

§79 Physics

$$F = ma$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - G \frac{Mm}{R} = \frac{1}{2} m v_0^2 \geq 0 \quad k = \frac{T^2}{a^3}$$

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad G = 6.67 \times 10^{-11} = \frac{(3600 \times 24 \times 365)^2}{(1.50 \times 10^8)^3}$$

$$E = \frac{1}{2} m v_1^2 - G \frac{Mm}{r_1} \quad g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

$$= \frac{1}{2} m v_2^2 - G \frac{Mm}{r_2} \quad r = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$$

$$\frac{1}{2} r_1 v_1 = \frac{1}{2} r_2 v_2$$

$$\Rightarrow v_1^2 = \frac{2}{m} (E + G \frac{Mm}{r_1})$$

$$v_2^2 = \frac{2}{m} (E + G \frac{Mm}{r_2})$$

$$\Rightarrow r_1^2 \frac{2}{m} (E + G \frac{Mm}{r_1}) = r_2^2 \frac{2}{m} (E + G \frac{Mm}{r_2})$$

$$E(r_2^3 - r_1^3) = -GM(r_2^2 - r_1^2)$$

$$\Rightarrow E = -GM \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2^3 - r_1^3}$$

$$v_1 v_2 = \frac{2GM}{r_1 + r_2}$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{GM}{4a^3}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM_E}{R + h}}$$

$$h = 0$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_E}{R}}$$

$$= \sqrt{gR}$$

$$v = \sqrt{9.80 \times 6.37 \times 10^6}$$

$$= 7.9 \times 10^3 \text{ m/s}$$

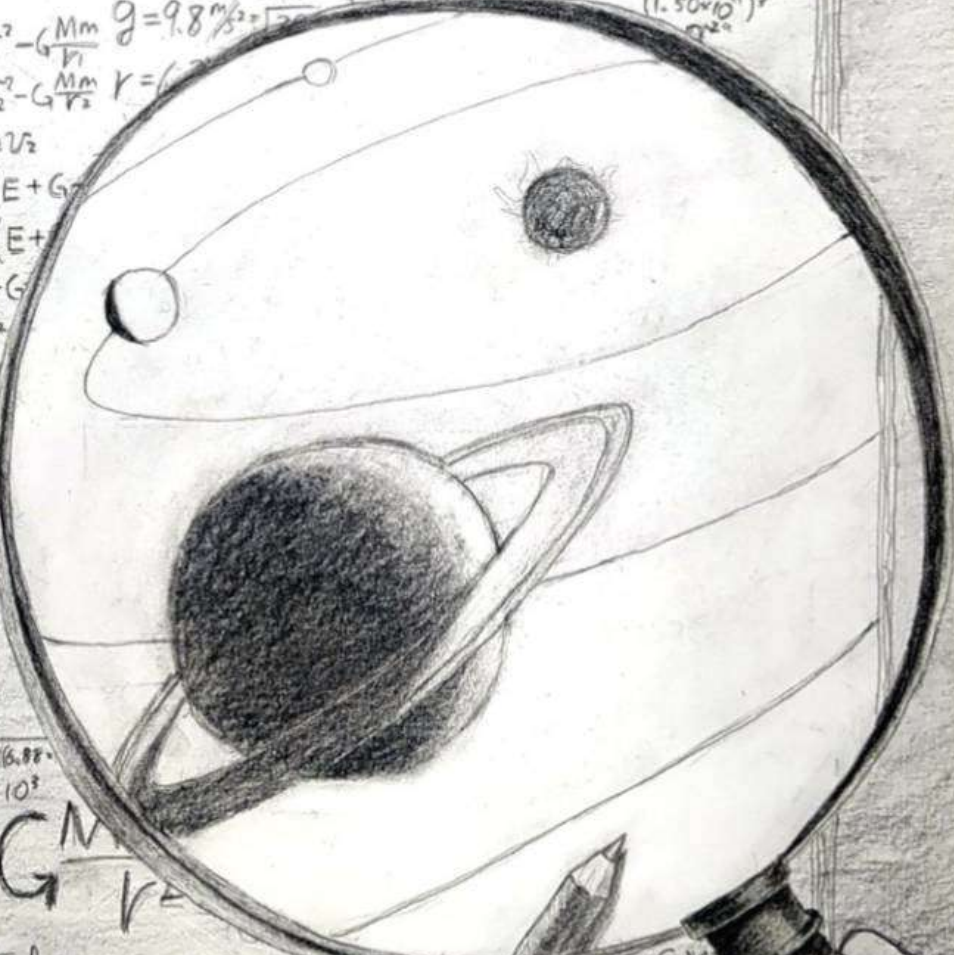
$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \omega l$$

$$m_1 r_1 \omega^2 = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$\Rightarrow \omega^2 = G \frac{m_1 + m_2}{r^3} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$U = -\frac{GMm}{r}$$



■はじめに

こんにちは、78 回生の星屋です。まずは、第 79 回灘校文化祭「weave」、並びに物理研究部にお越しくださりありがとうございます。物理研究部で行っている液体窒素を使った実験ショーや、ブースでの展示は楽しんでいただけたでしょうか。

文化祭やこの部誌は我々物理研究部にとって物理を多くの一般の方々に知ってもらう数少ない機会です。少しでも物理の面白さを知る機会になっていれば嬉しい限りです。

さて話は変わりますが、今年の文化祭後の公共の授業で先生が「何万人という方々が君たちの話を聞きに来てくださるのは、君たちが”灘校生”だからだ」というようなことをおっしゃっていました。確かに我々は”灘校生”という肩書きがなかったら、ただの学生に過ぎません。少なくとも自分ならわざわざ足を運んで話を聞きに行こうとは思いません。そう考えると、自分はホントに恵まれた環境にいるのだなとつくづく感じました。

しかし、そんな恵まれた環境にいられるのも我々 78 回生にとっては、あと 1 年を切ってしまいました。しかも、高 3 ということで物理研究部も文化祭で引退です。やり切った感はあるのですが、やはり悲しくもあります。自分事にはなりますが、中 1 の 2 学期に友人に誘われ、なんとなく入った物理研究部ですが、今では自分になくてもならないものになりました。しかし、これも周りに当たり前に物理が好きな人がいて、そんな人たちで教え合う環境があったからです。そういう意味でもやはり自分は恵まれていると思います。この恵まれた環境を作ってきた先輩や先生方、灘校に通わせてくれる両親には感謝してもしきれないです。そして、自分達の話聞きに来てくださる方々、今この部誌を読んでいる”あなた”にも感謝の念に堪えません。この場を借りて感謝申し上げます。

それでは長くなってしまいましたが、是非我々物理研究部が愛してやまない物理をご堪能ください!!

(78 回生 部長 星屋峻祐)

目次

第 1 章	展示説明	3
1.1	ダイラタンシー	3
1.2	色の螺旋	6
1.3	異常分散——順番が違う虹——	9
第 2 章	活動紹介	13
2.1	中一講義	13
2.2	中 2 講義	18
2.3	新高ゼミ	21
2.4	量子論ゼミ	24
第 3 章	寄稿記事	35
3.1	色の螺旋	35

第 1 章

展示説明

本章では、物理教室で行っている展示の一部の解説を行います、(なお、この記事執筆しているのは 3 月ですので、準備の関係上本章の内容と実際の展示の内容が異なることがあります。)

1.1 ダイラタンシー

概要

皆さんは「ダイラタンシー」という性質を知っているでしょうか。よくテレビでも不思議な科学実験として紹介されている、水の上を歩けるというやつがまさにこの性質を利用したものです。なぜ流体の上を歩くことが可能なのかをダイジェストで見ていきましょう！

1.1.1 ダイラタンシーを体験してみよう

ダイラタンシー現象は家でも簡単に実験をすることができます。以下に簡単な手順を載せておきます。

- 1, 片栗粉、水、容器を準備する
- 2, 容器に片栗粉を入れて水を加える (大体分量は片栗粉：水＝2：1 くらい) 用意するものはたったこれだけです！ できた液体を強く握ったり、拳で殴ってみると確かに固体のように硬いのがわかると思います。

1.1.2 そもそも液体、固体って？

あらゆる物質は小さな細かい粒 (いわゆる粒子) によって構成され、固体・液体・気体という三態のいずれかで存在しています。では、液体、固体という状態がどのような状態なのかイメージはできるでしょうか。液体とは、粒子どうして力が働いていて一定の形を保つことができるがその粒子の配列は決まっておらず、自由に動き回ることができる、流動性といわれる性質を持つ物質のことを言います。液体という状態では粒子が自由に動き回れるからこそ人は水の溜まったお

風呂やプールに入ることができるのですね。

次に固体とは、粒子同士に力が働いていてかつその粒子の位置が一定の場所に固定されているため、流動性が失われ形が変わらない状態の物質のことを指します。

まとめると液体と固体の違いはざっくり言うと粒子が自由に動き回れるか否かだということです！

1.1.3 ダイラタンシー現象の原理

ではダイラタンシー現象では何が起きているのでしょうか。

ダイラタンシー現象の説明をするときの鍵になるものは片栗粉 (他にも代替品はあります) をとかすことと外部から”力”を加えることです。片栗粉を溶かすとその細かい粒が水の中を自由に動き回れるため、流動性を持つ液体となっています。そこに外部から力を加えてあげると粒子の位置がずれて粒子間の隙間が広がり、そこに水が入り込み、一時的に位置が固定された固体の状態になるため、ダイラタンシー現象が起こるのです。文字では伝わりづらいと思うのでイメージ図を貼っておきます。

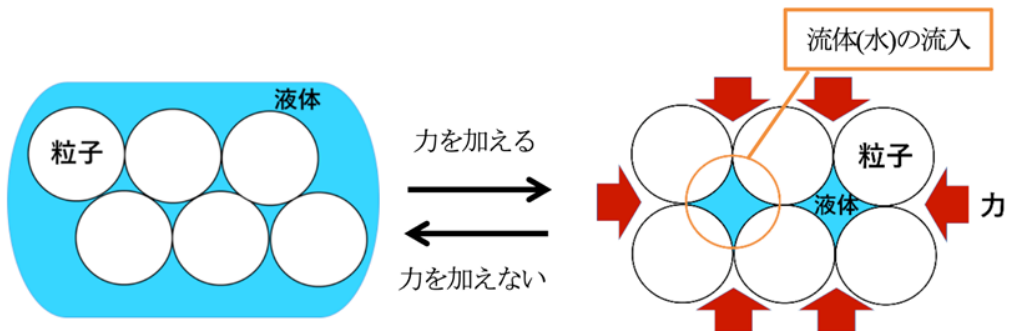


図 1.1 <http://www.taka-ichi-h.ed.jp/img/R05-07.pdf> より引用

力が加わっていることで固体の状態になるため、力が加わらなくなると元のように粒子が自由に動けるようになり、元の流動性を持つ液体に戻ってしまいます。テレビなどで液体の上を走れる！？といったものは続けて連続的に力を一定間隔で加えることで固体の状態を維持することで沈まずに上を走れているのです。上のイメージ図を見てもらうとわかりやすいと思いますが、粒子間の隙間に水が入り込んでいるため、固体となっている部分の外側の部分にある水の量は減っています。このことが実感できる現象としては、濡れた砂浜を歩くと、足跡のまわりが乾いて見えるといったものです。これは水を含んでいる海岸の砂浜を人間が歩くことで体重がかかった部分に力が加わって、粒子の間に水が入り込み固体のようになって人間の体重を支える代わりに周りの水が吸収されてなくなってしまうからなのです。

1.1.4 余談

液体から一時的に固体になる現象をダイラタンシー現象と呼ぶのですがその逆の現象も身近にあります。それは液状化と呼ばれるもので、地震が起きたときによく報道されているものです。液状化は水を含んだ砂でできたもろい地盤などが地震の揺れによる力が加わることで、粒子同士が決まった形で結びついていて、水がその隙間に入り込んで安定していた地盤が、粒子同士の結

びつきが一時的になくなることで、中に含まれていた水が外に出てきて、地面が液体のようにドロドロになってしまうことおきます。

(78 回生 江口尊琉)

1.1.5 参考文献

- <https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%80%E3%82%A4%E3%83%A9%E3%82%BF%E3%83%B3%E3%82%B7%E3%83%BC>
- <http://www.taka-ichi-h.ed.jp/img/R05-07.pdf>

1.2 色の螺旋

概要

文化祭で行っている展示「色の螺旋」は、砂糖水で満たした筒に光を通すと、色の螺旋が見える、というものです。とても幻想的で美しい現象ですが、実際に中では何が起こっているのでしょうか。その詳細を紐解いていきます。

1.2.1 はじめに

展示「色の螺旋」をご覧くださいでしょうか。この記事を書いている私はまだ展示が上手く行くかどうかを知らないのですが、成功して皆さんに幻想的な展示をお見せできていることを祈っています。

この記事では、展示「色の螺旋」の構造と原理について簡単に説明していきます。さて、初めに簡単にこの展示の構造について解説します。まず、砂糖水で満たされた筒の両端を偏光板で挟み、更に片側から白色光を当てます。すると、筒には斜めに美しい虹色の螺旋が浮かび上がり、もう片側には色が付いた光が射出されます。さらに両端の偏光板を回転すると、驚くべきことに筒の虹が回転し、射出される光の色も変化するのを観察できます。

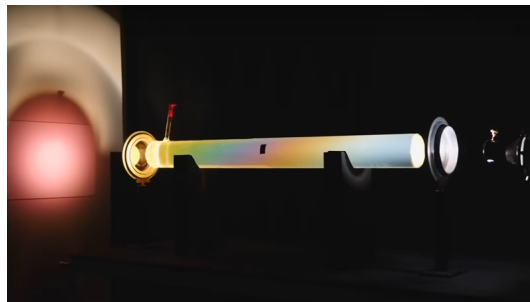


図 1.2 色の螺旋 (3Blue1Brown の Youtube より引用)

さて、ここで皆さんの頭には疑問が浮かんでいると思います。というより、すべてを疑問に思うでしょう。なぜ虹が浮かび上がるのか。なぜ虹は斜めなのか。なぜ色の付いた光が射出されるのか。そして、なぜ偏光板を回すとそれらも変化するのか。この疑問に詳しく答えた記事を寄稿記事に載せているので、興味を持っていただけたらぜひそちらも併せて読んでみてください。ここからは、難しい数学や物理の知識がなくても概要がわかるように、簡単に原理について解説していきます。以下では、「光は波である」ということを解説なしに用います。詳しくはもう一つの記事を参照してください。

さて、原理を理解するためには三つの重要な事柄を理解する必要があります。「偏光」「屈折率」「旋光性」の三つです。順番に解説していきます。

1.2.2 偏光

まずは、偏光や偏光板について解説していきます。

偏光とは、「振動方向が規則的な光」のことです。自然光などは無規則に、様々な方向に振動しています。これに対して、偏光は振動が直線的で一方向 (例えば垂直方向など) のみに振動するもの (直線偏光) や、振動方向が時計の針のように円を描くもの (円偏光)、振動方向が楕円を描くもの (楕円偏光) など、ある規則に従って振動しています。

偏光板とは、「特定の方向に振動している光」のみを通す板です。つまり、通過する光はある方向の直線偏光のみになります。

例えば、垂直方向の直線偏光のみを通す偏光板があるとします。この時、垂直方向の直線偏光は何の干渉も受けずにそのまま偏光板を通過します。一方、水平方向の直線偏光は垂直成分を持っていないため、一切偏光板を通過することができません。斜め方向の直線偏光は、その偏光がもつ水平成分の分だけ偏光板を通過します。そして、この偏光板を通った光は全て垂直方向の直線偏光になります。

