תרגיל 5.1. שלוש חברות רינה, דינה ונינה הבריזו מתרגול הסתברות וכעת הן מבלות בקניון ומעלות תמונה עם שלושתן עושות חיים משוגעים לסטורי של אינסטושת כ"א לאינסטוש שלה. ידוע שבממוצע רינה מקבלת 8 לייקים לתמונה שלה בשעה (ביום הראשון לחשיפתה), דינה מקבלת 5 לייקים ונינה לייק אחד בשעה. בהנתן ששלושתן יחד קיבלו 14 לייקים בשעה שלאחר הפרסום, מה ההסתברות שלפחות 2 מהם שייכים לנינה? הניחו שכל הלייקים ניתנים באופן ב"ת זה מזה. רמז לאבודים ממש: תקראו את הערך בוקויפדיה, בפרט פסקה רביעית

יהיו: $X \sim Pois(8)$ כמות הלייקים של רינה

$Y \sim Pois(5)$ כמות הלייקים של דינה

$Z \sim Pois(1)$ כמות הלייקים של נינה

משלים ל 1

$$P(Z \geq 2 \mid X+Y+Z=14) =$$

נוסחת ההיפוך

$$= 1 - P(Z=1 \mid X+Y+Z=14) - P(Z=0 \mid X+Y+Z=14) =$$

$$= 1 - \frac{P(X+Y+Z=14 \mid Z=1)P(Z=1)}{P(X+Y+Z=14)} - \frac{P(X+Y+Z=14 \mid Z=0)P(Z=0)}{P(X+Y+Z=14)}$$

התפלגות שונה של ההסתברויות המותנות

$$= 1 - \frac{P(X+Y=13)P(Z=1)}{P(X+Y+Z=14)} - \frac{P(X+Y=14)P(Z=0)}{P(X+Y+Z=14)}$$

נחשב בנפרד כל אחת מן ההסתברויות:

לפי נוסחת של ההסתברות של מ"מ פואסון:

$$P(Z=0) = \frac{1^0}{0!}e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$P(Z=1) = \frac{1^1}{1!}e^{-1} = \frac{1}{e}$$

נשים לב גם ש $X+Y+Z \sim Pois(14)$
$X+Y \sim Pois(13)$

לכן

$$P(X+Y+Z=14)=\frac{14^{14}}{14!}e^{-14}$$

$$P(X+Y=13)=\frac{13^{13}}{13!}e^{-13}$$

$$P(X+Y=14)=\frac{13^{14}}{14!}e^{-13}$$

נציב הכל ונקבל

$$P(Z \geq 2 \mid X+Y+Z=14)=$$

$$=1-\frac{\frac{13^{13}}{13!}e^{-13}\cdot\frac{1}{e}}{\frac{14^{14}}{14!}e^{-14}}-\frac{\frac{13^{14}}{14!}e^{-13}\cdot\frac{1}{e}}{\frac{14^{14}}{14!}e^{-14}}=0.264$$

תרגיל 5.2. משה וחיים משחקים עם קובייה הוגנת. משה מנצח אם כמות ההטלות הנדרשות עד לקבלת הספרה 6 קטנה או שווה ל-5, אחרת חיים מנצח.

א. מה הסיכוי שמשה ינצח?

יהי $X \sim G\left(\frac{1}{6}\right)$, כי הסיכוי לקבל 6 בהטלה הוגנת הוא $\frac{1}{6}$

מס' ההטלות שצריך עד לקבלת 6.

ידוע X מ"מ גיאומטרי, וידוע כל הטלה הינה בלתי תלויה בהטלה אחרת, לכן

$$P(X \le 5) = P(X=5) + P(X=4) + P(X=3) + P(X=2) + P(X=1) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\left(\frac{5}{6}\right)^4 + \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^1 + \left(\frac{5}{6}\right)^0\right) = \frac{4651}{7776}$$

ב. מה הסיכוי שבמשך 3 משחקים רצופים בדיוק חיים ינצח?

