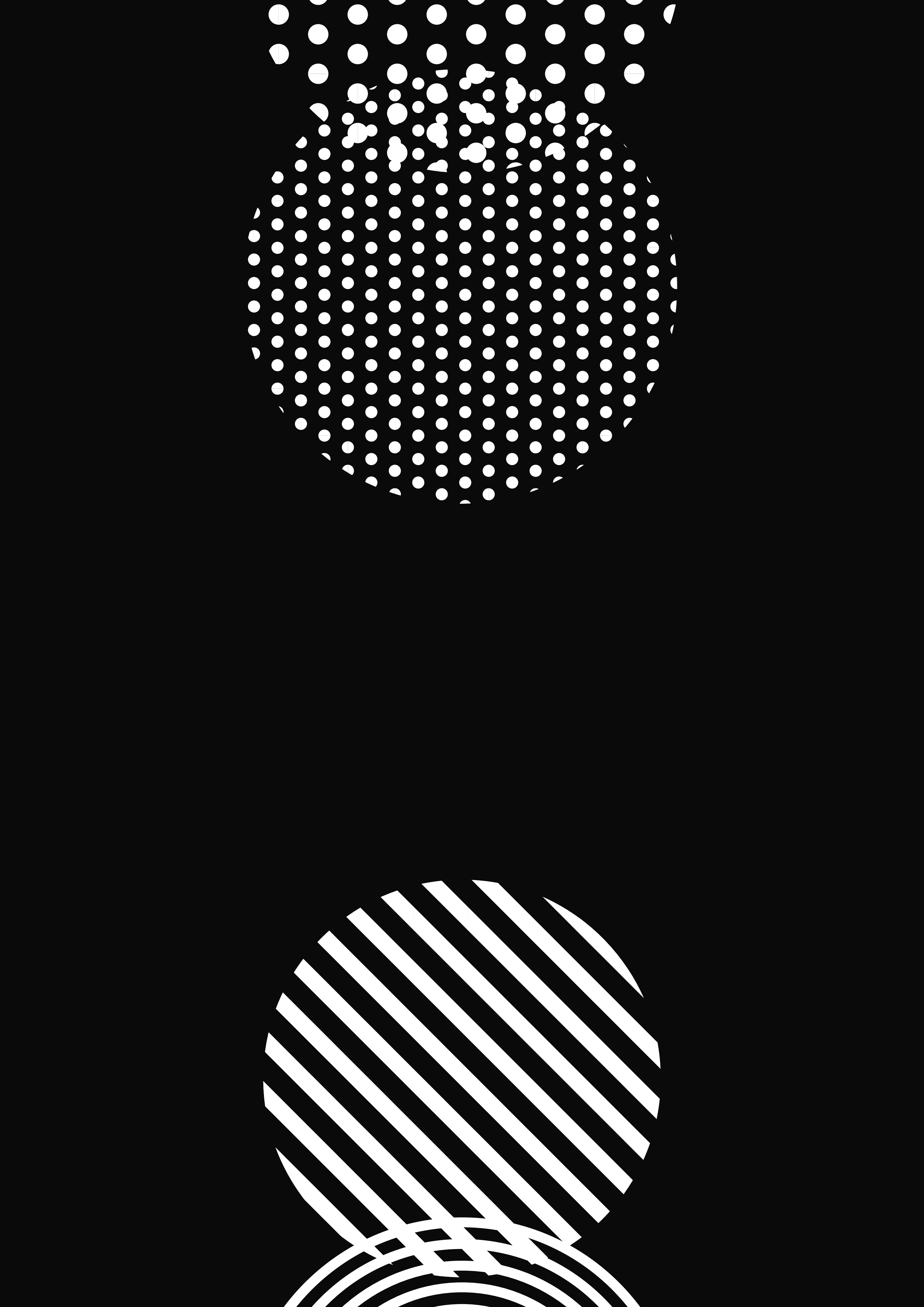
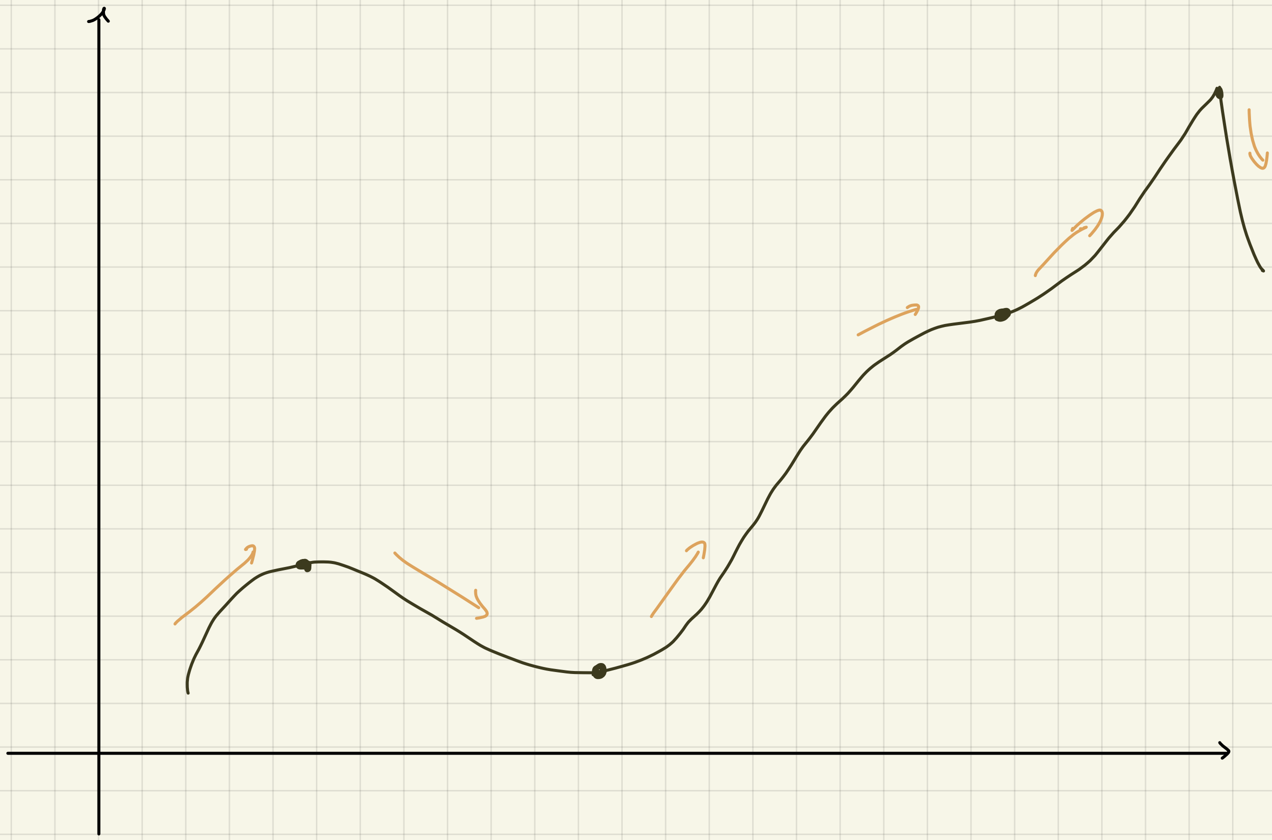


