מד"ר מסדר ראשון

<u>הגדרה:</u> מד"ר מהצורה $F(x,y,y')=0$ נקרא מד"ר מסדר I

<u>דוגמה:</u> $xy'=x+y$, $y'=\frac{y}{x}$

בעיית קושי

למצוא פתרון למד"ר $y'=f(x,y)$ המקיים תנאי התחלה

$$y|_{x=x_0}=\varphi(x_0)$$

<u>הגדרה:</u> בהינתן פתרון של מד"ר $y=\varphi(x,c)$ פתרון המתקבל ע"י הצבת c_0 מסוים נקרא פתרון רגולרי, ופתרון שלא מתקבל מהפתרון הכללי נקרא פתרון סינגולרי.

<u>דוגמה:</u> $(y')^2=4y$. הפתרון הכללי הוא $y=(x+c)^2$

$y=0$ הוא פתרון סינגולרי.

מד"ר עם משתנים מופרדים

הצורה אליה אנו שואפים להגיע במד"ר היא $y'=f(x)g(y)$

נחלק ב $g(y)$ ונקבל

$$\frac{y'}{g(y)}=f(x)$$

נבצע אינטגרציה

$$\int\frac{y'}{g(y)}dx=\int f(x)dx$$

ט' החלפת משתנים $y=y(x)$

$$\Downarrow$$

נקבל $dy=y'dx$

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx$$

<u>דוגמה:</u> $2xy+y'=0$. $\Leftarrow$ $y'=-2xy$ נחלק ב y.

$(y\neq0)$:

$$\frac{y'}{y}=-2x$$ ומכאן

$$\int\frac{dy}{y}=-2\int xdx$$

ומכאן

$$\ln|y|=-x^2+c$$

$$|y|=c_1e^{-x^2}$$

$$y=c_2e^{-x^2}$$

כולל $C_2=0$ כי

$y=0$ מקיים מד"ר מקורי.

<u>דוגמה:</u>

$$x^2y^2y'=y-1$$

$$x^2y^2dy+(1-y)dx=0$$

$x=0,\ y=1$ פתרון. נחלק ב $x^2(1-y)$

ונקבל

$$\frac{y^2dy}{1-y}+\frac{dx}{x^2}=0$$

נבצע אינטגרציה ונקבל

$$\int \frac{y^2 dy}{y-1} = \int \frac{dx}{x^2} + C$$

$$\frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = -\frac{1}{x} + C$$

אי אפשר לחלץ את y אבל אפשר את x:

$$x = \frac{1}{C - \left(\frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1|\right)}$$

$x=0$ מתקבל כש $C \to \infty$

הפרדת משתנים

לדוגמה משוואות מהצורה $y' = f(ax+by)$

נגדיר $Z = ax+by$. לכן $Z' = a + by'$ $\qquad y' = \frac{Z'-a}{b}$

נציב במשוואה המקורית ונקבל

$$\frac{Z'-a}{b} = f(Z)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{Z'}{bf(Z)+a} = 1$$

$$\int \frac{dZ}{bf(Z)+a} = \int 1dx = x + c$$

נמצא את $Z(x)$ ונציב במשוואה $y(x) = \frac{Z(x) - ax}{b}$

דוגמה:

$$y' = \frac{1-x+y}{x-y} = \frac{1-(x-y)}{x-y}$$

נגדיר $z = x-y$

ונקבל $z' = 1-y'$

$$1-z' = \frac{1-z}{z}$$

$$z' = \frac{2z-1}{z}$$

$$\frac{zz'}{2z-1} = 1$$

$$\int \frac{z\,dz}{2z-1} = x+c$$

$$\frac{z}{2} + \frac{1}{4}\ln\left|z-\frac{1}{2}\right| = x+c$$

$$\frac{x-y}{2} + \frac{1}{4}\ln\left|x-y-\frac{1}{2}\right| = x+c$$

מד"ר הומוגנית

הגדרה: פונקציה $f(x,y)$ נקראת הומוגנית מסדר k אם

לכל $\lambda > 0$ מתקיים $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x,y)$

דוגמה: עבור $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$

נקבל $f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x - \lambda y}{\lambda x + \lambda y} = \frac{x-y}{x+y}$

הומוגנית מספר 0.

1.משפט: פונק' $f(x,y)$ ניתנת לכתיבה בתור $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ אם ורק אם $f(x,y)$ הומוגנית מספר 0.

הגדרה: אם ניתן לכתוב את המד"ר $y'=f(x,y)$ בצורה $y'=g\left(\frac{y}{x}\right)$ היא נקראת הומוגנית

פתרון מד"ר הומוגנית: הצבה $z=\frac{y}{x}$ כלומר

$$y(x)=z(x)\cdot x$$

$$y'=xz'+z=g(z)$$

$$xz'=g(z)-z$$

$$\frac{z'}{g(z)-z}=\frac{1}{x}$$

$$\int\frac{dz}{g(z)-z}=\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+c$$

מוצאים את z ומוצאים את y.

