイピア数、双曲線関数、逆三角関数
- ・ 微分、近似、偏微分、積分
- ・ 物体の運動、運動の3法則
- ・ 単振動、運動の保存則と $\Delta$ の計算

数学や物理のイメージをつかんでもらうことを特に重視したので、数学的厳密さにはあまりこだわらずに講義を行いました。参加してくれた中一の多くが今も物理研究部に残ってくれていることは講義者としてうれしい限りです。来年は剛体の運動や電磁気学などを教えていこうと考えています。

物理学は対象が自然現象であるため、観察事実に反するところがある理論には修正が求められることがあります。修正といっても、適用範囲を限定したり、あるいは根本の原理を少し見直してみたりすることで上手く観察事実との整合性が取れるといった具合にその形は様々です。物理学は長い年月を経て蓄積されているので、おそらく正しいのだろうと信頼することができ、私を含む初学者は本を読んでその過程を追うだけで学ぶことができます。もちろん、最先端の立場になって観察事実と照合させながら未知の事柄を発見していく楽しさもあるのだろうと想像しますが、まだ高校生である私には、それよりも先人たちがたどってきた過程を追う段階を楽しみたいという思いがあります。

中高の間から仲間と共に物理を自由に学んでいける環境、それこそがこの物理研究部の特徴なのだろうと思います。そしてその環境を継承していくためにも、物理を学ぶハードルをできるだけ下げられる中一講義にはやはり価値があるのだろうと思います。今後もこの部が繁栄することを願って締めの言葉とさせていただきます。

(78回生 たみしょう)

## 2.2 課題ゼミ

### 概要

ここでは、課題ゼミについて具体的な活動内容と講義を初回に担当した担当者に説明してもらいいます。

### 2.2.1 はじめに

78回生の星屋です。ここでは、課題ゼミでの活動紹介をしたいと思います。

課題ゼミでは、事前に中2から高1の部員にそれぞれ、難しい問題が割り当てられています。そして、自分の担当の回までにその問題を解いておき、当日に集まったあまり詳しくない部員にも分かるようにその問題を解くのに必要な知識を講義してから、その問題の解説をします。そこで今回は、僕が担当した電気双極子の問題を実際に講義した時と同じような流れで説明をしようと思います。

まず、電気双極子を理解するのに必要な知識を説明します。

### 2.2.2 必要な知識

最初に万有引力の説明をします。万有引力は、質量  $m$ 、 $M$  の物体が  $r$  だけ離れている時に働く力で、(2.2.1) のように定義されています。

$$\mathbf{F} = -G \frac{mM}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.2.1)$$

また、この万有引力はアインシュタインの相対性理論が完成するまでは、媒質なしで伝わる遠隔作用の力と考えられていました。

次に、クーロン力の説明をします。クーロン力は、電荷  $q$ 、 $Q$  の二つの点電荷が  $r$  だけ離れている時に働く力が (2.2.2) のように定義できるというものです。

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.2.2)$$

(2.2.1) と (2.2.2) を比較すると、比例定数の違いと、2つの物質量の積、 $r$  の-2乗に比例することが共通です。そして、このクーロン力が発見された時、多くの人は万有引力と同様、遠隔作用の力だと考えっていました。しかしファラデーという人だけは、クーロン力は伝わるのに媒質が必要な近接作用の力だと考えました。

そして、この近接作用の考え方をとった時に出てくる疑問が、媒質が何なのかという疑問です。クーロン力は真空でも働くことがわかっていたので、空気が媒質ではないと考えられていきました。そして、ファラデーは見ることも触ることもできない物質が、空間に満たされているはずだと考えました。また、その物質をエーテルと名付けました。

しかし、近接作用の立場では、エーテルの存在を仮定しているだけで、存在すると証明されたわけではなく、どちらが正しいか分かりませんでした。ところが、ヘルツにより電波が発見され

たことで、近接作用の立場の勝利になります。なぜなら、遠隔作用の立場だと、媒質がないので、何もないところには何も起きず、電波を説明できないが、近接作用の立場だと、媒質が揺れることで、電波が発生すると説明できるからです。

これにより、エーテルの正体は分からぬが、実在はすると考えられるようになります。そこで、エーテルが力学的にどのようなものであるか考えられるようになりました。ところが、どうやってもうまくいきませんでした。

そして、エーテルが存在するなら、存在を証明する方法があるはずだとして、地球のエーテルに対する速さを直接的方法で測ることを考えました。それは、地球は太陽のまわりを公転しているから、地球はエーテルに対して運動しているはずで、もし、その運動の速さが測れたら、エーテルの実在を直接示していることになります。そして、図 1 のように電波の進む向きの違いによる、速さの違いを観測することで、地球のエーテルに対する速さを知ることができると考えられました。こうして、得られた結果は  $v = 0$  でした。

つまり、地球はエーテルに対して運動をしておらず、太陽の方が地球に対して運動していることになり、地動説が否定されてしまします。流石に、そんなことを受け入れるわけにはいかず、エーテルという物質は存在しないと結論付けられました。そして、 $v = 0$  ということは進む向きによらず光の速度は一定であるということになります。この事実は、アインシュタインの特殊相対性理論とつながっています。

さて、ここで問題となってくるのは、エーテルが存在しないのなら、電波とは、なんの揺れなのか分からなくなってしまったことです。これを解決したのが、アインシュタインです。空間がなんの物理的性質をもたない単なる空虚そのものであると考えることが間違いで、空間そのものが電波を伝える性質を持っていると考えるほうが自然だと主張しました。これにより、空間そのものが媒質で、クーロン力が働くとされるようになりました。

しかし (2.2.2) の表式だと、万有引力と同様の遠隔作用的な表式になっています。そうすると、近接作用の立場だと、以下の状況の時の違いを表現できません。

1,  $q = 0, Q = 0$  の時、 $F = 0$

2,  $q = 0, Q \neq 0$  の時、 $F = 0$

クーロン力は近接作用の力だとしたら、1 の時は、電荷がないので、空間に何もしないが、2 の時は、電荷があるので、空間をゆがませているはずなため、同じ  $F = 0$  でも、空間の状態は異なっています。

そこで、この違いを表現するために、以下のように分けます。

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \quad (2.2.3)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.2.4)$$

このようにすることで、1,2 の違いを表現できるようになりました。(ここで注意してほしいのが、(2.2.3)(2.2.4) のように分けられたのは、電波の発見より前です。つまり、クーロン力が近接作用の力だとされるより前のことです。あくまで、クーロン力を近接作用の力だと仮定した時に、このように分けた方がいいよねという話です。そして、この考え方の下で完成されたのが、かの有名なマクスウェル方程式です。これも電波の発見より前のことです。)

また、(2.2.4) で定義される  $\mathbf{E}$  は電場といいます。特に時間で変化せず、位置だけで決まる電

場を静電場と呼びます。

静電場のとき、点 A から図 2 のような経路をとおって、点 B まで、点電荷を動かした時に、クーロン力がする仕事を考えます。

$$\begin{aligned} W &= \int_A^B \mathbf{F}(\mathbf{r}) \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{r_A}^{r_B} \mathbf{F}(\mathbf{r}) dr \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

(2.2.5) より、クーロン力がする仕事は経路によらないことがわかるので、クーロン力は位置エネルギーが定義できます。したがって、電場は、クーロン力を電荷（位置と時間に無関係）で割っただけなので、静電場も位置エネルギーに似たものが定義できます。

$$\begin{aligned} \phi &= - \int_{r_0}^r \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

(2.2.6) で定義されている  $\phi$  は電位と呼ばれています。

特に、 $r_0$  が無限遠のとき、(2.2.6) は

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (2.2.7)$$

となります。

これで、電気双極子を理解するのに必要な知識は以上です。

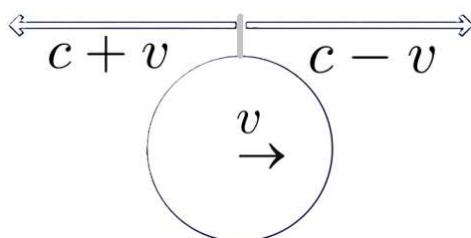


図 1

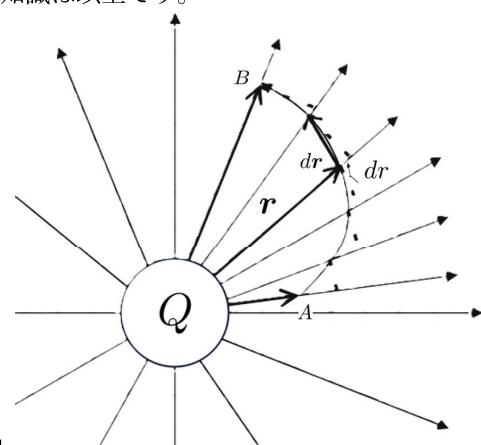


図 2

### 2.2.3 電気双極子

では次に、電気双極子の説明をします。

図のように、正負の等しい電荷をもつ点電荷を、微小距離 s はなしておいた時、この点電荷の対を電気双極子と呼びます。

また、始点が  $-q$  の電荷で、終点が  $+q$  の電荷の微小ベクトルを  $s$  としたとき、

$$\mathbf{p} = qs \quad (2.2.8)$$

を電気双極子モーメントといいます。

今回は、2 次元平面における、電気双極子が作る電場を求めてみようと思います。点 P における電場を求めるには、点電荷 A が点 P につくる電場と点電荷 B が点 P につくる電場を足し合わせたら良いのですが、電場はベクトルなので、単純な足し算で計算できません。そこで、役に立つのが電位です。なぜなら、電位はスカラーなので、単純な足し算で計算でき、電場は、

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\phi \quad (2.2.9)$$

を利用することで、求められます。

方針も決まったのでやっていきましょう。まずは、(2.2.6) より、電位を求めるのに、 $\frac{1}{r_A}, \frac{1}{r_B}$  が出てくることがわかるので、これらを先に近似します。

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_A} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + rs \cos \theta + (\frac{s}{2})^2}} \\ &= \{r^2 + rs \cos \theta + (\frac{s}{2})^2\}^{-\frac{1}{2}} \\ &\doteq (r^2 + rs \cos \theta)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{r} \left(1 + \frac{s \cos \theta}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\doteq \frac{1}{r} \left(1 - \frac{s \cos \theta}{2r}\right) \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

ただし、1 個目の変形で余弦定理を利用し、 $r \gg s$  なので、2 個目の変形で s の二次の項を無視し、4 個目の変形で (2.2.11) を利用しました。

$1 \gg \alpha$  の時に成り立つ近似式

$$(1 + \alpha)^n \doteq 1 + n\alpha \quad (2.2.11)$$

同様に、

$$\frac{1}{r_B} \doteq \frac{1}{r} \left(1 + \frac{s \cos \theta}{2r}\right) \quad (2.2.12)$$

したがって、点 P における電位は

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 - rs \cos \theta + (\frac{s}{2})^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + rs \cos \theta + (\frac{s}{2})^2}} \right\} \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

$$\begin{aligned} &\doteq \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left\{ \left(1 + \frac{s \cos \theta}{2r}\right) - \left(1 - \frac{s \cos \theta}{2r}\right) \right\} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{s \cos \theta}{r} \\ &= \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ &= \frac{pr \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ &= \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

