שם 4

ןקב מירק

פתרו את האינטגרלים הלא-מסוימים הבאים:

.1 $$\int \sin(ax)\cos(bx)dx$$

נפתח לפי זהויות טריגונומטריות:

$$\sin(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot \sin(ax)\cos(bx) =$$

נכתוב במקום a: $\frac{a+b+a-b}{2}$

כנ"ל b.

$$= \frac{1}{2}\cdot \sin\left(\frac{(a+b)+(a-b)}{2}x\right)\cos\left(\frac{(a+b)-(a-b)}{2}x\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sin((a+b)x) + \frac{1}{2}\cdot \sin((a-b)x)$$

זהות

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

נחזור לחישוב האינטגרל:

כללי אינטגרציה

$$\int \sin(ax)\cos(bx)dx = \frac{1}{2}\int \sin((a+b)x)dx + \frac{1}{2}\int \sin((a-b)x)dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos((a+b)x)\cdot\frac{1}{a+b} - \frac{1}{2}\cos((a-b)x)\cdot\frac{1}{a-b} + C =$$

אינטגרל מיידי + תיקון קבועים

$$= -\frac{\cos((a+b)x)}{2(a+b)} - \frac{\cos((a-b)x)}{2(a-b)} + C$$

2.

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}\,dx = \int \frac{\cos x}{\sqrt{1-2\sin^2 x}}\,dx =$$

הכנסת
ה "2"
לריבוע

זהות:
$\cos 2x = 1-2\sin^2 x$

נכפיל ונחלק ב $\sqrt{2}$ (+כללי אינטגרציה)

$$= \int \frac{\cos x}{\sqrt{1-(\sqrt{2}\sin x)^2}}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{\sqrt{2}\cos x}{\sqrt{1-(\sqrt{2}\sin x)^2}}\,dx =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin(\sqrt{2}\sin x) + C$$

אינטגרל
מיידי
של
arcSin

.3

$$\int \frac{x^4}{\sqrt{x^{10}-2}}\,dx = \frac{\sqrt2}{5}\int \frac{\frac{5}{\sqrt2}x^4}{\sqrt{x^{10}-2}}\,dx = \frac{\sqrt2}{5}\int\frac{dt}{\sqrt{2t^2-2}} =$$

נכפיל ונחלק ב $\frac{5}{\sqrt2}$

נציב:

$$t=\frac{x^5}{\sqrt2}$$

$$t^2=\frac12 x^{10}$$

$$dt=\frac{5x^4}{\sqrt2}\,dx$$

חוקי שורשים

טבלת אינטגרציה

$$=\frac{\sqrt2}{5}\int\frac{dt}{\sqrt2\cdot\sqrt{t^2-1}} = \frac15\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \frac15\ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right|+c$$

אינטגרל מיידי:

ראינו בהרצאה

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|$$

נציב בחזרה $t=\frac{x^5}{\sqrt2}$

$$=\frac15\ln\left|\frac{x^5}{\sqrt2}+\sqrt{\frac{x^{10}}{2}-1}\right|+c=$$

$$=\frac15\ln\left|\frac{1}{\sqrt2}\left(x^5+\sqrt{x^{10}-2}\right)\right|+c$$

נוכיח את השימוש באינטגרל המיידי ע"י גזירה:

ויש ערך מוחלט אז נפצל לתחומים (כמובן רק x שבתחום ההגדרה)

עבור $x \geq 0$ (בק.ה):

$$\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\right)' = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-a}}}{x+\sqrt{x^2-a^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-a^2}+x}{\sqrt{x^2-a^2}\,\cancel{\left(\sqrt{x^2-a^2}+x\right)}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

עבור $x<0$ (בק.ה):

$$\left(\ln\left(-\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\right)\right)' = \frac{-\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-a}}\right)}{-\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

טותה
נגזרת

לכן השימוש באינטגרל המ'פ' היה נכון
ותוצאותינו נכונה.

■