תרגיל 7

נדב מנירב

שאלה 1. עבור האינטגרלים הלא אמיתיים הבאים, קבעו האם הם מתכנסים או מתבדרים.

1. $\int_1^\infty \frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{1+\pi x^4}}\,dx$

נגדיר $f(x) := \frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{1+\pi x^4}}$ $g(x) := \frac{1}{x^{1.5}}$

שתיהן חיוביות בקטע $[1,\infty)$ ואינט' ב $[1,M]$ לכל $M>1$

היות שהן אלמנטריות ולכן רציפות.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{1+\pi x^4}}}{\frac{1}{x^{1.5}}} = \frac{x^{1.5}\sqrt{2+x}}{\sqrt{1+\pi x^4}} = \sqrt{\frac{x^3(2+x)}{\pi x^4+1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{x^4+2x^3}{\pi x^4+1}}$$

לכן נקבל

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4+2x^3}{\pi x^4+1}} = \sqrt{\frac{1}{\pi}}$$

והרי $0<\sqrt{\frac{1}{\pi}}<\infty$.

ממבחן ההשוואה הגבולי לפונק' אי-שליליות, $\int_1^\infty f$ ו $\int_1^\infty g$ מתכנסים

ומתבדרים יחד.

וידוע $\int_1^\infty \frac{1}{x^{1.5}}$ מתכנס לכן $\int_1^\infty \frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{1+\pi x^4}}$ מתכנס

$$\int_1^\infty \sin\left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}\right)dx \quad .3$$

נגדיר $f(x):=\sin\left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}\right)$ $\qquad g(x):=\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}$

שתיהן חיוביות בקטע $[1,\infty)$ ואינט ב $[1,M]$ לכל $M>1$
היות שהן אלמנטריות ולכן רציפות.

ונגדיר בנוסף $\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}=t$ כאשר $x\to\infty$, $t\to 0$

לכן

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t}=1$$

הוכח בהרצאה.

! $0<1<\infty$

ממבחן ההשוואה הגבולי לפונק' אי-שליליות, $\int_1^\infty f$, $\int_1^\infty g$ מתכנסים
ומתבדרים יחד.

נגדיר $h(x):=\frac{1}{x}$

h חיובית, רציפה, ואינטגרבילית.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{h(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{2x^2+1}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2}{2x^2+1}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

והרי $0<\frac{\sqrt{2}}{2}<\infty$

לכן ממבחן ההשוואה הגבולי לפונק' אי-שליליות, g, h $\int_1^\infty g$, $\int_1^\infty h$ מתכנסים ומתבדרים יחד.

ראינו בהרצאה $\int_1^\infty h$ מתבדר

לכן $\int_1^\infty g$ מתבדר

ולכן גם $\int_1^\infty f$ מתבדר.

$$\int_{-\infty}^{0}(1-2x)e^{-x}\,dx \quad .5$$

$$\int_{-\infty}^{0}(1-2x)e^{-x}dx=\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{0}(1-2x)e^{-x}dx$$

נגדיר $f(x):=(1-2x)e^{-x}$ $\quad g(x):=-xe^{-x}$

שתיהן חיוביות בקטע $(-\infty,0]$ ואינט' ב $[-M,0]$ לכל $M>0$

היות שהן אלמנטריות ולכן רציפות.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}-2xe^{-x}}{-xe^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{e^{-x}}{xe^{-x}}+\frac{2xe^{-x}}{xe^{-x}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-1}{x}+2\right)=2$$

והרי $0<2<\infty$ לכן $\int_{-\infty}^{0}f\,,\ \int_{-\infty}^{0}g$ מתכנסים ומתבדרים יחד, לפי מבחן ההשוואה הגבולי

$$\int_{-\infty}^{0}g(x)dx=-\int_{-\infty}^{0}xe^{-x}dx=-\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{0}xe^{-x}dx$$

$$\int_{-M}^{0}xe^{-x}dx=-xe^{-x}\Big|_{-M}^{0}+\int_{-M}^{0}e^{-x}dx=$$ המשפט היסודי