点 P における電場は、(2.2.9) を利用して求められます。電場の x 成分は、

$$\begin{aligned}
 E_x &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} \\
 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \\
 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r^3} \right) \\
 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial x} (p_x x + p_y y) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \frac{d}{dr} \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2} \right\} \\
 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{p_x}{r^3} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \left( -\frac{3}{r^4} \right) \frac{x}{r} \right\} \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3x(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{p_x}{r^3} \right\}
 \end{aligned}$$

したがって、電場  $\mathbf{E}$  は、

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3r(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right\} \quad (2.2.15)$$

つまり、電気双極子が作る電場は、 $r^3$  に反比例することがわかります。

ではここからは、実際の講義では話していないことについて書いていこうと思います。それは、(2.2.13) から (2.2.14) の間にした近似についてです。この近似が成り立つのは、 $r \gg s$  の時と言いましたが、どれほど有効な近似なのでしょうか？(2.2.13) と (2.2.14) のグラフを見比べてみましょう。

図 4、図 5 はそれぞれ、第一象限における (2.2.13) と (2.2.14) のグラフを xz 平面から見たものです。見比べると、原点付近では全然違いますが、ある程度原点から離れると、ほとんど同じであることがわかります。つまり、グラフから、十分遠方であれば、この近似を行っても良いことが確かめられました。

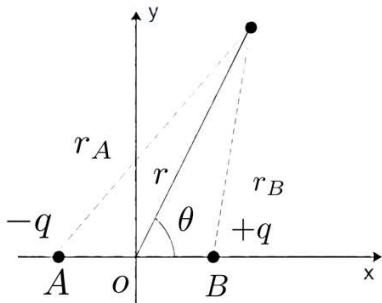


図 3

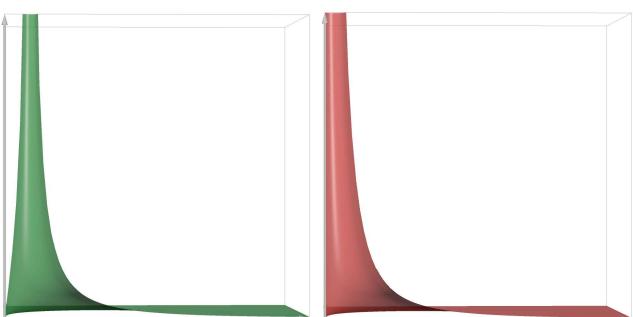


図 4

図 5

## 2.2.4 まとめ

いかがだったでしょうか？おそらく、遠隔作用と近接作用のところいる？と思った人もいるでしょう。ですが、僕は電磁気学を学ぶ上で一番大事なことは遠隔作用と近接作用だと思っています。なぜなら、電磁気学の基本法則を表しているマクスウェル方程式が近接作用の考え方とともに作られたものだからです。また電磁気学の本でも、遠隔作用の表式から近接作用の表式に変え

るというの流れの本がほとんどです。たとえば、(2.2.16) のように。

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.2.16)$$

やはりこれらを理解するには、遠隔作用と近接作用についてある程度の理解は必要になってくるでしょう。もちろん、遠隔作用と近接作用を知らなくても、電気双極子の電場を求めることはできます。しかし、我々は”物理研究部”です。問題が解けるようになることに 1 番の価値を見出してはいけないと思っています。なので、問題を解くのには必要ないけど、電磁気学の理解に繋がる遠隔作用と近接作用について詳しく説明しました。拙い文章でしたがここまで読んでくださりありがとうございました。これを読んで電磁気学に興味を少しでも持っていただけたら幸いです。

(78 回生 HS)

## 2.2.5 参考文献

- [1] 砂川重信 (1993) 「電磁気学の考え方」 岩波書店

## 2.3 電磁気学ゼミ

### 概要

ここでは、電磁気学ゼミについて具体的な活動内容と電磁気学の話を講義を受けた部員に説明してもらいます。

### 2.3.1 はじめに

電磁気学ゼミは主に毎週水曜日に行われてきた活動です。電磁気学を扱うゼミであり、左下で示されているマクスウェル方程式という4つの方程式から電磁気学に関するあらゆる現象を説明することができるということを学びました。マクスウェル方程式とは見ての通り、見ただけでは意味不明な式の集まりです。まあこういうのは物理では結構よくあることで、数式だけ見ると意味不明でも現実世界で想像してみたらそこまで難しくないものです。また、これはマクスウェル方程式の積分形と呼ばれる物であり、右下のような微分形も存在しますがこっちの方が意味不明なので、積分形の方について少し説明したいと思います。

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = Q \quad \text{div } \mathbf{D} = \rho$$

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad \text{div } \mathbf{B} = 0$$

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \quad \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \quad \text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

### 2.3.2 電場に関するガウスの法則

電場に関するガウスの法則とは先ほどの四つの式のうち

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = Q$$

のことでの、ガウスという人が発見しました。この式は電荷の周りにはどのような電束密度  $\mathbf{D}$  (単位面積あたりどのくらいの強さの電束が出ているか) や電場  $\mathbf{E}$  ( $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$  の関係がある。 $\epsilon_0$  は定数なので  $\mathbf{D}$  と  $\mathbf{E}$  は同じものとして捉えることができる) が生じるのかについて述べています。電場というのは空間上に存在する一種の風みたいなものでその強さが強いと電荷を持ったものがより強い力を受けます。具体的には電荷  $Q$  が電場  $\mathbf{E}$  から受ける力  $\mathbf{F}$  は  $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$  で表されます。電束密度というのは電荷  $Q$  から出ている電束というものの面密度のことです。

具体的には図2のようにあるところに任意の曲面(図2では球体ですが)があるとして、その中に電荷  $Q$ (図2では球の中心)があるとします。この任意の曲面のことを曲面に囲まれている立体という意味で閉曲面と言います。球や立方体、円錐なども穴が空いてなければ閉曲面の一種です。図1のようなへんな立体も閉曲面です。)

するとその球面上には何らかの電束密度  $D$ (図では電場  $E$ ) が生じていて、その電束密度の面に対して垂直な成分(図 2 では電場や電束密度は球面に対して垂直なので垂直成分とは電場や電束密度の大きさそのもの)を閉曲面で面積分したもの(図 2 では  $E$  や  $D$  は面上では一様なのでその値は表面積  $4\pi r^2 \times$  電束密度  $D$ )の値が曲面の中に存在する電荷  $Q$  に等しい、とガウスの法則は言っています( $r$  は半径)。つまり

$$4\pi r^2 D = Q$$

なので

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2}, D = \epsilon_0 E \rightarrow E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

で表されます。実はこれはクーロンの法則と呼ばれるもので、聞いたことのある方も多いと思います。

今までの話で球の話をしていたのは球が対称性の高い図形だからで、別に球である必要はなくて図 3 のような変な曲面でもいいです。また電荷が外にあっても問題ありません。この場合は曲面の中にある電荷は 0 なので電束密度の面に対する垂直成分を面積分したものの値は 0 になります。というのもガウスの法則では基本的に曲面から出していく電束をプラスとしてカウントして、入ってくる電束をマイナスとしてカウントするので図 2 では入ってきた電束がそのまま出ていているので、プラスマイナス 0 になるわけです。このようにある曲面を考えた時に電束密度の面に対する垂直成分を面積分したものの値はその曲面の中に存在する電荷  $Q$  に等しいということをガウスの法則は言っています。

とは言ってもわかりづらい話だと思うのでこの式の意味は街灯から出てくる光で例えてみましょう。

図 4 のように二人の人間が電球の周りに立っています。また、左の方の人間は右の人間と電球の真ん中に立つとします。すると左に人間と右の人間が感じる明るさの比はいくらになるでしょう？ 答えは 2:1 ではなく 4:1 です。つまり電球からの距離の二乗に反比例するんですね。

それはなぜかと言うと、図 5 のように円錐状に広がる光で考えてみると、電球からの距離が 2 倍になれば光が照射される面積が 4 倍になるのでその分光の強さが分散されて明るさの比としては 4:1 になるからです。

しかしこの説明は実は少し誤魔化していて、と言うのも光の明るさ × 面積が一定だということを前提としています。これは電球から出ているエネルギー的なものが保存されるということです。ガウスの法則もこれと同じようなことを言っていて、先ほどの例の電球が電荷に、光が電束密度 ( $D$ ) に、エネルギー的なものを電荷量 ( $Q$ ) に置き換えただけです。つまり、電球から光が出るのと同じで、電荷からは電束密度というやつが出てきます。出てくる電束密度を全部まとめた電束密度 × 面積、つまりエネルギー的なものに当たる電荷量 ( $Q$ ) が一定だということをガウスの法則は言っています。

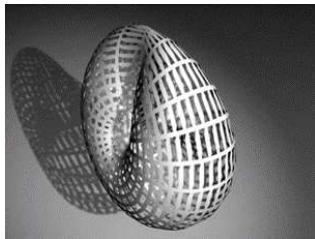


図 1([1] より)

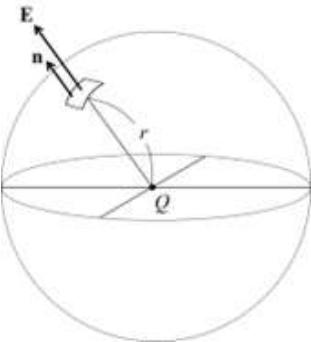


図 2([2] より)

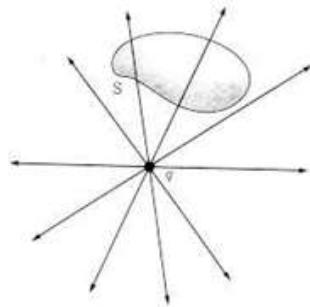


図 3([3] より)

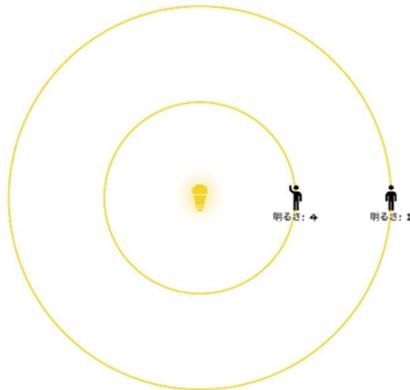


図 4

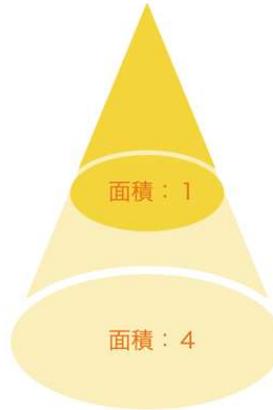


図 5

### 2.3.3 磁場に関するガウスの法則

磁場に関するガウスの法則は

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

に当たる式のことです。電場に関するガウスの法則の磁場バージョンで、電場に関するガウスの法則と考え方は同じです。磁場というのは磁石などの N 極、S 極を持ったものが周辺の空間に生じさせる風のようなもので、他の磁石や鉄などに力を及ぼすことができます。 $\mathbf{B}$  は磁束密度と呼ばれるもので電束密度の磁気バージョンです。また、 $\mathbf{H}$  は磁場で電場  $\mathbf{E}$  に対応しています。さらに電気では  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$  という関係があったのと同じで磁気でも  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  という関係があります。 $\mu_0$  は定数なので  $\mathbf{B}$  と  $\mathbf{H}$  は同じようなものだとみなしてください。それで、磁場に関するガウスの法則はある曲面を考えた時に磁束密度の面に対して垂直な成分を面積分したものが 0 であると言っています。つまり任意の曲面の中に存在する磁荷が 0 であるということを言っています。つまり N 極だけの磁石とか S 極だけの磁石が存在しないということです。ちなみにこの N 極、S 極だけの磁石のことを単磁荷、もしくはモノポールと言います。磁石なども必ず N 極 S 極があるので任意の曲面の中に磁石が入るようにしたとしても、曲面の中にある磁荷は全体としては 0 になります。

