O S O
G T G T
5 E 5
N O N O
O S O
G T G T
5 E 5
N O N O
O S O
G T G T
5 E 5

תרגיל 4.1. * משתנה מקרי הוא "בינארי" אם הוא מקבל בדיוק שני ערכים, ו"ברנולי" אם הוא מקבל רק את הערכים 0,1.

א. כל משתנה בינארי הוא מהצורה aX+b כאשר X ברנולי.

יהי משתנה בינארי Y המקבל את הערכים α, β.

ויהי משתנה ברנולי X, נגדיר אותו כך:

$$\forall \omega \in \Omega: X(\omega) = \begin{cases} 1, & Y(\omega) = \alpha \\ 0, & Y(\omega) = \beta \end{cases}$$

נבחר
$$a = \alpha - \beta$$
$$b = \beta$$

וקיבלנו

$$\forall \omega \in \Omega: (aX + b)(\omega) \begin{cases} (\alpha - \beta) \cdot 1 + \beta, & Y(\omega) = \alpha \\ (\alpha - \beta) \cdot 0 + \beta, & Y(\omega) = \beta \end{cases}$$

כלומר

$$\forall \omega \in \Omega: (aX + b)(\omega) = \begin{cases} \alpha, & Y(\omega) = \alpha \\ \beta, & Y(\omega) = \beta \end{cases} = Y(\omega)$$

$\square$

ב. כל משתנה מקרי המקבל מספר סופי של ערכים הוא צירוף לינארי של משתנים בינאריים.

יהי X משתנה מקרי המקבל את הערכים $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

לכל $1 \le i \le n$ נגדיר

$$\forall \omega \in \Omega : Y_i(\omega) = \begin{cases} \alpha_i & , X(\omega) = \alpha_i \\ 0 & , \text{אחרת} \end{cases}$$

ונקבל

$$\forall \omega \in \Omega : (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n)(\omega) = \begin{cases} \alpha_1 & , X(\omega) = \alpha_1 \\ \vdots & \\ \alpha_n & , X(\omega) = \alpha_n \end{cases} = X(\omega)$$

$\square$

ג. *הראו שמשתנה המקבל 3 ערכים אינו בהכרח צירוף לינארי של שני משתנים בינאריים בלתי תלויים.

יהי X מ"מ המקבל את הערכים $\{0,1,4\}$
ויהיו שני מ"מ בינאריים ב"ת: Y_1, המקבל את הערכים $\{\alpha_1,\alpha_2\}$
Y_2 המקבל את הערכים $\{\beta_1,\beta_2\}$!

נב"ש X צ"ל שלהם. (ניתן לכתוב ללא הקבועים, אם היו קבועים, נכפל את ערכי המ"מ בקבוע): $X = Y_1 + Y_2$

מכיוון ש Y_1, Y_2 ב"ת כל התוצאות אפשריות של סכום שני אברים שלהם יכולה להתקבל. כלומר X מקבל את הערכים
$\{\alpha_1+\beta_1, \alpha_1+\beta_2, \alpha_2+\beta_1, \alpha_2+\beta_2\}$
אבל X מקבל רק שלושה ערכים. לכן שניים מהביטויים הללו שווים. נפריד למקרים:

<u>מקרה א</u>: $\alpha_1+\beta_1=\alpha_1+\beta_2 \Rightarrow \beta_1=\beta_2$ ואז, נקבל ש X מקבל רק את הערכים $\{\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_1\}$, ולא 3 ערכים כנדרש.
סתירה.

<u>מקרה ב</u>: $\alpha_1+\beta_1=\alpha_2+\beta_1 \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2$. שוב נקבל ש X מקבל רק 2 ערכים סתירה.

<u>מקרה ג</u>: $\alpha_1+\beta_1=\alpha_2+\beta_2$. לכן $\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2=2(\alpha_1+\beta_1)$
ובהתאמה, סכום כל ערכי X, $2\alpha_1+2\alpha_2+2\beta_1+2\beta_2$, שווים
ל4 פעמים כפול אחד הערכים. סכום הערכים של X הוא 5
<u>ולכן</u> שווה ל4 כפול אחד הערכים. סתירה.

<u>מקרה ד:</u> $\alpha_1+\beta_2=\alpha_2+\beta_1$. כמו קודם, $2\alpha_1+2\alpha_2+2\beta_1+2\beta_2=4(\alpha_1+\beta_2)$
וזה לא יתכן בהתאם לאופן שהגדרנו את X.
סתירה.