つまり、展示において初めの偏光板を通った光は、直線偏光となって砂糖水に入っていくことがわかります。

1.2.3 屈折率

次に、屈折率について解説していきます。

屈折率とは、「その媒質の中を通っている時に光の速さがどれだけ変化するか」を表した数のことです。音波が水中で遅くなるのは聞いたことがある人も多いかもしれません。光波も、同じように物質中で速さが変化するように見えます。なぜ”屈折率”というかという、この数が光の屈折度合いと直接関係しているからです。

さて、この屈折率は、光の周波数によって変化するという性質を持っています。もちろん媒質によっても変化しますが、今回媒質は砂糖水という等方性物質 (場所や方向によって性質が変わらない) なので、考えなくてもよいです。光の周波数によって屈折率が変わるということは、白色光を媒質に通すと、色ごとに光の速さが変わるということです。例えば、白色光が色ごとに分かれて赤色はゆっくり進み、青色は速く進む、のようなことが起こります。これは色の虹が見えることへの重要な手掛かりのように感じますよね。

1.2.4 旋光性

さて、偏光と屈折率が結びつくのがこの”旋光性”です。旋光性、或いは光学活性とは、「キラリティを持つ媒質を通る直線偏光は回転する」という性質のことです。なんだか聞きなれない言葉が出てきました。キラリティとは、一般に物質が鏡像とびったり重ね合わせることができない性質のことを言います。高校生以上の方なら、鏡像異性体という単語を知っているかもしれません。鏡像異性体を持つ分子は、キラリティを持つ分子でもあります。なんだか話が見えてきましたね。砂糖 (スクロース) は鏡像異性体を持つため、旋光性を持ちます。

さて、旋光性を持つ媒質である砂糖水の中を光が通ると、光は左回りと右回りの円偏光となって回転しながら筒の中を進んでいきます。この時、左回りで進む光と右回りで進む光の屈折率はわずかに異なります。よって、全体として光は左か右にゆっくりと回転していきます。そして、”屈折率は色によって異なる”ので、色によってこの回転具合も変わってくるわけです。例えば、赤い直線偏光が 30 度傾いた間に、青い直線偏光は 60 度傾いている、というようなことが起こります。

1.2.5 何が起きているのか

さて、これらを踏まえてこの展示で何が起きているかについて解説していきます。

まず、偏光板を通過した光は直線偏光となり、砂糖水の中に入っていきます。この光は、砂糖水の旋光性によって色ごとに分かれながら左か右にだんだん回転していきます。この筒を横から見ると、虹が見えます。これは、光が振動方向と垂直な方向に強く見えるという性質によります。観察している場所で、視線に対して垂直に振動している色が良く見えるため、虹が見えるんですね。

二つ目の偏光板に到着した直線偏光は、色ごとに様々な方向を向いています。これらが偏光板を通過すると、偏光板の方向に近い方向を向いていた色が強く残り、偏光板の方向と遠い方向を向いていた色はほとんど残りません。これが、二つ目の偏光板を通過した後の光に色がある理由です。そして、一つ目の偏光板を回すと二つ目の偏光板に到着した偏光の方向が異なりますし、二つ目の偏光板を回すと二つ目の偏光板を通過する光の方向が変わります。だから偏光板を回すと光が変わったんですね。

これが展示の簡単な原理です。非常に美しいこの現象の裏には、しっかりしたロジックがありました。このようなロジックを理解したり、或いは発見したりする。これも物理の大きな魅力の一つです。

ここまで読んでいただきありがとうございます。良ければもう一つの記事や文化祭 HP に掲載している記事も合わせてご覧ください。

(79 回生 江川慧)

1.2.6 参考文献

3 章の寄稿記事「色の螺旋」に同じ

1.3 異常分散——順番が違う虹——

概要

ここでは、光の振動数や波長によって、屈折率が異なるという光の分散の中でも異常分散と呼ばれる現象について説明します。

1.3.1 光の分散

まず光の分散とは、何かというと光の振動数や波長で屈折率が異なる現象のことです。まだ分かりづらいですね。もっと簡単に言うと、光の色によって、光の曲がり具合が変わるということです。言葉で言われても分かりづらいので、具体例を出すと、実は皆さんの身近にある虹が光の分散によるものなのです。我々が普段見る虹があのように見えているのは図 1.3 のようになっていますからです。白黒で分かりづらいですが、(文化祭 HP に上がっているのはカラーのはずなのでよければそちらも参照してください。) 空気中の水滴の中で色ごとに曲げられ具合が異なるので図 1.3 のようになり、虹として見えるのです。では、そもそも色が違うというのは何なのでしょう?それは波長あるいは、振動数の違いです。図 1.4 は波長による電磁波の分類と可視光線の中で、さらに色ごとに分類したものです。これを見ると、波長が短い順に、紫、藍、青、緑、黄、橙、赤に並びます。そして、水滴ではこの順番が屈折率が高い順と同じなのです。

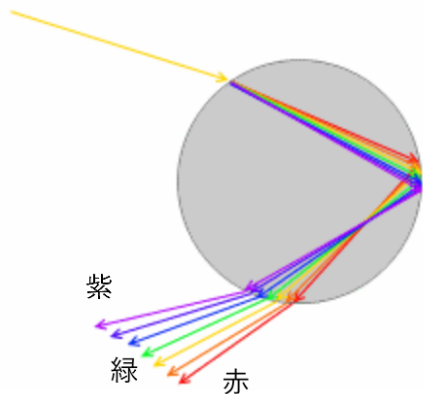


図 1.3 <https://wakariyasui.sakura.ne.jp/p/wave/kouha/niji.html> より引用

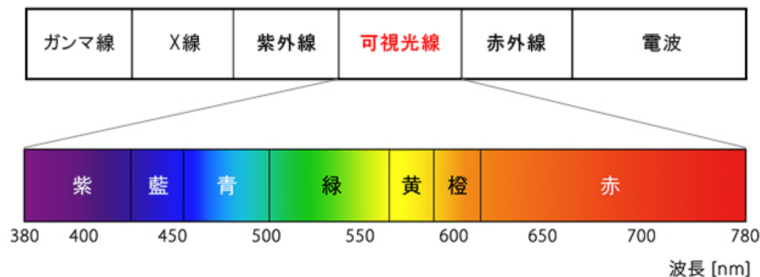


図 1.4 https://www.my-craft.jp/html/aboutled/led_hachou.html より引用

1.3.2 振動数と屈折率

前章では虹ができる説明を波長と屈折率から説明しました。ここでは振動数と屈折率の関係から虹ができる理由を説明したいと思います。といってもそれほど難しいわけではなくて、水滴では波長が短い順に屈折率が高くなるのですが、振動数では振動数が大きい順に屈折率が高くなるというだけで、要するに、順番が逆になるだけです。これはなぜかということ、波長 λ と振動数 f には以下のような関係があるからです。

$$c = f\lambda \quad (1.3.1)$$

c は光の速さでこれは全ての光で共通なので、波長 λ と振動数 f は反比例の関係にあります。なので、順番が逆になるわけです。

ではなぜ、振動数と屈折率にはこのような関係があるのでしょうか? 実は計算で求めることができます。ただこの計算は難しいので、振動数と屈折率のグラフを見てもらうだけでも大丈夫です。

まず、原子に対して Thomson 模型を考えます。Thomson 模型とは原子を大きな正の電荷のかたまりに電子が埋まっていると考える模型です。さらに、ズレに比例する弾性力が作用しているとします。これは要するに、ばねの弾性力みたいなものです。そこに光、つまり電磁波が入ると考えます。電磁波による電場を $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos \omega t$ とすると、電荷 e の電子の運動方程式は

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -m\omega_0^2 \mathbf{r} + e\mathbf{E}_0 \cos \omega t \quad (1.3.2)$$

右辺の二項目ですが、高校物理で出てくる単振動の運動方程式 $m\ddot{\mathbf{x}} = -k\mathbf{x}$ の右辺を角振動数を用いて書き換えたものです。(1.2.2) の特殊解を $\mathbf{r} = \mathbf{A} \cos \omega t$ とおいて、(1.3.2) に代入すると、

$$-m\omega^2 \mathbf{A} \cos \omega t = -m\omega_0^2 \mathbf{A} \cos \omega t + e\mathbf{E}_0 \cos \omega t$$

つまり、

$$m(\omega_0^2 - \omega^2) \mathbf{A} = e\mathbf{E}_0 \quad (1.3.3)$$

よって、電子の速度 \mathbf{v} は

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\omega \mathbf{A} \sin \omega t = -\frac{e\omega \mathbf{E}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \omega t \quad (1.3.4)$$

単位体積当たりの電子の個数を N とすると、電子が速度を持っていることによる電流密度 \mathbf{i} は

$$\mathbf{i} = Ne\mathbf{v} = -\frac{Ne^2\omega \mathbf{E}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \omega t \quad (1.3.5)$$

ここで、真空中の Maxwell 方程式

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

と、真空中なので $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ を考慮すると、

$$\text{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\left(\epsilon_0 \mu_0 + \frac{\mu_0 Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\right) \omega \mathbf{E}_0 \sin \omega t \quad (1.3.6)$$

ここで、誘電体中の束縛電子の存在を誘電率 ϵ 透磁率 μ の物体の存在とみなすと、(1.3.6) は

$$\text{rot} \mathbf{B} = -\epsilon \mu \omega \mathbf{E}_0 \sin \omega t \quad (1.3.7)$$

と書くことができる。(1.3.6) と (1.3.7) を比較すると、

$$\epsilon \mu = \epsilon_0 \mu_0 \left[1 + \frac{N e^2}{m \epsilon_0 (\omega_0^2 - \omega^2)} \right] \quad (1.3.8)$$

とできる。

(1.3.8) より、屈折率を $n(\omega)$ とすると、

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{N e^2}{m \epsilon_0 (\omega_0^2 - \omega^2)} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (1.3.9)$$

ただし、

$$\sqrt{\frac{N e^2}{m \epsilon_0}}$$

としました。

(1.3.9) をグラフにすると、

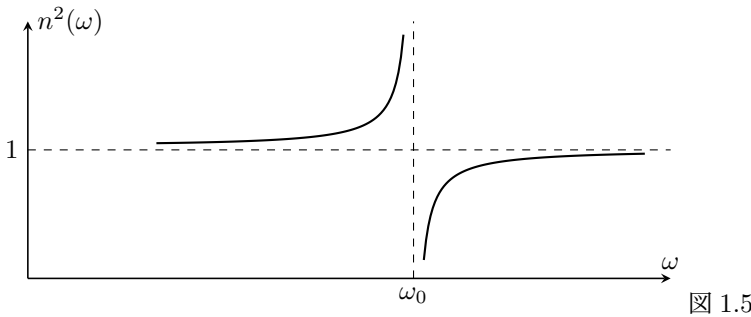


図 1.5

のようになります。これを見ると、

$$\omega = \omega_0$$

が特殊だと分かります。そこで、この ω_0 が可視光の範囲にあるかないかで場合分けします。

まずは、可視光の範囲にない場合です。このとき、以下の二つが考えられます。

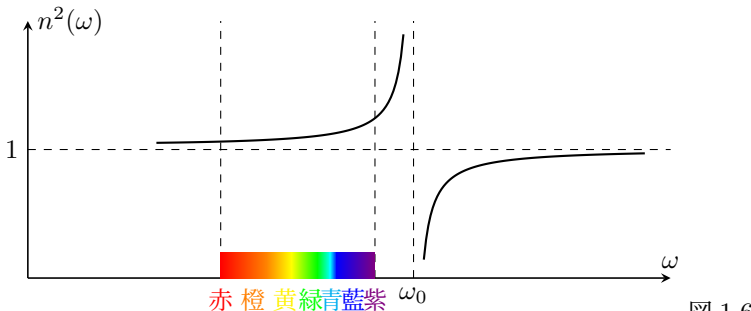


図 1.6

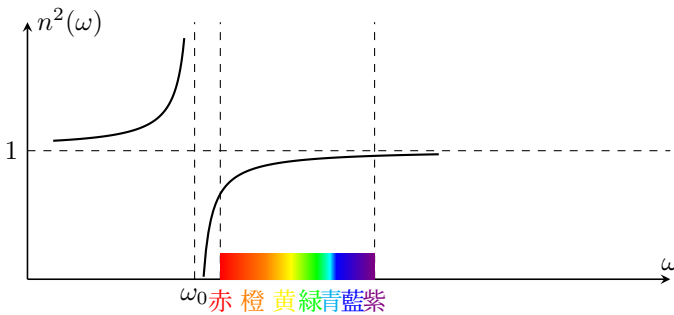


図 1.7

両方とも振動数が小さい順と、屈折率が小さい順が一致しています。つまり、これは我々が普段見る水滴による虹と同じ順番です。このような分散を正常分散といいます。

ここまでくると予想できるでしょう。そうです、 ω_0 が可視光の範囲に来る時を異常分散と呼びます。このときのグラフは

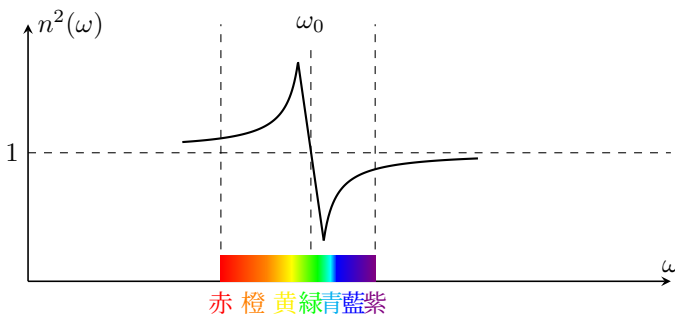


図 1.8

なぜ、 ω_0 付近で図 1.8 のようにつながるかというと、 ω_0 付近の時、(1.3.3) より、振幅 A が非常に大きくなります。つまり、電子が振動数 ω_0 の光を吸収して激しく揺れるわけです。このとき、電子が持っているエネルギーは電磁波として出ていったり、熱として出ていったりします。したがって、無限に激しく揺れることは起こらないので、図 1.8 のようになります。ではなぜ、図 1.6、1.7 ではそうならないかということ、今回注目するのはあくまで可視光の範囲なので、無視しているだけです。さて、図 1.6 のとき、虹はどうなるかというと、屈折率が低い順番になることと、今回は緑が吸収されることを考えると、青、藍、紫、黒、赤、橙、黄となります。こんな虹ができるなんて気持ち悪いですねー。

それでは、執筆している 3/28 の時点ではまだうまくいっていませんが、文化祭当日に皆さんが順番が違う虹を見ていることを願って終わりたいと思います。ここまで読んでくださりありがとうございました。

(78 回生 星屋峻祐)

1.3.3 参考文献

- 砂川重信. 理論電磁気学. 紀伊國屋書店, 1999
- <https://cgg.mff.cuni.cz/wp-content/uploads/2021/05/weidlich-2009-dispersion-.pdf>

第 2 章

活動紹介

昨年度物理研究部では大きく分けて以下の 3 つの活動を行っていました。中学 1 年生を対象とした、中 1 講義、中学 2 年生を対象とした、中 2 講義、新高生を対象とした新高ゼミと、高校生を対象とした量子論ゼミです。本章では、これらの活動について、担当者や実際に講義を受けた部員が内容も交えて軽く紹介します。

2.1 中一講義

概要

ここでは、講義を担当した部員に中一講義について説明してもらいます。

はじめにご挨拶申し上げます。物理研究部で中一講義を担当した沖です。中一講義とはその名の通り、中学一年生（82 回生）を対象とした講義であり、物理を勉強する上での第一歩をサポートするという趣旨で講義してまいりました。ここでは、中一講義では具体的にどのようなことを扱ったのかについて説明したいと思います。