### 2.3.4 アンペールの法則

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS$$

アンペールの法則は上の式のことです。マクスウェル方程式は 2 つのガウスの法則で電場と磁場それぞれの基本的な性質について記しており、残りのアンペールの法則と後のファラデーの電磁誘導の法則で電場と磁場が互いに相互作用を及ぼし合っていることを示しています。アンペールの法則は電流が流れるときその周りに磁場が生じるということと空間上に存在している電場が時間変化することで磁場が生じることを述べています。ファラデーの電磁誘導の法則では磁場が時間変化することでその周りに電場が生じるということを言っています。

ガウスの法則では最初に空間に存在する(立体の)任意の閉曲面について考えましたがアンペールの法則ではある空間に存在する任意の(平面の)閉曲線について考えます。閉曲線というのは曲線に囲まれている図形という意味で長方形や正方形(曲線ではありませんが)、円なども閉曲線です。図 6 のようなへんな図形も穴が空いていないので閉曲線です。

それでアンペールの法則では電流が流れるときその周りに磁場が生じるということと空間上に存在している電場が時間変化することで磁場が生じることを述べているわけですが、まず電流が流れるときその周りに磁場が生じるということについて説明します。

図 7,8 のようにあるところに任意の閉曲線  $C$ (図 7 では円)があるとしてそれを貫くように電流が上向きに流れているとするとき、それを取り巻くように閉曲線  $C$  の曲線上には磁場が発生します(図 7 の円は対称性が高いので一様と考えられる)。電流が流れるときその周りに磁場が生じるということをピックアップしてアンペールの法則を書き直すと

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS = I$$

となります。つまり電場が時間変化することを考えないようにします。 $\int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS$  は電流  $I$  と同じなので書き換えることができます。 $\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r}$  は閉曲線の曲線上に生じる磁場の曲線における接線方向の成分を閉曲線で線積分したものです(図 7 では  $H$  が一様と考えられその方向は常に円の接線方向だから  $2\pi r H$ )。これが  $I$  と等しいとアンペールの法則は言っています。だから

$$2\pi r H = I \Leftrightarrow H = \frac{I}{2\pi r}$$

またガウスの法則でも電荷が閉曲面の中にはいる場合について考えたのと同じで、電流  $I$  が閉曲線  $C$  の外側に流れている場合はこの線積分した値というのは 0 になります。これは電流が閉曲線の外側を通っているときに磁場の曲線に対する接線方向成分というのが図で言うと時計回りを正としているからで、反時計回りの成分は負としてカウントされますので電流が閉曲線の外側を流れている場合は必ず反時計回りに生じる磁場と時計回りに生じる磁場が出てきてしまい、結局プラスマイナス 0 になるのです。ちなみにこの磁場が生じる向きというのが反時計回りか時計回りかというのは、右ねじの法則で定められています。(図 9)

次に空間上に存在している電場が時間変化することで磁場が生じることについて説明します。

まず、このことだけに注目してアンペールの法則を書き直すと、

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS$$

となります。具体的に考えてみましょう。

図 10 のように任意の閉曲線(図 10 では円)の中に電束密度  $\mathbf{D}$  が通っているとします。するとその閉曲線の曲線上では電場が生じます。 $\int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS$  は電場を時間で微分したものの面に垂直な成分を閉曲線で囲まれた図形で面積分したものと表している項(図では  $\mathbf{D}$  が面に垂直であるので  $\int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS$  の値は  $\frac{D' - D}{\Delta t} S$  に等しい)です。これが  $\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r}$  の値(図 10 では  $2\pi r H$ )に等しいと言うことをアンペールの法則は言っています( $S$  は閉曲線に囲まれた図形の面積、 $r$  は円である閉曲線の半径)。よって

$$2\pi r H = \frac{D' - D}{\Delta t} S$$

となります。

ここで少し余談ですが発生する磁場はこの磁場によって生じる”磁流”が生じさせる電場が電場の変化を妨げる方向に働きます。磁流というのは電流に対応する概念で実在しません。というのも磁場に関するガウスの法則で述べたように単独で磁荷を持ったものが存在しないからです。電流は単独で電荷をもった電子が流れできているのですが、磁流は”磁子”が存在しないので流れようがないのです。しかし、まだ見つかっていないだけで実は单磁荷(モノポールという)も存在するという考え方の人もいます。そこでもしモノポールが存在したらどうなるのかについて紹介します。

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} &= \int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \\ \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} &= - \int_S \mathbf{i}_m \cdot \mathbf{n} dS - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned}$$

これが单磁荷が存在したとしたときのマクスウェル方程式の第 3 式と第 4 式です。少しファラデーの法則の話をてしまい申し訳ないのですが、もし磁流が存在したなら磁流が流れたところの周りには電場が生じます。これがアンペールの法則に対応しています。その様子を表しているのが

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_S \mathbf{i}_m \cdot \mathbf{n} dS$$

に当たる部分(第一項だけ書いています)でアンペールの法則とは違って-(マイナス)が入っています。これはアンペールの法則では右手の法則に従って磁場が決められた向きに発生していましたが磁流版アンペールの法則ではそれと逆のことが起きているのです。つまり左手の法則に従って電場が発生するのです。そう考えると、アンペールの法則の第二項が発生させる磁場の向きを理解することができます。つまり磁場が発生しているので、ここで磁流を流す素材があれば自動的に磁流が流れます。その向きは磁場の向きと同じなので反時計回りです。円形磁流が生じさせる電場の向きは下向きです。よってこの向きに生じた電場によって電場の変化が妨げられています。

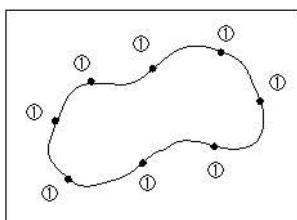


図 6([4] より)

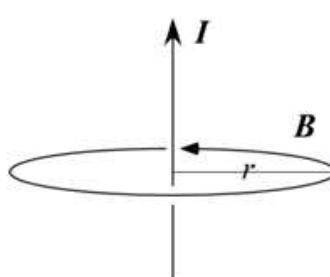


図 7([5] より)

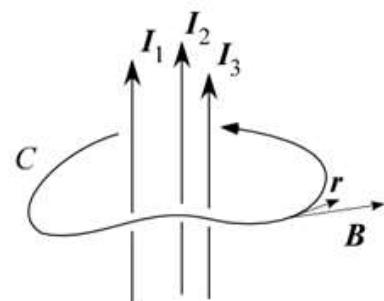


図 8([6] より)

△t 秒後  
電束密度 D (電場 E) → 電束密度 D' (電場 E')

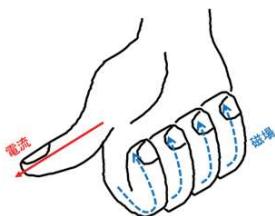


図 9([7] より)

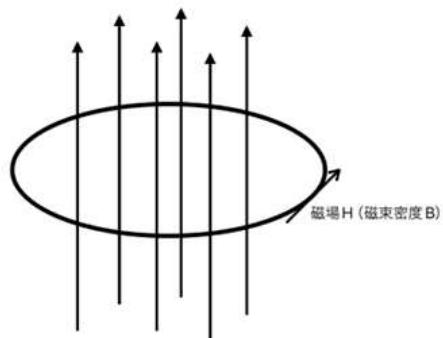


図 10

### 2.3.5 ファラデーの電磁誘導の法則

磁場が時間変化することでその周りに電場が生じるということを言っている法則です。

アンペールの法則の第二項では電場の時間変化が磁場を生み出すということをいってましたが、ファラデーの法則はそれに対応するもので、今度は磁場の時間変化が電場を生み出すと言うことを言っています。それがため式自体もアンペールの法則の第二項と似ていて、

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS$$

となっています。とはいっても、アンペールの法則と違うところもあります。一つ目はファラデーの法則ではアンペールの法則の第一項のような項は存在しません。と言うのも先ほども似たことを書いた気がしますが、電流の磁気バージョンである”磁流”たるもののが存在しないからです。なぜなら電流は電子の流れなので”磁流”では”磁子”の流れです。ところがガウスの法則(磁場のほう)で単独で磁荷を持つものは存在しないとされているので”磁子”たるものは存在せず、よって”磁流”たるものも存在しないからです。ガウスの法則で得られた考えはファラデーの法則にも影響を及ぼしているのです。また、アンペールの法則とは違うところがもう一点あります。それは

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS$$

であって、

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS$$

ではないということ。これはアンペールの法則では発生する磁場はこの磁場によって生じる”磁流”が生じさせる電場が電場の変化を妨げる方向に働くのと同じで、ファラデーの電磁誘導の法則で発生する電場はこの電場によって生じる電流が生じさせる磁場が磁場の変化を妨げる方向はたらくからです。確かに電場によって生じる電流は電場の向きと同じなので、先ほどのアンペールの法則より、この円形電流が生じさせる磁場は図で言うと下向きであり、磁場の変化を妨げていることがわかります。

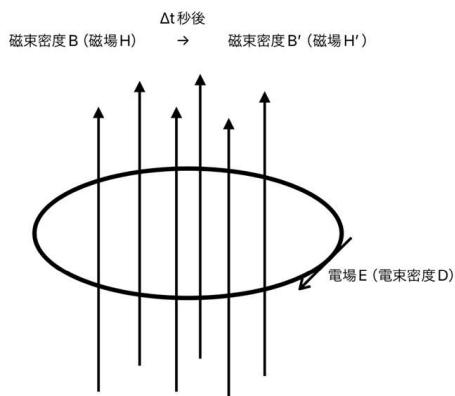


図 11

### 2.3.6 最後に電磁波について

以上マクスウェル方程式について少し説明させていただきました。最後に電磁波について少し説明したいと思います。電磁波を発生させる原理は二つの式です。一つはアンペールの法則の第二項、もう一つはファラデーの法則です。アンペールの法則の第二項では電場の時間変化が磁場を生み出すということをいっていました。また、ファラデーの法則では磁場が時間変化することでその周りに電場が生じるということを言っています。ここで一つ考えて欲しいのは例えば電場が変化したとしたら、電場を時間で微分したものに比例して磁場が生じるわけですが、もしその電場を時間で微分したものに比例する磁場が時間変化するものだったらどうでしょうか。この場合さらにこの時間変化する磁場から電場が生じます。またこの生じた電場が時間変化するものだったらどうでしょう。またここでも磁場が生じます。こんなサイクルが無限に続いていくのが電磁波です。このサイクルが無限に続くためには最初に存在した電場が無限回時間で微分できる関数ならばサイクルが無限に続きます。このようにしてマクスウェルは自身が考えたマクスウェル方程式から電磁波の存在を予言します。そしてその予言は見事に当たりアインシュタインの特殊相対性理論へと繋がっていました。