<u>מקרה ה:</u> $\alpha_1+\beta_2=\alpha_2+\beta_2$. $\Leftarrow$ $\alpha_1=\alpha_2$ ונותרנו כמו קודם רק
עם שני ערכים. סתירה.

<u>מקרה ו:</u> $\alpha_2+\beta_1=\alpha_2+\beta_2$ $\Leftarrow$ $\beta_1=\beta_2$, שוב, סתירה.

הגענו לסתירה מכל אחד מהמקרים, לכן הנחת ההנחה הייתה שגויה.
X לא צ"ל של Y_2 ! Y_2

$\square$

ד. *הראו שמשתנה המקבל 3 ערכים אינו בהכרח צירוף לינארי של מספר כלשהו של משתנים בינאריים בלתי תלויים במשותף.

שוב נשתמש ב $X:\Omega \longrightarrow \{0,1,4\}$

נב"ש קיימים $X_1,\dots,X_n$ בינאריים ב"ת במשותף כך ש $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$. נסמן את הערכים של כל אחד מהם כך:

לכל i, הערכים שמקבל X_i הם $\{\alpha_i,\beta_i\}$.

מכיוון שהם ב"ת במשותף, כל אחד מ 2^n הצירופים הלינאריים של ערכיהם מתקבל ע"י X, ומכיוון ש X מקבל רק 3 ערכים, הרבה מן הערכים צריכים להיות שווים. נביט לדוגמה בערכים הבאים:

1) $\alpha_1+\beta_2+\alpha_3+\dots+\alpha_n$

2) $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\dots+\alpha_n$

3) $\beta_1+\beta_2+\alpha_3+\dots+\alpha_n$

4) $\beta_1+\alpha_2+\alpha_3+\dots+\alpha_n$

לפחות שניים מבין הביטויים לעיל צריכים להיות שווים ונקבל ו׳ מקרים כמו בסעיף ג.

אנחנו נקבל מסקנות זהות מן השוויונים הללו לאלה שהיו לנו בסעיף הקודם. נקבל מ"מ בינאריים בעלי ערך בודד, או שנקבל שסכום זוג ערכי X שווה לשלישי, וזה לא יתכן כש $X:\Omega\to\{0,1,4\}$ ואם הערכים הללו שווים, וכמובן שכך, נקבל מ"מ בינארי עם משתנה יחיד בסתירה.

תרגיל 4.2. אליס ובוב (זוג נשוי) חולקים בקבוק ויטמינים המורכב מ-28 דובוני גומי, מחציתם בטעם תפוח והחצי השני בטעם תפוז. בוב מעדיף דובוני תפוח, אליס מעדיפה תפוז. בכל בוקר שולפים 4 דובונים ומסיבות היגייניות לא מחזירים, בלי קשר לטעם הדובונים המתקבלים. כל אחד בוחר את הדובונים לפי טעמו, עד כמה מתאפשר. למשל אם התקבלו 3 תפוח ו-1 תפוז, בוב יאכל 2 תפוח ואילו אליס תאכל 1 תפוח ו1 תפוז.

א. במהלך חודש אחד (של 30 ימים) כמה דובונים בטעם פחות מועדף יאכל כל אחד מהם, בממוצע?

ב. כמה דובונים בטעם הפחות מועדף יאכל כל אחד מהם ביום ממוצע?

ההסתברות שווה במשך כל הימים: (בנוסף, מטעמי סימטריה, התוחלת של שניהם שווה)

נגדיר X_i - כמות הדובונים שבוב אוכל שהוא לא אוהב ביום ה-i

נגדיר $X = \bigcup_{i=1}^{30} X_i$

לכל i,

סידורים וצירופים אם יש חשיבות לסדר

$$E(X_i) = 0 + 1\cdot\frac{14}{28}\cdot\frac{14}{27}\cdot\frac{13}{26}\cdot\frac{12}{25}\cdot\frac{4!}{3!} + 2\cdot\frac{14}{28}\cdot\frac{13}{27}\cdot\frac{12}{27}\cdot\frac{11}{26} = \frac{26}{75} \approx 0.347$$

סעיף ב

שלושה זהים

לפי לינאריות התוחלת:

$$E(X) = 30E(X_i) = \frac{52}{5} = 10.4$$

סעיף א.

$\square$

ג. מהו מספר השכיח של דובונים בטעם הפחות מועדף שיאכל כל אחד מהמשתתפים ביום?

