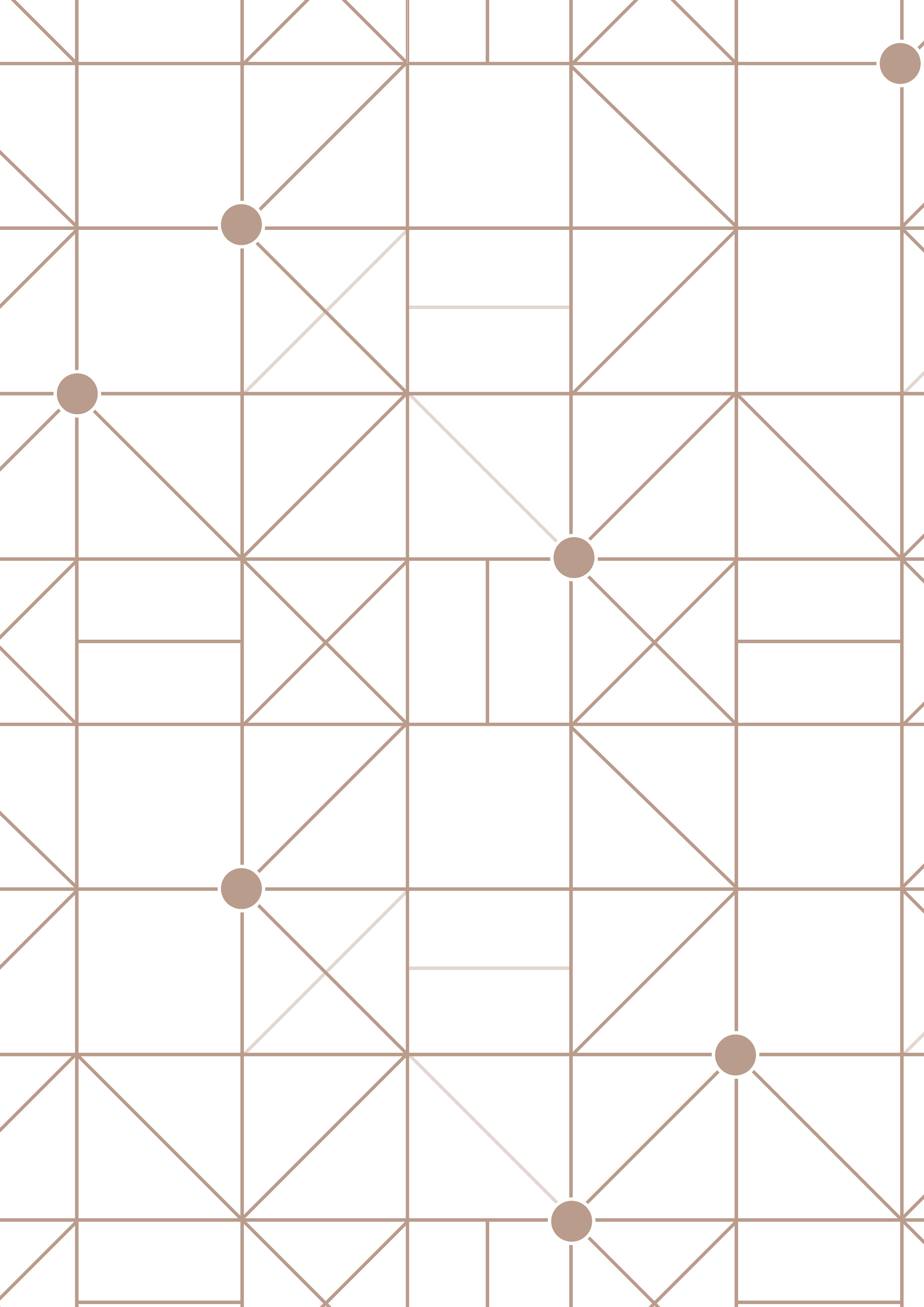

1

סימון

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2} x\sin x}{(\ln(1+x))^4} = L$$

נחשב פיתוח טיילור מקלורין ממעלה 1 של: $\cos x, \sin x, \ln(1+x)$

$f(x) = \cos x$ $\qquad f(0) = 1$

$f'(x) = -\sin x$ $\qquad f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos x$ $\qquad f''(0) = -1$

$f'''(x) = -\sin x$ $\qquad f'''(0) = 0$

$f^{(4)}(x) = \cos x$ $\qquad f^{(4)}(0) = 1$

לכן לפי משפט טיילור

$$\cos x = \frac{1}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + R_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + R_{4,f}(x)$$

