אינטגרל מוכלל

עד עכשיו טיפלנו ב $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה.

נרצה להכליל לאינט׳ של פונק׳ 1) לא חסומות

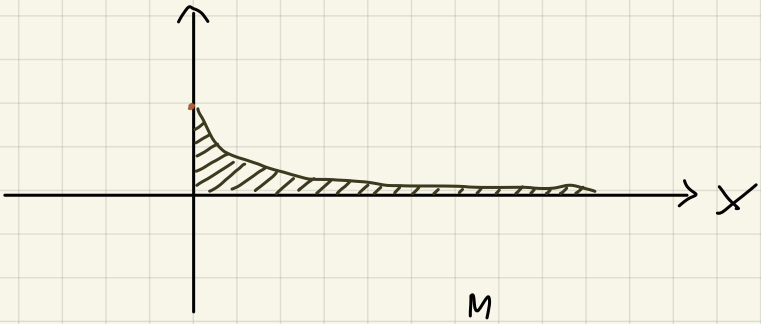
2) בקטע לא חסום

<u>הגדרה:</u> תהי $f:[a,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ פונק׳ המקיימת שלכל $M>a$ f אינט׳ בקטע $[a,M]$. נגדיר:

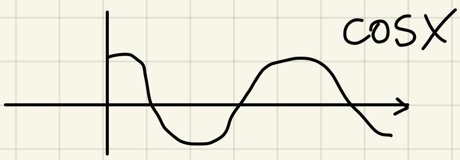
$$\int_a^\infty f(x)\,dx=\lim_{M\to\infty}\int_a^M f(x)\,dx$$

בתנאי שהגבול קיים. אם קיים, האינטגרל מתכנס, ואם לא, מתבדר.

<u>דוגמה:</u> 1)



$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx=\lim_{M\to\infty}\int_a^M e^{-x}\,dx=\lim_{M\to\infty}\left(-e^{-x}\Big|_0^M\right)=\lim_{M\to\infty}\left(-e^{-M}+1\right)=1$$



2)

$$\int_0^\infty \cos x\,dx=\lim_{M\to\infty}\int_0^M \cos x\,dx=\lim_{M\to\infty}\left(\sin x\Big|_0^M\right)=\lim_{M\to\infty}(\sin M)$$ לא קיים

הערה: 1) באופן דומה

$$\int_{-\infty}^{a} f = \lim_{M\to-\infty} \int_{M}^{a} f$$

2) אם $\int_{a}^{\infty} f$ מתכנס אז לכל $b>a$:

$$\int_{a}^{\infty} f = \int_{a}^{b} + \int_{b}^{\infty} f$$

3) אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ אז מגדירים

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^{a} f + \int_{a}^{\infty} f$$

בתנאי ששני האינטגרלים בצד ימין מתכנסים

לא תלוי בבחירת a

4)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f \neq \lim_{M\to\infty}\left(\int_{-M}^{M} f\right)$$

דוגמה: $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$

מקרה א: $\alpha = 1$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{M\to\infty} \int_{1}^{M} \frac{dx}{x} = \lim_{M\to\infty}\left(\ln x \Big|_{1}^{M}\right) =$$

$$= \lim_{M\to\infty}(\ln M)$$ לא קיים

מקרה ב: $\alpha \neq 1$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{M\to\infty}\left(\int_{1}^{M} \frac{dx}{x^{\alpha}}\right) = \lim_{M\to\infty}\left(\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_{1}^{M}\right) =$$

$$= \lim_{M\to\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left(M^{1-\alpha} - 1\right) = \begin{cases} \text{לא קיים}, & \alpha<1 \\ \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha>1 \end{cases}$$

מסקנה: $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ מתכנס $\iff \alpha>1$

(ושווה ל $\frac{1}{\alpha-1}$)

הגדרה: תהי $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ המקיימת שלכל $\varepsilon>0$ אז f חסומה
בקטע $[a,b-\varepsilon]$ נגדיר $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$
בתנאי שהגבול קיים.

הערה: עבור המקרה שב $\overbrace{a}^{\text{לא חסומה}}$ נגדיר $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$

עבור המקרה שלא חסומה בנק׳ בתוך הקטע

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

דוגמה:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0} 2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(2-2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2$$

משפט: $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ מתכנס $\iff \alpha<1$

מבחני התכנסות

1 משפט (מבחן ההשוואה): תהיינה f, g 2 פונק' אי-שליליות ב- $[a,\infty)$ ואינט' ב $[a,M]$ לכל $M>a$. נניח כי $0\le f(x)\le g(x)$ לכל $x>a$. אזי:

$$\boxed{\int_a^\infty g(x)dx \text{ מתכנס} \implies \int_a^\infty f(x)dx \text{ מתכנס}}$$

הערה: מספיק לדרוש $f(x)<g(x)$ החל ממקום מסוים.

