תרגיל 3

ןעם מירב

1. חשבו את האינטגרל:

$$\int \frac{9^x - 4^x}{3^x - 2^x}\,dx = \int \frac{(3^x)^2 - (2^x)^2}{3^x - 2^x}\,dx = \int \frac{(3^x + 2^x)\cancel{(3^x - 2^x)}}{\cancel{3^x - 2^x}}\,dx$$

חוקי חזקות

כפל מקוצר

$$= \int (3^x + 2^x)\,dx = \int 3^x\,dx + \int 2^x\,dx = \boxed{\frac{3^x}{\ln 3} + \frac{2^x}{\ln 2} + C}$$

כללי אינטגרציה

אינטגרל מיידי של פונק' מעריכית

2. חשבו את האינטגרל הבא:

$$\int \frac{x^6-6x^5+3x^4-10x^3-9x^2+12x-27}{x^4+3x^2}dx =$$

נבצע חילוק פולינומים:

$$\begin{array}{r|l} x^2-6x & \\ \hline x^6-6x^5+3x^4-10x^3-9x^2+12x-27 & x^4+3x^2 \\ -\ x^6 \qquad +3x^4 & \\ \hline -6x^5 \qquad -10x^3-9x^2+12x-27 & \\ -\ -6x^5 \qquad -18x^3 & \\ \hline 8x^3-9x^2+12x-27 & \end{array}$$

כלומר

$$\frac{x^6-6x^5+3x^4-10x^3-9x^2+12x-27}{x^4+3x^2} = x^2-6x+\frac{8x^3-9x^2+12x-27}{x^4+3x^2}$$

נחזור לחישוב האינטגרל:

$$\int \frac{x^6-6x^5+3x^4-10x^3-9x^2+12x-27}{x^4+3x^2}dx =$$

$$=\int\left(x^2-6x+\frac{8x^3-9x^2+12x-27}{x^4+3x^2}\right)dx =$$

כללי אינטגרציה

$$=\int x^2dx-\int 6xdx+\int\frac{8x^3-9x^2+12x-27}{x^4+3x^2}dx=$$

פיצול השבר + כללי אינטגרציה

$$= \int x^2 dx - 6\int x\,dx + \int\left(\frac{8x^3+12x}{x^4+3x^2} - \frac{9x^2+27}{x^4+3x^2}\right)dx =$$

כללי אינטגרציה + אינטגרלים מיידים של x, x^2.

$$= \frac{x^3}{3} - 6\,\frac{x^2}{2} + 2\int \frac{4x^3+6x}{x^4+3x^2}\,dx - \int \frac{9x^2+27}{x^4+3x^2}\,dx =$$

נוסיף את $+C$ מהאינטגרל הימני

כשהמונה נגזרת של המכנה
האינטגרל זה ln ערך מוחלט של המכנה

$$= \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 2\ln\left|x^4+3x^2\right| - 9\int \frac{\cancel{x^2+3}}{x^2\cancel{(x^2+3)}}\,dx =$$

כללי אינטגרציה

ניתן להשמיט את הערך המוחלט כי $0 < x^4+3x^2$
לכל x.

$$= \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 2\ln\left(x^4+3x^2\right) - 9\int x^{-2}\,dx =$$

אינטגרל מיידי

$$= \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 2\ln\left(x^4+3x^2\right) + \frac{9}{x} + C$$

3. חשבו את האינטגרל הבא:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,dx =$$

(נציב

$x=a\sin t$ כאשר $t=\arcsin\frac{x}{a}$

$\hookrightarrow -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$, $dx=a\cos t\,dt$

$\sqrt{x^2}=|x|$

$$=\frac{1}{a}\int \frac{a^3\sin^2 t\cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\,dt = \frac{1}{\cancel{a}}\int \frac{a^{\cancel{3}}\sin^2 t\cos t}{\sqrt{\cos^2 t}}\,dt =$$

זהות: $1-\sin^2 t=\cos^2 t$

$$=\int \frac{a^2\sin^2 t\,\cancel{\cos t}}{\cancel{\cos t}}\,dt =$$

ניתן לוותר על הערך המוחלט כי $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$ $\cos t>0$!

