שב 3 הסתברות

ןפב מנירב

1. נתון כי בהטלת 2 קוביות משחק הוגנות ושונות התקבלה התוצאה 5 בלפחות אחת מהקוביות. מה ההסתברות שסכומן היה 8?

כדי שסכום הקוביות יהיה 8, בקוביה השניה צריך להתקבל 3. בעייה זו פשוטה, ואפשר פשוט למנות את המקרים האפשריים

נסמן (a,b) את התוצאה שבקוביה 1 יצא a ובקוביה 2 b.

נסמן

A - לפחות אחת מהקוביות 5

B - סכום 8.

$\underbrace{A}$

$(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(6,5)$

$(5,5)$

$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6)$

11 אפשרויות

$\underbrace{A \cap B}$

$(3,5)$

$(5,3)$

2 אפשרויות

לכן, תוך שימוש בהגדרה כי הסתברות היא השכיחות היחסית של מאורע, נקבל

$$P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$P(B) = \frac{11}{36}$$

לפי הגדרת ההסתברות המותנית:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{11}{36}} = \frac{2}{11}$$

2. סטודנט ענה על שאלה במבחן אמריקאי שלה יש m אפשרויות נתונות לתשובה באופן הבא: בהסתברות p התלמיד למד את נושא השאלה ולכן יודע לבחור תשובה נכונה, אחרת הוא מנחש את התשובה באקראיות.

(א) מהי ההסתברות שהסטודנט לא למד את נושא השאלה בהינתן שהוא ענה נכונה על השאלה?

נסמן:

A- למד נושא

B- הצליח בשאלה

נוסחת הופכי

יפוע שגם לא למד, מנחש באקראי

$$P(A^c \mid B) = \frac{P(A^c)P(B\mid A^c)}{P(B)} = \frac{(1-p)\cdot\frac{1}{m}}{P(B\mid A)\cdot P(A) + P(B\mid A^c)\cdot P(A^c)} =$$

נפרק את $P(B)$ לשתי הסתברויות מותנות

$$= \frac{1-p}{m\left(1\cdot p + \frac{1}{m}\cdot(1-p)\right)} = \frac{1-p}{mp+1-p} = \frac{1-p}{1+(m-1)p}$$

(ב) נתחו את התוצאה עבור $m=1$, $m=2$ ועבור $m \longrightarrow \infty$.

$$\frac{1-p}{1+(m-1)p}$$

נציב $m=1$ ונקבל: $\frac{1-p}{1} = 1-p$

כצפוי, כשיש רק אופציה אחת, הוא ידבק תמיד, לכן ההסתברות שלא למד נשארת $1-p$

נציב $m=2$ ונקבל: $\frac{1-p}{1+p}$, $1+p>1$ לכן ההסתברות שלא למד בהינתן שדבק פוחתת, כצפוי.

עבור $m \to \infty$:

תמונה קבוע והמכנה שואף לאינסוף $\text{"}\frac{1}{\infty}\text{"}=0$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1-p}{1+(m-1)p} = 0$$

כלומר, ככל שמס' האופשרויות גדל, ההסתברות שהוא לא למד את הנושא אם דבק בשאלה שואפת ל-0
כלומר בהינתן תשובה נכונה של התלמיד, ההסתברות שלמד את הנושא שואפת ל-1 כש $m \to \infty$

3. עורכים את הניסוי הבא. בשלב הראשון מטילים קוביה כדי לקבוע האם ניתן בשלב השני יתרון לעץ, במקרה שיצא 1 2 או 4, או יתרון לפלי, אחרת. בהתאם לכך מטילים 2 מטבעות בלתי תלויים אך מוטים שניהם באותו כיוון; הם נופלים בהסתברות $2/3$ על הצד שנקבע בשלב הראשון.

(א) נסמן ב A, B את המאורעות `המטבע הראשון נפל על פלי`, ו`המטבע השני נפל על פלי` בהתאמה. הראו כי $\mathsf{P}(A)=\frac{1}{2}$

(ב) חשבו את $\mathsf{P}(B \mid A)$

(א) יש הסתברות של $\frac{3}{6}$ כלומר $\frac{1}{2}$ שיש יתרון לפלי.
ו $\frac{1}{2}$ שיש יתרון לעץ.

נסמן יתרון לפלי - T
יתרון לעץ H

$$P(T)=\frac{1}{2}=P(H)$$

$$P(A)=P(A|T)\cdot P(T)+P(A|H)\cdot P(H)=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

נציג את $P(A)$ עם הסתברויות מותנות. חוקי כי $\Omega=\{T,H\}$ חלוקה.

