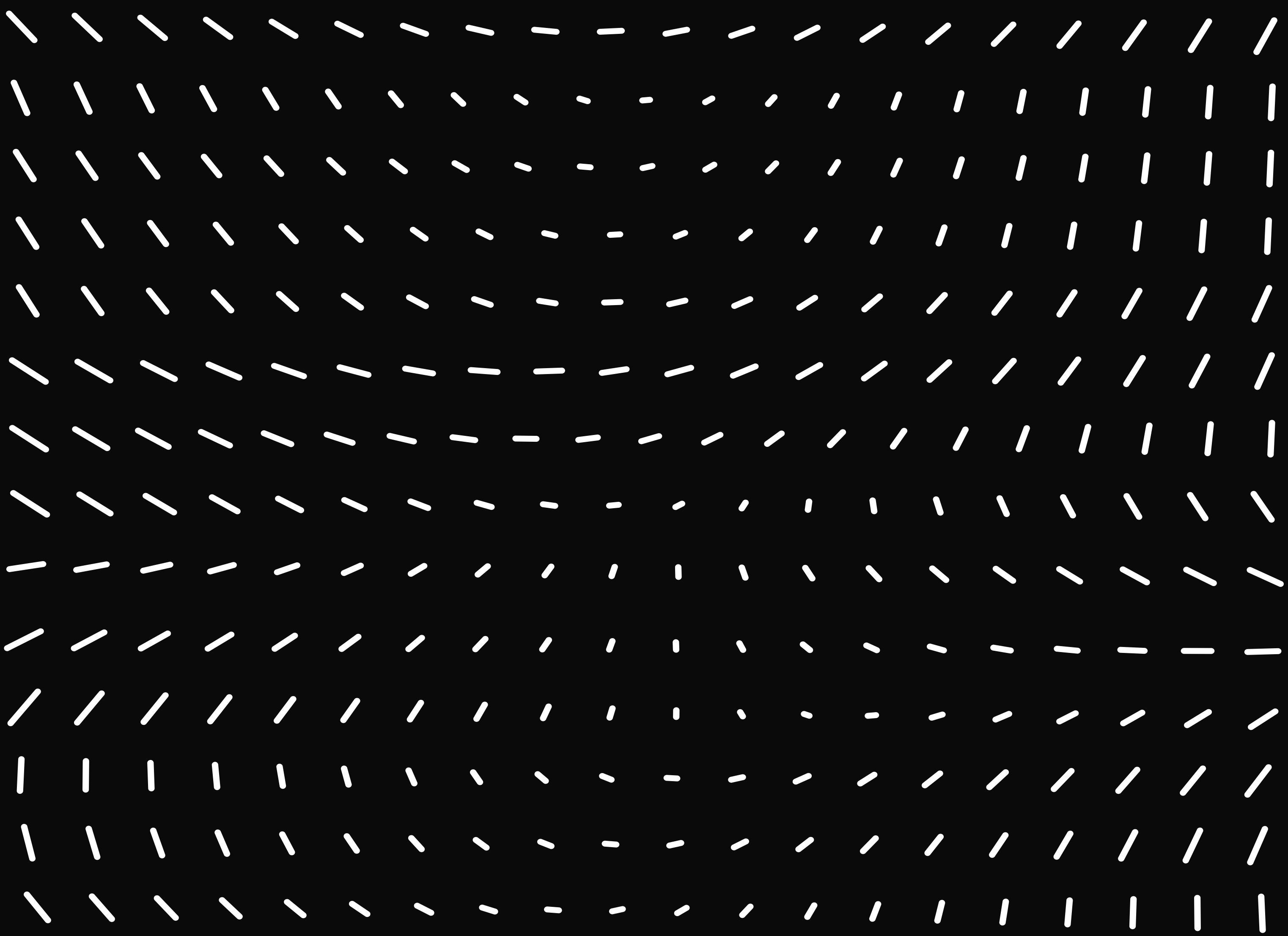

1. ע"פ א"ש צ'בישב

$$\frac{Var(X)}{c^2} \geq P(|X-E(X)| \geq c)$$

ולכן

$$P(|X-208| \geq 2) \leq \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

וסה"כ

$$P(207 \leq X \leq 209) \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

2. א, נשים לב ש. $X \sim U(0,2)$

ולכן:

$* \quad E(X) = \frac{1}{2}(0+2) = 1$

$** \quad Var(X) = \frac{1}{12}(2-0)^2 = \frac{1}{3}$

$$\downarrow$$

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$P\left(X-1 \geq \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = P\left(X \geq \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}}\right) = 1 - F_X(2.154) = 1-1 = 0$$

$2.154 > 2$

$$P\left(X-1 \leq -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = P\left(X \leq \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}\right) = F_X(-0.15) = 0$$

סה"כ 0.

ה. נראה ש $X \sim Exp(2)$ ולכן

$* \quad E(X) = \frac{1}{2}$

$** \quad Var(X) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

$$\downarrow$$

$$S = \frac{1}{2}$$

לכן צריך למצוא $P(|X-\frac{1}{2}| \geq 1)$

$$P(X-\frac{1}{2} \geq 1) = P(X \geq 1.5) = 1 - F_X(1.5) = 1-(1-e^{-2 \cdot 1.5}) =$$

$$= 1 - 1 + e^{-3} = e^{-3}$$

$$P(X - \frac{1}{2} \leq -1) = F_X(-\frac{1}{2}) = 0$$

ידוע x אי-שלילי.

