1. מצא את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

(א) $y' = y/x$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x}$$

נבצע אינטגרציה

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln y = \ln x + c_1$$

$$y = e^{\ln x + c_1} = e^{c_1} \cdot e^{\ln x} = C \cdot x$$

עבור $0 < C = e^{c_1}$

(ב) $y' = -x/y$

$$y'y = -x$$

$$\int y'y\,dx = \int -x\,dx$$

$$\int y\,dy = \int -x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$$

$$x^2 + y^2 = C$$

$y' = (x+1)y$ (ג)

$$\frac{y'}{y} = x+1$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int (x+1)\,dx$$

$$\ln y = \frac{x^2}{2} + x + c$$

$$y = c \cdot e^{\frac{x^2}{2}+x}$$

פתרון כללי:

$c>0$

$y' = xe^{x+y}$ (ד)

$$y' = x \cdot e^x \cdot e^y \qquad / : e^y > 0$$

$$\frac{y'}{e^y} = xe^x$$

$$\int \frac{dy}{e^y} = \int xe^x\,dx$$

$$-e^{-y} = (x-1)e^x + c$$

2. מצא את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

(א) $y' - y/x = 1$ ←

זו מד"ר לינארית לא הומוגנית מסדר I. נציב בנוסחה:

$p(x) = -\frac{1}{x}$

$q(x) = 1$

$$y = e^{-\int -\frac{dx}{x}} \cdot \int 1 \cdot e^{\int -\frac{dx}{x}} dx =$$

$$= e^{\ln|x|} \cdot \int e^{-\ln|x|} dx = e^{\ln|x|} \cdot \int \frac{dx}{|x|} = e^{\ln(x\,\mathrm{Sign}(x))} \cdot \int \frac{dx}{|x|} =$$

$$= e^{\mathrm{Sign}(x)} \cdot e^{\ln x} \cdot \int \frac{dx}{x \cdot \mathrm{Sign}(x)} \quad / \quad \frac{\mathrm{Sign}\,x}{\mathrm{Sign}\,x} =$$

$$= \frac{e^{\mathrm{Sign}(x)}}{\mathrm{Sign}(x)} \cdot x \cdot \ln|x| + c$$

$$= cx + x\ln|x|$$

$$y' + xy = x^2 \quad (\text{ב})$$

זו מד"ר לינארית לא הומוגנית מספר I. נציב בנוסחה:

$p(x) = x$

$q(x) = x^2$

$$y = e^{-\int x\,dx} \cdot \int x^2 e^{\int x\,dx}\,dx = e^{-\frac{x^2}{2}} \int x^2 e^{\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$y' + y/x = 6x^2 \quad (\text{ג})$$

זו מד"ר לינארית לא הומוגנית מספר I. נציב בנוסחה:

$p(x) = \frac{1}{x}$

$q(x) = 6x^2$

$$y = e^{-\int \frac{dx}{x}} \cdot \int 6x^2 e^{\int \frac{dx}{x}}\,dx = 6 \cdot e^{-\ln|x|} \int x^2 e^{\ln|x|}\,dx =$$

$$= \frac{6}{|x|} \cdot \int x^2 \cdot |x|\,dx \quad \cdot \Big/ \frac{\operatorname{sign}(x)}{\operatorname{sign}(x)}$$

$$= 6 \int x^3\,dx = \frac{3}{2} x^4 + C$$

3. מצא את הפתרונות של המשוואות הבאות המקיימים את התנאי $y(0)=0$:

(א) $y'\cos x - y\sin x = 1$

$$(y\cos x)' = 1$$

$$y\cos x = x + \tilde{c}$$

$$y = \frac{x}{\cos x} + c$$

$$y(0) = \frac{0}{\cos 0} + c = c = 0$$

סך הפונ' היא

$$y = \frac{x}{\cos x}$$

(ב) $y' - 2y = e^{3x}$

זו מד"ר לינארית לא הומוגנית מסדר I. נציב בנוסחה:

$$p(x) = -2$$
$$q(x) = e^{3x}$$

$$y = e^{-\int -2dx} \cdot \left(c + \int e^{3x} \cdot e^{\int -2dx} dx\right) =$$

$$= e^{2x} \cdot \left(c + \int e^{3x} e^{-2x} dx\right) = e^{2x}\left(c + \int e^{x} dx\right) =$$

$$= e^{2x} \cdot (c + e^{x}) = e^{3x} + c \cdot e^{2x}$$

פתרון פרטי:

$$y(0) = e^{3\cdot 0} + c \cdot e^{2\cdot 0} = 0 \rightarrow c = -1$$

$$y = e^{3x} - e^{2x}$$

$y' - 2y = e^{2x}$ (ג)

זו מד"ר לינארית לא הומוגנית מספר I. נציב בנוסחה:

$p(x) = -2 \quad , \quad q(x) = e^{2x}$

$$y = e^{-\int -2dx} \cdot \left(c + \int e^{2x} \cdot e^{\int -2dx} dx\right) =$$

$$= e^{2x} \cdot \left(c + \int 1 dx\right) = e^{2x}(c + x)$$

פתרון פרטי:

$$y(0) = e^{2\cdot 0}(c+0) = 0$$

$$\downarrow$$

$$c = 0$$

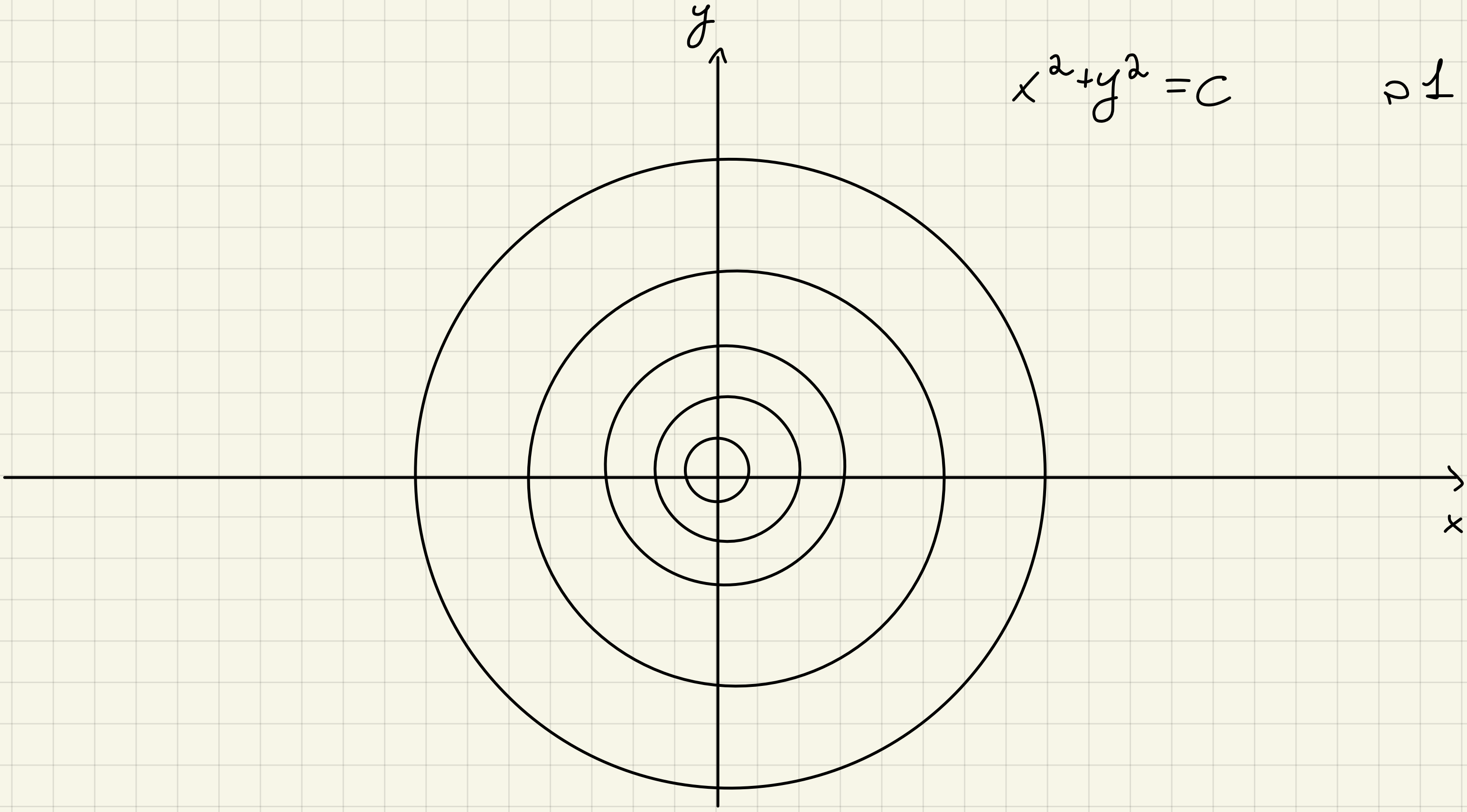
$$\Rightarrow y = xe^{2x}$$

4. למשוואות בסעיפים 1.(ב) ו-2.(א)