(ב)

הגדרת הסתברות מותנית

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A\cap B|T)\,P(T)+P(A\cap B|H)\cdot P(H)}{\frac{1}{2}}=$$

פירוק להסתברויות מותנות

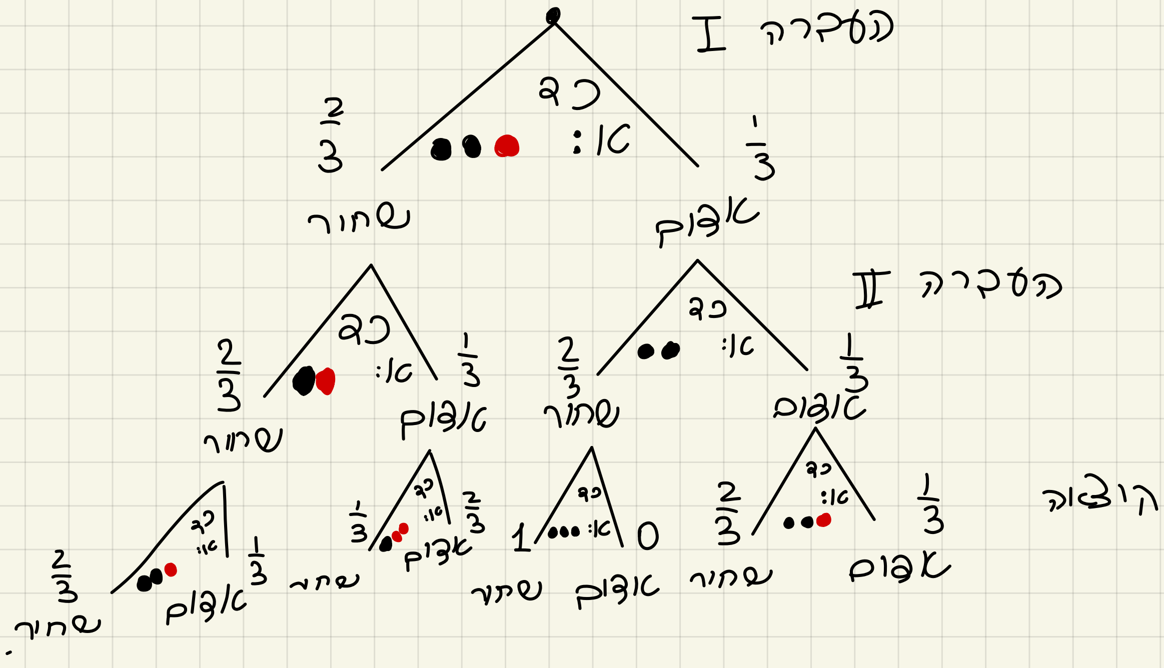
$$=2\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{9}$$

כאשר ידוע לאיזה צד יש עדיפות, A ו B ב"ת.

(ג) הסבירו כיצד ייתכן ש A, B תלויים, למרות שהם בלתי תלויים בהינתן כל ערך אפשרי בקובייה.

כאשר A מתרחש הסיכוי ש B יתרחש גם כן גדל יותר.
זאת מכיוון שאם A התרחש קיימת הסתברות גבוהה מ $\frac{1}{2}$ $\left(\frac{2}{3}\right)$
שיש עדיפות לפלי. עדיפות זו תקפה גם למטבע השני, מה שגורם
לכך ש B יתרחש בהסתברות גבוהה מ $\frac{1}{2}$ $\left(\frac{2}{3}\right)$

4. על שולחן 3 כדים אטומים ובכל אחד מהם כדור אדום ושני כדורים שחורים. מעבירים כדור מקרי מכד א לכד ב. לאחר מכן מעבירים כדור מקרי מכד ג לכד א. לבסוף מוציאים כדור מכד א. מה ההסתברות שהכדור שהוצא אדום?



כתבתי את המצב של כד א לפני כל בחירה.

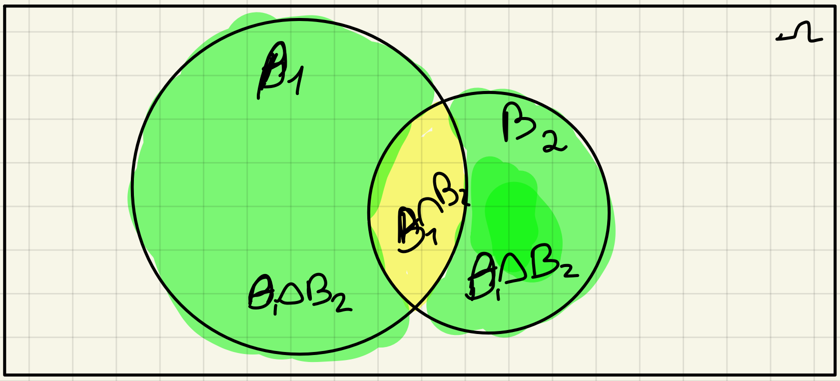
נמצא את כל המסלולים המובילים להוצאה אדומה

$$P(\text{הוצאה אדומה}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot 0 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} =$$