אינטגרציה בחלקים

$$\left(\begin{matrix}u=x & v'=e^{-x}\\ u'=1 & v=-e^{-x}\end{matrix}\right)$$

$$= -0\cdot e^{-0} - (-M)e^{-(-M)} - e^{-x}\Big|_{-M}^{0} = Me^{M} - e^{-0} - \left(-e^{-(-M)}\right) =$$

$$= \underbrace{Me^{M} - 1 + e^{M}}$$

בביטוי הנ"ל אין גבול כאשר $M\to\infty$ לכן $\int_{-\infty}^{0} g$ מתבדר

ולכן גם $\int_{-\infty}^{0} f$ מתבדר.

$$\int_2^\infty \frac{x\sqrt{x}\sin\frac{\pi}{x}}{\sqrt{x^2-x}}\,dx \quad .6$$

נגדיר

$$f(x):=\frac{x\sqrt{x}\,\sin\frac{\pi}{x}}{\sqrt{x^2-x}}=\frac{x\sin\frac{\pi}{x}}{\sqrt{x-1}}$$

$$g(x):=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

שתיהן חיוביות בקטע $[2,\infty)$ ואינט' ב $[2,M]$ לכל $M>2$
היות שהן אלמנטריות ולכן רציפות.

לופיטל "$\frac{0}{0}$"

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x\sin\frac{\pi}{x}}{\sqrt{x-1}}}{\frac{1}{\sqrt{x-1}}}=\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{\pi}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{\pi}{x^2}\cdot\cos\frac{\pi}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\pi\cos\frac{\pi}{x}=\pi\cdot\underbrace{\lim_{x\to\infty}\cos\frac{\pi}{x}}_{1}=\pi$$

והרי $0<\pi<\infty$ לכן לפי מבחן ההשוואה לפונ' אי-שליליות,
$\int_2^\infty f$, $\int_2^\infty g$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

$$\int_2^\infty g=\int_2^\infty\frac{dx}{\sqrt{x-1}}=\int_2^\infty(x-1)^{-\frac{1}{2}}dx=\lim_{M\to\infty}\int_2^M(x-1)^{-\frac{1}{2}}dx=$$

המשפט היסודי

$$= \lim_{M\to\infty} \frac{(x-1)^{1/2}}{1/2}\Bigg|_2^M = \lim_{M\to\infty}\left(2\sqrt{M-1}-2\right)$$

אין גבול

לכן מתבדרת $\int_2^\infty g$ מתבדר

וגם $\int_2^\infty f$ מתבדר

שאלה 2. חשבו את הגבול הבא:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_x^{x^2}(t+1+\sin(t^2))dt}{x^4}$$

רמז: הראו תחילה שהאינטגרל במונה שואף לאינסוף ולאחר מכן השתמשו בלופיטל.

$$\int_x^{x^2}(t+1+\sin(t^2))dt = \int_x^{x^2} t\,dt + \int_x^{x^2} 1\,dt + \int_x^{x^2}\sin(t^2)dt$$

כללי אינטגרציה

$$\int_x^{x^2} t\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_x^{x^2} = \frac{x^4-x^2}{2}$$

המשפט היסודי

$$\int_x^{x^2} 1\,dt = t\Big|_x^{x^2} = x^2-x$$

$$\int_x^{x^2}\sin(t^2)dt \geq \int_x^{x^2} -1\,dt = x-x^2$$

כי $\sin \geq -1$

נסכום ונקבל:

$$\int_x^{x^2}(t+1+\sin(t^2))dt \geq \frac{x^4}{2}-\frac{x^2}{2}+x^2-x+x-x^2 = \frac{x^4}{2}-\frac{x^2}{2}$$

והרי

$$\frac{x^4}{2}-\frac{x^2}{2}\xrightarrow[x\to\infty]{}\infty$$

לכן לפי פיצה

$$\int_x^{x^2}(t+1+\sin(t^2))dt\xrightarrow[x\to\infty]{}\infty$$

עבור לחישוב הגבול המבוקש.

לופיטל "$\frac{\infty}{\infty}$"

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_{x}^{x^2}\left(t+1+\sin(t^2)\right)dt}{x^4} =$$

המשפט היסודי

הנוסחה

$$\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt\right)' = f(\beta(x))\cdot\beta'(x) - f(\alpha(x))\cdot\alpha'(x)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+1+\sin(x^4)\right)\cdot(2x) - \left(x+1+\sin(x^2)\right)\cdot 1}{4x^3} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+2x+2x\sin(x^4)-x-1-\sin(x^2)}{4x^3} =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{4x^3}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{4x^3}}_{0} + \underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{2x}\sin(x^4)}{4x^{\cancel{3}}}}_{0} - \underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{x}{4x^3}}_{0} - \underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{4x^3}}_{0}$$

חסומה כפול שואפת ל: 0

$$-\underbrace{\frac{\sin(x^2)}{4x^3}}_{0} = \frac{1}{2}$$

חסומה כפול שואפת ל 0

שאלה 3.