難しい話ではありましたが最後まで読んでいただきありがとうございました。少しでも物理が日常を記述していると言うことに興味をもっていただければ幸いです。

### 2.3.7 參考文献

- [1] <https://www.lutecium.org/wp-content/blogs.dir/19/files/2017/04/prplan09.jpg>
- [2] <https://physics.thick.jp/Electromagnetics/Section1/figures/fig1-22-1.png>
- [3] [https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcS4b-XjAsP5bw\\_rv4pGdF84NbEZA9nTe8skRdTtxtqCS048b4Sui6ah-3Y9foEutrJzr79Y&usqp=CAU](https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcS4b-XjAsP5bw_rv4pGdF84NbEZA9nTe8skRdTtxtqCS048b4Sui6ah-3Y9foEutrJzr79Y&usqp=CAU)
- [4] <https://itpfdoc.hitachi.co.jp/manuals/3020/3020760570/FIGURE/ZU120370.GIF>
- [5] <https://dora.bk.tsukuba.ac.jp/~takeuchi/?plugin=ref&page=%E9%9B%BB%E7%A3%81%E6%B0%97%E5%AD%A6%2FAmp%C3%A8re%20%E3%81%AE%E6%B3%95%E5%89%87&src=oersted.png>
- [6] <https://dora.bk.tsukuba.ac.jp/~takeuchi/?plugin=ref&page=%E9%9B%BB%E7%A3%81%E6%B0%97%E5%AD%A6%2FAmp%C3%A8re%20%E3%81%AE%E6%B3%95%E5%89%87&src=ampere.png>
- [7] <https://alphakogyo.co.jp/app-def/S-102/wp01/wp-content/uploads/2016/07/denjiyudou3.png>
- [8] [https://note.com/rururira\\_1830/n/n4836b948e532](https://note.com/rururira_1830/n/n4836b948e532)
- [9] 砂川重信 (1993) 「電磁氣學の考え方」 岩波書店

## 第3章

# 寄稿記事

### 3.1 電磁波

#### 概要

ここでは、マクスウェル方程式から、電磁波について考えてみようと思います。

#### 3.1.1 マクスウェル方程式

マクスウェル方程式といえば、(3.1.1)～(3.1.4) の形ですが、

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (3.1.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (3.1.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (3.1.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.1.4)$$

今回は、(3.1.5)～(3.1.8) の電荷や電流が存在しない空間での表式にして、 $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{B}$  だけの式にすることで、これらの性質についてしっかり考えていくこうと思います。

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \quad (3.1.5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (3.1.6)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (3.1.7)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.1.8)$$

#### 3.1.2 式変形

さらに、今回考える空間では、(3.1.9) と (3.1.10) が成り立つとします。(つまり真空)

$$\epsilon_0 \mathbf{D} = \mathbf{E} \quad (3.1.9)$$

$$\mu_0 \mathbf{H} = \mathbf{B} \quad (3.1.10)$$

そうすると、 $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{B}$  だけの式は、

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad (3.1.11)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (3.1.12)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.1.13)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.1.14)$$

となる。

(3.1.13) は、 $\mathbf{E}$  の時間変化が  $\mathbf{B}$  をつくり、(3.1.14) は、 $\mathbf{B}$  の時間変化が  $\mathbf{E}$  をつくることをいっています。つまり、本来なら  $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{B}$  は、電荷と電流からつくられていきましたが、互いに相手をつくるということになったのです。

次に、 $\mathbf{E}$  だけの式をつくります。まずは、(3.1.14) の回転をとって、

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{B} \\ -\Delta \mathbf{E} &= -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

ただし、1 段目から 2 段目の左辺の変形は、(3.1.16) を利用し、右辺の変形は、位置の偏微分と時間の偏微分を入れ替え、2 段目から 3 段目の左辺の変形は、(3.1.11) を利用し、右辺の変形は、(3.1.13) を利用した。

$$\Delta \mathbf{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (3.1.15)$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} \quad (3.1.16)$$

ここで大事なのは、(3.1.3) の  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  がなかったら、(3.1.15) にはなっていなということです。これは、マクスウェルによって追加された変位電流です。このことからもマクスウェルの凄さがうかがえますね。

さて、(3.1.16) の証明ですが、 $x$  成分だけをみると、

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A})_x &= \frac{\partial}{\partial y} (\operatorname{rot} \mathbf{A})_z - \frac{\partial}{\partial z} (\operatorname{rot} \mathbf{A})_y \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_x \\ &= (\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A})_x - \Delta A_x \end{aligned}$$

他成分も同様なので、(3.1.16) になります。

同様に、 $\mathbf{B}$ だけの式をつくると、

$$\begin{aligned} rotrot \mathbf{B} &= \epsilon_0 \mu_0 rot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ grad \ div \mathbf{B} - \Delta \mathbf{B} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} rot \mathbf{E} \\ -\Delta \mathbf{B} &= -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

つまり、

$$\Delta \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad (3.1.17)$$

そして、よく見ると、(3.1.16) と (3.1.17) は、波動方程式 (3.1.18) の形をしています。これにより、電磁波の存在が予言されることになります。また、(3.1.16) と (3.1.17) の導出には、力学の波動方程式の導出と違い、一切の近似を用いていません。つまり、自然界において厳密に成り立つ法則だということです。

$$v^2 \Delta \mathbf{u} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (3.1.18)$$

### 3.1.3 電磁波について

(3.1.16)、(3.1.17) より、 $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{B}$  は

$$\mathbf{E} = e^{(1)} E_0 \sin(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \omega_1 t + \phi_1) \quad (3.1.19)$$

$$\mathbf{B} = e^{(2)} B_0 \sin(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} - \omega_2 t + \phi_2) \quad (3.1.20)$$

と書くことができる。ここで、 $e^{(1)}$  と  $e^{(2)}$  は、それぞれ  $\mathbf{E}$  の方向の単位ベクトル、 $\mathbf{B}$  の方向の単位ベクトルで、 $E_0$  と  $B_0$  はその振幅、 $\mathbf{k}_1$  と  $\mathbf{k}_2$  は波数ベクトルで、 $\omega_1$  はと  $\omega_1$  は角振動数です。まずは、波数ベクトルと角振動数についてです。(3.1.19) を (3.1.16) に代入すると、

$$-e^{(1)}(k_{1x}^2 + k_{1y}^2 + k_{1z}^2) \sin(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \omega_1 t + \phi_1) = -e^{(1)} \epsilon_0 \mu_0 \omega_1^2 \sin(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \omega_1 t + \phi_1)$$

より、

$$\omega_1^2 = \frac{k_{1x}^2 + k_{1y}^2 + k_{1z}^2}{\epsilon_0 \mu_0}$$

つまり、

$$\omega_1 = \frac{k_1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad k_1 = \sqrt{k_{1x}^2 + k_{1y}^2 + k_{1z}^2} \quad (3.1.21)$$

同様に、

$$\omega_2 = \frac{k_2}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad k_2 = \sqrt{k_{2x}^2 + k_{2y}^2 + k_{2z}^2} \quad (3.1.22)$$

次に、 $e^{(1)}$  と  $e^{(2)}$  についてです。これは、(3.1.19) を (3.1.11) に代入すると、

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \\ &= (e_x^{(1)} k_{1x} + e_y^{(1)} k_{1y} + e_z^{(1)} k_{1z}) E_0 \sin(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \omega_1 t + \phi_1) \\ &= \mathbf{e}^{(1)} \cdot \mathbf{k}_1 \sin(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \omega_1 t + \phi_1) = 0 \end{aligned}$$

より、

$$\mathbf{e}^{(1)} \cdot \mathbf{k}_1 = 0$$

同様に、

$$\mathbf{e}^{(2)} \cdot \mathbf{k}_2 = 0$$

つまり、

$$\mathbf{e}^{(1)} \perp \mathbf{k}_1, \mathbf{e}^{(2)} \perp \mathbf{k}_2 \quad (3.1.23)$$

波数ベクトルの向きは、進行方向と一致するので、 $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{B}$  は進行方向に対して垂直な波、つまり横波であることがわかる。

また、(3.1.16)、(3.1.17) と (3.1.18) を比較すると、 $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{B}$  の伝搬速度は、

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (3.1.24)$$

だとわかります。そして、この値を求めるとき光速に非常に近い値になり、さらに光も横波だったことで、光は電磁波であるとされるようになります。これにより、光速をもとに  $\epsilon_0$  が決められるようになります。 $(\mu_0$  は平行電流に働く力の実験によって決められています。) また、 $\epsilon_0$  と  $\mu_0$  は誰からみても変わらない定数なので、これらで決まる光速も変わらないということになります。これがアインシュタインの特殊相対性理論の光速度不变の原理につながります。

さらに、(3.1.19) を (3.1.14) に代入し、左辺の  $x$  成分だけをみると、

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \mathbf{E})_x &= \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} e_z^{(1)} E_0 \sin(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \omega_1 t + \phi_1) - \frac{\partial}{\partial z} e_y^{(1)} E_0 \sin(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \omega_1 t + \phi_1) \\ &= (e_z^{(1)} k_{1y} - e_y^{(1)} k_{1z}) E_0 \cos(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \omega_1 t + \phi_1) \end{aligned}$$

他成分も同様なので、

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{k}_1 \times \mathbf{e}^{(1)} E_0 \cos(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \omega_1 t + \phi_1)$$

よって、

$$\mathbf{k}_1 \times \mathbf{e}^{(1)} E_0 \cos(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \omega_1 t + \phi_1) = \mathbf{e}^{(2)} \omega_2 B_0 \cos(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} - \omega_2 t + \phi_2)$$

これがどんな  $\mathbf{x}$ 、 $t$  でも成り立つためには、

$$\mathbf{k}_1 \times \mathbf{e}^{(1)} E_0 = \mathbf{e}^{(2)} \omega_2 B_0 \quad \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 \quad \omega_1 = \omega_2 \quad \phi_1 = \phi_2 \quad (3.1.25)$$

である必要があります。つまり、 $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{B}$  は同じ波数、同じ進行方向、同じ角振動数、同じ位相であるということです。ここで、 $e^{(3)}$  は  $\mathbf{k} = k e^{(3)}$  で定義される電磁波の進行方向の単位ベクトルです。(3.1.22) より、

$$\mathbf{e}^{(2)} = \mathbf{e}^{(3)} \times \mathbf{e}^{(1)}$$

したがって、

$$\mathbf{e}^{(1)} \perp \mathbf{e}^{(2)} \quad (3.1.26)$$

(3.1.22),(3.1.24),(3.1.25) より、図 1 のようになります。物理的なイメージとしては、 $\mathbf{E}$  が  $\mathbf{B}$  をつくり、できた  $\mathbf{B}$  が  $\mathbf{E}$  をまたつくるというサイクルを繰り返してできています。(図 2)