כלל המכפלה

$$= \frac{1}{3}$$

5. יהי (Ω, P) מרחב הסתברות. יהיו $B_1, B_2 \subseteq \Omega$ מאורעות עם הסתברות חיובית המקיימים $\mathrm{P}(B_1 \Delta B_2) = 0$.
הוכיחו כי לכל מאורע A מתקיים $\mathrm{P}(A \mid B_1) = \mathrm{P}(A \mid B_2)$.



הפרש סימטרי- איחוד פחות חיתוך

$$B_1 \Delta B_2 = (B_1 \cup B_2) \setminus (B_1 \cap B_2)$$

נתון $P(B_1 \Delta B_2) = 0$

יהי $A \subseteq \Omega$

לפי הגדרת הסתברות מותנית:

$$P(A|B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)}$$

$$P(B_1) = P\big(\underbrace{(B_1 \cap B_2)} \cup \underbrace{(B_1 \cap B_2^c)}\big) = P(B_1 \cap B_2) + \underbrace{P(B_1 \cap B_2^c)} =$$

מאורעות זרים

0 כי $B_1 \cap B_2^c \subseteq B_1 \Delta B_2$

$$= P(B_1 \cap B_2)$$

משיקולים דומים, גם

$$P(B_2) = P(B_1 \cap B_2)$$

$$P(A \cap B_1) = P\big(\underbrace{(A \cap B_1 \cap B_2)} \cup \underbrace{(A \cap B_1 \cap B_2^c)}\big) =$$

איחוד זר

$$= P(A \cap B_1 \cap B_2) + \underbrace{P(A \cap B_1 \cap B_2^c)}_{0} = P(A \cap B_1 \cap B_2)$$

$B_1 \cap B_2^c \subseteq B_1 \Delta B_2$

שוב באופן זהה לחלוטין:

$$P(A\cap B_2) = P(A\cap B_1\cap B_2)$$

וקיבלנו:

$$P(A|B_1) = \frac{P(A\cap B_1\cap B_2)}{P(B_1\cap B_2)} = P(A|B_2)$$

$\blacksquare$

6. יהי (Ω, P) מרחב הסתברות. יהיו $A, B \subseteq \Omega$ שני מאורעות. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:

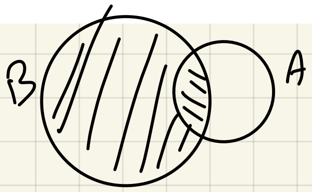
(א) A, B בלתי תלויים.

(ב) A^c, B בלתי תלויים.

(ג) A, B^c בלתי תלויים.

(ד) A^c, B^c בלתי תלויים.

נוכיח ראשית א $\Rightarrow$ ב



נתון $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$

$$P(A^c\cap B) = P(A^c|B)\cdot P(B) = (1-P(A|B))\cdot P(B) =$$

הפונק' $P(*|B)$ היא פונק' הסתברות על המרחב הניתן.

$$= P(B) - P(A|B)\cdot P(B) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1-P(A)) =$$

ב"ת A,B

$$= P(A^c)\, P(B)$$

מ.ש.ל

נוכיח כ ⇐ ג

$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B)$ נתון

$$P(A\cap B^c) = P(B^c|A)P(A) = (1-P(B|A))\cdot P(A) = P(A) - P(B|A)P(A) =$$

$P(*|A)$ זו פונק' הסתברות על המרחב הנתון

$$= P(A) - P(A\cap B) = P(A) - P(A|B)P(B) = P(A) - (1-P(A^c|B))P(B)$$

$P(*|B)$ פונק' הסתברות

$$= P(A) - P(B) + P(A^c|B)P(B) = P(A) - P(B) + P(A^c\cap B) =$$

$$= P(A) - P(B) + P(A^c)P(B) = P(A) - P(B)(1-P(A^c)) = P(A) - P(A)P(B) =$$

$$= P(A)(1-P(B)) = P(A)P(B^c)$$

מ.ש.ל

ג ⇐ ב   נתון $P(A\cap B^c) = P(A)P(B^c)$

$$P(A^c\cap B^c) = P(A^c|B^c)P(B^c) = (1-P(A|B^c))P(B^c) =$$

$P(*|B^c)$ זו פונ' הסתברות על המרחב

$$= P(B^c) - P(A|B^c)P(B^c) = P(B^c) - P(A\cap B^c) =$$

$$= P(B^c) - P(A)P(B^c) = P(B^c)(1-P(A)) = P(A^c)P(B^c)$$

שימוש בנתון

מ.ש.ל

ב ⇐ א. הוכחנו ב "ב ⇐ ג" שבהינתן שתי מאורעות C,D כך ש D, C^c ב"ת, אזי, C,D^c ב"ת.

