

אותות ומערכות

תרגיל רטוב 2

נדב אשכנזי – 313326811

גל פרג – 316017011

שאלה 1

```
%% section 1.3
function Xf = FourierTransform(x, t, w)
    dt = t(2)-t(1);
    F = exp(1j*t*w');
    Xf = (F'*x)*dt;
end
```

סעיף 1.3.1

הפעולה הכבדה ביותר שהפונקציה שלנו מבצעת היא כפל שני מטריצות ריבועיות מסדר N (לפי ההנחה). פעולה זו היא בסיבוכיות $O(N^3)$.

סעיף 1.4.1

```
1- close all
2- clear
3- clc
4- dt = 0.005;
5- Ws = 2 * pi / dt;
6- T = 1.5;
7- t = (-T : dt : T)'; t(end) = [];
8- N = length(t);
9- w = Ws / 2 * linspace(-1, 1, N + 1)'; w(end) = [];
10 %% Random Test:
11 x = randn(N, 1) + 1j * randn(N, 1);
12 Xf = FourierTransform(x, t, w);
13 norm(x - InvFourierTransform(Xf, w, t))
14
```

Command Window

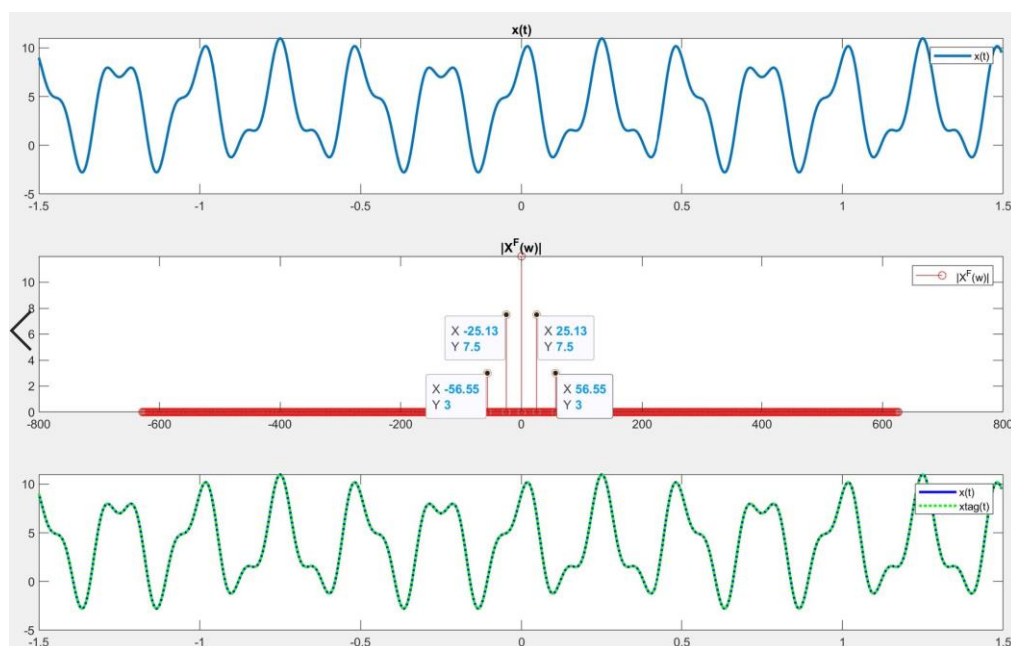
New to MATLAB? See resources for [Getting Started](#).

```
ans =
    2.2857e-12
```

fx>>

בכל הרצאה של בדיקת הנורמה נקבל מספר זניח ששואף לאפס.

סעיף 1.4.2



ניתן לראות בסרטוט השלישי שקיבלנו שחזור מדויק.