まず中一講義で避けては通れないのが数学でしょう。物理を勉強していく上である程度の数学の知識は不可欠だからです。そういうわけで、9 月ごろまでは、二次関数や三角関数、指数対数、微分積分を扱わせていただきました。

とはいえ、私自身は決して数学が得意というわけではございません。学校の定期テストなどで、悪い点数を取ったことも度々ありました。ですから、82 回生の皆さんにはあまり数学に深入りせずに物理の世界にできるだけ早く足を踏み入れてもらいたく、9 月以降は力学の範囲に入りました。とはいえ、数学が得意でないにしても、数学が好きであることは大切だとつくづく感じております。新しい物理の分野を勉強した時、そこには理解不能な数式が転がっていることも多々ありますので、それを理解するためにも数学への意欲は必要であると思います。

話が少しずれましたが、そういうわけで力学の範囲に入りました。やはり力学で大切なのは運動 3 法則であります。恥ずかしながら、私も中一講義で力学を扱うまで、この運動 3 法則を根本的に見誤っておりました。しかも、本質的な間違いではあるものの、見誤ってもその先の学びに

はあまり支障が出ない間違いであるため、気づきにくいのです。せっかくなので、私がいかに勘違いしたのかをここに記したいと存じます。個人的にはかなり間違えやすい部分だと思っております。

それは端的に言えば、「運動の第二法則（運動方程式）から残りの法則を含む力学の全てを記述できる」という見誤りでした。どういうことか説明します。まず運動3法則というのは以下の三つの法則のことです。

- 慣性の法則：外部から力を受けない物体は静止または等速直線運動する
- 運動方程式：物体の加速度と受けている力は比例関係にある
- 作用反作用の法則：力を加えられたものは同じ大きさかつ反対向きの力を生み出す

大体、こんな感じで紹介されていることが多いです。運動方程式は数式的には

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$$

とか

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

と表されます。 \mathbf{F} は力、 m は質量、 $\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$ と \mathbf{a} は加速度を意味します。この式から、外部から力を受けない物体については

$$0 = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$$

$$0 = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$$

が成り立つことになるでしょう。だからこの式の両辺を時間で積分すれば

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = C(\text{積分定数})$$

$$\mathbf{v} = C$$

つまり外部から力を受けない物体は静止または等速直線運動することになります。格式を持たせるために数式で議論しましたが、言語化して書けば加速度がゼロであるため、速度は変化しないよね、という話に言い換えられます。これはまさに慣性の法則なので一見、運動方程式から慣性の法則を証明できたように思います。また作用反作用の法則については、図 2.1 のような物体が床に置かれた状態を考えます。普通に考えると物体は重力を受けているので、

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$$

より力を受けている物体には加速度が生じるので、下に落ちていきそうですが、にも関わらず静止しているのは物体が床から重力と同じ大きさの力を反対向きに受けているからと考えられます。これが反作用です、と言われたら作用反作用の法則も運動方程式から証明できたのでは、と思ってしまう。私は独学で勉強した結果、これらの勘違いを犯しました。

ではどこが間違っていたのでしょうか。そのためには座標系について説明しておく必要があるでしょう。

座標系というのは原点を中心として置かれたもので、例えば原点から横に 3m、縦に 6m 進んだ位置にある美味しいハンバーガーの座標は (3, 6) とか表されます。

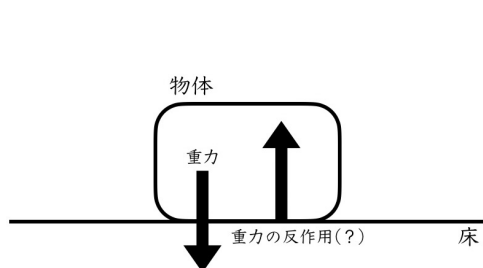


図 2.1

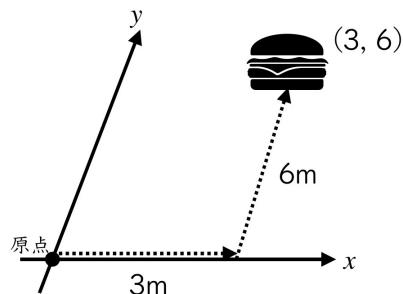


図 2.2

言い換えれば座標系というのは原点から見た位置というわけです。多くの場合、原点は主人公の A さんに置かれたり、地球の中心を原点にされたりと自己中心的なものです。原点が人の場合は観測者と呼ぶこともあります。しかも、座標系というのは動いているものを原点にする時もあります。例えば動いている電車に乗っている人を原点に取るとか。ここで、特筆すべきは、たとえ動いている座標系であっても、その原点からしたら動いているのは周りのものであって、自分は常に静止しているということです。新幹線に乗っている人から見たら、自分は静止していて、周りの景色が後ろに流れていくだけです。これが座標系の大まかな説明でした。

とにかく座標系というのは静止している観測者でも周囲から見て動いている観測者でも誰でも原点にして、設定できるものです。ではこれは力学ではどういうことを意味するのでしょうか。

例えば電車に乗っている A さんについて考えましょう。彼はスーツケースを持っていて、ふとしたときに電車が加速してしまい、スーツケースが動き出してしまった、としましょう。この時、A さん視点なので、A さんを原点にとった座標系を考えます。この時、 $F = ma$ の観点からなぜ、スーツケースが動き出してしまったのか考えましょう。まず、スーツケースが動き出したということは加速度が生じたということ、加速度が生じたということはすなわち、 $F = ma$ より力が加わったことを意味します。しかし、どこから力を受けたのでしょうか。そんな力はない、というのが事実です。スーツケースが動いたのは電車が動いたからだ、とお考えになるかもしれませんが、先ほど述べたとおり、観測者から見てあくまで静止しているのは自分であり、周囲が動いているだけです。半年ほど前、Apple Vision Pro が発表されましたが、Vision Pro を装着して、電車に乗っている仮想現実を体験したところで、座っていたソファが動き出した、とかはないわけです。しかし、観測者からすれば「自分が静止して、周りの景色が後ろに流れている」という点では実際に電車に乗っているのと、仮想世界で電車に乗っているのではなんら変わりはありません。それにもかかわらず、現実では電車が加速すれば、スーツケースが動き出します。長くなりましたが、結局言いたいのはこの座標系では $F = ma$ が成り立たないということだけです。このような座標系を非慣性系と呼ぶのです。

一方で、スーツケースの運動を電車の外の踏切で待っている時に一部始終目撃していた B さんがいたとしましょう。ここではこの B さんを原点にとった座標系を考えましょう。彼から見ると電車が加速してスーツケースが置いていかれたということになります。皆様の中にあまりこ

んなシュチュエーションを経験した方は居られないだろうから、身近な現象ではありませんが、B さんから見れば、スーツケースは電車とは独立して等速直線運動していることになります（摩擦は無視しています）。電車が先走っただけなんですね。だから電車内から見ればスーツケースが動いているように見える。もう少し、ちゃんと書くと、等速直線運動しているということは加速も減速もしない、すなわち加速度が 0 の状態です。であるので、 $F = ma$ より F も 0 になります。要はどこからも力を受けていないということですね。確かに重力は鉛直方向にのみ働くので水平方向の運動には関係ないし（それに、垂直抗力と打ち消し合う）、他に、スーツケースは電車の床と触れているのでここから接触力を受けている可能性も考えられますが、水平方向に働くのは摩擦力のみ。摩擦は今回無視しているので、他に力が思いつかない以上スーツケースには力がかからないわけです。だからスーツケースが B さん視点では等速直線運動するということと合致しています。つまり、この座標系では $F = ma$ はちゃんと成り立っています。矛盾なく説明できましたから。

要は、座標系をどのように取るかによって $F = ma$ が成り立つか成り立たないかが変わってしまうのです。そこで、 $F = ma$ がちゃんと成り立つ座標系を特定するために慣性の法則を定義する必要があります。なぜなら慣性の法則は $F = ma$ が成り立つ空間では必ず成り立つ最も基本的な性質だからです。まとめると $F = ma$ を仮定すれば慣性の法則の主張を導出することはできるのですが、 $F = ma$ が成り立つ座標空間を決定するために、慣性の法則の定義は不可欠なのです。

今度は作用反作用の話です。図のように、床に物体が置かれています。

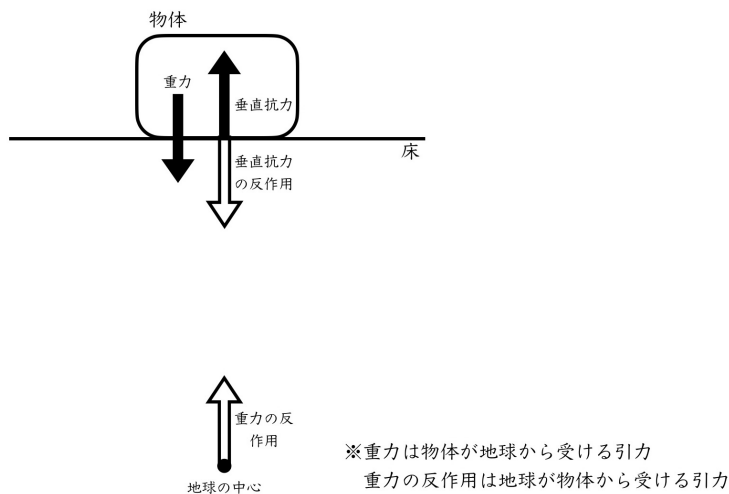


図 2.3

働いている力について考えましょう。まず、重力が常に物体にかかっています。 $F = ma$ より、力を受ける物体は必ず加速度を持つので、動き出さなければなりません、それにもかかわらず、静止しているのは、物体が床から重力と同じ大きさの力を反対向きに受けているからです。しかし、これは重力の反作用ではありません。そもそも、重力とは二物体の間の引き合う力

のことです。地球が太陽に引っ張られて円運動しているという具合に。地球は確かに太陽から重力を受けますが、太陽も地球から重力を受けます。これが反作用です。すなわち作用と反作用の力の種類は同じであり、作用は片方がもう片方に及ぼす力なのに対して反作用はもう片方が片方に及ぼす力のことです。床に置かれた物体の話に戻しましょう。物体にかかる重力とは地球が物体を引く力です。ですからその反作用は物体が地球を引く力なのです。この話を地球視点で考えてみると、地球は物体から反作用としての重力を受けています。それにもかかわらず地球が静止できているのはどうしてでしょうか。それは床を通じて物体が地球を圧しているからです。これは床が物体を押す力の反作用になっています。紹介し忘れてましたが、床が物体を押す力は垂直抗力と呼ばれ、接触力の一種です。まあ、兎に角、そういうわけで地球も、物体も静止できるわけなんですね。ちなみに、反作用が作用の 2 倍になるという世界線を考えると、やはり、地球には反作用としての 2 倍の重力と反作用としての 2 倍の垂直抗力がかかるため地球視点での釣り合いは取れています（物体が静止していることから重力＝垂直抗力となるため）。要は、作用の大きさと反作用の大きさが必ずしも一対一でなくても、うまいこと説明はつきそうです。だから作用反作用の法則を定義することに意味があるのです。とはいえ、どちらを作用でどちらを反作用にするかは完全に人間の主観なので、反作用が作用の 2 倍ということにしたら、どっちがどっちの 2 倍やねん、となるので、その辺で破綻しそうですね。

以上、私がいかに力学を見誤ったか、でした。とはいえ、言ってみれば慣性の法則は運動方程式の成り立つ空間の制限、作用反作用の法則は、二物体間の力のやり取りを意味します。具体的に加速度と力の関係を数式的に述べようとするのは運動方程式 $F = ma$ だけです。力学を数学的に見る以上、どうしても $F = ma$ をよく使う羽目になるので、このような間違いを犯した状態であっても、私は 2 年くらいは間違いに気づきませんでした。中一講義をすることで、力学を原理から確認することができ、その過程で間違いに気付いたというわけです。このような間違いは多分、きちんと原理から理解して勉強しておけば間違えるものではないと思いますが、力学の本質を語っている側面もあるので紹介させていただきました。実際の中一講義でも、こんな感じで原理の部分を一応講義した上で、後は問題を演習していってもらうことにしました。ほぼほぼ受験勉強に出てくるような内容であります。私が 2 年前くらいに、力学を始めて学んだ時も受験勉強用の教材の問題を解き進めていった学んだので、こういう講義になったわけです。こうやって考えると、最初は数学、そして物理の原理、物理の演習とか、だいたい私の個人的な経験から活動してきたわけです。それでも、中一の皆さんはめげずについてきてくれて、喜ばしい限りです。多い時で、10 人強の 82 回生が参加してくれましたし、今この記事を書いている頃も、10 人弱の中一の皆さんに残っていただいております。彼らの将来に期待しましょう。そして、私はここまで中一講義について長々と書いてきましたが、これを読んでいただいた読者の皆さんにも心より感謝申し上げたいと存じます。

(80 回生 沖友瑛)

2.2 中 2 講義

概要

ここでは、昨年度に行われた中 2 講義で扱った内容を参加者に一部紹介してもらいます。

2.2.1 はじめに

物理研究部は、現在約 8 人の中学 3 年生が所属しています。昨年度は、この中 3 (当時は中 2) のみんなでゼミを行っていました。1 学期は高校生の先輩に教えてもらう形式で、2・3 学期は中 2 のみんなで教えあうような形式で行っていました。講義内では物理のテキスト (参考文献にも書いていますが、いわゆる「小出物理」を使用しています、本記事内の画像もすべてこのテキストから引用しています) を参考に、毎回中 2 のメンバーのうちの一人がカテゴリーを一つ選び、それについて講義をするような形です。講義者は順番に回していました。

2.2.2 弦の振動

本項では、昨年度の中 2 講義で扱ったカテゴリーから一つ抜粋して紹介します。弦の振動についてです。

線密度 σ が一様な弦を張力 T で張り、これに弦に垂直な振動をさせる場合を考えます。

弦の平衡位置に一致させて x 軸をとり、位置における変位を u で表します。変位は時間 t にもよるため、 u は x と t の関数となります。この $u(x, t)$ がどのような法則にしたがう関数なのか調べていきます。

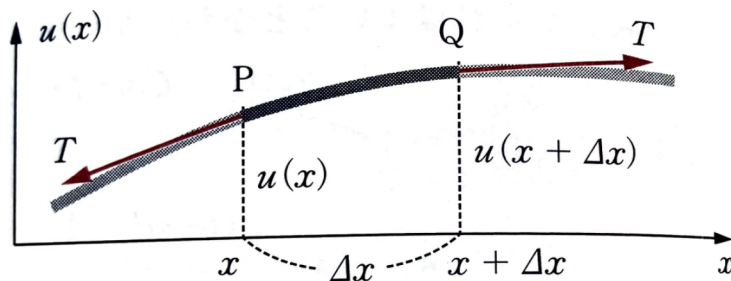


図 2.4

(x 軸が曲がっているのはご愛嬌ということで...)

