תרגיל 2.1. n משפחות המורכבות מזוג נשוי וילד אחד שרוצות לשבת בשורה הראשונה במחזמר בה יש $3n$ מקומות בדיוק.

א. בכמה דרכים ניתן להושיב אותן כך שכל משפחה תשב ביחד?

כדי לפתור זאת נתייחס לכל משפחה כגוש של 3 אנשים,
ואז נתייחס גם לאופציה של הסידורים השונים בכל משפחה.
יש $n!$ סידורים לגושים, ולכל גוש $3!$ סידורים שונים.

לכן יש $n!\cdot(3!)^n$ אפשרויות

ב. משפחת כהן ומשפחת כוהן מעדיפות לא לשבת בצמוד זו לזו. כמה אפשרויות יש כך שכולם יהיו עדיין מרוצים?

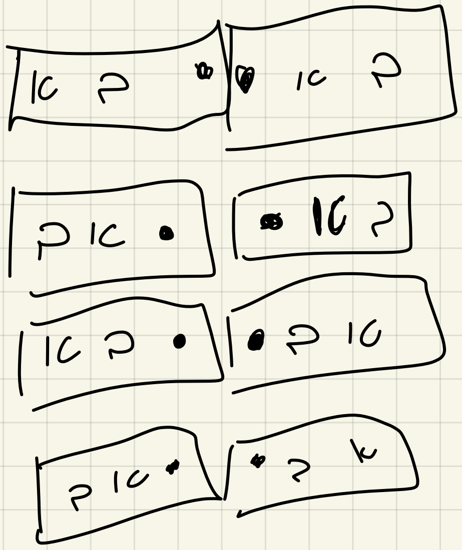
נסתכל על כמות הסידורים הקיימים כאשר שתי המשפחות יושבות אחת ליד השניה: נתייחס לשתי המשפחות כגוש אחד גדול.
סידור $n-2$ הגושים האחרים הוא: $(n-2)\cdot(3!)^{n-2}$ כמו קודם.
וסידור הגוש הגדול, הוא יכול להיות ב $n-1$ מקומות ובכל מקום יתכן שכוהן מימין לכהן ויתכן שכהן מימין לכוהן, וגם הסדר הפנימי של כל משפחה הוא שוב $3!$ לכן מס' סידורים לא טובים:

$$2\cdot(n-2)!\,(3!)^{n-2}\cdot(n-1)\cdot(3!)^2 =$$
$$= 2(n-2)!\cdot(3!)^n\cdot(n-1)$$

לכן מס' הסידורים הטובים:

$$n!\,(3!)^n - 2(n-2)!\,(3!)^n\cdot(n-1)$$

ג. לילד של משפחת כהן לא איכפת לשבת ליד הילד של משפחת כוהן. כמה אפשרויות יש כעת?



$\times 2$

אם
משפח
מימין
ומי
משמאל

יש 8 סידורים שהיו לנו בבדיקה וכרגע הם מספר.
4 מכל 32.

סך מס' הסידורים הבסיסיים כפול הנוני:

$$2\cdot(n-2)!\cdot(3!)^{n-2}\cdot(n-1)\cdot\left((3!)^2-4\right)=$$

$$=2\cdot 6^{n-2}\cdot(n-2)!\cdot(n-1)\cdot 32$$

סך מס' הסידורים התקינים:

$$n!\cdot 6^n-2\cdot 6^{n-2}\cdot(n-2)!\cdot(n-1)\cdot 32$$

תרגיל 2.2.

א. כמה מילים שונות ניתן להרכיב מהאותיות של מילה massachussets? כאשר כל סידור של אותיות המשתמש בכל אותיות הוא מילה חוקית. כך למשל masssssachuet היא מילה חוקית, אבל לא mass.

נשים לב שבמילה יש 13 אותיות. כלומר מס' המילים שניתן לייצר הוא $13!$. אבל ספרנו המון מילים מספר פעמים. מכיוון שאת האות a יש פעמיים, ואת s 5 פעמים, הסידורים השונים שלהם לא יוצרים מילה חדשה

לכן מספר המילים הוא

$$\frac{13!}{2!5!} = 25,945,920$$

ב. בהנתן שכל המילים מוגרלות באותה ההסתברות, חשב הסתברות לכך שאף אחד מהצירופים as set, tech, לא יפיע במילה המוגרלת.

