

רעב מ'ירכ



א. כמה מהמספרים בין 1 ל-1000 מתחלקים בדיוק ב-2 מהמספרים 2,5,11?

נסמן ב- $A$  את קבוצת המספרים  $2 \mid 5 \nmid$  (מחלקים ב-2 אך לא ב-5)  
 $|A| = \left\lfloor \frac{1000}{10} \right\rfloor = 100$

ב- $B$  את המחלקים  $2 \mid 11 \nmid$  (מחלקים ב-2 אך לא ב-11)  
 $|B| = \left\lfloor \frac{1000}{22} \right\rfloor = 45$

ג- $C$  את המחלקים  $5 \mid 11 \nmid$  (מחלקים ב-5 אך לא ב-11)  
 $|C| = \left\lfloor \frac{1000}{55} \right\rfloor = 18$

עפי' נוסחת ההכלה וההדחה

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$|A \cup B \cup C| = 100 + 45 + 18 - \left| \begin{array}{l} 5 \mid 2 \nmid \\ 11 \mid 2 \nmid \end{array} \right| - \left| \begin{array}{l} 2 \mid 5 \nmid \\ 11 \mid 5 \nmid \end{array} \right| - \left| \begin{array}{l} 2 \mid 5 \nmid \\ 11 \mid 5 \nmid \end{array} \right|$$

$$- \left| \begin{array}{l} 11 \mid 2 \nmid \\ 11 \mid 5 \nmid \end{array} \right| + \left| \begin{array}{l} 5 \mid 2 \nmid \\ 11 \mid 5 \nmid \end{array} \right|, \left| \begin{array}{l} 5 \mid 2 \nmid \\ 11 \mid 2 \nmid \end{array} \right|$$

$$|A \cup B \cup C| = 163 - 2 \left| \begin{array}{l} 11, 5, 2 \end{array} \right|$$

$$|A \cup B \cup C| = 163 - 2 \cdot \left| \begin{array}{l} 110 \end{array} \right|$$

$$|A \cup B \cup C| = 163 - 2 \cdot \left\lfloor \frac{1000}{110} \right\rfloor = 163 - 2 \cdot 9$$

$$|A \cup B \cup C| = 145$$

אבל אנחנו לא חוצים את האיחוד, אז נחסר מהתוצאה את  $|A \cap B \cap C|$  ונקבל כך את המבוקש

$$t = |A \cup B \cup C| - |A \cap B \cap C| = 145 - 9$$

$$t = 136$$

ב. כמה מספרים בין 1 ל-1000 לא מתחלקים באף אחד מ-3, 4, 6, 22?

לכיוון כמה מתחלקים כלפינו אחד מהם ויחסר 1000.

נסמן ב- $A$  קבוצת מתחלקים ב-4

ב- $B$  מתחלקים ב-6

ב- $C$  מתחלקים ב-22

נחפש טור  $|A \cup B \cup C|$

$$|A| = \left\lfloor \frac{1000}{4} \right\rfloor = 250$$

$$|B| = \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor = 166$$

$$|C| = \left\lfloor \frac{1000}{22} \right\rfloor = 45$$

$$|A \cap B| = \left| \text{מתחלקים ב-12} \right| = \left\lfloor \frac{1000}{12} \right\rfloor = 83 \quad \text{כי } \text{lcm}(4, 6) = 12$$

$$|A \cap C| = \left| \text{מתחלקים ב-44} \right| = \left\lfloor \frac{1000}{44} \right\rfloor = 22 \quad \text{כי } \text{lcm}(4, 22) = 44$$

$$|B \cap C| = \left| \text{מתחלקים ב-66} \right| = \left\lfloor \frac{1000}{66} \right\rfloor = 15 \quad \text{כי } \text{lcm}(6, 22) = 66$$

$$|A \cap B \cap C| = \left| \text{מתחלקים ב-132} \right| = \left\lfloor \frac{1000}{132} \right\rfloor = 7 \quad \text{כי } \text{lcm}(4, 6, 22) = 132$$

דפי עקרון הכלכלה וההפחה:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$|A \cup B \cup C| = 250 + 166 + 45 - 83 - 22 - 15 + 7 = 348$$

כמות המספרים שכל אחד מהם:  $t = 1000 - 348$

$$t = 652$$

## תרגיל 1.2. בכד 2 כדורים אדומים, 3 צהובים ו-4 ירוקים

א. שולפים 3 כדורים ללא החזרה. מה ההסתברות כי כל הכדורים הינם באותו צבע?

נסמן ב  $A$  איר האקרה שכלם אדומים, ב  $B$  כלם צהובים  
!  $C$  כלם ירוקים

לפי נתיבי אפוא'ס

$$P(A) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{0}{7} = 0$$

$$P(B) = \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{84}$$

$$P(C) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{21}$$

כלם  
צהובים  
הסתברות

ההסתברות שכלם אותה צבע זה איחוד המקרים

אלו האירועות זרים, לא יתכן שכלם אדומים וגם כלם  
ירוקים ולכן הם

$$P(\text{כלם אותה צבע}) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{1}{21} + \frac{1}{84}$$

$$P(\text{כלם אותה צבע}) = \frac{5}{84}$$

ב. שולפים 3 כדורים ללא החזרה. מה ההסתברות לקבל רמזור מושלם, כלומר: אדום, לאחר מכן צהוב, לאחר מכן ירוק?