図 2.4 のように弦を細分化したと考え、 x と $x + \Delta x$ の間の微小部分 PQ の運動を考えていくことにします。働いている外力は P と Q それぞれの隣接する部分から受ける張力 T となります。この合力がどうなるかを計算していきます。変位はあまり大きくなく、弦と x 軸とのなす角 δ は十分小さいことを考慮して近似すると、P で働く力の x 方向の成分は

$$-T \cos \delta_P \approx -T$$

P で働く u 方向の成分は

$$-T \sin \delta_P \approx -T \tan \delta_P = -T \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_x$$

Q で働く x 方向の成分は

$$T \cos \delta_Q \approx T$$

Q で働く u 方向の成分は

$$T \sin \delta_Q \approx T \tan \delta_Q = T \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x+\Delta x}$$

となります。なお、ここでいう $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_x$ とは、 x だけを変数のように見た微分係数なので、点 P(x 座標が x) における傾きを表していることになります。同様に $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x+\Delta x}$ も、 x だけを変数のように見た微分係数なので、点 Q(x 座標が $x + \Delta x$) における傾きを表していることになります。よって、PQ 部分に働く合力の x 成分は打ち消しあう（厳密には近似していますが、それでも微小角の 2 乗程度の値の差にしかありません）ため、 u 方向の成分のみ考えればよいことになります。 u 成分の和は、微分の定義式である $f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x$ を利用する（ $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_x$ を $f(x)$ に対応させる）と、

$$T \left\{ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_x \right\} = T \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_x \Delta x \quad (2.2.1)$$

と表すことができます。また、PQ に働く外力は、力学の最重要法則 $F = ma$ を用いることでも求められます。質量は線密度 \times 長さなので $\sigma \Delta x$ 、加速度は $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ となるため、この積がその値となります。これが (2.2.1) に等しいので、

$$\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta x = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x$$

となり、両辺を $\sigma \Delta x$ で割ると、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\sigma} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

を得ます。これが $u(x, t)$ の従う方程式となります。この種の式を一次元の波動方程式と呼んでいます。

この式の解は、連成振動のときの基準振動（運動のかたちが決まっているもの）に対応するものを求めていくことにします。定番の置き方にはなりますが、

$$u(x, t) = f(x) \cos(\omega t + \varphi)$$

とおいたものを先ほどの式に代入していきます。微分の過程は省略しますが、

$$-\omega^2 f(x) \cos(\omega t + \varphi) = \frac{d^2 f}{dx^2} \cos(\omega t + \varphi)$$

となります。さらに両辺を $\frac{T}{\sigma} \cos(\omega t + \varphi)$ で割ることにより、

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -k^2 f(x) \quad (k^2 = \frac{\sigma}{T} \omega^2)$$

という形にすることができ、この解を求めればよいことになります。

今回はあくまで弦を考えていますので、弦の両端 ($x = 0, l$) を固定するという境界条件を定めなければなりません。 $u(0, t) = u(l, t) = 0$ 、すなわち $f(0) = f(l) = 0$ というのがこれにあたります。 C_j を任意の定数とおくと、

$$f_j(x) = C_j \sin k_j x \quad (k_j = \frac{j\pi}{l}, j = 1, 2, 3 \dots)$$

がこれを満たします。 $\sin kx$ は二階微分すると、元の形を $-k^2$ 倍した値になるという性質があるため、このような形が解となるわけです。また、 $\sin kx = 0$ となるのは、 kx が π の整数倍の時であることから、(今回の解の形では) k_j は $\frac{\pi}{l}$ の整数倍のときに境界条件を満たすため、 j にはこのような条件がついてくるわけです。各 j に対する角振動数は、少し前で k を定義した時、 k_j を定義した時の式を用いて

$$\omega_j = \sqrt{\frac{T}{\sigma}} k_j = \frac{j\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$$

と表すことができます。また、振動数はこれの $\frac{1}{2\pi}$ 倍であることから、

$$\nu_j = \frac{j}{2l} \sqrt{\frac{T}{\sigma}} \quad (j = 1, 2, 3, \dots)$$

で与えられることとなります。

ここで、 $\sin k_j x$ というのは、 $j = 1$ のとき、 $x = 0, l$ のときに $f(x) = 0$ となります。また、 $j = 2$ のとき、 $x = 0, \frac{l}{2}, l$ のときに $f(x) = 0$ となります。さらに、 $j = 3$ のとき、 $x = 0, \frac{l}{3}, \frac{2l}{3}, l$ のときに $f(x) = 0$ となります。よって、 $f(x)$ が 0 になってから再び 0 になるまでの回数は、 j の値に等しいことがわかります。したがって、弦の基準振動は下の図のようになります。

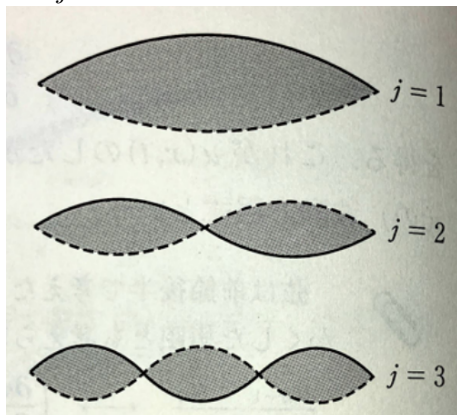


図 2.5

弦の振動とといえばこれ！ という形が現れましたね。

比較的容易に実験を行うことができ、しかもその結果が視覚的にわかりやすいというような内容を、計算で求めていくというのは、物理にしかない醍醐味なのではないでしょうか。

(現) 中3のみんなは、このように講義で扱う物理は理解するのが難しいと感じている人がほとんどですが、先生や先輩の力も借りてなんとか理解しようとする周りの姿を見ると、自分も頑張らなきゃなと思うようになります。これからも、みんなで物理を高めあい、この部活を盛り上げていきたいと思います。ここまでお読みいただきありがとうございました！

(81 回生 丸山遥輝)

2.2.3 参考文献

- 小出昭一郎. 物理学 (新装版). 裳華房, 2023

2.3 新高ゼミ

概要

ここでは、昨年度に行われた新高ゼミで扱った内容を講義者に一部紹介してもらいます。

2.3.1 はじめに

78 回生の星屋です。ここでは新高ゼミの活動紹介をしたいと思います。新高ゼミは高校から入った生徒を対象とし、簡単な大学物理を扱う講義です。まずは物理に必要な数学 (主に微積) を講義しました。その後、力学をやりました。力学では、高校物理のように公式をただ教えるのではなく、微積を使って、単振動やケプラー運動などを扱うようにしました。また、学んだことを使う面白い問題を扱うようにしました。例えば、物理チャレンジの 2 次の理論の過去問や、去年の部誌の寄稿記事の「ふりこの軌道」の問題や、スーパーボールの予想できない挙動を力学で解析する問題などを扱いました。力学を学びおえた後は砂川重信さんの「電磁気学の考え方」を使って電磁気学を講義しました。電磁気学の講義では電磁波の波動方程式の導出やそこから得られる結論を理解することを目標としてやりました。当初の目標通り電磁波のところまで終えることができ、講義担当者として非常に満足のいくものとなりました。さて、活動紹介だけで終わるのも寂しいので、今回は講義でも扱った惑星の軌道について書いてみようと思います。

2.3.2 万有引力と惑星の軌道

ここでは、惑星間に働く力は万有引力と分かっていることを前提として、そのもとで惑星の軌道がどのようなになっているかを考えます。これは、本来とは逆です。というのも、ニュートンはケプラーの 3 法則から惑星間に働く力が距離の逆二乗であることを解明したからです。それでも、このやり方がまったく意味がないわけではないので、今回は認めてください。

それではまず、万有引力の定義から。

万有引力の法則; 2 つの物体は、質量の積に比例し距離の 2 乗に反比例する引力を及ぼしあい、向きはもう一方の物体がある向きと同じ

これを式にすると、

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

G は万有引力定数と呼ばれる比例定数です。今回はこの万有引力から惑星の軌道を考えます。

さて、まず座標系の設定ですが、万有引力が中心向きの力で距離の二乗に反比例するので、直交座標よりは極座標の方が扱いやすいでしょう。次に運動方程式をたてるのですが、今回は太陽系の惑星を考え、太陽による万有引力は他の惑星同士の万有引力よりもはるかに大きく、無視できるとし、また、太陽は非常に重いので万有引力によりほとんど動かないとします。よって、質

量 m のある惑星の太陽を原点とする極座標での運動方程式は

$$\begin{cases} F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -G\frac{Mm}{r^2} \\ F_\theta = m\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dt}r^2\dot{\theta}\right) = 0 \end{cases} \quad (2.3.1)$$

のようにかけ、ただし、太陽の質量を M とした。

また、 $\frac{m}{r} \neq 0$ より、

$$\frac{d}{dt}r^2\dot{\theta} = 0$$

なので、

$$r^2\dot{\theta} = h(\text{定数}) \quad (2.3.2)$$

となります。これは面積速度一定もしくは角運動量保存に対応しています。

(2.3.1) の第 1 式を用いると、

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -G\frac{M}{r^2} \quad (2.3.3)$$

いま、時間微分で書かれていますが、軌道を求めるうえで時間微分は扱いにくいので、なんとか r を θ の関数で表せないか考えます。そこで、(2.3.2) より、

$$\dot{\theta} = \frac{h}{r^2}$$

より、

$$r\dot{\theta}^2 = r\left(\frac{h}{r^2}\right)^2 = \frac{h^2}{r^3}$$

さて、今度は \ddot{r} を h を使って表したいが残念ながら θ がないので、八方ふさがりのように思える。しかし、無理やりチェーンルールを用いて、時間微分を θ の微分にかえると、

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{d\theta}\right) = \frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{d\theta}\right) = \frac{h}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)$$

ここで、

$$u = \frac{1}{r}$$

とすると、

$$\begin{aligned} \frac{h}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) &= h^2u^2\frac{d}{d\theta}\left(u^2\frac{d}{d\theta}\frac{1}{u}\right) = h^2u^2\frac{d}{d\theta}\left(u^2\frac{du}{d\theta}\frac{d}{du}\frac{1}{u}\right) \\ &= -h^2u^2\frac{d}{d\theta}\left(u^2\frac{du}{d\theta}\frac{1}{u^2}\right) = -h^2u^2\frac{d}{d\theta}\left(\frac{du}{d\theta}\right) = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} \end{aligned}$$

(2.3.1) の第 1 式を書き換えると、

$$-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - h^2u^3 = -GMu^2$$

整理すると、

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{l} \quad (2.3.4)$$

ただし、

$$l = \frac{h^2}{GM} \quad (2.3.5)$$

としました。また、 l は長さの次元をもつ定数です。

(2.3.4) をかきかえると、

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = -u + \frac{1}{l}$$

ここで、

$$U = u - \frac{1}{l}$$

とすると、

$$\frac{d^2 U}{d\theta^2} = -U$$

となります。これは、単振動の微分方程式と同じ形をしているので、一般解は

$$U = A \cos(\theta + \alpha)$$

となります。ただし、 A, α は任意定数です。よって、

$$u = \frac{1}{l}(1 + e \cos(\theta + \alpha))$$

ただし、

$$e = Al$$

です。したがって、

$$r = \frac{l}{1 + e \cos(\theta + \alpha)} \quad (2.3.6)$$

これは高校数学で習う二次曲線の極方程式の形をしています。よって、惑星の軌道は二次曲線となることがわかります。また、惑星の定義が恒星の周りを回る天体であることから楕円軌道であると分かります。

いかがだったでしょうか?惑星の軌道が万有引力から説明できるというように理論が実際の現象を説明できるというのは物理の大きな魅力の 1 つだと思います。これを読んで物理に少しでも興味を持ってもらえたら幸いです。それでは、読んでくださりありがとうございました。

(78 回生 星屋峻祐)

2.3.3 参考文献

- 兵頭俊夫. 考える力学. 学術図書出版社, 2001

2.4 量子論ゼミ

概要

ここでは、昨年度に行われた量子論ゼミで扱った内容を一部紹介します。坂本真人さんの『場の量子論—不変性と自由場を中心に—』という本をみんなで読み進め、場の理論の基礎を学んできました。記事の前半では、電磁気学の4つの基本方程式(マクスウェル方程式)を、ゲージ場という物理量を用いて1つにまとめていきます。さらに電子のスピンを記述するディラック方程式を導出し、ゲージ不変性を中心に性質を調べます。後半では、マクスウェル理論の一般化であるヤン–ミルズ理論を紹介し、 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)_Y$ ゲージ理論として記述される標準模型を概観します。

2.4.1 基礎概念

最初に、この記事で使用する記法や基礎概念を説明します。

まず、次の4次元時空座標を導入します。

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z) \quad (2.4.1)$$

ここで t は時間で、 x, y, z は空間座標です。単位を合わせるために、 t には光速 c がかかっていることに注意しましょう。さらに、無限小だけ離れた時空点 $(ct, x, y, z), (ct + dt, x + dx, y + dy, z + dz)$ の距離 (の2乗) を

$$ds^2 \equiv c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (2.4.2)$$

で定義します。これは、添字を下につけた4次元時空座標

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv (ct, -x, -y, -z) \quad (2.4.3)$$

を用いると、

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 dx_\mu dx^\mu \quad (2.4.4)$$

というシンプルな形で表せます。また、計量テンソルと呼ばれる量

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.4.5)$$

を導入すると、距離 ds^2 は

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{00}(dx^0)^2 + \eta_{11}(dx^1)^2 + \eta_{22}(dx^2)^2 + \eta_{33}(dx^3)^2 \quad (2.4.6)$$

とも表されます。

次に、アインシュタインの縮約規則について説明します。これは、「上つきと下つきで同じ添字のペアが現れたとき、その添字に関して和をとるものとし、和記号を省略する」というものです。例えば、距離の定義式 (2.4.4), (2.4.6) は $ds^2 = dx_\mu dx^\mu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ のように簡略化されます。以下ではこの記法を用いて式を簡略化するので、 μ, ν などの上下ペアが出てきたときは「和記号が省略されているんだな」と思ってください。

ここで、ローレンツ変換を定義します。これは、 $\Lambda^\mu{}_\nu$ をパラメータとして

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad (2.4.7)$$

という形をした変換で、 ds^2 を不変にするもののことです。式 (2.4.7) は、次の行列表示を略記したものです。

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & \Lambda^0_2 & \Lambda^0_3 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 \\ \Lambda^2_0 & \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 \\ \Lambda^3_0 & \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (2.4.8)$$

ds^2 を不変にする変換はすべて時空並進とローレンツ変換で表すことができ、これらをまとめてポアンカレ変換といいます。ちなみに、式 (2.4.7) が ds^2 を不変にするためには

$$\eta_{\rho\lambda} \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\lambda{}_\nu = \eta_{\mu\nu} \quad (2.4.9)$$

が満たされている必要があります（これは式 (2.4.6) を用いて示せます）。

今からこれを用いて、物理量を分類していきます。まず、スカラー量 S はローレンツ変換の下での不変量として定義されます。つまり、スカラーの変換性は

$$S \longrightarrow S' = S \quad (2.4.10)$$

です。ベクトル量には、上つき添字をもつ反変ベクトル A^μ と下つき添字をもつ共変ベクトル B_μ の 2 種類があり、それぞれ

$$A^\mu \longrightarrow A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu, \quad B_\mu \longrightarrow B'_\mu = B_\nu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \quad (2.4.11)$$

のように変換します。このように変換性を定義すると、行列がうまく打ち消しあって距離 $ds^2 = dx_\mu dx^\mu$ が不変になります。同様に、2 階のテンソル $T^{\mu\nu}, T^\mu{}_\nu, T_{\mu\nu}$ の変換性は

$$T^{\mu\nu} \longrightarrow T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\lambda T^{\rho\lambda}, \quad T^\mu{}_\nu \longrightarrow T'^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\rho T^\rho{}_\lambda (\Lambda^{-1})^\lambda{}_\nu, \quad T_{\mu\nu} \longrightarrow T'_{\mu\nu} = T_{\rho\lambda} (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu (\Lambda^{-1})^\lambda{}_\nu \quad (2.4.12)$$