$g(x) = \sin x$ $\qquad g(0) = 0$

$g'(x) = \cos x$ $\qquad g'(0) = 1$

$g''(x) = -\sin x$ $\qquad g''(0) = 0$

$g^{(3)}(x) = -\cos x$ $\qquad g^{(3)}(0) = -1$

$g^{(4)} = \sin x$ $\qquad g^{(4)}(0) = 0$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + R_{4,g}(x)$$

לכן לפי טיילור

$h(x) = \ln(1+x)$ $\qquad\qquad\qquad$ $h(0) = 0$

$h'(x) = \dfrac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$ $\qquad\qquad$ $h'(0) = 1$

$\ln(1+x) = x + R_{1,h}(x)$

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + R_{4,f}(x) \cancel{-1} + \frac{1}{2}x\left(x - \frac{x^3}{6} + R_{4,g}(x)\right)}{\left(x + R_{1,h}(x)\right)^4} =$$

ב:3

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{-\frac{x^2}{2}} + \frac{x^4}{24} + R_{4,f}(x) + \cancel{\frac{1}{2}x^2} - \frac{x^4}{12} + \frac{1}{2}x R_{4,g}(x)}{x^4\left(1 + \frac{R_{1,h}(x)}{x}\right)^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\cancel{\frac{x^4}{24}}}{\cancel{x^4}\left(1 + \underbrace{\frac{R_{1,h}(x)}{x}}_{0}\right)^4} + \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{R_{4,f}(x)}^{0} + \frac{1}{2}\overbrace{x}^{0}\overbrace{R_{4,g}(x)}^{0}}{x^4\left(1 + \underbrace{\frac{R_{1,h}(x)}{x}}_{0}\right)^4} =$$

$$= -\frac{1}{24}$$

לפי טיילור

מתקיים

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$$

2 (ג) נמצא פיתוח מקלורן של $f(x)=\tan x$ מסדר 4

$$f(x)=\tan x \qquad f(0)=0$$

$$f'(x)=\cos^{-2}x \qquad f'(0)=1$$

$$f''(x)=2\cos^{-3}x\cdot\sin x \qquad f''(0)=0$$

$$f'''(x)=6\cos^{-4}x\sin^2x+2\cos^{-2}x \qquad f'''(0)=2$$

$$f^{(4)}(x)=24\cos^{-5}x\cdot\sin^3x+12\sin x\cos^{-3}x+4\cos^{-3}x\sin x \qquad f^{(4)}(0)=0$$

לפי משפט טיילור-מקלורן

$$\tan x=\sum_{k=0}^{4}\frac{\tan^{(k)}(0)}{k!}x^k+R_4(x)$$

כאשר

$$R_4(x)=\frac{f^{(5)}(c)}{5!}x^5 \qquad (0<c<x)$$

ומקיים

$$\frac{R_4(x)}{x^4}\xrightarrow[x\to0]{}0$$

כלומר קיבלנו

$$\tan x=x+\frac{2}{3!}x^3+R_4(x)$$

$$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+R_4(x)$$

$\blacksquare$

(ב)

הצבה פיתוח טיילור

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}+\frac{x^3}{3}+R_4(x)-\cancel{x}}{x^3} =$$

$$\underset{\text{חשבון גבולות}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cancel{x^3}}{3}}{\cancel{x^3}} + \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{R_4(x)}{x^3}}_{\text{ישאף לאפס לפי משפט טיילור.}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

3 א.

$\alpha \neq -1$

אינטגרציה בחלקים

$$I_1 = \int x^{\alpha} \ln x \, dx =$$

$$\left(\begin{array}{ll} u = \ln x & v' = x^{\alpha} \\ u' = \frac{1}{x} & v = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \end{array} \right)$$

$$= \ln x \cdot \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \, dx =$$

$$= \ln x \cdot \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \int \frac{x^{\alpha}}{\alpha+1} \, dx = \ln x \cdot \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + c$$

ב.

$m \in \mathbb{N}$

$$I_m = \int x^{\alpha} \ln^m x \, dx =$$

אינטגרציה בחלקים

$$\left(\begin{array}{ll} u = \ln^m x & v' = x^{\alpha} \\ u' = m \ln^{m-1} x \cdot \frac{1}{x} & v = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \end{array} \right)$$

$$= \ln^m x \cdot \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \int m \ln^{m-1} x \cdot \frac{1}{x} \, \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \, dx =$$

$$= \ln^m x \cdot \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{m}{\alpha+1} \int x^{\alpha} \ln^{m-1} x \, dx$$

כלומר

$$I_m = \frac{x^{\alpha+1} \ln^m x - m I_{m-1}}{\alpha+1}$$