ע"פ כחל המכשלה:

$$P(\text{רמזור מושלם}) = \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{1}{21}$$

ג. שני הכדורים הראשונים הינם באותו צבע - ואילו השלישי בצבע שונה?

A - שני'ם ראשונים אפורים

B - שני'ם ראשונים צהובים

C - שני'ם ראשונים ירוקים

$$\left. \begin{aligned} P(A) &= \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{7} = \frac{1}{36} \\ P(B) &= \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{6}{7} = \frac{1}{14} \\ P(C) &= \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{42} \end{aligned} \right\}$$

כל  
המכסלה

תגובות, שם, זרים, לכן ההסתברות שאחד מהם יזכה  
היא סכום ההסתברות

$$P(\text{שני'ם אותם צבע שלשי}) = \frac{1}{36} + \frac{1}{14} + \frac{5}{42} = \frac{55}{252}$$



ד. חזרו על הסעיפים הקודמים, כאשר הפעם שולפים כל כדור, רושמים את תוצאת ההוצאה ולאחר מכן מחזירים אותו לכד.

A אדום

B צהוב

C ירוק

10- כולם אותו צבע

פ. כל המכסלה:

$$P(A) = \left(\frac{2}{9}\right)^3 = \frac{8}{729}$$

$$P(C) = \left(\frac{4}{9}\right)^3 = \frac{64}{729}$$

$$P(B) = \left(\frac{3}{9}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

טווחות זרים:

$$P(\text{כולם אותו צבע}) = \frac{8}{729} + \frac{1}{27} + \frac{64}{729} = \frac{11}{81}$$

$$P(\text{רשומות}) = \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{243}$$

כל המכסלה

ה-

11- A - שני ראשונים אדומים  
B - שני ראשונים צהובים  
C - שני ראשונים ירוקים

$$P(A) = \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{9} = \frac{28}{729}$$

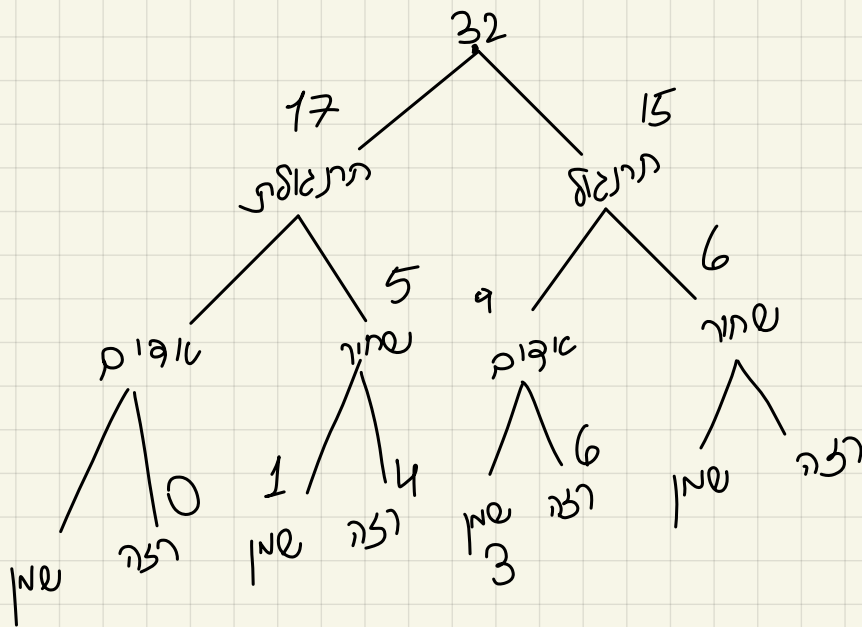
$$P(B) = \frac{3}{9} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{9} = \frac{2}{27}$$

$$P(C) = \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{9} = \frac{80}{729}$$

טווחות זרים:

$$P(\text{שני ראשונים שונים}) = \frac{28}{729} + \frac{2}{27} + \frac{80}{729} = \frac{2}{9}$$

**תרגיל 1.3.** דוד משה מגדל תרנגולות. כל עוף ניתן לתאר בכמה אופנים: רזה או שמן, שחור או אדום, תרנגול או תרנגולת. 4 הן תרנגולות שחורות רזות, 17 הן תרנגולות, 14 הם עופות רזים, 4 הן תרנגולות רזות, 11 הם עופות שחורים, 5 הם תרנגולות שחורות, 3 הם תרנגולים אדומים שמנים, 17 הם עופות רזים או שחורים. כמה עופות סה"כ יש לדוד משה?



