תרגיל 8

נגה מנירב

1. (השאלה הזו הועברה לפה מתרגיל בית 7) עבור האינטגרלים הלא אמיתיים הבאים, קבעו האם הם מתכנסים או מתבדרים:

(א)

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}dx$$

נשים לב ש

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1-x} = -\infty$$

!

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\ln x}{1-x} \underset{\substack{\text{לופיטל} \\ \text{"}\frac{0}{0}\text{"}}}{=} \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1$$

לכן אומנם הפונק' לא מוגדרת בסביבת 1 אך היא חסומה שם
ידוע שינוי מס' סופי של נק' לא משפיע על האינטגרל, לכן נתייחס
לאינטגרל כ"בעייתי" רק בסביבת 0, וב 1 נגדיר את הפונ'
להיות -1. (נסמן את הפונק' שלנו ב f)

נגדיר:

$$g(x) := -f(x)$$

$$h(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}$$

שתי הפונק' חיוביות בתחום, אינטגרביליות לכן אינט' בכל $[\varepsilon, 1]$ לכל $0<\varepsilon<1$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{\ln x}{1-x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sqrt{x}\ln x}{1-x}$$

$$\lim_{x\to0^+} -\sqrt{x}\ln x = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{-x^{-\frac{1}{2}}} \overset{\text{לופיטל } \frac{-\infty}{-\infty}}{=} \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}} =$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{x} = \lim_{x\to0^+} 2\sqrt{x} = 0$$

לכן

$$\lim_{x\to0^+}\frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to0^+}\frac{-\sqrt{x}\ln x}{1-x} = 0$$

לכן לפי מבחן ההשוואה הגבולי לפונק' אי-שליליות:

$\int_0^1 h$ מתכנס $\Longrightarrow$ $\int_0^1 g$ מתכנס

וידוע $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ מתכנס (ראינו בהרצאה) לכן $\int_0^1 g$ מתכנס

והרי $g=-f$ לכן גם $\int_0^1 f$ מתכנס

∎

(ב)

$$\int_0^\infty \frac{\arctan\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx$$

קיימת נקודה "בעייתית" אחת. לכן נפצל את האינטגרל:

$$\int_0^\infty \frac{\arctan\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx = \int_0^1 \frac{\arctan\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx + \int_1^\infty \frac{\arctan\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx$$

נגדיר $f(x):=\frac{\arctan\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}$ $\quad g(x):=\frac{1}{\sqrt{x}}$

שתיהן חיוביות בקטע $(0,1)$, אלמנטריות ולכן אינט' בכל $[\varepsilon,1]$ לכל $0<\varepsilon<1$.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\arctan\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to0^+}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$$

כי $\frac{1}{x}\to\infty$ ו arctan
רציפה ושואפת ל $\frac{\pi}{2}$
ב ∞

והרי $0<\frac{\pi}{2}<\infty$ לכן לפי מבחן ההשוואה הגבולי לפונק' אי-שליליות

$\int_0^1 f$, $\int_0^1 g$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

והרי ידוע $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ מתכנס, לכן גם $\int_0^1 f$ מתכנס.

נטפל כעת באינטגרל השני.

נגדיר $h(x) := \frac{1}{x^{3/2}}$

f ו h חיוביות בקרן $(1,\infty)$, אלמנטריות ולכן אינט' בכל $[1,M]$ לכל $M>1$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\arctan\frac{1}{x}}{x^{1/2}}}{\frac{1}{x^{3/2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}\arctan\frac{1}{x}}{x^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} x\arctan\frac{1}{x} = \underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}_{\frac{1}{x}\to 0 \text{ לכן } \arctan\to 0} \overset{\text{אופיטל } "\frac{0}{0}"}{=}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}\cdot\cancel{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}}{\cancel{-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{0}+1} = 1$$

והרי $0<1<\infty$ לכן לפי מבחן ההשוואה הגבולי לפונ' אי-שליליות $\int_1^\infty f$, $\int_1^\infty h$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

והרי ידוע $\int_1^\infty \frac{1}{x^{1.5}}$ מתכנס לכן גם $\int_1^\infty f$ מתכנס.

סה״כ קיבלנו שמאחר הפיצול, שני האינט' מתכנסים. לכן סה״כ $\int_0^\infty f$ מתכנס

2. הוכיחו כי

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x}dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{(1+x)^2}dx$$

אך אחד האינטגרלים מתכנס בהחלט, והשני רק בתנאי.

נחשב לפי ההגדרה.