סעיף 1.5

פתרון אנליטי על פי טבלת התמרות פורייה ע"י שימוש בהתמרות הבאות:

$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$	$\cos \omega_0 t$.3
$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$	$\sin \omega_0 t$.4
$2\pi\delta(\omega)$	$x(t) = 1$.5

$$X^F(\omega) = 5\pi(\delta(\omega - 8\pi) + \delta(\omega + 8\pi)) + \frac{2\pi}{j}(\delta(\omega - 18\pi) - \delta(\omega + 18\pi)) + 8\pi\delta(\omega)$$

כפי שניתן לראות בסרטוט השני, הדלתאות תואמות בדיוק את הדלתאות בחישוב האנליטי כאשר ה"פיקים" ממוקמים בתדרים:

$$\omega_{1,2} = \pm 8\pi \approx \pm 25.13$$

$$\omega_{3,4} = \pm 18\pi \approx \pm 56.5486$$

$$\omega_5 = 0$$

שאלה 2

סעיף 1

$$x(t) = 3 \cos(2\pi \cdot 2t) + 3 \sin(2\pi \cdot 8t) + 2 \cos(2\pi \cdot 11t)$$

בשאלה זאת נרצה לסנן את האות x כך שה- \sin וה- \cos בתדרים הגבוהים יתאפסו ונישאר רק עם ה- \cos בתדר הנמוך. נרצה לעשות זאת בעזרת מסנן מעביר נמוכים (Low Pass Filter) LPF:

$$h(t) = A \operatorname{sinc}(\omega_c t)$$

• מהם הערכים A ו- ω_c אשר מקיימים:

$$y(t) = (x * h)(t) = 3 \cos(2\pi \cdot 2t)$$

בפרט,

רשמו את A המתאים לכל ω_c , כלומר את $A(\omega_c)$.
מהו התחום $\omega_1 < \omega_c < \omega_2$ אשר יעמוד בדרישה הנ"ל על המוצא y .
(רמז: התמרת פורייה)

$$X^F(\omega) = 3\pi(\delta(\omega - 4\pi) + \delta(\omega + 4\pi)) + \frac{3\pi}{j}(\delta(\omega - 16\pi) - \delta(\omega + 16\pi)) + 2\pi(\delta(\omega - 22\pi) + \delta(\omega + 22\pi))$$

ניתן לראות כי התמרת פורייה של האות המקורי תכיל דלתאות ב $\pm 4\pi, \pm 16\pi, \pm 22\pi$ אך ברצוננו לקבל במוצא רק את האות בתדרים $\pm 4\pi$. כלומר נרצה שה תתפקד כמסנן מעביר נמוכים שיעביר תדרים אלו ויחסום את $\pm 16\pi, \pm 22\pi$.

$$h(t) = A * \operatorname{sinc}(\omega_c t) = A * \frac{\pi}{\omega_c} * \frac{\omega_c}{\pi} * \operatorname{sinc}(\omega_c t)$$

