

第10回 和田杯

第78回 灘校文化祭

灘校数学研究部

入試模試の数学版として発足したこの企画も10回目となり、恒例企画となりつつあります。制限時間は文化祭が終わるまでの2日間、じっくり考え抜いていただけると幸いです。問題に関する質問はお気軽に受付までどうぞ。答案を書いてくださった方は、受付までお持ちいただくか、裏面記載のTwitterアカウントに答案の写真を送っていただければ正誤判定いたします。(文化祭終了後は裏面記載の住所に郵送(返信用封筒・切手の同封をお願いします)またはTwitterアカウントをお願いします。)5月末をめどに、解答・解説を<https://nada-mathclub.jimdofree.com>に掲載する予定です。上位者の方はご希望があれば表彰させていただきます。

注意：問題の並び順は難易度とは無関係です。また、訂正がある場合、オンラインで参加される方にはTwitterにてお知らせしますのでご確認ください。

1. a を実数とする。正の整数に対して定義され実数値をとる関数 f であって、

- 任意の正の整数 x に対して $|f(x)| < 1$

- $\prod_{k=1}^{\infty} f(k) = a$

をみたすものが存在するような a をすべて求めよ。

2. 正実数に対して定義され正実数値をとる関数 f であって、任意の正実数 x, y に対して

$$\left(f^{[f(x)]}(y) \right)^{[f(x)]} = ([f(x)] + y)^{[x+1]}$$

が成り立つようなものをすべて求めよ。

ただし正整数 k に対して f^k とは $f^0(x) = x, f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$ で定義されたものであり、実数 r に対して $[r]$ で r 以下の整数のうち最大のものを表すとする。

3. n を正整数とする. xy 平面上においてある点が**良い点**であるとは, その点の x 座標と y 座標が共に 1 以上 n 以下の正整数であることを指すものとする. N 匹のウサギが $(1, 1)$ から (n, n) まで, 良い点から良い点への移動のみで移動する. また, ウサギは今いる良い点より x 座標と y 座標の少なくとも一方が小さい点には移動できないものとする. このとき, 任意の $1 \leq i \leq j \leq n, 1 \leq k \leq l \leq n, (i, k) \neq (j, l)$ をみたす整数 i, j, k, l に対して, (i, k) から (j, l) へ移動したウサギが存在したという. N としてありえる最小値を求めよ.

4. n を正の整数, a を整数としたとき, 以下の式が成立することを示せ.

$$\sum_{d|n} a^d \phi\left(\frac{n}{d}\right) \equiv \sum_{d|n} a^d \mu\left(\frac{n}{d}\right) \pmod{n}$$

ただし ϕ はオイラーのトーシェント関数を, μ はメビウス関数を表すとする.

5. 鋭角三角形 ABC の垂心を H とする. H で A, B, C を対称移動させた点をそれぞれ A', B', C' とする. AH と BC の交点, BH と CA の交点, CH と AB の交点をそれぞれ D, E, F とする. 点 X, Y, Z をそれぞれ三角形 $B'EF$, 三角形 $C'FD$, 三角形 $A'DE$ の外心とする. このとき,
 (1) 三直線 AX, BY, CZ が全てある共通の一点を通ることを示せ.
 (2) (1) の点を P とするとき, $PO : PH$ を求めよ.

6. 正実数に対して定義され正実数値をとる関数 f であって, 任意の正実数 x に対して

$$f(x)^2(2f(2f(x)) + 1) = 2f(x) + 1$$

が成り立つようなものをすべて求めよ.

7. n を 3 以上の整数とする. 平面上の n 個の点からなる集合 S が以下の条件を満たす.

任意の相異なる二点 $A, B \in S$ に対してある S の要素 C が存在し, 三角形 ABC が正三角形となる.

このとき n としてありえる値をすべて求めよ.

8. f を正の整数に対して定義され正の整数値をとる広義単調増加関数とする. (1), (2) それぞれについて条件をみたす f をすべて求めよ.

- (1) 任意の $n \geq k$ をみたす正の整数 n, k について $f({}_nC_k) = {}_{f(n)}C_{f(k)}$ のとき
 (2) 任意の $n \geq k$ をみたす正の整数 n, k について $f({}_nP_k) = {}_{f(n)}P_{f(k)}$ のとき

9. 正の整数に対して定義され正の整数値をとる関数 f であって、任意の正の整数 a, b, c に対して

$$\frac{f(a)^3 + f(b)^3 + f(c)^3 - 3abc}{f(a) + f(b) + f(c)}$$

が整数になるようなものをすべて求めよ.

