האינטגרל הלא מסוים

<u>הגדרה:</u> $F(x)$ תיקרא פונקציה קדומה של $f(x)$ בקטע I
אם לכל $x \in I$ מתקיים $F'(x) = f(x)$

1. <u>משפט:</u> תהי F פונק' קדומה של f בקטע I אזי אוסף
כל הפונק' הקדומות של f בקטע I הוא $\{F(x)+c \mid c \in \mathbb{R}\}$

<u>סימון:</u> $\int f(x)\,dx$ הוא אוסף כל הפונק' הקדומות של f.
ונקרא האינטגרל הלא מסוים של $f(x)$

<u>דוגמאות:</u>

(1) $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

(2) $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

(3) $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$

$$\begin{array}{r} 1 \\ u^2+1 \,\overline{)\, u^2} \\ -\,(u^2+1) \\ \hline -1 \end{array}$$

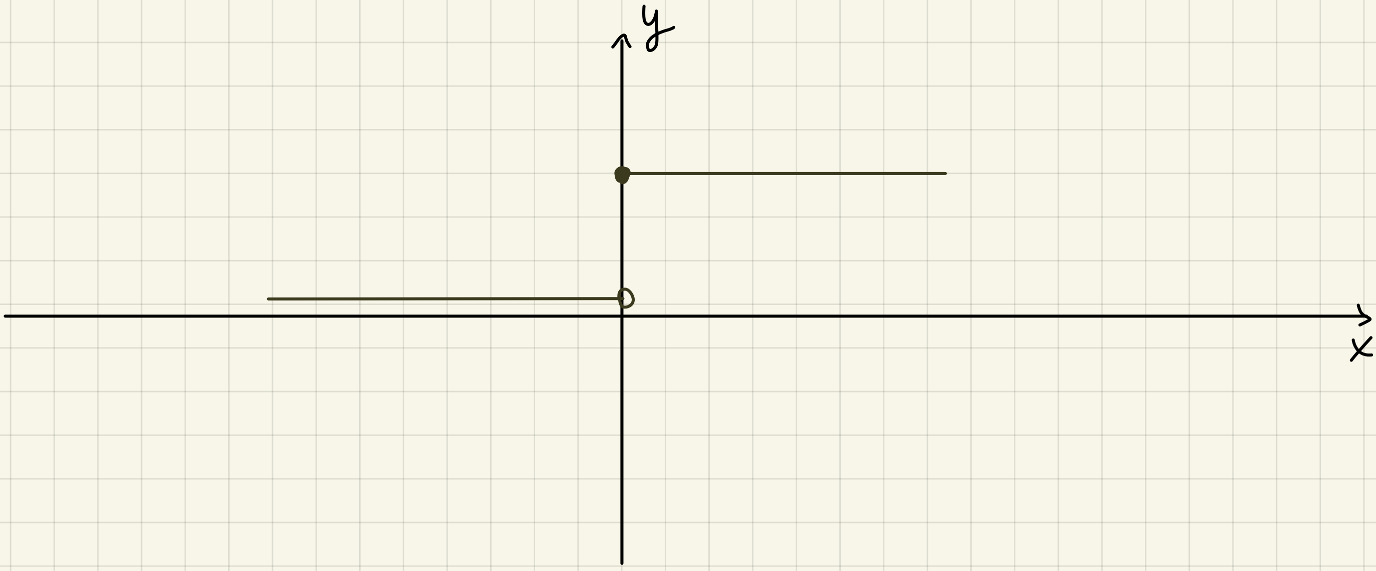
(4) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$