הראו שניתן להשתמש בשיטת ההצבה גם כאשר אחד הגבולות הוא אינסופי.
משמע, בהינתן $u: [a,\infty) \to Im(u)$ רציפה בקרן $[a,\infty)$ וגזירה בקרן (a,∞),
ו f רציפה בתחום $Im(u)$ הראו שמתקיים:

$$\int_a^{\infty} f(u(x))u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u_\infty} f(t)dt$$

כאשר $u_\infty = \lim_{x\to\infty} u(x)$, נתון שהגבול הנ"ל קיים במובן הרחב.

נחשב את צד שמאל לפי ההגדרה.

$$\int_a^{\infty} f(u(x))\cdot u'(x)\,dx = \lim_{M\to\infty}\int_a^M f(u(x))\cdot u'(x)\,dx =$$

שיטת ההצבה לאינטגרל מסוים

$$= \lim_{M\to\infty}\int_{u(a)}^{u(M)} f(t)dt = \int_{u(a)}^{u_\infty} f(t)dt$$

$\blacksquare$

תרגיל 4.

א) חשבו במפורש את: $f(x) = \int_0^\infty e^{-xt}dt$ עבור $x > 0$.

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\,dt = \lim_{M\to\infty} \int_0^M e^{-xt}\,dt$$

הגדרה לאינט' מוכלל

$$\int_0^M e^{-xt}\,dt = \left.\frac{-e^{-xt}}{x}\right|_0^M = \frac{-e^{-xM}}{x} + \frac{e^{-x\cdot 0}}{x} = \frac{1-e^{-xM}}{x}$$

המשפט היסודי

$$f(x) = \lim_{M\to\infty} \frac{1-e^{-xM}}{x} = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{x} - \frac{e^{-xM}}{x} = \frac{1}{x} - \underbrace{\lim_{M\to\infty} \frac{e^{-xM}}{x}}_{0} = \frac{1}{x}$$

$\frac{1}{x} \to \frac{1}{x}$

כי $-xM \to -\infty$

לכן $e^{-xM} \to 0$

ב) הוכיחו כי האינטגרל $\int_0^\infty t^n e^{-xt}dt$ מתכנס לכל $x > 0, n \in \mathbb{N}$

ג) היעזרו ב f כדי להראות את השוויון $n! = \int_0^\infty t^n e^{-t}dt$

$$\int_0^\infty t^n e^{-xt}dt \overset{\text{אינטגרציה בחלקים}}{=} t^n\left(-\frac{1}{x}e^{-xt}\right)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty nt^{n-1}\left(-\frac{1}{x}e^{-xt}\right)dt =$$

$$\left(\begin{matrix} u = t^n & v' = e^{-xt} \\ u' = nt^{n-1} & v = -\frac{e^{-xt}}{x} \end{matrix}\right)$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{x}t^n e^{-xt}\Big|_0^\infty}_{=0} + \frac{n}{x}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-xt}dt = \frac{n}{x}\underbrace{\int_0^\infty t^{n-1}e^{-xt}dt}_{} =$$

כי ב-∞ שואף ל-0 (כי e^{-xt} יורד ל-0 הרבה יותר מהר מש-t^n עולה ל-∞)

נשים לב שקיבלנו כמעט אותו ביטוי מההתחלה. נפעיל אינטגרציה בחלקים "n" פעמים ונקבל:

$$= \frac{n}{x}\cdot\frac{(n-1)}{x}\int_0^\infty t^{n-2}e^{-xt}dt = \dots = \frac{n!}{x^{n+1}}\int_0^\infty e^{-xt}dt = \frac{n!}{x^{n+1}}\cdot f(x)$$

$$= \frac{n!}{x^{n+1}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{n!}{x^{n+2}}$$

מצאנו את האינטגרל לכן הוא בפרט מתכנס.

סעיף ג', זה המקרה הפרטי ש $x=1$ ולכן נציב בנוסחה ונקבל

$$\int_0^\infty t^n e^{-t}dt = n!$$