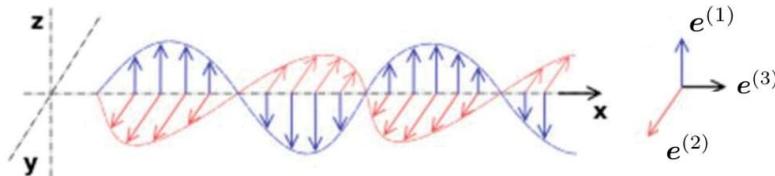


図 1([1])

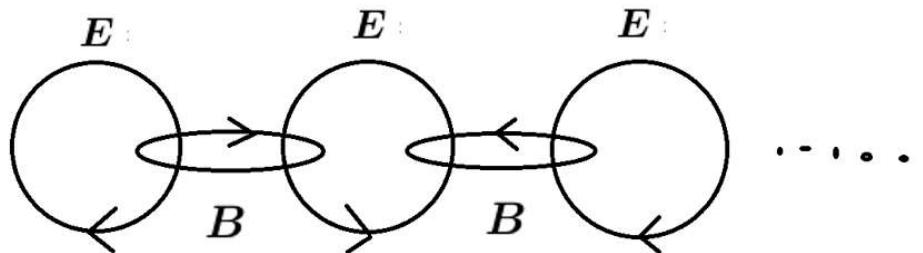


図 2

### 3.1.4 最後に

いかがだったでしょうか。今回は、マクスウェル方程式から電磁波について書きました。電磁波の話は物理学で一番好きな話です。なぜなら、マクスウェル方程式から、一切の近似なしでたゞ式変形していくだけで、波動方程式の形の式になり、電磁波の存在を示すことになり、そこから光とは関係がなさそうな電磁気学が、実は非常に関係が深いことがわかったり、アインシュタインの特殊相対性理論の光速度不变の原理にも繋がることになるからです。しかも観測的事実に基づいてわかるこことではなく、理論的に導かれています。こういうところが物理学の面白いところだなあとつくづく思います。読みにくい文章だったかもしれません、ここまで読んでくださりありがとうございました。

(78 回生 HS)

### 3.1.5 参考文献

- [1] <https://monkeymedia.vcdn.com/upload/web/img/1-buc-xa-dien-tu-la-gi.png>
- [2] <http://www.yamamoto10.jp/yamamoto/lecture/2007/p1/14th/html/node3.html>
- [3] 砂川重信 (1993) 「電磁気学の考え方」 岩波書店

## 3.2 ふりこの軌道

### 概要

ふりこは振れ角が  $\frac{\pi}{2}$  を超えたとき、糸がたるんでしょうか、そのまま1週することが知られています。ここでは、糸がたるんってしまった時のふりこの軌道について考えてみようと思います。

### 3.2.1 問題設定

まずは、糸の長さを  $r$  とし、座標の設定ですが、原点を糸がたるんだ瞬間の位置とし、糸がたるんだ瞬間の角度  $\theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) と、円軌道に戻ってくる時の角度  $\phi$  を図1のようにします。また、糸がたるんだ瞬間の速さを  $v$  とします。

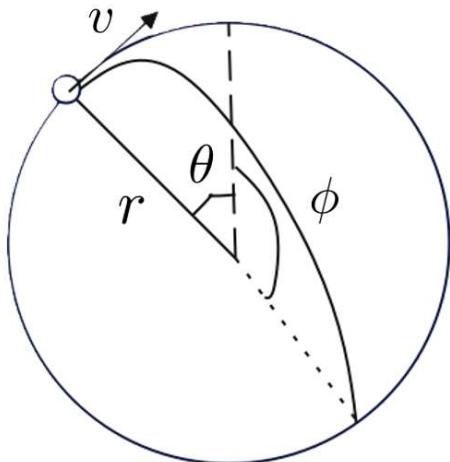


図 1

### 3.2.2 計算

まずは、たるむということは、糸の張力が 0 なので、円運動の運動方程式より、

$$m \frac{v^2}{r} = mg \cos \theta$$

したがって、

$$v = \sqrt{gr \cos \theta} \quad (3.2.1)$$

また、 $v$  の向きは、接線方向なので、たるんだあとは、初速  $v$  で角度  $\theta$  の向きに斜方投射するのと同じです。

$$\begin{cases} v_x = v \cos \theta \\ v_y = v \sin \theta \end{cases} \quad (3.2.2)$$

よって、

$$\begin{cases} x = vt \cos \theta \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v \sin \theta \end{cases} \quad (3.2.3)$$

(3.2.3) の第 1 式より、

$$t = \frac{x}{v \cos \theta} \quad (3.2.4)$$

(3.2.4) を (3.2.3) の第 2 式に代入すると、放物線の方程式は、

$$y = -\frac{gx^2}{2v^2 \cos^2 \theta} + x \tan \theta \quad (3.2.5)$$

ここで、(3.2.5) に (3.2.1) を代入して、

$$y = -\frac{x^2}{2r \cos^3 \theta} + x \tan \theta \quad (3.2.6)$$

なんと  $g$  によらないことが分かります。そして、円軌道に戻ってくるときは、

$$(x - r \sin \theta)^2 + (y + r \cos \theta)^2 = r^2 \quad (3.2.7)$$

( $\because$  中心が  $(r \sin \theta, -r \cos \theta)$  で、半径が  $r$ )

(3.2.7) に (3.2.6) を代入して、

$$\begin{aligned} (x - r \sin \theta)^2 + (y + r \cos \theta)^2 &= x^2 - 2rx \sin \theta + r^2 \sin^2 \theta + y^2 + 2ry \cos \theta + r^2 \cos^2 \theta - r^2 \\ &= x^2 - 2rx \sin \theta + y^2 + 2ry \cos \theta + r^2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 1) \\ &= x^2 - 2rx \sin \theta + \left(-\frac{x^2}{2r \cos^3 \theta} + x \tan \theta\right)^2 + 2r \cos \theta \left(-\frac{x^2}{2r \cos^3 \theta} + x \tan \theta\right) \\ &= x^2 - 2rx \sin \theta + \frac{x^4}{4r^2 \cos^6 \theta} - \frac{x^3 \tan \theta}{r \cos^3 \theta} + x^2 \tan^2 \theta - \frac{x^2}{\cos^2 \theta} - 2rx \sin \theta \\ &= \frac{x^4}{4r^2 \cos^6 \theta} - \frac{x^3 \tan \theta}{r \cos^3 \theta} + \left(1 + \tan^2 \theta - \frac{1}{\cos^2 \theta}\right)x^2 \\ &= x^3 \left(\frac{x - 4r \cos^3 \theta \tan \theta}{4r^2 \cos^6 \theta}\right) = 0 \\ &= x^3 \left(\frac{x - 4r \cos^2 \theta \sin \theta}{4r^2 \cos^6 \theta}\right) = 0 \end{aligned}$$

したがって、

$$x = 0, 4r \cos^2 \theta \sin \theta \quad (3.2.8)$$

$x = 0$  は糸がたるんだ瞬間のことなので、円軌道に戻ってくるのは、 $x = 4r \cos^2 \theta \sin \theta$  の時です。ここで、ふりこの中心を原点に変えます。すると、

$$\begin{aligned} r \sin \phi &= x \\ &= 4r \cos^2 \theta \sin \theta - r \sin \theta \\ &= r \sin \theta (4 \cos^2 \theta - 1) \\ &= r \sin \theta \{4(1 - \sin^2 \theta) - 1\} \\ &= r \sin \theta (3 - 4 \sin^2 \theta) \\ &= r(3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta) \\ &= r \sin 3\theta \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

また、

$$\begin{aligned}
 r \cos \theta &= y \\
 &= -\frac{(4r \cos^2 \theta \sin \theta)^2}{2r \cos^3 \theta} + 4r \cos^2 \theta \sin \theta \tan \theta + r \cos \theta \\
 &= -\frac{16r^2 \cos^4 \theta \sin^2 \theta}{2r \cos^3 \theta} + 4r \cos \theta \sin^2 \theta + r \cos \theta \\
 &= -8r \cos \theta \sin^2 \theta + 4r \cos \theta \sin^2 \theta + r \cos \theta \\
 &= r \cos \theta (1 - 4 \sin^2 \theta) \\
 &= r \cos \theta \{1 - 4(1 - \cos^2 \theta)\} \\
 &= r \cos \theta (4 \cos^2 \theta - 3) \\
 &= r(4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) \\
 &= r \cos 3\theta
 \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

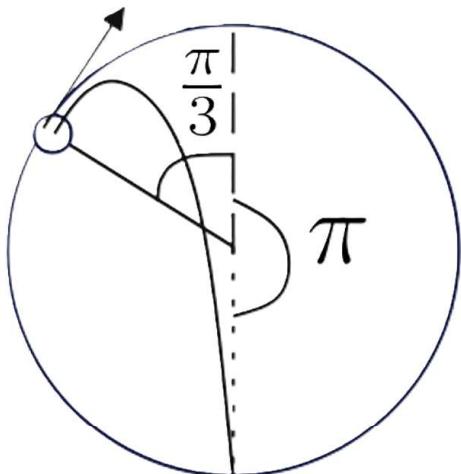
よって、

$$\begin{cases} \sin \phi = \sin 3\theta \\ \cos \phi = \cos 3\theta \end{cases}$$

したがって、

$$\phi = 3\theta \tag{3.2.11}$$

なんと  $\theta$  と  $\phi$  にはこんなにきれいな関係があることがわかりました。また、(3.2.11) から、 $\theta = \frac{\pi}{3}$  の時、 $\phi = \pi$  になり、図2のようになります。



### 3.2.3 まとめ

いかがだったでしょうか。途中、円の方程式に代入するときは、ものすごい4次方程式になるんじゃないかなとひやひやしましたが、最終的にはうまく項が消えてくれて、非常に簡単な形になりました。そしてさらにすごいのが角度の  $\theta$  と  $\phi$  が (3.2.11) のような美しい関係があることにはびっくりしました。ただ部誌には、さもこの関係が分かっていたかのように式変形していますが、実際は  $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$  の時を考えて、 $(x, y)$  を求めると、なんか3倍になるんじゃね？ と思い、なんか式変形したら三倍角の公式と同じ形になりそうだな～という感じに流れがありました。ま

た、途中式変形の文字が小さくなってしまい申し訳ないですが、tex で式を折り返す方法が分からず、文字を小さくするという荒業をするしかありませんでした。それでは、間違っているところがあったかもしれません、ここまで読んでくださりありがとうございました。

(78回生 HS)

### 3.3 2種類の方法による London 方程式の導出

#### 概要

この記事では超伝導の理論について書いてみました。いろんな方面での応用が期待されている超伝導ですが、その理論のほうも勉強してみると楽しいので、この記事を読んで雰囲気だけでも味わっていただけたら幸いです！