נסמן:

A - התקבלה מילה שמכילה as

B - התקבלה מילה שמכילה set

C - התקבלה מילה שמכילה tech

אנחנו צריכים $P(A^c \cap B^c \cap C^c)$

לפי דה-מורגן:

$$P(A^c \cap B^c \cap C^c) = 1 - P(A \cup B \cup C) =$$

נוסחת ההכלה והדחה

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) -$$
$$- P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

נחשב כל ביטוי:

מס' המילים שמכילות as: נסמן as בתור "בלוק"

ולכן:

$$\text{כמות המילים} = \frac{12!}{4!}$$

כי יש 12 בלוקים

ומחלקים ב 4! כי יש 4 "S" שניתן להחליף

אבל! עשינו ספירה כפולה של מילים שיש להם את הבלוק as פעמיים

כמה כאלה יש?:

כמות הבלוקים

$$\frac{11!}{2!\cdot 3!}$$

סידורים שונים של הבלוקים

כי יש עוד 3 "S"

$$P(A)=\frac{\frac{12!}{4!}-\frac{11!}{2!\cdot 3!}}{\frac{13!}{2!5!}}=\frac{25}{39}$$

אכן

מילים המכילות Set: באופן דומה,

כמות הבלוקים

$$\frac{11!}{2!4!}$$

עבור סידורים של "a"

סידורים של "S"

$$P(B)=\frac{\frac{11!}{2!4!}}{\frac{13!}{2!5!}}=\frac{5}{156}$$

אכן

מכפלה טיות המילה tech: שוב,

כמות המילים $= \frac{10!}{5!2!}$

$$P(C) = \frac{\frac{10!}{5!2!}}{\frac{13!}{2!5!}} = \frac{1}{176}$$

$P(A \cap C) = 0$, מכיוון שאי אפשר גם set וגם tech,
יש במילה רק e אחת.

נמצא $P(A \cap B)$:

מס' בלוקים

כמות המילים $= \frac{10!}{3!} + \frac{10!}{4!} - \frac{9!}{3!} - \frac{9!}{2!2!} = 604800$

סידור פנימי של S

אם as set! מחוברות, כמו aset

מורידים ספירות כפולות

$$P(A \cap B) = \frac{604800}{25945920} = \frac{10}{429}$$

$P(B\cap C)$:

מתוך מילים עם חשיבות לסדר

מילים שנספרו פעמיים

$$P(B\cap C)=\frac{\frac{9!}{4!}-\frac{8!}{3!2!}}{25945920}=$$

$$=\frac{7}{15444}$$

$P(A\cap B\cap C)=0$ בפרט כי $P(A\cap C)=0$ (יש רק ש אחת)

לסיכום, קיבלנו:

$$P(A^c\cap B^c\cap C^c)=1-\frac{5}{156}-\frac{25}{39}-\frac{1}{1716}+\frac{10}{429}+\frac{7}{15444}=\frac{5407}{15444}$$

3. א. נסמן את הכיתות: A_1, A_2, A_3, A_4

כשבוחרים סטודנטים ל-A_1, יש 60 לבחור מהם

לכן זה $\binom{60}{15}$

ב: A_2 יש רק 45 לכן $\binom{45}{15}$

ב: ב-A_3, $\binom{30}{15}$

ב: A_4 $\binom{15}{15}=1$

לכן

$$\Omega = \binom{60}{15}\binom{45}{15}\binom{30}{15} =$$

הגדרת choose

$$= \frac{60!\cdot\cancel{45!}\cdot\cancel{30!}}{15!\cdot\cancel{45!}\cdot 15!\cdot\cancel{30!}\cdot 15!\cdot 15!} = \frac{60!}{(15!)^4}$$

ב. נוכיח אין קבוצה גדולה מ 16 או קטנה מ 14
נב"ש יש i כך ש $A_i \leq 13$, בה"כ $i=4$

לפי התנאי

$\forall i\leq 3: A_i \leq 15$

ואז סכום הכיתות הוא לכל היותר 58, בסתירה.

באופן דומה נב"ש $A_4 \geq 17$: לפי התנאי:

$\forall i\leq 3: A_i \geq 15$

ואז סכום הכיתות לכל הפחות 62, בסתירה.

לכן $\forall i: 14 \leq A_i \leq 16$

נפריד למקרים

א: יש קבוצה 1 בגודל 14: שאר הכיתות: 15,15,16

הכיתות ממספרות לכן יש חשיבות לסדר, לכן מס' הסידורים

הוא באופן דומה ל ב: $\frac{4!}{2!}=12$

ב: שתי קבוצות מגודל 14: שאר הכיתות: 16,16

מס' הסידורים כך שיש חשיבות לסדר הוא:

$\frac{4!}{2!\,2!} = 6$

ג. לא יתכן מצב של 3 קבוצות מלאה כללות 14

תלמידים תוך שמירה על כל שאר התנאים.