で定義されます。一見すると複雑ですが、 $T^{\mu\nu}, T^\mu{}_\nu, T_{\mu\nu}$ を $x^\mu x^\nu, x^\mu x_\nu, x_\mu x_\nu$ とおきかえて、ベクトルの変換性 (2.4.11) を使うとこの変換性が自然に導かれます。

最後に、自然単位系について説明します。これは主に素粒子論で使われる単位系で、光速 c と換算プランク定数 \hbar を 1 とします。素粒子の速さや角運動量を、相対論と量子論の基本定数である c と \hbar を単位として測ると言う意味で、この単位系は自然であるといえます。以下では自然単位系を採用し、特に断らない限り $c = 1, \hbar = 1$ とします。

2.4.2 マクスウェル方程式

電磁気学の基本方程式であるマクスウェル方程式を紹介します。これは、電場 \mathbf{E} と磁場 \mathbf{B} に関する 4 つの方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.4.13)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (2.4.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (2.4.15)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j} \quad (2.4.16)$$

からなります (自然単位系を用いています)。それぞれの式はモノポールの非存在, ファラデーの法則, ガウスの法則, アンペール-マクスウェルの法則を表しています。今からこの方程式系を, ゲージ場という量を用いてより簡単な形にまとめていきます。

次で定義される 4 元ベクトル場 $A^\mu(x) = (A^0(x), \mathbf{A}(x))$ をゲージ場といいます。

$$\mathbf{E} = -\nabla A^0 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (2.4.17)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.4.18)$$

これらの式は (2.4.13), (2.4.14) と同値になっています (実際, これらの回転・発散をとると (2.4.13) と (2.4.14) が導かれます)。つまり, ゲージ場が基本的な場であることを認めてしまえば, マクスウェル方程式の最初の 2 式は初めから考えなくていいということになります。実際, 量子論では電場や磁場よりもゲージ場が基本的な場となってきます*1。ちなみにゲージ場には不定性があり, ゲージ変換と呼ばれる変換

$$A^\mu \longrightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \Lambda(x) \quad (2.4.19)$$

に対して電場と磁場は不変です ($\Lambda(x)$ は時空座標 x^μ の任意関数)。ここで, 微分ベクトルを

$$\partial_\mu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \partial^\mu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (2.4.20)$$

で定義しました。

ここで場の強さという 2 階の反対称テンソル場 $F^{\mu\nu}(x)$ を

$$F^{\mu\nu}(x) = -F^{\nu\mu}(x) \equiv \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x) \quad (2.4.21)$$

で定義します。 μ, ν の値を具体的に代入して計算すると

$$F^{\mu\nu}(x) = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} = -F^{\nu\mu}(x) \quad (2.4.22)$$

*1 これを説明する量子力学的現象として, アハロノフ-ボーム効果というものがあります。これは, 電磁場のない領域にある荷電粒子が電磁ポテンシャルの影響を受ける現象です。

と表せます。このように定義すると、自動的に成り立つビアンキ恒等式

$$\partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} = 0 \quad (2.4.23)$$

からマクスウェル方程式 (2.4.13), (2.4.14) が導出されます。そして、方程式 (2.4.15), (2.4.16) は

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad (2.4.24)$$

と表すことができます。ただし、4 元荷電ベクトルを $j^\mu \equiv (\rho, \mathbf{j})$ で定義しました。これは実際に $\nu = 0, 1, 2, 3$ を代入してみるとすぐに示すことができます。

以上より、マクスウェル方程式は $\partial_\mu F^{\mu\nu} \equiv \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)) = j^\nu$ というたった 1 本の式で表されることがわかりました。ベクトルやテンソルの変換性 (2.4.11), (2.4.12) からわかるように、この式はローレンツ変換で不変です (相対論的不変性)。そして場の強さ $F^{\mu\nu}$ がゲージ変換 (2.4.19) で不変なのはすぐわかるので、この式はゲージ不変性ももちます。これらの不変性は最初の 4 つの式を眺めていてもなかなかわからないので、相対論的な形式にまとめることの嬉しさがわかってもらえると思います。さらに、 j^ν と同じ (ベクトルの) 変換性とゲージ不変性をもつ量で最もシンプルなのは $\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x))$ だけなので、相対論不変性とゲージ不変性の重要性を知っていれば極論マクスウェル方程式は覚えなくていいということになります。このように、物理法則の背景には不変性が隠れており、不変性をもつものだけが物理法則として採用されるのです。

2.4.3 ディラック方程式

次に、電子のスピンを記述するディラック方程式の説明に移ります。

アインシュタインの関係 $E^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 = p_\mu p^\mu - m^2 = 0$ から出発します。ただし、エネルギー運動量ベクトルを

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) \equiv (E, p^1, p^2, p^3) \quad (2.4.25)$$

で定義しました。ここで、かなり独特ですがアインシュタインの関係を次のように因数分解します。

$$p_\mu p^\mu - m^2 = (\gamma^\nu p_\nu + m)(\gamma^\mu p_\mu - m) \quad (2.4.26)$$

$\gamma^\mu (\mu = 0, 1, 2, 3)$ はこれから決める量です。方程式として右の因数を採用し*2、量子化の対応規則 $p^\mu \rightarrow i\partial^\mu$ を用いると以下のディラック方程式が導かれます。

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \quad (2.4.27)$$

すぐわかるように、 γ^μ は単なる数ではありません (もしそうなら、(2.4.26) の因数分解が成り立ちません)。そこで、 γ^μ が $N \times N$ 行列で、波動関数 ψ が N 成分をもつと仮定してみます。すると、反交換関係を $\{A, B\} \equiv AB + BA$ で定めたとき、

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} I_N \quad (2.4.28)$$

*2 実は、左の因数を採用して作っても物理的に等価であることが証明できます。

が成り立つならば (2.4.26) の因数分解が成り立ちます*3。反交換関係 (2.4.28) を満たす行列を γ 行列といいます。

このとき、 N の値は 4 以上の偶数に限られます。実際、 $\gamma^0\gamma^1 = -\gamma^1\gamma^0$ は定義からすぐわかるので、両辺の行列式をとって $\det \gamma^0 \det \gamma^1 = (-1)^N \det \gamma^1 \det \gamma^0$ すなわち $1 = (-1)^N$ となります。また、詳しい過程は省略しますが、パウリ行列を用いた計算で $N = 2$ の場合に解がないことも証明できます。次の可能性は $N = 4$ ですが、このときは

$$\gamma_D^0 \equiv \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma_D^j \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^j \\ -\sigma^j & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (2.4.29)$$

が解になっており、ディラック表示と呼ばれます。ここで、パウリ行列 σ^j は次で定義されます。

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.4.30)$$

ちなみにこの表示以外にも γ 行列は無数にあり、 γ_D^μ と相似な行列はすべて γ 行列になることが知られています。

さて、準備が整ったので、今からディラック方程式がスピン 1/2 の粒子を記述することを説明していきます。まず、軌道角運動量演算子 L とスピン角運動量演算子 S を

$$\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p} = \mathbf{x} \times (-i\nabla), \quad \mathbf{S} = \left(\frac{i}{2}\gamma^2\gamma^3, \frac{i}{2}\gamma^3\gamma^1, \frac{i}{2}\gamma^1\gamma^2 \right) \quad (2.4.31)$$

で定義します。これらは次の交換関係を満たします (ここで $[A, B] \equiv AB - BA$ です)。

$$[L^1, L^2] = iL^3, \quad [L^2, L^3] = iL^1, \quad [L^3, L^1] = iL^2 \quad (2.4.32)$$

$$[S^1, S^2] = iS^3, \quad [S^2, S^3] = iS^1, \quad [S^3, S^1] = iS^2 \quad (2.4.33)$$

また、 S はエルミート行列であり、その 2 乗は

$$\mathbf{S}^2 = \frac{3}{4}I_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right)I_4 \quad (2.4.34)$$

と計算されるので、 S はスピン 1/2 の角運動量演算子を表していることになります*4。

以下では、全角運動量 $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ が保存することを示します。まず、ディラック方程式を以下のように変形し、ハミルトニアン H を定義します。

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi, \quad H = -i\gamma^0 \sum_{i=1}^3 \gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} + m\gamma^0 \quad (2.4.35)$$

*3 これは、 $(\gamma^\nu p_\nu + mI_N)(\gamma^\mu p_\mu - mI_N) = p_\mu p_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu - m^2 I_N = p_\mu p_\nu \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}/2 - m^2 I_N$ から示すことができます。

*4 スピン S の大きさが j のとき、 S^2 の固有値は $j(j+1)$ で与えられます。

このとき $[\mathbf{J}, H] = 0$ が成り立ちます。実際 $[L^1, H]$ は

$$\begin{aligned} [L^1, H] &= \left[-ix^2 \frac{\partial}{\partial x^3} + ix^3 \frac{\partial}{\partial x^2}, -i\gamma^0 \sum_{j=1}^3 \gamma^j \frac{\partial}{\partial x^j} + m\gamma^0 \right] \\ &= -\gamma^0 \sum_{j=1}^3 \gamma^j \left[x^2, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] \frac{\partial}{\partial x^3} + \gamma^0 \sum_{j=1}^3 \gamma^j \left[x^3, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] \frac{\partial}{\partial x^2} \\ &= -\gamma^0 (-\gamma^2) \frac{\partial}{\partial x^3} + \gamma^0 (-\gamma^3) \frac{\partial}{\partial x^2} \quad \left(\because \left[x^k, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = -\delta^k_j \right) \\ &= \gamma^0 \gamma^2 \frac{\partial}{\partial x^3} - \gamma^0 \gamma^3 \frac{\partial}{\partial x^2} \end{aligned}$$

のように計算され、 $[S^1, H]$ も

$$\begin{aligned} [S^1, H] &= \left[\frac{i}{2} \gamma^2 \gamma^3, -i\gamma^0 \sum_{j=1}^3 \gamma^j \frac{\partial}{\partial x^j} + m\gamma^0 \right] = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 [\gamma^2 \gamma^3, \gamma^0 \gamma^j] \frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= \frac{1}{2} \left(0 + 2\gamma^0 \gamma^3 \frac{\partial}{\partial x^2} - 2\gamma^0 \gamma^2 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) = \gamma^0 \gamma^3 \frac{\partial}{\partial x^2} - \gamma^0 \gamma^2 \frac{\partial}{\partial x^3} \end{aligned}$$

と計算できます。したがって $[J^1, H] = [L^1, H] + [S^1, H] = 0$ となり、他の成分でも同様なので

$$[\mathbf{J}, H] = [\mathbf{L}, H] + [\mathbf{S}, H] = 0 \quad (2.4.36)$$

がわかります。ハイゼンベルグ方程式 $i(d\mathcal{O}(t)/dt) = [\mathcal{O}(t), H]$ を思い出すと、式 (2.4.36) は $d\mathbf{J}/dt = 0$ 、すなわち全角運動量の保存を表すことになります。これで目標の式が証明され、ディラック方程式がスピン 1/2 の電子を表すことがわかりました。

なお、ディラック方程式の相対論的不変性を示すには、ディラック場 $\psi(x)$ の変換性を特殊な形で定義する必要があります。これはスピノルの変換性と呼ばれますが、ここでは深く立ち入りません。

2.4.4 非可換ゲージ理論

ここではゲージ原理から電磁場中のディラック方程式を導き、その理論を拡張した非可換ゲージ理論を紹介します。

まず、時空座標に依存した波動関数の変換

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{-iq\Lambda(x)} \psi(x) \quad (2.4.37)$$

を考えます。これをゲージ変換と呼びます*5。ここで $\Lambda(x)$ は実関数であり、 q は電荷です*6。幾何学的な観点で見ると、この変換は各時空点 x^μ 上に定められる複素数 $\psi(x)$ を角度 $q\Lambda(x)$ だけ回転させるイメージです。これによると、我々が要請するゲージ原理、すなわち自然法則のゲージ不変性は

*5 (2.4.19) と同じ名前ですが、この伏線は後で回収されます。

*6 $q = 0$ のときは恒等変換になるように、 $\Lambda(x)$ の前に q を掛けています。

『複素平面 $\psi(x)$ の座標軸のとり方によらず自然法則は不変である』

と言い表せます。これは、アインシュタインの相対性原理「座標系のとり方によらず自然法則は不変である」と対比して捉えると面白いです。

ゲージ原理に基づいて電磁場中のディラック方程式を導出してみましょう。自由ディラック方程式 $[i\gamma^\mu \partial_\mu - m]\psi(x) = 0$ から出発します。まず、積の微分公式を用いて $\partial_\mu \psi(x)$ を変換してみると、

$$\partial_\mu \psi(x) \longrightarrow \partial_\mu \psi'(x) = \partial_\mu e^{-iq\Lambda(x)\psi(x)} = e^{-iq\Lambda(x)} \{\partial_\mu - iq\partial_\mu \Lambda(x)\} \psi(x) \quad (2.4.38)$$

となります。ここで余分な項 $iq\partial_\mu \Lambda(x)$ を取り除くために新しい自由度としてゲージ場 $A_\mu(x)$ を導入し、次のように微分 ∂_μ を共変微分 D_μ におきかえます。

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu + iqA_\mu(x) \quad (2.4.39)$$

さらに共変微分に対して、「 $D_\mu(x)\psi(x)$ が $\psi(x)$ と同じ変換性をもつ」ことを要請します。すなわち、

$$D_\mu(x)\psi(x) \longrightarrow D'_\mu \psi'(x) = e^{-iq\Lambda(x)} D_\mu \psi(x) \quad (2.4.40)$$

です。ここで $D'_\mu = \partial_\mu + iqA'_\mu(x)$ です。この要請から、ゲージ場の変換性が次のように決まります。

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x) \quad (2.4.41)$$

この式の導出は容易なので省略しますが、よく見るとこれは (2.4.19) と全く同じ変換になっています。これが、(2.4.19) と (2.4.37) の名前が同じ理由です。

このように変換性を決めて (2.4.39) の置き換えを行うと、目標だった電磁場中のディラック方程式が導かれます。

$$[i\gamma^\mu (\partial_\mu + iqA_\mu) - m]\psi = 0 \quad (2.4.42)$$

ゲージ場の変換性によって (2.4.38) の余分な項がうまく打ち消され、この方程式ではゲージ不変性が成り立っています。このようにして得られた相互作用を最小結合といいます。

さて、今からこれを拡張した非可換ゲージ理論を説明していきます。今まで調べてきたゲージ不変性は、群の言葉で言えば $U(1)$ ゲージ不変性に対応します。なぜなら、波動関数のゲージ変換 (2.4.37) の位相 $e^{-iq\Lambda}$ がユニタリー群 $U(1)$ に属するからです。これを一般の特殊ユニタリー群 $SU(N)$ に拡張して得られる理論を非可換ゲージ理論、あるいはヤン–ミルズ理論といいます。

まず、 N 成分自由ディラック方程式から出発します。

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu - m]\Psi(x) = 0, \quad \Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi^1(x) \\ \psi^2(x) \\ \vdots \\ \psi^N(x) \end{pmatrix} \quad (2.4.43)$$

添字の省略が多くて混乱するかもしれませんが、行列表示すると

$$\begin{pmatrix} i\gamma^\mu \partial_\mu - mI_4 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & i\gamma^\mu \partial_\mu - mI_4 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & i\gamma^\mu \partial_\mu - mI_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^1(x) \\ \psi^2(x) \\ \vdots \\ \psi^N(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2.4.44)$$