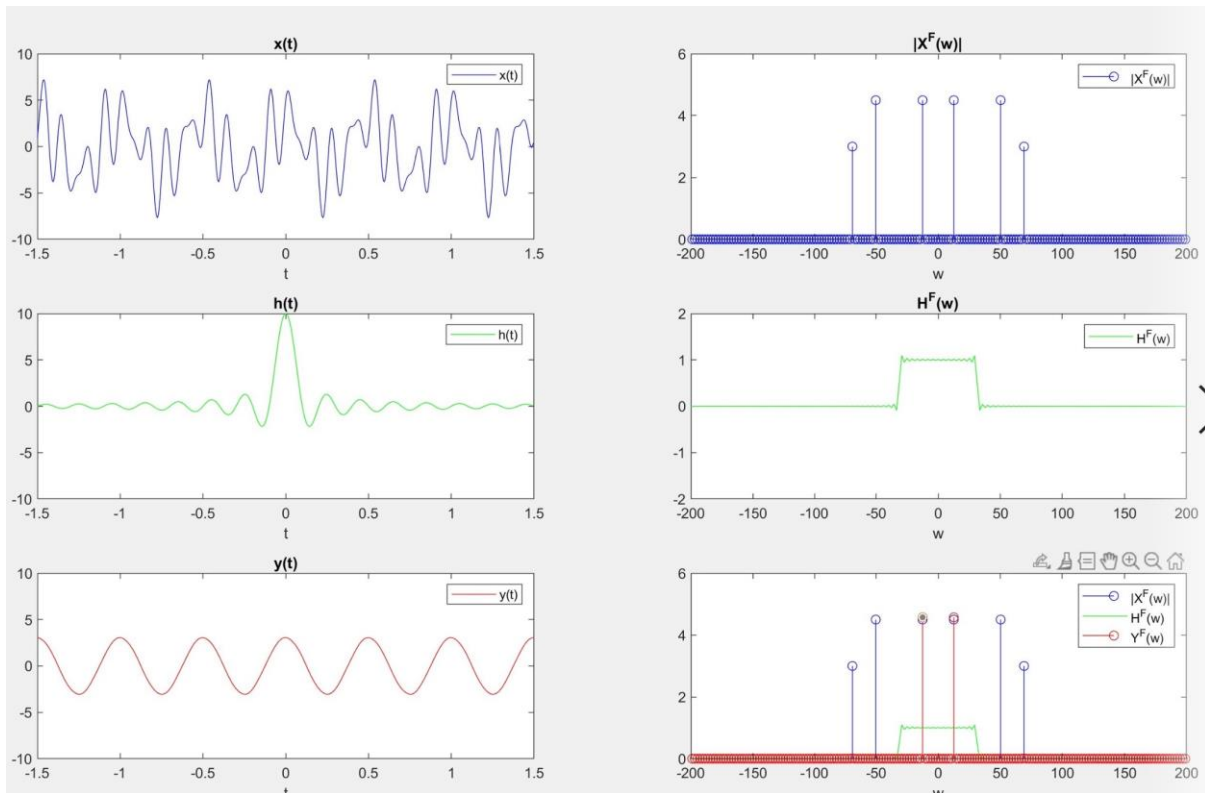
$$\Rightarrow H^F(\omega) = \begin{cases} \frac{A\pi}{\omega_c}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| \geq \omega_c \end{cases}$$

על כן, על מנת על מנת לאפשר את התפקוד הרצוי וליצור פונקציית חלון עם הגבר 1 על הפרמטרים להיות:

$$4\pi < \omega_c < 16\pi$$

$$\frac{A\pi}{\omega_c} = 1 \Rightarrow A(\omega_c) = \frac{\omega_c}{\pi}$$

סעיף 3



סעיף 4

1.
 - שני האיורים הראשונים בכחול מייצגים את האות x והתמרתו בערך מוחלט, ניתן לראות את פיזור התדרים בהתמרה.
 - שני האיורים השניים בירוק מייצגים את גרעין הקונבולוציה והתמרתו כמסנן. כיוון שהוא על אותו הציר של ההתמרה של x ניתן להבחין כי החלון חופף רק עם התדרים שברצוננו להעביר ולכן ניתן לצפות שלאחר ההכפלה ניוותר עם האות הרצוי.
 - שני האיורים האחרונים מייצגים את אות המוצא והשוואה בין אות הכניסה לאות המוצא. כפי שציפינו, אות המוצא זהה לאות הכניסה בתדרים הרצויים אך לא מכיל את התדרים הלא רצויים.
2. עם זאת, כיוון שלעומת החישוב האנליטי, המסנן שמימשנו אינו אידאלי (שדורש חישוב אינסופי כי ההסינק אינו סיבתי) היה עלינו לממש מסנן מעשי "קטום" ולכן קיבלנו את תופעת הגליות לאורך כל הציר (ניתן לראותה בהתמרת אות המוצא בתוך השכבה האדומה המכסה את הציר). לכן הגרף לא בדיוק תואם את ההתמרה האנליטית.
3. על מנת לממש מסנן מעביר גבוהים היינו משתמשים ב- H באופן הבא:

$$\tilde{H}^F = 1 - H^F$$

ולכן:

$$\tilde{h}(t) = \delta(t) - h(t)$$

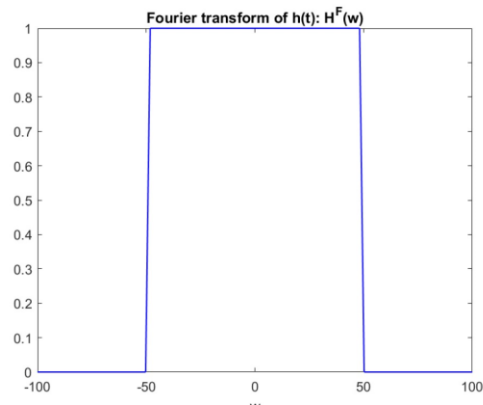
4. המסנן שמימשנו h אינו סיבתי כיוון ש $h(t > 0) \neq 0$ וזהו תנאי הכרחי לסיבתיים במערכת LTI

