תרגיל 6

1. א. נחשב אות $F_{Y|X=x}(y)$:

$$F_{Y|X=x}(y)=\int_{-\infty}^{y} f_{Y|X=x}(t)\,dt=\int_{0}^{y}\frac{2x+t}{4x+2}\,dt=$$

$$=\frac{2xt+\frac{t^2}{2}}{4x+2}\Bigg|_{0}^{y}=\frac{t^2+4xt}{8x+4}\Bigg|_{0}^{y}=\frac{y^2+4xy}{8x+4}$$

נציב במה שיצא.

$$P(X>Y)=\int_{0}^{1}F_{Y|X=x}(x)f_X(x)\,dx=$$

$$=\int_{0}^{1}\frac{5x^2}{8x+4}(2x^2+x)\cdot\frac{6}{7}\,dx=\frac{30}{7}\int_{0}^{1}\frac{x^3}{4}\,dx=\frac{30}{7}\cdot\frac{x^4}{16}\Bigg|_{0}^{1}=\frac{15}{56}$$

ב. הראו כי אם $X \sim Exp(\lambda)$, אזי $\lceil X \rceil$ מתפלג גאומטרית.

יהי $X \sim Exp(\lambda)$. לכל n מתקיים $P(\lceil X \rceil = n) = (1-p)^{n-1} \cdot p$ (לשהו p)

$$P(\lceil X \rceil = n) = P(X \in (a-1, a]) = \int_{a-1}^{a} \lambda e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda t} \Big|_{a-1}^{a} =$$

$$= -e^{-\lambda a} + e^{-\lambda(a-1)} = e^{-\lambda a} \cdot e^{\lambda} - e^{-\lambda a} = e^{-\lambda a}(e^{\lambda} - 1) =$$

$$= (e^{-\lambda})^{a-1}(1 - e^{-\lambda})$$

נגדיר $p := 1 - e^{-\lambda}$ ונקבל $P(\lceil X \rceil = n) = (1-p)^{a-1} p$

$\blacksquare$

ג. הראו כי התפלגות גאומטרית הינה חסרת זיכרון

יהי $X \sim Geom(p)$ ויהיו $n, m \in \mathbb{N}$.

$$P(X = m+n \mid X > n) = \frac{P(X = m+n, X > n)}{P(X > n)} = \frac{P(X = m+n)}{P(X > n)} =$$

$$= \frac{(1-p)^{m+n-1} \cdot p}{(1-p)^{n}} = (1-p)^{m-1} p = P(X = m)$$

וסיימנו לפי ההגדרה.

$\blacksquare$

תרגיל 6.2. * סעיד הינו סטודנט טוב לבב, שמתקשה בקבלת החלטות. בכל בוקר הוא מטיל מטבע, על מנת להחליט לאן ללכת. אם יוצא פלי - הוא נוסע לקניון. אם יוצא עץ - הוא הולך להתנדב בשיקום בבית לוינשטיין. המטבע של סעיד אינו הוגן, אלא כזה שההסתברות לפלי היא Q. אנחנו לא בדיוק יודעים מהו Q, אבל אנחנו כן יודעים שניתן למדל אותו היטב על ידי פונקצית הצפיפות:

$$.f_Q(q) = \begin{cases} 2q, & 0 < q < 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

הניחו כי בהנתן Q כל הטלה היא ב"ת. שימו לב כי ניתן לענות על סעיפים 1,2,3 ו-{4,5} באופן ב"ת.

א. מה ההסתברות לכך שסעיד הולך להתנדב בבית לוינשטיין, אחרי שנטיל את המטבע פעם אחת?

א. A: סעיד מתנדב

$$P(A^c) = \int_0^1 P(A^c|Q=q)\cdot f_Q(q)\,dq = \int_0^1 2q^2\,dq = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

ולכן

$$P(A) = 1 - P(A^c) = \frac{1}{3}$$

ב. כדי לעודד התנהגות נאותה, אביו של סעיד נותן לו 4$ על כל יום שהוא מתנדב. מה שלא משפיע על סעיד במיוחד, כי הוא ממשיך להטיל מטבע כדי להחליט לאן עליו ללכת. יהי X מ"מ המכמת את התשלום שמגיע לסעיד אחרי 30 ימים של הטלות. מהי השונות של X?