10. 非負整数の組 (a, b, c) であって、以下をみたすものをすべて求めよ.

$$(a^b - c^{ab-a-b})(a^c - b^c)(b^b - c^a) = 8abc$$

11. 垂心を H 、外心を O 、外接円を Γ とする鋭角三角形 ABC がある. 辺 BC の中点を M とし、辺 BC の垂直二等分線が直線 AB, AC と交わる点をそれぞれ P, Q とし、線分 PQ の中点を N とする. 直線 AH と Γ の交点のうち A でない方を D 、直線 DP と Γ の交点のうち D でないものを E 、三角形 ENP の外接円と直線 AB の交点を K とする. 二つの直線 OH, KM が点 R で交わる時、 $OR:RH$ を求めよ.

12. 正の整数の組 (x, y, n) であって、以下をみたすものをすべて求めよ.

$$x^{y!} + y^{x!} = 2024^n$$

13. 鋭角不等辺三角形 ABC において、内心を I 、内接円を ω とする. 辺 BC, CA, AB と ω の交点をそれぞれ D, E, F とする. 三角形 AEF の外接円と三角形 ABC の外接円の交点のうち A でないものを A_1 、 I を直線 BC で対称移動させた点を A_2 とし、三角形 DA_1A_2 の外接円を ω_A とする. 同様に ω_B, ω_C を定める.

- (1) $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ はある共通の二点を通ることを示せ.
 (2) 三角形 ABC の外心を O とする. (1) の二点が直線 OI 上にあることを示せ.

14. 鋭角三角形 ABC において、 A から辺 BC に下ろした垂線の足を D 、 D から辺 AB, AC に下ろした垂線の足をそれぞれ E, F とする。三角形 ABC の外接円と直線 EF との交点二つを P, Q とする。三角形 ABC の外接円と直線 AD の交点のうち A でない方を X とし、辺 BC 上に $BD = CY$ をみたす点 Y をとる。線分 XY の中点を M としたとき、三角形 PQD の外接円と三角形 BMC の外接円は互いに接することを示せ。

15. $AB < AC$ なる鋭角三角形において、内心を I 、 I から BC に下ろした垂線の足を D とする。直線 BC 上に $AX = XD$ なる点 X をとる。ここで、 X から直線 AI に下ろした垂線の足を P 、辺 BC の中点を Q としたとき、三角形 ABC の外接円と三角形 XPQ の根軸を l とする。線分 ID の中点を Y としたとき、 l が Y を通ることを示せ。

—— 作問者一覧 (協力ありがとう!) ——

1. 中 2. 中, 宮原 3. 中 4. 中, 尼丁 5. 中 6. 宮原 7. 宮原 8. 宮原 9. 宮原 10. 宮原 11. 宮原
12. 宮村 13. 加持 14. 加持 15. 加持

- 答案郵送先 (返信用の封筒・切手を同封してください):

〒 658-0082 神戸市東灘区魚崎北町 8-5-1 灘校数学研究部

- 数学研究部 メールアドレス: nada.math.club@gmail.com

- Twitter アカウント: @nada_mathclub

- 数学研究部 HP: <https://nada-mathclub.jimdofree.com>

<http://nadamath2012.web.fc2.com/index.html>

生徒時代に数研に在籍していらしゃった和田孫博前校長先生のお名前を冠して始まった本企画も、今年で10回目を迎えることとなりました。当初は「入試模試の数学版」と銘打ってありましたが、今となっては入試模試と張り合える有名企画になりつつあるかなと思います。

さて昨年この企画を担当された小出先輩が卒業され、わたくし宮原が引き継ぐこととなりました。部員の協力もあり、今年も和田杯を開催できたことをとてもうれしく思います。

答案の正誤判定については1ページ目にお書きした通りですが、今回の和田杯もオンラインでの参加を受け付けております。特にTwitter上では例年たくさんの方々に来ていただいております。こちらも非常にありがたい限りです。文化祭に来場できないという皆様も是非ご参加ください。一人でも多くの皆様のご参加を心待ちにしています。それでは! Good Luck!

文貴 高校3年 宮原尚大