אינטגרציה בחלקים

$u=\sin t \quad v'=\sin t$

$u'=\cos t \quad v=-\cos t$

$$\int \sin^2 t\,dt = -\sin t\cos t + \int \cos^2 t\,dt =$$

$$= -\sin t\cos t + \int (1-\sin^2 t)\,dt =$$

זהות

$1-\sin^2 t = \cos^2 t$

כללי אינט'

$$= -\sin t\cos t + \int 1\,dt - \int \sin^2 t\,dt$$

$$\Downarrow$$

$$2\int \sin^2 t\,dt = t - \sin t\cos t + c$$

$$\Rightarrow a^2\int \sin^2 t\,dt = a^2\cdot\frac{t-\sin t\cos t}{2} + c$$

$$= \frac{a^2}{2}\cdot\left(\arcsin\frac{x}{a} - \sin\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\cos\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\right) + c =$$

נציב

$t = \arcsin\frac{x}{a}$

$$= \frac{a^2}{2}\cdot\left(\arcsin\frac{x}{a} - \frac{x}{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right) + c =$$

זהות:

$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$

$$= \frac{-x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\cdot\arcsin\frac{x}{a}}{2} + c$$

4.

חשבו את האינטגרל הבא:

$$\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}\,dx \underset{\text{חוקי חזקות}}{=} \int \frac{x+x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{6}}}{x(1+x^{\frac{1}{3}})}\,dx =$$

$$\underset{\text{חוקי חזקות}}{=} \int \frac{\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^6+\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^4+x^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{6}{6}}\,(1+x^{\frac{2}{6}})}\,dx =$$

$$= 6\cdot\int \frac{\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^6+\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^4+x^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{6}}(1+x^{\frac{2}{6}})}\cdot\frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}\,dx \underset{\text{הצבה}}{=}$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{הצבה} \\ t=x^{\frac{1}{6}} \\ dt=\frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}dx \end{array}\right)$$

$$= 6\int \frac{t^6+t^4+t}{t(1+t^2)}\,dt = 6\int \frac{t^6+t^4+t}{t^3+t}\,dt =$$

נחלק מונה ומכנה ב t

$$= 6\int \frac{t^5+t^3+1}{t^2+1}\,dt$$

נבצע חילוק פולינומים:

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{1}{r}{t^3} & \\ \cline{1-1} t^5+t^3+1 & t^2+1 \\ -\,(t^5+t^3) & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

כלומר

$$\frac{t^5+t^3+1}{t^2+1} = t^3 + \frac{1}{t^2+1}$$

נמשיך את האינטגרל

$$6\int \frac{t^5+t^3+1}{t^2+1}\,dt = 6\int\left(t^3+\frac{1}{t^2+1}\right)dt =$$

כללי אינטגרציה

$$= 6\int t^3\,dt + 6\int \frac{1}{t^2+1}\,dt =$$

אינטגרלים מיידיים

נציב $t=x^{\frac{1}{6}}$

$$= 6\cdot\frac{t^4}{4} + 6\cdot\arctan(t) + c = \frac{3t^4}{2} + 6\arctan(t) + c =$$

$$= \frac{3\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^4}{2} + 6\arctan\left(x^{\frac{1}{6}}\right) + c = \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + 6\arctan\left(\sqrt[6]{x}\right) + C$$

חוקי חזקות

5. חשבו את האינטגרל הבא:

$$\int (2-x)^2 \ln x \, dx =$$

אינטגרציה בחלקים:

$$u = \ln x \qquad v' = (2-x)^2$$
$$u' = \frac{1}{x} \qquad v = -\frac{(2-x)^3}{3}$$

כללי אינטגרציה

$$= -\ln x \cdot \frac{(2-x)^3}{3} - \int \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{(2-x)^3}{-3}\right) dx =$$

נוסחה

$$= -\ln x \cdot \frac{(2-x)^3}{3} + \frac{1}{3} \int \frac{(2-x)^3}{x} dx =$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$= -\ln x \cdot \frac{(2-x)^3}{3} + \frac{1}{3} \cdot \int \frac{8-12x+6x^2-x^3}{x} dx$$

נעבוד לבד רק באינטגרל שנותר.

$$\int \frac{-x^3+6x^2-12x+8}{x} dx = \int \left(-x^2+6x-12+\frac{8}{x}\right) dx =$$

$$= -\int x^2 dx + 6\int x \, dx - 12\int 1 \, dx + 8\int \frac{dx}{x} =$$

כללי אינטגרציה

$$= -\frac{x^3}{3} + \frac{\cancel{6}^{\,3}x^2}{\cancel{2}} - 12x + 8\ln|x| + C$$

אינטגרל מיידי

נציב באינטגרל השלם:

$$= -\ln x \cdot \frac{(2-x)^3}{3} + \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 12x + 8\ln|x|\right) + C =$$

$$= -\ln(x)\cdot\frac{(2-x)^3}{3} - \frac{x^3}{9} + x^2 - 4x + \frac{8}{3}\ln(x) + C$$

ניתן לוותר על סימן הערך המוחלט כי $x>0$ בגלל ה $\ln$ השני