יהי $Y \sim Bin(30, \frac{1}{3})$ מ"מ בינומי המייצג כמות פעמים שהתנדב.

$$Var(Y) = 30 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$$

ויפוס הרי $X = 4Y$ לכן נקבל

$$Var(X) = Var(4Y) = 4^2 Var(Y) = \frac{320}{3}$$

ג. נסמן ב-B משתנה מקרי אינדיקטור לכך שסעיד מתנדב לפחות פעם אחת ב-k ימים.
מצאו את פונקציית צפיפות של Q בהינתן B, כלומר את $f_{Q|B=b}(q)$.

נשתמש בנוסחת ב"ס בנפרד עבור $B=0$ ועבור $B=1$

$$f_{Q|B=1}(q)=\frac{P(B=1|Q=q)\,f_Q(q)}{P(B=1)}=\frac{(1-q^k)\cdot 2q}{\int_0^1(1-t^k)\cdot 2t\,dt}$$

נחשב אינט'

$$\int_0^1(1-t^k)\cdot 2t\,dt=2\int_0^1(t-t^{k+1})\,dt=2\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t^{k+2}}{k+2}\right)\Bigg|_0^1=1-\frac{2}{k+2}=\frac{k}{k+2}$$

ס"כ ונקבל

$$f_{Q|B=1}(q)=\frac{2q(1-q^k)(k+2)}{k}$$

נחשב עכשיו עבור $B=0$.

$$f_{Q|B=0}(q)=\frac{P(B=0|Q=q)\cdot f_Q(q)}{P(B=1)}=\frac{q^k\cdot 2q}{\int_0^1 t^k\cdot 2t\,dt}$$

נחשב אינט':

$$\int_0^1 t^k\cdot 2t\,dt=2\cdot\frac{t^{k+2}}{k+2}\Bigg|_0^1=\frac{2}{k+2}$$

$$f_{Q|B=0}(q)=q^{k+1}(k+2)$$

סה"כ:

$$f_{Q|B=b}(q|b)=\begin{cases}\frac{2}{k+2}, & 0<q<1 \wedge b=0\\ \frac{2q(1-q^k)(k+2)}{k} & 0<q<1 \wedge b=1\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$$

ד. אחותו של סעיד, מסעודה, מתקשרת אליו בזמן שהוא עורך קניות בקניון. הם קובעים להפגש בחוץ בשעה 1:30 בדיוק. לצערנו, מסעודה מאחרת לפגישה ב-Z דקות, כאשר $Z \sim U(0,10)$ בדקות. סעיד מתעצבן מאוד ודורש שמסעודה תשלם לו על כל דקה שחיכה לה בחוץ בשמש R דולר, כאשר $R = exp(Z+2)$. מצאו את התשלום שסעיד צפוי לקבל, $\mathbb{E}[R]$.

נגדיר $R := e^{Z+2}$ ונחשב $E(R)$ תוחלת.

$$E(R) = E(e^{Z+2}) = \int_0^{10} e^{t+2} \cdot f_z(t)\,dt = \int_0^{10} e^t \frac{e^2}{10} dt = \frac{e^2}{10}\int_0^{10} e^t dt =$$

$$= \frac{e^2}{10} \cdot e^t \Big|_0^{10} = \frac{e^{12} - e^2}{10}$$

ה. מצאו את פונקציית הצפיפות של התשלום שסעיד מקבל ממסעודה, $f_R(R)$.