דוגמה: 1) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+5x}$. לכל $x\geq 1$ מתקיים

$$0\le \frac{1}{x^2+5x}\le\frac{1}{x^2}$$

ידוע $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}<\infty$ לכן $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+5x}<\infty$ לפי מבחן ההשוואה לפונק' אי-שליליות.

2)

$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+5x}$ לכל $0\le x\le 1$ $x^2\le x$ ולכן

$0\le x^2+5x\le 6x$

$\Downarrow$

$\frac{1}{x^2+5x} \geq \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x} \geq 0$

וידוע $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ מתבדר לכן $\frac{1}{6}\int_0^1 \frac{dx}{x}$ מתבדר ולפי מבחן

ההשוואה לפונ' אי-שליליות גם $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+5x}$ מתבדר

2. משפט (מבחן ההשוואה הגבולי): יהיו f, g אי-שליליות

ב $[a,\infty)$ ואינט' ב $[a,M]$ לכל $M>a$. נניח ש

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=L$ $(0<L<\infty)$

אזי $\int_a^\infty f$ ו $\int_a^\infty g$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו

הערה: אם $L=0$ אז $\int_a^\infty g$ מתכנס $\Longleftarrow$ $\int_a^\infty f$ מתכנס

אם $L=\infty$ אז $\int_a^\infty f$ מתכנס $\Longleftarrow$ $\int_a^\infty g$ מתכנס

דוגמה: $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\sqrt{1-x}}$ אינטואיציה: מתנהג כמו $\frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cancel{x}\sqrt{1-x}}}{\frac{1}{\cancel{x}}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1$$

לפי מבחן ההשוואה הגבולי לפונ' אי-שליליות $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\sqrt{1-x}}$ מתבדר

הגדרה: תהי $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ אינט' בכל קטע $[a,M]$. נאמר כי $\displaystyle\int_a^\infty f$ מתכנס בהחלט אם $\displaystyle\int_a^\infty |f|$ מתכנס. אם $\displaystyle\int_a^\infty f$ מתכנס אך לא בהחלט, אז אומרים שהוא מתכנס בתנאי.

3 משפט: התכנסות בהחלט $\Longleftarrow$ התכנסות

הערה: הגדרה דומה עבור f לא חסומה

דוגמה: 1.

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{\sin x}{x}\,dx$$

$$\int_1^M \frac{\sin x}{x}\,dx = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^M - \underbrace{\int_1^M \frac{\cos x}{x^2}\,dx}$$

מתכנס לפי מבחן ההשוואה עם $\frac{1}{x^2}$

בהחלט

.2

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin 2x}{x^2}\,dx$$

נבדוק התכנסות מתכנס בהחלט

$$\int_1^{\infty} \frac{|\sin 2x|}{x^2}\,dx$$

$|\sin 2x| \leq 1$ לכן

$$0 \leq \frac{|\sin 2x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

לכן לפי מבחן ההשוואה לפונק' אי-שליליות, $\int_1^{\infty} \frac{\sin 2x}{x^2}$ מתקבל
מתכנס בהחלט.

.3

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^{M} \frac{\cos 2x}{x}\,dx$$

בדוגמה 2
(מתכנס)

מספר

$$\int_1^{M} \frac{\cos 2x}{x}\,dx = \frac{\sin 2x}{2x}\Big|_1^M + \frac{1}{2}\int_1^M \frac{\sin 2x}{x^2}$$

$$\begin{pmatrix} u = \frac{1}{x} & v' = \cos 2x \\ u' = -\frac{1}{x^2} & v = \frac{\sin 2x}{2} \end{pmatrix}$$

לכן סה"כ מתכנס

.4

$$\int_1^\infty \frac{1-\cos 2x}{x}\,dx$$

$$\int_1^M \frac{1-\cos 2x}{x}\,dx = \underbrace{\int_1^M \frac{dx}{x}}_{\text{אין גבול}} - \int_1^M \frac{\cos 2x}{x}\,dx$$

כש $M\to\infty$

לכן $\int_1^\infty \frac{1-\cos 2x}{x}\,dx$ מתבדר

.5

$$\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$$

לכל $x\geq 1$ מתקיים $|\sin x| \geq \sin^2 x$

לכן $0 \leq \frac{1-\cos 2x}{2x} = \frac{\sin^2 x}{x} \leq \frac{|\sin x|}{x}$

אינט' שלו מתבדר.