となります。

ここで、 $\mathcal{A}_{su(N)} = \{X \text{ は } N \times N \text{ 複素行列} \mid X = X^\dagger, \text{tr} X = 0\}$ という集合を考えます。このとき、 $SU(N)$ の任意の元 $U \in SU(N)$ は、 $\mathcal{A}_{su(N)}$ の元 X を用いて

$$U = e^{iX} \in SU(N), \quad X \in \mathcal{A}_{su(N)} \quad (2.4.45)$$

と表せることが知られています*7。さらに、 $\mathcal{A}_{su(N)}$ は $N^2 - 1$ 次元の実ベクトル空間なので、基底行列 $\{T^a\} (a = 1, \dots, N^2 - 1)$ が存在します。このとき任意の $X \in \mathcal{A}_{su(N)}$ は

$$X = \sum_{a=1}^{N^2-1} \theta^a T^a \quad (\theta^a \in \mathbb{R}) \quad (2.4.46)$$

と展開可能です。

この知識を踏まえ、拡張されたゲージ変換を次のように定義します。

$$\Psi(x) \longrightarrow \Psi'(x) = U(x)\Psi(x), \quad U(x) = e^{-ig\Lambda(x)}, \quad \Lambda(x) = \sum_{a=1}^{N^2-1} \theta^a(x) T^a \quad (2.4.47)$$

ここで、結合定数 g は相互作用の強さを表すパラメータです。あとは先ほどと同様にゲージ場を導入し、微分を共変微分におきかえます（ここで A_μ は $N \times N$ 行列です）。

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu(x) \quad (2.4.48)$$

$SU(N)$ ゲージ場 $A_\mu(x)$ のゲージ変換性は、「 $D_\mu \Psi(x)$ が $\Psi(x)$ と同じ変換性をもつ」という要請、すなわち

$$D_\mu \Psi(x) \longrightarrow D'_\mu \Psi'(x) = U(x) D_\mu \Psi(x) \quad (2.4.49)$$

から次のように決まります。

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = U(x) A_\mu(x) U^{-1}(x) + \frac{i}{g} \{ \partial_\mu U(x) \} U^{-1}(x) \quad (2.4.50)$$

最後に (2.4.41) のおきかえ実行することで、 $SU(N)$ ゲージ不変性をもつ目標の方程式が得られます（ゲージ場のおかげで余分な項が相殺されます）。

$$[i\gamma^\mu (\partial_\mu + igA_\mu(x)) - m] \Psi(x) = 0 \quad (2.4.51)$$

ちなみに、 $A_\mu(x)$ を行列ではなく単なる関数とし、 $U(x) = e^{-ig\Lambda(x)}$ において (2.4.50) に代入すると、 $U(1)$ ゲージ変換 (2.4.41) が再現されます。ヤン–ミルズ理論はマクスウェル理論の拡張になっているというわけです。

*7 行列の指数関数はテイラー展開で定義されます。またこの定理の証明は、ユニタリー対角化などのやや難しい議論を含んでいるので省略します。詳しく知りたい方はリー群とリー代数について調べてみてください。

2.4.5 標準模型の概観

ここでは今までの議論を使い、強い力・弱い力・電磁気力を統一する標準模型、すなわち $SU(3) \times SU(2) \times U(1)_Y$ ゲージ理論を概観します。さらに、ゲージ原理をもとにクォークとレプトンが従う方程式を具体的に求めてみます。

まず、 $SU(3)$ ゲージ理論として記述される量子色力学を紹介します。これは、これまで発見されている 6 種類のクォーク (u, d, s, c, b, t) の間に働く強い力を記述する理論です。なお、電子の仲間である 6 種類のレプトン (e^- , ν_e , μ^- , ν_μ , τ^- , ν_τ) には強い力が働かないことがわかっています。

それぞれのクォークは色と呼ばれる 3 つの自由度 q^a ($a = 1, 2, 3$) をもっていて*⁸、クォークの (スピノル 4 成分) 波動関数 $q^a(x)$ は $SU(3)$ ゲージ変換

$$q^a(x) \longrightarrow q'^a(x) = \sum_{b=1}^3 U(x)^a_b q^b(x), \quad U(x) \in SU(3) \quad (2.4.52)$$

の下で不変なディラック方程式に従います。すると、この $SU(3)$ ゲージ不変性に伴ってグルーオンと呼ばれる $SU(3)$ ゲージ場 $G_\mu(x)$ が存在し、微分 ∂_μ は共変微分 $D_\mu = \partial_\mu + ig_3 G_\mu$ で置きかわります (g_3 は結合定数)。ちなみに、グルーオンとの相互作用によってクォークがいくつか集まり、 $SU(3)$ 変換で不変な複合粒子が形成されることが知られています。これをクォークの閉じ込めといい、この現象を解析的に示すことはミレニアム懸賞問題の 1 つになっています。解けたら 100 万ドルもらえるので、金欠の人は頑張ってみてください。

次に、 $SU(2) \times U(1)_Y$ ゲージ理論として記述される電弱理論、あるいはワインバーグ-サラム理論を紹介します。これは、電磁相互作用と弱い相互作用を統一して記述する理論です。

左巻きのクォークとレプトンは 2 つで組をなして、次のように $SU(2)$ 2 重項を構成します。

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L^- \end{pmatrix} \quad (2.4.53)$$

2 重項は $SU(2)$ ゲージ変換性もちます。よって、微分 ∂_μ は共変微分 $D_\mu = \partial_\mu + ig_2 W_\mu$ で置きかわれることになります (g_2 は結合定数、 W_μ はゲージ場)。一方、クォーク・レプトンの右巻き成分*⁹は次の $SU(2)$ 1 重項を構成し、これは $SU(2)$ 変換の下で不変です。

$$u_R, d_R, c_R, s_R, t_R, b_R; e_R^-, \mu_R^-, \tau_R^- \quad (2.4.54)$$

したがって、クォーク・レプトンの右巻き成分はゲージ場 W_μ と相互作用しないということになります。左巻きと右巻きで相互作用の形が違うので、ワインバーグ-サラム理論では空間反転不変性が破れています。

ワインバーグ-サラム理論に含まれる $U(1)_Y$ ゲージ不変性は、マクスウェル方程式などがもつ電磁場の $U(1)_{em}$ ゲージ不変性そのものではないことに注意しましょう。それぞれのクォーク

*⁸ 例えば、アップクォーク u には 3 種類の u^1, u^2, u^3 が存在します。もちろん、実際にクォークに色がついているわけではありません。

*⁹ 右巻きニュートリノは現在観測されていないので省いています。

とレプトンに対してハイパーチャージという $U(1)_Y$ 電荷 Y を与えれば、 $U(1)_Y$ ゲージ相互作用は共変微分

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu \quad (2.4.55)$$

として決まることになります (g_1 は結合定数、 B_μ はゲージ場)。クォーク・レプトンの $U(1)_Y$ 電荷 Y は、次の表で与えられることが実験でわかっています。

クォーク・レプトン	$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}$	u_R, c_R, t_R	d_R, s_R, b_R	$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L^- \end{pmatrix}$	e_R^-, μ_R^-, τ_R^-
$U(1)_Y$ 電荷 Y	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	-1	-2

以上より、クォークとレプトンの従う方程式が完全に決まります。第 1 世代のクォーク・レプトンの方程式を書き下すと、

$$i\gamma^\mu \left\{ \partial_\mu + ig_3 G_\mu + ig_2 W_\mu + i\frac{g_1}{2} \left(\frac{1}{3} \right) B_\mu \right\} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} = 0 \quad (2.4.56)$$

$$i\gamma^\mu \left\{ \partial_\mu + ig_3 G_\mu + i\frac{g_1}{2} \left(\frac{4}{3} \right) B_\mu \right\} u_R = 0 \quad (2.4.57)$$

$$i\gamma^\mu \left\{ \partial_\mu + ig_3 G_\mu + i\frac{g_1}{2} \left(-\frac{2}{3} \right) B_\mu \right\} d_R = 0 \quad (2.4.58)$$

$$i\gamma^\mu \left\{ \partial_\mu + ig_2 W_\mu + i\frac{g_1}{2} (-1) B_\mu \right\} \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L^- \end{pmatrix} = 0 \quad (2.4.59)$$

$$i\gamma^\mu \left\{ \partial_\mu + i\frac{g_1}{2} (-2) B_\mu \right\} e_R^- = 0 \quad (2.4.60)$$

となります (第 2・第 3 世代でも全く同様です)。ここで記法の注意点として、例えば (2.4.56) では、 G_μ は 3×3 行列として u, d それぞれに作用し、 W_μ は 2×2 行列として 2 成分ベクトル $\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L^- \end{pmatrix}$ に作用します。また u, d クォークの色の添字は省略してあります。

すぐに見てわかるように、これらの方程式は質量項を含んでいません。 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)_Y$ ゲージ不変性の要請からクォーク・レプトンの質量項は禁止されるのです*¹⁰。しかしながら、実際には電子もクォークも質量をもっているはずで、これが素粒子物理における質量起源の問題で、解決するためにはヒッグス場との相互作用項を付け加える必要があります。ここでは、これ以上深いところには立ち入らないことにします。

2.4.6 おわりに

間違った記述などがあったかもしれませんが、物理学の広がりや奥深さを実感していただけたかと思います。私たちが住んでいる世界の自然法則を解明するには、その基本要素である素粒子の法則を明らかにする必要があります。そして、素粒子の世界は量子論と相対論によって支配されており、場の量子論の枠組みの中でそれらの法則が記述されるのです。この記事を通して、自然法則の理解において場の量子論が非常に重要な役割を果たすということが、雰囲気だけでも伝わったんじゃないかと思います。

*¹⁰ この辺りのことをきちんと確認するためには、カイラリティという概念を用いて右巻き・左巻きの粒子を議論する必要があります。詳細は長くなるので省略します。

この記事が物理に興味を持つひとつのきっかけになってくれたら嬉しいです。最後まで読んでいただきありがとうございました！

(79 回生 笠原琉偉)

2.4.7 参考文献

- 坂本真人. 場の量子論—不変性と自由場を中心にして—. 裳華房, 2014

第 3 章

寄稿記事

3.1 色の螺旋

3.1.1 はじめに

この記事では、展示説明で紹介した、「色の螺旋」について詳しく解説していきます。この記事は、展示説明が既読であることを前提として書いています。

展示説明での解説を詳しく理解するためには、光学、電磁気学、そしてちょっとの化学についての知識が必要になります。それらについてこれから一つずつ見て行くことにしましょう。

3.1.2 光とは何か

概要

まずはこの現象を理解するための基礎知識として、「光とは何か」について説明していきます。光の正体については、科学者たちの間で粒子説と波動説が長い間争われていました。この論争に決着をつけたのが、1850 年に行われた、フーコーの光速測定実験です。ニュートンによる光の“粒子説”で光の速度が空気中よりも水中で速くなるとしていた中、フーコーは水中における光の速度が空気中のそれよりも小さいことを実験で示し、光が波であることを証明しました。そして 1864 年、マクスウェルは論文にて電磁波の存在を予言し、光は電磁波の一種であるという仮説を立てました。そしてそれは、現在までに様々な現象や実験によって裏付けられてきました。例えば有名なものとして、電磁波の速さと光の速さが計算上一致した、という事実をご存じの方も多いかもしれません。

ところで、量子力学などの現代物理学では実はこの限りではないのですが、今回は古典物理学を考えることにします。さて、光が電磁波であると分かったことで、この章のタイトルはこう変化します。

「光とは何か」→「電磁波とは何か」

電磁波

電磁波とは、電場と磁場が相互作用しながら進んでいく波のことを言います。以下では、電磁波を扱ううえで基礎的な事柄について紹介します。

■電磁波の存在 電磁気学には、電場と磁場について記述したとても基礎的な式があります。マクスウェル方程式です。(ここでは、 \mathbf{B} を磁場と呼んでいます)

マクスウェル方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.1.4)$$

これらの式は、電磁気学のすべての根本と言っても過言ではないほど重要な役割を果たしています。この式に従って、電場や磁場が存在しているのです。

マクスウェル方程式を見ると、電場と磁場が相互作用している式を見つけることができます。この式から、互いに作用し合って電磁波が出来るんだろうな、となんとなく想像をすることが出来るかもしれませんが、マクスウェル方程式を解くと、このような式が出てきます。

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad \nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad (3.1.5)$$

これらは、波動方程式

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nabla^2 u$$

と同形であるため、真空中の電場や磁場はともに波となって伝わっていくことがわかります。この波を、電磁波といいます。

ここで、波動方程式に (3.1.12) や (3.1.13) を代入すると、波の速度 v は

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (3.1.6)$$

となり、これを計算すると光速 c と一致します。これも光が電磁波の一種であることの大きな証左になりました。さて、電磁波が波動であるということが分かったことで、電磁波を正弦波の重ね合わせで表すことができるようになりました。今後はこれを考慮して、正弦波単位で波について考えます。これは、フーリエ級数に関連する話ですので、気になった方は調べてみてください。

電磁波において、電場と磁場は相互作用して進んでいきます。このことより、現象を理解するためには電場についての計算のみで十分な場合が多いです。以降、基本的に磁場については省略します。

さて、前セクションで導出した電磁波の波動方程式を使って、まずは x の方向に進む電磁波の一般解を求めると

$$g(x + ct) + h(x - ct) \quad (3.1.7)$$

という式が得られます。この式より、特殊解として次の式を考えます。

$$\mathbf{E}(x, t) = E_0 \cos \omega \left(\frac{x}{c} - t \right) \quad (3.1.8)$$

これが正弦波の解です。 E_0 が振幅 (=電場の強さ) を表し、 ω が角振動数 (2π 秒あたり何 rad 進んだか) を表します。この形の式は良く出て来ます。

■電磁波のベクトル表示 このセクションでは正弦波の便利な表示である、回転するベクトルによる表示を紹介します。図 3.1 のように、 x, y 平面上に回転するベクトル \mathbf{A} を配置して、 \mathbf{E} と一対一対応させると、 x 軸とベクトルのなす角が位相 $\omega(\frac{x}{c} - t)$ を表し、ベクトルの絶対値が振幅を表し、ベクトルの x 座標が時刻 t における電磁波の変位を表します。さて、このベクトル表示は角振動数が同じ波の重ね合わせを考えると真価を発揮します。変位を α で表すことができる波と β で表すことができる波の足し合わせは、図 3.2 のように $\alpha + \beta$ で表すことができます。



図 3.1 ベクトル表示

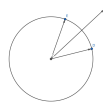


図 3.2 ベクトルの足し合わせ

さて、上のようなイメージの位置ベクトル \mathbf{A} は

$$\mathbf{A} = (A_0 \cos \omega(t - \frac{x}{c}), A_0 \sin \omega(t - \frac{x}{c})) \quad (3.1.9)$$

と表すことができますが、 $(\cos \theta = \cos(-\theta))$ のような回転するベクトルを表すのに便利な座標系があります。それが、「複素数平面」です。実軸と虚軸を用いて複素数平面上でベクトル \mathbf{A} を表すと

$$\mathbf{A} = A_0 \cos \omega(t - \frac{x}{c}) + i A_0 \sin \omega(t - \frac{x}{c}) \quad (3.1.10)$$

のように書けます。この表示の何が良いのかというと、「オイラーの公式」を使えることです。

オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (3.1.11)$$

オイラーの公式を使って \mathbf{A} を表すと

$$\mathbf{A} = A_0 e^{i\omega(t - x/c)} \quad (3.1.12)$$

のように書くことができます。複素数表示の利点として、ベクトル表示の場合のように同じ角振動数の波であれば、波の足し合わせを単純な足し合わせとして表現できることがあります。また、微分や積分の形が簡単になるのも利点のひとつです。