בעבור $e^2 < a < e^{12}$:

$$F_R(a) = P(R \le a) = P(e^{Z+2} \le a) = P(Z+2 \le \ln a) = P(Z \le \ln a - 2) =$$

$$= F_Z(\ln a - 2)$$

אבל Z מתפלג אחיד לכן F_Z ידוע ומכיון $\ln a - 2$ בתחום
בין 0 ל 10

$$F_R(a) = F_Z(\ln a - 2) = \frac{\ln a - 2}{10}$$

אם a לא בתחום הנ"ל אז הביטוי יוצא חסר משמעות לכן סה"כ
נגזור ונקבל

$$f_R(a) = \begin{cases} \frac{1}{10a}, & e^2 < a < e^{12} \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

תרגיל 6.3. ידוע כי זמן החיים של מחשב נייד מדגם מסוים מתפלג $Exp(\lambda)$. יש ברשותי שני מחשבים ניידים כאלה שהתחלתי להשתמש בהם באותו הזמן ובמקביל (נניח וטוחנת את ה-GPU של NVDIA).

נסמן ב- M_1 את הזמן עד שהמחשב הראשון שובק חיים וב- M_2 את הזמן שהמחשב השני שובק חיים. נסמן ב- T_1 את הזמן עד הקלקול של המחשב הראשון להתקלקל, כלומר $T_1 = min(M_1, M_2)$.

א. חשבו $f_{T_1}(t)$. פתרון חלקי:

$$F_{T_1}(t) = P(\min(M_1, M_2) < t) = 1 - P(\min(M_1, M_2) \geq t) = 1 - P(M_1 \geq t)P(M_2 \geq t) =$$

$$= 1 - (1 - F_M(t))^2 = 1 - e^{-2\lambda t}, \quad t \geq 0$$

כדי לסיים את הפתרון פשוט צריך לגזור.

$$f_{T_1}(t) = 2\lambda e^{-2\lambda t}$$

ב. נגדיר $X = T_2 - T_1$. חשבו $f_{X|T_1}(x|t_1)$ פתרון: בהינתן זמן הכשלון הראשון של המחשב, הזמן עד לכשל של המחשב השני הוא משתנה אקראי אקספוננציאלי על פי תכונת חוסר הזיכרון. תכונת חוסר הזיכרון אומרת לנו כי ללא תלות בזמן שחלף מאז תחילת חיי המחשב, הזמן עד הכשל מתפלג לפי אותה פונקציית התפלגות מצטברת אקספוננציאלית. בהתאם לכך,

$$f_{X|T_1}(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

לכל $a \geq 0$ מתקיים

$$1 - F_{X|T_1}(a|t_1) = P(X > a \mid T_2 > T_1 = t_1) = P(T_2 - t_1 > a \mid T_2 > t_1) =$$

$$= P(T_2 > a + t_1 \mid T_2 > t_1) = P(T_2 > a) = 1 - F_{T_2}(a)$$

הפונ' שוות לכן גם נגזרותיהן

$$f_{X|T_1}(a|t_1) = f_{T_2}(a) = \lambda e^{-\lambda a}$$

ג. האם המשתנים T_1, X הינם ב"ת? תנו נימוק מתמטי.

נחשב את $f_X(a)$ ונבדוק:

$$f_X(a)=\int_0^\infty f_{X|T_1=t}(a)\cdot f_{T_1}(t)\,dt=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda a}\cdot \lambda e^{-\lambda t}\,dt=$$

$$=\lambda e^{-\lambda a}\cdot 1=f_{X|T_1}(a)$$

לפי נירמול

לכן ב"ת.

ד. חשבו $f_{T_2}(t)$ ואת התוחלת $\mathbb{E}[T_2]$. פתרון חלקי:

$$F_{T_2}(t) = P(\max(M_1, M_2) < t) = P(M_1 \le t)P(M_2 \le t) = F_M(t)^2 = 1-2e^{-\lambda t}+e^{-2\lambda t}, \quad t \ge 0$$

פתרון חלקי נוסף: לחליפין, ניתן לחשב על ידי שימוש בסעיפים הקודמים

$$f_{T_2}(t) = \int_0^\infty f_{T_1}(\tau) f_X(t-\tau) d\tau =$$

נחשב לפי גזירה של פונ' ההתפלגות:

כלומר נמשיך את הפתרון החלקי הראשון שמופיע.

