חסמים אסימפטוטיים

<div dir="rtl">

מוטיבציה: סיבוכיות זמן, חזים לפעמים כמה זמן תקח התכנית שלנו.

הגדרה: בהנתן אלגוריתם הזמן ותקצף כפונ' $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$

חסם O

הגדרה: $\exists c > 0, n_0 \geqslant 0 : \forall n \geqslant n_0 : f(n) \leqslant c g(n) \iff f(n) \in O(g(n))$

הגדרה: $O(g(n)) \rightarrow$ כרוכה של פונקציות

לדוגמא: $7n + 15 \in O(n)$

חסם Ω

הגדרה: $\exists c > 0, n_0 \geqslant 0 : \forall n \geqslant n_0 : f(n) \geqslant c \cdot g(n) \iff f(n) \in \Omega(g(n))$

הגדרה: אלא כאן זה מן בוף אותה, כלף תוא כמעים חסם Ω.

</div>

הגדרה

$$f(n) \in \Theta(g(n))$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\exists c_1, c_2 > 0, n_0 \geq 0 : \forall n \geq n_0 : \quad c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$$

חסמי ω, o

$$\forall c > 0, \exists n_0 \geq 0 : \forall n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n) \quad \Longleftrightarrow \quad f(n) \in o(g(n)) \quad \text{הגדרה}$$

$$\forall c > 0 \exists n_0 \geq 0 : \forall n \geq n_0 : f(n) \geq c \cdot g(n) \quad \Longleftrightarrow \quad f(n) \in \omega(g(n))$$

$$5n \log n \in \omega(n) \qquad , \qquad 2n + 15 \in o(n^2) \qquad \text{דוגמאות}$$

שימוש בגבולות

• אם כאשר $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = L$ קיים ונותן מספר ממשי אז:

$$L = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(n) \in o(g(n)) \qquad *$$

$$L \in \mathbb{R}^+ \quad \Longleftrightarrow \quad f(n) \in \Theta(g(n)) \qquad *$$

$$L = \infty \quad \Longleftrightarrow \quad f(n) \in \omega(g(n)) \qquad *$$

דוגמאות: הוכחת $\log n \in o(n)$.

לופיטל

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log n}{n} \xrightarrow{} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

הערה: אם $f(n)\in O(g(n))$! $f(n)\notin \Theta(g(n))$ הרי לכן

אז נאמר ש $f(n)\in o(g(n))$

היררכיה של פונקציות נפוצות

הגדרה: n $\log^*n$ זה מספר הפעמים שצריך להפעיל ל?
כדי לקבל 1

דוגמא: $\log(65536)=16$, $\log(16)=4$, $\log(4)=2$, $\log(2)=1$

לכן $\log^*(65536)=4$

15 פעמים שצלה נווד לכאו?

היררכיה:

$1, \log^*n, \log\log(n), \log(n), \log^2 n, \log^c n, 2^{\sqrt{\log n}}, \sqrt{n}, n, n\log n, n^2,$
$2^n, n!, n^n, 2^{2^{2^n}}$

שאלות

1. יהי $f(n)\in\Theta(g(n))$ האם גם $\log(f(n))\in\Theta(\log(g(n)))$? כן

   שואפות ל∞

2. יהי $f(n)\in\Theta(g(n))$. האם $2^{f(n)}\in\Theta\left(2^{g(n)}\right)$? לא

$$\log(n!) \in \Theta(n \log n) \qquad \text{מערכה:}$$