

תרגיל 7

נאב מניר



שאלה 1. עבור האינטגרלים הלא אמיתיים הבאים, קבעו האם הם מתכנסים או מתבדרים.

$$1. \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{1+\pi x^4}} dx$$

(גזיר) $g(x) = \frac{1}{x^{1.5}}$ $f(x) = \frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{1+\pi x^4}}$

שיתרן חיוביית בקטע $[1, \infty)$ ואינט $[1, M]$ כל $M > 1$.
היות שיתן אולטמטריית ולכן רצפית.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{1+\pi x^4}}}{\frac{1}{x^{1.5}}} = \frac{x^{1.5} \sqrt{2+x}}{\sqrt{1+\pi x^4}} = \sqrt{\frac{x^3(2+x)}{\pi x^4 + 1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{x^4 + 2x^3}{\pi x^4 + 1}}$$

לכן נקבע $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^4 + 2x^3}{\pi x^4 + 1}} = \sqrt{\frac{1}{\pi}}$

והרי $0 < \sqrt{\frac{1}{\pi}} < \infty$

למבחן ההשוואה הזכור, לפוק' אי-סדיליות, $\int_1^{\infty} f$! $\int_1^{\infty} g$ מתכנסים

למתכנסים יחד.

וידוע $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{1.5}}$ מתכנס לכן $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{1+\pi x^4}}$ מתכנס

$$3. \int_1^\infty \sin\left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}\right) dx$$

גזיר

$$f(x) := \sin\left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}\right) \quad g(x) := \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}$$

שיתן חיוביות בקטע $(0, \infty)$ ואינט $[1, M]$ כל $M > 1$
 תיית שיתן אולמטריות ולכן רציסית.

ונגזיר בנוסל

$$\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} = t \quad \text{כאשר } x \rightarrow \infty, t \rightarrow 0$$

כל

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$$

תוכח כהצורה.

$$0 < 1 < \infty !$$

מתבחן ההשוואה תכדיל לטונל אי-שעלית, $\int_1^\infty f$, $\int_1^\infty g$ מתכנסים
 (מתכפרים יחד).

גזיר

$$h(x) = \frac{1}{x}$$

h חיובית, רציפה, ואינטגרלית.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2x^2+1}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^2}{2x^2+1}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < \infty$$

והרי

עם מחבתן ההשוואה הזכרתי צבונת אי-שלישיות, $\int_1^\infty g$, $\int_1^\infty h$
מתכנסים ומתבדרים יחד.

ראינו בהרצאה $\int_1^\infty h$ מתבדר

עם $\int_1^\infty g$ מתבדר

ולכן גם $\int_1^\infty f$ מתבדר.

$$\int_{-\infty}^0 (1 - 2x)e^{-x} dx \quad .5$$

$$\int_{-\infty}^0 (1-2x)e^{-x} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^0 (1-2x)e^{-x} dx$$

$$f(x) := (1-2x)e^{-x}$$

$$g(x) := -x e^{-x}$$

१३८

שתיפתן חובביית בקטע $[-\infty, 0]$ ואינט $[0, M]$ כל $M > 0$
 תיות שיתן אלאטיות ולכן רצפית.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x} - 2xe^{-x}}{-xe^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{e^{-x}}{xe^{-x}} + \frac{2xe^{-x}}{xe^{-x}} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-1}{x} + 2 \right) = 2$$

והרי $0 < 2 < \infty$ סב

$$\int_{-\infty}^0 g(x) dx = - \int_{-\infty}^0 x e^{-x} dx = - \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^0 x e^{-x} dx$$

$$\int_{-M}^0 x e^{-x} dx = -x e^{-x} \Big|_{-M}^0 + \int_{-M}^0 e^{-x} dx =$$

המשפט
הראשון

אויסגהציה בחלקים

$$\begin{pmatrix} u = x & v' = e^{-x} \\ u' = 1 & v = -e^{-x} \end{pmatrix}$$

$$= -0 \cdot e^{-0} - (-M)e^{-(-M)} - e^{-x} \Big|_{-M}^0 = Me^M - e^{-0} - (-e^{-(-M)}) =$$

$$= \underbrace{Me^M - 1 + e^M}$$

עקיווי הנל מוין עקול בוסר $M \rightarrow \infty$ דל $\int_{-\infty}^0 g$ מתברר

דל $\int_{-\infty}^0 f$ מתברר.