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x}\,dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^M \frac{\cos x}{1+x}\,dx$$

$$\int_0^M \frac{\cos x}{1+x}\,dx = \frac{\sin x}{1+x}\Big|_0^M + \int_0^M \frac{\sin x}{(1+x)^2}\,dx = \frac{\sin M}{1+M} - \frac{\sin 0}{1+0} + \int_0^M \frac{\sin x}{(1+x)^2}\,dx =$$

אינטגרציה בחלקים

$$\left(\begin{array}{ll} u=\frac{1}{1+x} & v'=\cos x \\ u'=-\frac{1}{(1+x)^2} & v=\sin x \end{array}\right)$$

$$= \frac{\sin M}{M+1} + \int_0^M \frac{\sin x}{(1+x)^2}\,dx$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x}\,dx = \lim_{M\to\infty}\left(\frac{\sin M}{M+1} + \int_0^M \frac{\sin x}{(1+x)^2}\,dx\right) =$$

$$= \underbrace{\lim_{M\to\infty}\frac{\sin M}{M+1}}_{} + \lim_{M\to\infty}\int_0^M \frac{\sin x}{(1+x)^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{(1+x)^2}\,dx$$

0 כי חסומה
כפול שואפת ל-0

נבדוק התכנסות בהחלט.

$$\left|\frac{\cos x}{x+1}\right| = \frac{|\cos x|}{x+1} \geq \frac{\cos^2 x}{x+1} = \frac{\cos 2x - 1}{2(x+1)}$$

$0 \leq |\cos x| \leq 1$

זהות טריגו

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2x}{2(x+1)}\,dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^M \frac{\cos 2x-1}{2(x+1)}\,dx$$

$$\int_0^M \frac{\cos 2x-1}{2(x+1)}\,dx = \underbrace{\int_0^M \frac{\cos 2x}{2(x+1)}\,dx}_{(\text{א})} - \underbrace{\int_0^M \frac{dx}{2(x+1)}}_{(\text{ב})}$$

נתחיל על א:

נגדיר $f(x):=\frac{1}{2(x+1)}$ $\quad g(x):=\cos 2x$

f מונוטונית שואפת ל 0 בצורה ברציפות

g רציפה ומקיימת $\int_0^x \cos 2t\,dt = \frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^x = \frac{\sin 2x}{2}$

המשפט היסודי

פונק' חסומה

לכן לפי מבחן דיריכלה $\int_0^\infty \frac{\cos 2x}{2(x+1)}\,dx$ מתכנס.

נבחן כעת את ב:

נגדיר $\varphi(x):=\frac{1}{2(x+1)}$ $\quad \psi(x):=\frac{1}{x}$

שתיהן חיוביות בקרן $[0,\infty)$, אלמנטריות ולכן רציפות ומכאן אינט' בכל $[0,M]$ לכל $M>0$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2x+2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{2x+2} = \frac{1}{2}$$

והרי $0<\frac{1}{2}<\infty$ לכן לפי מבחן ההשוואה הגבולי לפונק' אי-שליליות,

$\int_0^\infty \varphi$, $\int_0^\infty \psi$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

ידוע $\int_0^\infty \frac{dx}{x}$ מתבדר, לכן ב' מתבדר.

סה"כ א מתכנס ו ב מתבדר, לכן לפי חשבון גבולות,

$\int_0^\infty \frac{\cos 2x-1}{2(x+1)}dx$ מתבדר.

והראינו $\frac{|\cos x|}{x+1} \geq \frac{\cos 2x -1}{2(x+1)} \geq 0$

לכן לפי מבחן ההשוואה לפונק' אי-שליליות, $\int_0^\infty \frac{|\cos x|}{x+1}dx$ מתבדר.

נבדוק התכנסות בתנאי:

נגדיר $g_1(x):=\frac{1}{x+1}$ $\quad f_1(x):=\cos x$

g_1 מונוטונית שואפת ל 0 גזירה ברציפות

f_1 רציפה ומקיימת $\int_0^x f_1 \underset{\text{המשפט היסודי}}{=} \sin t\Big|_0^x = \underbrace{\sin x}_{\text{פונק' חסומה}}$

לכן לפי מבחן דיריכלה, $\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x}dx$ מתכנס כלומר מתכנס בתנאי

נבחן התכנסות בהחלט של $\int_0^\infty \frac{\sin x}{(1+x)^2}$

$$\left|\frac{\sin x}{(1+x)^2}\right| = \frac{|\sin x|}{(1+x)^2}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^2} = \int_1^\infty \frac{du}{u^2}$$

ידוע מתכנס

לכן גם זה מתכנס.