לכן כעת נתון A^c,B^c ב"ת, נבחר $C=A^c, D=B^c$ ונקבל $B, (A^c)^c$ ב"ת, כלומר A,B ב"ת

מ.ש.ל

■

7. בהינתן 2 מאורעות בעלי הסתברות חיובית A, B נאמר כי A מאשש את B אם מתקיים $\mathsf{P}(B \mid A) > \mathsf{P}(B)$. תנו דוגמה למרחב הסתברות ומאורעות A, B, C במרחב זה כך ש A מאשש את B, B מאשש את C אך A לא מאשש את C.

הניסוי הוא הטלת מטבע הוגן פעמיים

$$\Omega = \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$$

$A := \{(T,T)\}$ יצאו בשתי ההטלות פלי

$B := \{(T,T), (T,H)\}$ יצאו בהטלה הראשונה פלי

$C := \{(T,H)\}$ יצאו פלי ואז עץ

$$A \cap B = \{(T,T)\} \to P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{1}{4}$$

$$B \cap C = \{(T,H)\} \to P(B \cap C) = \frac{1}{4}$$

$$A \cap C = \emptyset \to P(A \cap C) = 0$$

$$P(A) = \frac{1}{4} = P(C)$$

$$P(B) = \frac{1}{2}$$

חישובים בסיסיים כדי למצוא הסתברויות מותנות

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = 1 > P(B) = \frac{1}{2}$$

A מאשש את B.

$$P(C|B) = \frac{P(B \cap C)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} > P(C) = \frac{1}{4}$$

ולכן B מאשש את C

אממה, $P(C|A) = \frac{P(A\cap C)}{P(A)} = 0 \neq P(C)$

A לא מאפשר את C.

מ.של

8. כד מכיל כדור שחור וכדור לבן. משחקים את המשחק הבא: בכל שלב בוחרים באקראי כדור מן הכד ומחזירים אותו עם כדור נוסף מאותו הצבע (כך שלאחר t שלבים ישנם בכד בדיוק $t+2$ כדורים). הוכיחו כי לכל $1 \le n \le t+1$, ההסתברות שישנם n כדורים לבנים לאחר t שלבים היא בדיוק $\frac{1}{t+1}$ ובפרט לא תלויה ב n.
(הדרכה: הוכיחו באינדוקציה על t).

<u>בסיס האינדוקציה:</u> $t=0$. לכל $1 \le n \le 1$ כלומר כאשר $n=1$, ההסתברות שישנו כדור לבן 1 לאחר 0 שלבים הוא כמובן 1, לפי נתוני השאלה $(1=\frac{1}{0+1})$

<u>צעד האינדוקציה:</u> יהי t כך שלכל $1 \le n \le t+1$ ההסתברות שישנם n כדורים לבנים לאחר t שלבים היא $\frac{1}{t+1}$

צ"ל מתקיים עבור $t+1$

נסמן ב $P(n,k)$ את ההסתברות שיש n לבנים לאחר n חזרות.

יהי $1 \le n \le t+2$

יכולים להיות רק שני מקרים שיובילו לכך שיהיו n אחרי $t+1$:
היה n לאחר t, או היה $n-1$ לאחר t חזרות

מאורעות זרים

$$P(n,t+1) = P\left(n,t+1 \,\middle|\, n,t\right) \cdot P(n,t) + P\left(n,t+1 \,\middle|\, n-1,t\right) \cdot P(n-1,t)$$

זו ההסתברות לבחור שחור כשיש n לבנים אחרי t חזרות

לבחור לבן כשיש $n-1$ לבנים לאחר t חזרות

$$= \frac{t+2-n}{t+2} \cdot P(n,t) + \frac{n-1}{t+2} \cdot P(n-1,t) =$$

כמות כדורים אחרי t שלבים היא $t+2$

הנחת האינדוקציה

$$= \frac{t+2-n}{t+2} \cdot \frac{1}{t+1} + \frac{n-1}{t+2} \cdot \frac{1}{t+1} =$$

$$= \frac{t+2-n+n-1}{(t+2)(t+1)} = \frac{\cancel{t+1}}{(t+2)\cancel{(t+1)}} = \frac{1}{t+2}$$

קיבלנו שלכל $1 \le n \le t+2$, ולכל t חזרות ההסתברות שיש n כדורים לבנים היא $\frac{1}{t+2}$

$\blacksquare$