#### 3.3.1 はじめに

今回は超伝導体の磁気応答を表す London 方程式の導出を 2種類紹介する。一つ目は、金属電子運動の古典的な理論であるドルーデ理論における電子の運動方程式から出発する方法である。二つ目は、ランダウ理論における秩序パラメータとして「マクロ」波動関数を導入したうえで、解析力学の変分法により GL（ギンツブルグ－ランダウ）方程式を導き、秩序パラメータの形を決めて London 方程式が導出されるというものである。

#### 3.3.2 超伝導とは

超伝導はいわゆる 2次相転移現象で、転移温度  $T_c$  より上では常伝導状態、すなわち普通の金属であるが、それより下では超伝導状態である。これは永久磁石が  $T_c$ （キュリー温度）より上では通常の金属であることと同様である。

金属をとても低い温度に冷やすと超伝導状態になるとよく聞くが、BCS 理論によるとこの時金属（超伝導体）中ではどのようなことが起こっているのか、簡単に説明しておく。

普通、物質に電気が流れているとき、物質の原子核（正の電荷）が並んで結晶が構成されていて、その中を多数の電子が動き回っている。そしてその結晶格子を負の電荷である電子が通過すると、格子に引力を与えて格子がゆがみ、元の形に戻ろうとしたとき格子が振動してしまう。この「格子振動」が電気抵抗の原因である。ここで、結晶格子中を 1 個の電子が通過したとする。すると、そこはほかの場所より原子核が集まった状態になるので、相対的に正電荷の濃度が高くなる。するともう 1 個の電子は、そこから引力を受けて加速される。この時、最初の電子は引力によりエネルギーが減少するが、代わりにもう一方の電子はエネルギーを受け取っている。つまり、トータルでは電子の流れである電流に抵抗が働くことになる。これが超伝導状態である。本来お互いが負の電荷で引力が働くはずの電子同士が、このようにして引力を及ぼしあう事でできる電子の対を Cooper 対という。Cooper というのは BCS 理論を完成した人物の一人である（BCS の”C”）。しかしこのクーパー対の引力は小さいので、物質の内部エネルギーが大きいとクーパー対をなすことができない。そのため、低温にしないと超伝導状態が現れない。

実際は、電子は量子力学に従って振舞うし、きちんと理論で説明するためにはかなり複雑な物理が必要になる。具体的に言うと、格子振動を介した電子の相互作用を含めた電子の正準変換されたハミルトニアンは、Fermi 粒子の生成、消滅演算子を  $\hat{c}^\dagger, \hat{c}$  として、

$$\widehat{H}' = \widehat{H}_0 + \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\sigma} \sum_{\sigma'} \sum_{\mathbf{k}'} \sum_{\sigma''} \sum_{\sigma'''} \sum_{\mathbf{q}} \frac{|g(\mathbf{q})|^2 \hbar \omega_{\mathbf{q}}}{(\epsilon_{\mathbf{k}'} - \epsilon_{\mathbf{k}' + \mathbf{q}})^2 - (\hbar \omega_{\mathbf{q}})^2} \hat{c}_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} \hat{c}_{\mathbf{k}'\sigma''}^{\dagger} \hat{c}_{\mathbf{k}' + \mathbf{q}\sigma'''}^{\dagger} \hat{c}_{\mathbf{k} - \mathbf{q}\sigma'} + \dots$$

のように展開できて、Coulomb 斥力ポテンシャルを含めた全電子間のポテンシャルの行列要素について、次の不等式を満たすときに電子間に引力相互作用が現れる。

$$U_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega) |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|} + \frac{|g(\mathbf{k} - \mathbf{k}')|^2 \hbar \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}}{(\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{k}'})^2 - (\hbar \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'})^2} < 0$$

次に、超伝導の主な四つの特徴を述べておく。これらはいずれも実験的に確かめられることがある。一つ目は超伝導体の内部には抵抗ゼロで電流が流れ、超伝導体は完全伝導性を示すことである。理論的に言うと超伝導体の内部では電場  $E$  がゼロである。二つ目は完全反磁性である。すなわち超伝導体の内部では磁場  $B$  も侵入できず、ゼロになる。これはマイスナーー・オクセンフェルト効果と呼ばれる。その様子を図 1 に示す。三つ目は、磁束の量子化である。磁場中に置かれた超伝導体のドーナツリングを考えると、超伝導体の中には磁場は侵入できないが、ドーナツの穴の中には存在できる。ところが、この穴の中の磁束は量子化、すなわち離散的な値をとることしかできず、 $\Phi_0 = \frac{h}{2e} = 2.1 \times 10^{-15} Tm^2$  の整数倍という値をとる。ドーナツリングの大きさによらず磁束の量子化は起こるので、超伝導は電子の量子的な性質がマクロな視点でも顕著に表れるという、巨視的量子現象であるともいえる。四つ目の特徴は超伝導電子のトンネル効果であり、ジョセフソン効果と呼ばれる。

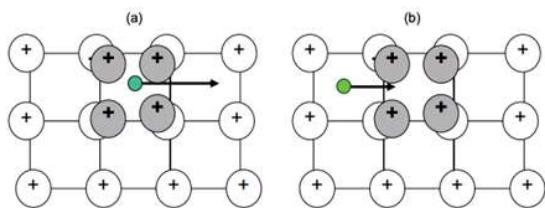


図 1 クーパー対

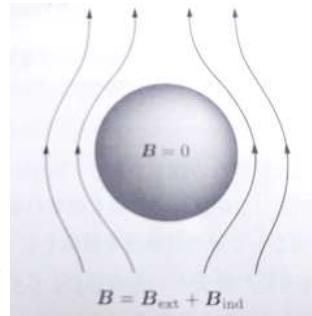


図 2([1] より) 完全反磁性の様子

### 3.3.3 London 方程式の導出 その 1

超伝導について先ほど述べた一つ目と二つ目の特徴、すなわち完全伝導性と完全反磁性を古典的な物質の電磁気学で考察しよう。超伝導電子（超伝導体におけるキャリア）の数密度を  $n_S$  電荷を  $q_S$ 、質量を  $m_S$ 、速度を  $v_S$  とする。超伝導電流密度  $j_S$  は

$$j_S = q_S n_S v_S \quad (3.3.1)$$

と書ける。ここでドルーデ理論によると、電子は金属中の何かに単位時間当たり  $\tau^{-1}$  確率で散乱され、散乱されない限り外力のニュートンの運動方程式に従って運動する。したがって、ある時刻  $t$  で電子の運動量を  $\mathbf{p}(t)$  とすると、時刻  $t + \Delta t$  における電子の運動量は、外力  $\mathbf{f}(t)$  の下でのニュートンの運動方程式  $\mathbf{f} = d\mathbf{p}/dt$  を用いると、 $\mathbf{p}(t + \Delta t) = \mathbf{p}(t) + \mathbf{f}(t)\Delta t$  ただし、散乱のた

め、このように加速される確率は  $(1 - \Delta t/\tau)$  で与えられるから、

$$\mathbf{p}(t + \Delta t) = (1 - \frac{\Delta t}{\tau})\mathbf{p}(t) + \mathbf{f}(t)\Delta t$$

これを変形して両辺を  $\Delta t$  で割り、 $Deltat \rightarrow 0$  で、

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\mathbf{p}(t) + \mathbf{f}(t)$$

で、金属中の電子の運動方程式を得る。今回では外力は  $\mathbf{f}(t) = q_S \mathbf{E}$  で、完全伝導性の場合を考えるので、散乱なし ( $\tau^{-1} = 0$ ) として、

$$m_S \frac{d\mathbf{v}_S}{dt} = q_S \mathbf{E} \quad (3.3.2)$$

(3.3.1) と (3.3.2) より

$$\frac{d\mathbf{j}_S}{dt} = \frac{n_S q_S^2}{m_S} \mathbf{E} \quad (3.3.3)$$

(3.3.3) の両辺の  $\text{rot}$  をとって、マクスウェル方程式  $\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  (電磁誘導の法則) を使うと、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \text{rot} \mathbf{j}_S + \frac{n_S q_S^2}{m_S} \mathbf{B} \right) = 0 \quad (3.3.4)$$

となり、完全伝導性を表す式が導かれた。

ここで、超伝導の本質は実は完全伝導性ではなく完全反磁性であることを説明しておく。 $T_c$  以上で外場を印加してから試料を冷却しても（磁場中冷却）、先に冷却してから外場を試料に印加しても（ゼロ磁場冷却）、完全反磁性は観測されることが知られている。完全伝導性を仮定すると、ゼロ磁場冷却の場合、最初に試料の内部で  $\mathbf{B} = 0$  であれば、徐々に外場を増加させると、(3.3.4) から分かるように、それによって生じる誘導起電力によって表面に抵抗ゼロの電流が生じ、外場が変化している間内部は  $\mathbf{B} = 0$  を保ち得るが、磁場中冷却の場合は誘導起電力も電場も生じないので、内部で  $\mathbf{B} = 0$  を保つための電流が生じず、完全反磁性を示さない。つまり、完全伝導性を超伝導の本質としても、もう一つの特徴である完全反磁性は示されない。

一方完全反磁性から完全伝導性は導かれる。図 2 にその様子を示す。内部で  $\mathbf{B} = 0$  を保つために超伝導体の表面に超伝導電流密度  $j_S$  が流れ、超伝導体が一つの電磁石のようにふるまう。その結果生じた  $\mathbf{B}_{ind}$  は試料内部で  $\mathbf{B}_{ext} + \mathbf{B}_{ind} = 0$  となって外場  $\mathbf{B}_{ext}$  を打ち消している。また、試料外部にも  $\mathbf{B}_{ind}$  は生じており、 $\mathbf{B}_{ext} + \mathbf{B}_{ind}$  は図 1 の磁場  $\mathbf{B}$  と等しくなっている。完全反磁性より、 $\mathbf{B}_{ind}$  は減衰しないので  $j_S$  も減衰しない。すなわち完全伝導性を示す。以上が超伝導の本質は完全反磁性であることの説明である。

さて、(3.3.4) に戻ろう。ゼロ磁場冷却の場合、外場を印加する前について、渦電流は生じておらず、内部の磁場も 0 であると考えて、(3.3.4) を時間で積分した時の積分定数を 0 とする。磁場中冷却の場合も、超伝導体の磁化が冷却過程によらないことを考えれば同じように積分定数が 0 になることが（ある程度直感的だが）分かる。そこで超伝導の磁気応答を

$$\text{rot} \mathbf{j}_S + \frac{n_S q_S^2}{m_S} \mathbf{B} = 0 \quad (3.3.5)$$

としよう。これが London 方程式である。3.3.5 で示すように、この方程式から完全反磁性が確かめられる。

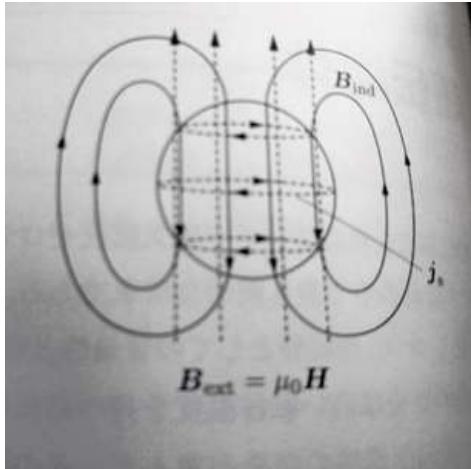


図 3([1] より)