משווה גורמים.

$$f_{T_2}(t) = \begin{cases} 2\lambda e^{-\lambda t} - 2\lambda e^{-2\lambda t}, & t \ge 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

כדרוש.

נחשב תוחלת.

$$E(T_2) = 2\lambda \int_0^\infty t(e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}) dt = 2\int_0^\infty t \cdot \lambda e^{-\lambda t} dt - \int_0^\infty t \cdot 2\lambda e^{-2\lambda t} dt$$

$$= \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = \frac{3}{2\lambda}$$

כדרוש.

ה. עכשיו נניח והעמדתי את הניסוי עם 100 מחשבים ניידים. נסמן ב-Y את הזמן עד שאחד מהם מתקלקל. מצאו את התשובה שמתארת באופן טוב ביותר את $P(Y > 0.01)$.

נסמן את המחשבים ב $C_1, \dots, C_{100}$

$$P(Y>0.01)=P(\min\{C_1,\dots,C_{100}\}>0.01)=$$

$$=\prod_{i=1}^{n}P(M_i>0.01)=\prod_{i=1}^{n}e^{-0.01\lambda}=e^{-\lambda}$$

[redacted]

תרגיל 6.4. יהיו X,Y מ"מ המתפלגים עם פונקציית צפיפות משותפת $f_{X,Y}(x,y) = x+y$ על ריבוע היחידה $[0,1]\times[0,1]$.

א. חשבו את פונקציית ההצטברות $F_{X,Y}$ ובפרט את $F_{X,Y}(1,1)$.

נחשב לפי ההגדרה.

$$F_{X,Y}(a,b) = \int_0^a\int_0^b f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx$$

עבור a,b בתחום:

$$F_{X,Y}(a,b) = \int_0^a\int_0^b (x+y)\,dy\,dx = \int_0^a \left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^b dx =$$

$$= \int_0^a \left(\frac{2xb+b^2}{2}\right)dx = \left(\frac{x^2b+b^2x}{2}\right)\Big|_0^a = \frac{ab(a+b)}{2}$$

ב. חשבו את ההתפלגויות השוליות (צפיפויות) של X, Y.

ישירות מההגדרה,

$$f_X(x) = \int_0^1 f_{X,Y}(x,t)\,dt = \int_0^1 (x+t)\,dt =$$

$$= \left(xt + \frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^1 = x + \frac{1}{2}$$

$$f_Y(y) = y + \frac{1}{2}$$

כי y זה זהה לחלוטין

ג. האם X,Y הינם ב"ת?

נשים לב כי:

$$f_{X,Y}\left(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}\neq\frac{25}{36}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\;f_X\left(\tfrac{1}{3}\right)\cdot f_Y\left(\tfrac{1}{3}\right)$$

לכן הם תלויים.

ד. חשבו $Cov(X,Y)$,$\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y], \mathbb{E}[X^2+Y^2]$.

נחשב ושימות מההגדרה:

$$E(X)=E(Y)=\int_0^1 t\left(t+\tfrac{1}{2}\right)dt=\int_0^1\left(t^2+\tfrac{t}{2}\right)dt=$$

$$=\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{4}\right)\Big|_0^1=\frac{7}{12}$$

כעת נחשב תוחלת הריבוע בנפרד

$$E(X^2)=E(Y^2)=\int_0^1 t^2\left(t+\tfrac{1}{2}\right)dt=\left(\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{6}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$$

לכן לפי ליניאריות התוחלת:

$$E(X^2+Y^2)=\frac{5}{12}\cdot 2=\frac{5}{6}$$

נחשב תוחלת XY

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^1 xy(x+y)\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^1(x^2y+xy^2)\,dy\,dx=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{x^2y^2}{2}+\frac{xy^3}{3}\right)\Big|_0^1 dx=\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}\right)dx=\left(\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{6}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

וסה"כ

$$cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{3}-\left(\frac{7}{12}\right)^2=-\frac{1}{144}$$