נחשב עבור בוב (החישובים זהים עבור אליס):

$$P(\text{אוכל 2 מועדף ביום}) = P(\text{תפוז 4}) = \frac{14}{28}\cdot\frac{13}{27}\cdot\frac{12}{26}\cdot\frac{11}{25} = \frac{11}{225}$$

$$P(\text{אוכל 1 מועדף}) = P(\text{תפוז 3, תפוח 1}) = \frac{4!}{3!}\cdot\frac{14}{28}\cdot\frac{13}{27}\cdot\frac{12}{26}\cdot\frac{14}{25} = \frac{56}{225}$$

$$P(\text{אוכל 0 מועדף}) = 1 - P(\text{אוכל 2 מועדף}) - P(\text{אוכל 1 מועדף}) = 1 - \frac{11}{225} - \frac{56}{225} = \frac{158}{225}$$

קיבלנו

$$P(\text{אוכל 0 מועדף}) > P(\text{אוכל 1 מועדף}) > P(\text{אוכל 2 מועדף})$$

לכן המספר השכיח של דובונים בטעם הפחות מועדף הינו 0.

□

3. א.

תרגיל 4.3. במשחק קלפים מסויים לכל קלף יש ערך:

- קלפים הממוספרים 2 עד 9 שווים 5 נקודות כ"א
- קלפי פנים (נסיך, מלכה, מלך) והקלף 10 שווים 10 נקודות
- אס שווה 15 נקודות

א. במחקש של 52 קלפים מעורבבים היטב, מהו הערך הצפוי של סכום הנקודות של שלושת הקלפים העליונים בחפיסה?

נסמן ב X את סכום הנקודות של שלושת הקלפים הראשונים.

ידוע כל קלף מופיע 4 פעמים בחבילה.

יש 8 קלפים כל אחד 4 צבעים

$$P(X=15)=P\begin{pmatrix}\text{בחירת } 3\\ 5 \text{ של}\end{pmatrix}=\frac{\binom{32}{3}}{\binom{52}{3}}=\frac{248}{1105}$$

Choose

4 קלפים שווים 10 כל אחד 4 צבעים

$$P(X=20)=P\begin{pmatrix}5 \text{ של } 2\\ 10 \text{ של } 1\end{pmatrix}=\frac{\binom{32}{2}\cdot\binom{16}{1}}{\binom{52}{3}}=\frac{1984}{5525}$$

כלל המכפלה

$$P(X=25)=P\left(\begin{matrix}5 \text{ של } 2\\ 15 \text{ של } 1\end{matrix}\ \cup\ \begin{matrix}5 \text{ של } 1\\ 10 \text{ של } 2\end{matrix}\right)=$$

4 צבעים של אס

$$=P\begin{pmatrix}5 \text{ של } 2\\ 15 \text{ של } 1\end{pmatrix}+P\begin{pmatrix}5 \text{ של } 1\\ 10 \text{ של } 2\end{pmatrix}=\frac{\binom{32}{2}\cdot\binom{4}{1}+\binom{32}{1}\cdot\binom{16}{2}}{\binom{52}{3}}=$$

איחוד זר

Choose

$$=\frac{112}{425}$$

$$P(X=30) = P\left(10 \text{ של } 3 \;\cup\; \begin{matrix} 5 \text{ של } 1 \\ 10 \text{ של } 1 \\ 15 \text{ של } 1 \end{matrix}\right) =$$

(נוסחת Choose)

איחוד זר

$$= P(10 \text{ של } 3) + P\left(\begin{matrix} 5 \text{ של } 1 \\ 10 \text{ של } 1 \\ 15 \text{ של } 1 \end{matrix}\right) =$$

$$= \frac{\binom{16}{3} + \binom{32}{1}\binom{16}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{3}} = \frac{652}{5525}$$

$$P(X=35) = P\left(\begin{matrix} 10 \text{ של } 2 \\ 15 \text{ של } 1 \end{matrix} \;\cup\; \begin{matrix} 5 \text{ של } 1 \\ 15 \text{ של } 2 \end{matrix}\right) =$$

איחוד זר

$$= P\left(\begin{matrix} 10 \text{ של } 2 \\ 15 \text{ של } 1 \end{matrix}\right) + P\left(\begin{matrix} 5 \text{ של } 1 \\ 15 \text{ של } 2 \end{matrix}\right) = \frac{\binom{16}{2}\binom{4}{1} + \binom{32}{1}\binom{4}{2}}{\binom{52}{3}} =$$

$$= \frac{168}{5525}$$

$$P(X=40) = P\left(\begin{matrix} 10 \text{ של } 1 \\ 15 \text{ של } 2 \end{matrix}\right) = \frac{\binom{16}{1}\cdot\binom{4}{2}}{\binom{52}{3}} = \frac{24}{5525}$$

$$P(X=45) = P(15 \text{ של } 3) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{52}{3}} = \frac{1}{5525}$$

