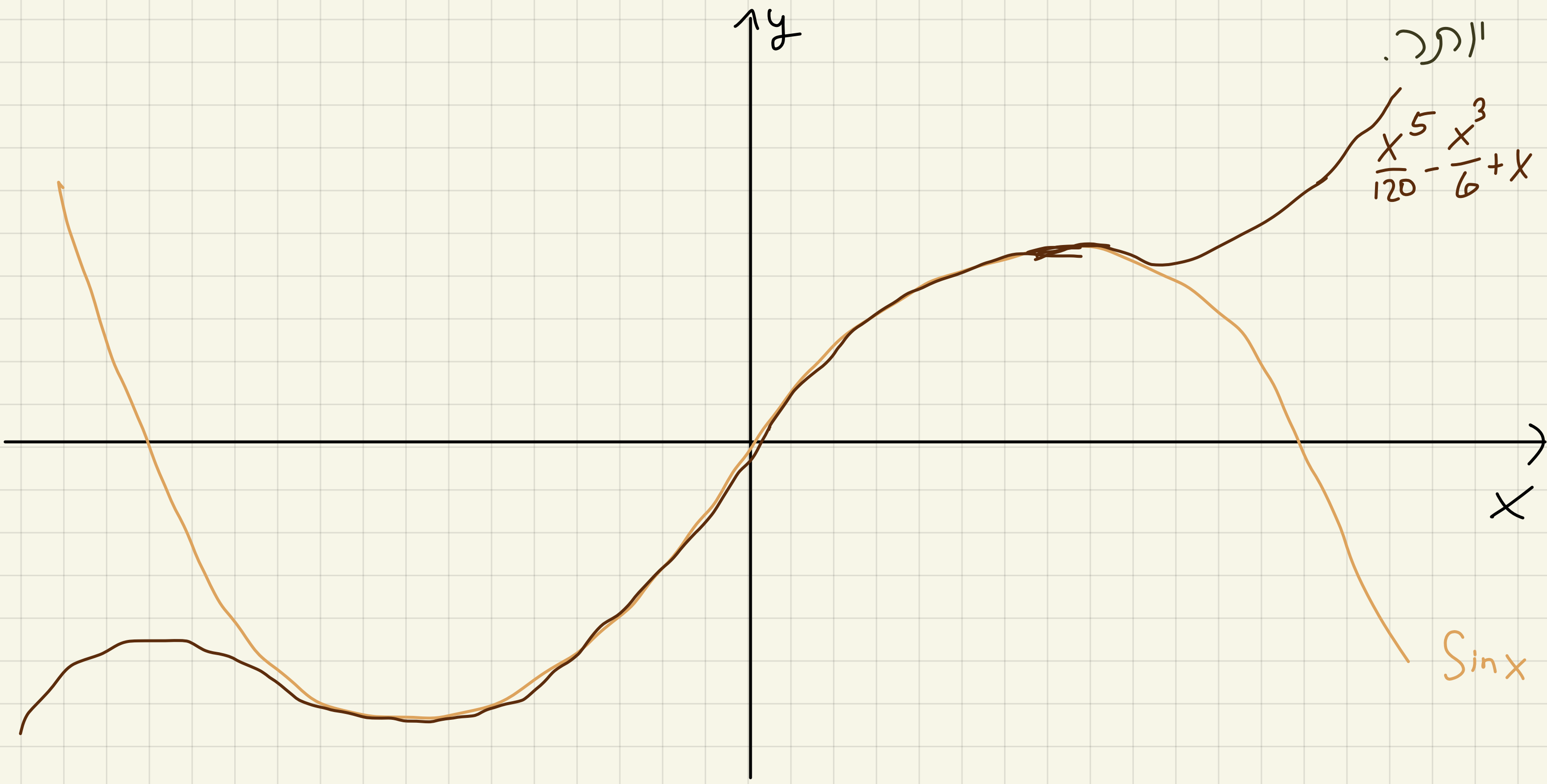
משפט טיילור - הרצאה

נדב מנירב

משפט טיילור

קירוב מקומי של פונקצייה על ידי פולינום

רוצים למצוא פולינומים, שיהיו קרובים מאוד לפונק' מורכבות יותר.



נגזרות מסדר גבוה:

הגדרה: נגזרת מסדר n של פונקצייה מוגדרת באינדוקציה

$$f^{(0)} := f$$

$$f^{(1)} := f'$$

$$f^{(n+1)} := \left(f^{(n)}\right)'$$

1. טענה: יהי $P_n(x)$ פולינום ממעלה n.

$$P_n(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_n x^n$$

אזי לכל $0 \le k \le n$ מתקיים $P_n^{(k)}(0) = \beta_k \cdot k!$

מסקנה: $\beta_k = \frac{P_n^{(k)}(0)}{k!}$ לכל $0 \le k \le n$

רעיון מציאת הפולינום:

הקירוב הלינארי (המשיק לפונק') הוא הפולינום ממעלה 1 הכי "קרוב" לפונק'. נסמנו $P_1(x)$. עבורו:

$$P_1(0) = f(0)$$

$$P_1'(0) = f'(0)$$

והוא היחיד שמקיים תנאים אלו. עבור פולינומים ממעלה n כללית נדרוש

$$P_n^{(0)}(0) = f^{(0)}(0)$$

$$P_n^{(1)}(0) = f^{(1)}(0)$$

$$\vdots$$

$$P_n^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$$

וגם כאן קיים פולינום יחיד המקיים תנאים אלו.