חקירת פונקציות



נקודות קיצון

הגדרה: נק' a בתחום הפונק' f המקיימת $f'(a)=0$ או ש$f'(a)$ לא מוגדרת, נקראות חשודה כקיצון

משפט (מבחן הנגזרת ה-I): תהי x_0 נקודה חשודה כקיצון של f. נניח f רציפה בx_0 וגזירה בסביבה (מנוקבת) של x_0 אזי:

- אם f' מחליפה סימן מחיובי לשלילי בx_0, x_0 מקס' מקומי
- אם f' מחליפה סימן משלילי לחיובי בx_0, x_0 מין' מקומי.
- אם f' לא מחליפה סימן בx_0, אזי x_0 לא קיצון.

1. משפט (מבחן הנגזרת ה-II): תהי x_0 נקודה חשודה כקיצון של f, וניח כי f גזירה פעמיים ב x_0. אזי:

- אם $f''(x_0)>0$ אזי x_0 מין מקומי.
- אם $f''(x_0)<0$ אזי x_0 מקס מקומי.
- אם $f''(x_0)=0$, לא ניתן לפעול

2. משפט (מבחן הנגזרת ה n-ית): תהי f גזירה n פעמים בנק' x_0 כך ש $f'(x_0)=f''(x_0)=\dots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, $f^{(n)}\neq 0$ אזי:

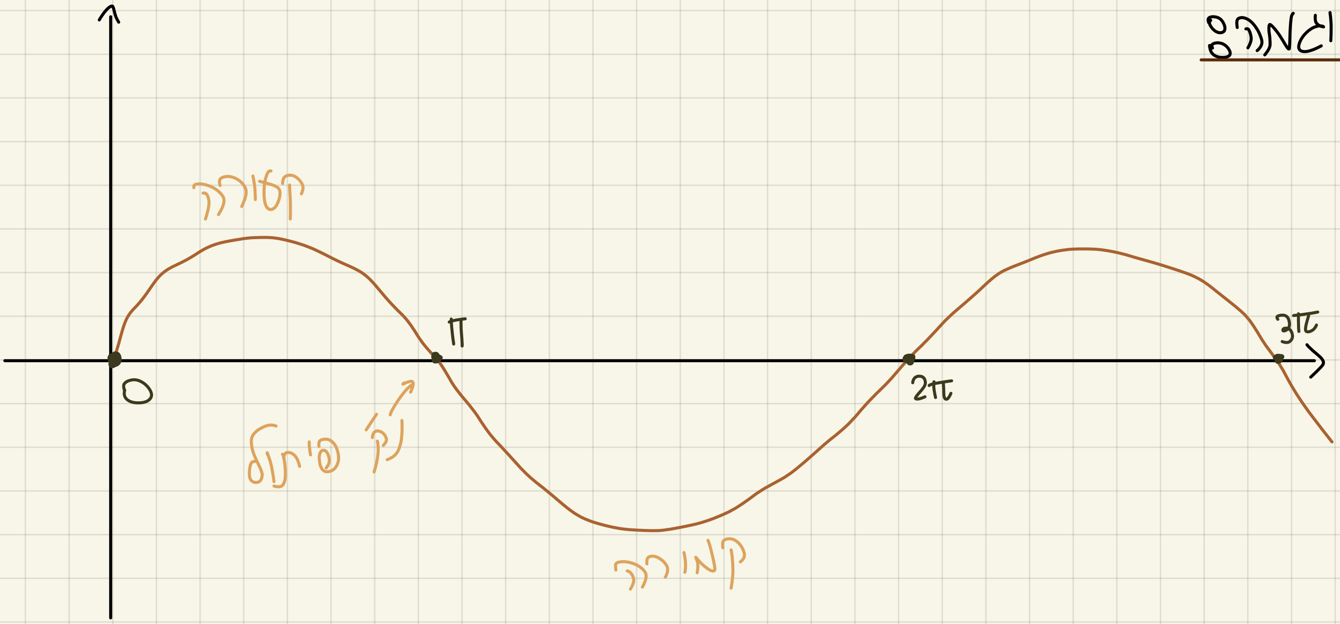
- אם n אי-זוגי אזי x_0 לא קיצון מקומי.
- אם n זוגי אזי x_0 קיצון מקומי
  - אם $f^{(n)}(x_0)>0$, x_0 מין
  - אם $f^{(n)}(x_0)<0$, x_0 מקס

קמירות וקעירות

הגדרה:
- f תיקרא קמורה בקטע I אם לכל $x,y\in I$ המיתר שמחבר את $(x,f(x))$, $(y,f(y))$ נמצא מעל הגרף
- f תיקרא קעורה בקטע I אם לכל $x,y\in I$ המיתר שמחבר את $(x,f(x))$, $(y,f(y))$ נמצא מתחת לגרף

הערה: ההגדרות מאוד מבלבלות (לזכור ולהבין אין אותן הגדרות אופלו, צו של זכור).

דוגמה:



משפט: f קמורה/קעורה בְּ (a,b) $\Longleftarrow$ f רציפה בְּ (a,b)

משפט: תהי f גזירה בְּ (a,b). אזי:
f קמורה (או קעורה) $\Longleftrightarrow$ לכל $x_0 \in (a,b)$, המשיק מתחת (או מעל) לגרף

משפט: תהי f גזירה בְּ (a,b). אזי
f קמורה (או קעורה) $\Longleftrightarrow$ f' עולה (או יורדת)

משפט: תהי f גזירה פעמיים בְּ (a,b). אזי
f קמורה (או קעורה) $\Longleftrightarrow$ $f'' \geq 0$ (או $\leq$)

משפט: אם f גזירה וקמורה (או קעורה) ב-(a,b) ו-$x \in (a,b)$ נק' חשודה כקיצון, אז x_0 מינ' (או מקס')

הגדרה: x_0 נקראת נקודת פיתול של f אם f קמורה מצד אחד, קעורה מצד שני, ורציפה ב-x_0

מסקנה: אם f גזירה פעמיים ב-I ו-f'' משנה סימן ב-x_0, אז x_0 פיתול.