סעיף 5

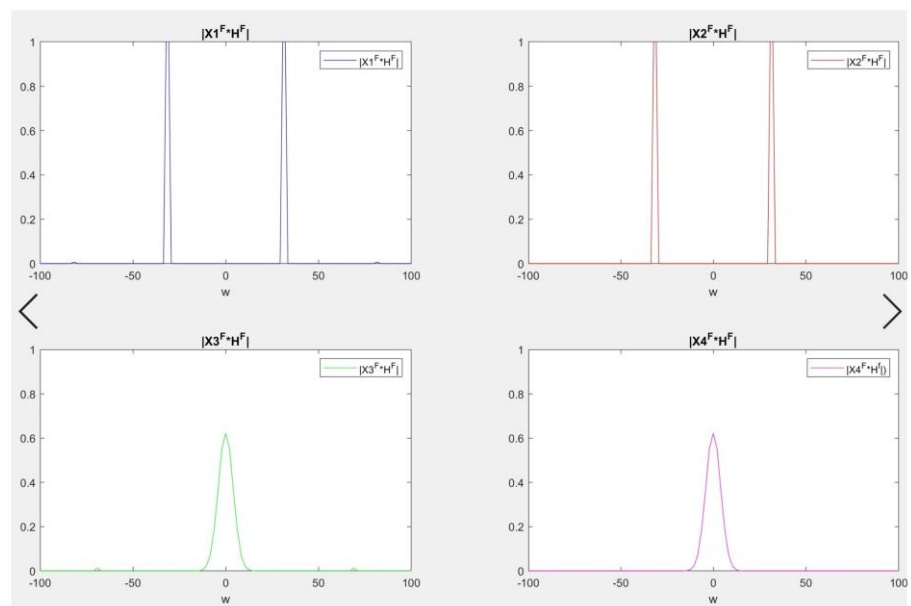
נתונים ארבעת האותות הבאים:

$$\begin{cases} x_1(t) = \sin(2\pi \cdot 5t) + \sin(2\pi \cdot 13t) \\ x_2 = \sin(2\pi \cdot 5t) \\ x_3 = e^{-8t^2} + \cos(2\pi \cdot 11t) \\ x_4 = e^{-8t^2} \end{cases}$$

ונתון המסנן הבא בתדר:



האותות לאחר התמרה והכנסת למערכת נראים כך:



ניתן לראות כי אותות 1 ו-2 שווים ואות 3 ו-4 שווים.

הסיבה לכך היא שלאחר סינון החוצה של כל התדרים מעל $8 * 2\pi \approx 50$:

- באותות 1 ו-2 יותר רק הגורם $\sin(2\pi * 5t)$
- באותות 3 ו-4 יותר רק הגורם e^{-8t^2} , אומנם לא בשלמותו (כי לגאוסיה יש זנבות אינסופיים בשני הצדדים), אך אותו חלק "קטום" יעבור את המסנן בשני האותות.
-

