


משוואות דיפרנציאליות רביעיות

מהן משוואות דיפרנציאליות

משוואה המכילה בין משתנה בלתי תלוי x , לבין פונקציה
לפי יפואה y , ונגזרותיה.

הגדרה: הסדר של מפר" הוא צורת הנגזרת הגבוהה.
המסלה של מפר" הוא החזקה בה מופיעה הנגזרת
הגבוהה ביותר.

דוגמה: מפר" מסדר ראשון ממסלה ראשונה: $2xy' - 3y = 0$
מפר" מסדר שני ממסלה ראשונה: $2y'' + 3x^2y = 0$

מפר" מסדר ראשון ממסלה שנייה: $2x^3y \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (1+x^3) = 0$

הערות: במקרים מסוימים המפר" ניתנת לסתרון ישירות ב'
אויטגרציה. לפואמה $y' = e^{2x} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}e^{2x} + c$

דוגמה: נסו למצוא את y .

$$(y')^2 + xy' + 3 = 0$$

נפתור את זה עם נוסחת השורשים כדי למצוא את y' , וכל הפתרון נכנס אוטומטית ל"ל"ב"א את y .

סוגים של מוד"ר

נניח $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ יהיו

הערה: מוד"ר תיקרא נורמלית אם היא נתונה בצורה

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

מוד"ר תיקרא ליניארית אם יהיו ל"אורית במשתנים $y, \dots, y^{(n)}$ מוד"ר ליניארית נכתבת בצורה נורמלית

$$y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) y^{(i)} + f(x) \quad \text{כך:}$$

אם $f(x) = 0$ המוד"ר נקראת ליניארית הומוגנית

דוגמה: זו מוד"ר ליניארית: $e^{y''} + 3y''x^2 + 2x + \sin y = 0$

ובצורתה הנורמלית: $y'' = \ln(-3y''x^2 - 2x - \sin y)$

$$(y')^2 + x^2 + 2 = 0 \quad \text{ללא פתרון}$$

פתרון של מ"ר

הצגה פתרון של מ"ר הוא פונקציה $y = \varphi(x)$ שבהצבה במ"ר נקבל זהות $F(x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$

דוגמה הפונקציה $\varphi(x) = x^2$ היא פתרון של המשוואה $x(x^2)' - 2x^2 = 0$ כלומר, $xy' - 2y = 0$

פתרון כללי

הצגה פתרון כללי של מ"ר הוא משפחת פונקציות $y = \varphi(x, c_1, \dots, c_n)$. הפונקציות הן קבועים ונגזרות n פעמים

$$y'' = x + 1$$

דוגמה המשוואה

$$\vdots$$

$$y' = \frac{1}{2}x^2 + x + c_1$$

$$\vdots$$

$$y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c_1x + c_2$$

כאשר c_1, c_2 מתקבל פתרון מלא