תרגיל 2

נדב מנירב

1. א. נכבה את המנורה שלנו ונגדיל את counter באחד
נמשיך לעבור בין כל הקרונות ולאחר כל נורה שנכבה
נגדיל את counter ב 1
נפסיק כשנגיע למנורה כבויה. הערך של counter הוא מס' הקרונות

■

ב. נעמוד בקרון שבו הנורה כבויה (ולא נדליק אותה) נתקדם l קרונות ונדליק כל נורה כבויה שאנו נתקלים בה. כעת l הנורות הראשונות דלוקות פרט לאחת. במצב הזה נחזור l קרונות אחורה. אם הגענו לנורה כבויה אז ברכבת יש יותר מ l קרונות, כי לא הדלקנו אותה. אם היא דולקת, יש פחות (או שווה)
זמן הריצה הוא $2l+\Theta(1)$ לכן הסיבוכיות היא $\Theta(l)$

ג. נעשה את הבדיקה מסעיף ב עבור ערכים שונים של l:
כאשר נגיע לנורה כבויה נדע שהאורך הוא לכל היותר l
לכל l נבצע $2l$ פעולות לכן

$$T(n)=2(1+2+\dots+n)=n(n+1)\in O(n^2)$$

נוסחת סדרה חשבונית

ב. עבור כל כל סדרי l שניתן להציגם כחזקה של 2, עד שנמצא l_f שלפי בדיקה (כ) גבוה או שווה מאורך הרשימה.

כעת עבור l_f קרועת ונדליק כל אחת מהנורות בהם.

$l_f \geq n$ אבל $\frac{l_f}{2} < n$ כי ה l הקודם נכשל בבדיקה (ידוע הלכנו על חזקות של 2)

לכן $n \leq l_f \leq 2n$

עבור סדרי l נבצע $2+4+\dots+2l_f$ פעולות

יהי k עבורו $l_f = 2^k$

$2^k \geq n$ $\quad 2^k < 2n$

$\downarrow \quad \downarrow$

$k \geq \log n \quad , \quad k < \log n - 1$

זמן הריצה של מציאת l_f:

$$2+2^2+2^3+\dots+2^{k+1} = \frac{2(2^{k+1}-1)}{2-1} = 2^{k+2}-2$$

טור הנדסי

הדלקת הנורות היא 2^k

שוב נבצע כהדליק מקסימום n.

זמן ריצה כולל: $2^{k+2}+2^k+n-1 \leq 4n+n+n-1 \leq 6n \in O(n)$

2. נוכיח שמערך תומך בזה.

ניקח מערך ממוין שבו נמצאות קבוצת המספרים S

לפי התרגול, זמן ריצה של הבנייה שייך ל $O(n\log n)$

<u>סכום</u>

נסמן את איברי S כך שלכל $i<j$, $x_i<x_j$.

מצב התחלתי ← $i=0, j=1, k=n$

נבצע בפעולות הנ"ל:

כל עוד $(i\neq n)$: $i+1 \to i$

אם $k=j$ נחזור אל הלופ החיצוני שוב

כמו כן,

$$\text{if}(j=i \text{ OR } x_j+x_k < y-x_i)$$

$$j+1 \to j$$

$$\text{else if}(k=i \text{ OR } x_j+x_k > y-x_i)$$

$$k-1 \to k$$

מצאנו $x_j+x_k=y-x_i$

אם לא מצאנו אז <u>אין שלשה</u>

זה בעצם אלגוריתם 2Sum, שזמן הריצה שלו הוא

של 2Sum כפול מס' איברים במערך

כלומר $n\cdot O(n) \le n\cdot cn = cn^2 \in O(n^2)$

.3

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{7}\right) + n\log n$$

$$T(n) = 3\left(3T\left(\frac{n}{7^2}\right) + \frac{n}{7}\log\frac{n}{7}\right) + n\log n$$

$$T(n) = 3^i\, T\left(\frac{n}{7^i}\right) + \sum_{j=0}^{i-1} 3^j \cdot \log\left(\frac{n}{7^j}\right) \cdot \frac{n}{7^j}$$