הערה: אם f גזירה פעמיים ב-I, f'' רציפה ב-I ו-x_0 נק' פיתול אז $f''(x_0)=0$
(לכן נקודות שמקיימות $f''(x_0)=0$ הן חשודות כפיתול)

חקירת פונקציה

$$f(x) = (x^2(3-x))^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}}(3-x)^{\frac{1}{3}}$$

תחום הגדרה: $\mathbb{R}$

רציפות: f אלמנטרית ולכן רציפה ב-$\mathbb{R}$

נק' חיתוך עם הצירים: $(0,0)$, $(3,0)$

נגזרת: $$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(3-x)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}(3-x)^{-\frac{2}{3}}$$

רק עבור $x \neq 0,3$

אין דבר כזה 0 בחזקת דבר שלילי

ב- $x=0$ ו- $x=3$ צריך לגזור לפי ההגדרה

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{2}{3}}(3-x)^{\frac{1}{3}}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3-x}{x}\right)^{\frac{1}{3}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{x}-1\right)^{\frac{1}{3}}=\infty$$

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{x^{\frac{2}{3}}(3-x)^{\frac{1}{3}}-0}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x^{\frac{2}{3}}(3-x)^{\frac{1}{3}}}{-(3-x)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}-\left(\frac{x}{3-x}\right)^{\frac{2}{3}}\leftarrow$$ לא קיים

כי $\frac{x}{3-x}$ שואף ל $\pm\infty$

כלומר f' לא קיימת ב- $x=0,3$

תחומי עלייה וירידה: $f'\geq 0$ כאשר

$$\frac{2}{3}\left(\frac{3-x}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\geq\frac{1}{3}\left(\frac{x}{3-x}\right)^{\frac{2}{3}}$$

עבור $x>0$.

$$2(3-x)\geq x$$

$$6\geq 3x$$

$$2\geq x$$

$$\boxed{0<x\leq 2}$$

עבור $x<0$:

$$2(3-x)\le x$$
$$2\le x$$
אין.

באופן דומה, $f'\le 0$ כאשר $x<0$, $2\le x<3$, $x>3$

קיצון מקומיים:

		0		2		3	
f'	$-$	אין	$+$	0	$-$	אין	$-$
f	$\searrow$	מין מקומי	$\nearrow$	מקס מקומי	$\searrow$		$\searrow$

נגזרת שנייה:

$$f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}(3-x)^{\frac{1}{3}}-\frac{2}{9}x^{\frac{1}{3}}(3-x)^{-\frac{2}{3}}-\frac{2}{9}(3-x)^{-\frac{5}{3}}x^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{9}(3-x)^{-\frac{2}{3}}x^{-\frac{1}{3}}=$$

$$=-\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}(3-x)^{-\frac{5}{3}}\left((3-x)^2+x(3-x)+x^2+x(3-x)\right)=$$

$$=-\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}(3-x)^{-\frac{5}{3}}\left((3-x)(3-\cancel{x}+\cancel{x}+x)+x^2\right)=$$

$$=-2x^{-\frac{4}{3}}(3-x)^{-\frac{5}{3}}$$

קמירות/קעירות/פיתול:

		0		3	
f''	$-$	אין	$-$	אין	$+$
f	$\cap$		$\cap$	פיתול	$\cup$

אסימפטוטות:

הגדרה: $x=x_0$ נקרא אסימפטוטה אנכית אם $\lim\limits_{x\to x_0^\pm} f(x)=\pm\infty$

$y=ax+b$ נקראת אסימפטוטה משופעת אם

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0$$

או $-$

איך מוצאים?