סה"כ

$$P(|X-\frac{1}{2}| \geq 1) = e^{-3}$$

ג.

$$E(X) = \sum_{x} x \cdot P(X=x) = 1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 0 \rightarrow E^2(X) = 0$$

$$E(X^2) = \sum_{x} x^2 P(X=x) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

לכן

$$Var(X) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$S(X) = 1$$

צריך למצוא

$$P(|X| \geq 2)$$

אבל ידוע לנו ש

$$\forall \omega \in \Omega : X(\omega) \in \{1, -1\}$$

$$\Downarrow$$

$$|X(\omega)| \leq 1 < 2$$

ולכן:

$$\underline{\underline{P(|X| \leq 2) = 0}}$$

כדרוש.

.3

$$E(X)=\sum_a a\cdot P(X=a)=\frac{3}{4}\cdot 0+\frac{1}{8}\cdot 4+\frac{1}{8}\cdot(-4)=0$$

$$E(X^2)=\sum_a a^2 P(X=a)=0^2\cdot\frac{3}{4}+4^2\cdot\frac{1}{8}+(-4)^2\cdot\frac{1}{8}=4$$

$$Var(X)=4-0=4$$

$$\sigma(x)=\sqrt{4}=2$$

$$P(|X|\geq 4)=P(X=4)+P(X=-4)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$$ צריך

סכום

3א. יהי $Y=(X-\mu)^4$ ויהי $c\in\mathbb{R}$ חיובי:

לפי מרקוב

$$P(Y\geq c^4)\leq\frac{E(Y)}{c^4}$$

$$\Rightarrow P((X-\mu)^4\geq c^4)\leq\frac{E((X-\mu)^4)}{c^4}$$

$$\Longleftrightarrow P(|X-\mu|\geq c)\leq\frac{E((X-\mu)^4)}{c^4}$$

כדרוש.

ג. נגדיר $Y=e^{tX}$ $(t>0)$

לפי מרקוב $P(Y\geq e^{ta})\leq \frac{E(Y)}{e^{ta}}$

$$\Rightarrow P(e^{tX}\geq e^{ta})\leq \frac{E(e^{tX})}{e^{ta}} \Rightarrow P(tX\geq ta)\leq \frac{M(t)}{e^{ta}}$$

$$\Rightarrow P(X\geq a)\leq M(t)\cdot e^{-at}$$

כדרוש.

4 .א

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}12xy(1-y), & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$$

נחשב:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy=\int_0^1 12xy(1-y)\,dy=\int_0^1 12xy\,dy-\int_0^1 12xy^2\,dy=$$

$$=6xy^2\Big|_0^1-4xy^3\Big|_0^1=6x-4x=2x$$

באופן דומה

$$f_Y(y)=12y(1-y)\int_0^1 x\,dx=12y(1-y)\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=6y(1-y)$$

$$f_X(x)\cdot f_Y(y)=12x(1-y)=f_{XY}(x,y)$$

לכן X,Y ב"ת!

ב.

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{2}(x^2+y^2) & , 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\\ 0 & , \text{אחרת}\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{3}{2}(x^2+y^2)dy=\frac{3}{2}\int_0^1 x^2dy+\frac{3}{2}\int_0^1 y^2dy=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot x^2y\Big|_0^1+\frac{3}{2}\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_0^1=\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}$$

עבור f_Y לפי סימטריה לחלוטין ונקבל

$$f_Y(y)=\frac{3}{2}y^2+\frac{1}{2}$$

נציב $x=y=0$ ונקבל

$$f_{XY}(0,0)=0$$

$$f_X(0)=\frac{1}{2}\qquad f_Y(0)=\frac{1}{2}$$

$$f_X(0)\cdot f_Y(0)=\frac{1}{4}\neq 0=f_{XY}(0,0)$$

לכן X,Y תלויים.

ג.

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_0^1 \frac{1}{2}\,dy=\frac{y}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

$$f_Y(y)=\int_0^2 \frac{1}{2}\,dx=\frac{x}{2}\Big|_0^2=1$$

$$f_X(x)\cdot f_Y(y)=1\cdot\frac{1}{2}=f_{XY}(x,y)$$ אכן

X,Y ב״ת

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 \le y \le x \le 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_0^x 2\,dy = 2y\Big|_0^x = 2x$$

$$f_Y(y) = \int_y^1 2\,dx = 2x\Big|_y^1 = 2-2y$$

עבור $X=Y=0$ נקבל

$$f_{XY}(0,0) = 2$$

$$f_X(0)\cdot f_Y(0) = 0$$

לכן X,Y תלויים

ד.

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & 0\le x,\ 0\le y \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_0^{\infty} e^{-(x+y)}\,dy=\lim_{M\to\infty}\int_0^{M} e^{-(x+y)}\,dy$$

$$\int_0^{M} e^{-(x+y)}\,dy = e^{-x}\int_0^{M} e^{-y}\,dy = e^{-x}\cdot\left(-e^{-y}\right)\Big|_0^{M} =$$

$$= e^{-x}\cdot\left(-e^{-M}+1\right)$$

$$f_X(x)=\lim_{M\to\infty} e^{-x}\left(-e^{-M}+1\right)= e^{-x}$$

$f_Y(y)=e^{-y}$ באופן זהה לחלוטין.

סה"כ

$$f_X(x)\cdot f_Y(y)=e^{-x}e^{-y}=e^{-(x+y)}=f_{XY}(x,y)$$

לכן

X,Y ב"ת

$\square$