שאלה 3

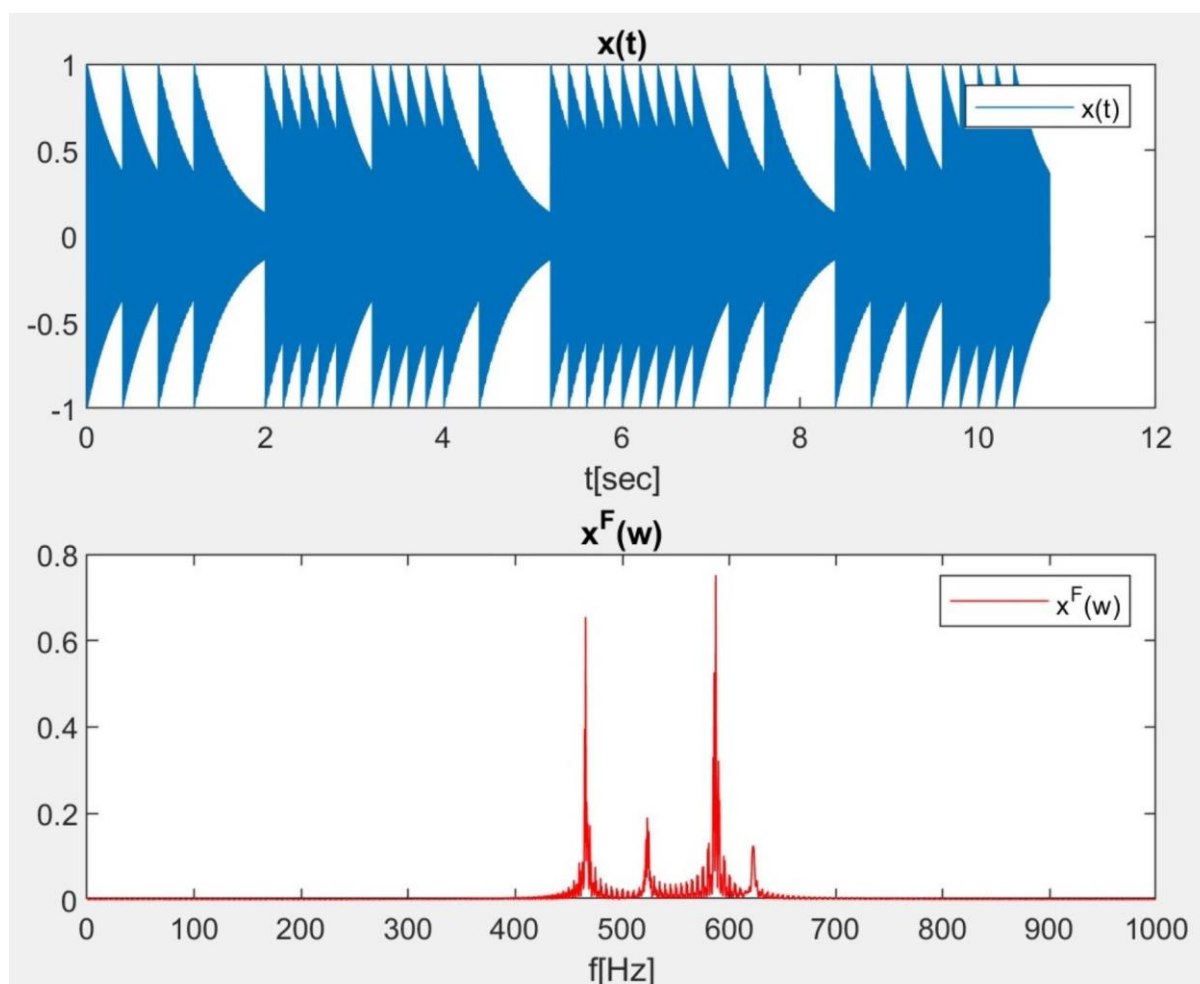
סעיף 2

- הצלחנו לשמוע את התדרים $100\text{--}19950\text{Hz}$
- ייתכן ואחת הסיבות שבגללה איננו שומעים את כל טווח התדרים היא התאבכות עם רעש שמגיע מהסביבה ומוציא את האות מהטווח הרצוי.