אם $f(x)-ax-b \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

אז $\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

ולכן $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$

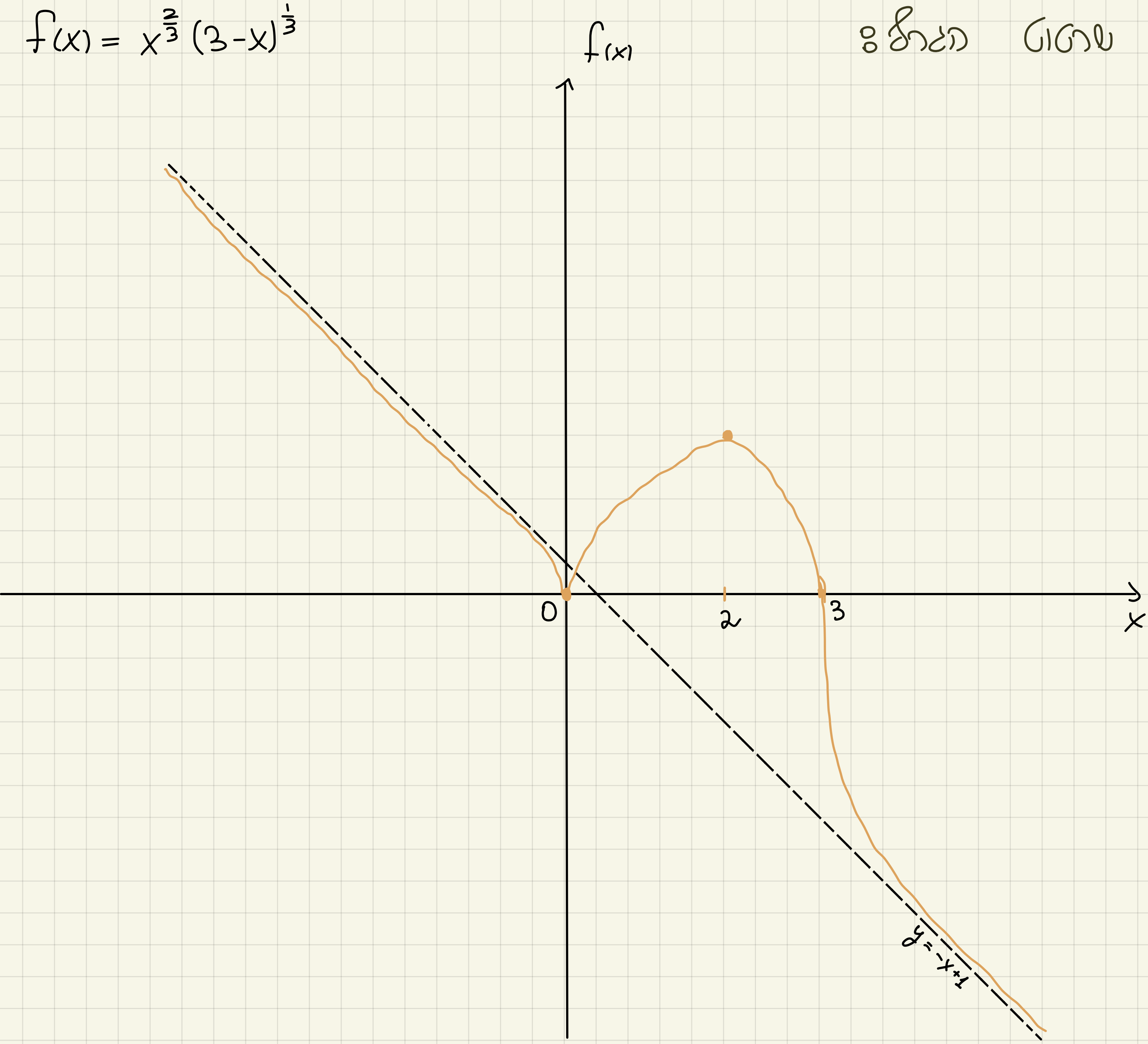
ואז $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-ax\right)$

אצלנו (בדוגמה) אין אסימפטוטה אנכית מכיוון שתחום הגדרתנו הוא $\mathbb{R}$. נחפש משופעת.

יוצא אצלנו $y=-x+1$ גם ב-∞ וגם ב-$-\infty$.

$f(x) = x^{\frac{2}{3}}(3-x)^{\frac{1}{3}}$

שרטוט הגרף:



1. נניח בה"כ $f''(x_0)>0$ אזי

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0} > 0$$

$f''(x)=0$ כי $f'(x_0)$ קיימת
ו-x_0 קריטית

ניקח סביבה של x_0 כך ש: $\frac{f'(x)}{x-x_0}>0$.

לכן לכל $x>x_0$ (בסביבה) מתקיים $f'(x)>0$

ולכל $x<x_0$ (בסביבה) מתקיים $f'(x)<0$

לפי משפט הנגזרת הראשונה, x_0 נק' מין מקומי.

■

2. נסמן $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$

כלומר $f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$

$$f(x) - f(x_0) = (x-x_0)^n \underbrace{\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}\right)}_{*}$$

ידוע ש: $\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} \xrightarrow{x \to x_0} 0$, ונניח בה"כ $f^{(n)}(x_0)>0$, לכן

קיימת סביבה של x_0 כך ש $(*)$ חיובי. נפריד למקרים:

<u>מקרה א - n זוגי:</u> לכן $(x-x_0)^n>0$ וכתוצאה מכך, $f(x)-f(x_0)>0$ בסביבה של x_0, כלומר $f(x)>f(x_0)$. לכן x_0 מינ'

<u>מקרה ב - n אי-זוגי:</u> $(*)$ עדיין חיובי. בסביבה המדוברת, עבור $x>x_0$, $(x-x_0)^n>0$ ולכן $f(x)>f(x_0)$, ועבור $x<x_0$, $(x-x_0)^n$ שלילי ולכן $f(x)<f(x_0)$. לכן x_0 אינו קיצון

∎