נגדיר $Y \sim Bin\left(4, \frac{4651}{7776}\right)$ ספור כמות נצחונות (עד להפסד)

לפי התפלגות משתנה בינומי:

$$P(Y=3) = \binom{3}{3}\left(1 - \frac{4651}{7776}\right)^3 \cdot \frac{4651}{7776} = 0.039$$

ג. מה תוחלת הניצחונות של משה ב-30 משחקים ומהי השונות?

נגדיר $Z \sim Bin\left(30, \frac{4651}{7776}\right)$ כמות הניצחונות של משה ב 30 משחקים

לפי הנוסחות של משתנה בינומי:

$$E(Z) = 30 \cdot \frac{4651}{7776} \approx 17.944$$

$$Var(Z) = 30 \cdot \frac{4651}{7776}\left(1 - \frac{4651}{7776}\right) \approx 7.211$$

תרגיל 5.3. כיתה מחולקת לשלוש קבוצות, ובכל קבוצה שלושה תלמידים. כל תלמיד בוחר אם הוא מעדיף ללמוד מתמטיקה (בהסתברות p) או פיזיקה (בהסתברות $1-p$). כל קבוצה בוחרת את נושא הלימוד המועדף עליה על פי רוב, והכיתה בוחרת את נושא הלימוד לפי מה שרוב קבוצות הלמידה החליטו.

מה ההסתברות שהכיתה תלמד מתמטיקה? העריכו את ההסתברות כפונקציה של $p = \frac{1+\epsilon}{2}$ כאשר $\epsilon > 0$ קטן מאוד.

לכל קבוצה, נגדיר $X_i \sim Bin(3,p)$ כמות התלמידים שבחרו מתמטיקה.

לכל $1 \le i \le 3$ מתקיים:

מאורעות זרים

$$P(X=2 \cup X=3) = P(X=2) + P(X=3) =$$ משתנה בינומי

$$= \binom{3}{2} p^2 (1-p) + \binom{3}{3} p^3 (1-p)^0 = 3(p^2 - p^3) + p^3 =$$

$$= 3p^2 - 3p^3 + p^3 = 3p^2 - 2p^3$$

ההסתברות שהקבוצה בחרה מתמטיקה.

נגדיר $Y \sim Bin(3, 3p^2 - 2p^3)$ מס' הקבוצות שבחרו מתמטיקה

$$P(\text{הכיתה לומדת מתמטיקה}) = P(Y=2 \cup Y=3) = P(Y=2) + P(Y=3) =$$

מאורעות זרים

התפלגות בינומית

$$= \binom{3}{2} \left(p^2(3-2p)\right)^2 \cdot \left(1 - p^2(3-2p)\right) + \binom{3}{3} \cdot \left(p^2(3-2p)\right)^3 \cdot \left(1-p^2(3-2p)\right)$$

$$= 3p^4(9 - 12p + 4p^2)(2p^3 - 3p^2 + 1) + p^6(3-2p) \cdot (9 - 12p + 4p^2) =$$

$$= p^4(9 - 12p + 4p^2)(6p^3 - 9p^2 + 3 + 3p^2 - 2p^3) =$$

$$= p^4(4p^2 - 12p + 9)(4p^3 - 6p^2 + 3)$$

כאשר $\varepsilon \longrightarrow 0$, $p \longrightarrow \frac{1}{2}$, ומכיוון שהביטוי שקיבלנו עבור ההסתברות מיוצג ע"י פונק' אלמנטרית, ניתן פשוט להציב $p=\frac{1}{2}$ ולקבל

$$\lim_{\varepsilon \to 0} P\left(\text{הכיתה מתמטיקה בחרה}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 12\cdot\frac{1}{2} + 9\right)\left(4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\right)$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} P\left(\text{הכיתה בחרה מתמטיקה}\right) = \frac{1}{2}$$

תרגיל 5.4. מטילים מטבע הוגן 3 פעמים. יהי X מ"מ הסופראת מספר ה"עצים" שהתקבלו בזריקה הראשונה, Y - מספר ה"עצים" בשתי הזריקות האחרונות, Z -מספר ה"עצים" בשתי הזריקות הראשונות