דוגמה:

$$xy'=x+y$$

$$y'=1+\frac{y}{x}\equiv g\left(\frac{y}{x}\right)$$

נציב $Z=\frac{y}{x}$

$\vdots$

$$y=x\ln(cx)$$

אם נתונים תנאי התחלה, $y(3)=8$

$$3\ln(3c)=8$$

$$\ln(3c)=\frac{8}{3}$$

$$c=\frac{1}{3}e^{\frac{8}{3}}$$

דוגמה: נניח שיש משכנתה שגובהה בזמן t הוא $y(t)$
לכל Δt קצר, המשכנתה צוברת ריבית של $Ry\Delta t$
ומתבצע תשלום של $p\Delta t$, אזי גובה המשכנתה מקיים:

$$y(t+\Delta t)=y(t)+Ry\Delta t-p\Delta t$$

$$\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}=Ry-p$$

לק $\Delta t\to 0$

$$y'=Ry-p$$

$$\frac{y'}{Ry-p}=1$$

$$\int\frac{dy}{Ry-p}=\int 1dt$$

$$y = \frac{1}{R}\left(p + C_2 e^{Rt}\right)$$

מד"ר פתירות ע"י משוואה הומוגנית

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{ax + by + c}\right)$$

מקרה I: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0$

נשתמש בהחלפת משתנים $y = q + \beta$, $x = p + \alpha$

מציבים בביטוי. מנסים לאפס את הקבועים.

דוגמה 8: $y' = \frac{2x+3y+4}{x+y+2}$. נגדיר $y = q + \beta$, $x = p + \alpha$

נקבל:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0$$

$$y' = \frac{2p + 3q + 4 + 2\alpha + 3\beta}{p + q + 2 + \alpha + \beta}$$

$$\begin{cases} 2 + \alpha + \beta = 0 \\ 4 + 2\alpha + 3\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = -2,\ \beta = 0$$

$$\frac{dq}{dp} = \frac{2p + 3q}{p + q} = \frac{2 + 3z}{1 + z}$$

$$\frac{dz}{dp}\cdot p+z=\frac{2+3z}{1+z}$$

$$\frac{dz}{dq}\cdot p=\frac{2+2z-z^2}{1+z}$$

$$\int\frac{1+z}{2+2z-z^2}\,dz=\int\frac{dp}{p}=\ln|p|+c$$

מקרה II:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix}=0$$

מדר לינאריות

$$y'+p(x)\cdot y=q(x)$$

אם $q(x)=0$ המד"ר לינארית-הומוגנית

אם המד"ר הומוגנית, נפתור

$$y'=-p(x)y$$

$$\frac{y'}{y}=-p(x)$$

$$\int\frac{dy}{y}=\int -p(x)dx$$

$$\downarrow$$

$$y=C\cdot e^{-\int p(x)dx}$$

שיטת וריאציית המקדמים

ננסה $y=c(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}$. נגזור

$$y'=c'(x)e^{-\int p(x)dx}-c(x)\cdot p(x)e^{-\int p(x)dx}$$

$$y'=-p(x)\cdot c(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}+q(x)$$

נשווה

$$\boxed{y=e^{-\int p(x)dx}\cdot\left[c+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right]}$$

ניתן ישר להציב בנוסחה.

משוואת ברנולי

משוואה מהצורה: $y'+p(x)\cdot y=q(x)\cdot y^n$

כמובן $n\neq 0,1$ (סבורים מקרה לינאריות)

אם $n>0$ $y=0$ הוא פתרון.

אם $n<0$ $y=0$ לא פתרון.

עם $y\neq 0$:

$$\frac{y'}{y^n}+p(x)y^{1-n}=q(x)$$

נציב $z=y^{1-n}$:

$$z'=(1-n)y^{-n}\cdot y'=\frac{(1-n)y'}{y^n}$$

נציב במשוואה:

$$\frac{z'}{1-n}+p(x)\,z=q(x)$$

ליניארית לא הומוגנית, מציבים בנוסחה.

ואז $$y=z^{\frac{1}{1-n}}$$

אפשר פשוט להציב בנוסחה :)

$$\boxed{y=\left\{e^{-\int(1-n)p(x)dx}\cdot\left[c+\int(1-n)q(x)\cdot e^{\int(1-n)p(x)dx}dx\right]\right\}^{\frac{1}{1-n}}}$$

מד"ר מדויקות

נגזרת חלקית:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=$$ נגזרת רק לפי x והשאר, קבועים.