לפי לינאריות התוחלת:

$$E(X) = 15\cdot\frac{248}{1105} + 20\cdot\frac{1984}{5525} + 25\cdot\frac{112}{425} + 30\cdot\frac{652}{5525} + 35\cdot\frac{168}{5525}$$

$$+ 40\cdot\frac{24}{5525} + 45\cdot\frac{1}{5525} = \frac{285}{13} \approx 21.923 \leftarrow \text{הערך הצפוי}$$

ב. מוציאים מהחפיסה את כל הקלפים האדומיים וכעת משחקים רק עם השחורים - 26 קלפים סה"כ. כעת, מהו הערך הצפוי של סכום הנקודות של שלושת הקלפים העליונים? שימו לב שכעת המצב שונה בכך שלמשל לא יתכן ששלושת הקלפים כולם יהיו אס

כעת, הערכים האפשריים של X הם רק
$15, 20, 25, 30, 35, 40$

יש רק 16 קלפים ששווים 5

$$P(X=15) = P(5 \text{ של } 3) = \frac{\binom{16}{3}}{\binom{26}{3}} = \frac{14}{65}$$

יש כעת 8 ששווים 10

$$P(X=20) = P\left(\begin{matrix} 5 \text{ של } 2 \\ 10 \text{ של } 1 \end{matrix}\right) = \frac{\binom{16}{2}\cdot\binom{8}{1}}{\binom{26}{3}} = \frac{24}{65}$$

$$P(X=25) = P\left(\begin{matrix} 5 \text{ של } 2 \\ 15 \text{ של } 1 \end{matrix} \cup \begin{matrix} 5 \text{ של } 1 \\ 10 \text{ של } 2 \end{matrix}\right) =$$

שני אסים

$$= P\left(\begin{matrix} 5 \text{ של } 2 \\ 15 \text{ של } 1 \end{matrix}\right) + P\left(\begin{matrix} 5 \text{ של } 1 \\ 10 \text{ של } 2 \end{matrix}\right) = \frac{\binom{16}{2}\binom{2}{1} + \binom{16}{1}\binom{8}{2}}{\binom{26}{3}} =$$

איחוד זר

Choose

$$= \frac{86}{325}$$

$$P(X=30) = P\left(10 \text{ של } 3 \cup \begin{matrix} 5 \text{ של } 1 \\ 10 \text{ של } 1 \\ 15 \text{ של } 1 \end{matrix}\right) =$$

$$= P(10 \text{ של } 3) + P\left(\begin{matrix} 5 \text{ של } 1 \\ 10 \text{ של } 1 \\ 15 \text{ של } 1 \end{matrix}\right) = \frac{\binom{8}{3} + \binom{16}{1}\binom{8}{1}\binom{2}{1}}{\binom{26}{3}} =$$

איחוד זר

$$= \frac{3}{25}$$

$$P(X=35)=P\left(\begin{matrix}10 & \text{של} & 2\\ 15 & \text{של} & 1\end{matrix}\ \cup\ \begin{matrix}5 & \text{של} & 1\\ 15 & \text{של} & 2\end{matrix}\right)=$$

אירוע זר

$$=P\left(\begin{matrix}10 & \text{של} & 2\\ 15 & \text{של} & 1\end{matrix}\right)+P\left(\begin{matrix}5 & \text{של} & 1\\ 15 & \text{של} & 2\end{matrix}\right)=\frac{\binom{8}{2}\binom{2}{1}+\binom{16}{1}\binom{2}{2}}{\binom{26}{3}}=\frac{9}{325}$$

$$P(X=40)=P\left(\begin{matrix}10 & \text{של} & 1\\ 15 & \text{של} & 2\end{matrix}\right)=\frac{\binom{8}{1}\binom{2}{2}}{\binom{26}{3}}=\frac{1}{325}$$

ולפי ליניאריות התוחלת, הערך הצפוי הוא

$$E(X)=15\cdot\frac{14}{65}+20\cdot\frac{24}{65}+25\cdot\frac{86}{325}+30\cdot\frac{3}{25}+35\cdot\frac{9}{325}+\frac{40}{325}$$

$$E(X)=\frac{285}{13}\approx 21.923$$

טובה תוחלת!

