1. נגדיר את הפונקציה

$$f(x)=\int_{-1}^{x}|t|dt$$

בקטע $x\in[-1,1]$.

(א) בטאו את הפונקציה $f(x)$ בצורה מפורשת.

רשושית, מתקיים

$$f(x)=\int_{-1}^{0}|t|dt+\int_{0}^{x}|t|dt$$

לאומר

$$f(x)=\int_{-1}^{0}-t\,dt+\int_{0}^{x}|t|dt=-\frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{0}+\int_{0}^{x}|t|dt=\int_{0}^{x}|t|dt+\frac{1}{2}$$

המשפט היסודי

נפריד למקרים:

מקרה א: $X\geq 0$:

$$f(x)=\int_{0}^{x}|t|dt+\frac{1}{2}=\int_{0}^{x}t\,dt+\frac{1}{2}=$$

כי t חיובי

המשפט היסודי.

$$=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}$$

מקרה ב: $X<0$.

כי $t<0$

במשפט היסודי.

$$f(x)=\int_{0}^{x}|t|dt+\frac{1}{2}=\int_{0}^{x}-t\,dt+\frac{1}{2}=$$

$$=-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}$$

סך הכל,

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}, & x\geq 0\\ -\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}, & \text{אחרת}\end{cases}$$

(ב) מצאו את הנקודות בהן f רציפה.

(ג) מצאו את הנקודות בהן f גזירה.

לפי המשפט היסודי, $f'=|x|$ לכל נקודות הרציפות שלה, וכן ידוע $|x|$ רציפה בכל הקטע, לכן בפרט לכל x בקטע $f'=|x|$ ולכן בפרט f גזירה ורציפה בכל הקטע

2. חשבו את הגבולות הבאים:

(א)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sqrt[n]{e^k}$$

נגדיר $f(x)=xe^x$ שמוגדרת על כל הישר, ולכן רציפה בכל הישר, שכן היא אלמנטרית, וכתוצאה מכך היא אינט', בפרט בקטע $[0,1]$

ניקח את החלוקה $P_n=\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,1\right\}$ ונבחר c_k-ים כך ש הימנית ביותר בכל קטע, ונקבל:

$$\sigma(P_k)=\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k\, f\left(\frac{k}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{k}{n}\cdot e^{\frac{k}{n}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sqrt[n]{e^k}$$

הנק' שבחרנו

והרי $\lambda(P_n)\longrightarrow 0$ ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sqrt[n]{e^k}=\int_0^1 xe^x\,dx=(x-1)e^x\Big|_0^1=(1-1)e^1-(0-1)e^0=1$$

המשפט היסודי

(ב)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}(1^4+2^4+\cdots+n^4)$$

נפעל באופן דומה לסעיף הקודם:

נגדיר $f(x)=x^4$ בקטע $[0,1]$, אינט׳. נגדיר $P_n=\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,1\}$

ונבחר c_k-ים להיות הנק׳ הימניות בכל קטע, ונקבל

$$\sigma(P_n)=\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k\cdot f(c_k)=\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k\cdot f\left(\frac{k}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^4$$

אורך כל קטע

ערך הפונ׳ בנק׳ הימנית

והרי $\lambda(P_n)\to 0$, לכן

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}(1^4+2^4+\dots+n^4)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^4=\int_0^1 x^4\,dx=$$

המשפט היסודי

$$=\frac{x^5}{5}\Big|_0^1=\frac{1^5}{5}-\frac{0^5}{5}=\frac{1}{5}$$

(ג)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} ie^{\frac{i^2}{n^2}}\right)$$

נגדיר $f(x)=xe^{x^2}$ בקטע $[0,1]$, שמונוטונית, רציפה, אינטגרבילית

עוב, נגדיר $P_n=\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,n\}$ ונבחר c_i-ים להיות הנק' הימניות בכל קטע, ונקבל

$$\sigma(P)=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i f(c_i)=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{אורך של קטע}}\cdot f\Big(\underbrace{\frac{i}{n}}_{\text{הנק' שבחרנו}}\Big)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{i}{n}\cdot e^{\frac{i^2}{n^2}}=$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i\cdot e^{\frac{i^2}{n^2}}$$