אסביר את צירף בניית העץ:

4 הן תרנגולות שחורות רזות, ! 4 הן תרנגולות רזות. עכשיו תרנגולות אדומות רזות.

5 הן תרנגולות שחורות שמנים, 4 הן תרנגולות שחורות רזות. עכשיו יש תרנגולת שתורה שמנה אחת.

11 סופית שמן ויצי 5 הם תרנגולות שחורות, עכשיו יש 6 תרנגולות שחורות.

17 הם סופית רזים או שמנים. מכאן התרנגולות אדומות רזות או שמנים (6) או שמנים (5). מכאן התרנגולות יש את השחורים (6) אדומים רזים  $(17 - 6 - 5 = 6)$

יש 3 תרנגולות אדומות שמנים ! 6 תרנגולות אדומות רזות. עכשיו יש 9 תרנגולות אדומות. יש 9 תרנגולות אדומות או שמנים 6 תרנגולות שחורות עכשיו יש 15 תרנגולות. יש 15 תרנגולות ! 17 תרנגולות עכשיו

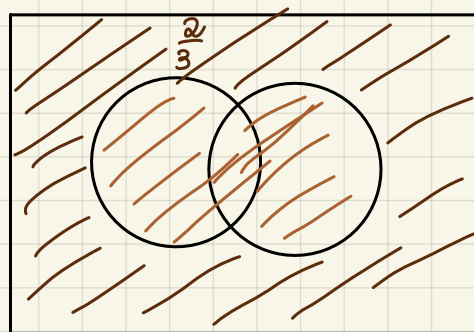
סה"כ 32 אופנים

א. תהיו  $A, B$  שני מאורעות. נניח שהסתברות לכך שלא  $A$  ולא  $B$  מתרחשים הינה  $2/3$ .  
מה ההסתברות לכך שלפחות אחד מהם מתרחש?

$$P(A \cup B) = 1 - P((A \cup B)^c) =$$

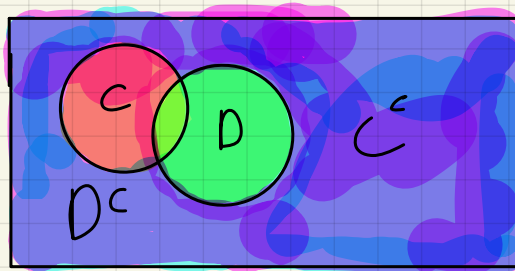
$$= 1 - P(A^c \cap B^c) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

↑  
דפ'  
צד  
מורח



ב. היו  $C, D$  שני מאורעות כך ש  $P(C) = 0.25, P(D) = 0.45, P(C \cap D) = 0.1$  מהו  $P(C^c \cup D)$ ?

$$P(C^c) = 1 - P(C) = 0.75$$



$$P(C^c \cup D) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{התהיה והבחה}}}{P(C^c)} + P(D) - P(C^c \cap D) =$$



$$= 0.75 + 0.45 - (P(D) - P(C \cap D)) =$$

$$= 1.2 - (0.45 - 0.1) = 0.85$$

**תרגיל 1.5.** אדם מן היישוב נכנס ביום הבחירות מאחורי הפרגוד, בוחר פתק כרצונו, ומצביע. הסטטיסטיקאי שלנו, לעומת זאת, רוצה להצביע לאחת משתי מפלגות בהסתברות  $1/2$ , בלי לדעת לאיזו מהן הצביע. הוא לוקח שני פתקים, אחד מכל סוג, בוחר ביניהם בעיניים עצומות באקראי, מטיל את הפתק שבחר, ומשמיד את השני. בדומה לזה, לו היה רוצה להצביע

1

למפלגה אחת מתוך שתיים בהסתברות  $1/3$ , הוא היה לוקח שלושה פתקים וממשיך באותו אופן.

אם כך, אם הסטטיסטיקאי רוצה להצביע למפלגה ב' בהסתברות  $1/4$ , הוא יכול לעשות זאת בקלות באמצעות ארבעה פתקים. הציעו שיטה שבה הוא יוכל להצביע למפלגה ב' בהסתברות  $1/4$ , תוך שימוש בשלושה פתקים בלבד. (בשאלה זו, ובכל השאלות שיבואו בעקבותיה, אין שום מקום או צורך בהתחכמות לא-מתמטית כגון העזרות בחבר, במצלמת לייזר, במאזניים, בקריעת אזני הפתקים וכדומה. כן מותרת הטלת מטבע).

הטופן שבו ניתן לעשות זאת הוא הבא:  
לקחת 3 פתקים, שניים של מפלגה א וואחד של מפלגה ב.  
אחד מהפתקים של מפלגה א להניח בצד.  
כעת הוא צריך לבחור אחד מבין שני הפתקים שאובלו,  
לשאר מן לבחור אחד מבין: הפתק שבו קורס ובין  
הפתק שהותיר בצד. את הפתק שנבחר יכניס למטלה

$$P(\text{לחבר ב לבחור ב}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

↑
כאשר

לחבר ב לבחור ב
המכפלה

אין
הבדל שם

בין
אין