א. חשבו את ההתפלגות המשותפת ואת השונות המשותפת של X,Y

$$P(X=0)=\frac{1}{2}=P(X=1)$$

$$P(Y=0)=P(Y=2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$P(Y=1)\underset{\text{המשלים ל 1}}{=}1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

מכיוון שהתפלגות אינן תלויות זו בזו, ההתפלגות המשותפת היא פשוט הכפלת ההתפלגויות. נציג אותה בטבלה:

Y \ X	0	1
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

קיבלנו

$$P(X=0,Y=0)=P(X=0,Y=2)=P(X=1,Y=0)=$$

$$=P(X=1,Y=2)=\frac{1}{8}$$

$$P(X=0,Y=1)=P(X=1,Y=1)=\frac{1}{4}$$

לגבי שונות משותפת: X, Y ב"ת, הם עוסקים בהטלות שונות, לכן

$$\text{cov}(X,Y)=0$$

ב. חשבו את ההתפלגות המשותפת ואת השונות המשותפת של Z, X

ערכים אפשריים: $X = 0,1$

$Z = 0,1,2$

$P(X=0, Z=0) = P($פעמיים פלי$) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$P(X=0, Z=1) = P($הראשון פלי שני אף$) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(X=1, Z=1) = P($הראשון אף שני פלי$) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(X=1, Z=2) = P($פעמיים אף$) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$P(X=1, Z=0) = 0$ לא יתכן שקיבלנו בראשון אף אבל בשתי הראשונים לא קיבלנו אף

$P(X=0, Z=2) = 0$ זה אומר שבהטלה השניה צריכים לצאות 2 אף וזה כמובן לא אפשרי.

נארגן את הנתונים שקיבלנו בטבלה:

Z \ X	0	1
0	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
2	0	$\frac{1}{4}$

נחשב שונות משותפת:

נשים לב ש $X \sim Bin(\frac{1}{2}, 1)$ $\quad Z \sim Bin(\frac{1}{2}, 2)$

לכן, $E(Z) = 1 \quad E(X) = \frac{1}{2}$

הגדרת
שונות משותפת

$$\mathrm{cov}(X,Z) = E(XZ) - E(X)E(Z) =$$

הגדרת תוחלת

$$= \sum_a \sum_b ab\,P(X=a, Z=b) - \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 1}_{E(X)E(Z)} =$$

$$= 0\ \ 0 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{cov}(x,z) = \frac{1}{4}$$

תרגיל 5.5.

א. מנהלים הגרלה באופן הבא. בקופה יש שקל אחד. השחקן מקבל הזדמנות להטיל מטבע הוגן עד לקבלת ה"עץ" הראשון, ואז לקבל את כל המטבעות שבקופה, כשבכל תור מכפילים את כמות המטבעות שבקופה. עבור איזה מחיר תסכימו להיכנס למשחק?

נסמן ב X את הרווח נטו שלנו, וב Y את הברוטו. אם נכנסנו ב c שקלים, נקבל $X=Y-c$ מלינאריות התוחלת נקבל

$$E(X)=E(Y)-E(c)=E(Y)-c$$

ידוע ש Y מקבל רק חזקות של 2, כלומר

$$E(Y)=\sum_{k=0}^{\infty} 2^k\cdot P(Y=2^k)=\sum_{k=0}^{\infty} 2^k\cdot\frac{1}{2^{k+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2}=\infty$$

כי כל הטלה היא בהסתברות $\frac{1}{2}$ של עץ

לכן אוכנס למשחק בכל סכום שהוא!

הוכח: אם המשתנים בלתי תלויים, אזי הם בלתי מתואמים

יהיו X, Y מ״מ בלתי תלויים

$$cov(X,Y) \overset{\text{הגדרת שונות משותפת}}{=} E(XY) - E(X)E(Y) \overset{\text{הגדרת תוחלת}}{=}$$

$$= \sum_a \sum_b ab\underbrace{P(X=a, Y=b)}_{\text{הם ב״ת}} - \sum_a aP(X=a) \sum_b bP(Y=b) =$$

$$= \sum_a \sum_b abP(X=a)P(Y=b) - \sum_a \sum_b abP(X=a)P(X=b) = 0$$

$\blacksquare$

תרגיל 5.6. $N = 12$ אנשים עומדים בשורה ונדרשים לעבור דרך שני שערים. כל אדם בתורו מטיל מטבע ובוחר שער לעבור: אם קיבל פלי, יבחר בשער ימני, אחרת בשער שמאלי. למטבע יש סיכוי p ליפול על פלי.