図 3.3 面電荷

注意しなければならないのはベクトル表示や複素数表示で表されているベクトル \mathbf{A} ともともと表したかった \mathbf{E} は別物であるということです。一対一対応で \mathbf{A} の実部と \mathbf{E} の変位を対応させているだけなので、表しているものは同じでもベクトル自体は別物であるということに気を付けなければなりません。ただ、 $E_0 = A_0$ は成り立ちます。

■真空でない場合の電磁波 さて、以上で真空での電磁波の存在を示しましたが、砂糖水を通る光を考えるためには、砂糖水の電荷の運動によって生まれる電場の波を考える必要があります。電荷が動くことによって、電場の変化が発生し、(或いは電流が起こると捉えることもできますが) 電磁波を生み出すことは想像できるでしょう。この電場 \mathbf{E} は Liénard-Wiechert ポテンシャルから計算する必要がありますが、この結果の導出は非常に面倒なため、結果だけ引用させていただきます

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} [\mathbf{r} \text{ に直角に投影された } \mathbf{a}(t - \frac{r}{c})] \quad (3.1.13)$$

になります。この式は、“観測点が電荷から十分遠方の場合に成り立つ”近似を用いています。ここで、 \mathbf{r} は振動する電荷を基準とした観測点の位置ベクトル、 \mathbf{a} は振動する電荷の加速度です。ここで重要なのは、 \mathbf{E} は \mathbf{r} 、つまり進行方向に対して垂直になっているということです。言い換えると、電場は横波であるということです。

ところで、今回の展示で照射する光は、面上に配置された電荷の運動によって生み出される電磁波に近いものになります。

例えば、図 3.3 のような電荷の配置をした場合、生み出される電場はほとんどの方向で打ち消し合い、この面に垂直な方向でのみ強め合うことになります。その結果、電場の距離による減衰効果が緩やかになるようないわゆる“光線”を得ることができます。つまり、このような場合は距離による電場の減衰をあまり考えなくても良いということになります。

3.1.3 屈折率の本質

屈折率

さて、前提知識の整理はここまでにして、ここから本題に入っていきます。これからの説明において最も重要なキーワードが、「屈折率」です。聞いたことがないという人のために簡単に説

明すると、「真空中の光速 c を媒質中の光速 v で割った値 $n = c/v$ 」のことです。

ここからは、媒質を通る光の見かけの光速がなぜ変化するのかについて考えていきます。

今回、私たちが考えるのは”偏光板を通った白色光が砂糖水を通る”という状況なので、直線偏光——特にわかりやすさのために z 軸方向の——を考えます。さて、ここで砂糖水を通ったあとの電場を考えると、明らかに砂糖水それぞれの電荷 (具体的には原子核や電子) の影響を受けるので

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_s + \sum_{\text{砂糖水の電荷}} \mathbf{E}_{\text{各電荷}} \quad (3.1.14)$$

のようになります。ここで \mathbf{E}_s は照射した白色光による電場であり、ほかに電荷や電流がない場合の電場でもあります。つまり、式の右の項にあたる電場が、光の速さが変わっているかのよう修正しているということになります。

ところで、砂糖水の電荷による電場は砂糖水を通った後の光だけでなく、逆方向にも影響を及ぼします。これが、“光の反射”です。

修正の電場

さて、ここからは、物質の電荷がどのような電場を作り、それがもともとの電場にどのような影響を与えるかを考えていきます。

これ以降、電場の波とそれを複素数表示したもので表記上は区別しませんが、本質的には複素表示したうちの実部が本当の波の変位となることに注意してください。ここで、砂糖水の電荷、または”修正の電場”を \mathbf{E}_a とおきます。もし仮に砂糖水がないと仮定すると、右に進む電場の波は

$$E_s = E_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \quad (3.1.15)$$

となります。ここで () 内の正負が逆転していますが、 $\cos \theta = \cos(-\theta)$ となることを考えれば気にする必要はないです。そして、これは指数関数を使って次のようにも表すことができます。

$$E_s = E_0 e^{i\omega(t-x/c)} \quad (3.1.16)$$

さて、現実には砂糖水が存在するので、もっと遅い速さで光は進んでいるように見えます。今回考える砂糖水の厚さを Δx とすると、砂糖水が無ければこの距離を $\Delta x/c$ の時間で通り過ぎますが、実際は速さ c/n で通り過ぎるように見えるので、 $n\Delta x/c$ の時間かかります。つまり、時間は

$$\Delta t = \frac{(n-1)\Delta x}{c}$$

追加でかかることになります。

これを考慮して、砂糖水を通り抜けた後の電場は

$$E_{\text{後}} = E_0 e^{i\omega[t-(n-1)\Delta x/c-x/c]} \quad (3.1.17)$$

$$= E_0 e^{i\omega(t-\phi)} \quad \left(\phi = \frac{x-(n-1)\Delta x}{c} \right) \quad (3.1.18)$$

と書くことができます。この式から、位相が $\omega(n-1)\Delta x/c$ 押し戻されているのが分かります。さて式 3.1.17 は、以下のように書くこともできます。

$$E_{\text{後}} = e^{-i\omega(n-1)\Delta x/c} E_s \quad (3.1.19)$$

そして、 Δx が十分に小さい場合、極端に言えば電荷一枚分の場合などでは、次のマクローリン展開による 1 次近似を用いることができます。

$$e^x \doteq 1 + x \quad (3.1.20)$$

つまり

$$e^{-i\omega(n-i)\Delta x/c} = 1 - \frac{i\omega(n-1)\Delta x}{c} \quad (3.1.21)$$

これを式 3.1.19 に代入すると

$$E_{\text{後}} = E_s - \frac{i\omega(n-1)\Delta x}{c} E_s \quad (3.1.22)$$

となり、この式の第 2 項はまさしく E_a そのものになっていることがわかります。

さて、ここまでやってきたことは、複素数平面の図を用いると非常にわかりやすくなります。

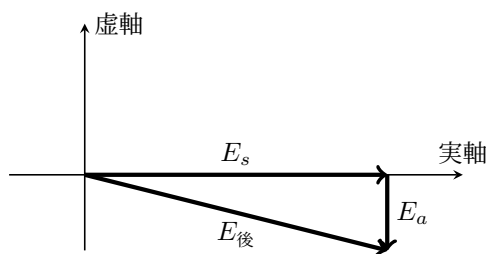


図 3.4 複素数平面

まず、平面上に E_s をかきます。ここで、 E_s を実軸に重ねます。(必ずそうしなければならないというわけではありません) E_s が実数になるとき、 E_a は純虚数になることが式 3.1.22 からわかります。つまり、複素数平面上では E_s と E_a は垂直になります。ここで、 Δx が十分に小さいとき、つまり E_a が十分に小さいとき

$$|E_s| \doteq |E_{\text{後}}|$$

が成り立ち、位相 (すなわちこの図でいう角度) が少しずれていることがわかります。

屈折率の導出

式 3.1.22 にて E_a を求めることには成功しましたが、まだ問題点が残っています。それは、屈折率 n です。この数字の本質をまだ求められていません。そこで、砂糖水の電荷の運動からこの屈折率を求めてみます。

さて、ここで光源から放たれているのが完璧な光線だと仮定すると、電場 E_s の位相は砂糖水の層の上のすべてで同じになります。ここでは分かりやすさのために砂糖水の層がとても薄いものだとします。層の位置を $x = 0$ とすると、電場 E_s は

$$E_s = E_0 e^{i\omega t} \quad (3.1.23)$$

となります。砂糖水の層に存在する電子には、この電場を受けて電気力 $q_e E_s$ が掛かります。では、この力を受けて電子はどのような運動をするのでしょうか。ここでは、それを考えるために束

縛電子の運動を記述するモデル、“ローレンツモデル”を採用して計算していきます。ローレンツモデルでは、電気双極子(この場合原子)を古典力学の強制振動と考えると運動方程式を立てます。つまり、+の電荷をもつ原子核と-の電荷をもつ電子の引き合う力を、電子の位置に比例する復元力によって表すということです。ここでは、上下に振動することを考えて位置を z で表します。この単振動の固有振動数を ω_e とすると、運動方程式は

$$m_e \left(\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega_e^2 z \right) = F \quad (3.1.24)$$

F は外力を表しますが、この場合の F は E_s によるもので

$$F = q_e E_s = q_e E_0 e^{i\omega t} \quad (3.1.25)$$

よって、電子の運動方程式は

$$m_e \left(\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega_e^2 z \right) = q_e E_0 e^{i\omega t} \quad (3.1.26)$$

となります。この解を $z = A e^{i\omega t}$ と仮定して代入すると

$$\begin{aligned} -m_e A \omega^2 e^{i\omega t} + m_e A \omega_e^2 e^{i\omega t} &= q_e E_0 e^{i\omega t} \\ A &= \frac{q_e E_0}{m_e (\omega_e^2 - \omega^2)} \\ z &= \frac{q_e E_0}{m_e (\omega_e^2 - \omega^2)} e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

が得られます。これで知りたかった電子の運動が分かりました。ただし、これは少し簡易化されたモデルであることをここに書いておきます。この方程式には、 $\frac{dz}{dt}$ に比例した“減衰力”という項が省かれており、この項は入ってくる光のエネルギーが物質に吸収されることを表しています。この項がないと、例えば深海でも地上と同じくらい明るいことになってしまいます。あるいは、真っ黒な壁を光は何事もなく通過していくことになります。明らかにおかしいですね。ただし、これを計算に入れると屈折率に虚数が現れてしまい、少し複雑になりすぎるので、ここでは省略します。

さて、得た式の感覚を得るために少し具体例を挙げます。 z は、 $\omega_0^2 - \omega^2$ に反比例することが式 3.1.27 からわかります。つまり、ローレンツモデルによる単振動の固有振動数(固有周波数)と電場 E_s の周波数が近ければ近いほど z は増加していき、またそれらがかけ離れているほど z は減少していきます。これは、ブランコでタイミング良く背中を押すとどんどん加速していくが、タイミングを合わせずに背中を押すとあまり大きく振れないこととよく似ています。

今、電子の位置 z が求まったので、あとはこの z による電場を求めてしまえば屈折率の正体が明かされることになります。場面設定として、ここでは砂糖水の層の中心を $x = 0$ と設定し、中心から砂糖水の各電荷までの距離を ρ とします。面電荷密度を σ 、観測点を $(x, 0, 0)$ として、電荷から観測点までの距離を r とします。

観測点での電場を計算するために、まずは各電荷が作る電場を計算していきます。そのために式 3.1.13 を使います。今回、砂糖水の電荷は上下に振動し、それに対して垂直方向に進む電場を考えているので、“直角に投影”の部分は考えなくても大丈夫です。 $\mathbf{a}(t - r/c)$ はここでは

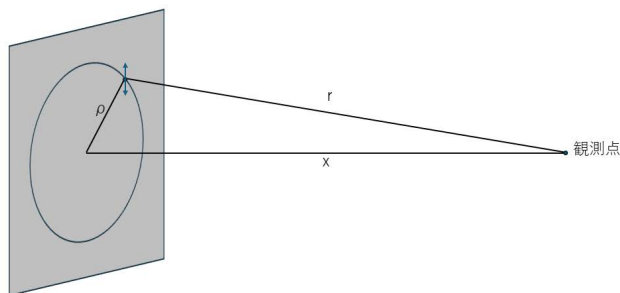


図 3.5 平面上の振動する電荷による電場

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{d^2}{dt^2} z \\
 &= \frac{q_e E_0 \omega^2}{m_e (\omega^2 - \omega_e^2)} e^{i\omega t}
 \end{aligned} \tag{3.1.28}$$

になります。

よって、電荷による電場は、観測点と電荷の位置とのタイムラグを考慮して

$$E = \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \frac{q_e E_0 \omega^2}{m_e (\omega^2 - \omega_e^2)} e^{i\omega(t-r/c)} \tag{3.1.29}$$

となります。ここから、全電荷による電場 ΣE を計算するために、電場 E を中心からの距離 ρ で積分していきます。厚さ $\Delta\rho$ の輪の中の総電荷は

$$E \cdot \sigma \cdot 2\pi\rho d\rho$$

になるため、式は

$$\begin{aligned}
 \Sigma E &= \int_0^\infty \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \frac{q_e E_0 \omega^2}{m_e (\omega^2 - \omega_e^2)} e^{i\omega(t-r/c)} \sigma 2\pi\rho d\rho \\
 &= \frac{\sigma q_e}{2\epsilon_0 c^2} \frac{q_e E_0 \omega^2}{m_e (\omega^2 - \omega_e^2)} e^{i\omega t} \int_0^\infty \frac{e^{-i\omega r/c}}{r} \rho d\rho
 \end{aligned} \tag{3.1.30}$$

となります。一旦計算のために積分の中だけに注目します。ここで、次の関係を使って積分を置換します。

$$\begin{aligned}
 r^2 &= \rho^2 + x^2 \\
 \therefore \frac{dr}{d\rho} &= \frac{\rho}{r}
 \end{aligned}$$

すると

$$\int_x^\infty e^{-i\omega r/c} dr = -\frac{c}{i\omega} (e^{-i\infty} - e^{-i\omega x/c}) \tag{3.1.31}$$

となります。ここで、 $\frac{\omega}{c}\infty$ を ∞ と書いています。さて、 $e^{-i\infty}$ は一見 $\cos(-\infty) + i\sin(-\infty)$ となって定まらないように見えますが、積分の物理的意味に立ち返って考えてみましょう。現実を考えると、無限に広がる面電荷など有り得ないため、どこかで電荷がなくなることが予想できます。ここでは、中心からの距離 ρ が一定の値を超えたとき、急激に電荷の数が減少するとします。すると、定数項だと思って積分から外していた σ が 0 になります。この辻褄を合わせるには、 $e^{-i\infty}$ を 0 と置くのが良いでしょう。

さて、この結果を持って式 3.1.31 に代入しましょう。

$$\int_x^\infty e^{-i\omega r/c} dr = \frac{c}{i\omega} e^{-i\omega x/c} \quad (3.1.32)$$

定数項を戻すと

$$\Sigma E = \frac{\sigma q_e}{2\epsilon_0 c m_e (\omega_e^2 - \omega^2)} e^{i\omega(t-x/c)} \quad (3.1.33)$$

となり面電荷による電場を得ることが出来ました。そして、これが E_a と等しいため式 3.1.22 を用いて

$$\frac{i\omega(n-1)\Delta x}{c} E_0 e^{i\omega(t-x/c)} = \frac{\sigma q_e}{2\epsilon_0 c m_e (\omega_e^2 - \omega^2)} e^{i\omega(t-x/c)} \quad (3.1.34)$$

$$n = 1 + \frac{N q_e^2}{2\epsilon_0 m_e (\omega_e^2 - \omega^2)} \quad (N: \text{単位体積当たりの電荷の数}) \quad (3.1.35)$$

を得ることができました。ここでは、 $\sigma = N\Delta x$ を用いています。これにて、長らく求めてきた屈折率の正体を求めることが出来ました。そして、この式から非常に重要な事実を得ることができます。それは、屈折率は光の周波数 ω によって変わるということです。この事実はこの展示の理解に欠かせないだけでなく、光が屈折率に応じて曲がるという事実と組み合わせればプリズムや虹の原理を説明することができます。

3.1.4 キラリティによる旋光性

旋光性とは

今回の説明で大きなテーマの一つだったのが”屈折率”ですが、もう一つ大きなテーマがこの”旋光性”です。

さて、水晶はその性質から、かつて光学軸に沿った光についてはそのままの形を保って伝搬し、入射時と変わらない状態で出射され则认为られていました。しかし、1811 年にフランスの物理学者フランソワ・アラゴは、水晶で光学軸と平行に伝搬する光の直線偏光が回転することを発見します。実験結果では偏光の回転角は光の伝搬距離に比例するので、この現象が表面効果ではなく、内部で起こっていることを示しています。この現象を「光学活性」あるいは「旋光性」といいます。全く同じ結果が発生するファラデー効果というものもありますが、旋光性は外場のない状態で発生する一方ファラデー効果は磁場が働いたときにおこる現象です。