$\square$

תרגיל 4.4. סטטיסטיקאי, המצביע בהסתברות, המשך. פתרון החידה מהפרק הקודם: הסטטיסטיקאי יקח שני פתקי א' ופתק ב', ויפריד אותם: א | א,ב. הוא יעביר פתק אקראי מהקבוצה השמאלית לימנית, ואז יצביע באקראי באחד משני הפתקים בקבוצה הימנית.
הציעו שיטה שבה הסטטיסטיקאי יוכל להצביע בהסתברות 1/10, תוך שימוש בכמה שפחות פתקים.

נניח שהוא רוצה להצביע למפלגה ב' בהסתברות של $\frac{1}{10}$

הוא יקח שישה פתקים.

5 של מפלגה א, ואחד של ב.

אחד מהפתקים של א ישים בצד.

א | אאאאב

מבין האלה שנותרו, יבחר באקראיות 1, ויבחר מבין הקלף הזה ומבין הקלף שבצד קלף אחד באקראי.

$$P(ב) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$$

בחירה ראשונית מתוך 5

בחירה מבין 2

∎

תרגיל 4.5.

שי וישי בודקים ש"ב במקצוע "מבוא להסתברות". סה"כ ישנן 100 מחברות לבדיקה. שי נותן ציון לשאלה מס' 1 וישי נותן ציון לשאלה מס' 2 (שאר השאלות הן לא לבדיקה). שי עובר על כל המחברות ובודק את השאלה שלו בהסתברות 0.3, לאחר מכן ישי בודק מחצית המחברות - 50 מחברות סה"כ כאשר בוחר אותן באופן אקראי. ההחלטות לגבי בדיקת מחברת כזו או אחרת אינן תלויות בהחלטותיו של הבודק הנוסף, עבור כ"א מהבודקים.

א. נסמן ב-N את מספר המחברות ששי בדק. מהי התוחלת $\mathbb{E}(N)$?

נגדיר לכל $1 \le i \le 100$ משתנה מקרי ברנולי X_i, המסמל האם המחברת ה i נבדקה

$N = \bigcup_{i=1}^{100} X_i$ לכן לפי לינאריות התוחלת,

נוציא קבוע מהתוחלת

$$E(N) = \sum_{i=1}^{100} E(X_i) = \sum_{i=1}^{100}\left(0 \cdot \frac{7}{10} + 1 \cdot \frac{3}{10}\right) = \frac{3}{10}\sum_{i=1}^{100} 1 =$$

$$= \frac{3}{10} \cdot 100$$

$$E(N) = 30$$

$\square$

ב. נסמן ב-M את מספר המחברות שקיבלו ציון משי, אך לא מישי. מהי התוחלת $\mathbb{E}(M)$?

$P($ נבדק ע"י שי $\cap$ לא נבדק ע"י ישי $) = P($ נבדק ע"י שי $) \cdot P($ לא נבדק ע"י ישי $)$

ב"ת

$$= \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{20}$$

שוב נגדיר משתנה מקרי ברנולי Y_i לכל $1 \le i \le 100$ המציין
האם נבדק ע"י שי ולא ע"י ישי,

$M = \bigcup_{i=1}^{100} Y_i$. לכן לפי לינאריות התוחלת

$$E(M) = \sum_{i=1}^{100} E(Y_i) = \sum_{i=1}^{100} \left(0 \cdot \frac{17}{20} + 1 \cdot \frac{3}{20}\right) = \sum_{i=1}^{100} \frac{3}{20} = 100 \cdot \frac{3}{20}$$

$$E(M) = 15$$

■

ג. זוג מחברות טוב הוא שתי מחברות עוקבות שבהן שתי השאלות נבדקו. נסמן ב-P את מספר הזוגות הטובים. מהי התוחלת $\mathbb{E}(P)$?

ההסתברות שהראשונה נבדקה ע"י שניהם היא

$\frac{50}{100}\cdot 0.3$

והשנייה: $\frac{49}{99}\cdot 0.3$, כי אחת כבר נבדקה, הוא צריך לבדוק עוד 49 מתוך 99

יש 99 מיקומים אפשריים עבור זוג המחברות הטוב.

נגדיר P_i מ"מ ברנולי, 1 אם הזוג שמורכב מהמחבר ה-i והמחבר ה-$i+1$ הוא טוב, 0 אם הוא לא.

לכן $P=\bigcup_{i=1}^{99} P_i$ לפי לינאריות התוחלת נקבל

$$E(P)=\sum_{i=1}^{99}E(P_i)=\sum_{i=1}^{99}\left(0+1\cdot\frac{50}{100}\cdot 0.3\cdot\frac{49}{99}\cdot 0.3\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{99}\frac{49}{2200}=99\cdot\frac{49}{2200}$$

$$E(P)=\frac{441}{200}=2.205$$

$\square$