א. מה ההסתברות שבדיוק חצי מהאנשים יעברו בשער השמאלי?

נגדיר $X \sim Bin(N, p)$ סופר כמות האנשים בשער הימני

$Y \sim Bin(N, 1-p)$ סופר כמות האנשים בשער השמאלי

$$P(Y=6) = P(X=6) = \binom{12}{6} p^6 (1-p)^6 = 924p^6(1-p)^6$$

ב. בסעיפים הבאים שולפים את המטבע בעזרתו בוחרים בשער באקראי מערימת מטבעות, בה שליש מהמטבעות מקיים $p = \frac{1}{3}$ ושאר המטבעות מקיימים $p = \frac{2}{3}$. מה הסיכוי כעת שבדיוק חצי מהאנשים יעברו בשער השמאלי

נסמן $Z \sim b\left(\frac{2}{3}\right)$ משתנה ברנולי המקבל 0 אם הוצאנו מטבע $p = \frac{1}{3}$

ומקבל 1 אם הוצאנו מטבע $p = \frac{2}{3}$

$$P(Y=6) = P(Y=6 \mid Z=0)P(Z=0) + P(Y=6 \mid Z=1)P(Z=1) =$$

פיצול להסתברויות מותנות

הצבת p מתאים

$$= 924 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \frac{1}{3} + 924 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot \frac{2}{3} =$$

$$= 924 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 \approx 0.111$$

ג. אם ידוע שבדיוק שליש מהאנשים עברו בשער הימני, מה ההסתברות לכך שהמטבע מקיים $p=\frac{1}{3}$? חשבו את הגבול עבור $N\to\infty$

$$P\left(Z=0 \mid X=\frac{N}{3}\right)=\frac{P\left(Z=0\cap X=\frac{N}{3}\right)}{P\left(X=\frac{N}{3}\right)}=$$

הגדרת הסתברות מותנית

$$=\frac{P(Z=0)\cdot P\left(X=\frac{N}{3}\mid Z=0\right)}{P\left(X=\frac{N}{3}\mid Z=0\right)P(Z=0)+P\left(X=\frac{N}{3}\mid Z=1\right)P(Z=1)}=$$

פיצול להסתברות מותנית

נפתח לפי הסתברות של משתנה בינומי

מכנה משותף

$$=\frac{\cancel{\frac{1}{3}}\cdot\binom{N}{N/3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{N/3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2N/3}}{\cancel{\frac{1}{3}}\cdot\binom{N}{N/3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{N/3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2N/3}+\frac{2}{3}\binom{N}{N/3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{N/3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2N/3}}=$$

נצמצם

$$=\frac{\cancel{\binom{N}{N/3}\left(\frac{1}{3}\right)^{N/3}}\left(\frac{2}{3}\right)^{2N/3}}{\cancel{\binom{N}{N/3}\left(\frac{1}{3}\right)^{N/3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{N/3}}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{N/3}+2\left(\frac{1}{3}\right)^{N/3}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{N/3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{N/3}+2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{N/3}}=\frac{1}{1+2\cdot\left(\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}\right)^{N/3}}=\frac{1}{1+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{N/3}}$$

נחלק מונה ומכנה ב $\left(\frac{2}{3}\right)^{N/3}$

כלומר $$P\left(Z=0 \mid X=\frac{N}{3}\right)=\frac{1}{1+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{N/3}}$$

וידוע $$\left(\frac{1}{2}\right)^{N/3} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$ לכן

$$\lim_{N\to\infty} P\left(Z=0 \mid X=\frac{N}{3}\right)=1$$

$$P(Z=0 \mid X=4)=\frac{1}{1+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4}}=\frac{8}{9}$$ $N=12$ P|C