נגדיר $f_2(x) := \frac{|\sin x|}{(1+x)^2}$ $\quad g_2(x) := \frac{1}{(1+x)^2}$

שתיהן אי-שליליות ב $[0,\infty)$ ואינט' בכל $[0,M]$ לכל $M>0$.

בנוסף מתקיים $f_2(x) \le g_2(x)$ לכל $x \in [0,\infty)$, וידוע כי $\int_0^\infty g_2$ מתכנס.

לכן לפי מבחן ההשוואה לפונ' אי-שליליות, $\int_0^\infty f_2$ מתכנס

ולכן $\int_0^\infty \frac{\sin x}{(1+x)^2}dx$ מתכנס בהחלט

∎

3. נסתכל על הפונקציה הבאה:

$$F(x)=\int_0^x \frac{|\sin t|}{t}dt$$

(א) הוכיחו כי

$$F(\pi n)\geq F(\pi(n-1))+\frac{2}{\pi n}$$

לכל $n\in\mathbb{N}$.

$$F(\pi n)=\int_0^{\pi n}\frac{|\sin t|}{t}\,dt \qquad F(\pi(n-1))=\int_0^{\pi(n-1)}\frac{|\sin t|}{t}\,dt$$

לפי כללי אינטגרציה

$$F(\pi n)-F(\pi(n-1))=\int_{\pi(n-1)}^{\pi n}\frac{|\sin t|}{t}\,dt$$

נגדיר

$$f(t):=\frac{|\sin t|}{t} \qquad g(t):=\frac{|\sin t|}{\pi n}$$

מתקיים שלכל $\pi(n-1)<t<\pi n$ ש $f(t)\geq g(t)$, לכן

$$F(\pi n)-F(\pi(n-1))\geq\int_{\pi(n-1)}^{\pi n}\frac{|\sin t|}{\pi n}\,dt=\frac{1}{\pi n}\int_{\pi(n-1)}^{\pi n}|\sin t|\,dt\geq\frac{1}{\pi n}\left|\int_{\pi(n-1)}^{\pi n}\sin t\,dt\right|$$

לפי כללי אינטגרציה

אינטגרל של סכום מוחלט גדול מערך מוחלט של אינטגרל

המשפט היסודי

$$=\frac{1}{\pi n}\left|-\cos t\Big|_{\pi(n-1)}^{\pi n}\right|=\frac{1}{\pi n}\left|\underbrace{-\cos\pi n+\cos(\pi(n-1))}_{\text{אחד מהם } -1 \text{ ואחד } 1}\right|=\frac{2}{\pi n}$$

$\blacksquare$

(ב) באמצעות הסעיף הקודם, הוכיחו כי

$$\lim_{n\to\infty} F(\pi n) = \infty$$

לפי א׳, הפונק׳ מונוטונית עולה לכן יש לה גבול במובן הרחב

נב"ש קיים לה גבול סופי L

נגדיר $\varepsilon_n = \frac{1}{\pi n}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

יהי $k \in \mathbb{N}$ כך ש: $F(k\pi) \in (L-\varepsilon_{k+1}, L+\varepsilon_{k+1})$, קיים כי $F(\pi n) \to L$.

$$F((k+1)\pi) - F(k\pi) \geq \frac{2}{\pi(k+1)} = 2\cdot\varepsilon_{k+1}$$

אורך הסביבה.

לכן בהכרח $F((k+1)\pi)$ לא בסביבה הנ"ל של L, בסתירה לכך ש L גבול של הסדרה (וכל סביבה שלו מכילה זנב)

לכן L לא סופי

$$\lim_{n\to\infty} F(\pi n) = \infty$$

$\blacksquare$

(ג) באמצעות הסעיף הקודם, הוכיחו כי האינטגרל

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$$

לא מתכנס בהחלט. **שימו לב שהוכחנו זאת בתרגול בדרך אחרת.**

נניח האינטגרל מתכנס בהחלט. כלומר קיים L סופי כך ש

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{|\sin t|}{t} dt = L$$

קרי

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = L$$

ולפי הגדרת גבול לפונק׳, כל סדרה $a_n \longrightarrow \infty$, מקיימת

$$F(a_n) \longrightarrow L$$

בפרט הסדרה $a_n = \pi n$

מקיימת $F(\pi n) \xrightarrow[n\to\infty]{} L$

בסתירה לכך ש $F(\pi n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

לכן $\int_0^\infty \frac{|\sin t|}{t} dt$ מתבדר, ולכן

$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$ לא מתכנס בהחלט

כדרוש.