הכללת הרעיון לנק' שונה מ-0:

ניתן לכתוב את הפולינום מטענה (1) כך:

$$P_n(x) = \beta_0 + \beta_1(x-0) + \beta_2(x-0)^2 + \dots + \beta_n(x-0)^n$$

באופן דומה לחלוטין, ניתן להרחיב את הטענה לכל נק' x_0 והמסקנה תישאר דומה:

$$P_n(x) = \beta_0 + \beta_1(x - x_0) + \dots + \beta_n(x-x_0)^n$$

כאשר

$$\beta_k = \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}$$

אנו רוצים שיתקיים $P_n^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0)$ לכן ניתן לכתוב את המסקנה כך:

$$\beta_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

ונקבל את פולינום טיילור.

<u>הגדרה:</u> פולינום טיילור מסדר n של פונק׳ f ליד x_0 הוא

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

<u>הערה:</u> כאשר $x_0=0$, קוראים לו גם פולינום מקלורן.

<u>דוגמה:</u> $f(x)=e^x$, $x_0=0$

$$P_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}$$

<u>משפט (משפט טיילור):</u> תהי f גזירה $n+1$ פעמים בסביבת הנקודה x_0, ותהי x נקודה בסביבה זו. אזי קיימת c בין x ל x_0 כך ש $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$ כאשר $P_n(x)$ הוא פולינום טיילור, ו-

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

<u>הערה:</u> 1. הצגת השארית כמו שמוצגת לעיל נקראת הצגת השארית בצורת לגרנז׳.

2. השארית מקיימת $\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}\xrightarrow[x\to x_0]{}0$

3. עבור $n=0$ מקבלים

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x-x_0)$$

$$\downarrow$$

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

זה משפט לגרנז'!

<u>דוגמה:</u> נחשב את e. ראינו:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

נציב $x=1$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + R_n(1)$$

נחשב בדיוק של $\frac{1}{100}$ כלומר נרצה n כך ש- $|R_n(1)| < \frac{1}{100}$

לפי משפט טיילור,

$$R_n(1) = \underset{\substack{\uparrow \\ 0<c<1}}{\frac{e^c}{(n+1)!}} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

$$n=0: \quad \frac{3}{1} \not< \frac{1}{100}$$

$$n=1: \quad \frac{3}{2} \not< \frac{1}{100}$$

$$n=2: \quad \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \not< \frac{1}{100}$$

$$n=3: \quad \frac{1}{8} \not< \frac{1}{100}$$

$$n=4: \quad \frac{1}{40} \not< \frac{1}{100}$$

$$n=5: \quad \frac{1}{240} < \frac{1}{100}$$ יש!

עבור $n=5$ השארית תהיה קטנה מ- $\frac{1}{240}$

לכן

$$e \approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}$$

2. <u>טענה:</u> e אינו רציונלי

3. <u>משפט:</u> תהי f פונק' גזירה אינסוף פעמים בסביבת x_0 ונניח שיש קבוע A כך ש: $|f^{(n)}(x)|<A$ לכל x בסביבה ולכל n. (הנגזרות חסומות במשותף) אזי

$$\boxed{R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

<u>משפט:</u> תהי f גזירה n פעמים בנק' x_0. נסמן $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$. אזי

$$\boxed{\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0}$$

<u>סימון:</u> ביטוי $\alpha(x)$ המקיים $\frac{\alpha(x)}{(x-x_0)^n} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$ נקרא ומסומן $o((x-x_0)^n)$

השארית היא כזו

דוגמה: חישוב גבול בעזרת טיילור:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + R_3(x) - \cancel{x}}{x^3} = -\frac{1}{6}$$

$\to 0$

1. כאשר גוזרים את $P_n(x)$ k פעמים, כל הגורמים שמעלה קטנה מ k מתאפסים, הגורם $\beta_k x^k$ הופך ל: $\beta_k \cdot k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-(k-1))$ כלומר $\beta_k \cdot k!$, וכל הגורמים ממעלה גבוהה מ k יכילו "x" בביטוי הנגזרת ה k-ית, ולכן בהצבת 0, יתאפסו.

$\blacksquare$

2. הראינו ש

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

$$\downarrow$$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + R_n(1)$$

ראינו e $\quad R_n(1) = |R_n(1)| < \frac{3}{(n+1)!}$

נב"ש e רציונלי (הראינו ש $e>0$) אז $\quad p,q \in \mathbb{N},\ e = \frac{p}{q}$

$$\frac{p}{q} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + R_n(1)$$

$$0 < \frac{p}{q} < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{3}{(n+1)!}$$

$$0 < \frac{p}{q} - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{3}{(n+1)!} \qquad / \cdot n!$$

$$0 < \frac{pn!}{q} - \left(n! + n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \dots + 1\right) < \frac{3}{n+1}$$

לכן נכון לכל n. ניקח $n_0 > \max\{2, q\}$

$$0 < \frac{pn_0!}{q} - \left(n_0! + n_0! + \frac{n_0!}{2!} + \frac{n_0!}{3!} + \dots + 1\right) < \frac{3}{n_0+1} < 1$$

לפי בחירת n_0

הביטוי המרכזי באי-השוויון הוא מספר שלם (כי $n_0 > q$)

וקיבלנו מס' שלם בין 0 ל 1, בסתירה

∎

3. יהי x קבוע בסביבת x_0. אזי קיימת c בין x ל-x_0 כך ש

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$$\frac{-K}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}<R_n(x)<\frac{K}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}$$