ושוב $\lambda(P_n)\to 0$ לכן

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} ie^{\frac{i^2}{n^2}}=\int_0^1 xe^{x^2}dx\overset{\text{המשפט היסודי}}{=}\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}e^{1^2}-\frac{1}{2}e^{0^2}=\frac{e-1}{2}$$

3. הוכיחו את אי-השיוויון

$$0 < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos x}{x} dx < \frac{\pi^2}{64}$$

נמצא ראשית קירוב מקלורן ממעלה 3 ל $g(x)=\cos x$ בקטע $(0,\frac{\pi}{4}]$

$g(x)=\cos x$ $\quad g(0)=1$

$g'(x)=-\sin x$ $\quad g'(0)=1$

$g''(x)=-\cos x$ $\quad g''(0)=-1$

$g'''(x)=\sin x$ $\quad g'''(0)=0$

$g^{(4)}(x)=\cos x$

לכן לפי משפט טיילור קיימת $\underbrace{\;}_{\text{לכל x בקטע}}$ $c\in(0,x)$, $\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+R_3(x)$

כאשר השארית היא $R_3(x)=\frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4 = \frac{\cos(c)}{4!}x^4 > 0$

כי בקטע הנ"ל $\cos > 0$, $x^4>0$! לכל x

לכן $\cos x > 1-\frac{x^2}{2}$.

נסתכל על $f(x)=\frac{1-\cos x}{x}$ בקטע $(0,\frac{\pi}{4}]$ $x>0$ בקטע,

! $1-\cos x\geq 0$ לכל x. לכן $f(x)>0$. לכן $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx>0$

בנוסף מתקיים

$$\frac{1-\cos x}{x} < \frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}{x} = \frac{\frac{x^2}{2}}{x} = \frac{x}{2}$$

לכן ממשפט,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos x}{x}\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{2}\,dx \underset{\text{המשפט היסודי}}{=} \left.\frac{x^2}{4}\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{4} - \frac{0^2}{4} = \frac{\pi^2}{64}$$

וסה״כ קיבלנו

$$0 < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos x}{x}\,dx < \frac{\pi^2}{64}$$

$\blacksquare$

4. תהי f פונקציה גזירה ברציפות n פעמים בקטע $[a,b]$. השתמשו במשפט ערך הביניים האינטגרלי כדי להראות שקיימת $c \in (a,b)$ שעבורה

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b f^{(n)}(t)(b-t)^{n-1}dt$$

(כלומר שארית לגראנז' של פולינום טיילור נובעת משארית האינטגרלית).

נגדיר $g(t)=f^{(n)}(t)$, $h(t)=(b-t)^{n-1}$

g רציפה בקטע $[a,b]$ (נתון f גזירה ברציפות).

h פולינומית לכן רציפה. לפיכך שתיהן אי"ש, וגם מכפלתן אי"ש.

לפי משפט הערך הממוצע האינטגרלי, קיימת $c \in [a,b]$ עבורה:

$$\int_a^b g(t)h(t)dt = g(c)\cdot\int_a^b h(t)dt$$

כלומר

$$\int_a^b f^{(n)}(t)(b-t)^{n-1}dt = f^{(n)}(c)\cdot\int_a^b (b-t)^{n-1}dt$$

בנוסף ניתן לראות ש:

$$\int_a^b (b-t)^{n-1}dt = -\frac{(b-t)^n}{n}\Bigg|_a^b = \frac{(b-a)^n}{n}$$

המשפט היסודי.

סך הכל,

$$\int_a^b f^{(n)}(t)(b-t)^{n-1}dt = f^{(n)}(c)\cdot\frac{(b-a)^n}{n}$$

נכפיל את שני צדדי המשוואה ב $\frac{1}{(n-1)!}$ ונקבל

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b f^{(n)}(t)(b-t)^{n-1}\,dt$$

$\blacksquare$