$$\int_2^{\infty} \frac{x\sqrt{x} \sin \frac{\pi}{x}}{\sqrt{x^2-x}} dx \quad .6$$

$$f(x) := \frac{x\sqrt{x} \sin \frac{\pi}{x}}{\sqrt{x^2-x}} = \frac{x \sin \frac{\pi}{x}}{\sqrt{x-1}}$$

(לצורך)

$$g(x) := \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

שיתרון חיוביות בקטע $[2, \infty)$ ואינטגרל $[2, M]$ לכל $M > 2$.
 תלות שיתן אלמנטריות ולכן רצויה.

לפיט "0"

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x \sin \frac{\pi}{x}}{\sqrt{x-1}}}{\frac{1}{\sqrt{x-1}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{\pi}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{x}}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{\pi}{x^2} \cdot \cos \frac{\pi}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \pi \cos \frac{\pi}{x} = \pi \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \cos \frac{\pi}{x} = \pi$$

והוא $\infty > \pi > 0$ לפי משפט המעטות, כלומר אי-שליליות,

מתכנסים ומתכנסים $\int_2^{\infty} f$, $\int_2^{\infty} g$ חזון.

$$\int_2^{\infty} g = \int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \int_2^{\infty} (x-1)^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_2^M (x-1)^{-\frac{1}{2}} dx =$$

המשפט היסודי

$$= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{(X-1)^{1/2}}{1/2} \Big|_2^M = \lim_{M \rightarrow \infty} (2\sqrt{M-1} - 2)$$

כיוון ש

$$\int_2^{\infty} g$$

היא מתכנסת

$$\int_2^{\infty} f$$

אז

שאלה 2. חשבו את הגבול הבא:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_x^{x^2} (t + 1 + \sin(t^2)) dt}{x^4}$$

רמז: הראו תחילה שהאינטגרל במונה שואף לאינסוף ולאחר מכן השתמשו בלופיטל.

$$\int_x^{x^2} (t + 1 + \sin(t^2)) dt = \int_x^{x^2} t dt + \int_x^{x^2} 1 dt + \int_x^{x^2} \sin(t^2) dt$$

כדי אינטגרציה

$$\int_x^{x^2} t dt = \left. \frac{t^2}{2} \right|_x^{x^2} = \frac{x^4 - x^2}{2}$$

המשפט היסודי

$$\int_x^{x^2} 1 dt = \left. t \right|_x^{x^2} = x^2 - x$$

$$\int_x^{x^2} \sin(t^2) dt \geq \int_x^{x^2} -1 dt = x - x^2$$

כי $\sin \geq -1$

לסכם ונקבל:

$$\int_x^{x^2} (t + 1 + \sin(t^2)) dt \geq \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} + x^2 - x + x - x^2 = \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$$

והרי

$$\int_x^{x^2} (t + 1 + \sin(t^2)) dt \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$$

לכן לפי פיצה

לעבור על חוקי הגבולות הממוקדים.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_x^{x^2} (t+1+\sin(t^2)) dt}{x^4}$$

"0/0"
 ↓
 =
 ↗
 ↘
 הנגזרת
 היסודי
 הנוסחה

$$\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) dt \right)' = f(\beta(x)) \cdot \beta'(x) - f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2+1+\sin(x^4)) \cdot (2x) - (x+1+\sin(x^2)) \cdot 1}{4x^3} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 2x + 2x \sin(x^4) - x - 1 - \sin(x^2)}{4x^3} =$$

$$= \underbrace{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{4x^3}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{4x^3}}_0 + \underbrace{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x \sin(x^4)}{4x^3}}_0 - \underbrace{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{4x^3}}_0 - \underbrace{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4x^3}}_0$$

0
 חסמה כפול
 0
 שואפת
 0

$$- \frac{\sin(x^2)}{4x^3} = \frac{1}{2}$$

0
 חסמה כפול
 שואפת
 0

שאלה 3.