דיפרנציאל:

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

מד"ר מדויקת היא:

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

לדוגמה:

$$xy'+yx^2=0$$

$$\downarrow$$

$$xdy+yx^2dx=0$$

נניח שקיימת $u(x,y)$ המקיימת $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$

אזי $du = 0$

לכן u קבועה

אם קיימת u אז ת"כ להתקיים
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

זה אומ"ם.

הורם אינטגרציה

נניח שיש $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

נכפיל את שני הצדדים ב $\mu(x,y)$

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0$$

נרצה למצוא μ כך שהמצב מדויק. כלומר

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(x,y)P(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x,y)Q(x,y)\right)$$

לפי כלל המכפלה מתקבל:

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}P + \frac{\partial P}{\partial y}\mu = \frac{\partial \mu}{\partial x}Q + \frac{\partial Q}{\partial x}\mu$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}P - \frac{\partial \mu}{\partial x}Q = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

μ הוא גורם אינטגרציה אם הוא מקיים את המשוואה

הנ"ל

מתי הם נוצרים?

מקרה א' $\mu=\mu(x)$ במקרה זה

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial x}=\frac{d\mu}{dx}$$

אז

$$-\frac{d\mu}{dx}Q=\mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=-\left(\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{Q}\right)dx$$

$$\downarrow$$

$$\mu=e^{-\int\left(\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{Q}\right)dx}$$

מקרה ב: $\mu=\mu(y)$.

$$\mu=e^{\int\left(\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P}\right)dy}$$

משוואת ריקטי

מ"פ מהצורה:

$$y'+f(x)y^2+g(x)y+h(x)=0$$

טענה: פתרון כללי של משוואת ריקטי הוא מהצורה

$$y(x)=\frac{C\cdot a(x)+b(x)}{C\cdot A(x)+B(x)}$$

וכל ביטוי מהצורה הנ"ל קיימת משוואת ריקטי.

הערה: נקבל פתרון פרטי $y_1(x)$ ונחפש $u(x)$ כך שהפתרון יהיה $y=y_1(x)+\frac{1}{u}$

מד"ר סתומות

מד"ר מהצורה $F(x,y,y')=0$ שלא ניתן להציג כ $y'=f(x,y)$

מקרה א: משוואה מסדר 1 ממעלה n

מקרה ב: כשמשר x לא מופיע.

נגדיר $p=y'=\frac{dy}{dx}$

מקרה ג: y לא מופיע.

נחלץ את x נגדיר $y'=p$. $x=\varphi(p)$

$dy=p\,dx$

משוואת לגרנז'

$$y=\varphi(y')\cdot x+\psi(y')$$

$\varphi(y')\neq y'$

נגדיר $p=y'$

$$y=\varphi(p)x+\psi(p)$$

$$y'=\varphi(p)+\frac{d\varphi}{dp}\cdot x\,\frac{dp}{dx}+\frac{d\psi}{dp}\cdot\frac{dp}{dx}$$

$$p=\varphi(p)+[x\varphi'_p(p)+\psi'_p(p)]\cdot\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dx}{dp}(p-\varphi(p))=x\varphi'_p(p)+\psi'_p(p)$$

משוואת קלרו

$$y=xy'+f(y')$$

<u>דרך פתרון:</u> נגזור לפי x:

$$\cancel{y'}=\cancel{y'}+xy''+f'(y')\cdot y''$$

$$y''(x+f'(y'))=0$$

פתרון I: $y''=0$

$$y=cx+f(c)$$

פתרון II פתרון סינגולרי: $x=-f'(y')$

<u>דוגמה:</u>

$$x(y')^3-y\cdot(y')^2+1=0$$

$$x(y')^3+1 = y\cdot(y')^2 \qquad / :(y')^2 \neq 0$$

$$xy' + \frac{1}{(y')^2} = y$$

הגענו למשוואת קלרו. נגזור לפי x:

$$\cancel{y'} = \cancel{y'} + xy'' - \frac{2y''}{(y')^3}$$

$$y''\left(x - \frac{2}{(y')^3}\right) = 0$$

פתרון כללי: $y''=0$

$$\downarrow$$

$$y = cx + f(c) = cx + \frac{1}{c^2}$$

פתרון סינגולרי:

$$x - \frac{2}{(y')^3} = 0$$

$$x = \frac{2}{(y')^3}$$

$$(y')^3 = \frac{2}{x}$$

$$y' = \left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\downarrow$$

$$y = x\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

1. $\Leftarrow$ אזי $f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

$$f(\lambda x,\lambda y)=\varphi\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)=f(x,y)$$

$\Rightarrow$ עבור כל נתון x,y נבחר $\lambda=\left|\frac{1}{x}\right|$ ונקבל

$$f(\lambda x,\lambda y)=f\left(1,\frac{y}{x}\right)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$