נוכיח באינדוקציה

בסיס: $i=1$,

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{7}\right) + n\log n = 3^1\, T\left(\frac{n}{7^1}\right) + \sum_{j=0}^{0} 3^j \cdot \log\left(\frac{n}{7^j}\right) \cdot \frac{n}{7^j}$$

צעד: נניח נכון עבור $i-1$, ונוכיח עבור i

$$T(n) = 3^{i-1}\, T\left(\frac{n}{7^{(i-1)}}\right) + \sum_{j=0}^{i-2} 3^j \cdot \frac{n}{7^j} \cdot \log\left(\frac{n}{7^j}\right) =$$

$$= 3^{i-1}\left(3T\left(\frac{n}{7^i}\right) + \frac{n}{7^i}\log\left(\frac{n}{7^i}\right)\right) + \sum_{j=0}^{i-2} 3^j\, \frac{n}{7^j} \cdot \log\left(\frac{n}{7^j}\right) =$$

$$= 3^i\, T\left(\frac{n}{7^i}\right) + 3^{i-1} \cdot \frac{n}{7^i}\log\left(\frac{n}{7^i}\right) + \sum_{j=0}^{i-2} 3^j \cdot \frac{n}{7^j} \cdot \log\left(\frac{n}{7^j}\right) =$$

$$= 3^i\, T\left(\frac{n}{7^i}\right) + \sum_{j=0}^{i-1} 3^j \cdot \frac{n}{7^j} \cdot \log\left(\frac{n}{7^j}\right)$$

מ.ש.ל.

אינדוקציה

נציב $i = \log_7 n$

$$T(n) = 3^{\log_7 n}\, T\left(\frac{n}{7^{\log_7 n}}\right) + \sum_{j=0}^{\log_7(n)-1} 3^j \cdot \frac{n}{7^j} \cdot \log\left(\frac{n}{7^j}\right) \leq$$

$$\leq 7^{\log_7 n}\, T(1) + n \sum_{j=0}^{\log_7 n - 1} \left(\frac{3}{7}\right)^j \cdot \left(\log n - j \log 7\right) \leq$$

$$\leq n + n\log n \cdot \sum_{j=0}^{\log_7 n - 1} \left(\frac{3}{7}\right)^j \leq n\log n \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{7}} \in O(n\log n)$$

ס. הנדסית

בנוסף,

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{7}\right) + n\log n \geq n\log n$$

לכן $T(n) \in \Omega(n\log n)$

בסה"כ, $T(n) \in \Theta(n\log n)$

4.

יהיו $a,b\in(0,1)$ כך ש $a+b<1$

ותהי $T(n)=T(an)+T(bn)+n$

א. צ"ל $T(n)\in\Theta(n)$

נבחר $C=\frac{2}{1-a-b}$. נוכיח שלכל n (באינדוקציה)

מתקיים $T(n)\le c\cdot n$

בסיס: $n=1$

$T(n)=1\le C\cdot 1$

כי $2>1-a-b$

צעד: יהי כלשהו $n>N$ כך שלכל $1\le t<n$ מתקיים $T(t)\le c\cdot t$

ונוכיח עבור n.

$T(n)=T(an)+T(bn)+n$

$an<n$, $bn<n$ לכן הם מקיימים את הנחת האינדוקציה!

$T(n)\le c\cdot an+c\cdot bn+n = n(ac+bc+1)<c\cdot n$

סך הכל קיבלנו, לפי ההגדרה, $T(n)\in O(n)$

וגם $T(n)=T(an)+T(bn)+n\ge n$

לכן $T(n)\in\Omega(n)$

סה״כ $T(n)\in\Theta(n)$

ב

$$T(n)=2T(\sqrt{n})+1 = 2T(n^{\frac{1}{2}})+1$$

נציב $m=\log_2 n$ ונקבל

$$T(2^m) = 2T\left(2^{\frac{m}{2}}\right)+1$$

נסמן $S(m)=T(2^m)$

$$S(m)=2S\left(\frac{m}{2}\right)+1$$

לפי שיטת המאסטר

$a=b=2$

$f(n)=1$

$\log_b a = 1$

אכן $1\in O(m^{1-\varepsilon})$ לכל $\varepsilon>0$

לכן $S(m)\in\Theta(m)$

נציב חזרה

$$T(n)=T(2^m)=S(m)\in\Theta(\log n)$$