外場  $B_{ext}(\rightarrow)$  に対する超伝導体の応答  $B_{ind}(\rightarrow)$   
 $j_s(\rightarrow)$  は超伝導電流密度

### 3.3.4 London 方程式の導出 その 2

#### ランダウモデルによる相転移理論

2 つ目の London 方程式の導出の前に、相転移における秩序パラメータと自由エネルギーの展開について理解しておく必要があるので、それについて簡単に説明する。超伝導をはじめとして強磁性や気体・液体・固体相転移などの相転移現象を記述する際に、異なる相を区別するための指標となるマクロな変数を秩序パラメータとして導入し、その変化をもって相転移現象を特徴づけることができる。また、高温相で 0、低温相で有限の値を持つものを秩序パラメータとして選ぶのが一般的である。例えば、液体・固体相転移における秩序パラメータは液体と固体の密度差が用いられ、強磁性体について記述する際は、秩序パラメータは磁化  $M$  が用いられる。次に自由エネルギーの展開について説明する。秩序パラメータを  $\eta$ 、自由エネルギーは温度と秩序パラメータの関数であるとして  $G(T, \eta)$  と書き、相転移温度  $T_c$  付近で秩序パラメータが十分小さいとすると、自由エネルギーは  $T_c$  近傍において

$$G(T, \eta) = G(T, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(T) \eta^n \quad (3.3.6)$$

のように展開できるだろう。このように展開することで、自由エネルギーの最小値をとるときの秩序パラメータの値を求めて相の状態を判別できる。これがランダウ理論と呼ばれる考え方である。

## ギンツブルグ－ランダウ理論

ギンツブルグ－ランダウ理論とは超伝導相転移をマクロに記述する理論である。この理論では秩序パラメータとして複素数の「マクロ」波動関数  $\psi$

$$|\psi|^2 = n_S \quad (3.3.7)$$

を用いる。(3.3.7) のような波動関数の決め方は、量子力学における粒子の存在確率を、(存在確率と対応している) 数密度というマクロな量に対応させて、本来絶対値の2乗が粒子の存在確率を示す波動関数をマクロな波動関数にしたものだといえる。超伝導状態では、磁束の量子化に代表されるように超伝導体全体が巨視的量子状態であるので、ただ一つの波動関数  $\psi$  を用いて記述できることを考えれば、秩序パラメータとして「マクロ」波動関数を用いることは妥当であるといえる。もちろん常伝導状態では量子状態は現れないため、 $\psi = 0$  である。

波動関数を  $\psi \rightarrow -\psi$  としても対象の物理的な状態は変化しないので、自由エネルギーも変化しない。つまり、(3.3.6)において秩序パラメータの奇数乗の項は現れない。したがって、常伝導状態から超電導状態への自由エネルギー密度の差は、

$$\Delta g = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \psi^{2n} \approx -\alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 \quad (3.3.8)$$

と書ける。ここで、秩序パラメータの4乗の項まで展開を行い、 $a_2 = -\alpha, a_4 = \frac{\beta}{2}$  と書いた。

さて、超伝導の本質は完全反磁性であったことを思い出そう。すなわち超伝導では  $B_{ind}$  が重要であり、磁場  $\mathbf{B}$  に対応するベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  を導入する必要がある。ベクトルポテンシャルの導入は自動的に  $\psi$  の空間微分（変化） $\nabla\psi$  をともなう（後述）。秩序パラメータの空間変化によって生じるエネルギーは、電磁場中における運動量演算子が  $\hat{p} = -i\hbar\nabla - q_S \mathbf{A}$  であることを考えて、

$$\frac{|\hat{p}\psi|^2}{2m_S} = \frac{1}{2m_S} |[-i\hbar\nabla - q_S \mathbf{A}]\psi|^2 = \frac{\hbar^2}{2m_S} |\nabla\psi - \frac{iq_S}{\hbar} \mathbf{A}\psi|^2$$

と書ける。さらに磁場  $\mathbf{B}$  のエネルギー  $(\text{rot } \mathbf{A})^2/(2\mu_0)$  を (3.3.8) に加えて、超伝導体全体の空間で積分することで、最終的な常伝導状態からの自由エネルギー差は

$$\Delta G = \int d\mathbf{r} \left\{ -\alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \frac{(\text{rot } \mathbf{A})^2}{2\mu_0} + \frac{\hbar^2}{2m_S} |\nabla\psi - \frac{iq_S}{\hbar} \mathbf{A}\psi|^2 \right\} \quad (3.3.9)$$

であることが分かる。

## GL 方程式と London 方程式の導出

自由エネルギー差の式 (3.3.9) から、秩序パラメータについての方程式、GL 方程式を得る。そのためには解析力学で登場する変分法を用いる。すなわち、 $\psi$  と  $\mathbf{A}$  をそれぞれ  $\delta\psi, \delta\mathbf{A}$  だけ変化させた際に、 $\delta(\Delta G) = 0$  となる条件を求める。面倒な計算であるが、順を追って導出していく。今回はベクトルポテンシャルについての変分した結果の方程式の導出のみを示す。というのは、London 方程式は GL 方程式のうちベクトルポテンシャルの変分により導かれる方の方程式から

導出されるためである。

$\mathbf{A}$  を  $\delta\mathbf{A}$  だけ変化させたとして、(3.3.9) の右辺第 3 項の変分を求めよう。

$$\begin{aligned}\delta(\text{rot}\mathbf{A})^2 &= \delta(\mathbf{B}^2) \\ &= 2\mathbf{B}\delta\mathbf{B} \\ &= 2\mathbf{B}\text{rot}\delta\mathbf{A} \\ &= 2\{\delta\mathbf{A}\text{rot}\mathbf{B} + \text{div}(\delta\mathbf{A} \times \mathbf{B})\}\end{aligned}$$

最後の式変形でベクトル解析の公式  $\text{div}(\mathbf{V} \times \mathbf{W}) = \mathbf{W} \cdot \text{rot}\mathbf{V} - \mathbf{V} \cdot \text{rot}\mathbf{W}$  を用いた。ここで、 $\text{div}(\delta\mathbf{A} \times \mathbf{B})$  の項は、(9) において空間全体で体積積分すると発散定理より

$$\int \text{div}(\delta\mathbf{A} \times \mathbf{B}) d\mathbf{r} = \int_S (\delta\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S}$$

であるが（ここで右辺の面積分における閉曲面  $S$  は超伝導体表面）、外場一定のとき超伝導体表面  $S$  において、ベクトルポテンシャルは外場との境界条件に従って一定の値を持つので、 $\delta\mathbf{A} = 0$  となって、最終的には  $\text{div}(\delta\mathbf{A} \times \mathbf{B})$  の項はゼロとなる。したがって (9) 右辺の第 3 項の変分は

$$\delta \int \frac{(\text{rot}\mathbf{A})^2}{2\mu_0} d\mathbf{r} = \int \frac{\delta\mathbf{A}\text{rot}\mathbf{B}}{\mu_0} d\mathbf{r} = \int \mathbf{j}_s \delta\mathbf{A} d\mathbf{r} \quad (3.3.10)$$

となる。マクスウェル方程  $\text{rot}\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j}_s$ （アンペールの法則）を用いた。

次に、第 4 項の変分を計算しよう。今回  $\psi$  の変分はないことに注意して計算すると、

$$\begin{aligned}\delta|\nabla\psi - \frac{iq_S}{\hbar}\mathbf{A}\psi|^2 &= \delta\{(\nabla\psi - \frac{iq_S}{\hbar}\mathbf{A}\psi)(\nabla\psi^* + \frac{iq_S}{\hbar}\mathbf{A}\psi^*)\} \\ &= \delta(\nabla\psi - \frac{iq_S}{\hbar}\mathbf{A}\psi) \cdot (\nabla\psi^* + \frac{iq_S}{\hbar}\mathbf{A}\psi^*) + (\nabla\psi - \frac{iq_S}{\hbar}\mathbf{A}\psi) \cdot \delta(\nabla\psi^* + \frac{iq_S}{\hbar}\mathbf{A}\psi^*) \\ &= -i\frac{q_S}{\hbar}\delta\mathbf{A} \cdot \psi(\nabla\psi^* + \frac{iq_S}{\hbar}\mathbf{A}\psi^*) + (\nabla\psi - \frac{iq_S}{\hbar}\mathbf{A}\psi) \cdot i\frac{q_S}{\hbar}\delta\mathbf{A}\psi^* \\ &= \left\{ \frac{q_S}{\hbar}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) + 2\left(\frac{q_S}{\hbar}\right)^2\mathbf{A}|\psi|^2 \right\} \delta\mathbf{A}\end{aligned}$$

よって、第 4 項の変分は

$$\delta \int d\mathbf{r} |\nabla\psi - \frac{iq_S}{\hbar}\mathbf{A}\psi|^2 = \int d\mathbf{r} \cdot \frac{\hbar^2}{2m_S} \left\{ i\frac{q_S}{\hbar}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) + 2\left(\frac{q_S}{\hbar}\right)^2\mathbf{A}|\psi|^2 \right\} \delta\mathbf{A} \quad (3.3.11)$$

以上 (3.3.10)、(3.3.11) よりベクトルポテンシャルの変分に関する (3.3.9) の変分は、

$$\delta(\Delta G) = \int d\mathbf{r} \left\{ \mathbf{j}_s + \frac{iq_S\hbar}{2m_S}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) + \frac{q_S^2\mathbf{A}}{m_S}|\psi|^2 \right\} \delta\mathbf{A} \quad (3.3.12)$$

であり、これが任意の変分  $\delta\mathbf{A}$  について 0 となる条件から、

$$\mathbf{j}_s = \frac{q_S\hbar}{2im_S}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - \frac{q_S^2\mathbf{A}}{m_S}|\psi|^2 \quad (3.3.13)$$

を得る。また、 $\psi$  について変分法を行うと、詳しい導出は省略するが、

$$\frac{1}{2m_S} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - q_S \mathbf{A} \right)^2 \psi = \alpha\psi - \beta|\psi|^2\psi \quad (3.3.14)$$

を得る。 $\psi$  と  $\mathbf{A}$  の連立方程式 (3.3.13)、(3.3.14) を GL 方程式と呼ぶ。

(3.3.13) から London 方程式 (3.3.5) を導出しよう。そのためには  $\psi$  の具体的な形を決める必要がある。十分低温の状態ではすでにほとんどの電子が超伝導電子となり、 $|\psi|$  は  $\sqrt{n_S(0)}$  のまま温度変化せず、一様であるといえる。しかし、 $\psi$  自体は空間変化を伴う必要がある。そこで、位相成分を導入する。秩序パラメータ  $\psi$  そのものは波動関数のような量であるから、その位相成分  $\theta$  は空間変化できるであろう。そこで、 $T \ll T_c$  において、

$$\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{n_S(0)} e^{i\theta(r)} \quad (3.3.15)$$