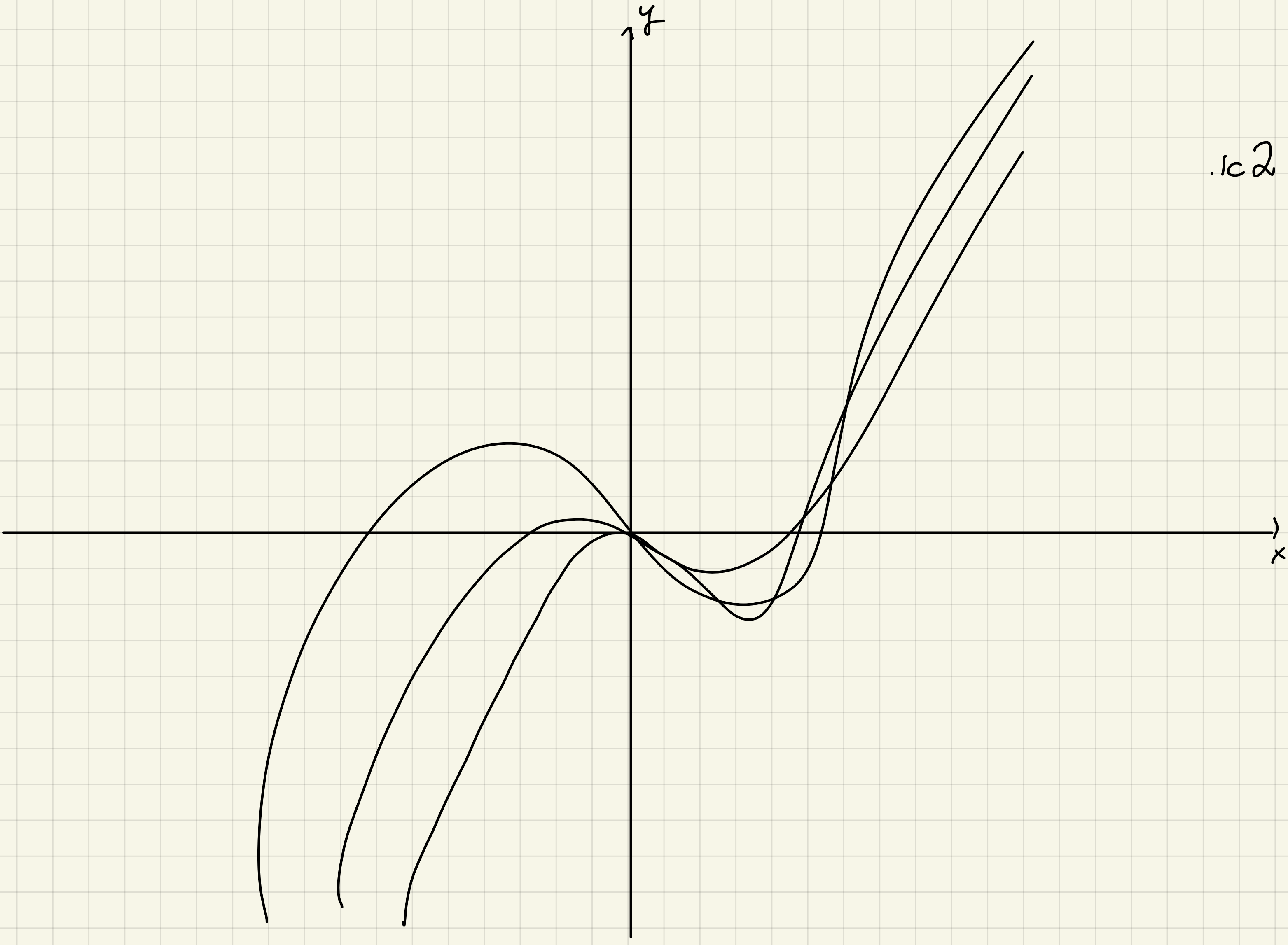
(א) צייר גרף של כל הפתרונות

1ב

$x^2+y^2=C$



2א.



5. מצא את הפתרון לבעייה

$$y' - 2y = e^{ax} \ , \qquad y(0) = 0$$

לכל ערך של הפרמטר a. נכון או לא נכון:

(א) הפתרון רציף כפונקציה של a.

(ב) הפתרון גזיר כפונקציה של a.

אם $a=0$, $y=e^{2x}(x+c)$

$a \neq 0$:

$y=e^{2x}\left(e^{(a-2)x}+c\right)$

רציף וגזיר.

6. אם חומר כימי מסויים מיוצר בקצב קבוע, אבל גם מתפרק בקצב שהוא פרופורציונלי לכמות החומר הקיים, אזי כמות החומר הקיים $C(t)$, כפונקציה של זמן t, מקיימת את המשוואה

$$\frac{dC}{dt} = a - bC$$

(כאשר a, b הם קבועים חיוביים).

(א) מצא את הפתרון של המשוואה, אם נתון שבזמן $t = 0$ כמות החומר הקיים הוא K.

$$C' + b \cdot C = a$$

זו מד"ר לינארית לא הומוגנית מסדר I. נציב בנוסחה:

$$p(t) = b$$
$$q(t) = a$$

$$C = e^{-\int b\,dt} \cdot \left(\tilde{c} + \int a \cdot e^{\int b\,dt} dt\right) =$$

$$= e^{-bt}\left(\tilde{c} + \int a e^{bt} dt\right) = e^{-bt} \cdot \left(\tilde{c} + \frac{a}{b} e^{bt}\right) =$$

$$= \frac{a}{b} + \frac{\tilde{c}}{e^{bt}}$$

$$C(0) = \frac{a}{b} + \frac{\tilde{c}}{e^0} = K$$

$$\tilde{c} = K - \frac{a}{b}$$

$$C(t) = \frac{a}{b} + \frac{K - \frac{a}{b}}{e^{bt}}$$

(ב) הוכח שלכל K,

$$\lim_{t \to \infty} C(t) = \frac{a}{b} \,.$$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{a}{b} + \underbrace{\left(K - \frac{a}{b}\right)}_{\text{קבוע}} \cdot \underbrace{e^{-bt}}_{\to 0} = \frac{a}{b}$$

7. משערים שמספר העכברים בשדה מסויים, $m(t)$, גדל בקצב קבוע בגלל ילודה, אבל שיש גם מספר קבוע של עכברים הנהרגים כל יום על ידי טורפים. הסבר למה המשוואה הדפר-נציאלית

$$\frac{dm}{dt} = rm - s$$

הוא אולי מודל מתאים למצב זה, כאשר r, s הם קבועים. הוכח שאם $m(0) < \frac{s}{r}$ אזי אחרי זמן מסויים כל העכברים יוחסלו. הוכח שאם $m(0) > \frac{s}{r}$ אזי $\lim_{t\to\infty} m(t) = \infty$. למה זה מציע שהמודל אינו כל כך מתאים ?

בהצלחה!