לכן לפי מבחן ההשוואה לפונק' אי-שליליות, גם $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}$ מתבדר

משפט (מבחן אבל): תהיינה $f,g:[a,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ כך ש f רציפה, $\int_a^\infty f$ מתכנס ! g מונוטונית חסומה, וגזירה ברציפות

אזי $\int_a^\infty fg$ מתכנס

4. משפט (מבחן דיריכלה): תהיינה $f,g:[a,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ כך ש: g מונוטונית שואפת ל 0 גזירה ברציפות. ! f רציפה ומקיימת $\int_a^x f$ חסומה. אזי $\int_a^\infty fg$ מתכנס

דוגמה: $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$. נגדיר $f(x)=\sin x$, $g(x)=\frac{1}{x}$

שתיהן מוגדרות ב $[1,\infty)$. g מונוטונית יורדת ל 0 גזירה ברציפות
f רציפה שכן אלמנטרית

$$\int_1^x \sin t\,dt=-\cos t\Big|_1^x=-\cos x+\cos 1$$

אכן מתקיים $\cos 1-1\le\int_1^x \sin x\,dx\le\cos 1+1$

לכן לפי מבחן דיריכלה, $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ מתכנס.

שאלה: נניח ש- $0\le f$ לכל $x\in[0,\infty)$, רציפה! $\int_0^\infty f$ מתכנס

האם $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$?

$\boxed{\text{לא}}$ דוג' נגדית:

$$\int_0^\infty f = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^{n-1}}\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n}$$

מתכנס.

מבחן האינטגרל להתכנסות טור מונוטוני

5. **משפט (מבחן האינטגרל):** תהי $f(x)$ פונק' חיובית ויורדת. נגדיר $a_n=f(n)$ לכל n. אזי:

$$\sum_{n=1}^\infty a_n \text{ מתכנס} \Longleftrightarrow \int_1^\infty f \text{ מתכנס}$$

1. לכל $a<x$ מתקיים $\int_a^x f \geq \int_a^x g$

בנוסף כפונ' של x $\int_a^x g$ ו $\int_a^x f$ שתיהן מונוטוניות

עולות. לכן אם $\int_a^\infty f$ מתכנס אז $\int_a^\infty f$ חסומה. לכן גם $\int_a^x g$

אז חסומה ולכן $\int_a^\infty g$ מתכנס.

$\blacksquare$

ב. ניקח $\varepsilon>0$ כך ש $L-\varepsilon>0$. מהגדרת הגבול ב ∞

נובע שקיים N כך שלכל $x>N$ $\quad L-\varepsilon \le \frac{f(x)}{g(x)} \le L+\varepsilon$

$$0 \le g(x)\cdot(L-\varepsilon) \le f(x) \le g(x)\cdot(L+\varepsilon)$$

ולפי מבחן ההשוואה לפונ׳ חיוביות, סיימנו.

$\blacksquare$

$$f^+ = \begin{cases} f, & f \geq 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases} \qquad f^- = \begin{cases} 0, & f \geq 0 \\ -f, & f < 0 \end{cases}$$

f^+, f^- אי שליליות ומתקיים

$$f = f^+ - f^-$$

$$|f| = f^+ + f^-$$

$\int_a^\infty |f|$ מתכנס. לפי מבחן ההשוואה לפונ' אי-שליליות. $\int_a^\infty f^+$ מתכנס

ו $\int_a^\infty f^-$ מתכנס. סה"כ גם $\int_a^\infty f$ מתכנס

$\blacksquare$

$$\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx = \lim_{M\to\infty}\int_a^M f(x)g(x)\,dx$$

$$\int_a^M f(x)g(x)\,dx = g(x)F(x)\Big|_a^M - \int_a^M g'(x)F(x)\,dx =$$

$$\begin{pmatrix} u=g & v'=f \\ u'=g' & v=F \end{pmatrix}$$

$$=\underbrace{g(M)F(M)}_{\text{א}} - \underbrace{g(a)F(a)}_{=0} - \underbrace{\int_a^M g'(x)F(x)\,dx}_{\text{ב}}$$

נראה שמתקיימים א' ; ב' כי יש גבול כאשר $M\to\infty$:

$$\underbrace{g(M)}_{\downarrow\, M\to\infty\ \ 0}\underbrace{F(M)}_{\text{חסומה}} \xrightarrow[M\to\infty]{} 0$$

נסמן $|F(x)|\le C$

$$\int_a^M |F(x)g'(x)|\,dx \le C\cdot\int_a^M |g'(x)|\,dx = C\cdot\int_a^M -g'(x)\,dx =$$

g יורדת

$$=C\cdot\left(-g(M)+g(a)\right) \xrightarrow[M\to\infty]{} Cg(a)$$

$$C \xrightarrow[M\to\infty]{} C,\quad g(M) \xrightarrow[M\to\infty]{} 0,\quad g(a) \xrightarrow[M\to\infty]{} g(a)$$

לכן $\int_a^\infty F(t)g'(t)$ מתכנס בהחלט

סה"כ לְא' וּב' יש גבול לכן $\int_a^\infty fg$ מתכנס.

$\blacksquare$

5. מכיוון ש f יורדת