とする。こうすれば (3.3.7) を満たしたまま波動関数の位相成分（空間変化）を付け加えることができる。(3.3.15) を (3.3.13) に代入して、整理すると

$$\mathbf{j}_S = \frac{q_S n_S(0)}{m_S} (\hbar \nabla \theta - q_S \mathbf{A}) \quad (3.3.16)$$

両辺の  $\text{rot}$  を取って、恒等式  $\text{rot}(\nabla \theta) = 0$  を用いると London 方程式

$$\text{rot} \mathbf{j}_S + \frac{n_S q_S^2}{m_S} \mathbf{B} = 0 \quad (3.3.5)$$

が得られる。

### 補足 - 秩序パラメータの空間変化（微分）について

ここでは、ベクトルポテンシャルの導入と同時に秩序パラメータの空間微分を伴うようになった理由を説明する。このことについてゲージ変換が重要となる。同じ磁場  $\mathbf{B}$  を与えるベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  は無数に存在する。あるスカラー関数  $\chi(\mathbf{r})$  に対して

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad} \chi \quad (3.3.17)$$

を定義すると、 $\text{rot}(\text{grad} \chi) = 0$  なので、 $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} = \text{rot} \mathbf{A}'$  となり、どちらも同じ磁場を与える。(17) はゲージ変換と呼ばれる。

一方、磁場中における荷電粒子のハミルトニアンは

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{p}} - q \mathbf{A})^2$$

で与えられる。しかし、シュレーディンガー方程式  $\hat{H}\varphi = E\varphi$  に (3.3.17) を代入してもゲージ変換に対して不变でないことはすぐわかる。これを解決するには波動関数  $\varphi$  の方にも変更が必要で、

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \text{grad} \chi, \varphi \rightarrow e^{iq\chi/\hbar} \varphi \quad (3.3.18)$$

のように同時変換する必要がある。すなわち、波動関数が空間変化する必要がある。このようにすれば、次のように導かれる恒等式

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{p}} - q(\mathbf{A} + \text{grad} \chi)) e^{iq\chi/\hbar} &= \left\{ \frac{\hbar}{i} \nabla - q(\mathbf{A} + \text{grad} \chi) \right\} e^{iq\chi/\hbar} \\ &= e^{iq\chi/\hbar} \left\{ q \text{grad} \chi + \frac{\hbar}{i} \nabla - q(\mathbf{A} + \text{grad} \chi) \right\} \\ &= e^{iq\chi/\hbar} (\hat{\mathbf{p}} - q \mathbf{A}) \end{aligned}$$

を用いて、変換されたシュレーディンガー方程式は

$$\frac{1}{2m}(\hat{\mathbf{p}} - q(\mathbf{A} + \mathbf{grad}\chi))^2(e^{iq\chi/\hbar}\varphi) = E(e^{iq\chi/\hbar}\varphi)$$

すなわち、

$$e^{iq\chi/\hbar}\frac{1}{2m}(\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A})^2\varphi = e^{iq\chi/\hbar}E\varphi, \frac{1}{2m}(\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A})^2\varphi = E\varphi$$

となり、ゲージ変換に対して不变となる。

### 3.3.5 London 方程式の簡単な解と完全反磁性

London 方程式 (3.3.5) を 1 次元モデルについて解いてみよう。マクスウェル方程式  $\text{rot}\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j}_S$  を用いて  $\mathbf{j}_S$  を消去すると

$$\text{rot}\left(\frac{1}{\mu_0}\text{rot}\mathbf{B}\right) + \frac{n_S q_S^2}{m_S} \mathbf{B} = 0$$

ベクトル解析の公式  $\text{rot}(\text{rot}\mathbf{W}) = \text{grad}(\text{div}\mathbf{W}) - \nabla^2\mathbf{W}$  とマクスウェル方程式  $\text{div}\mathbf{B} = 0$  より

$$\nabla^2\mathbf{B} = \frac{\mu_0 n_S q_S^2}{m_S} \mathbf{B}$$

$x = 0$  の  $yz$  平面に真空と超伝導の境界があり、真空中に  $z$  軸正方向に一様な磁場  $B = B_0$  が印加されているとしよう。このとき解くべき微分方程式は

$$\frac{d^2}{dx^2} B = \frac{\mu_0 n_S q_S^2}{m_S} B$$

となる。 $x \rightarrow \infty$  で解が有限になると境界条件  $B(0) = B_0$  を用いると、

$$B(x) = B_0 e^{-x/\lambda} \quad (3.3.19)$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{m_S}{\mu_0 n_S q_S^2}} \quad (3.3.20)$$

を得る。 $\lambda$  は外場が侵入できる長さの特徴的な量で、ロンドンの磁場侵入長と呼ばれている。金属の  $n, q, m$  を用いて  $\lambda$  を評価するとおよそ  $10 \sim 100\text{nm}$  ほどである。(3.3.19), (3.3.20) の様子を図 3 に示した。超伝導体表面付近で磁場が減衰し、内部にほとんど侵入できないことが分かる。すなわちマクロな試料の表面で外場は遮蔽され、完全反磁性が実現している。(3.3.5) の両辺の  $\text{rot}$  をとって、先ほどと同様に変形すると  $\mathbf{j}_S$  についても解くことができ、磁場と同じように  $e^{(-x/\lambda)}$  に従って減衰することが確かめられる。したがって超伝導電流は超伝導体表面のみにゼロ抵抗で流れる電流であることがわかる。

ついでにこの事実と (3.3.16) から三つ目の特徴、磁束の量子化を導出しておく。図 4 のように超伝導体のドーナツリングがあり、紙面に垂直に一様な外場  $\mathbf{B}_{ext} = \mu_0 H$  がある。このとき図に破線で描かれた円に沿って積分を行って破線に囲まれた領域の磁束、すなわちリング内に閉じ込められた磁束を求める。ドーナツリングの十分内側に積分経路をとったので、 $\mathbf{B} = 0, \mathbf{j}_S = 0$  と考える。このとき (3.3.16) より、 $\mathbf{A} = \hbar \nabla \theta / q_S$  であるから、リングに閉じ込められた磁束  $\Phi$  は、ストークスの定理を用いて

$$\Phi = \int \text{rot}\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{A} \cdot dl = \oint \frac{\hbar \nabla \theta}{q_S} \cdot dl = \frac{\hbar}{q_S} \{\theta(2\pi) - \theta(0)\}$$

ここで  $\psi(\theta(2\pi)) = \psi(\theta(0))$  であるために位相成分  $\theta$  は、 $\theta(2\pi) - \theta(0) = 2\pi N$ (Nは整数)でなければならぬので、

$$\Phi = \frac{\hbar}{q_S} 2\pi N = N\Phi_0, \Phi_0 = \frac{\hbar}{q_S}$$

となり、磁束が量子化されることが分かる。量子化された磁束を観測すると  $q_S = \pm 2e$  であることが分かった。ここから、電子が対を形成することによって超伝導電子になっていると考えられる。この対をクーパー対と呼び、超伝導の理論である BCS 理論において重要な考え方となっている。もちろん  $m_S = 2m, n_S = n/2$  である。

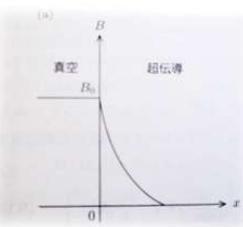


図 4([1] より) 完全反磁性の一次元モデル

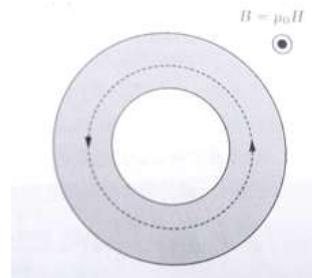


図 5([1] より) 超伝導ドーナツリング

### 3.3.6 おわりに

今回は London 方程式の導出を紹介した。一つ目の導出は完全反磁性ではなく完全伝導性から出発しており、積分定数の決め方もやや直感的であるが、簡単な古典理論で超伝導現象を曲がりなりにも記述することができるという点では興味深い。二つ目の導出は相転移の理論に基づいて、超伝導の本質である完全反磁性に着目して導出している。全く異なる導出法で、同じ方程式が導出されるのは自分で計算していても不思議に感じる。また、ほかにも BCS 理論から、微視的に地場への応答を考えて導く方法もあるが、今回は紹介できなかった。

最後に、GL 方程式から London 方程式を導出する中で私が興味深いと思った点を 2 つ挙げる。一つ目は (3.3.16) で、 $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} - \nabla(\hbar\theta/q_S)$  のようにゲージ変換すると、

$$\mathbf{j}_S = -\frac{q_S n_S(0)}{m_S} \mathbf{A} \quad (3.3.16)'$$

となり、実測可能な電流密度が、数学的便法で導入したはずのベクトルポテンシャルに比例するということである。二つ目は (3.3.16) から分かるように、電流密度と位相成分が結びついているという点である。2 つの波動関数  $\phi, e^{i\theta}, \varphi$  は全く同じ電子の存在確率を示すので、同じ波動関数として捉えられることが多いが、今回は  $\theta$  が実測可能な電流密度に関わっており、2 つは同じものとは見なせない。以上が私が London 方程式の導出を行ってみて、注目した点である。

(78回生 ほいたいせい)

### 3.3.7 参考文献

- [1] 寺崎一郎 (2023) 「固体物理学」 日本評論社
- [2] 丹羽雅昭 (2009) 「超伝導の基礎」 東京電機大学出版局

[3] 恒藤敏彦 (1993) 「超伝導・超流動」 岩波講座

## ■おわりに

物理研究部にお越しいただき、本当にありがとうございました。是非、来年度も灘校文化祭にお越しいただければ幸いです。

さて、ここでは、夢のことについての僕の気持ちを書いていこうと思います。

早速ですが、皆さんには今、夢があるでしょうか。僕より年下、同年代、年上の方でも夢を持っているという人はたくさんいると思います。しかし、僕には明確な夢がありません。小さいころに憧れていたものはあったかもしれません、もう忘れてしました。ただあこがれの気持ちが当たり前になっただけかもしれません、とにかく明瞭なものではありません。なんとなくの好きなこと、というのはあるのですが、やりたいこと、なりたい人というのはあやふやなままでです。僕らのような年ではよくある悩みだとは思います。こんな自分から見れば、夢を持っている人というのはとても楽しそうで、とても輝いていて、とてもうらやましく感じます。そんな風になってみたいな、と思うのですが、夢というのは、理想かもしれません、欲しいという気持ちが先行して焦って模索しても、簡単に見つかるものではない気がしていて、なんとなく好きを突き詰め続けた先での憧れの形なのかなと思います。ならば、僕は僕の憧れである、夢を持って輝いている人になるためにも、なんとなく好きからでも、様々なことに興味を持つこと、そしてそれを好きであり続けることを大切にして、これからを暮らしていきたいと思います。何年後かにでも憧れている風になっていたらいいなと感じるばかりです。長くなってしまいましたが、最後に、ここまで部誌を読んで頂きありがとうございます。はじめにも書きましたが、この文化祭が皆様の興味の出発点になれたのならこちらとしてはうれしい限りです。本当にありがとうございました。

(78回生 部長)