実は、旋光性は一部の物質内でしか発生しません。その条件として、”キラリティ”があります。「キラリティを持つ」とは、一般に物質が鏡像とぴったり重ね合わせることができないことを言います。例として、キラリティを持つキラル分子として一番よく知られているのは”鏡像異

性体”です。なんとなく話が見えてきませんか？ この展示の媒質に砂糖水を採用したのは、スクロースがとても身近なキラル分子（鏡像異性体を持っている）だからです。

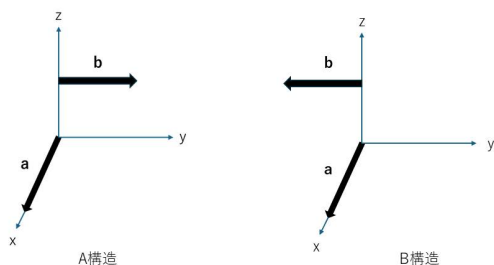


図 3.6 キラル分子モデル

■旋光性の導出 ここからは、キラル分子で旋光性が発生する理由についてを、図 3.6 の簡易的なモデルを使って考えていきます。この記事が長くなりすぎるのを避けるため、このセクションの議論が駆け足になることをお許しください。このモデルにおいて、分子は a と b からなります。この図で、A 構造と B 構造は鏡写しになっており、キラル分子であることが見てとれると思います。

さて、この分子に電磁波が干渉すると、時間変化する磁場によって電流が発生します。例えば、 z 軸正の方向に磁場の時間変化 $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ が発生したとき、マクスウェル方程式の一つ

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

によって、時計回りに電流が発生します（ここで、rot の向きが右ねじを回す向きであることを用いています）。この結果、A 構造は a に電荷がたまり、B 構造は b に電荷がたまります。これを言い換えると、磁場の時間変化によって、分子に分極が発生することになります。磁場による分極と電場による分極を合わせて、この分子の電気双極子モーメントは

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E} + \beta \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.1.36)$$

となります。 α, β は定数で、 α は分子分極率といいます。電束密度の式

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{p}$$

と $\epsilon_0 + \alpha = \epsilon$ より、このような分子による電束密度は

$$\mathbf{D} = \tilde{\epsilon} \mathbf{E} + \tilde{b} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.1.37)$$

となります。ここで、 ϵ と \tilde{b} は一般にはテンソルですが、砂糖水は等方性媒質 (性質が位置や方向に左右されない媒質) なのでこれらをスカラーと置くことができます。マクスウェル方程式より

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad (3.1.38)$$

$$= -\nabla \times e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (3.1.39)$$

$$= -\mathbf{k} \times \mathbf{E} \quad (3.1.40)$$

と導き出すことができます。波の進行方向の単位ベクトルを \mathbf{e}_k とすると、波数ベクトルは

$$\mathbf{k} = \frac{\omega n}{c} \mathbf{e}_k \quad (3.1.41)$$

とかけます。おおかたの物質で透磁率は 1 に近くなるので

$$\epsilon = \frac{1}{v^2} = \frac{n^2}{c^2} = n^2 \epsilon_0$$

となることを用いて、以上の結果を式 3.1.37 に代入すると

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 n_0^2 \mathbf{E} + iG \mathbf{e}_k \times \mathbf{E} \quad (3.1.42)$$

となります。ここで、 n_0 は分子のキラリティを考慮しないときの屈折率を表し、 G は物質定数です。

マクスウェル方程式の 2 式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

に対して、先に行ったような微分操作

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = i\omega \mathbf{E}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -i\mathbf{k} \times \mathbf{E}$$

を行います。すると

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B}, \quad -\mathbf{k} \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \omega \mathbf{E} \quad (3.1.43)$$

となります。左の式を右の式に代入すると

$$-\frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \epsilon_0 \mu_0 \omega \mathbf{E} \quad \because \mathbf{B} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E} \quad (3.1.44)$$

となり

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= -\frac{1}{\mu_0 \omega^2} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \\ &= -\epsilon_0 n^2 \mathbf{e}_k \times (\mathbf{e}_k \times \mathbf{E}) \end{aligned} \quad (3.1.45)$$

を得ます。ここで、式 3.1.42 と式 3.1.45 から、 G/ϵ_0 を G と再定義すると

$$n_0^2 \mathbf{E} + iG \mathbf{e}_k \times \mathbf{E} + n^2 \mathbf{e}_k \times (\mathbf{e}_k \times \mathbf{E}) = 0 \quad (3.1.46)$$

等方性媒質を考えているので、 \mathbf{e}_k の方向は自由に決めていいことになります。z 軸方向にとると、 $\mathbf{e}_k = (0, 0, 1)$ になるので、式 3.1.46 を行列表示すると

$$\begin{bmatrix} n_0^2 - n^2 & -iG & 0 \\ iG & n_0^2 - n^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_0^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (3.1.47)$$

となります。ここで $E_z = 0$ となることから、電磁波が横波であることがわかります。さて、この方程式を満たすためには係数の行列式が 0 である必要があるから、屈折率は

$$(n^2 - n_0^2) - G^2 = 0 \quad \therefore n = \pm \sqrt{n_0^2 \pm G^2} \approx \pm n_0 \pm \frac{G}{2n_0} \quad (3.1.48)$$

となります。ただし、 $G \ll n_0$ による近似を使いました。

$n = \pm n_0 \pm \frac{G}{2n_0}$ (複合同順) を式 3.1.47 に代入すると

$$\begin{bmatrix} -G & -iG \\ iG & -G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = 0 \quad (3.1.49)$$

となります。ここで、ジョーンズ・ベクトル表記を考えます。

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{0x} e^{i(\omega t - kz + \phi_x)} \\ E_{0y} e^{i(\omega t - kz + \phi_y)} \end{pmatrix} = e^{i(\omega t - kz)} \begin{pmatrix} E_{0x} e^{i\phi_x} \\ E_{0y} e^{i\phi_y} \end{pmatrix}$$

のベクトル部分の種類によって、偏光の種類がわかるというのがジョーンズ・ベクトル表記です。 $E_x = iE_y$ なのでジョーンズ・ベクトルは、規格化すると

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

となります。

$$e^{i\phi} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

を満たす ϕ は

$$\phi = \begin{pmatrix} \pi/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

なので、電場の波の x 成分は y 成分に対して位相が $\pi/2$ 進んでいることになります。位相が $\pi/2$ 、つまり 90 度進んでいるということは、 x 成分は最大値、 y 成分は 0 から始まり、時刻 t が進むにつれてそれらによるベクトルは左向きに回転していくことがわかります。つまり、このジョーンズ・ベクトルは左回りの円偏光を表しています。

一方、 $\pm n_0 \mp \frac{G}{2n_0}$ (複合同順) を代入すると

$$\begin{bmatrix} G & -iG \\ iG & G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = 0 \quad (3.1.50)$$

となり、ジョーンズ・ベクトルは

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

になります。このベクトルは、先ほどと同じようにすれば分かるように右回りの円偏光を表しています。

このように、キラル分子からなる媒質に照射された光は左回りと右回りの円偏光となって媒質中を進んでいきます。ここで重要なのは、左回りの円偏光として進む光の屈折率と右回りの円偏光として進む光の屈折率が異なるということです。物質によって決まる定数 G が $G > 0$ を満たすとき、屈折率は右回りの円偏光のとして進む光の方が G/n_0 小さくなります。屈折率は小さい

ほど光の速度は速くなりますから、右回りの円偏光の方が少し速く進むことになります。よって、ほとんどの要素は左右の円偏光で打ち消し合いますが、この差の分、光は右にゆっくりと回っていくように見えることが分かります。

さて、この事実は非常に重要であり、「屈折率は光の周波数に応じて変化する」とことと合わせるとほとんど展示の現象は説明がつきます。理屈の解説はほとんどここで終わりなので、あとはこれらの事実を使って具体的にはじめの疑問に答えて行きましょう。

3.1.5 結論

さて、まずは展示に関する様々な疑問に答えるために、これまでの結果から分かる「光が辿るプロセス」について順に追って見て行きましょう。

まず、光源から出射された光は偏光板を通り、水平方向と角度 θ_1 をなす方向の直線偏向になります。さて、この光がゆっくり右（あるいは左）に回っていくわけですが、「屈折率は周波数によって異なる」ことからだんだんと色によって偏光の向きがズレていきます。結局、反対側の偏光板に到着した時には色ごとに偏光はバラバラの方向を向いています。これを、水平方向と角度 θ_2 をなす方向の偏光しか通さない偏光板に通すと、この θ_2 と近い角度を持つ色の波ほどそのまま通り、垂直に近い角度を持つ色の波ほど通らないことになります。結果、二つ目の偏光板を通った後の光は色に偏りが出ることになるのです。さて、この説明で偏光板を回転すると色が変わる理由も理解できるでしょう。偏光板を回すと θ_1 や θ_2 が変わった結果、通りやすい色も変わるからです。

次に、「なぜ筒に虹が現れるのか」という疑問に答えていきます。

筒の途中では、色ごとに偏光が分かれているとはいえ、横から見たらすべて重なって白色になるように思えます。なぜ色があらわれるのでしょうか。その疑問に答えてくれるのは、式 3.1.13 です。もう一度記述すると

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} [\mathbf{r} \text{ に直角に投影された } \mathbf{a}(t - \frac{r}{c})]$$

この式より、電場は電荷の加速度と垂直方向に対して強くなり、それ以外に対して弱くなるということが分かります。つまり、その場その場で偏光方向と観察者の視線との角度が垂直になるような色の偏光が強く見えるということです。これが、筒に虹が現れるからくりです。上の式から、これの下から覗いてみれば虹の色が変わることが予想できますね。

では、最後に「なぜ虹は斜めなのか」について答えていきます。

虹が斜めになるということは、虹は筒の横方向だけでなく縦方向にも変化していることが分かります。では、どのような変化が起こっているのでしょうか。これは、縦方向で「観測者の視線との角度」が変わることが関係しています。偏光は、砂糖水の中の同じ x 座標（横方向）では全く同じ偏光を示します。なぜなら、砂糖水は等方性媒質ですから。ということは、例えば筒より上から筒の表面を見たとき、筒の一番上と一番下では偏光の方向は変わらないのに、観測者との角度は変わっていることになります。観測者との角度が変わると、もちろん垂直になる偏光の色は変わります。このような理屈で、縦方向でも虹の色が変わっています。よって、虹は斜めになっているんですね。

さて、これで初めに湧き出た疑問に答えることが出来たのではないのでしょうか。説明が稚拙な

部分も多々ありましたが、もしその上でこの文を読んでいる方がいましたら感謝申し上げます。光は掴みどころのないものに見える一方、ここまで数式で表現できるものでもあります。このような現象を数式で記述できる物理の魅力を感じていただければ幸いです。ありがとうございました。

(79 回生 江川慧)

3.1.6 参考文献

- ファインマン, レイトン, サンズ, 富山小太郎訳. ファインマン物理学 II. 岩波書店, 1968, 397p.
- ファインマン, レイトン, サンズ, 宮島龍興訳. ファインマン物理学 III. 岩波書店, 1969, 315p.
- 小宮山進, 竹川敦. マクスウェル方程式から始める電磁気学. 裳華房, 2022, 271p.
- 砂川重信. 電磁気学の考え方. 岩波書店, 1993, 145p.
- 小出昭一郎. 物理学. 裳華房, 2023, 387p.
- 3Blue1BrownJapan. "砂糖水と光の螺旋 — 光学パズル 1". Youtube. 2024-11-18. https://youtu.be/I-GhtZVVK_Y?si=vc-ttGwD7D9ueZ2M, (参照 2025-2-24).
- 3Blue1BrownJapan. "揺れる電荷と光 — 光学パズル 2". Youtube. 2024-11-26. <https://youtu.be/vFxTYRYi5lM?si=tI0zNP8BcVbwQWWG>, (参照 2025-2-24).
- 3Blue1BrownJapan. "なぜ光は"遅くなる"のか? — 光学パズル 3". Youtube. 2024-12-31. <https://youtu.be/AUdPVQbZLos?si=Sz5x9DHgjQ6-4WmQ>, (参照 2025-2-24).
- 3Blue1BrownJapan. "なぜ光が"遅くなる"と曲がるのか — 光学パズル 4". Youtube. 2024-2-6. <https://youtu.be/Ru-OdoLtIs0?si=IyviYtuC-07QudqQ>, (参照 2025-2-24).
- 栗田進. "偏光". 株式会社ルケオ. 配信年不明. <https://www.luceo.co.jp/technical/>, (参照 2025-2-24).
- 茅根裕司. "Radiation from moving charges#1 – Liénard-Wiechert potential –". 2006-5-7. https://www.astr.tohoku.ac.jp/~chinone/Radiation_from_moving_charges/Radiation_from_moving_charges_1/index.html, (参照 2025-2-24).

■おわりに

いかがだったでしょうか?物理教室での展示やこの部誌は楽しんで頂けたでしょうか?これらで物理の面白さを少しでも感じてもらえていたら幸いです。

さて話は変わりますが、皆さんは最近放送されていたアニメ「チ。-地球の運動について-」をご覧になったことがありますか?この作品は大雑把に言うとも15世紀のヨーロッパでの地動説と宗教の戦いを描いています。そこでは、地動説を研究することは異端とされ、地動説を研究することがばれたら、死刑にされました。そして、ラファウという少年は地動説を研究していることがばれて牢獄に入れられ、自殺する直前に「多分、感動は寿命の長さよりも大切なものだと思う」と言いました。命よりも大切かと言われたら、正直自信はないですが、感動が大事というのはその通りだと思います。僕が物理にハマるきっかけになったマクスウェル方程式から電磁波の波動方程式が導かれ、光が電磁波の一部だと分かったことや、アインシュタイン方程式から、重力波やブラックホールの存在を予想でき、そしてつい最近に実際に見つかったことを知った時の感動は今も強く残っています。これらの感動がなかったら、おそらく僕は物理を本格的にやることはなかったでしょう。そう考えると、僕はただの数式に人生を変えられてしまいました。もちろんいい意味で。ただの数式と言いましたが、ただの数式だから意味があるのだと思います。この世の法則をただの数式で記述しようとするから美しさがあり、それに感動したのだと思います。マクスウェル方程式という4つの式、いや、ベクトルなので実質8つの式ですね(), 8つの式で電磁気的な現象のたいを説明でき、アインシュタイン方程式という1つの式、いや、対称テンソルなので10個の式ですね(), 10個の式で時空の状態を記述できるという美しさに魅せられたのだと思います。途中茶番がありましたが、少なくとも僕はこういうところに物理の美しさがあるのだと思います。「チ。-地球の運動について-」でも、天動説と地動説のどちらが美しいかという理論の美しさについて描写されているシーンがありました。ここからも美しさが重要な基準であるというのが分かります。ここまで物理の美しさについて書いてきましたが、そもそも美しさといったら、他にもあるでしょうが多くの人は容姿、景色の美しさといった視覚的なことを思い浮かべると思います。つまり人によって何に美しさを感じるかは違います。ぼくはたまたま物理に美しさを感じましたが、感じない人もいますでしょう。大事なのは各々が自分が美しいと感じるものを大切に、自分とは違うものに美しさを感じる人を否定しないことだと僕は思います。

それでは最後になりましたが、拙い文章をここまで読んでくださりありがとうございました。

(78 回生 部長 星屋峻佑)