סעיף 4

קיבלנו את השיר הישראלי המוכר : כביש החוף

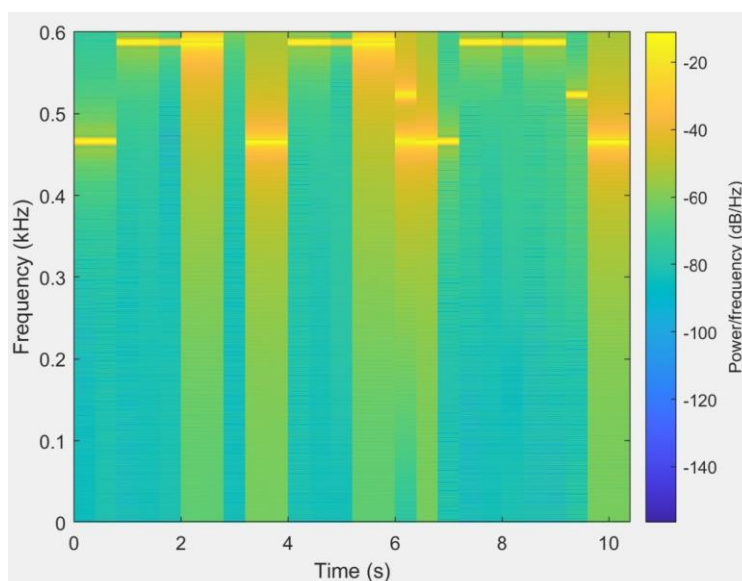
סעיף 5



סעיף 6

- חישבנו את ההתמרה רק עבור תדרים חיוביים כיוון שהפונקציה x ממשית ולכן סימטרית בתדר. התדרים השליליים אינם פיזיקליים ולכן לא יפיקו צליל אמיתי.
- גובהי הדלתאות מייצגים את כמות הפעמים שהם מופיעים בקטע (סכימה של כל הדלתאות בתדר מסוים) ולכן ככל שתדר יופיע יותר ככה הדלתא שלו תגדל.

סעיף 7

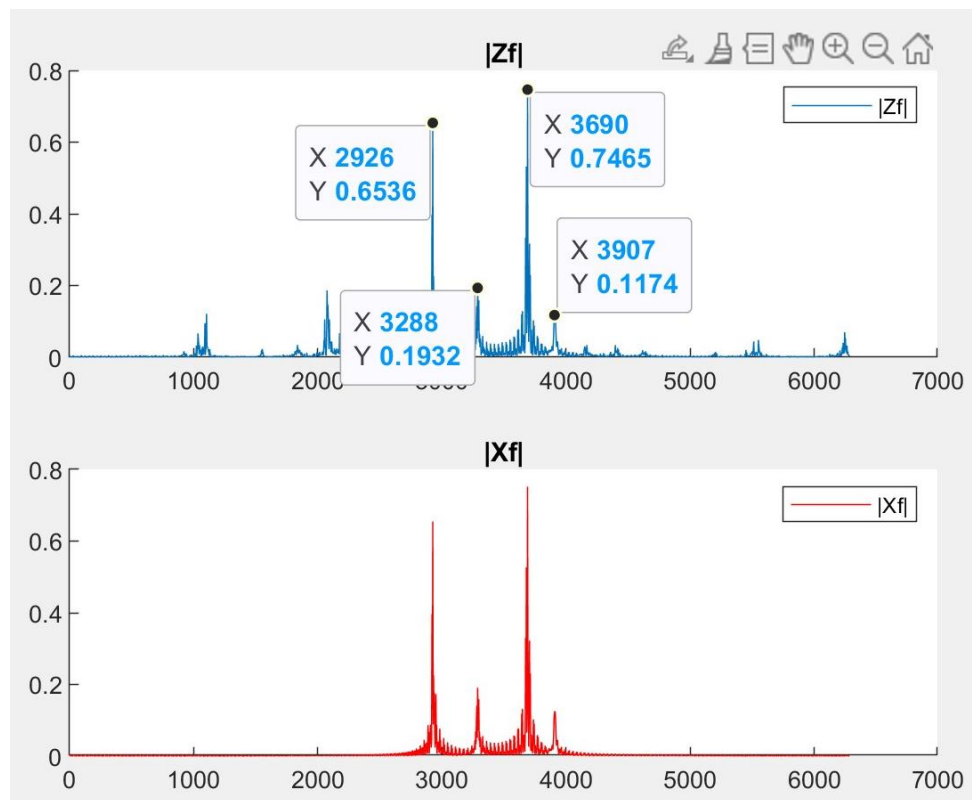


ציר הא' הוא ציר הזמן השניות וציר הע' הוא ציר התדר בהרץ. כמו כן סקלת הצבעים מייצגת את העוצמה. כל נקודה על הגרף מייצגת את התדר שנוגן, משך הזמן שהוא נוגן והעוצמה שלו.