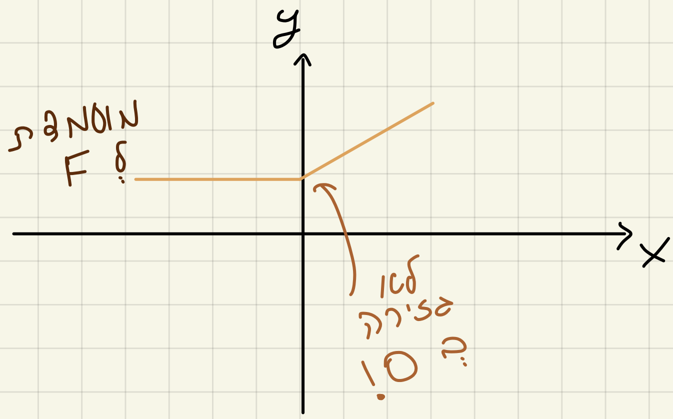
$1 - \frac{1}{u^2+1}$

(5) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$

(6) $\int e^x\,dx = e^x + c$

הערה: לא לכל פונק' יש פונק' קדומה. לדוגמה





משפט (כללים לאינטגרציה):

א $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx,\ a\in\mathbb{R}$

ב $\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

עוד דוג':

7 $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

8 $\int \frac{x^4}{1+x^2}\,dx = \int \frac{x^4-1+1}{1+x^2}\,dx =$

$= \int\left(\frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \int x^2\,dx - \int 1\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx =$

$= \frac{x^3}{3} - x - \arctan x + C$

2. ⑨

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

⑩

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + c$$

כלל:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

אינטגרציה בחלקים

משפט (אינטגרציה בחלקים):

$$\int uv' = uv - \int u'v$$

עוד דוג':

⑪

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = (x-1)e^x + c$$

$$\begin{pmatrix} u=x & v'=e^x \\ u'=1 & v=e^x \end{pmatrix}$$

לעשות תמיד

לבדוק ע"י גזירה

⑫

$$\int \arctan x\,dx = \int 1\cdot \arctan x\,dx =$$

$$\begin{pmatrix} u=\arctan x & v'=1 \\ u'=\frac{1}{1+x^2} & v=x \end{pmatrix}$$

$$= x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

אין ערך מוחלט כי תמיד חיובי!

(13)

$$\int e^x\cos x\,dx = e^x\cos x-\int -\sin x\, e^x\,dx =$$

$$\begin{pmatrix} u=\cos x & v'=e^x \\ u'=-\sin x & v=e^x \end{pmatrix}$$

$$= e^x\cos x+\int \sin x\, e^x\,dx = e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx$$

$$\begin{pmatrix} u=\sin x & v'=e^x \\ u'=\cos x & v=e^x \end{pmatrix}$$

מעבירים אגף!

$$\int e^x\cos x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+C$$

אינטגרציה של פונקציות רציונליות

(14)

$$\int \frac{2x^4-x^3-x^2+3x-4}{x^2+1}\,dx = \leftarrow$$

מעלת המונה גבוהה יותר, לכן נבצע חילוק ארוך (עושים גם אם שווה לה)

$$\begin{array}{l|l}
\quad 2x^2-x-3 & \\
\hline
2x^4-x^3-x^2+3x-4 & x^2+1 \\
-\ \underline{2x^4 \qquad\quad +2x^2} & \\
\qquad -x^3-3x^2+3x-4 & \\
\qquad -\ \underline{-x^3 \qquad\quad -x} & \\
\qquad\qquad -3x^2+4x-4 & \\
\qquad\qquad -\ \underline{-3x^2 \qquad -3} & \\
\qquad\qquad\qquad 4x-1 &
\end{array}$$

$$\frac{P(x)}{q(x)} = 2x^2-x-3+\frac{4x-1}{x^2+1}$$

$$= \int (2x^2 - x - 3)\,dx + \int \frac{4x-1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 3x + 2\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{dx}{1+x^2} =$$

מפרקים לגורמים   פירוק לשברים חלקיים.