.4

(א) מצאו את השגיאה בחישוב הבא: לכל פונקציה רציפה f מתקיים

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx = \int_0^0 f(\arcsin t)dt$$

כאשר משתמשים בשינוי המשתנים $t = \sin x$ ואת גבולות האינטגרל מחשבים לפי

$$x = 0 \implies t = 0, x = 2\pi \implies t = 0$$

רמז: באיזה תחום ההצבה הזו הפיכה?

לפי משפט של שיטת ההצבה, המנוסח כאן:

משפט (שיטת ההצבה): נניח שלפונקציה $f(x)$ יש פונקציה קדומה בקטע I. תהי $\varphi: J \longrightarrow I$ גזירה והפיכה.

$$\varphi(t) = x$$

אזי

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

(זה לגמרי לא מסויים אך העקרון נשאר)

הפונק' φ צריכה להיות הפיכה

ובמקרה שלנו, צריך להתקיים ש $\sin$ הפיכה ב $[0,2\pi]$

כמובן שזה לא נכון, היא לא חח"ע.

לכן לא ניתן לבצע את ההצבה הנ"ל כפי שנעשתה.

(ב) תקנו את השגיאה ומצאו את הנוסחא הנכונה שנובעת מההצבה הזו.

נפצל את האינטגרל לתחומים ש $\sin x$ כן הפיכה

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f(x)\cos x\,dx$$

נציב $t=\sin x$

$dt\ \cos x\,dx$

אבל בכל אחד מן התחומים הפונק' ההופכית טיפה שונה
אך קל למצוא אותה לפי מחזוריות הסינוס.

$[0,\frac{\pi}{2}]$: $x=\arcsin t$

$[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$: $x=-\arcsin t+\pi$

$[\frac{3\pi}{2},2\pi]$: $x=\arcsin t-2\pi$

וסה"כ לפי שיטת ההצבה,

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx = \int_0^1 f(\arcsin t)\,dt - \int_{-1}^{1} f(-\arcsin t+\pi)\,dt + \int_{-1}^{0} f(\arcsin t+2\pi)\,dt$$

$\blacksquare$

5. תהי $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה מונוטונית יורדת כך שהאינטגרל $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס.

(א) הוכיחו כי $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.

מכיוון ש f מונוטונית, יש לה גבול במובן הרחב.

נב"ש $L:=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\neq 0$

נפריד למקרים:

מקרה א': $L>0$ לכן $f(x)\geq L$ לכל x בתחום.

ולכן גם:

$$\int_a^M f(x)dx \geq \int_a^M L\,dx \xrightarrow{M\to\infty} \infty$$

לכן לפי פידה $\int_a^\infty f(x)dx$ מתבדר בסתירה.

מקרה ב: $L<0$ (כולל $L=-\infty$), לכן $f(x)\leq A<0$ לכל $x>x_0$.

לכן

$$\int_{x_0}^M f(x)dx \leq \int_{x_0}^M A\,dx \xrightarrow{M\to\infty} -\infty$$

לכן שוב לפי פידה $\int_{x_0}^\infty f$ מתבדר ובפרט גם $\int_a^\infty f$ מתבדר בסתירה

לכן סה"כ תייב $L=0$

(ב) הוכיחו כי אפילו $\lim_{x\to\infty} xf(x) = 0$. **הדרכה:** הוכיחו קודם כי מתקיים

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} f(2^n)2^n < \infty$$

נב"ש $\lim_{x\to\infty} xf(x) \neq 0$

לכן ($f\downarrow 0$ לכן $f \geq 0$) קיים $\varepsilon_0>0$ כך ש $xf(x)>\varepsilon_0$ $(*)$

החל ממקום מסוים.

בה"כ נניח $\varepsilon_0 = 2$.

נבחר סדרה עולה x_n שואפת לאינסוף כך שאי-השוויון מתקיים.

נבחר את הסדרה כך ש $x_n > \varepsilon_0 x_{n-1} = 2x_{n-1}$ $(**)$

מכיוון ש f יורדת, מתקיים עבור x בקטע $[n-1,n]$, $f(x) \geq f(n)$

לכן,
$$\int_{n-1}^{n} f(n)\,dx \leq \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx$$
$$\Downarrow$$
$$f(n)\int_{n-1}^{n} 1\,dx \leq \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx$$
$$\Downarrow$$
$$f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx$$

בפרט גם
$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} f \geq \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x_n) = (x_n - x_{n-1})f(x) \overset{(**)}{\geq} \frac{1}{2}x_n f(x_n) \overset{(*)}{\geq} 1$$

נסכום מעל n ונקבל ש $\int_0^\infty f$ מתבדר, בסתירה!

לכן $\lim_{x\to\infty} x f(x) = 0$

$\blacksquare$