סעיף 8

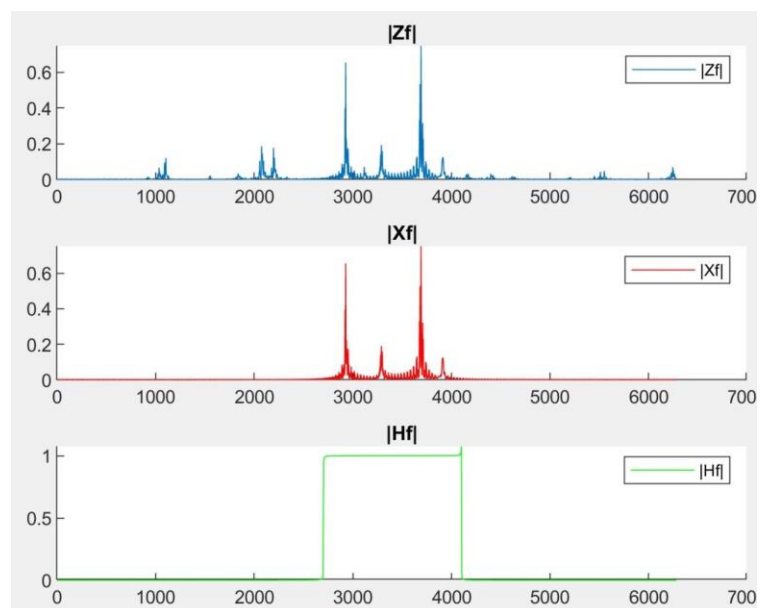
השיר: טודו בום

סעיף 10

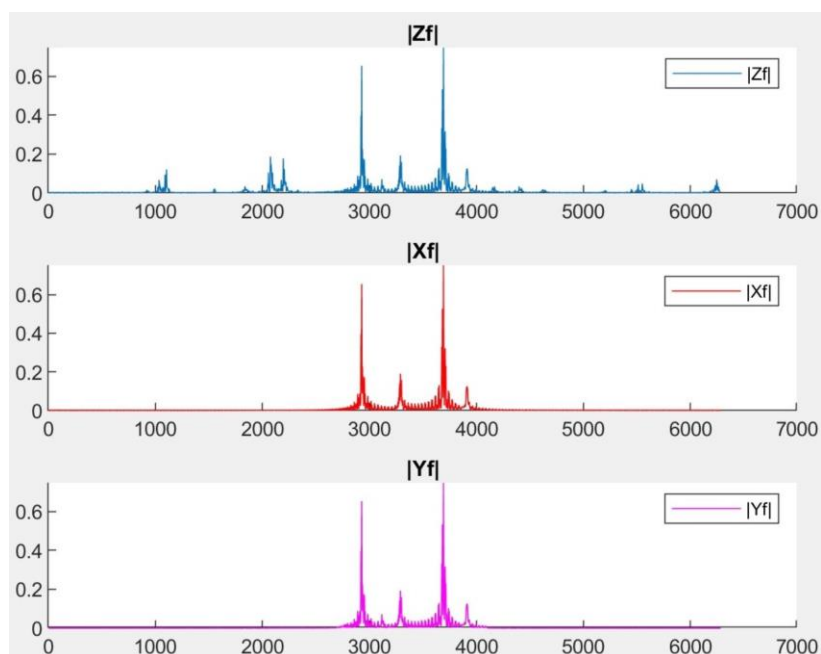


- על מנת לקבל חזרה את x עלינו להשתמש ב BPF אשר מעביר את טווח התדרים החופף בין שני הגרפים.
- אם נשכח להתייחס לתדרים שלילים ונאפס אותם z יפסיק להיות ממשי כיוון שלא יהיה סימטרי בציר הזמן.

סעיף 11



סעיף 12



סעיף 13

לא קיבלנו שחזור מושלם כיוון שייתכן והרעש הכיל מידע בתדרים שהרצויים. על כן, כאשר נעביר תדרים אלא נקבל מידע עודף שלא היה באות המקורי. כמו כן ייתכן ומידע מקורי חלש היה בתדרים שסיננו החוצה.