$$\int \frac{dx}{2x^2+9x-5} = \int \frac{dx}{(2x-1)(x-5)} =$$ (15)

$$= \frac{2}{11}\int \frac{dx}{2x-1} - \frac{1}{11}\int \frac{dx}{x+5} = \frac{1}{11}\ln|2x-1| - \frac{1}{11}\ln|x+5| + C$$

$$\int \frac{9x-5}{9x^2-6x+1}\,dx = \int \frac{9x-5}{(3x-1)^2}\,dx = \int \frac{3}{3x-1}\,dx - \int \frac{2}{(3x-1)^2}\,dx =$$ (16)

$$= \ln|3x-1| + \frac{2}{3}\,\frac{1}{(3x-1)} + C$$

"השלמה לנגזרת"

$$\int \frac{4x-1}{x^2+1}\,dx = 2\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{dx}{x^2+1} =$$ במכנה גורם אי-פריק (17)

$$= 2\ln(x^2+1) - \arctan x + C$$

"השלמה לריבוע"

$$\int \frac{dx}{x^2-x+1} = \int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2})\right)^2+1} =$$ (18)

$$\boxed{x^2+bx+c = \left(x-\frac{b}{2}\right)^2 + \left(c-\frac{b^2}{4}\right)}$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\ \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) + C$$

$$\int \frac{-x+2}{x^2-x+1}\,dx = -\frac{1}{2}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{3}{2}\int\frac{1}{x^2-x+1} =$$ (19)

$$= -\frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) + C$$

$$\int\frac{dx}{x^3+1} =$$ (20)

נחלק את
המכנה
בגורם $(x+1)$
כי ידוע 1 שורש שלו.

$$\begin{array}{r|l} x^2-x+1 & \\ \hline x^3 \qquad\quad +1 & x+1 \\ -\ \ x^3+x^2 \qquad\ \ & \\ \hline -x^2 \quad +1 & \\ -\ \ -x^2-x \quad\ & \\ \hline x+1 & \\ -\ \ x+1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

פירוק לשברים חלקיים

$$= \int\frac{dx}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

$$1 = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)$$

$$\left[\begin{cases} 0 = A+B \\ 0 = -A+B+C \\ 1 = A+C \end{cases} \Longrightarrow A=\frac{1}{3} \qquad B=-\frac{1}{3} \qquad C=\frac{2}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3}\int \frac{-x+2}{x^2-x+2} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) + C\right)$$

<u>סיכום:</u>

- אם $\deg p \geq \deg q$ מחלקים $\overline{p\rceil}\, q$
- אם $\deg p < \deg q$ משתמשים ב:
  - פירוק לשברים חלקיים
  - השלמה לריבוע
  - השלמה לנגזרת

שיטת ההצבה

① <u>דוגמה:</u>

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx = \int t^2 \, dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

$$\left(\begin{aligned} & t = \sin x \\ & \frac{dt}{dx} = \cos x \\ & dt = \cos x \, dx \end{aligned}\right)$$

$$\int 2xe^{x^2}dx = \int e^t dt = e^t + c = e^{x^2} + c$$ 2

$$\left(\begin{array}{l} t = x^2 \\ \frac{dt}{dx} = 2x \\ dt = 2x\,dx \end{array}\right)$$

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan(e^x) + c$$ 3

$$\left(\begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{array}\right)$$

3. <u>משפט (שיטת ההצבה):</u> נניח שלפונקציה $f(x)$ יש פונקציה קדומה בקטע I. תהי $\varphi : J \longrightarrow I$ גזירה והפיכה.

$$\varphi(t) = x$$

אזי

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx = \int \frac{t}{t^2+1}\,2t\,dt = \int \frac{2t^2}{t^2+1}dt = 2\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt =$$ 4

$$\left(\begin{array}{l} t = \sqrt{x} \\ \downarrow \\ x = t^2 \swarrow \varphi(t) \\ dx = 2t\,dt \end{array}\right)$$

$$= 2\left(\int 1\,dt - \int \frac{dt}{t^2+1}\right) = 2(t - \arctan t) + c =$$

$$= 2\sqrt{x} - 2\arctan\sqrt{x} + c$$

הצבה טריגונומטרית: ניתן להפוך כל אינטגרל טריגונומטרי לאינטגרל רציונלי. כך:

$$t = \tan\frac{x}{2}$$

ומזהויות ופעולות אלגבריות מתקבל:

$$\boxed{\begin{aligned} dx &= \frac{2}{1+t^2}\,dt \\ \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin x &= \frac{2t}{1+t^2} \end{aligned}}$$