הראו שניתן להשתמש בשיטת ההצבה גם כאשר אחד הגבולות הוא אינסופי.
משמע, בהינתן $u: [a, \infty) \rightarrow \text{Im}(u)$ רציפה בקרן $[a, \infty)$ וגזירה בקרן (a, ∞) ,
ו f רציפה בתחום $\text{Im}(u)$ הראו שמתקיים:

$$\int_a^\infty f(u(x))u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u_\infty} f(t)dt$$

כאשר $u_\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} u(x)$, נתון שהגבול הנ"ל קיים במובן הרחב.

(חשוב: סדר זה שמואל ע"פ ההצבה.)

$$\int_a^\infty f(u(x)) \cdot u'(x) dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f(u(x)) \cdot u'(x) dx =$$

שיטת ההצבה לאינטגרל מסוים

$$= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{u(a)}^{u(M)} f(t) dt = \lim_{M \rightarrow \infty} F(t) \Big|_{u(a)}^{u(M)} = \lim_{M \rightarrow \infty} \underbrace{F(u(M))}_F - \lim_{M \rightarrow \infty} \underbrace{F(u(a))}_{\text{עקב תנאי } M}$$

המשפט היסודי

u_∞ רצפה u !

$$= F(u_\infty) - F(u(a)) = \int_{u(a)}^{u_\infty} f(t) dt$$

המשפט היסודי

■

תרגיל 4.

א) חשבו במפורש את: $f(x) = \int_0^\infty e^{-xt} dt$ עבור $x > 0$.

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xt} dt = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M e^{-xt} dt$$

הטבה לאינטגרל מוכלל

$$\int_0^M e^{-xt} dt = \left. \frac{-e^{-xt}}{x} \right|_0^M = \frac{-e^{-xM}}{x} + \frac{e^{-x \cdot 0}}{x} = \frac{1 - e^{-xM}}{x}$$

החשבון הישיר

$$f(x) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-xM}}{x} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{x} - \frac{e^{-xM}}{x} = \frac{1}{x} - \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{e^{-xM}}{x} = \frac{1}{x}$$

$\frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{x}$

כי $-xM \rightarrow -\infty$
 $e^{-xM} \rightarrow 0$ p.s

(ב) הוכיחו כי האינטגרל $\int_0^\infty t^n e^{-xt} dt$ מתכנס לכל $x > 0, n \in \mathbb{N}$

(ג) היעזרו ב f כדי להראות את השוויון $n! = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt$

$$\int_0^\infty t^n e^{-xt} dt = t^n \left(-\frac{1}{x} e^{-xt} \right) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty n t^{n-1} \left(-\frac{1}{x} e^{-xt} \right) dt =$$

$\left(\begin{array}{l} u = t^n \\ u' = n t^{n-1} \end{array} \quad \begin{array}{l} v' = e^{-xt} \\ v = -\frac{e^{-xt}}{x} \end{array} \right)$

$$= \underbrace{-\frac{1}{x} t^n e^{-xt} \Big|_0^\infty}_{=0} + \frac{n}{x} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-xt} dt = \frac{n}{x} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-xt} dt =$$

כי
 $\lim_{t \rightarrow \infty} t^n e^{-xt} = 0$
 $\lim_{t \rightarrow 0} t^n e^{-xt} = 0$
 (כי e^{-xt} יורד \downarrow)
 הרבה יותר מהר
 מאשר t^n עולה \uparrow (ל ∞)

נשים לב שקיבלנו במעט איננו
 ביטוי מההתחלה. (פסל אינטגרציה
 בחלקים "n" פסמים ונקבל:

$$= \frac{n}{x} \cdot \frac{(n-1)}{x} \int_0^\infty t^{n-2} e^{-xt} dt = \dots = \frac{n!}{x^{n+1}} \int_0^\infty e^{-xt} dt = \frac{n!}{x^{n+1}} \cdot f(x)$$

$$= \frac{n!}{x^{n+1}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{n!}{x^{n+2}}$$

מצאנו את האינטגרל עם פט
 בפי מתכנס.

עבור $x=1$, זה תמקרי הפיטי וטכן (צב) בנוסחה ונקבל

$$\int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n!$$