לכן מספר החלוקות:

$$\frac{60!}{(15!)^4} + 12 \cdot \frac{60!}{(15!)^4} + 6 \cdot \frac{60!}{(15!)^4}$$

ג: אם נסמן ב a_i את כמות התלמידים בתרגול ה i, נקבל שמה שמחפשים הוא לא יותר מאשר

$a_i \geq 2$

כמות הפתרונות למשוואה:

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 60$ כאשר

$a_i \geq 2$

אם נציב לכל i, $b_i = a_i - 2$ נקבל שמה שמחפשים הוא למעשה כמות הפתרונות האי-שליליים של:

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 52$$

ולזה יש נוסחה מההרצאה:

התשובה: $\binom{52+4-1}{4-1} = \binom{55}{3} = 26235$

.4

לשכות גרב ימין- A $P(A)=0.2$

לשכות גרב שמאל- B $P(B)=0.2$

לשכות נעל ימין- C $P(C)=0.1$

לשכות נעל שמאל- D $P(D)=0.1$

א. נרצה למצוא חסם עליון ל- : $P(A\cup B\cup C\cup D)$

ידוע ש: $P(A\cup B\cup C\cup D)\leq P(A)+P(B)+P(C)+P(D)$

לכן $P(A\cup B\cup C\cup D)\leq 2\cdot 0.2+2\cdot 0.1$

$P(A\cup B\cup C\cup D)\leq \frac{3}{5}=0.6$

ב. לשכות עניבה - E $P(E)=0.3$

באופן דומה לחישובים המתוארים לעיל,

$P(A\cup B\cup C\cup D\cup E)\leq 0.6+P(E)=0.6+0.3$

$P(A\cup B\cup C\cup D\cup E)\leq \frac{9}{10}=0.9$

5 .א

$$\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i}x^{i-1} = \sum_{i=1}^{n} i\cdot\frac{n!}{i!\cdot(n-i)!}\cdot x^{i-1} =$$

נשנה את הספים ל $i=0$ ונשנה בהתאם.

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{n!}{(i-1)!\cdot(n-i)!}x^{i-1} = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{n!\cdot x^{i}}{i!\cdot(n-(i+1))} = n\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(n-1)!\,x^{i}}{i!\,(n-1-i)!} =$$

$$= n\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}x^{i} = n(x+1)^{n-1}$$

נציב $x=1$ ונקבל

$$\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} = n\cdot 2^{n-1}$$

ב.

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}\binom{n}{i}x^{i+1} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}\cdot\frac{n!}{i!\cdot(n-i)!}\cdot x^{i+1} =$$

נפתח את $\binom{n}{i}$ נכפיל את השברים

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{(i+1)!(n-i)!}\cdot x^{i+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} \frac{(n+1)!}{(i+1)!\cdot(n+1-(i+1))}\cdot x^{i+1} =$$

נוציא $\frac{1}{n+1}$ קבוע   הגדרה של choose

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i+1}x^{i+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n+1}{i}x^{i} = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n+1}\left[\binom{n+1}{i}x^{i} - \binom{n+1}{0}x^{0}\right] =$$

נשלים ל $i=0$ ונחסר מה שהוספנו

$$= \frac{(x+1)^{n+1}-1}{n+1}$$

שימוש בנתון

נציב $x=1$ ונקבל

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}\binom{n}{i} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

ג.

הכפלה ב -1 קבוע

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\cdot\frac{1}{i+1}\binom{n}{i} = -\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}\cdot\binom{n}{i}(-1)^{i+1} =$$

נציב הצבה של $x=-1$ בסעיף ב

$$= \frac{(-1+1)^{n+1}-1}{n+1} = -\frac{1}{n+1}$$

תרגיל 2.6.

א. חשב/י $\sum_{k=0}^{n} 3^k$.

זה בעצם טור הנדסי (שאינו מתכנס). ויש לנו נוסחה לכך:

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{3^0 \cdot (3^{n+1}-1)}{3-1} = \boxed{\frac{3^{n+1}-1}{2}}$$

כמות איברים

איבר ראשון

הנוסחה:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}$$

$$\sum_{k=0}^{20} \binom{100}{k}\binom{40}{20-k} = \binom{140}{20}$$

ב.

נוכיח הוכחה קומבינטורית:

נסמן צד ימין A וצד שמאל B.

A - כמות האפשרויות שיש לבחור קבוצות של 20 כדורים שונים

מתוך 140.

נפצל את 140 הכדורים לקבוצה של 100 כדורים, ולקבוצה של 40 כדורים

לבחור 20 כדורים משמע לבחור K כדורים מקבוצה אחת ו-20-K מהקבוצה השנייה. אילו היינו קובעים K ספציפי,

הביטוי של לבחור את הכדורים הוא $\binom{100}{k}\binom{40}{20-k}$

אך אנו לא מחפשים k ספציפי. כל k בין 0 ל-20 יתקבל

וכל k כזה יניב בחירות שונות

לכן סה"כ לבחור 20 כדורים מתוך 140 זה שקול ל:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{100}{k}\binom{40}{20-k}$$

$\blacksquare$