5

$$\int \frac{dx}{\cos x} \underset{\left(t=\tan\frac{x}{2}\right)}{=} \int \frac{\frac{2\,dt}{\cancel{1+t^2}}}{\frac{1-t^2}{\cancel{1+t^2}}} = 2\int \frac{dt}{1-t^2} = 2\int \frac{dt}{(1+t)(1-t)} =$$

נבצע פירוק לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{(1+t)(1-t)} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{1-t} = \frac{A(1-t)+B(1+t)}{(1+t)(1-t)} = \frac{(A+B)+(-A+B)t}{(1+t)(1-t)}$$

$$1 = (A+B) + (-A+B)t$$

$$+\begin{cases} A+B = 1 \\ -A+B = 0 \end{cases} \rightarrow 2B = 1 \rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{1}{2}$$

נמשיך אינטגרל

$$= 2\left(\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1-t}\right) = -\ln|1-t|+\ln|1+t|+c =$$

מונה נגזרת של מכנה

$$= \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+c = \ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right|+c$$

הערה: אם חייבים להציב t לא הפיכה, מצמצמים את התחום, פותרים, ואז גוזרים ובודקים שנכה לכל התחום

צומי לפלוסי

1

אינטגרציה בחלקים

$$\int \tan x\,dx = \int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -1+\int\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\begin{pmatrix} u=\frac{1}{\cos x} & v'=\sin x \\ u'=\frac{\sin x}{\cos^2 x} & v=-\cos x \end{pmatrix}$$

כלומר

$$\int \cancel{\tan x}\,dx = -1+\int\cancel{\tan x}\,dx$$

$$0=-1 \quad \blacksquare$$

מה שבאמת הראינו:

$$\int \tan x\,dx-\int\tan x\,dx = -1+\int\tan x\,dx-\int\tan x\,dx$$

$$\int 0\,dx = -1+\int 0\,dx$$

$$C=-1+C$$

$$\int e^{-|x|}dx$$

$$e^{-|x|} = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ e^{x} & x < 0 \end{cases}$$

$$x \geq 0 \Rightarrow \int e^{-x}dx \quad -e^{-x} + c_1$$

$$x < 0 \Rightarrow \int e^{x}dx = e^{x} + c_2$$

זה לא רציף! צריך לשחק עם פלוסי

מועמדות לפונקציות קדומות:

$$F(x) = \begin{cases} e^{x}+c \;, & x<0 \\ -e^{-x}+2+c \;, & x \geq 0 \end{cases}$$

<u>הערה:</u> יש פונקציות רציפות כך שלפונקציה הקדומה אין נוסחה אלמנטרית

1. ראשית, לכל $C\in\mathbb{R}$, $F(x)+c$ באמת פונק' קדומה של f, כי

$$(F(x)+c)' = F'(x) = f(x)$$

תהי G פונק' קדומה של f. אזי

$$G'(x) = F'(x) = f(x)$$

נגדיר $H = G - F$.

$$H' = G' - F' = 0$$

$$\downarrow$$

$$H(x) = c$$

$$\downarrow$$

$$G - F = c$$

$$G(x) = F(x) + c$$

$\blacksquare$

$$\ln|x| = \begin{cases} \ln x & , x>0 \\ \ln(-x) & , x<0 \end{cases}$$

$$(\ln|x|)' = \begin{cases} \frac{1}{x} & , x>0 \\ \frac{1}{x} & , x<0 \end{cases} = \frac{1}{x}$$

3. נסמן את הפונ' הקדומה בְּ F. לפי כלל השרשרת:

$$\frac{dF(\varphi(t))}{dt} = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\cdot f'(t)$$

ע"י $\int dt$:

$$\int \frac{dF(\varphi(t))}{dt}\,dt = \int f(\varphi(t))\cdot f'(t)\,dt$$

$$\int f(x)\,dx = F(x)+c = F(\varphi(t))+C = \int f(\varphi(t))\cdot f'(t)\,dt$$